

MÉTODO DE AJUSTE DE CURVAS USANDO B-SPLINE COM PESO

Larissa Rocha Pereira, larissa.mecatronica@hotmail.com

João Carlos Mendes Carvalho, jcmendes@mecanica.ufu.br

Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2160, Campus Santa Mônica, Bloco 1M, Uberlândia. Minas Gerais. Brasil.

Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2160, Campus Santa Mônica, Bloco 1M, Uberlândia. Minas Gerais. Brasil.

Resumo: *B-splines são curvas polinomiais por partes que implementam o controle local da curva, ou seja, quando um ponto de controle é modificado somente a curva nessa região sofre alteração, em função da ordem de sua continuidade. A função B-spline é um ajustador de aproximação, onde os pontos de controle podem ser calculados para que a interpolação ou aproximação seja realizada nos pontos desejados. Os métodos de ajuste de curvas são desenvolvidos baseados em características específicas da curva que se deseja, tais como raio da curva, derivada em pontos específicos e erros entre a curva obtida e a curva desejada. Por garantir o controle local, quando tais métodos de ajustes são aplicados em pontos específicos da curva B-spline já definida, são alterados apenas esses pontos, sem a necessidade de preocupação com a mudança da curva em outras regiões, dando melhores resultados para o método de aproximação. O objetivo deste artigo é apresentar o método de ajuste utilizando B-spline fechada com pesos. O método consiste em reconstruir a seção de um objeto a partir de um conjunto de pontos conhecidos do objeto obtidos por um digitalizador tridimensional, onde cada ponto tem um peso representando sua importância na definição da curva. No trabalho, será analisada a forma de definição do peso de cada ponto do objeto e os ajustes feitos na curva procurando obter a reconstrução da seção do objeto. É mostrado, através de exemplos, que os ajustes feitos na curva melhoram de forma significativa o seu comportamento final.*

Palavras-chave: *B-spline, B-spline com peso, aproximação, ajuste de curva.*

1. INTRODUÇÃO

A Engenharia Reversa surgiu da necessidade de substituir ou modificar um produto já existente, cujas informações sobre seu desenvolvimento e fabricação são desconhecidas, por outro produto com as mesmas características. Os produtos obtidos através dessa tecnologia oferecem alta qualidade, baixo custo e tempo de obtenção reduzido, despertando grande interesse de diversas áreas. A busca incessante da indústria em reduzir os custos e o tempo no desenvolvimento do produto, mantendo ou aumentando a qualidade do mesmo, tornou a engenharia reversa uma tecnologia poderosa na obtenção de sistemas produtivos mais ágeis e flexíveis. Assim, o número de pesquisas em engenharia reversa cresceu em todo mundo objetivando aperfeiçoar os processos envolvidos nesta tecnologia e aplicá-la às mais diversas áreas existentes.

A digitalização de perfis tridimensionais de objetos e sua reconstrução podem ser aplicadas à diversas áreas tais como na fabricação (fundição, estereolitografia, etc.), na engenharia reversa (reconstrução de componentes de máquinas que não possuem desenhos), no projeto colaborativo (permitindo a interação entre o modelo real e o modelo virtual), na inspeção (permitindo verificar se o objeto está conforme o projetado), simulação virtual (efeitos especiais no cinema, jogos), na cópia de peças disponíveis em museus, na medicina (reconstrução de partes do corpo humano), na exploração científica e no mercado de consumo.

Esta tecnologia envolve três etapas básicas, que são: digitalização de forma (aquisição de dados), pré-processamento (tratamento dos dados) e geração da superfície (reconstrução gráfica).

A aquisição de dados é realizada por sistemas de medição de coordenadas (Alves, 1996), que podem ser de dois tipos: de contato e sem contato. Na medição com contato o sistema possui um apalpador esférico que sempre deve “tocar” o objeto para a aquisição de pontos de sua superfície. Máquina sem contato é aquela em que, ao invés de um apalpador, emite um sinal em forma de onda sobre o objeto tais como câmeras, Raio X, laser, etc.

O resultado da leitura realizada por um sistema de medição de superfícies consiste em uma “massa” de dados, em geral com ruídos, denominado de nuvens de pontos, nem sempre organizados e que requerem algoritmos eficientes e confiáveis no seu tratamento e eliminação de pontos desnecessários. A reconstrução da superfície é um problema difícil:

primeiro porque os pontos medidos são desorganizados e, geralmente, cheios de ruídos; depois, a superfície pode ser arbitrária, com topologia desconhecida e com formas angulares (Remondino, 2003).

De forma a eliminar estes problemas, é necessário reduzir o número de pontos visando extrair o conjunto de dados que melhor descrevem a superfície digitalizada. Existem alguns métodos que reduzem os pontos que definem o contorno do objeto. O método utilizado neste trabalho consiste na substituição de um conjunto de pontos existentes em uma determinada região, por seu centro de massa (CM), considerando que cada ponto possui massa unitária. Assim, é obtido um conjunto com reduzido número de pontos, representado pelos CM de cada região, que é organizado de maneira a representar fielmente o contorno real de seções transversais da superfície (Fonseca Jr e Carvalho, 2005).

Mesmo com os dados já tratados, é impossível traçá-los manualmente a fim de recuperar a imagem desejada. Assim, é necessário um sistema eficaz que se assemelha à capacidade humana na recuperação dos dados da forma e dimensão do objeto a partir de um banco de dados relevantes (Liang et al, 2002). Várias publicações vêm sendo feitas, principalmente no uso de técnicas como B-splines e NURBS.

Curvas B-spline são versões da spline que implementam o controle local da curva, de forma que a alteração de um ponto de controle modifica a curva somente na região próxima ao ponto alterado. A B-spline, caso particular de curva NURBS (*Non Uniform Rational B-spline*), é um ajustador de aproximação, pois a curva gerada não passa pelos pontos de controle. No entanto, os pontos de controle podem ser calculados para que a interpolação ou aproximação seja realizada nos pontos desejados.

A curva B-spline se destaca como um dos métodos de representação de forma (superfície) mais eficiente. Segundo (Cohen et al., 1995) e (Liang et al., 2002) as seguintes propriedades tornam-na atraente e adequada para a representação de forma: representam formas livres com muito pouco dados e bem definidos em forma matemática; tem controlabilidade local, o que implica que as alterações locais na forma da curva estão confinados apenas aos parâmetros locais da mudança; tem a capacidade para controlar a suavidade e a continuidade da curvatura; possui a característica de invariância de forma sob transformação afim, o que significa que a curva de transformação afim ainda é uma curva B-spline cujos pontos de controle estão relacionados com os pontos de controle das curvas originais.

Embora seja comum verificar na bibliografia sobre o tema que, tanto no traçado de curvas como de superfícies utilizando B-splines, existem diversas vantagens de sua utilização, ainda existem muitas dificuldades na sua implementação, principalmente na reconstrução de superfícies fechadas.

Nesse trabalho, portanto, é utilizada a curva B-spline fechada com pesos associados aos pontos previamente definidos (pontos que melhor representam as coordenadas do objeto), através do ajuste de curva por aproximação pelo método dos mínimos quadrados, para a reconstrução gráfica da superfície. As curvas B-splines fechadas são utilizadas para definir seções transversais fechadas da superfície de um objeto, método conhecido como reconstrução através de fatias. Os pesos são usados para aproximar a curva dos pontos que melhor representam a seção transversal da superfície. E para um melhor resultado, ainda são utilizados ajustes na curva baseados em características específicas da mesma.

O objetivo deste artigo, portanto, é apresentar o método de ajuste utilizando B-spline fechada com pesos.

2. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

O método desenvolvido utiliza a curva B-spline fechada através da aproximação pelo método dos mínimos quadrados com peso. A curva é aproximada aos pontos oriundos da digitalização da seção transversal de um objeto. A fim de reconstruir essa seção de forma mais fiel é utilizada a B-spline associada à pesos, sendo estes relacionados aos pontos que representam as coordenadas do objeto. Esses pesos proporcionam um outro tipo de flexibilidade à curva, que permite a aproximação ou o afastamento da mesma em relação aos pontos, melhorando o perfil final do objeto que se deseja reconstruir. Somente a consideração dos pesos em cada ponto conhecido não fornece bons resultados no ajuste de algumas curvas. Para atingir os resultados esperados são ainda considerados: um método para seleção do ponto inicial para aplicação do método; correção de alguns pontos de controle, considerando-os sobre a tangente do ponto inicial; alteração, quando necessário, da quantidade de pontos de controle.

2.1. B-spline

Autores como (Piegl; Tiller, 1997), (De Boor, 2000) e (Rogers, 2001) definem a B-spline como uma versão da spline que implementa o controle local da curva, de forma que a alteração de um ponto de controle modifica a curva somente na região dos pontos vizinhos mais próximos em função da ordem de continuidade.

Uma curva B-spline de grau p é definida por:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i \quad (1)$$

Onde i ($i = 1, \dots, n$) são os pontos de controle e $N_{i,p}(u)$ são as funções de base de grau p definidas em um vetor de nós ($m+1$ nós). O polígono formado por $\{P_i\}$ é nomeado por *polígono de controle*.

As funções de base são calculadas da seguinte forma:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2)$$

Os nós são representados por uma lista de números que é comumente denominada de vetor nó. Segundo (Piegl; Tiller, 1997) existem dois grupos de vetores nós, os “*unclamped*” e “*clamped*” e dentro de cada grupo eles são divididos em uniforme e não uniforme. Os termos “*clamped*” e “*unclamped*” referem se o primeiro e o último nó se repetem com multiplicidade igual ao grau da curva ou não. Uniforme e não uniforme se refere ao mesmo espaçamento entre os nós. Para ser uniforme e “*clamped*”, os vãos dos nós “internos” devem possuir o mesmo comprimento e o primeiro e último nó devem ser repetidos $p+1$ vezes, sendo p o grau da curva e vão a distância entre um nó e outro. Para ser uniforme e “*unclamped*”, todos os vãos dos nós devem ter o mesmo comprimento. No vetor nó do tipo “*clamped*” a curva passa sobre os pontos inicial e final.

2.2. Aproximação por mínimos quadrados

Quando se define uma B-spline ela não passa pelos pontos de controle. Porém, se for necessário que a curva passe por pontos ou próximo de pontos pré-determinados (Q_k), é preciso calcular um conjunto de pontos de controle e um novo vetor nó a partir dos pontos dados, para poder traçar a curva. Assumindo que $p \geq 1$, $n \geq p$, e Q_0, \dots, Q_j ($j > n$) sejam dados, busca-se a curva de grau p definida pela Eq. (1), onde Q_k são aproximados pelo método dos mínimos quadrados (Smith et al., 1974), (Piegl; Tiller, 1997), (Lyche; Morken, 2008), isto é:

$$e = \sum_{k=0}^j \{w_k |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2\} \quad (3)$$

é um mínimo com respeito a $n+1$ variáveis, P_i ; os $\{\bar{u}_k\}$ são parâmetros pré calculados. Os pontos de controle são calculados através da Eq. (4) (Piegl; Tiller, 1997):

$$(N^T W N) P = R \quad (4)$$

onde N é uma matriz $(j+1) \times (n+1)$ de escalares das funções de base

$$N = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0) & \dots & N_{n,p}(\bar{u}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(\bar{u}_j) & \dots & N_{n,p}(\bar{u}_j) \end{bmatrix} \quad (5)$$

W é uma matriz diagonal $(j+1) \times (j+1)$ com os pesos w_k ($k=0, \dots, j$)

$$W = \begin{bmatrix} w_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_j \end{bmatrix} \quad (6)$$

R é um vetor de $n+1$ pontos

$$R = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0)S_0 + \dots + N_{0,p}(\bar{u}_j)S_j \\ \vdots \\ N_{n,p}(\bar{u}_0)S_0 + \dots + N_{n,p}(\bar{u}_j)S_j \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde: $S_k = w_k Q_k$

Para resolver as Eqs. (5) e (7), um vetor nó $U = \{u_0, \dots, u_r\}$ e parâmetros $\{\bar{u}_k\}$ são requeridos. Os parâmetros $\{\bar{u}_k\}$ podem ser calculados usando o método do comprimento de corda. Supondo ℓ o comprimento total de corda, dado por:

$$\ell = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}| \quad (8)$$

Então,

$$\bar{u}_0 = 0 \qquad \bar{u}_n = 1$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{\ell} \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (9)$$

O vetor nó pode ser obtido pelo método a seguir:

Seja d_a é um número real positivo, denotando por $i = \text{int}(kd_a)$ o maior inteiro tal que $i \leq kd_a$. Para uma curva aberta seja:

$$d_a = \frac{j+1}{n-p+1} \quad (10)$$

os nós internos são definidos por:

$$i = \text{int}(kd_a); \quad \alpha = kd_a - i$$

$$u_{p+k} = (1 - \alpha)\bar{u}_{i-1} + \alpha\bar{u}_i \quad k = 1, \dots, n - p \quad (11)$$

Para uma curva fechada, d_f é definido por:

$$d_f = \frac{j+1}{n-p-1} \quad (12)$$

e a definição dos nós internos para esse tipo de curva é dada por:

$$i = \text{int}(kd_f); \quad \alpha = kd_f - i$$

$$u_k = (1 - \alpha)\bar{u}_{i-1} + \alpha\bar{u}_i \quad k = 1, \dots, n + p - 3 \quad (13)$$

Para $k=0$, tem-se $u_0 = 0$.

2.3. Fechamento da curva

O procedimento utilizado para traçar uma curva fechada usando o método dos mínimos quadrados primeiramente é necessário que se encontre os pontos de controle e um vetor nó para uma curva aberta. Para isso são definidos: os parâmetros \bar{u}_k pelo comprimento de corda, Eqs. (8) e (9); a quantidade de pontos de controle, que nesse trabalho foi definido inicialmente pela quantidade de pontos $Q_k (k=0, \dots, j)$ que invertem a curvatura; o vetor nó pelas Eqs. (10) e (11); e definir os pesos, $w_k (k = 0, \dots, j)$, que estão relacionados a cada ponto $Q_k (k=0, \dots, j)$. Os pesos são definidos pela relação entre os raios das circunferências formadas por três pontos consecutivos, conforme descrito no item 2.4. Com esses parâmetros já definidos são então encontrados os pontos de controle para a curva aberta usando as Eqs. (4), (5), (6) e (7).

O próximo passo é definir um novo vetor nó para o traçado da curva fechada, sendo ele definido pelas Eqs. (12) e (13). Para uma curva fechada o vetor nó é definido de forma que seus $p+3$ últimos vãos sejam iguais aos $p+3$ primeiros vãos. Para uma curva de grau 3, tem-se um vetor nó do tipo:

$$U = \{u_0 \underset{d_0}{\curvearrowright} u_1 \underset{d_1}{\curvearrowright} u_2 \underset{d_2}{\curvearrowright} u_3 \underset{d_3}{\curvearrowright} u_4 \underset{d_4}{\curvearrowright} u_5 \underset{d_5}{\curvearrowright} u_6, \dots, u_m \underset{d_0}{\curvearrowright} u_{m+1} \underset{d_1}{\curvearrowright} u_{m+2} \underset{d_2}{\curvearrowright} u_{m+3} \underset{d_3}{\curvearrowright} u_{m+4} \underset{d_4}{\curvearrowright} u_{m+5} \underset{d_5}{\curvearrowright} u_{m+6}\}$$

onde $d_n (n=0, \dots, 5)$ representa os vãos entre os nós iniciais e finais.

É necessário também que se acrescente $p+1$ pontos de controle aos pontos já encontrados. Para $p=3$, tem-se:

$$P = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_n, P_0, P_1, P_2, P_3\}$$

Assim, com os pontos de controle com repetição e o novo vetor nó já definidos, é possível traçar a curva B-spline cúbica fechada que se aproxima dos pontos que representam as coordenadas do objeto. Para uma reconstrução mais fiel da superfície são feitos ainda ajustes, descritos nos itens a seguir.

2.4. Definição dos pesos

Os pesos adotados são relacionados aos pontos $Q_k (k = 0, \dots, j)$ e implementados para a aproximação ou afastamento da curva em determinados pontos, de acordo com a necessidade do ajuste da curva. Os pesos são definidos pela relação entre os raios das circunferências formadas a cada três pontos consecutivos de $Q_k (k = 0, \dots, j)$.

Tem-se Q_k, Q_{k+1} e Q_{k+2} definindo um triângulo. O encontro das mediatrizes dos lados $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ e $\overline{Q_{k+1} Q_{k+2}}$ define o centro da circunferência que passa por esses três pontos, o raio é então definido pela distância do centro a um dos

pontos. Isso é feito para todos os pontos de Q_k ($k = 0, \dots, j$), portanto, para $j+1$ pontos, tem-se $j+1$ valores de raios, $r = \{r_0, \dots, r_j\}$, Fig. 1.

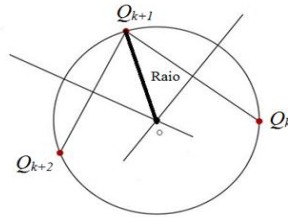


Figura 1 – Cálculo do raio para definição dos pesos

Em situações em que os pontos se encontram alinhados os valores dos raios tendem a infinito, que devem ser descartados para realizar as operações a seguir.

Tendo os valores dos raios, são obtidos a média, \bar{r} , e o desvio padrão, σ , e assim, define-se o raio máximo, r_{max} , pela Eq. (14):

$$r_{max} = \bar{r} + \sigma \quad (14)$$

O peso, w_k , é então definido pela razão entre o raio máximo e cada raio encontrado, $r = \{r_0, \dots, r_j\}$, Eq. (15):

$$w_k = \frac{r_{max}}{r_k} \quad k = 0, \dots, j \quad (15)$$

Assim, tem-se um peso relacionado a cada raio. Como o peso e o raio são inversamente proporcionais, evidente pela Eq. (15), quanto menor o raio, maior o peso relacionado a ele. Ou seja, nos pontos em que o raio é muito pequeno, é automaticamente atribuído a eles um peso maior para que force a curva a aproximar ao máximo à esses pontos.

Então, para que a curva se aproxime do ponto é necessário que se aumente o valor do peso nele. Em locais em que os pontos estão alinhados faz-se necessário que a curva também se aproxime ao máximo, portanto, o valor do peso nesses pontos também deve ser o maior possível. Para isso é definido o peso máximo como o maior valor dos pesos obtidos na Eq. (15), que é o valor do peso definido para o menor raio. Esse valor, então, é também atribuído aos pontos em que estão mais alinhados, sendo eles considerados os pontos em que o raio seja maior que o raio máximo e quando o raio é infinito.

As Figuras 2a e 2b mostram uma curva B-spline aproximada a pontos que representam a seção transversal de um objeto. Na Figura 1a a curva é traçada sem utilizar o método dos pesos, ou seja, todos os pesos associados a cada ponto são iguais a 1, e na Fig. 2b a curva é traçada utilizando os pesos definidos pelo método desenvolvido.

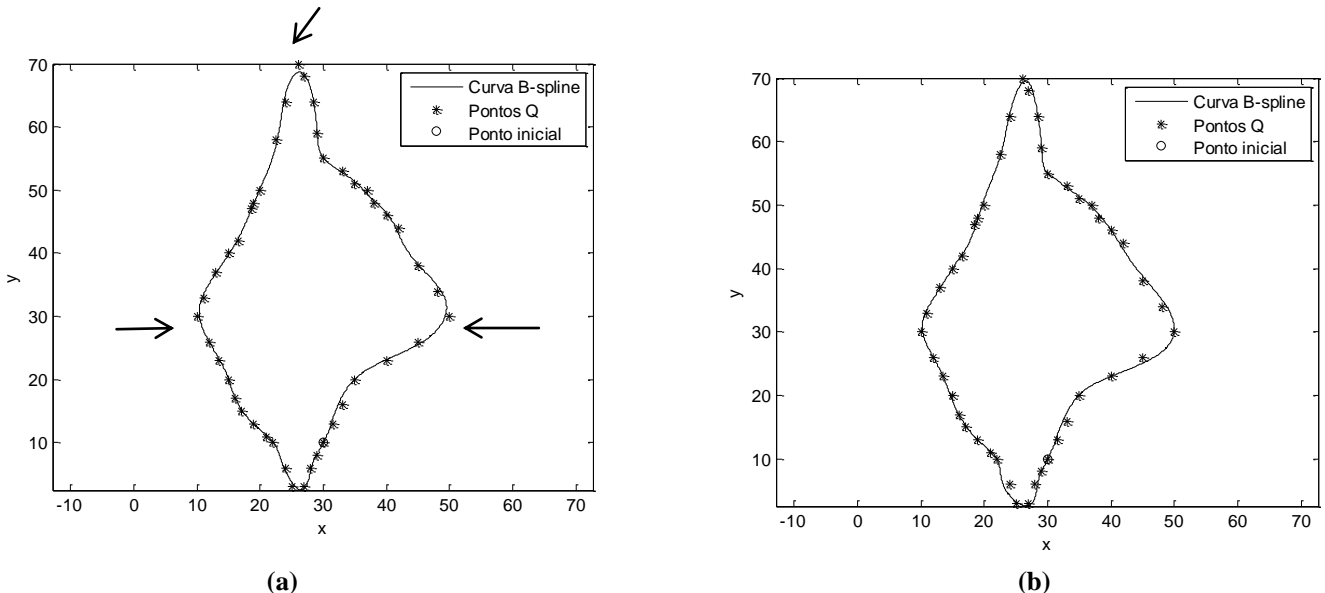


Figura 2 – (a) B-spline cúbica aproximada com os pontos sem considerar os pesos; (b) B-spline cúbica aproximada considerando os pontos com peso

As setas da Fig. 2a mostram regiões em que a curva B-spline traçada não teve bons resultados, ficando longe dos pontos que não possuíam pesos relacionados a eles. Na Figura 1b pode-se ver que a curva B-spline aproximou-se ao máximo desses mesmos pontos, pois a eles estavam associados pesos que “puxaram” a curva para próximo deles. No entanto apenas a aplicação do peso não foi considerado satisfatório para vários exemplos.

2.5. Definição do ponto inicial

Tendo os pontos oriundos da digitalização é necessário que se defina qual o ponto de início para o traçado da curva, pois dependendo do ponto a curva obtida é apresentada de forma diferente. Assim, deve-se definir o ponto inicial para que se obtenha uma curva que melhor represente a seção transversal original. Foram analisadas todas as curvas começando em cada ponto Q_k ($k = 0, \dots, j$), de diversos conjuntos de pontos Q_k conhecidos, para verificar qual a melhor relação dos pontos iniciais em que a curva obtida possuía o melhor resultado. Verificou-se que as melhores curvas eram obtidas quando os pontos iniciais estavam mais alinhados com o ponto anterior e posterior ao ponto analisado.

O alinhamento foi definido pelo ângulo interno de um triângulo formado a cada três pontos de Q_k ($k = 0, \dots, j$), conforme Fig. 3.

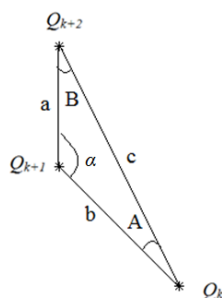


Figura 3 – Triângulo formado por Q_k , Q_{k+1} e Q_{k+2} . Cálculo do ângulo formado pelos segmentos $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ e $\overline{Q_{k+1} Q_{k+2}}$

É feito esse processo a cada três pontos consecutivos. Assim, para $j+1$ pontos, tem-se $j+1$ valores de ângulos. Quanto mais próximo de 180° os valores dos ângulos, mais próximos de uma reta estão os pontos.

Para definir qual o valor do ângulo que possa ser considerado próximo a 180° , primeiramente é feito a média, $\bar{\alpha}$, e o desvio padrão, σ , dos ângulos (α).

Assim, adotou-se que todos os ângulos maiores que $\bar{\alpha} + \sigma/2$ são considerados próximos de 180° , portanto, estão mais alinhados. Dentre os pontos considerados alinhados, ainda é necessário definir qual deles deve ser o ponto inicial para que se obtenha a melhor curva.

Para cada ponto desse foi verificada a direção da sua tangente, que é definida pela derivada do ponto usando a Eq. (16)

$$C'(0) = \frac{p}{u_{p+1}}(Q_1 - Q_0) \quad (16)$$

Para cada ponto considerado alinhado é traçada uma B-spline cúbica fechada. Nesta curva ficam definidos os pontos de controle P_1 e P_2 (segundo e terceiro pontos de controle), bem como a tangente definida por Q_0 . Esses dados são utilizados para o cálculo das distâncias dt_1 e dt_2 , que são as distâncias entre os pontos de controle P_1 e P_2 , respectivamente, à reta tangente. O ponto em que a soma dessas duas distâncias, $d_t = dt_1 + dt_2$, for a menor, é considerado o ponto inicial, pois a B-spline estará mais alinhada com os pontos que definem a curva.

Após obtido o melhor ponto inicial, várias curvas obtidas apresentavam uma alteração próximo a ele, conforme apresentado na Fig 4.

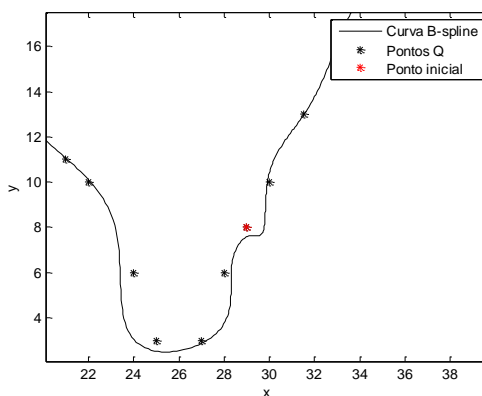


Figura 4 – Curva B-spline com alteração na região inicial

Para resolver o problema dessa alteração da curva, foi utilizada a mesma tangente do primeiro ponto, definida pela Eq. (16). Com a direção dessa tangente foi imposto que os pontos de controle P_1 e P_2 , já calculados, deveriam estar sobre ela. Como a distância entre esses pontos (reta normal à tangente que passa por cada ponto de controle) e a reta tangente já estavam calculadas, foram encontrados os pontos de interseção das mesmas. Esses pontos são, então, os novos pontos de controle. A Figura 5 ilustra a região da curva com os pontos de controle modificados.

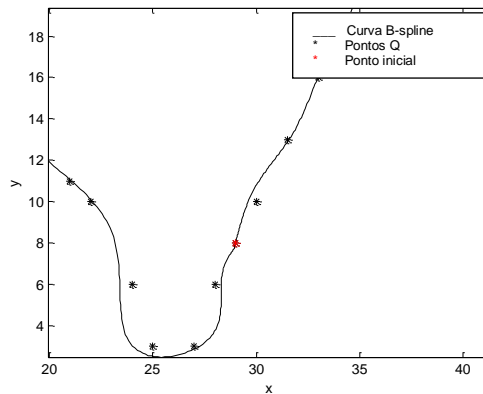


Figura 5 – Curva B-spline com os pontos de controle P_1 e P_2 modificados

É perceptível, pela Fig. 5, que a imposição dos pontos de controle P_1 e P_2 sobre a direção da tangente melhorou a curva B-spline na região inicial, eliminando a alteração verificada na Fig. 4.

2.6. Ajuste da quantidade dos pontos de controle

Mesmo com os ajustes apresentados nos itens anteriores, várias curvas apresentam desvios que não podem ser considerados adequados na representação da seção do objeto a partir de seus pontos. Foi verificado por simulações que, quando a quantidade de pontos de inversão é inferior a 50% dos pontos dados, a curva geralmente apresenta estes desvios. Então, para melhorar o resultado nesses casos, é adotado que a quantidade de pontos de controle deve ser a metade da quantidade de pontos Q_k ($k = 0, \dots, j$).

As Figuras 6a e 6b mostram a mesma curva para uma quantidade de pontos de controle definido pelos pontos de inversão de curvatura e para a quantidade igual a 50% da quantidade de pontos Q_k ($k = 0, \dots, j$), respectivamente.

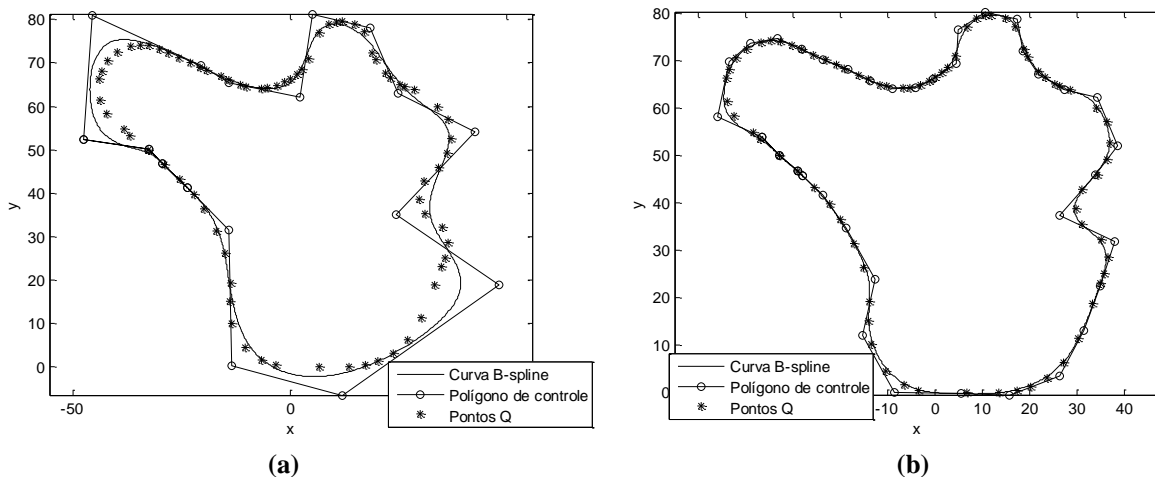


Figura 6 – Ajuste de curva com a metodologia proposta: (a) Quantidade de pontos de controle definidos pela inversão de curvatura; (b) Quantidade de pontos de controle igual a 50% dos pontos dados

Pode-se perceber que a curva traçada tem resultado muito melhor para uma quantidade de pontos de controle maior.

2.7. Aplicação da B-spline

Para efetuar a aproximação da B-spline fechada pelo método dos mínimos quadrados com peso é necessário que se tenha os pontos que representam as coordenadas do objeto, a quantidade de pontos de controle, os pesos associados a

cada ponto, a definição do ponto inicial e dos ajustes da curva, e o grau da curva. Com tudo já definido é possível então traçar a curva a fim de obter uma representação mais fiel possível da seção transversal do objeto.

A seguir são apresentados 2 exemplos da curva B-spline aplicada em diferentes seções transversais depois de todos os ajustes necessários já definidos.

As Figuras 7a e 7b ilustram a B-spline cúbica para determinados pontos dados sem os ajustes necessários. Ou seja, os pontos estão sem pesos associados a eles, a quantidade de pontos de controle é inferior a 50% da quantidade de $Q_k(k=0, \dots, j)$, e os pontos P_1 e P_2 não foram impostos sobre a tangente. E as Figuras 8a e 8b mostram as curvas B-spline finais traçadas. Nesse caso as curvas foram obtidas após serem realizados todos os ajustes necessários para uma melhora do resultado da mesma. Ajustes esses que são: pesos associados aos pontos, pontos de controle definidos como no mínimo 50% dos valores de $Q_k(k=0, \dots, j)$, e os pontos de P_1 e P_2 definidos sobre a tangente do ponto inicial.

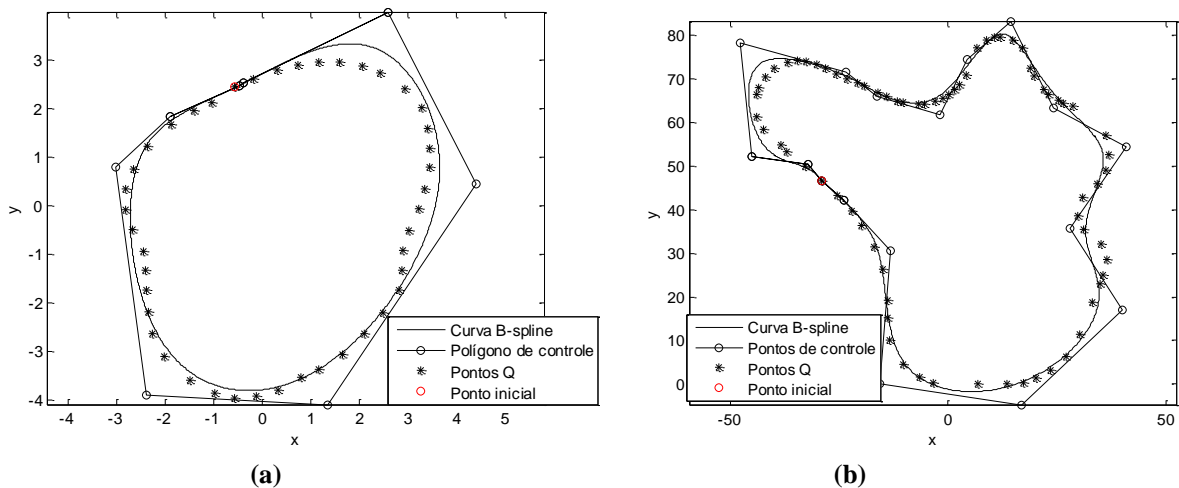


Figura 7 – (a) Curva B-spline sem ajuste para exemplo 1; (b) Curva B-spline sem ajuste para exemplo 2

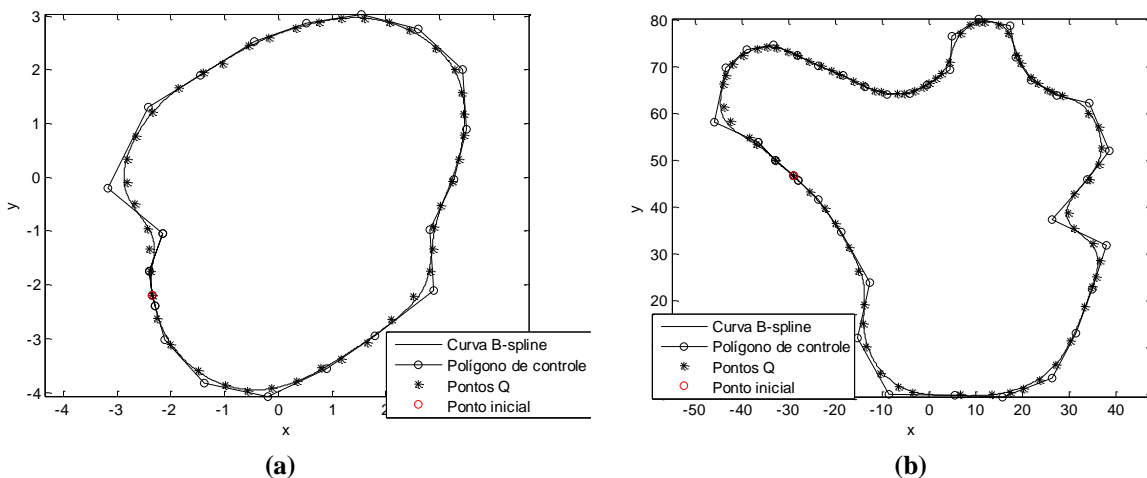


Figura 8 – (a) Curva B-spline cúbica final para os dados do exemplo 1; (b) Curva B-spline cúbica final para os dados do exemplo 2

É perceptível que, para todos os exemplos dados, a curva B-spline obtida através do método de ajuste desenvolvido teve resultado satisfatório, aproximando ao máximo dos pontos dados.

3. Conclusão

Escolher o tipo de curva e o método a ser utilizado é o primeiro passo para a reprodução de uma seção. Nesse trabalho foi utilizada a curva B-spline fechada associada ao método de aproximação por mínimos quadrados com peso.

A B-spline é utilizada devido suas várias características, dentre elas o controle local da curva, que permite ajustar a curva somente em determinados pontos sem alteração do restante da curva, e é cúbica devido ao fato de ser mais adequada para muitas aplicações. A curva é fechada para reproduzir seções fechadas de um determinado objeto e os pesos são implementados para a aproximação ou afastamento da curva em determinados pontos.

O método utilizado possui como ajustes, além dos pesos, a definição da quantidade de pontos de controle, do ponto inicial e a definição de alguns desses pontos de controle sobre a tangente do ponto inicial para evitar distorções da curva nessa região. Tal método pode ser utilizado para qualquer conjunto de pontos dados obtendo resultados satisfatórios

sem a intervenção do usuário. Ou seja, dado um conjunto de pontos que representam a seção transversal do objeto, a curva é traçada e todos os ajustes necessários são feitos de forma automática, definindo qual o ponto inicial, a tangente, os pesos adotados e a quantidade de pontos de controle sem a necessidade de uma avaliação e/ou modificação do usuário. O método ainda pode ser utilizado para qualquer tipo de grau da curva, sendo nesse caso foi adotado o grau 3.

A curva B-spline cúbica utilizada representou de forma fiel a seção transversal do objeto, mostrando através dos exemplos, que ela é um reconstrutor de forma eficiente.

Cabe ainda salientar que o erro entre a curva obtida e a curva real não é possível de ser obtido porque a curva real, *á priori*, não é conhecida. Pode-se, caso necessário, verificar a distância entre os pontos que definem a seção do objeto e a curva obtida. No entanto, como esses pontos já foram obtidos a partir de uma nuvem de pontos, sendo então aproximados, esse cálculo não forneceria a ideia real do erro entre a curva real e a curva obtida pelo método apresentado.

4. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos ao LAR (Laboratório de Automação e Robótica), UFU, FEMEC, CAPES e FAPEMIG.

5. REFERÊNCIAS

- Alves, A. S. “Metrologia Geométrica”, Fundação Calouste Gulbenkian, 1996. 270 p.
- Cohen, F. S.; Huang, Z.; Yang, Z.; “Invariant Matching and Identification of Curves Using B-Splines Curve Representation”, 1995, IEEE Transactions on Image Processing, v. 4, n. 1, p. 1 – 10.
- De Boor, C. “A Practical Guide to Spline”, 2000, 1. ed. N.Y: Springer, 241 p.
- Fonseca Jr, J.N., Carvalho, J.C.M., 2005. Three-Dimensional Representation and Surface Definition Using Nurbs. 1st International Congress University-Industry Cooperation - UNINDU 2005.
- Liang, K. M.; Khoo, B. E., Rajeswari, M., “A Novel And Fast Shape Description Method Using Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS)”. In: National Conference on Computer Graphics and Multimedia (COGRAMM), 2002, Melaka, Malásia.
- Liang, K. M.; Rajeswari, M.; Khoo, B. E. “Similarity Measure Determination From NURBS-Warping Method”. In: 7th International Conference on Control, Automation, Robotics e Vision (ICARCV), 7, 2002, Singapura. p.1222 – 1227.
- Lyche, T.; Morken, K.; “Spline Methods Draft”, 2008, Department of Informatics Centre of Mathematics for Applications, University of Oslo, 235 p.
- Piegl, L.; Tiller, W., “The NURBS Book”, 1997, 2. ed. N.Y: Springer, 641 p.
- Remondino, F. “From Point Cloud to Surface: The Modeling and Visualization Problem”, 2003, In: Workshop on Visualization and Animation of Reality-Based 3D Models, Switzerland.
- Rogers, D. F., “An Introduction to NURBS: With Historical Perspective”, 2001, 1. ed. San Diego: Morgan Kaufmann Publishers, 309 p.
- Smith, R. E. Jr.; Price, J. M.; Howser, L. M., “A Smoothing Algorithm Using Cubic Spline Functions”, 1974, National Aeronautics and Space Administration, Washington, 87 p.

6. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

FITTING METHOD USING B-SPLINE CURVES WITH WEIGHT

Larissa Rocha Pereira, larissa.mecatronica@hotmail.com

João Carlos Mendes Carvalho, jcmendes@mecanica.ufu.br

Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2160, Campus Santa Mônica, Bloco 1M, Uberlândia. Minas Gerais. Brasil.

Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2160, Campus Santa Mônica, Bloco 1M, Uberlândia. Minas Gerais. Brasil.

Abstract. *B-splines are piecewise polynomial curves that implement local control of the curve, ie, when a control point is modified only the curve in this region suffers change, depending on the order of continuity. The B-spline function is an approximation fitting, where the control points can be calculated for the interpolation or approximation is performed in desired point. The methods of curves fitting are developed based on specific characteristics of the curve that you want, such as the radius of the curve, derived from at specific points and errors between the curve obtained and the desired curve. For ensuring the local control, when such methods of fitting are applied at specific points of the curve B-spline already defined, are changed only those points, without the need of concern with the change of the curve in other regions, giving better results for the approximation method. The objective of this paper is to present the fitting method using B-spline closed with weights. The method consists in reconstructing the section of an object from a set of known points of the object obtained by a three-dimensional scanner, where each point has a weight representing its importance in defining the curve. In this paper will be analyzed how to define the weight of each point of the object and the adjustments made to curve seeking the reconstruction of the section object. It is shown, through examples, that the adjustments made in the curve significantly improve your final performance.*

Keywords: *B-spline, B-spline with wheight, approximation, curve fitting*