

# POTÊNCIA LIMITE DE CÉLULAS DE COMBUSTÍVEL NUCLEAR CILÍNDRICAS DE SEÇÃO BICÔNCAVA

## Thiago Antonini Alves

Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP – Campus Ilha Solteira  
Av. Brasil, 56, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP  
[antonini@dem.feis.unesp.br](mailto:antonini@dem.feis.unesp.br)

## Marcelo Ferreira Pelegrini

Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP – Campus Ilha Solteira  
Av. Brasil, 56, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP  
[marcelo@dem.feis.unesp.br](mailto:marcelo@dem.feis.unesp.br)

## Emanuel Rocha Woiski

Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP – Campus Ilha Solteira  
Av. Brasil, 56, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP  
[woiski@dem.feis.unesp.br](mailto:woiski@dem.feis.unesp.br)

## Cassio Roberto Macedo Maia

Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP – Campus Ilha Solteira  
Av. Brasil, 56, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP  
[cassio@dem.feis.unesp.br](mailto:cassio@dem.feis.unesp.br)

**Resumo.** Meios difusivos que apresentam fontes distribuídas em seu domínio são de grande interesse na engenharia. Em particular, as células de combustível de reatores nucleares representam uma importante aplicação de problemas desta natureza. Estas células apresentam dimensões reduzidas e liberam altas taxas de energia térmica devido ao processo de reação no elemento fissil. A máxima potência possível de ser extraída em tais reatores está relacionada com a temperatura limite suportável por uma célula e corresponde a temperatura do ponto de fusão do combustível. Este limite crítico define a condição de potência limite e se constitui em um parâmetro fundamental nos projetos de reatores. Naturalmente, a potência limite não depende somente das propriedades termofísicas do combustível, mas também das dimensões e do formato da célula. Neste sentido, o presente trabalho trata do estudo de como o parâmetro potência limite é influenciado pela geometria das células de combustível cilíndricas com seção transversal de formato bicôncavo. Devido às grandes variações de temperatura no interior da célula, foi admitido que a propriedade condutividade térmica apresentasse uma dependência genérica com a temperatura. Desta forma, o problema difusivo é descrito através de uma equação diferencial parcial não linear. Para facilitar o tratamento analítico, a equação foi, então, convenientemente linearizada pela Técnica da Transformada de Kirchhoff. Para a obtenção de solução numérica, um programa em Python foi desenvolvido, reutilizando classes de Ellipt2d, um solver elíptico de fonte aberta. O domínio foi dividido em elementos finitos triangulares lineares e o sistema de equações resultante da aplicação do Método de Galerkin foi resolvido para cada conjunto de parâmetros. A influência do formato geométrico sobre a potência limite é, então, discutida e os resultados numéricos obtidos são comparados com aqueles encontrados na literatura.

**Palavras-chaves.** Células de combustível, problemas difusivos não lineares, transformação conforme, Python.

## 1. Introdução

As células de combustível nos reatores nucleares de potência apresentam dimensões reduzidas e liberam altas taxas de energia térmica resultante da reação de fissão nuclear do elemento fissil. A máxima potência específica possível de ser liberada em tais reatores está relacionada com a temperatura limite suportável por uma célula e corresponde à temperatura do ponto de fusão do combustível. Este limite crítico define o parâmetro potência específica limite (Glasstone & Sesonske, 1994) e é fundamental no projeto de construção da célula e de todo o conjunto feixe de núcleo de combustível. A maximização da transferência da energia gerada pelo elemento fissil para o fluido de trabalho, sem ultrapassar o limite crítico, possibilita a construção de vasos de pressão de menores dimensões, bem como o estabelecimento de um inventário menor de combustível. Desta forma, o desenvolvimento de pesquisas em células de combustível está vinculado, entre outras ações, à maximização da potência específica liberada pelo elemento fissil.

Atuando nesta linha de pesquisa, Tu (1974) propôs um novo projeto de elemento de combustível cilíndrico com seção transversal no formato bicôncavo, similar ao formato dos glóbulos vermelhos do sangue humano. Esta proposta foi inspirada no fato da grande capacidade de difusão de oxigênio dos glóbulos vermelhos através de sua membrana (Adams, 1973) e no fato da similaridade dos mecanismos que governam os processos de difusão de calor e de massa. Em seu trabalho original, Tu (1974) não resolveu a equação da difusão devido ao tratamento matemático complexo envolvido no problema. Entretanto, resultados preliminares para uma única célula com seção transversal no formato

bicôncavo similar ao da célula do glóbulo vermelho foram obtidos indiretamente através da conversão de resultados de medidas experimentais de deflexão de membranas elásticas, de mesma geometria, que também é regida por equações análogas às do processo de difusão. Fazendo uso da Técnica da Transformada Integral, Maia *et al.* (2002) obtiveram a solução analítica para este problema e apresentaram resultados precisos para diversos parâmetros físicos de interesse. Através deste mesmo procedimento analítico, Maia *et al.* (2003) obtiveram mais recentemente um vasto conjunto de resultados para a taxa de geração térmica limite em células de combustível de seção elíptica e retangular com diversas razões de aspecto e em células de formato bicôncavo com diversos graus de depressão.

Dando continuidade a esta mesma linha de pesquisa, apresenta-se neste trabalho o cálculo numérico da distribuição de temperatura e da potência específica limite de reatores que utilizam células de combustível de formato bicôncavo. Devido a grande variação de temperatura no interior de tais células foi admitido o comportamento real da condutividade térmica com a temperatura. Para facilitar o tratamento analítico, a equação da difusão foi convenientemente linearizada através da técnica da transformada de Kirchhoff. Para fins de comparação, foi utilizado o mesmo procedimento adotado por Tu (1974) e Maia (2002) na definição dos contornos bicôncavos. Para a obtenção de solução numérica da equação da difusão linearizada foi utilizado o Método de Galerkin sobre uma malha não estruturada de elementos finitos triangulares. Finalmente, para a resolução do sistema de equações gerado foi desenvolvido, então, um programa em *Python* fazendo uso de um *solver* elíptico de fonte aberta. Os resultados obtidos para os parâmetros físicos de interesse são então comparados com aqueles obtidos pela literatura para células bicôncavas com diversos graus de depressão.

## 2. Formulação matemática

Conforme proposto, será estabelecido que o termo fonte no problema físico estudado apresente-se uniformemente distribuído na pastilha de combustível. Não será tratada aqui a transferência de calor na camisa e na folga camisa-pastilha. Toda a análise será feita somente para o problema difusivo no material fissil. Como a variação da temperatura periférica da camisa é relativamente desprezível quando comparada com a magnitude das variações de temperatura presentes em toda a célula, será prescrito aqui a condição de temperatura constante no contorno da pastilha.

A equação diferencial que trata da conservação da energia no domínio de interesse é dada por

$$\nabla \cdot (k(T)\nabla T) + \dot{q}_0''' = 0, \quad T = T(x, y), \tag{1}$$

sendo que  $\dot{q}_0'''$  representa o termo fonte. A equação diferencial acima é não linear e, por isto, fazendo uso da Transformada de Kirchhoff (Ozisik, 1993), define-se uma nova variável  $T^*$  de tal forma que:

$$T^*(x, y) = \frac{1}{k_0} \int_{T_0}^{T(x, y)} k(T') dT', \tag{2}$$

sendo,  $k_0 = k(T_0)$ . Desta equação segue que

$$dT^* = \frac{1}{k_0} k(T) dT, \tag{3}$$

O gradiente desta nova variável  $T^*$  é dado por

$$\nabla T^*(x, y) = \frac{k(T)}{k_0} \nabla T(x, y). \tag{4}$$

A equação da condução é reescrita nesta nova variável como

$$\nabla^2 T^*(x, y) + \frac{\dot{q}_0'''}{k_0} = 0. \tag{5}$$

A Equação (5) é linear e não homogênea. Conhecendo-se o comportamento de  $k$  com  $T$ , é possível, através da solução de  $T^*$  e da Eq. (2), obter-se o perfil de temperatura de  $T$  na célula e, conseqüentemente, a posição onde a temperatura é máxima, bem como a potência crítica.

### 2.1. Transformação de coordenadas

Para o cilindro de seção bicôncava o sistema de coordenadas cartesianas não permite uma representação simples de seu formato. Assim, é conveniente que se proceda a uma transformação de coordenadas adequadas para facilitar a

geração de contornos com formatos bicôncavos. Para este fim, será aqui considerado o sistema de coordenadas bicôncava obtido a partir da transformação conforme (Brown & Churchill, 1995):

$$\bar{z} = \alpha \operatorname{cn}(w), \quad (6)$$

sendo que  $z = x + iv$ ,  $w = u + iv$  e  $\alpha$  é a distância focal e a função  $\operatorname{cn}(w)$  a função elíptica jacobina que obedece a seguinte relação

$$\operatorname{cn}(w)^2 + \operatorname{sn}(w)^2 = 1. \quad (7)$$

A função elíptica jacobiana  $\operatorname{sn}(w)$  é obtida por integração numérica da equação

$$w = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-x'^2)(1-mx'^2)}} dx' = \operatorname{sn}^{-1}(x), \quad \{0 < m < 1\}. \quad (8)$$

Quando se faz necessário explicitar qual o valor do parâmetro  $m$  que está sendo considerado, a função  $\operatorname{sn}(w)$  é expressa na forma:  $x = \operatorname{sn}(w|m)$ .

Através destas relações e recolocando  $w = u + iv$ , a função  $\operatorname{cn}(w)$  pode ser desenvolvida como segue

$$\operatorname{cn}(u + iv) = \frac{\operatorname{cn}(u|m)\operatorname{cn}(v|m_1) - i \operatorname{sn}(u|m)\operatorname{dn}(u|m)\operatorname{sn}(v|m_1)\operatorname{dn}(v|m_1)}{\operatorname{cn}^2(v|m_1) + m \operatorname{sn}^2(u|m)\operatorname{sn}^2(v|m_1)}, \quad (9)$$

sendo que a função  $\operatorname{dn}(u)$  é obtida pela relação

$$m \operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{dn}^2(u) = 1, \quad (10)$$

e  $m_1$ , denominado de parâmetro complementar, é dado por  $m_1 = 1 - m$ .

Reescrevendo a variável complexa  $z = x + iy$  na forma adimensional como  $Z = z/\alpha$  tem-se que  $\bar{Z} = X + iY$ . Assim, as partes reais e imaginárias são, respectivamente

$$X = \frac{\operatorname{cn}(u|m)\operatorname{cn}(v|m_1)}{\operatorname{cn}^2(v|m_1) + m \operatorname{sn}^2(u|m)\operatorname{sn}^2(v|m_1)}, \quad (11)$$

$$Y = \frac{\operatorname{sn}(u|m)\operatorname{dn}(u|m)\operatorname{sn}(v|m_1)\operatorname{dn}(v|m_1)}{\operatorname{cn}^2(v|m_1) + m \operatorname{sn}^2(u|m)\operatorname{sn}^2(v|m_1)}. \quad (12)$$

As funções  $\operatorname{sn}(u)$ ,  $\operatorname{cn}(u)$  e  $\operatorname{dn}(u)$  são periódicas e seus valores estão sempre no intervalo  $(-1 < m < 1)$ . Com respeito ao argumento destas funções elípticas, define-se o parâmetro "Quarto do Período", designado por  $\kappa(m)$ , como

$$\kappa(m) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-X^2)(1-mX^2)}} dx = \operatorname{sn}^{-1}(1). \quad (13)$$

Esta integral é conhecida como a integral elíptica completa jacobina de primeira espécie e com esta definição é interessante especificar o argumento  $u$  em termos do quarto de período  $\kappa$ .

A transformação conforme dada pela Eq. (6) é capaz de representar isocurvas ( $v = v_0 = \text{constante}$ ) com formatos variados no plano  $(X, Y)$ . Quando  $m = 0$  o novo sistema de coordenadas gera famílias de círculos concêntricos, visto que, neste caso a função elíptica  $\operatorname{sn}(u|0)$  coincide com a definição da função trigonométrica  $\operatorname{sn}(u)$ . Quando  $v = v_0 \rightarrow 0$ , geram-se isocurvas no formato de placas planas finas e à medida que  $v_0$  se aproxima do valor do quarto de período correspondente,  $\kappa_1 = \kappa(m_1)$ , o novo sistema de coordenadas gera família de curvas com formatos bicôncavos onde o parâmetro  $m$  define o grau de depressão. Nas Figs. (1a) e (1b) são visualizadas as isocurvas geradas para  $m = 0,1$  e  $m = 0,5$ , respectivamente.

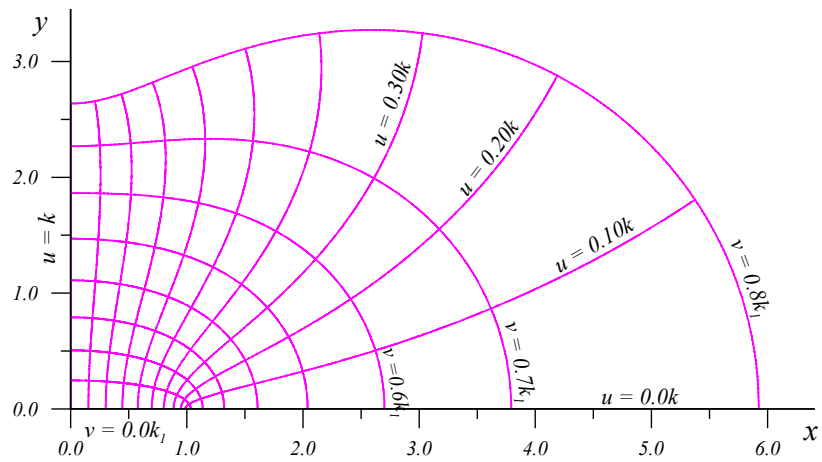


Figura 1a. Visualização das isocurvas em um quarto de período para  $m = 0,1$ .

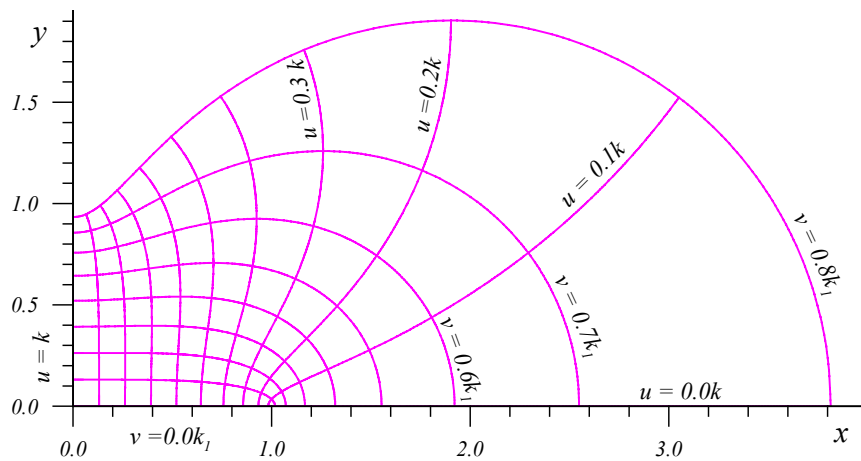


Figura 1b. Visualização das isocurvas em um quarto de período para  $m = 0,5$ .

Da definição da função  $sn(w)$  e das relações que definem  $cn(w)$  e  $dn(w)$  obtêm-se relações importantes de diferenciação para as funções  $sn(w)$ ,  $cn(w)$  e  $dn(w)$  as quais são necessárias para o cálculo dos coeficientes métricos e do Jacobiano da transformação de coordenadas:

$$\frac{d}{dw} sn(w) = cn(w) dn(w), \quad (14a)$$

$$\frac{d}{dw} cn(w) = -sn(w) dn(w), \quad (14b)$$

$$\frac{d}{dw} dn(w) = -m sn(w) cn(w). \quad (14c)$$

Os coeficientes métricos  $h_u$  e  $h_v$ , dados por:

$$h_u(u,v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2}, \quad (15a)$$

$$h_v(u,v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2}, \quad (15b)$$

sendo que  $h_u = h_v$  são obtidos fazendo uso das relações de diferenciação dadas pela Eq. (14).

O Jacobiano  $J(u,v)$  da transformação de coordenadas e o operador Laplaciano no novo sistema de coordenadas são então determinados

$$J(u,v) = h_u(u,v) h_v(u,v) = \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2, \quad (16)$$

$$\nabla^2 \theta(x,y) = \frac{1}{J(u,v)} \nabla^2 \theta(u,v) = \frac{1}{J(u,v)} \left( \frac{\partial^2 \theta(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u,v)}{\partial v^2} \right). \quad (17)$$

Assim, a equação da energia no plano transformado  $(u,v)$  é escrita como segue

$$\frac{\partial^2 \theta(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u,v)}{\partial v^2} = H(u,v), \quad (18)$$

com

$$\theta(u,v) = \frac{(T^*(u,v) - T_w^*) k_0}{\alpha^2 \dot{q}'''}, \quad (19)$$

e,

$$H(u,v) = -J(u,v). \quad (20)$$

As condições de contorno para o plano  $(u,v)$  são dadas por

$$\theta(u,v) = 0, \quad \{v = v_0\}, \quad (21a)$$

$$\frac{\partial \theta(u,v)}{\partial v} = 0, \quad \{v = 0\}, \quad (21b)$$

$$\frac{\partial \theta(u,v)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, \kappa, 2\kappa, 3\kappa, 4\kappa\}. \quad (21c)$$

## 2.2. Potência crítica

O valor da potência específica  $P$  é definido em termos da taxa média de geração de calor,  $\bar{q}'''$ , no reator:

$$P = \frac{\xi \bar{q}'''}{\rho_f}, \quad (22)$$

sendo que  $\rho_f$  é a massa específica do elemento fissil e  $\xi$  é a fração da taxa de geração que ocorre na pastilha de combustível.

Devido às características geométricas do reator, a geração térmica deverá ser máxima nas barras de combustível localizadas na região central e mínima naquelas localizadas próximo à região fronteira do reator. Assim, para um dado nível de potência da unidade termo-nuclear, a taxa de geração térmica média pode ser escrita em função da taxa de geração máxima  $\dot{q}_0'''$ , liberada pelas barras de combustível centrais, como:

$$\bar{q}''' = \frac{\dot{q}_0'''}{f_{tot}}, \quad (23)$$

sendo que,  $f_{tot}$  é o fator de pico de potência total, que depende, principalmente, da geometria do reator e das características construtivas das barras de combustível. Da definição de  $\theta$ , o termo fonte  $\dot{q}_0'''$  pode ser escrito em função da temperatura máxima que deverá ocorrer no interior destas células centrais:

$$\dot{q}_0''' = \frac{(T_{máx}^* - T_w^*)}{\alpha^2 \theta_{máx}}. \quad (24)$$

Em particular, o caso limite admissível para o termo fonte  $\dot{q}_0''$ , corresponde a situação em que a temperatura máxima alcança o limite crítico para as células localizadas na região central do reator

$$\dot{q}_{lim}'' = \frac{(T_{lim}^* - T_w) k_0}{\alpha^2 \theta_{max}} \quad (25)$$

O termo  $\theta_{max}$  é obtido pela busca do valor máximo de  $\theta(u,v)$ , calculado pela Eq. (18), e os termos  $T_{lim}^*$  e  $T_w^*$  são obtidos pela integração da Eq. (2). Assim a potência crítica pode ser então determinada

$$P_c = \left( \frac{\dot{q}_{lim}''}{\rho_f} \right) \left( \frac{\xi}{f_{tot}} \right) \quad (26)$$

### 3. Solução numérica por elementos finitos

Para as soluções numéricas, desenvolveu-se um programa computacional baseado em *Ellipt2d* (Peltzer & Mollis, 2000), um solvador elíptico de código aberto em *Python*, que utiliza elementos finitos triangulares e o Método de Galerkin (Jiang, 1998), sobre domínios irregulares, com diversas condições de contorno. *Ellipt2d*, por sua vez, se vale dos códigos de fonte aberta (em linguagem C) *Triangle*, para a produção automática de malhas regulares ou irregulares, e *SuperLU*, para a solução eficiente dos sistemas de equação com matrizes esparsas resultantes.

Valendo-se da rica estrutura de dados orientada a objetos, bem como da vasta biblioteca de módulos e do caráter interativo e multiplataforma de *Python*, as classes de *Ellipt2d* foram utilizadas em um programa computacional adequado aos problemas em questão, tornando possível, assim, a obtenção de resultados tanto para o problema linearizado dado pela Eq. (5), como para a formulação original com *condutividade térmica não linear*, Eq. (1), sendo que neste último caso os resultados serão apresentados e discutidos em outro trabalho. Para o pós-processamento, empregou-se *MayaVi* (Ramachandran, 2002), um excelente visualizador 3D, de código aberto e também em *Python*, cuja especialidade é a manipulação gráfica de arquivos no formato da biblioteca gráfica aberta VTK (*Visualization Tool Kit*), (Ramachandran, 2000).

### 4. Resultados e discussões

A função elíptica  $sn(x)$  foi determinada a partir de sua função inversa, Eq. (8), pelo Método de Newton Raphson e as demais funções,  $cn(x)$  e  $dn(x)$  foram determinadas através das relações dadas pelas Eq.(10) e Eq. (12). O Quarto de Período  $\kappa$ , para um dado parâmetro  $m$ , é calculado através da função  $sn^{-1}(x)$ , Eq. (13).

A temperatura máxima  $\theta_{max}$  foi determinada para diversos formatos bicôncavos sendo aqui apresentados os resultados correspondentes às células com parâmetros  $m = 0,5$  e  $m = 0,7$  e  $v_o = 0,3\kappa_l$ ;  $0,5\kappa_l$ ;  $0,7\kappa_l$  e  $v_o = 0,9\kappa_l$ .

Para o cálculo de  $\dot{q}_{lim}''$  é necessário especificar o combustível nuclear, bem como as dimensões geométricas da célula. Para o cálculo da potência crítica do reator com células no novo formato, e ainda verificar o aumento do parâmetro  $P_c$  quando confrontado com a potência da tradicional célula de seção circular, é necessário que se iguale a área da seção transversal de ambas. Para fins de comparação, será admitida a mesma célula adotada por Tu (1974), ou seja, uma célula de um reator BWR com características apresentadas na Tab. 1.

Tabela 1. Características da célula de um reator BWT (Tu, 1974).

Especificações	
Diâmetro da pastilha cilíndrica de UO <sub>2</sub>	0,0124 m
Temperatura na superfície da pastilha de UO <sub>2</sub>	722 °C
Temperatura limite (ponto de fusão do UO <sub>2</sub> )	2800 °C
Massa específica do Urânio, $\rho_f$ , correspondente ao UO <sub>2</sub>	8990 kg/m <sup>3</sup>
Fração da taxa de geração térmica no combustível ( $\xi$ )	96 %
Fator de pico de potência total ( $f_{tot}$ )	2,7

Na Tabela 2 são apresentados os resultados obtidos para os diversos formatos bicôncavos analisados. O fator  $\xi_t$  de intensificação de potência é aqui definido como

$$\xi_t = \frac{P_c}{P_{co}} \quad (27)$$

sendo que  $P_{co}$  corresponde a potência específica limite para a célula de combustível de seção circular. Observa-se que os valores de  $P_c$  obtidos para  $m = 0,7$  são relativamente maiores que os obtidos para  $m = 0,5$ . Isto é devido ao aumento

da distância focal com  $m$ , o que propicia maiores áreas superficiais para células de mesma área transversal. Nestes casos, conseqüentemente, a resistência térmica interna diminui intensificando a transferência de calor no contorno. Quando se fixa o parâmetro  $m$  observa-se que para valores de  $v_o \rightarrow 0$  a depressão do formato bicôncavo é pequena. O formato das células nestes casos mais se aproxima ao formato de placas delgadas as quais apresentam baixa resistência térmica. No extremo oposto, quando  $v_o \rightarrow \kappa_l$ , os formatos bicôncavos apresentam grande depressão, fazendo com que a área superficial aumente em relação aos casos de células com valores intermediários do parâmetro  $v_o$ . Assim, em vista do exposto, observa-se que os valores da potência crítica crescem para  $v_o \rightarrow 0$  e para  $v_o \rightarrow \kappa_l$ .

Foi utilizado no presente trabalho malhas não estruturadas a partir de elementos finitos triangulares lineares com 3000 nós para todos os problemas analisados. Para fins de comparação como o trabalho de Tu, foram geradas seções transversais bicôncavas, com parâmetros  $m = 0$ , e  $v_o = 0$ , correspondente a geometria que mais se aproxima de uma célula de glóbulo vermelho do sangue humano. Este é o único caso analisado por Tu através de medidas experimentais de deflexão de membranas elásticas finas para células com esta geometria. Observa-se que os resultados obtidos são apenas satisfatórios com desvio da ordem de 18%, quando comparados com a solução analítica obtidos por Maia *et al.* (2003). Por sua vez, os resultados aqui obtidos por elementos finitos, são altamente expressivos com desvios máximos da ordem de 1%.

Tabela 2. Potência específica limite para células de combustível bicôncava.

$m$	$v_o / \kappa_l$	$\alpha \cdot 10^{-2}$ [m]	$\theta_{máx}$ Numérico	$\theta_{máx}$ Analítico (Maia, 2003)	Erro (%)	$\dot{q}_{lim}^m$ [MW/m <sup>3</sup> ]	$P_c$ [kW/kgU]	$\xi_t$	$P_c$ (Tu, 1974) [kW/kgU]
0,50	0,30	0,8596	0,0750	0,0750	0,00	939,5	37,2	1,740	–
	0,50	0,5622	0,2086	0,2087	0,05	789,7	31,2	1,462	–
	0,70	0,3375	0,5133	0,5137	0,08	890,3	35,2	1,649	28,7
	0,90	0,1147	3,7232	3,7653	1,13	1051,2	41,6	1,947	–
0,70	0,30	0,9711	0,0440	0,0440	0,00	1254,1	49,6	2,220	–
	0,50	0,6379	0,1278	0,1278	0,00	1001,4	39,6	1,855	–
	0,70	0,3783	0,3627	0,3632	0,14	1001,8	39,6	1,855	–
	0,90	0,1260	3,0251	3,0728	1,58	1068,0	42,2	1,978	–

Finalmente, apresenta-se nas Figs. (2) e (3) uma visualização das distribuições de temperatura que foram obtidas com o auxílio da rotina *MayaVi* para células com parâmetros  $m = 0,5 / v_o = 0,7$  e  $m = 0,7 / v_o = 0,5$ , respectivamente. É interessante observar destas figuras os dois picos de temperatura característicos do formato bicôncavo.

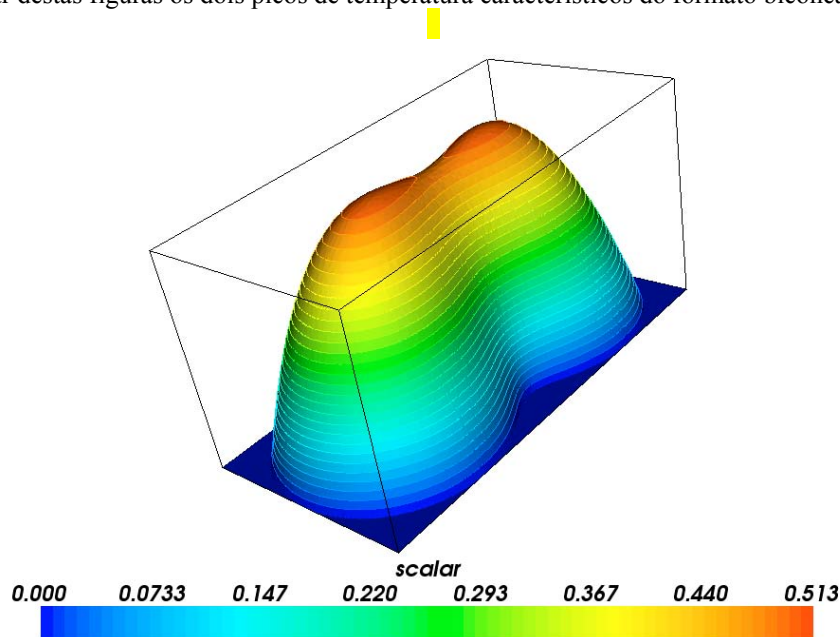


Figura 2. Distribuição de temperatura  $\theta$  para o caso de  $m = 0,50$  e  $v_o = 0,70\kappa_l$ .

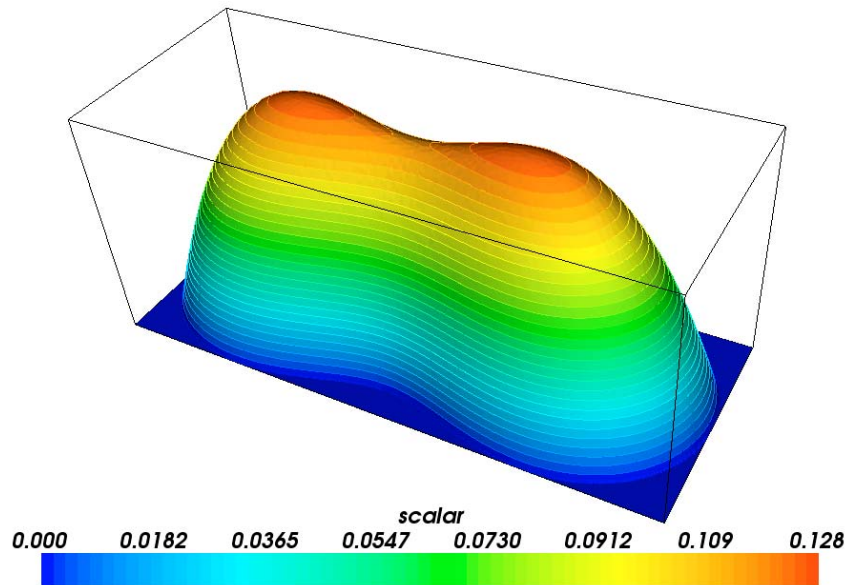


Figura 3. Distribuição de temperatura  $\theta$  para o caso de  $m=0,70$  e  $\nu_0=0,50\kappa_1$ .

## 5. Conclusões

O presente trabalho apresentou a solução do problema de células de combustível nuclear de formato bicôncavo com propriedades termofísicas variáveis. A equação da difusão correspondente foi linearizada pela técnica da transformada de Kirchhoff e resultados numéricos foram obtidos, então, por elementos finitos através do Método de Galerkin. O contorno das células com esta geometria foi obtido através da transformação conforme  $\bar{z} = \alpha cn(w)$  que é capaz de gerar contornos bicôncavos nos mais variados formatos. Para a resolução do problema foram utilizadas malhas de elementos triangulares lineares com 3000 nós. Foi observado que o valor da potência específica limite  $P_c$  obtidos numericamente por elementos finitos são bastante confiáveis, com desvios da ordem de 1% ou menos quando comparados com aqueles obtidos analiticamente. É relevante observar que os resultados numéricos foram obtidos de forma relativamente simples fazendo uso de classes de *Ellipt2d*, um solver elíptico de fonte aberta para programação em *Python*.

## 6. Referências

- Adams, K.H., 1973, "A Theory for the Shape of the Red Blood Cell", *Biophysical Journal*, Vol. 13, pp. 1049.
- Brown, J.W. and Churchill, R.V., 1995, "Complex Variables and Applications", 6<sup>th</sup> Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA.
- Glasstone, S. and Sesonske, A., 1994, "Nuclear Reactor Engineering: Reactor Systems Engineering", 4<sup>th</sup> Edition, Chapman & Hall, London, England.
- Jiang, B., 1998, "The Least-Squares Finite Element Method. Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics", Springer.
- Maia, C.R.M., Aparecido, J.B. and Milanez, L.F., 2002, "Critical Specific Power in Fuel Rods with Biconcave Cross-Section", Proceedings of the Twelfth International Heat Transfer Conference – IHTC'12, Paper 0868, 06 pages, Grenoble, France.
- Maia, C.R.M., Aparecido, J.B., Milanez, L.F., 2003, "Limiting Thermal Energy Generation Rate", Proceedings of the XXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods, Paper CIL083-46, Ouro Preto, Brazil.
- Ozisk, M.N., 1993, "Heat Conduction, 2<sup>nd</sup> Edition", John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- Tu, C. C., 1974, "Estudo Preliminar Sobre as Vantagens de uma Barra de Combustível com Seção Transversal Semelhante ao de um Glóbulo Vermelho", Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica/USP.
- Pletzer, A. and Mollis, J.C., 2000, "ELLIPT2D: a general 2-D elliptic equation solver", <http://w3.pppf.gov/~pletzer/programs/fortran-c-c++/ellipt2d/HTML/doc/home.html>.
- Ramachandran, P., 2002, "Mayavi: A Free Tool for 3D/2D Visualization", <http://mayavi.sf.net>.



## LIMIT POWER OF NUCLEAR FUEL CELLS WITH BICONCAVE CROSS SECTIONS

### **Thiago Antonini Alves**

Paulist State University – UNESP, Ilha Solteira, Department of Mechanical Engineering, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil  
[antonini@dem.feis.unesp.br](mailto:antonini@dem.feis.unesp.br)

### **Marcelo Ferreira Pelegrini**

Paulist State University – UNESP, Ilha Solteira, Department of Mechanical Engineering, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil  
[marcelo@dem.feis.unesp.br](mailto:marcelo@dem.feis.unesp.br)

### **Emanuel Rocha Woiski**

Paulist State University – UNESP, Ilha Solteira, Department of Mechanical Engineering, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil  
[woiski@dem.feis.unesp.br](mailto:woiski@dem.feis.unesp.br)

### **Cassio Roberto Macedo Maia**

Paulist State University – UNESP, Ilha Solteira, Department of Mechanical Engineering, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil  
[cassio@dem.feis.unesp.br](mailto:cassio@dem.feis.unesp.br)

***Abstract:** Diffusive media with distributed sources, such as the case of nuclear fuel cells, represent a major role in Engineering. Due to the nuclear fission of the chemical element, fuel cells are capable of releasing an enormous amount of thermal energy in spite of their reduced dimensions, in such a way that the maximum power of the reactor is closely related to the fusion temperature of the fuel, and consequently to the maximum temperature in the cell. The cell maximum temperature is, therefore, a chief parameter in nuclear reactor design. Limiting power, of course, depends not only of the fuel thermo physical properties, but also of the cell shape and dimensions. The present work purports the study of the effects of some parameters of cell geometry on the limiting power, especially for cell with biconcave cross sections. Given the large temperature gradients in the cell, the thermal conductivity must be assumed as a generic function of temperature. Therefore, the problem has been modeled as a nonlinear 2D Poisson-like PDE, with a nontrivial geometry of the boundary. For the analytical solution, Kirchhoff transform has been employed to turn the equation into a linear Poisson equation, a conformal transform brought it to a rectangular dominium and Generalized Integral Transform method applied in order to solve the resulting equation. For the numerical solution of the linearized equation, a program has been developed in Python, reusing classes of Ellipt2d, an open-source elliptic solver. The dominium has been divided into linear triangular finite elements, and the system of equations resulting of Galerkin method application has been solved, for each parameter set. The trend in critical power has been discussed, as well as the numerical results compared to the analytical solutions and to the literature.*

**Keywords:** Fuel cells, nonlinear diffusive problems, conformal transform, generalized integral transform, Python.