

ANÁLISE NUMÉRICA DA CONVECÇÃO NATURAL EM UMA CAVIDADE QUADRADA

Ivan Moura

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR
PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Viviana Cocco Mariani

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR
PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Rua Imaculada Conceição, 1155, Prado Velho
81611-970 - Curitiba, PR, Brasil
e-mail: viviana.mariani@pucpr.br

Resumo. No presente trabalho apresenta-se um estudo numérico do comportamento térmico e fluidodinâmico da convecção natural do ar em uma cavidade quadrada bidimensional, em regime laminar. A cavidade quadrada possui duas paredes aquecidas com temperaturas diferentes e duas paredes isoladas, a aproximação de Boussinesq é utilizada e o número de Prandtl é mantido fixo. O método dos volumes finitos é usado para a discretização das equações que governam o escoamento. O armazenamento desencontrado das variáveis é adotado e os esquemas Power-Law e SIMPLE são utilizados. As simulações numéricas são realizadas para vários números de Rayleigh, $10^4 \leq Ra \leq 10^6$, e os resultados do número de Nusselt médio são comparados com valores obtidos na literatura. As linhas de corrente e isotermas são apresentadas e analisadas. O problema de convecção natural em cavidades bidimensionais é investigado no presente trabalho com o objetivo de outros problemas de convecção natural, mista ou forçada serem investigados em trabalhos futuros utilizando o mesmo código computacional, ou seja, este trabalho serve para validar o código computacional, porque os resultados para este problema já estão bem consolidados na literatura. Os resultados numéricos apresentados neste trabalho concordaram com os disponíveis na literatura e poderão ser utilizados por pesquisadores que trabalham na área de simulação numérica do problema da convecção.

Palavras chave: convecção natural, cavidade quadrada, método dos volumes finitos.

1. Introdução

A qualidade do ar em ambientes confinados, é sempre analisada e estudada em trabalhos, pode-se destacar o estudo do ar em laboratórios biológicos, unidades de produção farmacêutica, produção de equipamentos eletrônicos, operação de reatores nucleares, projetos e construção de ambientes, coletores de energia solar etc. A convecção natural em ambientes fechados tem sido extensivamente estudada experimentalmente e numericamente, pode-se citar os trabalhos de Davis (1983), Ostrach (1988), Hortmann *et al.* (1990), Le Quéré (1991), Bravo *et al.* (2000) e Ding *et al.* (2004) que estudaram numericamente cavidades quadradas fechadas com duas paredes adiabáticas e duas aquecidas para diferentes números de Rayleigh. Estudos em cavidades retangulares fechadas com paredes aquecidas em um ou dois lados opostos foram conduzidos por Anderson e Lauriat (1986).

Aydın *et al.* (1997) investigaram o escoamento em cavidades quadradas aquecidas em um dos lados e resfriada no topo. A convecção natural do ar em uma geometria cúbica tridimensional aquecida diferentemente nas duas paredes verticais foi estudada por Peng *et al.* (2003). Doescher *et al.* (2003) analisaram o escoamento de um fluido em cavidades bidimensionais em que as bordas são pré-fractais de Koch de nível 0, 1 e 2. Para o nível 0 reproduziram os resultados obtidos na literatura, para os demais níveis oscilações foram detectadas para $Re > 4000$. Corcione (2003) estudou numericamente a convecção natural em regime permanente em domínios bidimensionais retangulares fechados, cuja parede inferior estava aquecida e a superior resfriada e diferentes condições de contorno foram investigadas nas paredes laterais. Várias simulações foram executadas variando o comprimento das cavidades e o número de Rayleigh.

O comportamento fluidodinâmico do ar em ambientes confinados com a presença de fontes de geração de calor tem sido estudado, principalmente pelo interesse das indústrias em melhorar a refrigeração de componentes eletrônicos. Chu *et al.* (1976) estudaram numericamente um ambiente com uma fonte quente posicionada em uma parede vertical adiabática, Oh *et al.* (1997) estudaram uma cavidade quadrada com uma fonte de geração de calor centrada em seu interior e ocupando 25% do volume da cavidade. Reinehr *et al.* (2000) estudaram cavidades com relações geométricas variando entre $1,0 \leq H/L \leq 4,0$ com uma fonte quente inserida em uma das paredes verticais.

O presente trabalho investiga a transferência de calor por convecção natural no interior da cavidade quadrada bidimensional fechada, em regime laminar e permanente. A cavidade possui as paredes horizontais isoladas e as paredes verticais aquecidas com diferentes temperaturas, isto é, a parede vertical esquerda é resfriada com uma temperatura (T_F)

e a parede vertical direita é aquecida com uma temperatura (T_Q). A simulação numérica é realizada para diferentes números de Rayleigh, isto é, $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. A influência do número de Rayleigh nos padrões do escoamento é analisada e discutida através da distribuição de temperaturas, das linhas de corrente e do número médio de Nusselt, comparado com valores obtidos na literatura. Este problema é clássico na literatura, contudo até hoje continua sendo investigado, nota-se pelas referências citadas no presente trabalho, este problema pode ser empregado para validar códigos computacionais.

A aproximação de Boussinesq é utilizada e o número de Prandtl é mantido fixo. O método dos volumes finitos é usado para a discretização das equações que governam o escoamento. O armazenamento desencontrado das variáveis é adotado e os esquemas Power-Law e SIMPLE são utilizados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma, nesta seção apresentou-se uma breve introdução e justificativa da escolha do problema de convecção natural em cavidades fechadas com paredes opostas com temperatura prescrita. Na seção 2 apresenta-se as equações que governam este escoamento, as condições iniciais e de contorno adotadas na simulação numérica e a metodologia utilizada na solução das equações. Os resultados numéricos obtidos no presente trabalho são apresentados na seção 3 juntamente com a análise dos mesmos. Na seção 4 são apresentadas as principais conclusões deste trabalho.

2. Modelo Matemático

Para modelar o escoamento em estudo as equações de Navier-Stokes e conservação da energia são utilizadas, algumas simplificações são adotadas: escoamento laminar, fluido Newtoniano e incompressível, sistema bidimensional, regime permanente, escoamento estacionário, todas as propriedades do fluido, μ , k e c_p são consideradas constantes, exceto a densidade (ρ) na direção vertical em que é assumida a aproximação de Boussinesq e na equação da conservação da energia são desprezados os efeitos de compressibilidade e a dissipação viscosa. As seguintes grandezas adimensionais são utilizadas,

$$\begin{aligned} X &= x/H & Y &= y/H & U &= \frac{u}{(\alpha/H)} \\ V &= \frac{v}{(\alpha/H)} & P &= \frac{(p-p_0)H^2}{\rho\alpha^2} & \theta &= \frac{T-T_F}{T_Q-T_F} \end{aligned}$$

onde, X e Y são as coordenadas horizontal e vertical, respectivamente, U e V são as componentes adimensionais de velocidades horizontal e vertical, respectivamente, θ é a temperatura adimensional, H é a altura da cavidade sendo a dimensão característica da geometria estudada no presente trabalho, ν ($= \mu/\rho$) é a viscosidade cinemática, u e v são as componentes de velocidades nas direções x e y , T é a temperatura, T_Q é a temperatura alta prescrita na parede vertical direita e T_F é a temperatura baixa prescrita na parede vertical esquerda. Assim as equações adimensionais que governam o escoamento são,

$$\frac{\partial(U)}{\partial X} + \frac{\partial(V)}{\partial Y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \nabla^2 U, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \nabla^2 V + \text{Ra} \text{Pr}(\theta - \theta_0), \quad (3)$$

$$\frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \nabla^2 \theta, \quad (4)$$

onde os números adimensionais de Prandtl (Pr) e Rayleigh (Ra) são, respectivamente,

$$\text{Pr} = \frac{\mu}{\rho\alpha}, \quad (5)$$

$$(6)$$

$$Ra = \frac{g\beta(T_Q - T_F)H^3 Pr}{\nu^2},$$

onde $\alpha (= k/\rho c_p)$ é a difusividade térmica, ρ é a densidade do fluido, μ é a viscosidade, β é o coeficiente de expansão térmica, k é a condutividade térmica, c_p é o calor específico do fluido e g é a aceleração da gravidade.

O domínio de cálculo utilizado no presente trabalho é mostrado na Fig. 1, é uma cavidade quadrada bidimensional com comprimento L . As condições iniciais assumidas são $U = V = 0$ e $\theta = 0,5$ para todo o domínio, ou seja, $0 \leq X, Y \leq 1$. As condições de contorno utilizadas são:

$U = V = 0$ (condição de não deslizamento) em todas as paredes da cavidade;

$\theta = 0$ em $X = 0$ (na parede vertical esquerda);

$\theta = 1$ em $X = 1$ (na parede vertical direita);

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \text{ em } Y = 0 \text{ e } Y = 1.$$

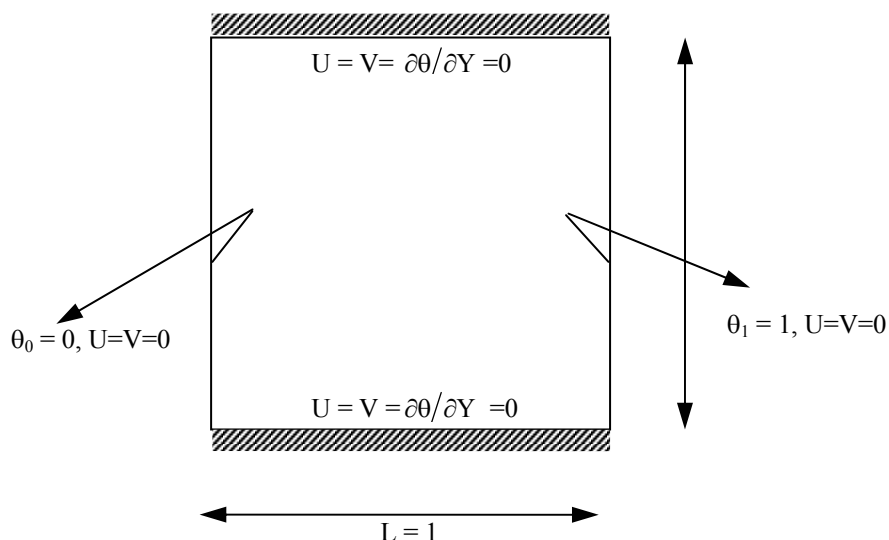


Figura 1 – Geometria da cavidade quadrada estudada.

As equações diferenciais, representadas pelas equações (1) a (4), juntamente com as respectivas condições de contorno, são resolvidas usando o Método dos Volumes Finitos (MVF), descrito com detalhes em Patankar (1980). Neste método o domínio de solução é dividido em pequenos volumes de controle finitos. As equações diferenciais são integradas em cada um destes volumes de controle e desta integração resultam equações algébricas que, quando resolvidas, simultaneamente ou segregadamente, fornecem as componentes de velocidade e a pressão. A interpolação Power-Law é adotada para calcular os termos difusivos e convectivos. Para o acoplamento pressão-velocidade o algoritmo SIMPLE (*Semi IMPLICIT Linked Equations*) é utilizado.

As equações discretizadas são resolvidas iterativamente, usando o método linha por linha conhecido como algoritmo de Thomas ou TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*) e a sub-relaxação é usada para acelerar a convergência (Patankar, 1980; Maliska, 1995). O domínio de solução é coberto por uma malha uniforme formada por 40x40 e 80x80 volumes de controle, a qual é empregada em todas as simulações numéricas. O armazenamento desencontrado das variáveis é utilizado. A solução numérica é considerada convergida quando o valor máximo absoluto da conservação da massa for menor que 10^{-6} ,

Para cada ponto da malha um resíduo R pode ser calculado para indicar a convergência do método iterativo, neste trabalho foi adotado para R o resíduo da equação da continuidade (conservação da massa), isto é, o critério de convergência é obtido quando o maior valor do resíduo em módulo é menor que um valor estipulado, isto é, um critério de convergência, $R \leq 10^{-6}$, ou seja,

$$R = \max |\vec{\nabla} \cdot \vec{V}|_{i,j} \leq 10^{-6} . \tag{7}$$

Depois que a convergência é obtida calcula-se o número médio de Nusselt na parede vertical aquecida como,

$$\overline{Nu} = \frac{Dh}{(\theta_1 - \theta_0)} \int_0^1 Nu_x dY , \tag{8}$$

onde Dh (= 4Área/Perímetro) é o diâmetro hidráulico e $Nu_x = -(\partial\theta/\partial X)_{X=0}$ é o número de Nusselt local na parede aquecida.

3. Resultados e Discussões

Neste trabalho os resultados numéricos foram comparados com os valores obtidos por Davis (1983), Hortmann *et al.* (1990) e Bravo (2000). Foram utilizados números de Rayleigh 10^4 , 10^5 e 10^6 .

O comportamento do escoamento do fluido no domínio de cálculo é verificado geralmente pelas linhas de corrente. As linhas de corrente, são contornos de função corrente ψ constante obtidas a partir do campo de velocidades, definindo a função corrente adimensional ψ como,

$$\frac{\partial\psi}{\partial Y} = U , \tag{9}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial X} = -V . \tag{10}$$

As Figs. 2, 3 e 4 ilustram as linhas de corrente (à esquerda) e as isotermas (à direita) do escoamento gerado pela convecção natural na cavidade quadrada para a malha formada por 80x80 volumes de controle, para os três números de Rayleigh investigados. Nota-se que para $Ra = 10^5$ e 10^6 formam-se recirculações pequenas próximas à linha central da cavidade. Com o crescimento do número de Rayleigh e, conseqüentemente o aumento do número de recirculações no interior da cavidade, observa-se mais e mais uma pronunciada compressão das isotermas próximas aos contornos direito e esquerdo da cavidade. As temperaturas mais baixas estão próximas da parede vertical esquerda e as temperaturas mais altas próximas da parede vertical direita, de acordo as condições de contorno impostas na cavidade.

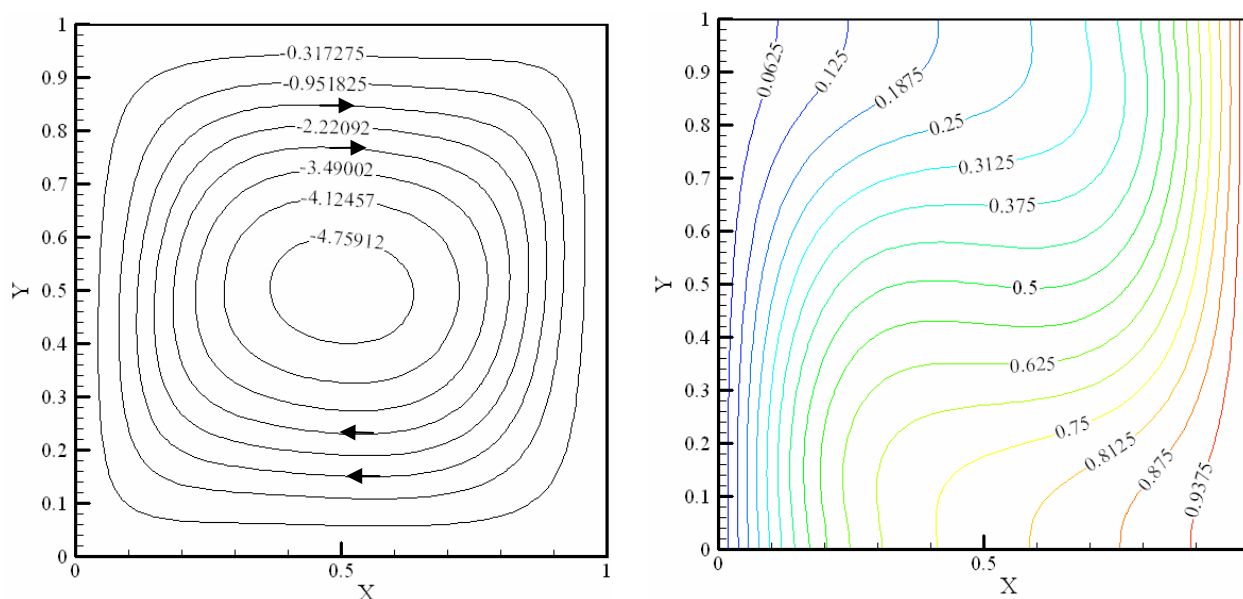


Figura 2 – Linhas de corrente (à esquerda) e isotermas (à direita) para os valores de Rayleigh = 10^4 .

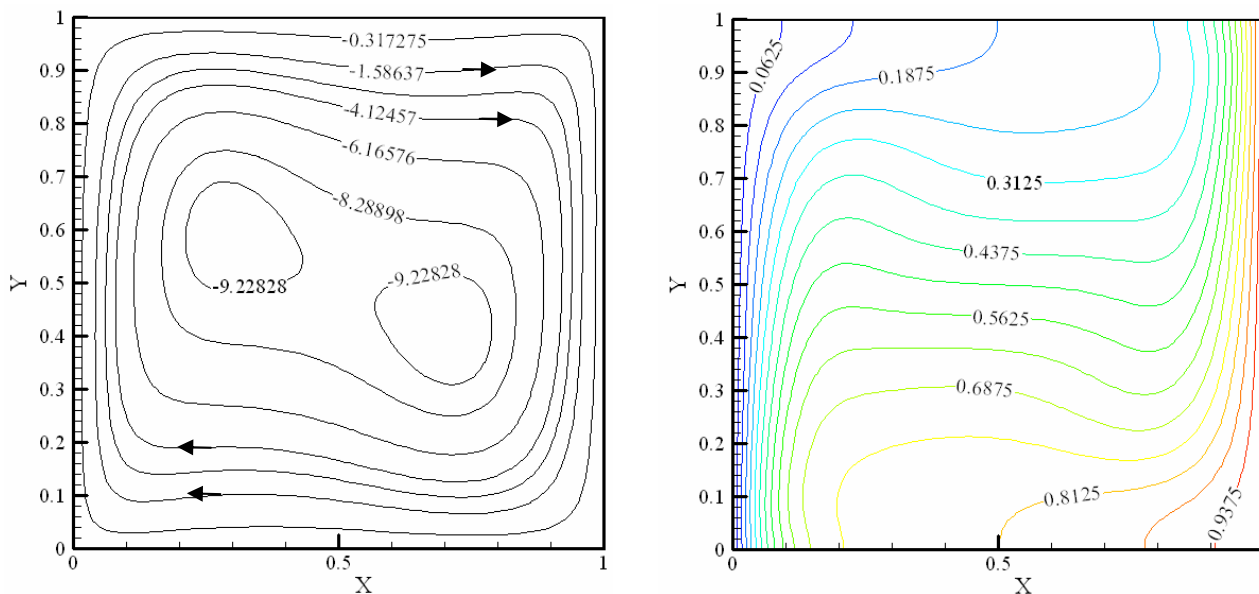


Figura 3 – Linhas de corrente (à esquerda) e isothermas (à direita) para os valores de Rayleigh = 10^5 .

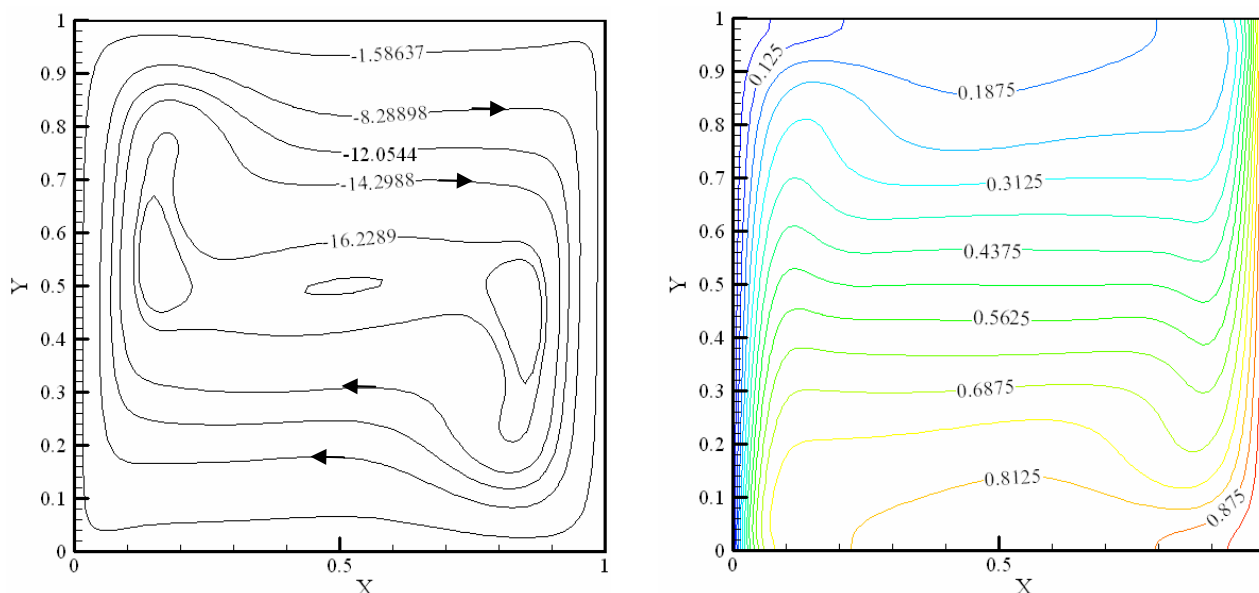


Figura 4 – Linhas de corrente (à esquerda) e isothermas (à direita) para os valores de Rayleigh = 10^6 .

Os resultados numéricos de algumas variáveis são apresentados nas Tabs. 1, 2 e 3, e estas variáveis são:

$|\psi|_{\max}$ é o valor máximo em módulo da função corrente;

u_{\max} é o valor máximo em módulo da componente horizontal da velocidade, u , na linha central vertical da cavidade, em $x = 1/2$.

v_{\max} é o valor máximo em módulo da componente vertical da velocidade, v , na linha central horizontal da cavidade, em $y = 1/2$.

\overline{Nu} é o número de Nusselt médio, conforme Eq. 8.

Nas Tabelas 1, 2 e 3 nota-se uma boa concordância dos resultados numéricos obtidos neste trabalho com os resultados encontrados na literatura para a malha numérica formada por 40x40 e 80x80 volumes de controle. Observa-se que o número de Nusselt médio é maior para o número de Rayleigh igual a 10^6 , onde os gradientes de temperatura são maiores, assim como as velocidades são maiores para este número de Rayleigh, aumentando as regiões de recirculações. Os resultados deste trabalho são comparados com os trabalhos de Bravo *et al.* (2000) que resolveram o

problema transiente, utilizando o método de Euler para a discretização do termo temporal e diferença central para discretização nos termos espaciais, Hortmann *et al.* (1990) resolveram o presente problema em regime permanente com o método dos volumes finitos e Davis (1983) empregou o método implícito com diferenças centrais de segunda ordem juntamente com a extrapolação de Richardson.

Tabela 1: Resultados numéricos para $Ra = 10^4$.

X x Y	$ \psi _{\max}$	u_{\max}	v_{\max}	\overline{Nu}	Referências
40 x 40	5,0855	16,1354	19,6691	2,2469	Presente trabalho
	5,0917	16,0637	19,5146	2,2492	Bravo <i>et al.</i> (2000)
	-	16,0955	19,5303	2,2436	Hortmann <i>et al.</i> (1990)
	-	16,182	19,5090	2,2340	Davis (1983)
80 x 80	5,0764	16,1899	19,6655	2,2419	Presente trabalho
	5,0077	16,1615	19,6141	2,2470	Bravo <i>et al.</i> (2000)
	-	16,1630	19,6082	2,2446	Hortmann <i>et al.</i> (1990)
	-	-	-	-	Davis (1983)

Tabela 2: Resultados numéricos para $Ra = 10^5$.

X x Y	$ \psi _{\max}$	u_{\max}	v_{\max}	\overline{Nu}	Referências
40 x 40	9,7362	36,2210	68,7922	4,6043	Presente trabalho
	9,7271	33,9648	67,5619	4,5473	Bravo <i>et al.</i> (2000)
	-	34,7396	68,8438	4,6165	Hortmann <i>et al.</i> (1990)
	9,7390	35,0700	66,7300	4,4870	Davis (1983)
80 x 80	9,6480	35,4161	68,6208	4,5350	Presente trabalho
	9,6313	34,7716	68,3291	4,5395	Bravo <i>et al.</i> (2000)
	-	34,7132	68,5383	4,5256	Hortmann <i>et al.</i> (1990)
	9,6440	34,8100	68,2200	4,5100	Davis (1983)

Tabela 3: Resultados numéricos para $Ra = 10^6$.

X x Y	$ \psi _{\max}$	u_{\max}	v_{\max}	\overline{Nu}	Referências
40 x 40	17,5359	67,68371	223,1483	9,4874	Presente trabalho
	18,7810	63,9505	209,7110	8,7817	Bravo <i>et al.</i> (2000)
	-	63,3710	223,4120	9,4217	Hortmann <i>et al.</i> (1990)
	17,6130	67,4900	206,3200	8,8100	Davis (1983)
80 x 80	17,0268	65,6252	218,9173	8,9752	Presente trabalho
	16,6521	64,0822	214,1256	8,8410	Bravo <i>et al.</i> (2000)
	-	64,9944	218,3112	8,9772	Hortmann <i>et al.</i> (1990)
	16,9610	65,3300	216,7500	8,7980	Davis (1983)

Os perfis da velocidade U, na linha vertical central, da cavidade e da velocidade V, na linha horizontal central da cavidade, são apresentados nas Figs. 5 e 6, respectivamente. Na Figura 5 percebe-se que há uma assimetria no perfil de velocidade U com relação à metade inferior e superior da cavidade e na Fig. 6 percebe-se uma assimetria no perfil de velocidade V. A intensidade da velocidade U é maior na metade superior da cavidade.

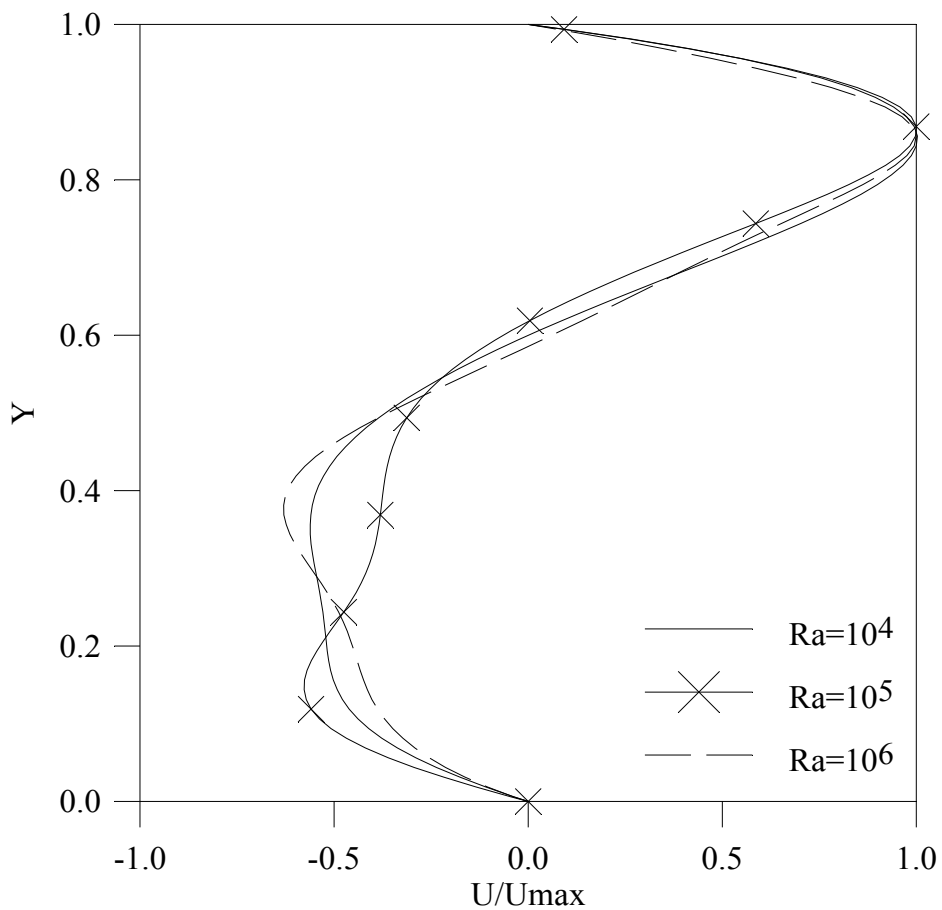


Figura 5 – Perfil de velocidade U na linha vertical central da cavidade para os diferentes números de Rayleigh.

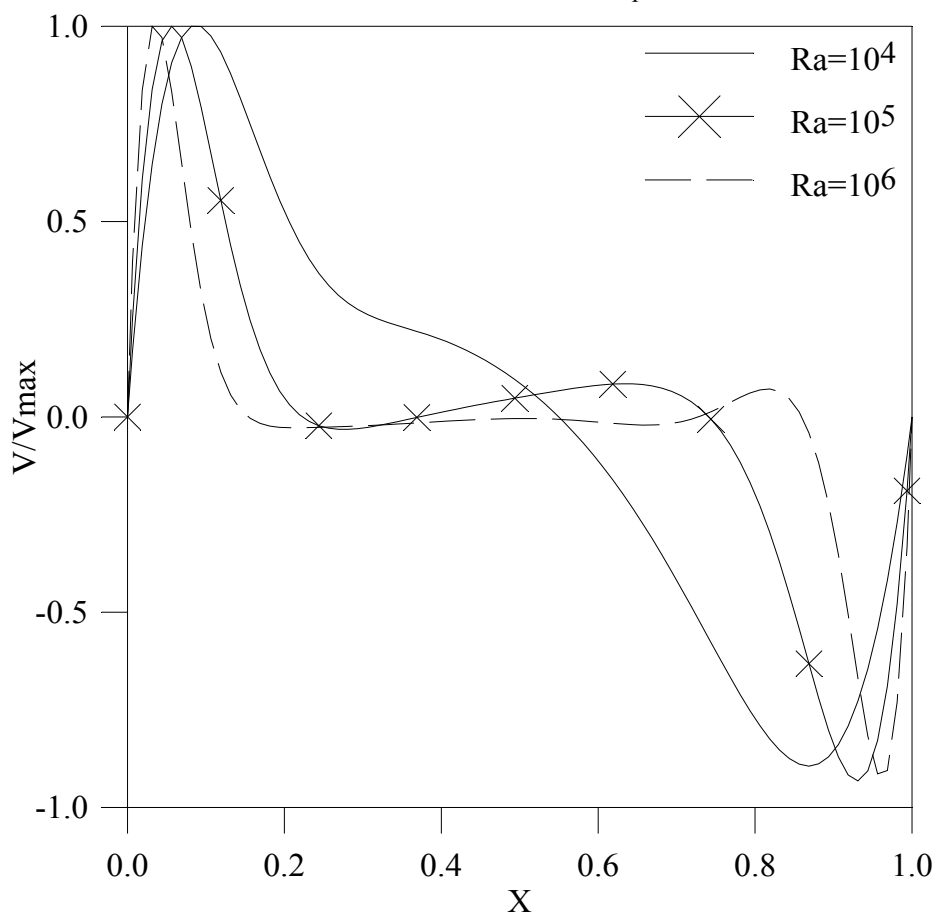


Figura 6 – Perfil de velocidade V na linha horizontal central da cavidade para os diferentes números de Rayleigh.

4. Conclusões

O presente trabalho abordou um problema bem conhecido, para o qual existe uma boa quantidade de dados na literatura, e que, por isto, tem servido como *benchmark* para a validação de programas computacionais direcionados para a simulação numérica de escoamentos com transferência de calor. A metodologia numérica empregada também é clássica, e bem consolidada.

Por ser um problema clássico o problema da convecção natural na cavidade bidimensional foi investigado com o intuito de outros problemas de convecção natural, mista ou forçada, serem investigados fazendo uso do mesmo código computacional, este problema serviu para validação do código computacional. Os resultados aqui apresentados podem ser utilizados por outros pesquisadores que trabalham na área de simulação numérica do problema da convecção. Os resultados numéricos obtidos concordaram com os resultados disponíveis na literatura, validando assim o código computacional.

5. Referências

- Aydin, O., Unal, A. e Ayhan, T., 1997, "Numerical Solutions for Buoyancy-Driven Flow in a 2-D Square Enclosure Heated from One Side and Cooled from Above", Proceedings of the Advances in Computational Heat Transfer Symposium, Begell House, New York, pp. 387-394.
- Bravo, E. O. A., Claeysen, J. C., Rubio, O., 2000, "Numerical Simulation for the Natural Convection Flow", Revista de Pesquisa e Pós-Graduação, Erechim, RS, Brasil, 1, pp. 237-254.
- Chu, H. H. S., Churchill, S. W., Patterson, C. V. S., 1976, "The Effect of Heater Size, Location, Aspect Ratio, and Boundary Conditions on Two-Dimensional, Laminar, Natural Convection in Rectangular Channels". Trans. of the ASME J. of Heat Transfer, pp. 194-201.
- Corcione, M., 2003, "Effects of the Thermal Boundary Conditions at the Sidewalls Upon Natural Convection in Rectangular Enclosures Heated from Below and Cooled from Above", International Journal of Thermal Sciences, 42, pp. 199-208.
- Davis, G. de V., 1983, "Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Benchmark Solution", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 3, pp. 249-264.
- Ding, H., Shu, C., Yeo, K. S. e Xu, D., 2004, "Development of Least-Square-Based Two-Dimensional Finite-Difference Schemes and their Application to Simulate Natural Convection in a Cavity", Computers & Fluids, 33, pp. 137-154.
- Doescher, E., Velho, H. F. de C., Ramos, F. M., 2003, "Isothermal and Natural Convection Flows in Fractal Cavities", Applied Numerical Mathematics, 47, pp. 407-419.
- Hortmann, M., Peric, M. e Scheuerer, G., 1990, "Finite Volume multigrid prediction of laminar natural convection: benchmark solutions", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 11, pp. 189-207.
- Le Quére, P., 1991, "Accurate Solutions to the Square Thermally Driven Cavity at High Rayleigh Number", Computers & Fluids, 20, pp. 29-41.
- Maliska, C. R., 1995, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional - Fundamentos e Coordenadas Generalizadas", LTC, Rio de Janeiro, 424 p.
- Oh, J. Y., Ha, M. Y., Kim, K. C., 1997, "Numerical Study of Heat Transfer and Flow of Natural Convection in an Enclosure with a Heat-Generating Conduction Body", Numerical Heat Transfer, Part A, 31, pp. 289-303.
- Ostrach, S., 1988, "Natural Convection in Enclosures", Journal Heat Transfer, 110, pp. 1175-1190.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Washington, DC, 197 p.
- Peng, Y., Shu, C. e Chew, Y. T., 2003, "A 3D Incompressible Thermal Lattice Boltzmann Model and its Application to Simulate Natural Convection in a Cubic Cavity", Journal of Computational Physics, 193, pp. 260-274.
- Reinehr, E. L., Ulson de Souza, A. A., Guelli U. S., S. M. A., 2000, "Solução do Escoamento Hidrodinâmico em Ambientes Confinados com Convecção Mista", Anais do VIII Encontro Brasileiro de Ciências Térmicas e Engenharia, Porto Alegre.

NUMERICAL ANALYSIS OF NATURAL CONVECTION IN A SQUARE CAVITY

Ivan Moura

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR
PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Viviana Cocco Mariani

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR
PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Rua Imaculada Conceição, 1155, Prado Velho
81611-970 - Curitiba, PR, Brasil

e-mail: viviana.mariani@pucpr.br

Abstract

In the present work the laminar steady-state natural convection in a two-dimensional square cavity is investigated numerically. The left and right walls are maintained at different constant temperatures while upper and bottom walls are thermally insulated. The equations are solved using Boussinesq approximation and fixed Prandtl number. The transport and energy equations were integrated based a finite control volume with non-staggered grid arrangement. The discretized equations were solved with Power-Law e SIMPLE algorithm iteratively. The heat and mass transfer is studied for different Rayleigh number values ranging from 10^4 to 10^6 . Simulations were made for several Rayleigh numbers and the isotherms, streamlines and mean Nusselt number are produced close to those found in the literature.

Keywords: natural convection, square cavity, finite control volume method.