

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DAS CARACTERÍSTICAS NÃO LINEARES DO ATRITO EM UM CILINDRO PNEUMÁTICO PARA UMA BANCADA DE ENSAIOS DE ESTRUTURAS

Sandra Edinara Baratto Viecelli, Sandra_edinara@hotmail.com¹

Claudio da Silva dos Santos, prof.claudiosant@hotmail.com¹

Antonio Carlos Valdiero, valdiero@unijui.edu.br¹

Luiz Antonio Rasia, rasia@unijui.edu.br¹

Djonatan Ritter, dj0_ritter@hotmail.com¹

Liara Balbé Helgueira, liara_linkpark@hotmail.com¹

UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. DCEEng/UNIJUÍ, Campus Panambi, Caixa Postal 121, CEP 98280-000, Panambi – RS, Brasil.

Resumo: O presente trabalho trata do estudo da modelagem matemática das características não lineares do atrito de um cilindro pneumático de dupla ação e haste simples para uma bancada de ensaios de estruturas. Os atuadores pneumáticos são de baixo custo, de manutenção fácil, boa relação potência por peso, e principalmente uma tecnologia limpa que não polui o meio ambiente quando comparados com atuadores elétricos e hidráulicos. Porém, possuem diversas características não linearidades que dificultam o controle e requerem uma adequada modelagem para fins de previsão de seu comportamento dinâmico e da utilização de estratégias de controle. A metodologia utilizada para o desenvolvimento da modelagem matemática compõe-se das etapas de revisão bibliográfica em literatura científica recente, da sistematização das equações não linearidades do modelo e da identificação das características do atrito. O principal objetivo deste trabalho é a identificação das características não lineares do atrito através da análise do Mapa Estático do Atrito, bem como, contribuir para a melhoria do desempenho de sistemas mecatrônicos acionados pneumaticamente. Os experimentos para composição do mapa estático são realizados em malha aberta, variando o sinal de controle de abertura da válvula através do ajuste de curva. Os resultados ilustram as características não lineares do atrito. A bancada para ensaio de estruturas mecânicas está sendo desenvolvida com apoio do MCTI/CNPq/SPM-PR/Petrobras (edital no. 18/2013) e da CAPES/FAPERGS (edital no. 15/2013).

Palavras-chave: Atuador Pneumático, Características do Atrito, Modelagem Matemática.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata da modelagem matemática, da simulação experimental e da identificação das características do atrito de um cilindro pneumático de dupla ação e haste simples utilizado no sistema mecatrônico para acionamento de uma bancada de ensaios de estruturas utilizada nos projetos de pesquisa “Concurso de Pórticos” (Processo: 409998/2013-3, Edital N° 18/2013 MCTI/CNPq/SPM-PR/Petrobras - Meninas e Jovens Fazendo Ciências Exatas, Engenharias e Computação) e “Desenvolvimento de Estruturas Mecânicas Criativas” (Processo: 0331-2551/14-7, Edital CAPES/FAPERGS 15/2013: Programa de Iniciação em Ciências, Matemática, Engenharias, Tecnologias Criativas e Letras – PICMEL).

A pneumática é o ramo da engenharia que estuda a aplicação de ar comprimido para converter a energia disponível no fluido em escoamento em energia mecânica (Qiong *et al.*, 2011). Desde o século passado a pneumática é aplicada na automação industrial tornando-se uma das principais tecnologias e sua aplicação se encontra em diversos setores. Estas aplicações são comuns nas indústrias de processo, na manipulação e movimentação de material, robótica, máquinas de indústrias alimentícias, linhas de montagem, e sistemas automáticos utilizados em diferentes tarefas (Perondi, 2002). Além disso, o ar comprimido é disponível na maioria das instalações industriais.

A pneumática tornou-se uma das técnicas mais utilizadas nas indústrias e também na robótica pelas diversas vantagens existentes, podendo ser citados: Custo benefício, melhoria considerável em um sistema com um pequeno custo de implementação e de manutenção. Rapidez de resposta, tanto no movimento de um sistema pneumático, como no aumento do ritmo de trabalho. Fácil manutenção, troca rápida do sistema caso apresente defeito (Morgado, 2011).

Porém, para atuadores pneumáticos a modelagem matemática é complexa quando comparada a outros tipos de acionamentos, pois apresentam limitações severas no controle decorrente das características altamente não lineares inerentes ao sistema. Dentre essas não linearidades, pode-se destacar a compressibilidade do ar (Susuki *et al.*, 2010), a vazão mássica nos orifícios da válvula e a zona morta (Valdiero *et al.*, 2011), além do atrito entre as partes móveis e as vedações do atuador que também exibe características não lineares, tornando difícil o controle do sistema (Bavaresco, 2007).

O atrito é um aspecto importante de muitos sistemas de controle, tanto para os mecanismos pneumáticos quanto para sistemas hidráulicos. O atrito é o efeito ocasionado pelo contato entre duas superfícies que apresentam movimento relativo, comprometendo o controle dos sistemas pneumáticos, pois apresenta características não lineares e de difícil modelagem (Sobczyk, 2009). Em atuadores pneumáticos, a principal fonte de atrito provém do contato nas vedações do cilindro com componentes móveis.

Valdiero (2012) destaca que o atrito é um fenômeno não linear que exibe características não lineares. As características de atrito são em geral dependentes da velocidade, da temperatura, do sentido do movimento, da lubrificação e do desgaste entre as superfícies. As características dinâmicas do atrito são responsáveis por degradações no desempenho do sistema e necessitam serem observadas para uma adequada compensação e consequentemente diminuição de seus efeitos.

Atualmente diversos autores, Pradipta *et al.* (2013), Laghrouche *et al.* (2013) apresentam estudos relacionados aos efeitos de degradação do desempenho do movimento causados pelas características não lineares do atrito o qual precisam ser conhecidas e compensadas para bom desempenho do sistema dinâmico. Shen *et al.* (2013) destaca que a compensação e a modelagem do atrito dinâmico têm feito grandes avanços, motivada por modelos em combinação com métodos de identificação baseados em dados experimentais para a compensação de atrito.

Este trabalho inicia com uma breve descrição da bancada de ensaios de estruturas e do atuador pneumático na seção 2. A seção 3 apresenta a modelagem matemática e o estudo de suas características não lineares. A seção 4 apresenta os resultados obtidos na modelagem matemática e nas simulações computacionais e experimentais. Por fim, apresentam-se as conclusões.

2. DESCRIÇÃO BANCADA DE ENSAIOS DE ESTRUTURAS COM ATUADOR PNEUMÁTICO

A bancada para ensaios de estruturas tem fins didáticos e de pesquisa e foi desenvolvida para testes de estrutura tipo pórtico. Nesta bancada monta-se a estrutura do tipo pórtico, para ensaio de aplicação de uma carga central com a medição do espaço útil disponível, da massa da estrutura, da máxima força de carga que a estrutura resiste e da deflexão central da estrutura. O atuador pneumático, descrito neste trabalho é responsável pela aplicação de carga nesta bancada de ensaios. O atuador pneumático em estudo é responsável pelo acionamento da bancada de ensaios de estruturas, conforme mostrado na Fig. 1.

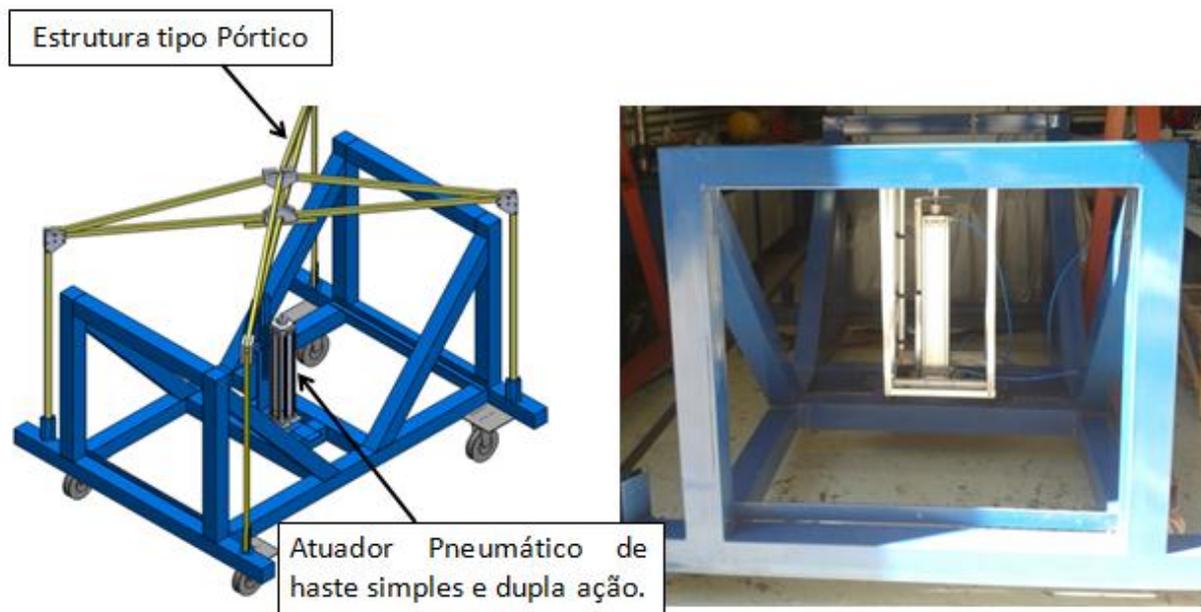


Figura 1: Vista isométrica (a) desenho, (b) fotografia do protótipo da bancada de ensaios de estruturas.

O servoposicionador pneumático linear utilizado para o acionamento da bancada de testes é um sistema dinâmico composto por uma servoválvula de controle direcional e um cilindro pneumático linear de dupla ação e haste simples, bem como o sistema de controle, conforme ilustrado na Fig. 2.

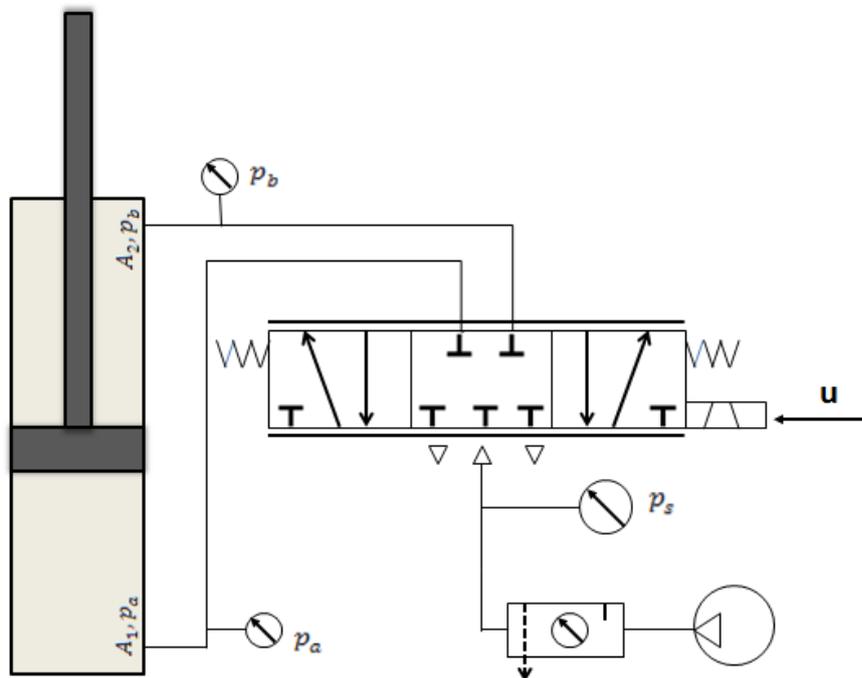


Figura 2: Desenho esquemático do circuito do Atuador Pneumático.

O atuador pneumático funciona com o ar comprimido que é fornecido à servoválvula a uma dada pressão de suprimento (p_s) antecipadamente regulada. Durante a operação, o controlador gera uma tensão de controle u , que energiza as bobinas do solenoide da válvula de modo que uma força gerada magneticamente resultante é aplicada no carretel da servoválvula, produzindo o deslocamento x_v do carretel. Este, ao ser deslocado, abre os orifícios de controle para que uma das câmaras do cilindro seja ligada à linha de pressão de suprimento e a outra seja ligada à pressão atmosférica (p_{atm}). Dessa forma, produz uma diferença de pressão nas câmaras do cilindro, que resulta em uma força pneumática que movimenta o êmbolo do cilindro e gera um deslocamento y , positivo ou negativo, dependendo do sinal de entrada.

Na Tabela 1 estão descritas as especificações técnicas dos principais componentes utilizados na bancada experimental, bem como seus fabricantes.

Tabela 1: Principais componentes da bancada experimental

Descrição do Componente	Fabricante	Código	Especificações
Servoválvula de Controle Direcional	Festo	MPYE-5-1/8-HF-010B	5 vias e 3 posições Vazão = 700l/min
Cilindro Pneumático	Festo	DCN-100-500-PPV	Curso = 0,5 m
Unidade de Conservação	Festo	LFR-D 5M-MIDI C143	0,5...7 bar Vazão máxima de 160 l/min

3. MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATUADOR PNEUMÁTICO

O movimento da haste de um cilindro é gerado através das forças aplicadas sobre o êmbolo do cilindro. De maneira geral quando se trabalha com sistemas que envolvam movimento é necessário tratar com muito cuidado os resultados procedentes do atrito, este pode causar dificuldades no controle, pois pode degradar seu desempenho.

As forças exercidas no êmbolo do cilindro são a força de atrito F_{atr} , que ocorre principalmente nas superfícies de contato entre a haste e as vedações, F_L que representa a força de carga e F_p que é a força pneumática. A partir da aplicação da 2ª Lei de Newton, tem-se a determinação da equação de equilíbrio dinâmico das forças, dada por:

$$M \ddot{y} + F_{atr} = F_p - F_L \quad (1)$$

onde M é a massa deslocada composta pelo êmbolo e pela haste do cilindro e \ddot{y} é a aceleração da haste do cilindro pneumático, e F_{atr} é a força de atrito, F_p é a força pneumática, dada pela diferença de pressão nas câmaras do cilindro, logo:

$$F_p = A_1 \cdot p_a - A_2 \cdot p_b \quad (2)$$

Assim, pode-se reescrever a Eq. (1) da seguinte forma:

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} [(A_1 \cdot p_a - A_2 \cdot p_b) - F_L - F_{atr}] \quad (3)$$

Dentre esses efeitos pode-se mencionar as principais características dinâmicas do atrito estático, o atrito de Coulomb, o atrito viscoso ou o atrito de arraste, o atrito de *Stribeck*, a memória de atrito e o deslocamento de predeslizamento, que muitas vezes resultam em efeitos danosos ao controle, como os efeitos conhecidos na literatura por adere-desliza (*stick-slip*), oscilações em torno da posição desejada (*hunting*), perda de movimento (*standstill*) e erros nas inversões de movimento em dois eixos ortogonais (*quadrature glitch*). A combinação das características do atrito resulta em uma função não linear conforme ilustrado pela fig. 3, que representa a força de atrito versus a velocidade em regime permanente.

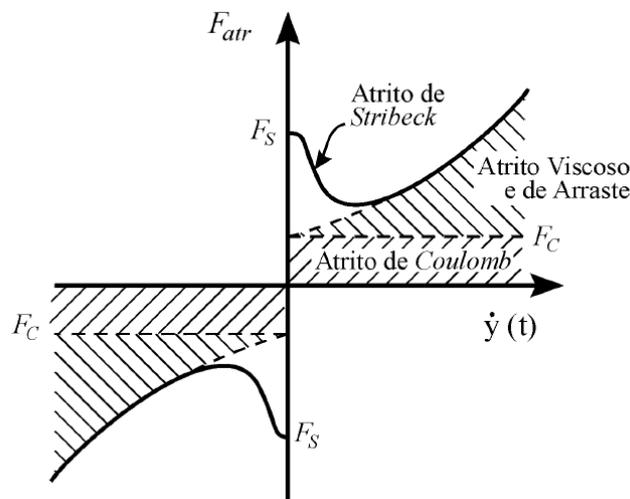


Figura 3: Gráfico da combinação das características do atrito em regime permanente

Devido ao fato do atrito ser uma não linearidade presente nos sistemas mecânicos e por causar dificuldades de controle, surgiram diversos modelos para atender esta demanda, cada um procurando descrever o atrito de uma maneira mais completa. Mesmo sendo o atrito um fenômeno bastante estudado por pesquisadores nos últimos anos não se tem um modelo dinâmico aceito universalmente, no entanto a escolha de um modelo mais adequado que inclua todas essas características se dá ao conhecido modelo LuGre, proposto por Canudas de Wit *et al.* (1995).

Este modelo está fundamentado no entendimento do mecanismo microscópico do fenômeno do atrito. Neste nível, as superfícies são muito irregulares e seu contato se dá através de rugosidades o que dificulta o deslizamento entre elas. Esta microdeformação causa uma força de atrito descrita por:

$$F_{atr} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 (\dot{y}(t))^2 \text{sgn}(\dot{y}(t)) \quad (4)$$

onde o parâmetro σ_0 representa o coeficiente de rigidez das deformações microscópicas entre as superfícies de contato, z é um estado interno não mensurável que representa a microdeformação média que entre as superfícies e σ_1 é o coeficiente de amortecimento associado à taxa de variação z , σ_2 é o coeficiente de arraste, \dot{y} é a velocidade relativa entre as superfícies e a função sinal $\text{sgn}(\dot{y}(t))$ que tem a finalidade de manter a característica do elemento. Sendo que a força de atrito é composta por três parcelas, a primeira proporcional às médias das deformações ($\sigma_0 z$), a segunda proporcional à taxa de variação das deformações ($\sigma_1 \dot{z}$) a terceira delas refere-se ao atrito de arraste o qual é causado pela resistência ao movimento de um corpo através de um fluido, sendo proporcional ao quadrado da velocidade.

A dinâmica das microdeformações denotada pela variável não mensurável z é modelada através da seguinte equação:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{y} - \alpha(z, \dot{y}) \frac{\sigma_0}{g_{ss}(\dot{y})} |\dot{y}| z \quad (5)$$

onde $g_{ss}(\dot{y})$ representa uma função positiva que descreve parte das características do atrito em regime permanente e $\alpha(z, \dot{y})$ é empregada para obter a representação do atrito estático em velocidades baixíssimas, descrita por:

$$g_{ss}(\dot{y}) = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{\dot{y}}{\dot{y}_s}\right)^2} \quad (6)$$

em que F_c é a força de atrito de Coulomb, F_s é a Força de atrito estático, \dot{y} é a velocidade e \dot{y}_s é a velocidade de Stribeck.

Dessa forma, a força de atrito em regime permanente para movimentos com velocidades constantes é representada pela seguinte equação:

$$F_{atr,ss} = sgn(\dot{y}) \left(F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{\dot{y}}{\dot{y}_s}\right)^2} \right) + \sigma_2 (\dot{y}(t))^2 sgn(\dot{y}(t)) \quad (7)$$

Esta equação será de fundamental importância para a identificação dos parâmetros estáticos de atrito ($F_c, F_s, \sigma_2, \dot{y}$). Na secção seguinte apresenta-se a determinação dos parâmetros do modelo matemático e os resultados obtidos.

4. RESULTADOS

Nesta seção apresentam-se os resultados da modelagem matemática da dinâmica do atuador pneumático, destacando-se a identificação experimental das características do atrito.

Para os testes experimentais, utilizou-se uma bancada composta por um microcomputador interligado a uma placa dSPACE 1104 responsável pela captura e armazenagem dos dados, a qual utiliza a integração dos softwares Matlab/Simulink e ControlDesk, uma servoválvula proporcional e um atuador pneumático de dupla ação e haste simples, acoplado a um sensor de posição.

A Tabela 2 apresenta os parâmetros do atuador pneumático os quais foram obtidos através de medições e nos catálogos do fabricante.

Tabela 2: Parâmetros do Atuador Pneumático

Parâmetros	Valor	Unidade
γ	1.4	Adimensional
A_1	$7,9 \times 10^{-3}$	m^2
A_2	$7,4 \times 10^{-3}$	m^2
M	6,03	Kg
P_s	6×10^5	Pa
atm	1×10^5	Pa
V_{A0}	$6,45 \times 10^{-3}$	m^3
V_{B0}	$5,98 \times 10^{-3}$	m^3
L	0,5	M

A identificação das características do atrito baseia-se na análise do Mapa Estático do Atrito, que é obtido através de diversos experimentos variando a velocidade do êmbolo. Os experimentos para composição do mapa foram realizados em malha aberta, variando o sinal de controle de abertura da válvula de velocidades baixas até a máxima velocidade de trabalho do sistema. Para cada experimento realizado foi capturado uma faixa de tempo onde a velocidade é constante, pois para velocidades constantes a aceleração é nula e a força de atrito iguala-se a força produzida pelas diferença das pressões nas câmaras do cilindro. A Fig. 4 representa o mapa estático do atrito em que cada ponto corresponde a um experimento realizado.

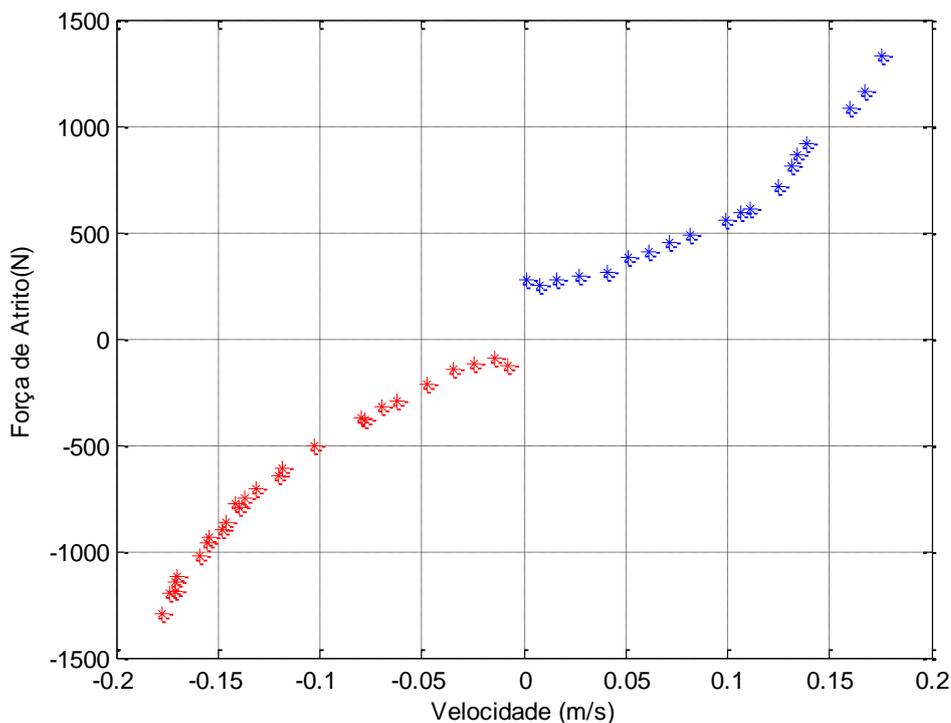


Figura 4: Mapa Estático do Atrito obtido experimentalmente.

Desta forma, aplicando a Eq. (7) da força de atrito em regime permanente é possível ajustar a uma curva experimental onde os parâmetros do atrito podem ser facilmente identificados. Os ajustes resultantes do mapa estático são apresentados na Fig. 5.

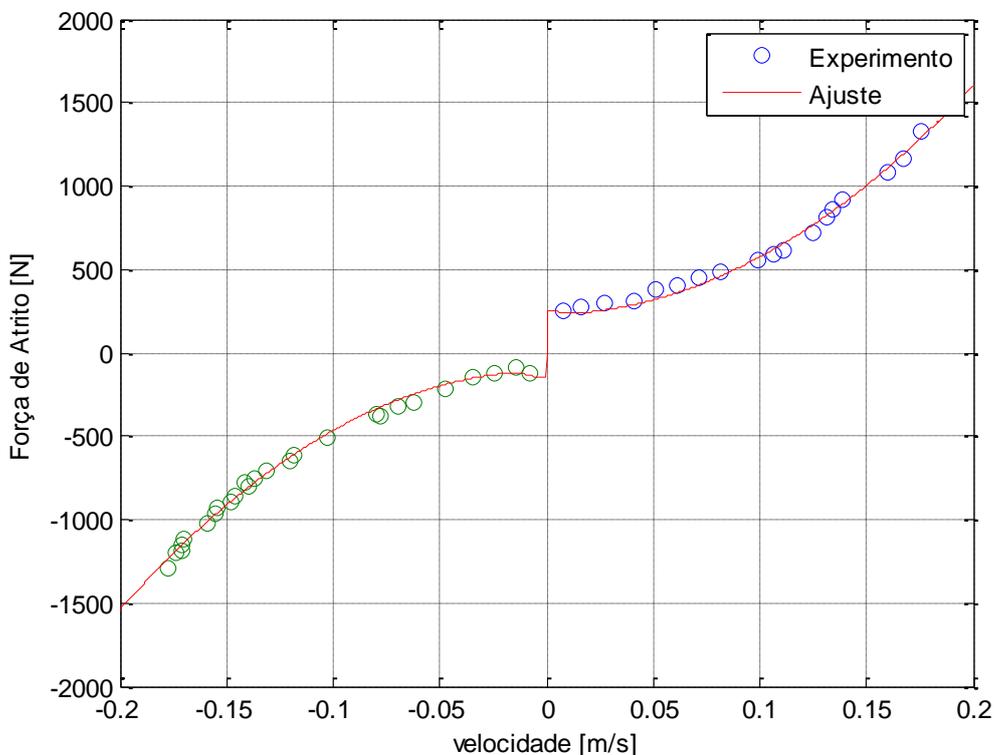


Figura 5: Mapa do Atrito estático com ajuste dos parâmetros.

Ajustando-se o modelo matemático não linear da força de atrito em regime permanente aos pontos experimentais com o auxílio da função *nlinfit* do *software* Matlab, obtêm-se os valores dos parâmetros do atrito dinâmico mostrados na Tab. 3.

Tabela 3: Parâmetros estáticos e dinâmicos do atrito no cilindro pneumático

Parâmetros	$\dot{y} > 0$	$\dot{y} < 0$
Força de Atrito Coulomb (N)	$F_c = 230$	$F_c = 110$
Força de Atrito Estático (N)	$F_s = 250$	$F_s = 150$
Coefficiente de rigidez das deformações microscópicas ($N.s$)	$\sigma_0 = 4,6 \times 10^6$	$\sigma_0 = 2,2 \times 10^6$
Coefficiente de amortecimento ($N.s/m$)	$\sigma_1 = 3,9 \times 10^5$	$\sigma_1 = 9,4 \times 10^4$
Coefficiente de arraste ($N.s^2/m^2$)	$\sigma_2 = 34202$	$\sigma_2 = 34202$
Velocidade de Stribeck (m/s)	$\dot{y}_s = 0,01$	$\dot{y}_s = 0,01$

5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou as etapas da modelagem matemática e da identificação experimental dos parâmetros do atrito dinâmico não linear de um atuador pneumático de dupla ação e haste simples, utilizado no sistema mecatrônico de uma bancada para ensaio de estruturas do tipo pórtico. O modelo matemático formulado considera as características não lineares do atrito dinâmico e tem parâmetros identificados a partir de testes experimentais com o atuador pneumático. Foi possível analisar algumas características não lineares do atrito através do ajuste de curva obtido baseado no modelo matemático não linear da força de atrito em regime permanente, ajustando os valores dos parâmetros com os dados experimentais. Buscou-se contribuir para melhoria do conhecimento e consequentemente para a precisão e o bom desempenho de sistemas mecatrônicos com acionamento por atuador pneumático.

6. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil, por meio de bolsas (de Produtividade DT-2, de Mestrado, de Iniciação Científica, de Iniciação Tecnológica e Industrial, de Apoio Técnico em Extensão) e de auxílio financeiro no projeto “Concurso de Pórticos” (Processo: 409998/2013-3, Edital N° 18/2013 MCTI/CNPq/SPM-PR/Petrobras - Meninas e Jovens Fazendo Ciências Exatas, Engenharias e Computação). Os autores também são agradecidos à Fundação de Amparo a Pesquisa do Rio Grande do Sul (FAPERGS) pelas bolsas e o auxílio financeiro no projeto “Desenvolvimento de Estruturas Mecânicas Criativas” (Processo: 0331-2551/14-7, Edital CAPES/FAPERGS 15/2013: Programa de Iniciação em Ciências, Matemática, Engenharias, Tecnologias Criativas e Letras – PICMEL), e à UNIJUÍ pela infraestrutura do Núcleo de Inovação em Máquinas Automáticas e Servo Sistemas (NIMASS) instalado no Câmpus Panambi.

7. REFERÊNCIAS

- Bavaresco, D., 2007, “Modelagem matemática e controle de um atuador pneumático”. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 107f.
- Laghrouche, S; Ahmed S. F; Mehmood, A, 2013, “Pressure and Friction Observer-Based Backstepping Control for a VGT Pneumatic Actuator”, IEEE Transactions on Control Systems, pp. 1 – 11.
- Morgado, F. D. J., 2011, “Modelagem e Controle de Músculo Pneumático”, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 80f.
- Perondi, E. A., 2002, “Controle Não-Linear em Cascata de um Servoposicionador Pneumático com Compensação de Atrito”. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 182p.
- Pradipta, J; Klunder, M; Weickgenannt; M; Sawodny, O; 2013, “Development of a pneumatically driven flight simulator Stewart platform using motion and force control”, IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Wollongong, Australia, pp. 158 – 163.
- Qiong, W; and Jiao, Z., 2011, “Modeling and Analysis of Pneumatic Loading System”, IEEE International Conference on Control Applications, pp. 642 – 646.
- Shen, J. C; Lu, Q. Z; Wu, C. H; Jywe, W. Y., 2013, “Sliding-Mode Tracking Control With DNLRX Model-Based Friction Compensation for the Precision Stage”, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, pp. 1 – 10.
- Sobczyk, M. R., 2009, “Controle em Cascata e a Estrutura Variável com Adaptação de Parâmetros e Compensação de Atrito de um Servoposicionador Pneumático”, Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 222p.
- Suzucki, R. M., 2010, “Controle Baseado em Linearização por Realimentação dos Estados Aplicado a um Servoposicionador Pneumático”. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 110p.
- Valdiero A. C; Ritter C. S; Rios C. F. and Rafikov M., 2011, “Non Linear Mathematical Modeling in Pneumatic Servo Position Applications, Mathematical Problems in Engineering”, (Online), pp.1 – 16.
- Valdiero, A. C., 2012, “Modelagem Matemática de Robôs Hidráulicos”, Ijuí, Ed. Unijuí, 200p.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores Sandra Edinara Baratto Viecei, Claudio da Silva dos Santos, Antonio Carlos Valdiero, Luiz Antonio Rasia, Djonatan Ritter, Liara Balbé Helgueira são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

EXPERIMENTAL IDENTIFICATION OF NONLINEAR CHARACTERISTICS OF FRICTION IN A PNEUMATIC CYLINDER FOR A BENCH FOR STRUCTURE TESTING

Sandra Edinara Baratto Viecei, Sandra_edinara@hotmail.com¹

Claudio da Silva dos Santos, prof.claudiosant@hotmail.com¹

Antonio Carlos Valdiero, valdiero@unijui.edu.br¹

Luiz Antonio Rasia, rasia@unijui.edu.br¹

Djonatan Ritter, dj0_ritter@hotmail.com¹

Liara Balbé Helgueira, liara_linkpark@hotmail.com¹

UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. DCEEng/UNIJUÍ, Campus Panambi, Caixa Postal 121, CEP 98280-000, Panambi – RS, Brasil.

Abstract: *The present paper approaches the study of mathematical modeling of the nonlinear frictional characteristics of a double acting and single rod pneumatic cylinder for bench testing of structures. The pneumatic actuators are clean, low-cost, easy maintenance and good power ratio by weight when compared with electric and hydraulic actuators. However, they have several features whose nonlinearities make it difficult to control them. And they require appropriate modeling for the purpose of predicting their dynamic behavior and the use of control strategies. The methodology utilized to develop the mathematical model comprises the steps of literature review on recent scientific literature, and of the system's systematization of constitutive equations including the nonlinearities and identification of the friction characteristics. The main objective of this paper is the identification of the nonlinear characteristics of friction by means of the analysis of the Static Friction Map. The experiments for the static map composition are performed in open loop, varying the control signal of the valve, through the curve adjustment, and the computer simulations are performed with the aid of Matlab. The results illustrate the nonlinear characteristics of friction.*

Keywords: *Pneumatic Actuator, Friction Characteristics, Mathematical Modeling*