

# EQUAÇÕES DA TURBULÊNCIA: MÉDIA VERSUS FILTRAGEM

## Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica  
Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos  
Campus Santa Mônica – 38400-902 – Uberlândia – MG  
[aristeus@mecanica.ufu.br](mailto:aristeus@mecanica.ufu.br)

## Sérgio Said Mansur

Universidade Estadual Paulista – UNESP Ilha Solteira  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Laboratório de Visualização de Escoamentos  
[mansur@dem.feis.unesp.br](mailto:mansur@dem.feis.unesp.br)

## Jorge Hugo Silvestrini

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul  
Faculdade de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica  
[jorgehs@em.pucrs.br](mailto:jorgehs@em.pucrs.br)

**Resumo:** *Uma das principais características da turbulência é a multiplicidade de escalas temporais e espaciais. Hoje, é amplamente aceito que as equações de Navier–Stokes, acopladas à equação da continuidade, permitem modelar indistintamente escoamentos laminares e turbulentos. No entanto, a solução destas equações, para escoamentos a altos números de Reynolds, ainda não é possível com os computadores atualmente disponíveis. Um método paliativo para este problema apareceu com os trabalhos de Reynolds (1883) o qual propôs a separação dos escoamentos turbulentos em uma parte média e em uma parte flutuante. Partindo desta noção e submetendo as equações de Navier–Stokes a um operador média, foram derivadas as chamadas "Equações Médias de Reynolds", as quais devem ser modeladas, uma vez que este procedimento faz aparecer um tensor adicional. Na verdade, este conceito de média facilita a explicação matemática da metodologia empregada, porém mascara e dificulta a compreensão de alguns aspectos importantes que estão por trás deste procedimento. Por outro lado, o conceito de filtragem foi lançado mais recentemente, por Smagorinsky (1963), para o estabelecimento da metodologia de Simulação de Grandes Escalas. Neste caso, o espectro de escalas da turbulência é separado em dois grupos, as chamadas Grandes Escalas e as Escalas Sub-Malha, ou Pequenas Escalas. No presente artigo interpreta-se, de maneira comparativa, os dois métodos de dedução das equações da turbulência, propondo-se uma visão geral unificada para este conjunto de equações. Além disto, discute-se as características mais importantes destas duas grandes linhas, com as quais se aborda a problemática do fechamento da turbulência. A discussão aqui apresentada limita-se ao equacionamento da turbulência no espaço físico, não contemplando o que acontece em espaços espectrais.*

**Palavras chave:** *Turbulência, equações médias de Reynolds, equações filtradas, Simulação de Grandes Escalas, modelagem sub-malha.*

## 1. Introdução

A magia e a complexidade dos escoamentos turbulentos têm atraído a atenção de engenheiros, filósofos e cientistas, há vários séculos, como testemunham os esboços e as anotações de Leonardo da Vinci, que denotam as reflexões de sua mente brilhante sobre o assunto. A beleza do fenômeno não passou despercebida aos olhos atentos de grandes pintores, como Vincent Van Gogh, que incluíram em suas paisagens exuberantes manifestações da turbulência nos fluidos.

Na natureza, assim como nos processos controlados das aplicações tecnológicas, os escoamentos turbulentos constituem a regra. Apenas a minoria dos escoamentos é laminar. O controle da turbulência é de fundamental importância em inúmeros ramos das ciências, justificando os esforços de pesquisa que têm sido feitos por muitos pesquisadores, ao longo de vários séculos. Compreender a física da turbulência e, também, os mecanismos que de transição à turbulência constitui um passo fundamental nesta direção. Neste contexto, merecem destaque os trabalhos pioneiros de Osborn Reynolds (Reynolds, 1883 e Reynolds, 1884), que além de evidenciarem experimentalmente a transição à turbulência, estabeleceram propostas concretas de como tratar matematicamente os escoamentos turbulentos. Com base nos resultados de seus experimentos, Reynolds constatou que um escoamento turbulento apresenta flutuações temporais e espaciais das propriedades a ele associadas. Esta, aliás, é uma das características mais marcantes da turbulência nos fluidos. Como forma de tratar matematicamente o problema, este famoso cientista propôs que as variáveis dependentes do escoamento fossem, então, decompostas naquilo que ele denominou de parte média e parte flutuante, segundo o procedimento abordado a seguir.

## 2. Simulação Numérica Direta

As equações de conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia, para escoamentos newtonianos incompressíveis podem ser escritas na forma:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathbf{n} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) = + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{a} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (3)$$

Em princípio, a solução numérica das Equações (1), (2) e (3) para todas as escalas presentes num dado escoamento é possível e caracteriza a abordagem denominada Simulação Numérica Direta (*DNS – Direct Numerical Simulation*). Entretanto, devido ao elevado número de graus de liberdade dos escoamentos turbulentos, este tipo de resolução apresenta, quase sempre, custos computacionais proibitivos, sendo viável apenas para escoamentos a números de Reynolds moderados. De fato, o número de graus de liberdade de um escoamento turbulento aumenta substancialmente com o número de Reynolds.

## 3. Equações Médias de Reynolds para a Turbulência

Reynolds propôs submeter as equações (1), (2) e (3) a um processo de média temporal, determinando-se as seguintes equações para o comportamento médio da velocidade, da pressão e da temperatura:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle = -\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{n} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_j T \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right). \quad (6)$$

Nota-se que, como consequência direta do processo de média temporal, os termos transientes das equações (2) e (3) são identicamente nulos. Observando as equações (5) e (6) vê-se que elas são equações de conservação para as variáveis dependentes  $\langle u \rangle$  e  $\langle T \rangle$ . No entanto, os termos advectivos  $\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}$  e  $\frac{\partial \langle u_j T \rangle}{\partial x_j}$  são representativos da "média" dos produtos, o que torna estas equações insolúveis nas formas em que elas estão. Reynolds propôs então decompor  $u_i = \langle u_i \rangle + u'_i$  e  $T = \langle T \rangle + T'$  nas equações (5) e (6), resultando as seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u'_i u'_j \rangle + \langle u'_i \langle u_j \rangle \rangle + \langle \langle u_i \rangle u'_j \rangle \right) = -\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{n} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle u_j \rangle \langle T \rangle + \langle u'_j T' \rangle + \langle u'_j \langle T \rangle \rangle + \langle \langle u_j \rangle T' \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right). \quad (8)$$

Considerando o processo de média temporal, as seguintes propriedades podem ser demonstradas:

$$\langle u'_i \langle u_j \rangle \rangle = \langle \langle u_i \rangle u'_j \rangle = \langle u'_j \langle T \rangle \rangle = \langle \langle u_j \rangle T' \rangle = 0; \quad \langle \langle u \rangle \rangle = \langle u \rangle \quad \text{e} \quad \langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle, \quad (9)$$

o que só é verdadeiro se admitir que  $\langle u_i \rangle$ ,  $\langle u_j \rangle$  e  $\langle T \rangle$  são constantes com o tempo e ainda que  $\langle u'_i \rangle = \langle u'_j \rangle = \langle T' \rangle = 0$ . Assim, aplicando as propriedades (9) às equações (7) e (8), elas podem ser rescritas como:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle = -\frac{1}{r} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathbf{n} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \langle u'_i u'_j \rangle \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \langle u_j \rangle \langle T \rangle \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_j T' \rangle \right). \quad (11)$$

Estas equações, juntamente com a equação da conservação da massa, são chamadas Equações Médias de Reynolds (ou *RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*). Enfatiza-se que se trata de média temporal, uma vez que, neste caso, não faz sentido falar em média espacial ou mesmo em média de conjunto.

Com o passar do tempo e com o uso destas equações, a comunidade científica mundial, por razões de metodologias numéricas, ou mesmo por razões físicas, passou a incorporar nestas equações o termo transiente, simplesmente rescrevendo-as na seguinte forma:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle = -\frac{1}{r} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathbf{n} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \langle u'_i u'_j \rangle \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \langle u_j \rangle \langle T \rangle \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_j T' \rangle \right). \quad (13)$$

Com esta nova forma, as Equações (12) e (13) adquirem, também, novos significados. De início, a incorporação dos termos transientes impede o uso da nomenclatura média, uma vez que não se pode mais falar de média temporal. Apesar disto, as equações (12) e (13) são chamadas de Equações Médias de Reynolds Transientes (*Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations – URANS*), mas, a rigor, esta nomenclatura é incompatível com os termos que compõem estas equações. De fato, se fosse considerada uma média temporal os termos transientes seriam nulos e se fossem feitas médias espaciais todos os termos que envolvem derivadas espaciais se anulariam. Assim, chega-se à conclusão que, incluindo-se os termos transientes, o chamado operador média de Reynolds, que foi aplicado às Equações (1), (2) e (3), na realidade deve ser interpretado como um operador de filtragem, como abordado na discussão que se segue.

#### 4. Equações de Navier–Stokes Filtradas para a Turbulência

A noção de filtragem das equações de Navier–Stokes tomou força com os trabalhos de Smagorinsky (1963), que propôs separar as escalas da turbulência em *grandes escalas* e em *escalas sub-malha*. Esta noção está ilustrada na Figura 1(a), onde se tem a distribuição temporal de uma função  $f(\bar{x}, t)$ , da sua parte filtrada  $\bar{f}(\bar{x}, t)$  e da sua parte flutuante  $f'(\bar{x}, t)$ .

Esta noção de separação de escalas por um processo de filtragem é mais rica e condiz melhor com o comportamento físico da turbulência, quando comparado com a noção de escoamento médio.

O processo de filtragem requer a definição de uma função filtro  $G(\bar{x}, t)$  com comprimento e tempo característicos  $\bar{x}_c$  e  $t_c$  que determinam o número de onda ou a frequência de corte sobre o espectro. Definida esta função, o processo de filtragem é estabelecido como sendo o produto de convolução da função a ser filtrada,  $f(\bar{x}, t)$ , com a função filtro,  $G(\bar{x}, t)$ , ou seja:

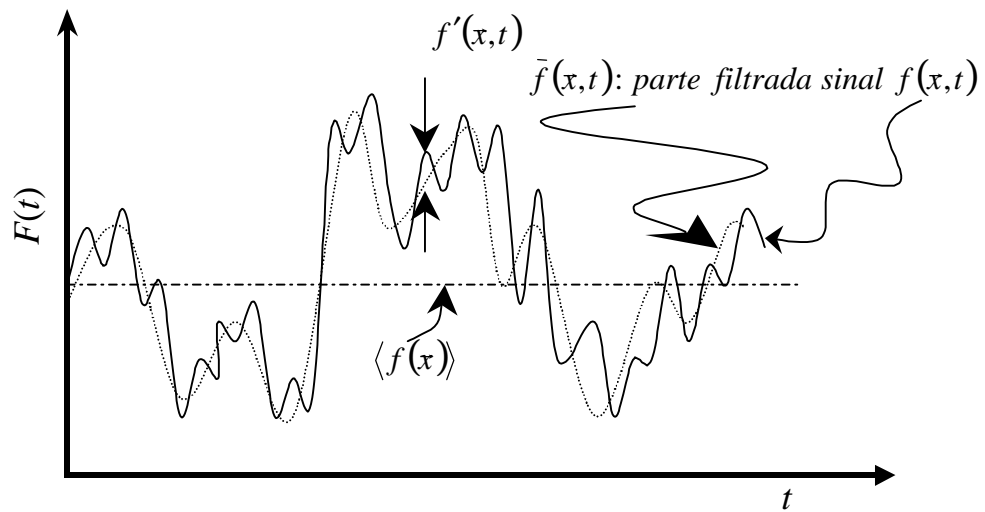
$$\bar{f}(\bar{x}, t, \bar{x}_c) = \int_V f(\bar{x}, t) G(\bar{x} - \bar{x}_c) d\bar{x}, \quad (14)$$

para uma filtragem espacial, e

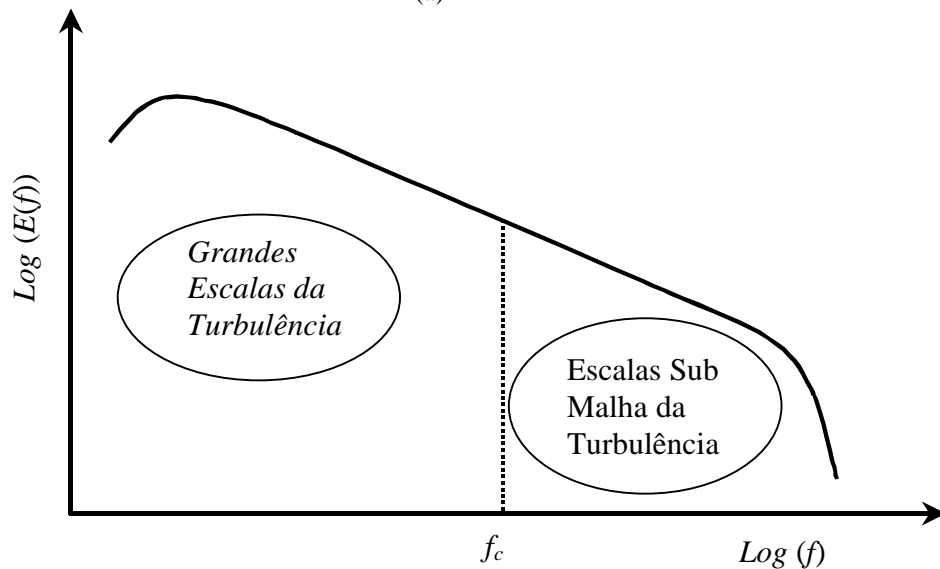
$$\bar{f}(\bar{x}, t, t_c) = \int_T f(\bar{x}, t) G(t - t_c) dt, \quad (15)$$

para uma filtragem temporal.

As escalas de corte  $\bar{x}_c$  e  $t_c$  no espaço e no tempo definem também o número de onda  $\bar{k}_c = 1/\bar{x}_c$  e a frequência  $f_c = 1/t_c$  que separam o espectro em duas partes, conforme ilustrado no espectro em frequência da Figura 1 (b). O operador  $(\bar{\quad})$  que aparece acima pode representar tanto a filtragem temporal quanto a filtragem espacial. O processo de média  $(\langle \quad \rangle)$  pode ser interpretado como uma filtragem mais rigorosa, onde nenhuma frequência pode passar, restando apenas as características médias do processo físico em questão.



(a)



(b)

Figura 1. Espectro de energia ilustrando a distribuição de energia cinética turbulenta  $E(f)$  sobre a frequência  $(f)$ . Mostra-se também a frequência de corte  $f_c$  que divide o espectro em duas partes: grandes escalas e escalas sub-malha da turbulência.

O processo de média é a situação mais rigorosa da filtragem, onde o comprimento e o tempo característicos de filtragem são muito grandes ou pelo menos maiores que as escalas características do fenômeno em si. Submetendo-se as equações (1)–(3) a este processo de filtragem chega-se formalmente às equações (7) e (8), acrescidas dos termos transientes.

No entanto, as propriedades (9) não são mais atendidas, exceto no extremo, onde a filtragem se reduz à média. Logo, filtrando-se as equações (1) a (3), chega-se às equações seguintes:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{n} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i \bar{u}'_j} - \overline{\bar{u}_i u'_j} - \overline{\bar{u}_i \bar{u}'_j} \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{u'_j T'} - \overline{u'_j \bar{T}} - \overline{\bar{u}_j T'} - \overline{\bar{u}_j \bar{T}} \right). \quad (17)$$

As equações (16) e (17) diferem das equações (10) e (11) pela presença dos termos de variações temporais e dos tensores e fluxos adicionais descritos abaixo:

$$C_{ij} = \overline{u'_i \bar{u}'_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j}, \quad (18)$$

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}'_j}, \quad (19)$$

$$C_{Tj} = \overline{u'_j \bar{T}} - \overline{\bar{u}_j T'}, \quad (20)$$

$$L_{Tj} = \overline{\bar{u}_j \bar{T}}. \quad (21)$$

Estes tensores e fluxos são denominados tensor cruzado ( $C_{ij}$ ), tensor de Leonard ( $L_{ij}$ ), fluxo cruzado ( $C_{Tj}$ ) e fluxo de Leonard ( $L_{Tj}$ ). Estes tensores e fluxos não aparecem nas equações (10) e (11), devido às propriedades (9), as quais, na verdade, não são regras e sim exceções, como já comentado.

Os tensores e fluxos que aparecem nas equações (18) a (21) podem ser modelados de formas análogas ao tensor de Reynolds ( $\overline{u'_i u'_j}$ ) e ao fluxo turbulento ( $\overline{u'_j T'}$ ), através de correlações com os campos de velocidade e de temperatura filtrados. No entanto, com a experiência adquirida nas últimas décadas, a comunidade científica mostrou que a modelagem destes tensores e fluxos adicionais, separadamente do tensor de Reynolds ( $\overline{u'_i u'_j}$ ) e do fluxo turbulento ( $\overline{u'_j T'}$ ) não tem acrescentado muito em termos de qualidade dos resultados. Em razão disto, a partir dos trabalhos de Germano (1986), uma forma mais geral de decompor o termo não linear foi proposta, a qual é apresentada e comentada no item seguinte.

## 5. Equações Globais Filtradas para a Turbulência

Como já comentado, as Equações (16) e (17) diferem das equações (10) e (11) pela presença dos termos transientes e dos tensores e fluxos adicionais, equações (18) a (21). Em ambos os processos, recai-se no problema ligado ao termo de transporte advectivo, por aparecer produtos filtrados ( $\overline{u_i u_j}$ ,  $\overline{u_j T}$ ), enquanto as equações de conservação são relativas às variáveis filtradas isoladas ( $\bar{u}_i$  e  $\bar{T}$ ). A fim de enfatizar este fato, estas equações são aqui rescritas:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{n} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right). \quad (23)$$

Estas equações só são passíveis de solução se os termos ( $\overline{u_i u_j}$ ) e ( $\overline{u_j T}$ ) forem substituídos por ( $\bar{u}_i \bar{u}_j$ ) e ( $\bar{u}_j \bar{T}$ ). Assim, define-se o tensor de Reynolds e o fluxo turbulento globais (Germano, 1996), de forma a fazer aparecer, nos termos advectivos, os produtos ( $\bar{u}_i \bar{u}_j$ ) e ( $\bar{u}_j \bar{T}$ ). Estas definições são estabelecidas abaixo:

$$\mathbf{t}_{ij} \equiv -(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j), \quad (24)$$

$$q_j \equiv -(\overline{u_j T} - \bar{u}_j \bar{T}). \quad (25)$$

Estas definições permitem a obtenção das equações para a turbulência, sem a necessidade de utilizar as famosas propriedades já apresentadas na equação (9) e sem os tensores adicionais apresentados nas equações (18) a (21). As equações globais da turbulência são então estabelecidas como segue:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{n} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \mathbf{t}_{ij} \right), \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + q_j \right). \quad (27)$$

Ressalta-se que a dedução destas equações não passa pelo conceito de separação de escalas de forma explícita. No entanto, as definições expressas pelas equações (24) e (25) trazem implicitamente esta noção.

As equações (26) e (27) são as mesmas, tanto no que se refere às chamadas “Equações Médias de Reynolds Transientes-URANS”, tanto no que se refere às equações filtradas para turbulência. Os tipos de modelos utilizados para fechar estas equações são diferentes e caracterizam os diferentes tipos de metodologias.

Nota-se que, mesmo sendo as duas equações formalmente as mesmas, o tensor  $\mathbf{t}_{ij}$  e o fluxo  $q_j$ , modelam processos físicos diferentes, dependendo da forma que se olha estas equações. Se elas são consideradas URANS, o tensor e o fluxo turbulento adicionais modelam a transferência de energia e de quantidade de movimento entre o escoamento médio e as suas flutuações; se elas são consideradas como equações filtradas, o tensor de Reynolds sub-malha e o fluxo turbulento modelam a transferência de quantidade de movimento e de energia entre as grandes escalas e as pequenas escalas da turbulência.

Estas equações gerais podem ser fechadas com modelos do tipo comprimento de mistura de Prandtl, modelos  $k-L$ , modelos  $k-w$ , modelos  $k-e$ , assim como modelos das tensões de Reynolds. Com estas famílias de modelos, via de regra, o interesse do usuário está voltado para o comportamento médio dos escoamentos.

Estas equações podem também ser fechadas com o uso de modelos sub-malha, com os quais se pratica Simulação de Grandes Escalas. Neste caso, o interesse do usuário deve estar voltado para o comportamento dinâmico do escoamento, onde parte do espectro de frequências ou de números de onda é calculada diretamente da solução das equações filtradas. Esta parte do espectro está ilustrada na Figura 1 (b). O processo de interação não linear entre as duas bandas do espectro (banda das grandes escalas e banda das escalas sub-malha) deve ser modelada através de modelos sub-malha.

## 6. Discussão

As equações para a turbulência podem ser deduzidas com o uso dos procedimentos de filtragem das variáveis, o que implica em separação das escalas da turbulência. Elas podem ser generalizadas com a definição do tensor turbulento e do fluxo turbulento, feitas através das equações (24) e (25). As equações (26) (27) são gerais e servem como ponto de partida para a aplicação de qualquer tipo de modelagem da turbulência (uso de modelos para fechamento das equações). Elas servem também de ponto de partida para os diferentes tipos de filosofias de modelagem. A escolha de um tipo ou outro de modelo deve ser calcada nos objetivos almejados com a simulação. Se, por exemplo, o objetivo for a obtenção do comportamento médio temporal do escoamento, deve-se buscar o uso de modelos cuja solução seja mais econômica, em termos computacionais, por exemplo, a modelagem  $k-e$  ou a modelagem das tensões de Reynolds. Por outro lado, se o objetivo almejado com a simulação for a aquisição do comportamento transiente e das instabilidades que caracterizam fisicamente os escoamentos, deve-se também fazer a opção mais apropriada em termos de modelagem. Para este último objetivo, a modelagem sub-malha apresenta-se, atualmente, como a opção mais apropriada, uma vez que ela deve ser, naturalmente, mais simples e mais barata do ponto de vista computacional (a modelagem em si!). No entanto a filosofia de Simulação de Grandes Escalas, praticada com a modelagem sub-malha, é mais exigente em termos de refinamento de malha, o que a torna mais cara computacionalmente.

Outros aspectos muito importantes a serem discutidos, se referem às características metodológicas a serem escolhidas para a prática das diferentes filosofias. Para a prática da modelagem  $k-e$  ou similares, recomenda-se esquemas de discretização temporal e espacial mais simples e de menor ordem de precisão, por serem, conseqüentemente, mais baratos. Para esta prática seriam desnecessários esquemas de alta ordem de precisão, uma vez que esta família de métodos levam a modelos de turbulência muito viscosos e que impedem a simulação de detalhes mais finos dos escoamentos. Por exemplo, se se busca a simulação de uma esteira de vórtices à jusante de um corpo submerso, esta modelagem não é recomendável, uma vez que a viscosidade turbulenta elevada inibe o processo de amplificação de perturbações e geração das instabilidades físicas.

Por outro lado, quando se almeja praticar Simulação de Grandes Escalas, é recomendável o uso de esquemas de discretização temporal e espacial de ordens de precisão mais elevadas. Isto é muito importante para a redução dos efeitos de viscosidade numérica que podem amortecer as instabilidades físicas a serem simuladas.

Ainda dentro desta ótica de escolha de uma dada metodologia para a simulação de um escoamento turbulento, ressalta-se a importância de uma boa escolha dos esquemas de acoplamento da pressão e da velocidade. Para modelagem  $k - \epsilon$  e similares, um bom acoplamento completamente implícito é aconselhável por ser mais estável e permitir atingir o regime permanente mais rapidamente. Por outro lado, quando se opta pelo uso de SGE, é natural escolher um método semi-implícito, pois a natureza instável dos resultados físicos almejados, exige o uso de pequenos passos de tempo para que se possa capturar o comportamento fino, no tempo e no espaço, das instabilidades físicas dos escoamentos. Por outro lado a estabilidade numérica do processo de avanço temporal deve ser garantido por pequenos passos de tempo, que automaticamente garante a simulação numérica dos detalhes físicos dos escoamentos. Neste caso seria mais caro adotar esquemas implícitos que exigem, a solução de um maior número de sistemas lineares (pressão e velocidades).

Desta forma, o que se deixa como contribuição técnica neste artigo, é a unificação das equações da turbulência e algumas recomendações para o uso das diferentes metodologias de modelagem da turbulência, em função da necessidade associada à simulação a ser desenvolvida.

## 7. Referências Bibliográficas

Germano, M., 1996, A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in filtered Navier-Stokes equations, *Phys. Fluids*, vol. 29 (7), pp. 2323-2324.

Reynolds, O. 1883. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans. R. Soc., London* 174, pp. 935-982.

Reynolds, O. 1884. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc., London* 186, pp. 123-161.

Smagorinsky, J., 1963, "General Circulation Experiments with Primitive Equations", *Mon. Weather Rev.*, vol 91, pp. 2501-2514.