

# ANÁLISE DO RASTREADOR LINEAR QUADRÁTICO APLICADO AO QUADRICÓPTERO

Mayara Kissya da Silva Duarte, mayarakissya@yahoo.com.br<sup>1</sup>  
Helosman Figueiredo, helosman@gmail.com<sup>1</sup>  
Osamu Saotome, osaotome@gmail.com<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Praça Marechal Eduardo Gomes, 50, Vila das Acácias, 12228-900, São José dos Campos, São Paulo, Brasil

**Resumo:** As pesquisas em veículos aéreos não tripulados vêm se tornando cada vez mais comuns. Nos últimos anos, um tipo de aeronave, pelo qual tem havido interesse, é o quadricóptero, por se tratar de um veículo aéreo com mecânica simplificada e com características especiais de voo, como pouso e decolagem vertical, alta manobrabilidade e voo em baixas velocidades. Devido a estas características foi possível realizar a miniaturização desta aeronave, tornando-a um veículo pequeno e ágil, utilizada em missões de busca, salvamento e inspeção remota. Para operações autônomas, o sistema de controle deve seguir uma trajetória pré-determinada. Entre as diversas técnicas existentes para a resolução deste problema, propõe-se no presente trabalho a aplicação da técnica do Rastreador Linear Quadrático. Utilizando-se de técnicas de controle ótimo foi possível solucionar o problema do Rastreador Linear Quadrático e encontrar o controle ótimo em relação às considerações de minimização utilizadas. A função custo a ser minimizada, para determinar a matriz de ganho do controlador, é quadrática e possui três matrizes que foram ajustadas para se obter a resposta ótima. A técnica foi avaliada com o auxílio da ferramenta computacional Matlab, com a qual foram feitas simulações com diferentes sinais de referência. Com as simulações, foi observado que o Rastreador Linear Quadrático proporcionou uma boa minimização do erro de trajetória e do esforço de controle para o quadricóptero, mesmo a planta possuindo acoplamentos entre os estados. Os resultados da simulação efetuada mostram que é possível ajustar os pesos das matrizes da função custo, de forma a obter uma relação de erro de trajetória e esforço de controle condizentes com os requisitos de projeto especificados.

**Palavras-chave:** Quadricóptero, Rastreador Linear Quadrático, Controle Ótimo

## 1. INTRODUÇÃO

FlyCam (2011) afirma que os VANTS, Veículos Aéreos Não Tripulados, também chamados de UAVs, do inglês Unmanned Aerial Vehicles, são termos usados para descrever todo e qualquer tipo de aeronave que não necessita de pilotos embarcados para ser guiada. Estas aeronaves podem ser controladas a distância, por meios eletrônicos e computacionais, sob a supervisão humana, ou sem a sua intervenção.

Desde a década de 80, os VANTS têm sido alvo de pesquisas por Israel e Estados Unidos, países precursores do uso, inicialmente, para fins militares. Desde então, Goel (2009) afirma que várias instituições civis e militares estão pesquisando e desenvolvendo este tipo de aeronave. As pesquisas neste ramo foram impulsionadas pela simplicidade presente na estrutura mecânica deste tipo de aeronave, que é composta por hastes dispostas em cruz ou X e nas extremidades de cada haste existem um motor e uma hélice que fornecem a propulsão para voo.

O presente trabalho aborda um VANT do tipo quadricóptero. Segundo Leishman (2000), o conceito de quadricóptero surge em 1907 com Breguet e Richet. Sua aeronave-conceito era grande e pesada, o que não possibilitava fazer voos com grandes cargas úteis e de longa duração. Desde então, as pesquisas de aeronaves de asas rotativas se desenvolveram, mas o conceito de quadricóptero foi esquecido. Nos últimos anos, com o desenvolvimento de materiais de construção leves, melhoria na relação peso potência dos motores e miniaturização de sistemas de controle, o conceito de quadricóptero tornou-se viável para implementação.

### 1.1 Problema

Comumente, os VANTS são utilizados em missões de alto risco e nestas situações estes veículos devem seguir trajetórias precisas para minimizar os custos e danos da missão, como Mellinger (2013) apresenta na Fig. 1. Essas missões podem variar desde navegação por ambientes com obstáculos, como apresentado na Fig. 1a a 1h, até operações de pouso preciso com condições especiais de aproximação, como apresentado na Fig. 1i a 1l.

Em sistemas de controle, quando uma planta deve seguir uma trajetória de referência, uma técnica que pode ser

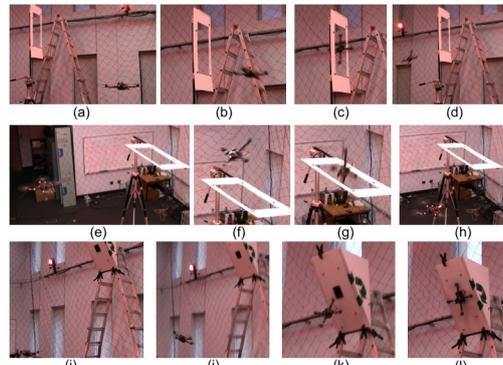


Figura 1: Exemplo de missões de risco  
Mellinger (2013)

utilizada é o Rastreador Linear Quadrático, que deriva da extrapolação do Regulador Linear Quadrático. A principal diferença do regulador para o rastreador é o objetivo: no regulador o objetivo principal é levar os estados para a origem com o menor erro possível, já no rastreador o objetivo é seguir a trajetória desejada com o menor erro admissível.

Neste artigo; será apresentado o uso da técnica Rastreador Linear Quadrático empregado em aeronaves do tipo quadricópteros, com ênfase em seguimento de trajetórias, em um espaço tridimensional.

## 1.2 Estrutura do artigo

Este artigo está organizado da seguinte forma: A seção 2 apresenta a definição do quadricóptero e descreve a sua dinâmica; a seção 3 descreve o Rastreador Linear Quadrático usando como base o Regulador Linear Quadrático; na seção 4 são apresentadas as simulações realizadas para avaliação da técnica de controle em estudo; a seção 5 traz as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

## 2. QUADRICÓPTERO

### 2.1 Definição

De acordo com Domingues (2009), o quadricóptero é uma aeronave cuja força de sustentação é fornecida por quatro rotores montados geralmente em uma configuração cruzada. Estes veículos apresentam características únicas, como: movimentar-se em qualquer direção, pairar e voar a baixas velocidades. Além disso, a capacidade de pouso e decolagem vertical permite a sua utilização em qualquer terreno. Com estas aptidões os quadricópteros podem ser usados em missões de busca, salvamento, penetração em ambientes de risco, e outras aplicações. Na Figura 2 pode ser vista a planta de um quadricóptero convencional.

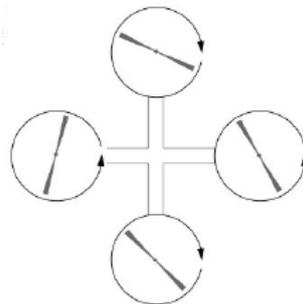


Figura 2: Quadricóptero convencional  
Lucas M. Argentim (2012)

### 2.2 Dinâmica de voo

Henriques (2011) afirma que cada rotor do quadricóptero é responsável por uma parcela da força de sustentação. Tal parcela gera uma certa quantidade de torque sobre o centro de rotação e uma força de arrasto oposta à direção de voo. As hélices do quadricóptero são configuradas de forma que um par, no mesmo eixo, gira em um sentido e os outros dois pares em sentido oposto. Desta forma, se as hélices se movimentarem com a mesma velocidade angular, o torque será nulo e permitirá que a aeronave permaneça estável.

Para a representação da dinâmica do quadricóptero, são considerados dois sistemas de coordenadas, o eixo de referência inercial e o eixo fixo no corpo. O eixo de referência inercial do sistema de coordenadas NED está centrado em  $O$  e está fixo na terra e aponta para Norte, Leste e para Baixo (North-East-Down), como pode ser visto na Fig. 3(a). O

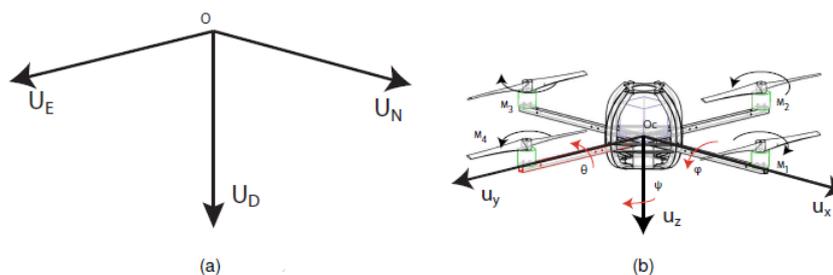


Figura 3: (a) Eixo inercial (b) Eixo fixo no corpo  
 Domingues (2009)

segundo eixo é fixo no centro  $O_c$ , que é o centro de massa do quadricóptero, sendo esse eixo denominado eixo do corpo.

Os Quadricópteros possuem quatro rotores e as hélices apresentam ângulo de ataque fixo. Analisando o quadricóptero da Fig. 3 por uma vista superior, percebe-se que os motores M1 e M3 giram no sentido horário, enquanto os motores M2 e M4 giram no sentido anti-horário. Esta inversão de sentido é importante para equilibrar o momento angular.

Para realizar as diversas manobras, as velocidades de cada rotor são ajustadas. As velocidades angulares de cada motor podem ser representadas pelo vetor  $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]^T$ . Neste tipo de aeronave, os movimentos de rotação e translação são realizados apenas controlando a velocidade dos motores. A Figura 4 apresenta as combinações de velocidade para os principais movimentos.

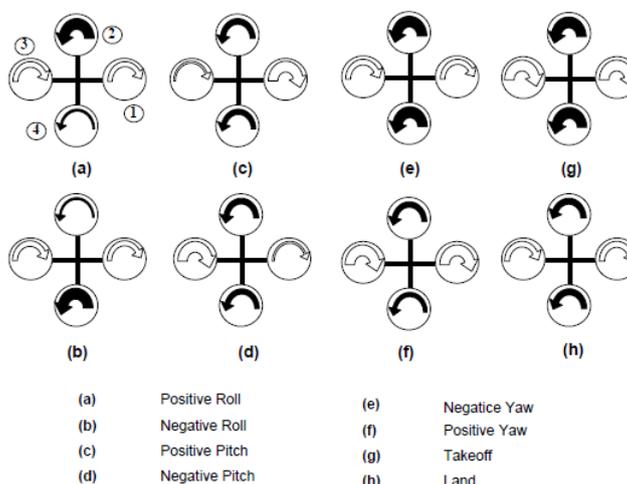


Figura 4: Ilustração dos principais movimentos de um Quadricóptero  
 Domingues (2009)

### 2.3 Modelo Dinâmico em Espaço de Estados

A posição de um quadricóptero é denominada  $\mathbf{P}$ , e corresponde ao deslocamento de  $O$  até  $O_c$ , como pode ser visto na Fig.3.

$$\mathbf{P} = [X, Y, Z]^T \tag{1}$$

A velocidade escalar no corpo do quadricóptero:

$$\mathbf{V} = [U, V, W]^T \tag{2}$$

A rotação do quadricóptero em relação ao eixo inercial define a atitude da aeronave. De acordo com o Teorema de Euler, qualquer rotação pode ser descrita usando três ângulos. Na aeronáutica, esses três ângulos são:  $\phi, \theta$  e  $\psi$  (*Roll, Pitch, Yaw*).

$$\Psi = [\phi, \theta, \psi]^T \tag{3}$$

A velocidade angular é medida no eixo vinculado ao corpo:

$$\Omega = [P, Q, R]^T \tag{4}$$

Em que  $P$  é a velocidade angular no eixo  $u_x$ ,  $Q$  é a velocidade angular no eixo  $u_y$  e  $R$  corresponde à velocidade angular no eixo  $u_z$ .

O sistema dinâmico de interesse é representado pelo modelo de espaço de estado linear invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$x(t)$  é o vetor de estados e  $u(t)$  o vetor de controle.

A dinâmica do quadricóptero utilizada no presente trabalho foi retirada da Dissertação de Mestrado de Henriques (2011), da Universidade Técnica de Lisboa.

Os quatro vetores  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{\Psi}$ , com três componentes cada um, como pode ser observado nas Eq. (1) a (4), compõem o vetor de estados  $\mathbf{X} = [V, \Omega, P, \Psi]^T$ . As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  estão apresentadas nas Eq. (6) e (7), em que  $g$ , é a aceleração da gravidade.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0307 & -0.0310 & -0.0421 & -0.0307 \\ 0 & 1.0851 & 0 & -1.0743 \\ 1.0742 & 0 & -1.4713 & 0 \\ 0.0483 & -0.0488 & 0.0661 & -0.0483 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0.0559 & 0 & 0.0765 & 0 \\ 0 & 0.0564 & 0 & -0.0559 \\ 0.0307 & 0.0310 & 0.0421 & 0.0307 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

A matriz  $\mathbf{C}$ , equação (7), é uma matriz identidade 12x12, para que seja possível observar a resposta de todos os estados. O modelo em espaço de estados foi linearizado utilizando uma condição de planeio a 1 metro do solo.

Os valores dos elementos das matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  estão relacionados aos rotores do quadricóptero. Neste trabalho foram utilizados os valores encontrados por Henriques (2011) e mencionados em sua dissertação de Mestrado.

### 3. RASTREADOR LINEAR QUADRÁTICO

Rastreador linear Quadrático, do inglês *Linear Quadratic Tracker* (LQT), é derivado do Regulador Linear Quadrático, ou *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Para um melhor entendimento, primeiro será abordado o problema de LQR. Para a análise do LQR e LQT será utilizada uma planta descrita pela equação linear no espaço de estados, como pode ser vista na Eq. 8.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (8)$$

#### 3.1 Regulador Linear Quadrático

Kirk (2004) afirma que para problemas de Regulador Linear Quadrático, a lei de controle ótimo pode ser encontrada como uma função linear variante no tempo do sistema. Sob algumas circunstâncias a lei de controle ótimo torna-se invariante no tempo.

A planta é descrita pela Eq. 8, na qual podem ter coeficientes variantes no tempo. Com,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  e  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ . A função custo a ser minimizada é:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (9)$$

O tempo final  $t_f$  é fixo, as matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{Q}$  são simétricas positivas semidefinidas e a matriz  $\mathbf{R}$  é simétrica positiva definida. Assume-se que os estados e o controle não são limitados e  $\mathbf{x}(t_f)$  é livre, sendo o objetivo manter o vetor de estados próximo à origem minimizando o esforço de controle.

As Matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , matrizes de ponderação, são matrizes diagonais e são responsáveis pela importância dada à ação de controle e ao vetor de estado. A matriz  $\mathbf{S}$  está relacionada à parcela do custo final, em que também é uma matriz diagonal.

Para resolução do problema do LQR faz-se necessária a definição da Equação do Hamiltoniano, que pode ser expresso por:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)) \quad (10)$$

Em seguida devem-se aplicar as condições de otimalidade:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_x = -\mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (11)$$

$$H_u = 0 \rightarrow \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (12)$$

Pela Eq. 12 tem-se o controle ótimo,  $\mathbf{u}^*(t)$ ,

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (13)$$

A existência de  $\mathbf{R}^{-1}$  é garantida, desde que  $\mathbf{R}$  seja positiva definida.

Da condição de contorno:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (14)$$

Em que  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  é uma função linear do sistema,  $\mathbf{P}$  é uma matriz  $n \times n$ . O controle  $\mathbf{u}^*(t)$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}^*(t) &= -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Onde:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \quad (16)$$

A Eq. 15 indica que a lei de controle ótimo é uma combinação linear, embora variante no tempo, do sistema de espaço de estados.

Segundo Kirk (2004) a matriz  $\mathbf{K}(t)$  é a matriz de ganho de malha fechada variante no tempo. Adicionalmente, as medidas de todas as variáveis de estado devem ser disponíveis para implementar a lei de controle ótimo.

Substituindo-se a Eq. 15 na Eq. 8, obtêm-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (17)$$

Das Eq. 14 e 11, tem-se:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (18)$$

Substituindo Eq. 17 na Eq. 18, obtem-se a Eq. de Riccati.

$$[\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}(t) = 0 \quad (19)$$

Logo,

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} = 0 \quad (20)$$

Com a condição de contorno:

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S} \quad (21)$$

Kirk (2004) afirma que a Eq. 20 é uma equação diferencial do tipo Riccati, deve ser chamada de *Equação de Riccati*. Esta equação pode ser integrada numericamente utilizando auxílio computacional. A integração se inicia com  $t = t_f$  e segue *backwards* (para trás) até  $t = t_o$ ,  $\mathbf{P}(t)$  é armazenado e a matriz de ganho de malha fechada é determinada.

### 3.2 Rastreador Linear Quadrático - LQT

Segundo Gupta (2007), considerando a planta descrita pela Eq. 8 com  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  e  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ , com as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sendo invariantes no tempo, o objetivo do LQT é obter uma lei de controle que force uma certa combinação linear dos estados  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$  da planta, para seguir uma trajetória de referência  $r(t)$  em um intervalo de tempo especificado  $[t_o, t_f]$ .

Extrapolando os resultados obtidos para o problema do regulador linear, obtém-se uma solução para o problema do rastreador linear, ou seja, alterar o vetor de estados desejados para uma função variante no tempo.

No Rastreador a função custo a ser minimizada é:

$$J = \frac{1}{2}[\mathbf{C}\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)]^T \mathbf{S}[\mathbf{C}\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)] + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{[\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^T \mathbf{Q}[\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)\} dt \quad (22)$$

Onde  $t_f$  é fixo,  $x(t_f)$  é livre, os estados e o controle não são limitados. Kirk (2004) afirma que  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{Q}$  são matrizes simétricas positiva semidefinidas e a matriz  $\mathbf{R}$  é simétrica positiva definida.

Mesmo que o estado  $\mathbf{x}(t)$  não seja limitado, deseja-se que ele seja o mais próximo possível da referência  $\mathbf{u}(t)$  Gupta (2007). Neste caso a Equação do hamiltoniano é expresso por:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^T \mathbf{Q}[\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)] + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \quad (23)$$

A equação de coestado é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_x = -[\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x}(t) - \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(t)] \quad (24)$$

Pela condição de estacionariedade, obtém-se:

$$H_u = 0 \rightarrow \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (25)$$

portanto:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (26)$$

Da condição de contorno:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{v}(t) \quad (27)$$

no qual  $\mathbf{v}(t)$  é um termo que depende dos parâmetros do sistema e da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$ .

Reescrevendo o controle  $\mathbf{u}^*(t)$ , substituindo a Eq. 27 na Eq. 26, temos:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{v}(t)) \quad (28)$$

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{v}(t)$$

Onde  $\mathbf{K}(t)$  é a matriz de ganho de malha fechada, expressa por:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \quad (29)$$

Onde  $\mathbf{v}(t)$  é o sinal de comando.

Derivando a Eq. 27 e igualando com a Eq. 24:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{v}} = -[\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x}(t) - \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T \mathbf{v}(t)] \quad (30)$$

Organizando tem-se:

$$[\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}] \mathbf{x}(t) - \dot{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{A}^T \mathbf{v}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{v}(t) - \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) = 0 \quad (31)$$

Igualando o termo em colchetes a zero e cada um dos termos restantes da Eq. 31, tem-se:

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \quad (32)$$

e

$$-\dot{\mathbf{v}}(t) = [\mathbf{A}^T - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T] \mathbf{v}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) \quad (33)$$

Desde que as Eq. 32 e 33 sejam satisfeitas para todo  $\mathbf{x}(t_f)$  e  $\mathbf{r}(t_f)$  as condições de contorno são:

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \quad (34)$$

e

$$\mathbf{v}(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{r}(t_f) \quad (35)$$

A Equação 32 é a mesma Equação de Riccati que foi obtida para o LQR, Eq. (20). Do mesmo modo que se utilizou para determinar a matriz de ganho  $\mathbf{K}(t)$  no LQR, é feito para o LQT, porém agora além de determinar  $\mathbf{K}(t)$  é necessário determinar o sinal de comando  $\mathbf{v}(t)$ . Faz-se então a integração das Eq. 32 e 33.

Nota-se que a saída não tenderá à origem como no LQR, e sim seguirá a referência determinada.

#### 4. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Para avaliar a utilização do LQT em aeronaves do tipo quadricóptero, foram realizadas simulações utilizando o software Matlab® com aplicação do modelo dinâmico apresentado na seção 2.2. Foram realizados 60 segundos de simulação, com um passo de integração de 0.01 segundo. Para construir uma trajetória cilíndrica, foram aplicados um sinal em forma de cosseno para o estado  $X$ , seno para o estado  $Y$  e rampa para o eixo  $Z$ .

Como visto na seção 3.2 para minimizar a função custo dada pela Eq. 22, devem-se ajustar as matrizes de ponderação  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ . Inicialmente, as matrizes foram determinadas como identidade, a fim de verificar o quanto os pesos deveriam ser alterados. Para estas condições e aplicando as trajetórias desejadas, obtiveram-se os resultados apresentados nas Fig. 5 a 7.

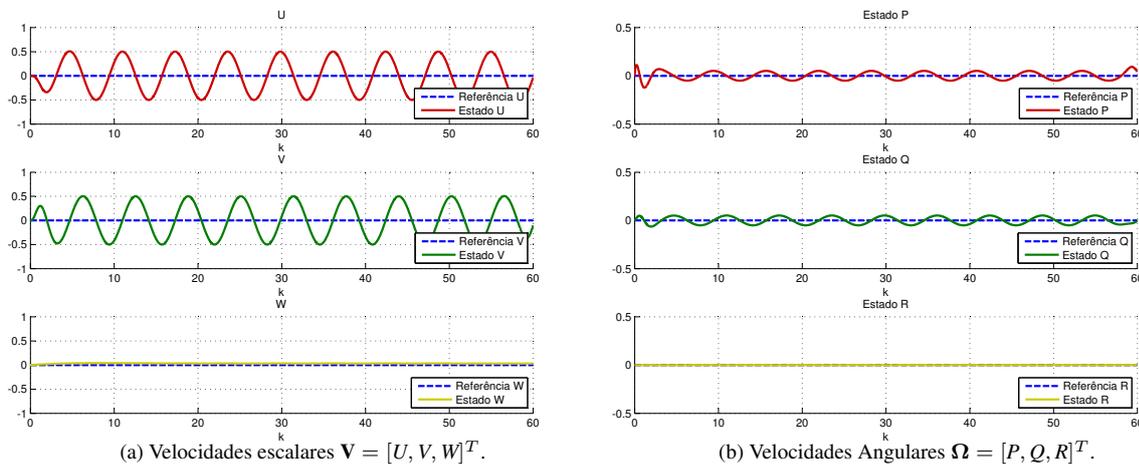


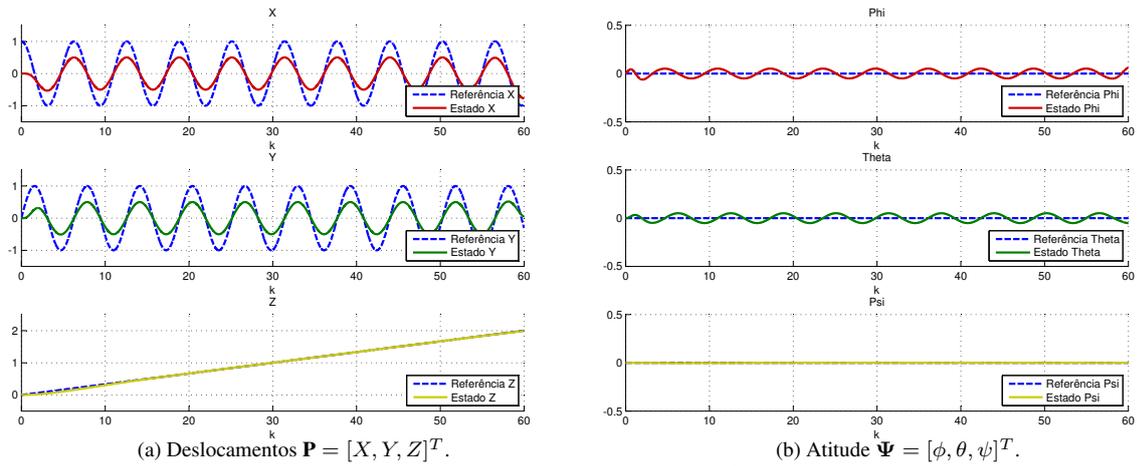
Figura 5: Velocidades Escalares e Angulares

Com esta simulação, pode-se perceber que o quadricóptero segue a trajetória, porém com erro de aproximadamente 0.5 metro para os estados  $X$  e  $Y$ , que podem ser observados nas Fig. 6 e 7.

Nota-se também um pequeno erro de trajetória nos estados  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $\phi$  e  $\theta$ . Este erro deve-se ao acoplamento existente entre os estados. Para realizar movimentos em  $X$  e  $Y$  a aeronave deve provocar variações nos estados  $\phi$  e  $\theta$ , as variações nos ângulos de atitude são provocadas devido às alterações nas velocidades angulares, que por fim geram velocidades escalares fazendo com que o veículo realize o movimento em  $X$  e  $Y$ .

Deve-se então aumentar a importância destes estados na função custo. Isso pode ser feito por meio de ajustes nos pesos da matriz  $\mathbf{Q}$ . Buscando a minimização do erro de trajetória os pesos da matriz  $\mathbf{Q}$  foram reajustados para 10 nos estados  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , obtendo-se a resposta apresentada nas Fig. 8 a 10.

Na Figura 8, após o ajuste, verifica-se uma diminuição significativa no erro durante toda a trajetória, porém na Fig. 9a que representa os estados  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  individualmente, percebe-se que os estados  $X$  e  $Y$  apresentam um erro significativo nos primeiros 3 segundos e um pequeno erro durante o restante da trajetória, o estado  $Z$  apresenta um pequeno erro



(a) Deslocamentos  $\mathbf{P} = [X, Y, Z]^T$ . (b) Atitude  $\Psi = [\phi, \theta, \psi]^T$ .

Figura 6: Deslocamentos e Atitude

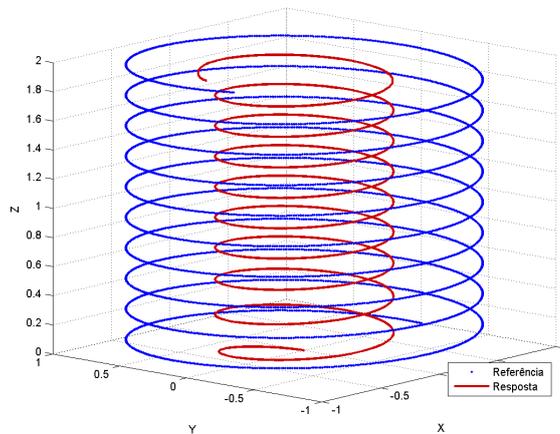


Figura 7: Representação 3D dos estados  $X, Y$  e  $Z$ .

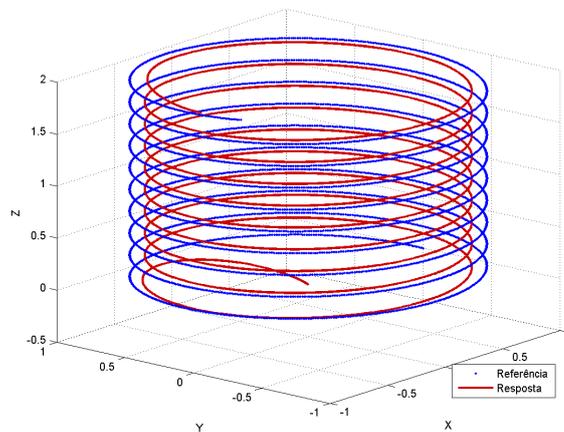


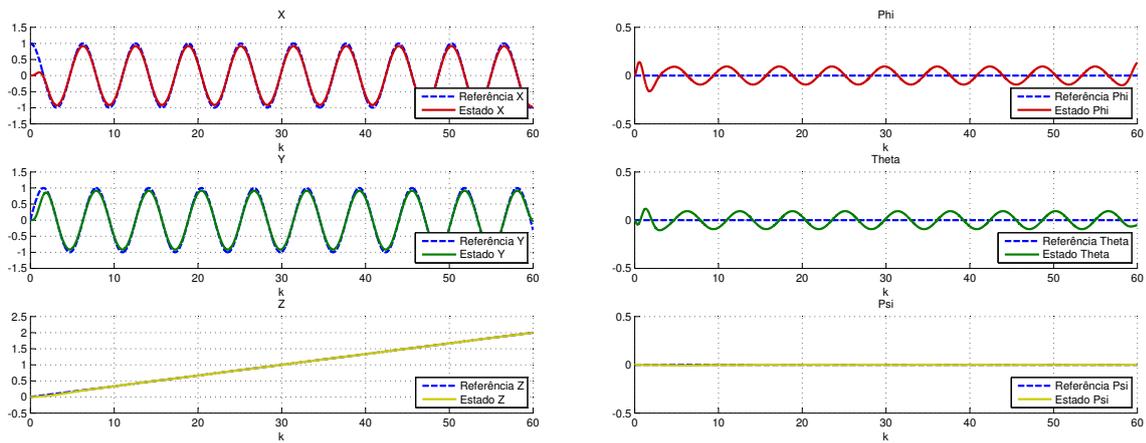
Figura 8: Representação 3D dos estados  $X, Y$  e  $Z$ , para matriz  $\mathbf{Q}$  ajustada.

inicial de trajetória que tende a ser anulado. A maior amplitude do erro no momento inicial se deve às condições iniciais definidas.

Analisando as respostas dos estados  $P, Q$  e  $R$  apresentadas na Fig. 10b, percebe-se claramente a demanda por um esforço de controle maior, que pode ser vista no momento inicial da simulação, onde os estados  $P$  e  $Q$  sofrem um pico inicial devido a esta demanda.

Devido aos acoplamentos da planta, os estados  $\phi, \theta, U$  e  $V$ , Fig. 9b e 10a, sofrem aumento em sua amplitude de erro durante a trajetória, ocasionado pela maior demanda de controle causada pelo ajuste dos pesos da matriz  $\mathbf{Q}$ . O erro nos estados  $U, V, \phi$  e  $\theta$  não se anulam, pois para se realizar os movimentos desejados em  $XYZ$  fazem-se necessários ângulos de atitude diferentes de zero e velocidades escalares também diferentes de zero.

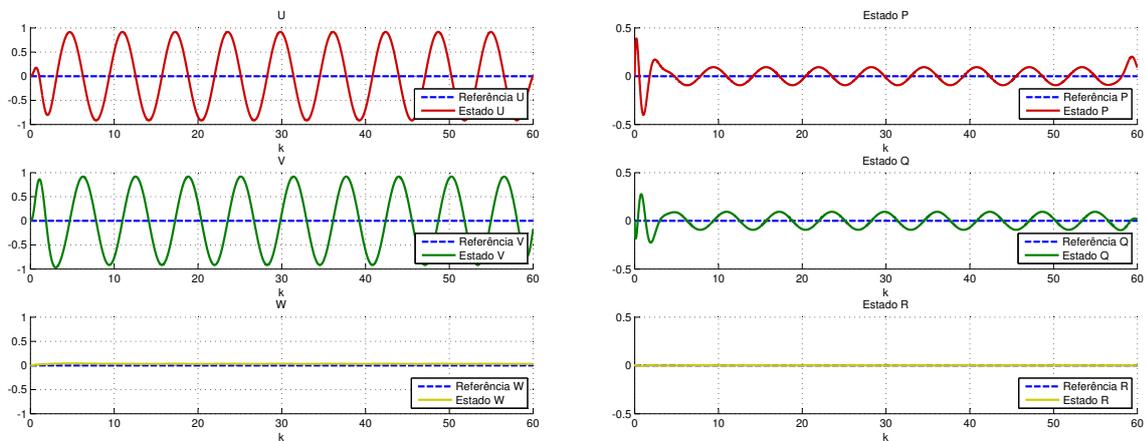
Com base nas simulações, foi possível constatar que o LQT obteve um resultado significativo ao seguir a trajetória alcançando-se o controle ótimo que minimiza a função custo. O controle ótimo que minimiza a função custo nos casos em que  $\mathbf{Q}$  é uma matriz identidade e quando os pesos nos estados  $X, Y$  e  $Z$  são ajustados para 10, podem ser observados



(a) Deslocamentos  $\mathbf{P} = [X, Y, Z]^T$ , para matriz  $\mathbf{Q}$  ajustada.

(b) Atitude  $\Psi = [\phi, \theta, \psi]^T$ , para matriz  $\mathbf{Q}$  ajustada.

Figura 9: Deslocamentos e Atitude para matriz  $\mathbf{Q}$  ajustada

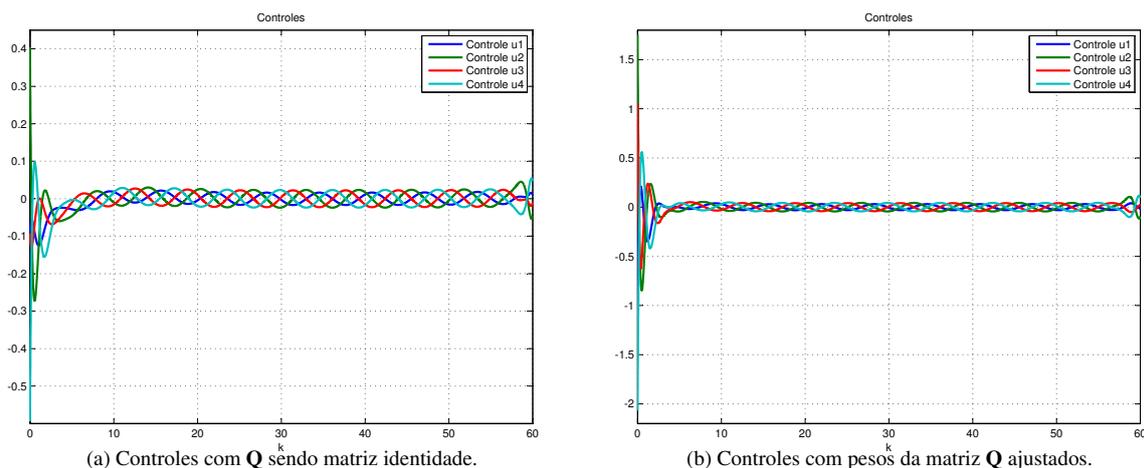


(a) Velocidades escalares  $\mathbf{V} = [U, V, W]^T$ , para matriz  $\mathbf{Q}$  ajustada.

(b) Velocidades Angulares  $\Omega = [P, Q, R]^T$ , para matriz  $\mathbf{Q}$  ajustada.

Figura 10: Velocidades para matriz  $\mathbf{Q}$  ajustada

na Fig. 11.



(a) Controles com  $\mathbf{Q}$  sendo matriz identidade.

(b) Controles com pesos da matriz  $\mathbf{Q}$  ajustados.

Figura 11: Controles

Apesar dos ajustes da matriz  $\mathbf{Q}$  diminuir o erro de trajetória, como já foi observado, tal procedimento provoca um aumento no esforço de controle. O rastreador busca a minimização da função custo; com o ajuste dos pesos dá uma importância maior a minimização do erro de trajetória dos estados do que dos erros dos esforços de controle.

## 5. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A técnica de controle LQT se mostrou uma boa ferramenta de controle, principalmente em situações nas quais os quadricópteros precisam seguir trajetórias precisas por uma longa duração, tendo em vista que a referida técnica busca

tanto a minimização do erro de trajetória como da energia utilizada.

Para melhorar a resposta do sistema, devem-se ajustar os pesos das Matrizes  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$ , de forma a encontrar uma relação ideal e ótima para o erro do estado final, erro durante a trajetória e os esforços de controle. Neste trabalho foi analisada somente a matriz de ponderação  $\mathbf{Q}$ , visto que o objetivo principal deste trabalho é a análise do LQT para controle de trajetória e não para minimização de consumo de energia.

O principal resultado alcançado foi a avaliação da técnica do Rastreador Linear Quadrático, que se mostrou satisfatório no controle de trajetória de aeronaves do tipo quadricóptero. Como visto na seção 4, ajustando-se adequadamente a matriz de ponderação  $\mathbf{Q}$  pode-se reduzir o erro de trajetória para um valor admissível.

Como continuação da presente pesquisa pretende-se analisar a técnica LQR nos sistemas software-in-the-loop, utilizando o simulador de voo X-plane, e hardware-in-the-loop do quadricóptero e, posteriormente, embarcá-la em uma aeronave real.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a FAPEAM/Brasil por bolsas de pesquisa 003/2013.

## 7. REFERÊNCIAS

- Domingues, J.M.B., 2009. “Quadrotor prototype”.
- FlyCam, 2011. “Tecnologia usada pela flycam”. <http://www.flycam.com.br/tecnologia.php>.
- Goel, R. e Shahb, S.e.G.N.e.A.N., 2009. “Modeling, simulation and flight testing of an autonomous quadrotor”. *Proceedings of ICEAE*.
- Gupta, V., 2007. “Decoupling of hamiltonian system with applications to linear quadratic problem”.
- Henriques, B.S.M., 2011. “Estimation and control of a quadrotor attitude”.
- Kirk, D.E., 2004. *OPTIMAL CONTROL THEORY An Introduction*. Dover Publications, Inc, Mineola, New York.
- Leishman, J.G., 2000. “A History of Helicopter Flight”. <http://terpconnect.umd.edu/~leishman/Aero/history>.
- Lucas M. Argentim, Willian C. Rezende, P.E.S.R.A.A., 2012. “Pid, lqr and lqr-pid on a quadcopter platform”.
- Mellinger, D., 2013. “Quadrotor”. <https://fling.seas.upenn.edu/~dmel/wiki/index.php?n=Main.Quadrotor>.

## 8. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

# LINEAR QUADRATIC TRACKER ANALYSIS APPLIED TO QUADROPTER

Mayara Kissya da Silva Duarte, [mayarakissya@yahoo.com.br](mailto:mayarakissya@yahoo.com.br)<sup>1</sup>  
Helosman, [helosman@gmail.com](mailto:helosman@gmail.com)<sup>1</sup>  
Osamu Saotome, [osaotome@gmail.com](mailto:osaotome@gmail.com)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Praça Marechal Eduardo Gomes, 50, Vila das Acácias, 12228-900, São José dos Campos, São Paulo, Brasil

**Resumo:** *Research into unmanned aerial vehicles (UAVs) is becoming increasingly common. In recent years, a type of aircraft for which there has been a lot of interest, is the quadcopter, because of its simplified mechanical and special flight characteristics, such as vertical take-off and landing, high manoeuvrability and low speed flights. Owing to these characteristics it was possible to miniaturize this aircraft, making it a small and agile vehicle, used in search and rescue missions and remote surveillance. For autonomous operations, the control system must follow a predetermined trajectory. Among the various existing techniques for resolving this problem, for this paper, the application of a Linear Quadratic Tracker technique was proposed. Using optimal control techniques, it was possible to resolve the problem of Linear Quadratic Tracker and find optimal control in relation to the minimization considerations employed. The cost function minimized, to determine the gain matrix of the controller is quadratic and possesses three matrices that were adjusted to obtain optimal response. The technique was evaluated with the aid of Matlab, a computational tool, with which simulations were carried out with different signals of reference. Through these simulations, it was observed that the Linear Quadratic tracker provided good trajectory error minimization and control effort for the quadcopter, even with the plan including couplings between the states. The results of the simulation carried out show that it is possible to adjust the weights of the matrices of the cost function, in order to obtain a tracking error to control effort ratio consistent with the specified requirements of the project.*

**Palavras-chave:** *Quadricopter, Linear Quadratic Tracker, Optimal Control.*