

# APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL NA SOLUÇÃO DO ESCOAMENTO LAMINAR CONVECTIVO ASSOCIADO AO PROCESSO DE MICROFILTRAÇÃO

**Antonio Luís Venezuela**

EESC – SEM – USP – Av. Trabalhador São-Carlense, 400, C.P. 359, CEP: 13566-590 – São Carlos – SP.  
alvene@horizon.com.br

**Sérgio Rodrigues Fontes**

EESC – SEM – USP – Av. Trabalhador São-Carlense, 400, C.P. 359, CEP: 13566-590 – São Carlos – SP.  
srf@sc.usp.br

**Resumo.** Os escoamentos confinados em tubos com superfícies permeáveis estão associados ao processo de filtração tangencial (microfiltração e/ou ultrafiltração). A complexidade da formulação matemática não-linear deste escoamento não permite o desenvolvimento de soluções analíticas exatas, porém soluções aproximadas são de grande interesse para o cálculo da vazão transmembrana junto a um processo de microfiltração. Neste trabalho utilizaremos a técnica de transformada integral na solução de modelos de escoamentos laminares em tubos permeáveis, a partir de modelos diferenciais de transferência de massa na camada limite (Zydney, 1997), reduzida neste trabalho de forma adimensional e análoga ao problema de Graetz. O perfil de velocidade que aparece na formulação é estabelecido neste trabalho na forma parabólica como condição de contorno para regime permanente. Uma solução semi-analítica é apresentada na forma de séries e os resultados para a vazão na superfície permeável são comparados com outros da literatura e obtidos experimentalmente.

*Palavras chave:* Modelagem matemática, Transformada integral, Filtração tangencial, Transferência de massa, Emulsões.

## 1. Introdução

São variadas as aplicações em processos industriais da tecnologia de filtração tangencial com membrana, dentre elas, a produção de água ultrapura utilizada na fabricação de componentes eletrônicos, tem um interesse crescente e alternativo que vem somar no processo de tratamento de água potável convencional, já que conhecemos as altas demandas atuais e futuras da água.

A ultrafiltração e a microfiltração, processos particulares da filtração tangencial têm um grande potencial para remover partículas em suspensão e microorganismos. O maior obstáculo neste espectro de aplicações é a queda do fluxo do permeado produzido pela formação da camada de polarização (cake layer) e do bloqueio parcial ou permanente da membrana (fouling). Durante a microfiltração de suspensões coloidais ou emulsões, as partículas possuem forte ação convectiva para a superfície da membrana, onde elas são acumuladas e tendem a formar a camada de polarização por interações físico-químicas entre a mistura fluida e o material cerâmico ou polimérico da superfície da membrana. Este fenômeno resulta no aumento da resistência hidráulica para a vazão de permeado ou filtrado, cuja típica característica comportamental e de queda com o tempo no início do processo (Lee e Clark, 1998 e Ilias et al., 1995).

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo analítico-numérico para solução do escoamento laminar convectivo associado ao processo de microfiltração, com o qual obteremos resultados aproximados e confiáveis para a vazão transmembrana em tubos permeáveis. Utilizaremos o modelo numérico que é uma aproximação híbrida analítica – numérica, o qual foi desenvolvida para equações diferenciais parciais, conhecida por “Técnica da Transformação Integral” (Özsisik, 1968). Esta aproximação é baseada na expansão de autofunções com controle do erro e é indicado para comparar e validar diferentes métodos numéricos em muitas classes de problemas que envolvem, por exemplo, condução de calor e transporte de fluidos.

A aproximação clássica da técnica não é flexível na solução analítica de alguns problemas gerais arbitrários e para obtermos versões de soluções analíticas de problemas generalizados, desenvolveu-se a “Técnica da Transformada Integral Geral” (GITT - Generalized Integral Transform Thecnique), que pode ser encontrada detalhadamente na literatura (Cotta, 1993).

Na modelagem do problema utilizou-se um potencial de pseudoconcentração, com o qual se obtém uma equação que é idêntica à da transferência de massa (análoga à obtida para o clássico problema de Graetz) para um sistema de escoamento num tubo circular com suporte de membrana (Zydney, 1997). Para esta formulação, analisamos o problema considerando como condição de contorno o perfil de velocidade parabólico na entrada do tubo, de acordo como o trabalho de Damark et. al. (2004).

## 2. Metodologia

### 2.1. Materiais e Métodos

A Fig. 1 apresenta esquematicamente o equipamento experimental utilizado para análise do processo de microfiltração e produção de resultados para comparação com os da modelagem. A unidade experimental confeccionada em aço inox é bastante versátil na geração de resultados para pressão trans-membrana entre  $10^5$  e  $10^6$  Pa

e velocidade média de até 5 m/s em canais de diâmetro interno entre 5 e 8 mm. Os módulos de filtração disponíveis são do tipo membrana mono e multicanais e tubos porosos, área superficial em torno de 0,01 m<sup>2</sup> (indicado por “4” na Fig. 1). A mistura em processamento é mantida em circulação a partir do tanque (1, Fig. 1), através de uma bomba de deslocamento positivo (2, Fig. 1). O concentrado que sai pelo módulo retorna ao tanque de armazenamento, enquanto é medida e analisada a vazão trans-membrana de permeado (5, na Fig. 1) em função do tempo.

A pressão trans-membrana medida por um manômetro na entrada do módulo foi variada nos experimentos pelo registro de pressão na saída do circuito hidráulico. Foram realizados experimentos do processo de desemulsificação de misturas de água e óleos vegetais de soja. Os experimentos foram conduzidos em temperatura constante de 25 ± 0,5° C. O processo de desemulsificação foi investigado através de medidas da vazão transmembrana durante cerca de 60 minutos.

As membranas mono-canal utilizadas são de valor nominal de tamanho de poros igual a 0,2 µm. O intervalo de velocidade média nos tubos foi correspondente ao regime de escoamento turbulento, com pressão transmembrana em torno de 3.10<sup>5</sup> Pa. Entre cada experimento, as membranas foram submetidas ao seguinte procedimento de limpeza: (i) 40 minutos em circulação com solução de detergente neutro a 2% de concentração; (ii) 12 horas em solução estática de detergente enzimático a 2% de concentração.

Os resultados experimentais apresentados na comparação com os da modelagem deste trabalho são especificados quanto às condições fluidodinâmicas de operação.

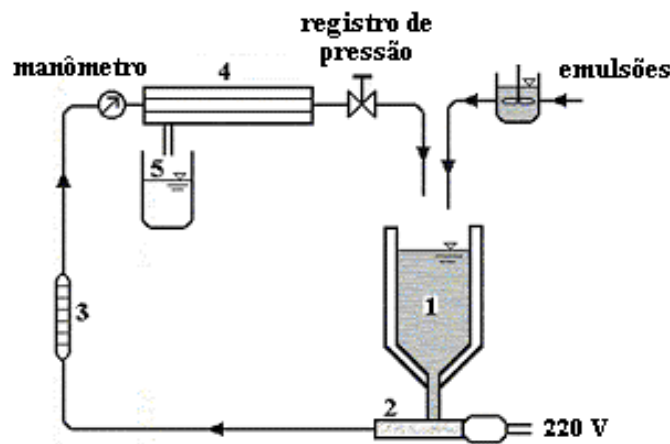


Figura 1. Figura esquemática do equipamento experimental. (1) tanque de fluido; (2) bomba de deslocamento positivo; (3) rotâmetro; (4) módulo com membrana cerâmica tubular; (5) saída de permeado.

## 2.2. Análise Teórica e Modelagem

A equação de conservação das espécies em coordenadas cilíndricas, que descreve o escoamento em tubos permeáveis é estabelecida na literatura (Zydney, 1997) na forma diferencial como:

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial c}{\partial r} \right] \quad (1)$$

onde  $u$  e  $v$  são, respectivamente, as velocidades do fluido na direção do eixo  $x$  (tangencial) e na direção do eixo  $r$  (radial ou transmembrana);  $c$  é a concentração local de soluto e  $D$  é o coeficiente de difusividade do soluto.

A Eq. 1 é resolvida com as condições de contorno para a velocidade na superfície permeável ou seletiva do tubo (membrana), em regiões dentro e fora da camada limite. A Fig. 2 ilustra as condições de contorno e o transporte convectivo e difusivo de soluto na interface da superfície permeável de um tubo. Sendo  $\delta$  a espessura da camada limite, duas condições de contorno são escritas na interface da superfície permeável ( $r = R_0$ ):

$$v = J \quad (2.a)$$

$$c = c_w \quad (2.b)$$

com  $J$  e  $c_w$  sendo a vazão de filtrado ou transmembrana (fluxo da fase solvente aquosa ou permeado) e a concentração na superfície permeável, respectivamente. Pela continuidade do soluto em regime permanente, temos:

$$\phi_{\text{dif}} + \phi_{\text{conv}} + N_s = 0 \quad (3.a)$$

$$c_w v = \left( \frac{D}{r} \frac{dc}{dr} \right) \Big|_{r=R_0} \quad (3.b)$$

com  $\phi_{\text{dif}}$ ,  $\phi_{\text{conv}}$  e  $N_s$  sendo o fluxo difusivo, fluxo convectivo e a vazão do soluto, respectivamente. Consideremos que a superfície permeável do tubo (meio seletivo ou membrana) retém a fase soluto, isto é,  $N_s = 0$ . Neste trabalho, considera-se que a vazão de filtrado  $J$  não possui a fase – soluto e é apresentada por unidade de área, tornando um valor específico, com unidade de velocidade (m/s).

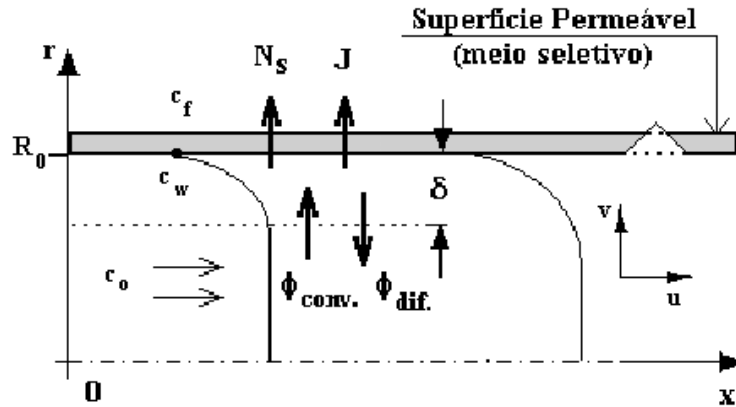


Figura 2. Perfil de concentração em condições de estado estacionário do escoamento num tubo permeável.

A Eq. 1 é sujeita à transformação de variáveis utilizada no trabalho de Zydney (1997):

$$\frac{\partial w}{\partial c} = \frac{1}{(c - c_f)} \quad \Rightarrow \quad w = \ln(c - c_f) \quad (4)$$

com  $c_f$  e  $w$  sendo a concentração de filtrado e a pseudoconcentração, respectivamente. Como  $c$  é função das variáveis  $x$ ,  $r$  e  $w$ , isto é,  $c \equiv c(x, r, w)$ , temos:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.a)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (5.b)$$

Substituindo as Eqs. 5 na Eq. 1, derivando e simplificando alguns termos da nova equação, e fazendo uso da relação:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial w^2} = \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial c}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial w} (c - c_f) \cong \frac{\partial c}{\partial w} \quad (6)$$

encontramos:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + \left( v - \frac{D}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (7)$$

O termo entre parêntese no primeiro membro da Eq. 7 representa a velocidade para o tubo com superfície impermeável,  $v_{\text{não-poroso}}$  ( $v_{\text{np}}$ ). Dessa forma:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v_{np} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (8)$$

Considerando os parâmetros adimensionais  $C = c/c_o$  e  $C_f = c_f/c_o$ , logo  $W = \ln(c/c_o - c_f/c_o)$  e temos que:

$$W = \ln(C - C_f) \quad (9)$$

A Eq. 8 é adimensionalizada ficando independente de parâmetros particulares, tomando a forma:

$$U \frac{\partial W}{\partial X} + V_{np} \frac{\partial W}{\partial R} = \frac{1}{Pe} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial W}{\partial R} \right) \quad (10)$$

Outros adimensionais utilizados são:  $U = u/u_o$ ,  $V_{np} = v_{np}/v_w$ ,  $V = v/v_w$ ,  $R = r/R_o$ ,  $X = (x - v_w)/(u_o R_o)$ ,  $Pe = v_w R_o/D$  e  $C = c/c_o$ , sendo  $v_w$  a velocidade na parede permeável e  $u_o$  a velocidade de entrada do tubo (Zydney, 1997, Ilias *et al.*, 1995).

O fluxo mássico é dado por:  $N = -V(C - C_f)$  e nesta equação utilizamos a lei de Fick (Deen, 1998), que associada com a Eq. 9 obtemos:

$$V_{np} = \left( V - \frac{1}{Pe} \frac{\partial W}{\partial R} \right) = 0, \text{ em } 0 < R \leq 1, \quad (11)$$

que também pode ser escrita como:  $V_{np} = V - J$ . A variável  $J$  também tem a forma adimensional,  $J = J/v_w$ , representando a vazão específica junto a superfície permeável, ou seja:

$$J = \frac{1}{Pe} \frac{\partial W}{\partial R} \Big|_{R=1} \quad (12)$$

Utilizando a Eq. 11 na Eq. 10 obtemos:

$$U \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial W}{\partial R} \right) \quad (13)$$

O escoamento laminar com convecção forçada mássica fica descrito neste trabalho pela Eq. 13. A modelagem neste trabalho segue associando-se por analogia ao problema de Graetz (Cebeci e Brashaw, 1989), onde consideramos a velocidade longitudinal  $U$  com o perfil de velocidades desenvolvido para o escoamento laminar na forma:  $U(R) = 2(1 - R^2)$ . Esta condição de contorno foi também utilizada no recente trabalho de Damark *et al.* (2004).

A Eq. 13 está sujeita as seguintes condições de contorno de primeiro tipo:

$$W = \ln(C_w - C_f), \quad \text{em } R=1, \forall X \geq 0 \quad (14.a)$$

$$W = 0 \quad \text{em } R=0, \forall X \geq 0 \quad (14.b)$$

e a condição inicial:

$$W = 1 \quad \text{em } X=0, \forall R \in [0,1] \quad (14.c)$$

A técnica da transformada integral (Özsisik, 1968) é uma clássica aproximação na análise de solução de certas classes de problemas lineares. Esta aproximação clássica não é flexível na solução analítica de alguns problemas gerais arbitrários. Para obtermos versões de soluções analíticas de problemas generalizados, desenvolveu-se a *Generalized Integral Transform Technique - GITT* (Cotta 1993). Seguindo a técnica clássica, selecionaremos o seguinte problema de autovalor auxiliar, que é um caso especial do sistema de Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2 \psi_m}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi_m}{dR} + \eta_m^2 U(R) \psi_m = 0 \quad (15.a)$$

onde  $\eta_m^2 = \lambda_m^2 Pe$  e as condições de contorno:

$$\left. \frac{d\psi_m}{dR} \right|_{R=0} = 0 \quad (15.b)$$

$$\left. \frac{d\psi_m}{dR} \right|_{R=1} = 0 \quad (15.c)$$

com  $\lambda_m$  e  $\psi_m$  sendo os autovalores e autofunções, respectivamente. Neste caso, a condição de contorno é de segunda ordem (Özisik, 1968). As autofunções são obtidas por:

$$\psi_m(R) = C e^{-\eta_m R^2} M\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta_m}{4}, 1, \eta_m R^2\right) \quad (16)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária e  $M$  é a função de Kummer. Os autovalores são obtidos utilizando a equação  $M\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta_m}{4}, 1, \eta_m\right) = 0$ .

O problema especificado em (15.a) nos permite definir o seguinte par de transformada:

$$\bar{W}_m(X) = \int_0^1 R Pe U(R) K_m(R) W(R, X) dR, \quad \text{transformada} \quad (17.a)$$

$$W(R, X) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(R) \bar{W}_m(X), \quad \text{inversa} \quad (17.b)$$

onde o núcleo,  $K_m(R)$  é dado por:

$$K_m(R) = \frac{\psi_m(R)}{\sqrt{N}} \quad (17.c)$$

e a integral de normalização,  $N$ , é obtida de:

$$N = \int_0^1 R Pe U(R) \psi_m^2(R) dR \quad (17.d)$$

Manipulando algebricamente o problema (13) pela aplicação do operador  $\int_0^1 K_m(R) dR$ , na qual também utilizamos o problema de autovalor (15), obtemos a equação diferencial ordinária:

$$\frac{d\bar{W}_m}{dX} + \eta^2 \bar{W}_m = A_m \quad (18.a)$$

onde:

$$A_m(X) = K_m(1) \quad (18.b)$$

$$\bar{W}_m(0) = \bar{f}_m = \int_0^1 R Pe U(R) \psi_m(R) dR \quad (18.c)$$

A solução analítica do sistema (18.a) é dada por:

$$\bar{W}_m(X) = e^{-Pe\lambda_m^2 X} \left( \bar{f}_m + \int_0^1 e^{Pe\lambda_m^2 X} A_m(X) dR \right) \quad (19)$$

Substituindo (19) na transformada inversa (17. b), obtemos:

$$W(R, X) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(R) e^{-Pe\lambda_m^2 X} \left( \bar{f}_m + \int_0^1 e^{Pe\lambda_m^2 X} A_m(X) dR \right) \quad (20)$$

A partir da Eq. 20 o problema formulado e descrito pela Eq. 13 pode ser quantitativamente especificado para a vazão transmembrana, J (Eq. 12), cujos resultados são apresentados a seguir.

### 3. Resultados e Discussão

Na Fig. 3 são apresentados os resultados da modelagem deste trabalho para a vazão trans-membrana. A Fig. 3.a ilustra a coincidência entre os resultados da modelagem obtidos para a vazão trans-membrana a partir da variável adimensional de concentração C e para a pseudovariável adimensional de concentração W. O resultado indica a conveniência da transformação de variável para conduzir a formulação do problema (Eq. 13) à melhor forma de abordagem pela técnica da transformada integral.

São apresentados na Fig. 3.b os resultados desta modelagem para a vazão trans-membrana J em função da posição longitudinal X para vários valores de Peclet. Os resultados indicam que para X entre 0 e 0,4 tem-se uma variação decrescente de J em função do aumento de Peclet. Observa-se também uma tendência assintótica de J para valores da ordem de  $10^{-6}$  para X maior que 0,5, podendo ser estimados como valor assintótico para Peclet maior que 1,2.

Na Fig. 4 são comparados os resultados desta modelagem com os da literatura e outros obtidos experimentalmente neste trabalho. Para comparação e validação do modelo selecionou-se alguns trabalhos da literatura que apresentam grande variação a respeito da natureza das misturas processadas.

No gráfico são apresentados os resultados desta modelagem com símbolos cheios para a vazão trans-membrana “J” em função de X para Peclet entre 0,73 e 1,20. Os valores de J são relativos a X maiores que 0,8, ou seja, representado efetivamente a região estabelecida do escoamento, que deve prevalecer em tubos de pequenos diâmetros, ou ainda  $L/(2.R_0) > 30$  (Cebeci e Brashaw, 1989).

Foram obtidos os valores experimentais para o processo de filtração tangencial para a desmembrificação de misturas emulsivas de água e óleo de soja, obtidas para o processo em diferentes pressões trans-membrana. Os resultados correspondem aos resultados de 50 minutos de processamento, ou seja, representam o processo no regime estabelecido e permanente, uma vez que após o intervalo de 15 minutos a formação da camada de polarização já havia sido completada.

Observa-se na Fig. 4 que os valores experimentais deste trabalho, representados por pontos vazios, se aproximam significativamente para o valor da modelagem em  $X=1$ , respectivamente para  $Pe=0,90$ .

São também comparados resultados experimentais da literatura. Arnot et. al. (2000) investigaram o processo de microfiltração de emulsões de óleos minerais. Na comparação com o modelo deste trabalho o resultado de Arnot et al. (2000) apresentado na Fig. 4 tem boa aproximação para o valor calculado para  $Pe=0,9$ .

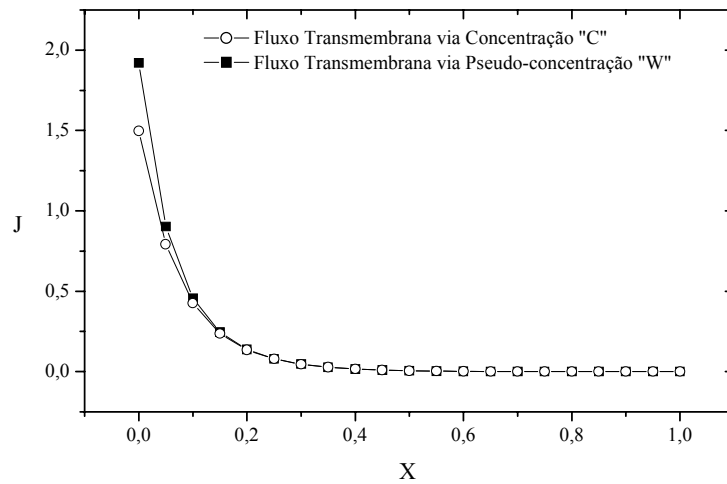
Huisman e Tragardh (1999) investigaram o processo de microfiltração para misturas em suspensão. Na comparação com o modelo deste trabalho o resultado da literatura possui aproximação para o valor calculado de  $Pe=0,73$ .

O trabalho de Afonso et.al. (2002) trata do processo de microfiltração de misturas residuárias em suspensões originária da lavagem de pedras de granito. Neste caso a natureza da mistura é bem diferente das anteriores. No entanto, o resultado de Afonso et al. (2002) apresentado na Fig. 4 possui aproximação compatível com os resultados do modelo deste trabalho em  $X=1$ .

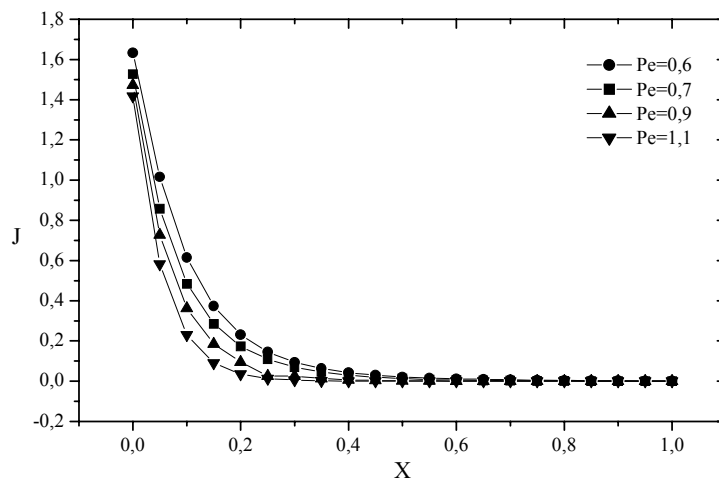
Muitos resultados da literatura não deixam explícitos os valores de Peclet devido à dificuldade de medição de propriedades físicas como a difusividade (Deen, 1998). Neste trabalho o adimensional de Peclet, próprio do mecanismo de transferência de massa, tem a forma:  $Pe = (v_w \cdot R_0)/D$ , ou seja, escrito para a velocidade na superfície permeável. Algumas correlações gerais disponíveis na literatura (Zeman e Zydney, 1996 e Deen, 1998) apresentam valores para a difusividade com ordem de grandeza de  $10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s. Considerando tubos permeáveis da ordem de 1,0 cm de diâmetro interno, como os utilizados neste trabalho, e a vazão trans-membrana da ordem de  $10^{-6}$ , o adimensional de Peclet fica igual a 0,5, ou seja compatível em ordem de grandeza como os dos resultados da modelagem deste trabalho.

Analisando a relação para Peclet na forma do produto entre os adimensionais de Reynolds (Re) e de Schmidt (Sc), ou seja,  $Pe=Re.Sc$ , e considerando para a grandeza da viscosidade cinemática de fluidos líquidos,  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s e da difusividade mássica  $10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s, temos portanto  $Sc = 10^{-6} / 10^{-8} = 100$ . Com esta análise de dimensões o valor de

Reynolds é bem menor que a unidade,  $Re \approx 10^{-2} \ll 1$ , limitando a solução para o regime laminar e compatível com um modelo de conservação dentro da camada limite.



(a)



(b)

Figura 3. Vazão trans-membrana (J) em função da posição axial adimensional (X) no tubo: (a) Gráfico obtido para a variável adimensional de concentração C e para a pseudovariável adimensional de concentração W, ambas em função de X para  $Pe=0,8$ ; (b) Gráfico da vazão trans-membrana em função de X para diversos valores de Peclet.

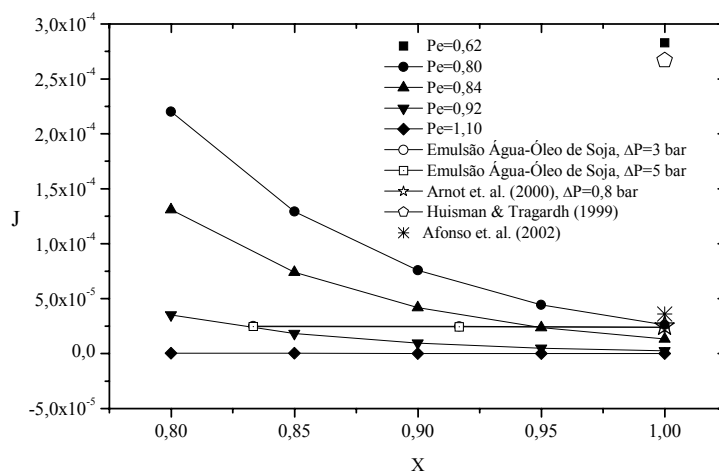


Figura 4. Vazão trans-membrana (J) em função da posição axial adimensional (X) no tubo, e correspondentes ao processo no regime estabelecido e permanente, após a formação da camada de polarização. Comparação de valores experimentais com os da modelagem deste trabalho e da literatura.

#### 4. Conclusões

A partir do uso da técnica de transformada integral, obteve-se neste trabalho bons resultados para a solução do modelo de escoamento laminar desenvolvido, convectivo e confinado em tubo com superfície permeável. Na comparação do modelo com resultados experimentais observa-se que no caso do processamento de emulsão (água/óleo de soja) a diferentes pressões tem-se uma significativa aproximação para  $Pe=0,80$ . Com o aumento de Peclet a vazão trans-membrana diminui para valores com ordem de grandeza de  $10^{-6}$  m/s. O resultado da literatura proveniente do trabalho de Huisman e Tragardh (1999), pode ser comparado com o resultado obtido por este modelo e tem boa aproximação para  $Pe=0,62$ . Outro fato relevante e satisfatório que foi à utilização da pseudovariável  $W$  para conduzir a formulação do problema à abordagem da técnica da transformada integral, onde as vazões encontradas, via  $W$  e  $C$ , se coincidem em quase todo valor de  $X$  e de Peclet.

#### 5. Agradecimentos

À FAPESP pelo auxílio financeiro.

#### 6. Referências Bibliográficas

- Afonso, M.D., Brites, A.M, Mohsen. M., 2002, "Crossflow Microfiltration of Marble Processing Wastewaters", *Desalination*, vol.149, pp.153-162.
- Arnot, T. C., Field, R. W., Koltuniewicz, A.B., 2000. "Cross-Flow and Dead-End Microfiltration of Oily-Water Emulsions, Part II. Mechanisms and Modeling of Flux Decline", *Journal of Membrane Science*, vol.169, p.1-15.
- Cebeci, T., Brashaw, P., 1989, "Physical and Computacional Aspects of Convective Heat Transfer", Springer-Verlag, New York.
- Cotta, R.M., 1993, "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Inc., Boca Raton, USA.
- Damark. K., *et al*, 2004, "A New Navier-Stokes and Darcy's Law Combined Model for Fluid Flow in Crossflow Filtration Tubular Membranes", *Desalination*, vol.161, pp.67-77.
- Deen, W.M., 1998, "Analysis of Transport Phenomena", Oxford University Press, New York.
- Huisman, I.H. & Tragardh, C., 1999, "Particle Transport in Crossflow Microfiltration - I. Effects of Hydrodynamics and Diffusion", *Chemical Engineering Science*, vol.54, pp.271-280.
- Ilias, S., Schimmel, K.A., Assey, G.E.J.M., 1995, "Effect of Viscosity on Membrane Fluxes in Cross-Flow Ultrafiltration", *Separation Science and Technology*, vol.30, pp.1669-1687.
- Lee, Y., Clark, M. M., 1998, "Modeling of Flux Decline During Crossflow Ultrafiltration of Colloidal Suspensions", *Journal of Membrane Science*, vol.149, pp.181-202.
- Özsisik, M.N., 1968, "Boundary Value Problems of Heat Conduction", International Textbook Company, Scranton.
- Zeman, L.J., Zydney, A.L., 1996, "Microfiltration and Ultrafiltration - Principles and Applications", Marcel Dekker, New York.
- Zydney, A.L., 1997, "Stagnant Film Model for Concentration Polarization in Membrane Systems", *Journal of Membrane Science*, vol.130, pp.275-281.

#### APPLICATION OF THE TRANSFORM INTEGRAL TECHNIQUE IN THE SOLUTION OF LAMINAR CONVECTIVE FLOW IN PERMEABLE TUBES APPLIED TO THE CROSSFLOW PROCESS

Abstract. The confined flows in permeable tubes are associated to the crossflow process (micro or ultra-filtration). The complexity of the non-linear mathematical formulation of the conservations laws doesn't allow the development of exact analytical solutions. However, approximate solutions are of great interest for the calculation of the transmembrane flux in microfiltration process. In this work we will use the technique of transformed integral in the solution of models of the laminar flows in permeable tubes, from the differential models of mass transfer in the boundary layer of concentration (Zydney, 1997). This approach is reduced in the adimensional and similar form of Graetz problem. The profile of velocity in the formulation is established in this work for the parabolic form as condition of permanent and established flow. A semi-analytical solution is presented in the form of series and the results for the flow in the permeable tubes are compared with others of the literature and obtained experimentally.

Keywords: Mathematical Modelling; Integral Transform; Crossflow; Mass Transfer; Emulsion.