

## MODELO MATEMÁTICO DE COMBUSTÃO DE SPRAY BIPROPELENTE

### Cesar Addis Valverde Salvador

Laboratório Associado de Combustão e Propulsão, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
Rodovia Presidente Dutra, Km 40, Cachoeira Paulista, São Paulo, Brasil  
cesalvador@lcp.inpe.br

### Fernando de Souza Costa

Laboratório Associado de Combustão e Propulsão, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
Rodovia Presidente Dutra, Km 40, Cachoeira Paulista, São Paulo, Brasil  
fernando@lcp.inpe.br

**Resumo.** *Apresenta-se neste trabalho um modelo matemático unidimensional da câmara de combustão de foguetes bipropelentes líquidos. Admite-se no modelo que os processos de mistura turbulenta e de reação química entre os vapores dos propelentes sejam bem mais rápidos que o processo de vaporização das gotas. As distribuições dos diâmetros das gotas dos propelentes seguem o modelo de Rosin-Rammler, porém tomando-se um número finito de diâmetros. São considerados o aquecimento transiente, a expansão térmica das gotas, o arrasto sobre as gotas incluindo efeitos da deformação aerodinâmica e a transferência de calor por convecção e por radiação dos gases para as gotas e para as paredes da câmara e o ambiente. Os resultados numéricos do modelo são comparados aos dados de um propulsor de 200 N usando NTO e MMH, testado no LCP/INPE.*

*Palavras chave:* bipropelente, modelo, vaporização, combustão, propulsor.

### 1. Introdução

Modelos matemáticos da combustão de nuvens de gotas (sprays) são importantes para o projeto e o desenvolvimento de câmaras de combustão de foguetes. O uso destes modelos pode reduzir o número de testes em protótipos, permite melhorias no projeto ou modificar as condições de operação de câmaras de combustão a um custo menor e em menor tempo do que utilizando métodos empíricos ou de tentativa e erro.

Existem diversos modelos na literatura sobre a queima de sprays. Eles podem ser classificados em modelos de escoamento localmente homogêneo (LHF), em modelos de escoamento separado (SF) ou em modelos baseados em correlações experimentais (Kuo, 1986).

Modelos baseados em correlações experimentais são os mais simples de usar, mas requerem um número grande de experimentos em um dado combustor e somente podem ser usados em combustores do mesmo tipo.

Modelos LHF consideram o spray equivalente a um escoamento de fase simples em que as fases líquida e gasosa estão em equilíbrio dinâmico e termodinâmico, com a mesma velocidade e temperatura em cada ponto do escoamento. A hipótese básica é que as variações das propriedades do escoamento sejam bem mais lentas do que o transporte de massa, de energia e de quantidade de movimento entre as fases. Os modelos LHF são úteis para sprays com gotas muito pequenas, escoamentos com bolhas e sprays em condições supercríticas. As distribuições iniciais de velocidade e de tamanho de gotas não são necessárias e, portanto, pouca informação é requerida a respeito do injetor. Outra vantagem dos modelos LHF é que os cálculos não são tão complexos nem demandam tanto tempo quanto os modelos SF. Os modelos de escoamento unifásicos existentes podem ser utilizados com poucas modificações para modelar escoamentos LHF. Menos constantes empíricas são necessárias nos modelos LHF do que nos modelos SF.

Nos modelos SF os processos de transporte nas fases líquida e gasosa e os transportes de massa, de quantidade de movimento e de energia entre as fases são levados em consideração. A prática comum é utilizar expressões empíricas para o arrasto e a transferência de calor e de massa das gotas, uma vez que o modelamento detalhado do escoamento ao redor de cada gota requer um tempo de computação bastante grande.

Os modelos matemáticos de sprays podem também ser classificados em termos do número de dimensões espaciais utilizadas. Eles podem ser classificados como zero-dimensionais, unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Cada um deles pode também ser classificado como estacionário (regime permanente) ou transiente se houver variações do escoamento com o tempo.

Nos modelos unidimensionais as propriedades do escoamento dependem apenas de uma coordenada espacial. Estes modelos são os mais utilizados por sua simplicidade e reduzido tempo de computação, embora possam envolver inúmeros detalhes do processo de vaporização e da queima das gotas. Spalding (1959), Priem e Heidmann (1960), Hersch (1965), Dickinson e Marshall (1968), Bracco (1973), Law (1975), Williams (1985), Turns e Faeth (1985) e Krioukov et al. (2003), dentre outros, desenvolveram modelos unidimensionais de queima de sprays aplicáveis a foguetes.

Deve-se notar que modelos bidimensionais ou tridimensionais permitem uma descrição mais detalhada do escoamento dentro da câmara do que os modelos unidimensionais e possibilitariam, a princípio, uma melhor predição

do desempenho de uma câmara de combustão. No entanto, o modelamento de cada fenômeno envolvido, como injeção, quebra dos jatos líquidos, vaporização das gotas, mistura turbulenta, escoamento e combustão turbulentos inclui aproximações que somadas podem conduzir a erros maiores do que os ocorridos em modelos unidimensionais.

Neste trabalho é apresentado um modelo unidimensional de queima de sprays em uma câmara de combustão de um foguete usando bipropelentes líquidos, baseado nos modelos de Priem e Heidmann (1960) e de Turns e Faeth (1985), considerando-se distribuições de diâmetros de gotas do combustível e do oxidante seguindo o modelo clássico de Rosin e Rammler (1933), porém tomando-se um número finito de diâmetros.

## 2. Modelo Teórico

Um esquema do processo de combustão em uma câmara de foguete bipropelente com área transversal constante é apresentado na Fig. 1.

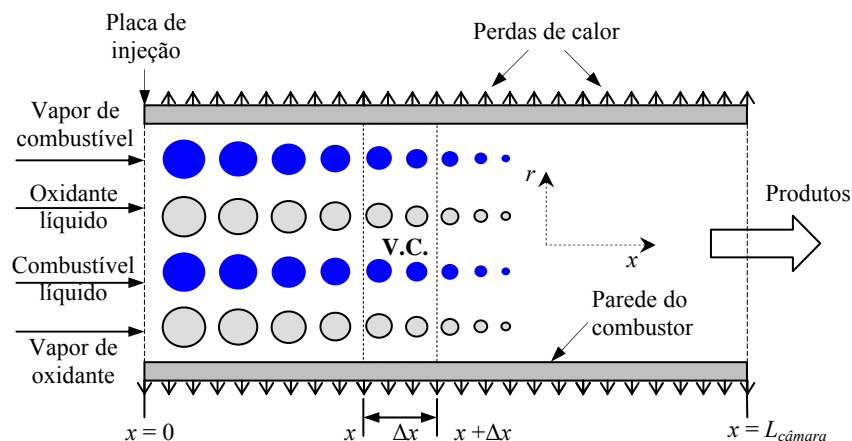


Figura 1. Esquema do processo de vaporização e queima unidimensional em uma câmara de combustão bipropelente.

O combustível e o oxidante são injetados na câmara de combustão através de uma placa de injeção na forma de jatos líquidos. Estes se transformam imediatamente em gotas com uma distribuição de diâmetros conhecidos. As gotas formadas entram em contato com os produtos quentes da combustão, transformam-se em vapor e se misturam, modificando a razão de equivalência local. A mistura formada queima instantaneamente alterando a temperatura e a composição dos produtos da combustão. Considera-se que parcelas conhecidas do combustível e do oxidante sejam injetadas na forma gasosa na seção de entrada, de modo que haja um fluxo de gás junto à placa de injeção, o que seria correspondente à recirculação de gases na câmara.

A pressão é admitida como uniforme, porém a temperatura dos gases varia ao longo da câmara, dependendo da razão de equivalência da mistura gasosa. A composição dos gases é calculada em cada seção para um processo de equilíbrio a pressão e a temperatura constantes, considerando-se as perdas de calor por convecção e por radiação através das paredes da câmara, bem como a troca de calor entre as gotas e a mistura gasosa, também por convecção e radiação.

O modelo teórico considera uma distribuição não uniforme de gotas entrando no combustor com tamanhos diferentes, empregando-se a função de distribuição de Rosin e Rammler, onde os parâmetros da função são obtidos experimentalmente e variam para cada tipo de injetor. O modelo leva em conta uma análise do processo de vaporização transiente da gota seguindo a metodologia usada por Chin e Lefebvre (1985) em que a vaporização das gotas durante o pré-aquecimento pode ser significativa dependendo principalmente da pressão e da temperatura do gás. Considera-se também a expansão das gotas durante a fase de aquecimento até atingirem uma temperatura de equilíbrio, equivalente a uma temperatura de bulbo úmido.

Os gases e as gotas apresentam velocidades diferentes inicialmente, porém à medida em que ocorre a vaporização das gotas a velocidade relativa tende para zero. Considera-se no modelo o efeito da deformação das gotas sobre o coeficiente de arrasto das mesmas. Não foram considerados os efeitos da quebra e da colisão de gotas.

### 2.1. Obtenção das equações do problema

As equações do problema são obtidas considerando-se elementos de volume de espessura  $\Delta x$  ao longo do combustor, conforme indica a figura 2 a seguir. São feitos balanços de massa e de energia nestes elementos de volume, fornecendo um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser integrado numericamente, conhecidas as condições iniciais. Será mostrado posteriormente utilizando-se a conservação da quantidade de movimento que, em geral, as variações de pressão em uma câmara de área constante sem atrito são muito pequenas e podem assim ser desprezadas.

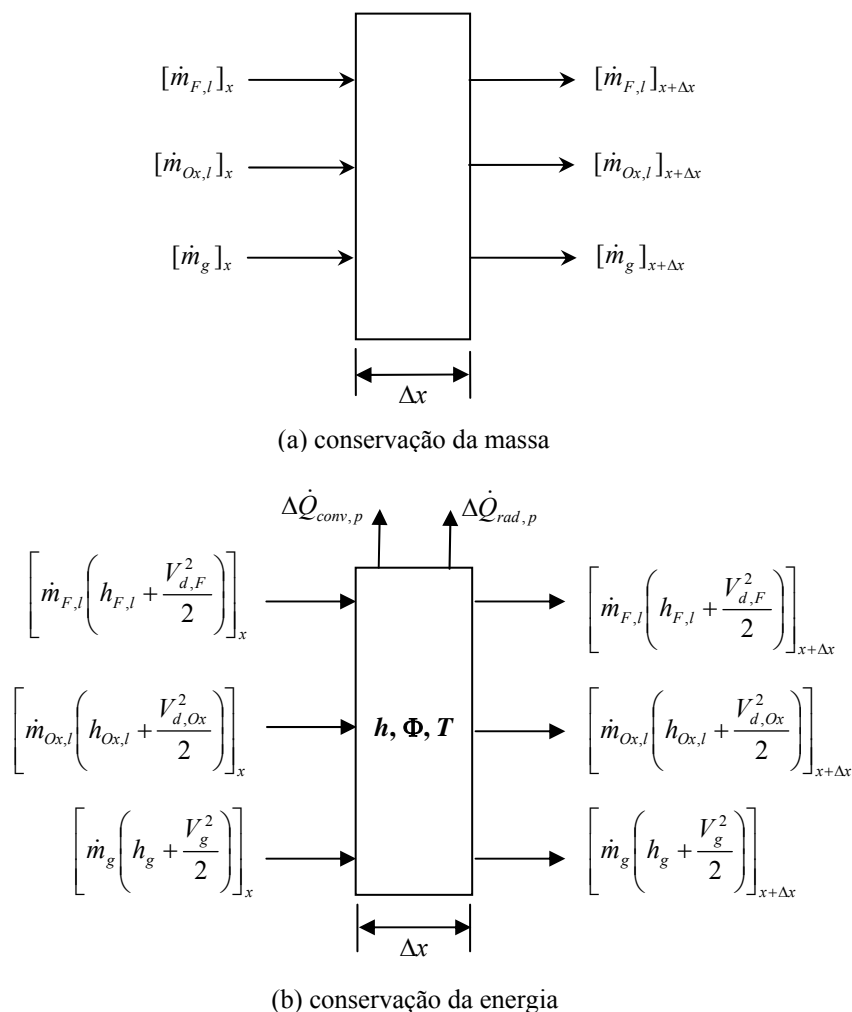


Figure 2 – Elementos de volume para uma análise da conservação de massa e de energia.

## 2.2. A função de distribuição do tamanho de gotas

No presente trabalho é empregada a função de distribuição de Rosin-Rammler, a mais comumente usada devido à sua simplicidade (Lefebvre, 1989), com dois únicos parâmetros a serem determinados. A função de Rosin-Rammler é expressa em termos da fração de volume cumulativo:

$$Q = 1 - \exp\left[-\left(\frac{D}{X}\right)^q\right] \quad (1)$$

onde  $Q$  é a fração de volume do spray contendo gotas de diâmetros menores que  $D$ , e  $q$  e  $X$  são constantes. O parâmetro  $q$  mede a uniformidade do tamanho das gotas no spray, quanto maior é o valor de  $q$ , mais uniforme é o spray, de modo que se  $q$  for infinito as gotas do spray serão todas do mesmo tamanho. Segundo Lefebvre (1989), na maioria dos sprays o valor de  $q$  varia entre 1,5 e 4. A constante  $X$  representa um diâmetro característico do spray cuja escolha depende do tipo de problema considerado. Lefebvre (1989) indica que o parâmetro  $X$  para aplicações de combustão é relacionado à constante  $q$  pela relação :

$$X = D_{32} \left[ \Gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right) \right] \quad (2)$$

onde  $\Gamma$  é a função gama e  $D_{32}$  é o diâmetro médio de Sauter (SMD), definido por:

$$D_{32} = \frac{\sum N_k D_k^3}{\sum N_k D_k^2} \tag{3}$$

onde  $N_k$  é o número de gotas tendo diâmetro  $D_k$  dentro do spray. O SMD é um diâmetro médio das gotas, proporcional à razão entre o volume total e a superfície total das gotas do spray e o seu valor depende do tipo de injetor, das propriedades do líquido e das condições de saída do spray.

No modelo é considerado um número finito de parcelas de gotas. Cada parcela inclui gotas dentro de uma faixa de diâmetros entrando na câmara de combustão. As faixas de diâmetros têm igual largura, por exemplo: 0-60, 60-120, 120-180, 180-240  $\mu\text{m}$ . A fim de simplificar o problema cada parcela de gotas é caracterizada pelo SMD representativo da faixa de diâmetros de gotas dentro da parcela. O procedimento detalhado para a obtenção do SMD de cada parcela de gotas é mostrado em Valverde (2004). É calculado um diâmetro máximo,  $D_{\text{max}}$ , para cada distribuição de Rosin-Rammler, acima do qual a porcentagem de volume do propelente é menor que 0,1 %. Assim, não são consideradas gotas com diâmetros maiores que  $D_{\text{max}}$ .

A Figura 3 mostra a influência do número de parcelas de gotas sobre a função de distribuição de Rosin-Rammler para o caso  $D_{32} = 25 \mu\text{m}$  e  $q = 1,5$ . Um aumento no número de parcelas para representar a distribuição de um spray pode produzir resultados mais precisos, porém o tempo de cálculo requerido é também maior. A Figura 4a mostra que um número de 8 parcelas representa satisfatoriamente a função de distribuição, ou seja, o uso de um número maior de parcelas não influi significativamente no cálculo da distância de vaporização. A Figura 4b mostra a influência dos parâmetros de Rosin-Rammler  $q$  e  $D_{32}$  sobre  $D_{\text{max}}$  para  $q = 1,5, 2,0, 2,5$  e  $3,0$  e  $D_{32} = 25, 50$  e  $75 \mu\text{m}$ . Mantendo-se  $D_{32}$  constante nota-se que um aumento de  $q$  diminui o  $D_{\text{max}}$  porque o spray é mais uniforme tendo gotas de tamanhos parecidos com  $D_{32}$  como mencionado anteriormente. No entanto considerando  $q$  como constante um aumento do  $D_{32}$  produz um aumento do  $D_{\text{max}}$  devido à probabilidade de encontrar no spray gotas maiores pela relação dada na Eq. (1).

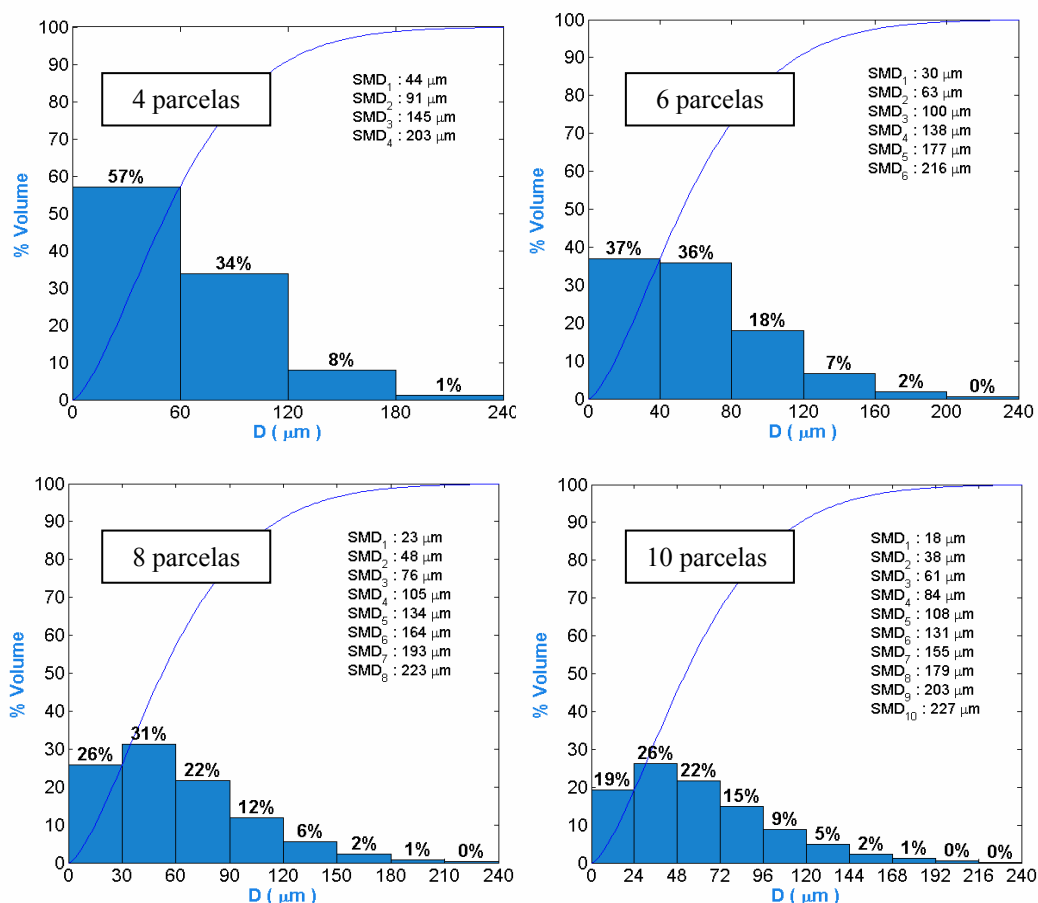


Figura 3 – Influência do número de parcelas de gotas sobre a função de distribuição de Rosin-Rammler com parâmetros  $q = 1.5$  e  $D_{32} = 25 \mu\text{m}$  constantes e para 4, 6, 8 e 10 parcelas de gotas diferentes.

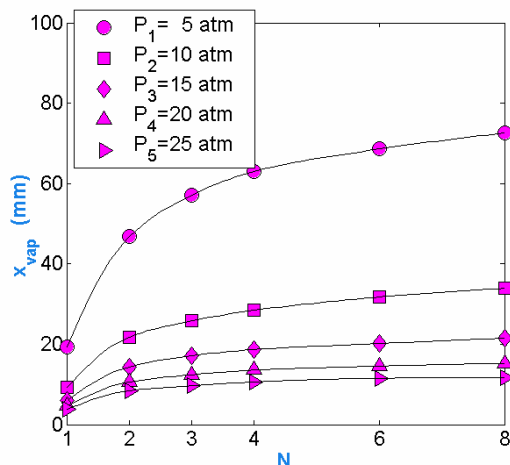


Figura 4a – Influência do número de parcelas de gotas,  $N$ , sobre a distância de vaporização completa de MMH,  $x_{vap}$ . Oxidante:  $N_2O_4$ .

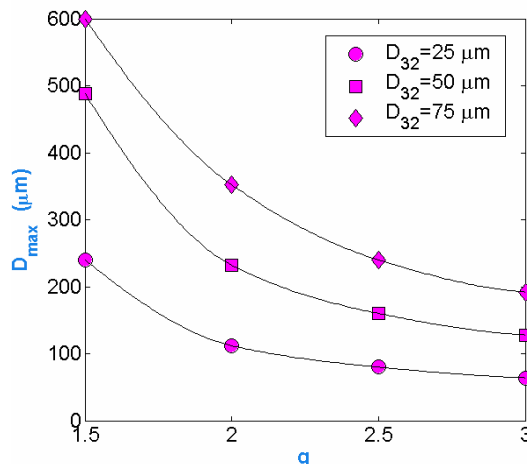


Figura 4b – Influência dos parâmetros de Rosin-Rammler  $q$  e  $D_{32}$  sobre  $D_{max}$ .

### 2.3. Balanço de massa

A Figura 2a mostra as vazões de massa da fase líquida e da fase gasosa que entram e saem de um elemento de volume ou volume de controle (VC). O balanço dessas vazões fornece:

$$\frac{d\dot{m}_g}{dx} + \frac{d\dot{m}_{F,l}}{dx} + \frac{d\dot{m}_{Ox,l}}{dx} = 0 \quad (4)$$

onde os sub-índices “ $F$ ” e “ $Ox$ ” designam o combustível e o oxidante, respectivamente, e os sub-índices “ $g$ ” e “ $l$ ” designam as fases presentes no combustor, gás e líquido, respectivamente. Assim, na Eq. (4)  $\dot{m}_{F,l}$  e  $\dot{m}_{Ox,l}$  representam as vazões de massa totais do combustível e do oxidante líquidos, respectivamente, e  $\dot{m}_g$  é a vazão total de gás através do volume de controle.

A derivada da vazão de massa total de cada um dos propelentes é uma função das vazões parciais formadas por cada parcela de gotas:

$$\frac{d\dot{m}_{F,l}}{dx} = \sum_{i=1}^I \frac{d\dot{m}_{F,l,i}}{dx} ; \quad \frac{d\dot{m}_{Ox,l}}{dx} = \sum_{i=1}^I \frac{d\dot{m}_{Ox,l,i}}{dx} \quad (5)$$

onde os sub-índices “ $i$ ” e “ $j$ ” designam a cada parcela em particular do combustível e oxidante, respectivamente, e “ $I$ ” e “ $J$ ” indicam o número total de parcelas presentes para cada propelente. É importante ressaltar que a vazão de massa total de cada um dos propelentes será dividida em vazões parciais em quantidade igual ao número de parcelas escolhidas para a análise.

As vazões parciais de cada um dos propelentes são calculadas multiplicando-se a percentagem do volume das gotas dentro de uma parcela de gotas  $k = i$  ou  $j$  pela vazão total, seguindo-se a distribuição de Rosin-Rammler. O modelo desenvolvido permite também considerar a injeção de vários combustíveis e oxidantes simultaneamente.

A Equação (4) também pode ser integrada ao longo de  $x$  para se obter uma expressão para a massa do gás em qualquer posição axial  $\dot{m}_{g,x}$ :

$$\dot{m}_{g,x} = \dot{m}_{g,o} + (\dot{m}_{F,l,o} - \dot{m}_{F,l,x}) + (\dot{m}_{Ox,l,o} - \dot{m}_{Ox,l,x}) \quad (6)$$

onde os sub-índices “ $0$ ” e “ $x$ ” indicam condições na entrada do combustor e em uma posição axial qualquer, respectivamente. As vazões de massa de cada parcela de gotas de combustível e oxidante líquido na entrada são:

$$\dot{m}_{F,l,i,0} = \rho_{F,l,i,0} A_{F,l,i,0} v_{d,F,i,0}, \quad i = 1, \dots, I \quad ; \quad \dot{m}_{Ox,l,j,0} = \rho_{Ox,l,j,0} A_{Ox,l,j,0} v_{d,Ox,j,0}, \quad j = 1, \dots, J \quad (7)$$

onde  $\rho_{F,l,i,0}$  e  $\rho_{Ox,l,j,0}$  são as densidades do combustível e do oxidante líquidos,  $v_{d,F,i,0}$  e  $v_{d,Ox,j,0}$  são as velocidades das gotas de combustível e oxidante, e  $A_{F,l,i,0}$  e  $A_{Ox,l,j,0}$  são as áreas parciais de injeção ( $x=0$ ) correspondentes a cada parcela

do combustível e oxidante líquidos, respectivamente. A área parcial de cada parcela de gotas,  $k = i$  ou  $j$ , é calculada multiplicando-se a sua percentagem de volume pela área total.

A temperatura do líquido na entrada é especificada para cada propelente e depende da temperatura do tanque dos propelentes e, portanto, é a mesma para cada parcela de gotas. A densidade do líquido é um parâmetro conhecido que depende unicamente da temperatura do líquido na entrada.

A área total de injeção para cada propelente (área de saída do líquido pelo injetor) é também um parâmetro conhecido e depende do tipo de injetor a ser usado. Este valor pode ser calculado usando o diâmetro do canal de saída do spray. Em geral os injetores têm mais de um canal de saída e, portanto, a área total seria a soma das áreas individuais de cada canal.

A vazão de massa total de líquido para cada propelente é um valor conhecido, especificado em função do nível de empuxo do propulsor e das condições de funcionamento desejadas. Admitindo-se que as velocidades de entrada de todas as parcelas de gotas de combustível e de oxidante sejam as mesmas, pode-se calcular essas velocidades de entrada a partir das vazões mássicas totais dos propelentes líquidos na entrada:

$$v_{d,F,0} = \dot{m}_{F,l,0} / (\rho_{F,l,0} A_{F,l,0}) \quad ; \quad v_{d,Ox,0} = \dot{m}_{Ox,l,0} / (\rho_{Ox,l,0} A_{Ox,l,0}) \quad (8)$$

A vazão mássica total de cada propelente líquido na entrada é dada pela soma das vazões mássicas parciais:

$$\dot{m}_{F,l,0} = \sum_{i=1}^I \dot{m}_{F,l,i,0} \quad ; \quad \dot{m}_{Ox,l,0} = \sum_{i=1}^I \dot{m}_{Ox,l,i,0} \quad (9)$$

As vazões mássicas parciais para cada propelente são calculadas das porcentagens de volume de cada parcela a partir da função de distribuição de Rosin-Rammler dada, multiplicadas pela vazão mássica total. Da mesma maneira, as áreas de propelente líquido na entrada ocupadas por cada parcela são calculadas multiplicando-se as porcentagens de volume de cada parcela pela área total de injeção.

A razão de equivalência pré-misturada e a razão de equivalência total são expressas como:

$$\Phi_P = \frac{f_P}{f_s} = \frac{1}{f_s} \frac{\dot{m}_{F,g,0}}{\dot{m}_{Ox,g,0}} \quad ; \quad \Phi_T = \frac{f_T}{f_s} = \frac{1}{f_s} \frac{\dot{m}_{F,g,0} + \dot{m}_{F,l,0}}{\dot{m}_{Ox,g,0} + \dot{m}_{Ox,l,0}} \quad (10)$$

onde  $\Phi_P$  e  $\Phi_T$  são as razões de equivalência pré-misturada e total, respectivamente, e  $f_P$ ,  $f_T$  e  $f_s$  são as razões de mistura parcial (pré-misturada), total e estequiométrica respectivamente. A razão de mistura parcial  $f_P$  é a razão entre a vazão de massa de combustível e a vazão de massa de oxidante na fase gasosa entrando no combustor (correspondente a um dado nível de recirculação na câmara). A razão de mistura total  $f_T$  é razão entre a quantidade total de combustível líquido e gasoso e a quantidade total de oxidante líquido e gasoso que entram na câmara de combustão.

As gotas ao saírem do injetor encontram um ambiente a altas temperaturas que propicia o pré-aquecimento e mantêm a vaporização das mesmas. A vazão total de massa gasosa na entrada,  $\dot{m}_{g,0}$ , é dada por:

$$\dot{m}_{g,0} = \dot{m}_{F,g,0} + \dot{m}_{Ox,g,0} \quad (11)$$

onde  $\dot{m}_{F,g,0}$  e  $\dot{m}_{Ox,g,0}$  são as vazões mássicas de combustível e de oxidante gasosos, respectivamente, na entrada do combustor. Na análise de macro-escala, isto é, da mistura gasosa longe das gotas, considera-se que os vapores de combustível e de oxidante reajam instantaneamente formando os produtos.

As massas de combustível ou oxidante líquidos em uma dada posição podem ser expressas em termos do diâmetro de uma gota nesta mesma posição pelas relações:

$$\dot{m}_{F,l,i} = \dot{m}_{F,l,i,0} (\rho_{F,l,i} / \rho_{F,l,i,0}) (D_{F,i} / D_{F,i,0})^3 \quad (12a)$$

$$\dot{m}_{Ox,l,j} = \dot{m}_{Ox,l,j,0} (\rho_{Ox,l,j} / \rho_{Ox,l,j,0}) (D_{Ox,j} / D_{Ox,j,0})^3 \quad (12b)$$

onde  $D_{F,i}$  é o diâmetro das gotas da parcela  $i$  do combustível,  $D_{Ox,j}$  é o diâmetro das gotas da parcela  $j$  do oxidante e o índice 0 designa condições iniciais, em  $x = 0$ . Derivando as Eqs. (12a,b) em relação a  $x$  e considerando a dilatação térmica da gota, obtêm-se as equações:

$$\frac{d\dot{m}_{F,l,i}}{dx} = \frac{3\dot{m}_{F,l,i}}{D_{F,i}} \frac{dD_{F,i}}{dx} + \frac{\dot{m}_{F,l,i}}{\rho_{F,l,i}} \frac{d\rho_{F,l,i}}{dT_{F,l,i}} \frac{dT_{F,l,i}}{dx} \quad (13a)$$

$$\frac{d\dot{m}_{Ox,l,j}}{dx} = \frac{3\dot{m}_{Ox,l,j}}{D_{Ox,j}} \frac{dD_{Ox,j}}{dx} + \frac{\dot{m}_{Ox,l,j}}{\rho_{Ox,l,j}} \frac{d\rho_{Ox,l,j}}{dT_{Ox,l,j}} \frac{dT_{Ox,l,j}}{dx} \quad (13b)$$

Nas Equações (13) o primeiro termo da direita é positivo durante a expansão da gota e o segundo termo é negativo, visto que a densidade do líquido diminui com a temperatura. Quando a gota atinge uma temperatura de equilíbrio, admitindo-se a temperatura interna da gota uniforme, o segundo termo da direita se anula.

A derivada do diâmetro da gota ao longo da câmara ( $dD/dx$ ) é obtida a partir da teoria de evaporação transiente para uma gota esférica descrita por Chin e Lefebvre (1985). Seguindo esta teoria, as Equações (13) podem ser reescritas em termos dos diâmetros das gotas:

$$\frac{dD_{F,i}}{dx} = -\frac{2\dot{m}_{v,F,i}}{\pi\rho_{F,l,i}v_{d,F,i}D_{F,i}^2} - \frac{D_{F,i}}{3\rho_{F,l,i}} \frac{d\rho_{F,l,i}}{dT_{F,l,i}} \frac{dT_{F,l,i}}{dx} \quad (14.a)$$

$$\frac{dD_{Ox,j}}{dx} = -\frac{2\dot{m}_{v,Ox,j}}{\pi\rho_{Ox,l,j}v_{d,Ox,j}D_{Ox,j}^2} - \frac{D_{Ox,j}}{3\rho_{Ox,l,j}} \frac{d\rho_{Ox,l,j}}{dT_{Ox,l,j}} \frac{dT_{Ox,l,j}}{dx} \quad (14.b)$$

onde  $\dot{m}_v$  é a taxa de vaporização de uma gota, dada por:

$$\dot{m}_v = \frac{\pi D \lambda_{g,r} Nu_0}{C_{pg,r}} \ln(1 + B_M) \quad (15)$$

em que  $\lambda_{g,r}$  e  $C_{pg,r}$  são a condutividade térmica e o calor específico da mistura de vapor dos propelentes com os produtos da combustão, calculados a uma temperatura média de referência  $T_r$ ,  $Nu_0$  é o número de Nusselt para a convecção de calor ao redor de uma esfera rígida e  $B_M$  é o número de transferência baseado na difusão de vapor.

#### 2.4. Balanço da quantidade de movimento

Um balanço dos fluxos de quantidade de movimento na injeção e no fim da vaporização fornece:

$$P_{inj} + (\rho_g v_g^2)_{inj} + \left( \frac{\dot{m}_{F,l}}{A_c} v_{d,F} \right)_{inj} + \left( \frac{\dot{m}_{Ox,l}}{A_c} v_{d,Ox} \right)_{inj} = P_f + (\rho_g v_g^2)_f \quad (16)$$

Considerando que  $\rho_g v_g^2 = \gamma PM^2$ , onde  $\gamma$  é a razão de calores específicos do gás,  $M$  é o número de Mach do escoamento,  $P$  é a pressão, pode-se obter a seguinte expressão para a pressão da mistura gasosa no fim da vaporização:

$$P_f = \frac{P_{inj} (1 + \gamma_{inj} M_{inj}^2) + \left( \frac{\dot{m}_{F,l}}{A_c} v_{d,F} \right)_{inj} + \left( \frac{\dot{m}_{Ox,l}}{A_c} v_{d,Ox} \right)_{inj}}{1 + \gamma_f M_f^2} \quad (17)$$

Observa-se que em câmaras de combustão de foguetes, em geral:

$$M_{inj} \ll 1, \quad M_f \ll 1, \quad \left( \frac{\dot{m}_{F,l}}{A_c} v_{d,F} \right)_{inj} + \left( \frac{\dot{m}_{Ox,l}}{A_c} v_{d,Ox} \right)_{inj} \ll P_{inj},$$

conseqüentemente,  $P_f \cong P_{inj}$ , e as variações de pressão ao longo da câmara podem ser desprezadas.

As acelerações das gotas de combustível e oxidante são obtidas usando-se a 2ª lei de Newton que fornece:

$$\frac{dv_{d,F,i}}{dx} = \frac{3C_{D,F,i}\rho_g(v_g - v_{d,F,i})|v_g - v_{d,F,i}|}{4\rho_{F,l,i}v_{d,F,i}D_{F,i}} \quad (18a)$$

$$\frac{dv_{d,Ox,j}}{dx} = \frac{3C_{D,Ox,j}\rho_g(v_g - v_{d,Ox,j})|v_g - v_{d,Ox,j}|}{4\rho_{Ox,l,j}v_{d,Ox,j}D_{Ox,j}} \quad (18b)$$

onde  $C_D$  é o coeficiente de arrasto sobre as gotas, calculado pela correlação de Wiegand (1987) que inclui os efeitos da deformação aerodinâmica:

$$C_D \cong f(\text{Re}_d, We) = 0,28 + \frac{21}{\text{Re}_d} + \frac{6}{\sqrt{\text{Re}_d}} + We(0,2319 - 0,1579 \log \text{Re}_d + 0,0471 \log^2 \text{Re}_d - 0,0042 \log^3 \text{Re}_d) \quad (19)$$

válido para  $[5 \leq \text{Re} \leq 2000]$ , onde  $\text{Re}_d$  é o número de Reynolds e  $We$  é o número de Weber.

A densidade da mistura gasosa é dada por  $\rho_g = P_g \bar{M}_g / (R_0 T_g)$ , onde  $P_g$  é a pressão do gás,  $\bar{M}_g$  é a massa molar do gás e  $R_0$  é a constante universal dos gases (8,3145 kJ/kmol.K). Diferenciando  $\rho_g$ , obtém-se:

$$\frac{d\rho_g}{dx} = \rho_g \left( \frac{1}{\bar{M}_g} \frac{d\bar{M}_g}{dT_g} - \frac{1}{T_g} \right) \frac{dT_g}{dx} \quad (20)$$

A área ocupada pela mistura de gases ao longo do combustor é  $A_g = A_c - (A_{F,l} + A_{Ox,l})$  onde  $A_c$  é a área da seção transversal interna da câmara de combustão e  $A_{F,l}$  e  $A_{Ox,l}$  são as somas totais das áreas das seções transversais de todas as gotas de combustível e oxidante, respectivamente, na posição  $x$ . Diferenciando  $A_g$ , obtém-se:

$$\frac{dA_g}{dx} = -\frac{dA_{F,l}}{dx} - \frac{dA_{Ox,l}}{dx} \quad (21)$$

Diferenciando a velocidade da fase gasosa dada por  $v_g = \dot{m}_g / (\rho_g A_g)$ , substituindo (20) e reordenando, resulta:

$$\frac{dv_g}{dx} = v_g \left( \frac{1}{\dot{m}_g} \frac{d\dot{m}_g}{dx} - \frac{1}{A_g} \frac{dA_g}{dx} \right) - v_g \left( \frac{1}{\bar{M}_g} \frac{d\bar{M}_g}{dT_g} - \frac{1}{T_g} \right) \frac{dT_g}{dx} \quad (22)$$

## 2.5. Balanço de energia

As variações de temperatura das gotas dos propelentes são obtidas mediante balanços de energia que fornecem:

$$\frac{dT_{F,l,i}}{dx} = \frac{\dot{Q}_{rad,F,i} + \dot{Q}_{conv,F,i} - \dot{Q}_{v,F,i}}{m_{d,F,i} v_{d,F,i} C_{pl,F,i}} \quad (23a)$$

$$\frac{dT_{Ox,l,j}}{dx} = \frac{\dot{Q}_{rad,Ox,j} + \dot{Q}_{conv,Ox,j} - \dot{Q}_{v,Ox,j}}{m_{d,Ox,j} v_{d,Ox,j} C_{pl,Ox,j}} \quad (23b)$$

onde  $\dot{Q}_{rad}$  é o calor por unidade de tempo transferido por radiação dos gases quentes para uma gota,  $\dot{Q}_{conv}$  é o calor por unidade de tempo transferido por convecção dos gases quentes para uma gota e  $\dot{Q}_v$  é o calor por unidade de tempo usado para a vaporização de uma gota representativa de uma parcela do combustível ou oxidante.

O calor transferido por radiação para uma gota é  $\dot{Q}_{rad,d} = \varepsilon_g \sigma A_d (T_g^4 - T_l^4)$  onde  $\varepsilon_g$  é a emissividade do gás,  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann ( $5.6704 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ ),  $A_d$  é a área superficial de uma gota,  $T_g$  é a temperatura do gás e  $T_l$  é a temperatura do líquido (temperatura da superfície da gota). O calor transmitido por convecção para a gota é dado por  $\dot{Q}_{conv,d} = \tilde{h}^* A_d (T_g - T_l)$  onde  $\tilde{h}^*$  é o coeficiente de convecção incluindo o efeito da vaporização (Zhou, 1993). O calor de vaporização é dado por  $\dot{Q}_v = \dot{m}_v h_{fg}$  onde  $h_{fg}$  é a entalpia de vaporização, dependente da temperatura.

É mostrado em detalhe por Valverde (2004) através de um balanço de energia da fase gasosa, em um elemento de volume do escoamento, que a variação de temperatura do gás é dada por:

$$\frac{dT_g}{dx} = -\frac{1}{a_2} \left( a_1 + W_F + W_{Ox} + \frac{d\dot{Q}_{conv,w}}{dx} + \frac{d\dot{Q}_{rad,w}}{dx} \right) \quad (24)$$

com



$$W_F = \sum_{i=1}^I \left\{ \dot{m}_{F,l,i} C_{pF,l,i} \frac{dT_{F,l,i}}{dx} + h_{F,l,i} \frac{d\dot{m}_{F,l,i}}{dx} + \dot{m}_{F,l,i} v_{d,F,i} \frac{dv_{d,F,i}}{dx} + \frac{v_{d,F,i}^2}{2} \frac{d\dot{m}_{F,l,i}}{dx} \right\} \quad (25)$$

$$W_{Ox} = \sum_{j=1}^J \left\{ \dot{m}_{Ox,l,j} C_{pOx,l,j} \frac{dT_{Ox,l,j}}{dx} + h_{Ox,l,j} \frac{d\dot{m}_{Ox,l,j}}{dx} + \dot{m}_{Ox,l,j} v_{d,Ox,j} \frac{dv_{d,Ox,j}}{dx} + \frac{v_{d,Ox,j}^2}{2} \frac{d\dot{m}_{Ox,l,j}}{dx} \right\} \quad (26)$$

$$a_1 = \dot{m}_g v_g^2 \left[ \frac{3}{2\dot{m}_g} \frac{d\dot{m}_g}{dx} - \frac{1}{A_g} \frac{dA_g}{dx} \right] + \left[ \dot{m}_g \frac{dh_g}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dx} + h_g \frac{d\dot{m}_g}{dx} \right] \quad ; \quad a_2 = \dot{m}_g \left[ \frac{dh_g}{dT_g} - v_g^2 \left( \frac{1}{M_g} \frac{d\bar{M}_g}{dT_g} - \frac{1}{T_g} \right) \right] \quad (27)$$

onde  $\Phi$  é a razão de equivalência da mistura gasosa. O calores por convecção,  $\dot{Q}_{conv,w}$ , e por radiação do gás até a parede,  $\dot{Q}_{rad,w}$ , são calculados, respectivamente, pelas equações:

$$\frac{d\dot{Q}_{conv,w}}{dx} = \hat{h}_g \pi D_c (T_g - T_{wi}) \quad (28a)$$

$$\frac{d\dot{Q}_{rad,w}}{dx} = \varepsilon_g \sigma \pi D_c (T_g^4 - T_{wi}^4) \quad (28b)$$

onde  $T_{wi}$  é a temperatura interna da parede da câmara,  $D_c$  é o diâmetro interno da câmara de combustão e  $\hat{h}_g$  é o coeficiente de convecção dos gases quentes, dependente das propriedades do fluido e do escoamento.

A entalpia do gás  $h_g$  e as suas derivadas  $dh_g/dT$ ,  $dh_g/d\Phi$  e  $dh_g/dP$  podem ser calculadas conhecendo-se a composição de equilíbrio da mistura gasosa para valores de  $T$ ,  $P$  e  $\Phi$  especificados. Foi escrito um programa de equilíbrio químico considerando um combustível  $C_xH_yO_zN_t$  e oxidante  $N_pO_q$ , com produtos incluindo até 11 espécies:  $CO_2$ ,  $CO$ ,  $H_2O$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $O$ ,  $H$ ,  $OH$ ,  $NO$  e  $N$  para o cálculo destas derivadas e outras propriedades.

### 3. Resultados

O sistema de equações diferenciais ordinárias dado pelas Eqs. (14), (18), (19), (21), (22), (23), (24), (25), (26), (31) e (32) foi integrado numericamente, usando-se os dados de um motor de 200 N usando MMH (monometil-hidrazina) e NTO (tetróxido de nitrogênio) testado nas instalações da câmara de vácuo do LCP/INPE, conforme descritos na Tabela 1 a seguir. As dimensões deste motor foram especificadas a partir de um comprimento característico  $L^* \approx 1,2$  m para os propelentes usados. O material da parede era Inconel 600, com espessura de 3 mm.

Tabela 1. Dados do Propulsor de 200 N testado no LCP/INPE.

$F$ (N)	200	$T_\infty$ (K)	300	$\dot{m}_{F,l,0}$ (gr/s)	30,23	$q_F$	2,5	$f_s$	0,400
$L_c$ (mm)	80	$T_{g,0}$ (K)	800	$\dot{m}_{Ox,l,0}$ (gr/s)	40,03	$q_{Ox}$	2,5	$f_T$	0,755
$D_c$ (mm)	42	$T_{F,l,0}$ (K)	300	$A_{F,l}$ (mm <sup>2</sup> )	20,73	$D_{32,F}$ (μm)	66	$\Phi_T$	1,887
$t_p$ (mm)	3	$T_{Ox,l,0}$ (K)	300	$A_{Ox,l}$ (mm <sup>2</sup> )	3,97	$D_{32,Ox}$ (μm)	32	$P_c$ (atm)	10

A Figura 5 mostra a evolução do diâmetro adimensional,  $D/D_0$ , das gotas ao longo da câmara de combustão. Cada parcela de gotas é representada por um diâmetro  $D_{32}$ . Observa-se na figura uma região de expansão das gotas indicando um período transiente de pré-aquecimento. A distância de vaporização da parcela de gotas de maior diâmetro inicial é cerca de 85 mm, pouco maior que  $L_c$ . A Fig. 6 mostra a variação das velocidades do gás e das gotas ao longo da câmara para vários diâmetros de gotas. A Fig. 7 apresenta o efeito do diâmetro inicial das gotas sobre a temperatura do líquido ao longo da câmara. A Fig. 8 mostra o histórico da temperatura do gás,  $T_g$ , e das temperaturas interna e externa da parede da câmara,  $T_{wi}$  e  $T_{we}$ , quando a parede não é resfriada por uma camada de líquido, e também para o caso em que a parede interna é resfriada por uma camada de líquido, considerando  $T_{wic} = f(x)T_{bF} + (1 - f(x))T_{wi}$ , com  $f(x) = 1 - x/L_{vap}$ . Neste caso as temperaturas das paredes interna e externa apresentam um perfil linear. Detalhes do cálculo de  $T_{wi}$  e  $T_{we}$  são apresentados em Valverde (2004). As Figuras 9 e 10 mostram a variação da composição dos produtos da combustão ao longo da câmara. As Figuras 11-12 mostram algumas propriedades do gás ao longo da câmara:  $\Phi$ ,  $\varepsilon_g$ ,  $\gamma_g$  e  $M$ . A Figura 13 apresenta a fração de massa vaporizada e a Fig.14 mostra a área superficial adimensional variando ao longo do tempo.

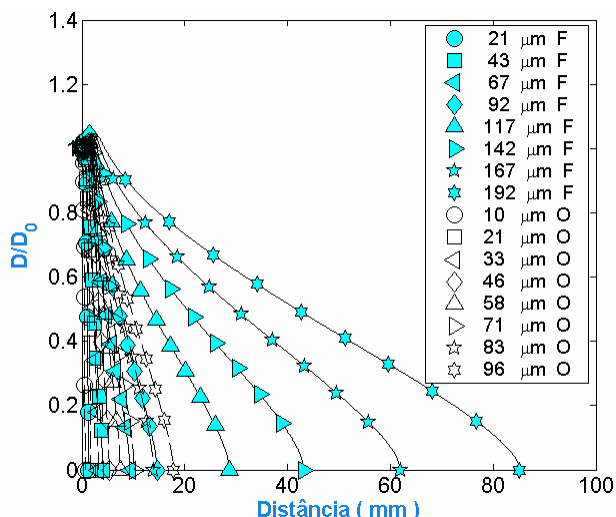


Figura 5. Evolução do diâmetro adimensional,  $D/D_0$ , das gotas ao longo da câmara de combustão.

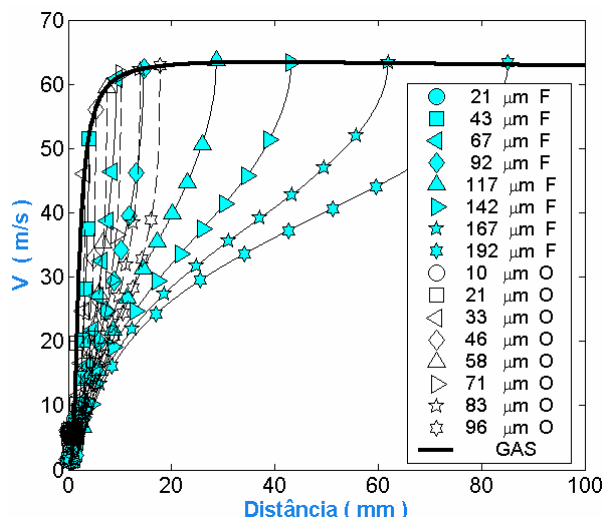


Figura 6. Velocidade das gotas,  $v_d$ , e velocidade do escoamento,  $v_g$ , ao longo da câmara.

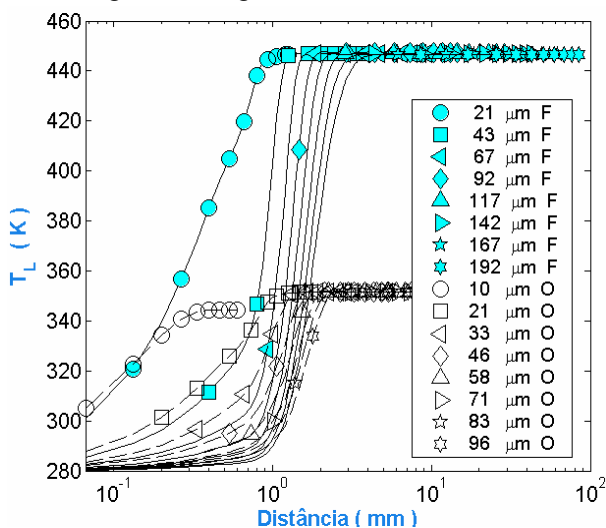


Figura 7. Efeitos do diâmetro inicial das gotas sobre a temperatura do líquido,  $T_l$ .

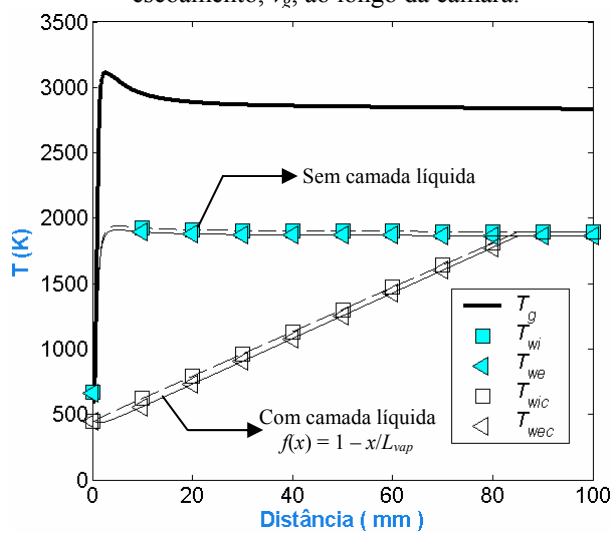


Figura 8. Variação da temperatura do gás,  $T_g$ , e das paredes interna e externa,  $T_{wi}$  e  $T_{we}$ .

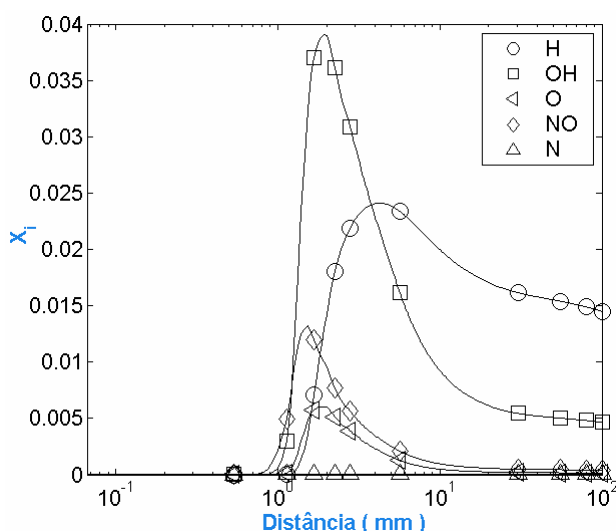


Figura 9. Variação das frações molares,  $X_i$ , dos produtos secundários da combustão, H, OH, O, NO e N, ao longo do combustor

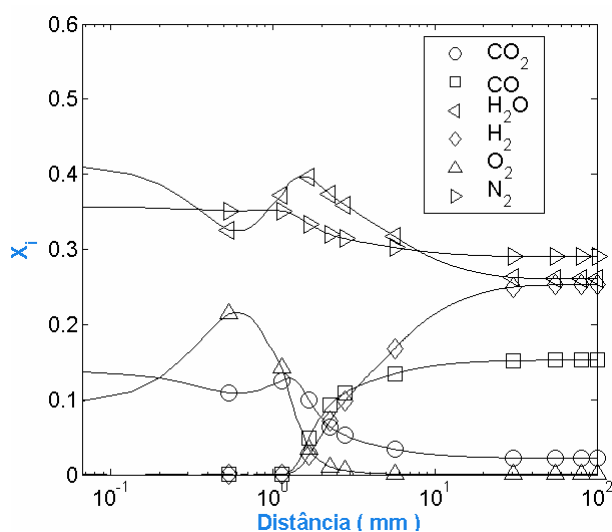


Figura 10. Variação das frações molares,  $X_i$ , dos produtos principais da combustão,  $CO_2$ , CO,  $H_2O$ ,  $H_2$ ,  $O_2$  e  $N_2$ , ao longo do combustor.

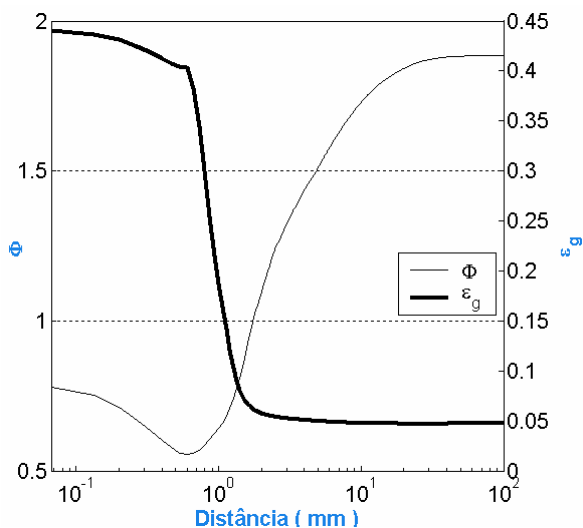


Figura 11. Variação da razão de equivalência,  $\Phi$ , e da emissividade do gás,  $T_g$ , ao longo da câmara de combustão.

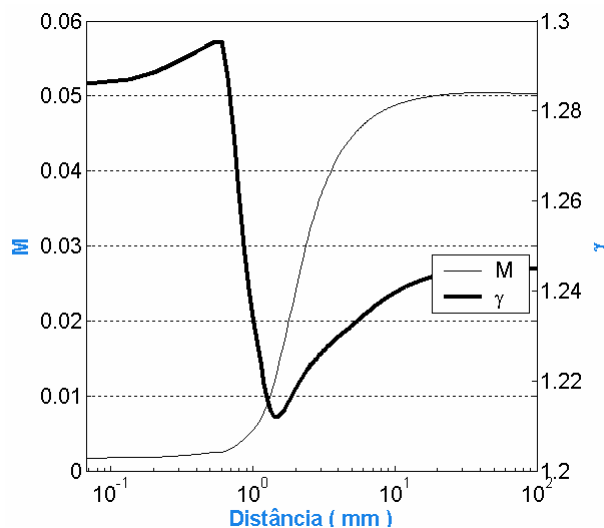


Figura 12. Variação do número de Mach,  $M$ , e do coeficiente politrópico,  $\gamma$ , ao longo da câmara de combustão.

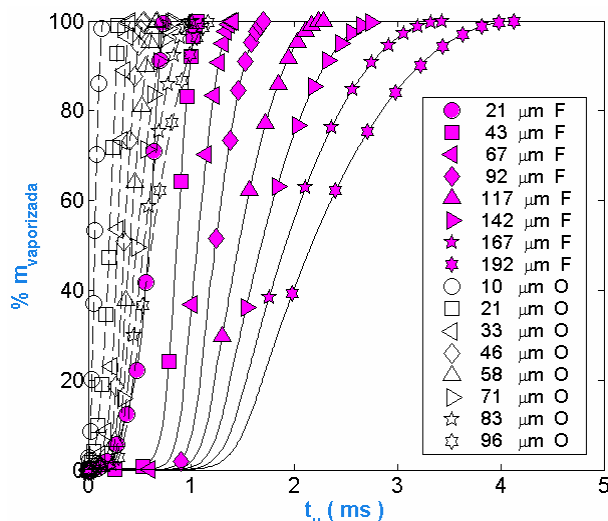


Figura 13. Porcentagem de massa vaporizada,  $\% m_v$ , vs. tempo de vaporização,  $t_v$ .

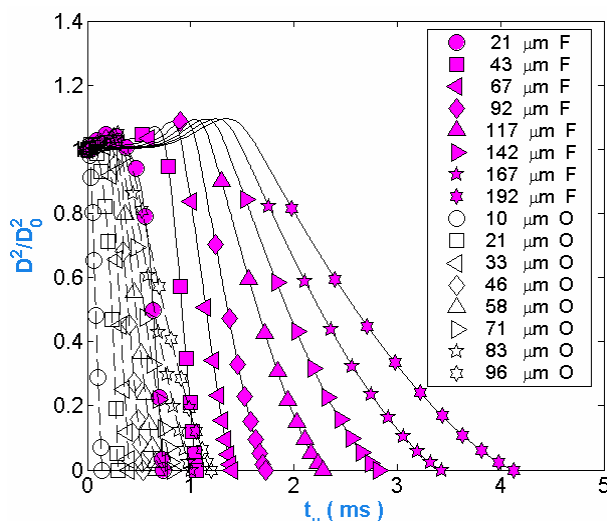


Figura 14. Área superficial adimensional,  $D^2/D_0^2$ , vs. tempo de vaporização,  $t_v$ .

### 3. Conclusões

Um modelo matemático unidimensional da câmara de combustão de foguetes bipropelentes líquidos foi desenvolvido e aplicado para o caso de um propulsor de 200 N usando NTO e MMH, testado no Laboratório Associado de Combustão e Propulsão do INPE. No modelo matemático considera-se que os processos de mistura turbulenta e de reação química entre os vapores dos propelentes sejam bem mais rápidos que o processo de vaporização das gotas. Consideraram-se distribuições de diâmetros de gotas com oito parcelas de gotas para os dois propelentes, seguindo-se o modelo de Rosin-Rammler. São considerados também o aquecimento transiente, a expansão térmica das gotas, o arrasto com efeito de deformação sobre as gotas, a transferência de calor por convecção e por radiação dos gases para as gotas e para as paredes da câmara e desta para o ambiente.

A distância de vaporização completa das gotas calculada pelo modelo, cerca de 85 mm, é próxima do comprimento da câmara do motor de 200 N, de 80 mm. Embora o perfil de temperaturas na câmara não seja conhecido em detalhe, observou-se que em um ponto próximo ao injetor, com  $T_g = 1200$  K (Hinckel et al., 2001), a temperatura prevista com o modelo sem a camada de resfriamento e a temperatura medida em regime permanente da parede externa eram cerca de 900 K, concordando razoavelmente.

O modelo descreve a evolução de diâmetros e temperaturas das gotas do combustível e oxidante. Observou-se que as gotas atingem uma temperatura de equilíbrio a uma distância de 1 mm da placa de injeção (sem considerar a distância de atomização), que as gotas maiores só adquirem a velocidade do gás no fim da vaporização, que as temperaturas máximas na parede interna atingem cerca de 1850 K, que a vaporização completa ocorre em 4 ms e que o número de Mach no fim da câmara é cerca de 0,05.

## 5. Agradecimentos

Os autores agradecem ao Governo Brasileiro pela concessão de uma bolsa de mestrado através do CNPq ao primeiro autor.

## 6. Referências

- Bracco, F. B., 1973, Combustion Science and Technology, Vol.8, pp. 69-84.
- Chin, J. S.; Lefebvre, A. H., 1985, Steady-State Evaporation Characteristics of Hydrocarbon Fuel Drops, AIAA Journal, Vol.21, n.10, pp.1437-1443.
- Dickinson, D. R., Marshall, W. R. Jr., 1968, AIChE Journal. Vol.14, pp. 541-552.
- Hersch, M., 1965, "A Mixing Model for Rocket Engine Combustion", NASA TN D-288.
- Hinckel, J. N., Kozlov, A. A., Vicente de Moraes, F. J., Cardoso, H. P., 2002, "Desenvolvimento de um Propulsor Bipropelente com Empuxo de 200 N", IX Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas ENCIT 2002, Paper CIT02-0654.
- Krioukov V. G., Iskhakova, R. L., Niwa, M., Dregalin, A. F., Jukova, I.K., 2003, "Mathematical Modeling of Two-Phase Reacting Flow in Supersonic Nozzle", 17th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM.
- Kuo, K. K., 1986, Principles of Combustion, John Wiley & Sons, Cap. 6, pp. 347-399.
- Law, C. K., 1975, International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol.18, pp. 1285-1292.
- Lefebvre, A. H., 1989, Atomization and Sprays Combustion: An International Series, Hemisphere Publishing Corporation.
- Priem, R. J., Heidmann, M. F., 1960, "Propellant Vaporization as a Design Criterion for Rocket-Engine Combustion Chambers", NASA TR R-67.
- Spalding, D. B., 1959, "A One-Dimensional Theory of Liquid Fuel Rocket Combustion", A.R.C. TR N° 20-175, Current Paper No. 445.
- Turns, S. R., Faeth, G. M., 1985, "A One-Dimensional Model of a Carbon-Black Slurry-Fueled Combustor", Journal of Propulsion and Power, Vol.1, No. 1, pp. 5-10.
- Valverde, C.A., 2004, "Mathematical Model of Bipropellant Combustion Chambers", Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, SP, Brazil.
- Zhou, L., 1993, "Theoretical and Numerical Modeling of Turbulent Gas Flows and Combustion", CRC Press, Boca Raton, Florida.

# MATHEMATICAL MODEL OF BIROPELLANT SPRAY COMBUSTION

## Cesar Addis Valverde Salvador

Laboratório Associado de Combustão e Propulsão, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
Rodovia Presidente Dutra, Km 40, Cachoeira Paulista, São Paulo, Brasil  
cesalvador@lcp.inpe.br

## Fernando de Souza Costa

Laboratório Associado de Combustão e Propulsão, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
Rodovia Presidente Dutra, Km 40, Cachoeira Paulista, São Paulo, Brasil  
fernando@lcp.inpe.br

**Abstract.** *This work presents a onedimensional model of the combustion chamber of a bipropellant rocket. It is assumed that the turbulent mixture and the chemical reactions are much faster than the vaporization processes. The droplet size distributions of the propellants follow the Rosin-Rammler model, with a finite number of droplet sizes. The model takes into account the transient evaporation, liquid thermal dilatation, drag with aerodynamic deformation, radiation and convection heat transfer to the droplets and to the chamber walls. The numerical results are compared to experimental results obtained from a 200 N thruster using NTO e MMH, tested in the LCP/INPE vacuum chamber.*

*Keywords: bipropellant, model, vaporization, combustion, thruster.*