

MÉTODOS DOS PAINÉIS COM DISTRIBUIÇÕES DE SINGULARIDADE QUADRÁTICAS APLICADOS A ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS SOBRE AEROFÓLIOS

Luiz Henrique Gomes Pereira

Departamento de Engenharia Mecânica-LABMFA - EE/COPPE.
Universidade Federal do Rio de Janeiro.
Correio eletrônico: luizpereira@ufrj.br

Gustavo César Rachid Bodstein

Departamento de Engenharia Mecânica – EE/COPPE.
Universidade Federal do Rio de Janeiro.
Centro de Tecnologia – Bloco G – sala 204 – Ilha do Fundão.
21945-970, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.
Correio eletrônico: gustavo@serv.com.ufrj.br

Resumo. *O presente trabalho apresenta a implementação computacional do Método dos Painéis com distribuições quadráticas das singularidades mais utilizadas para a análise aerodinâmica de aerofólios bidimensionais, com ou sem sustentação. A necessidade da implementação da metodologia de distribuição quadrática reside na busca de maior exatidão dos resultados para um número de painéis menor. Este método numérico consiste na distribuição de singularidades quadráticas de fontes, dipolos ou vórtices sobre uma superfície fechada de modo a satisfazer a equação de conservação da massa. Esta equação para o escoamento potencial e incompressível é expressa através da equação de Laplace, sendo que a solução deve satisfazer à condição de contorno de impenetrabilidade da fronteira sólida. A linearidade do problema de valor de contorno permite que vários tipos e combinações de singularidades sejam possíveis. O trabalho tem como principal objeto de estudo o aerofólio de Van de Vooren, que apresenta solução analítica. Os resultados obtidos, tais como os coeficientes de pressão e de sustentação, para os vários tipos de singularidades testados foram comparados entre si e com os dados analíticos disponíveis na literatura para o aerofólio de Van de Vooren, mostrando que os esquemas de ordem superior apresentam uma concordância melhor com os resultados analíticos do que os de ordem inferior.*

Palavras chave: método dos painéis, aerofólio, escoamento potencial, aerodinâmica.

1. Introdução

O escoamento invíscido e incompressível sobre corpos sólido são governados pela equação de Laplace, sujeita a duas condições de contornos, uma distante do corpo (fluido não perturbado) e a outra de impenetrabilidade da fronteira sólida. A solução deste problema pode ser feita através de algumas técnicas, dentre elas, tem-se a teoria clássica dos aerofólios finos e o método dos painéis.

A técnica dos aerofólios finos apresenta soluções ruins nos bordos de ataque e fuga, regiões estas de grande gradiente de velocidade. Esta técnica, praticamente, não é mais utilizada. Enquanto que o método dos painéis, desenvolvido originalmente por Martensen (1959), tendo continuidade em Hess e Smith (1966), vem apresentando um uso cada vez maior, visto a sua boa predição onde a outra não conseguia. Uma revisão histórica e características detalhadas do método podem ser vistas em dois livros bem conhecidos que tratam do assunto: Katz e Plotkin (1991) e Moran (1984).

O método dos painéis consiste em discretizar o corpo, distribuindo elementos de singularidades, fontes, dipolos e vórtices, ao longo da superfície do corpo. Esta distribuição é feita através de uma função que, em geral, é constante ou linear, Pereira et. al. (2004). Sendo a contribuição deste trabalho, justamente, o aumento dessa ordem, além de um estudo sistemático de seu uso sobre aerofólios bidimensionais. O aumento da ordem tem por objetivo aumentar a exatidão dos resultados para uma quantidade reduzida de painéis.

Com relação ao tipo de aerofólio, deu-se preferência ao da família Van de Vooren que apesar de não apresentar aplicação prática, pode ser utilizado para validar os resultados aqui obtidos, pois possui solução analítica via Transformação Conforme, o que não ocorre para os aerofólios da família NACA.

2. Formulação do Problema

Considerando o problema de valor de contorno para o escoamento potencial, bidimensional e incompressível ao redor de corpos sólidos em repouso, onde a velocidade do escoamento incidente é \mathbf{Q}_∞ no infinito, a equação que rege o problema pode ser representada pela equação de Laplace (1.a), sujeita às condições de contorno (1.b,c).

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{no fluido} \quad (1.a)$$

$$\nabla \phi(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{na fronteira do corpo} \quad (1.b)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Q}_\infty, \quad \text{no infinito.} \quad (1.c)$$

O vetor \mathbf{n} é normal a superfície do corpo, apontando para dentro, enquanto que o vetor $\mathbf{r}(X, Z)$ representa uma posição qualquer no sistema de coordenadas fixo no corpo, conforme mostra a Fig. (1).

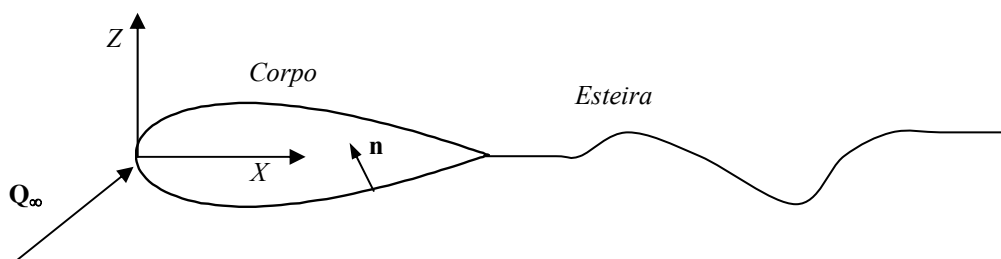


Figura 1 – Descrição do Sistema, Katz e Plotkin (1991).

Utilizando a identidade de Green, Katz e Plotkin (1991), pode-se mostrar que a solução para potencial de velocidade, Eq. (1), pode ser escrita como:

$$\phi(P) = \int_{\text{Corpo+Esteira}} -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln \mathbf{r}) dS + \int_{\text{Corpo}} \frac{\sigma}{2\pi} \ln \mathbf{r} dS + \phi_\infty. \quad (2)$$

Nesta equação é possível notar que o argumento da primeira integral corresponde ao potencial de um dipolo de intensidade μ (equivalente a um vórtice), assim como o argumento da segunda ao potencial de uma fonte (ou sumidouro) de intensidade σ . Já o último termo, ϕ_∞ , corresponde ao potencial do escoamento externo.

3. Método dos Painéis

A condição de contorno (1c) é automaticamente satisfeita, pois a ordem dos gradientes das duas integrais da Eq. (2) são proporcionais a $1/r$. Resta, portanto, satisfazer a condição de contorno (1b), para isto deve-se discretizar a geometria do corpo, Fig. (2), e impor a impenetrabilidade em pontos discretos, ditos pontos de controle, sobre a fronteira sólida, Katz e Plotkin (1991).

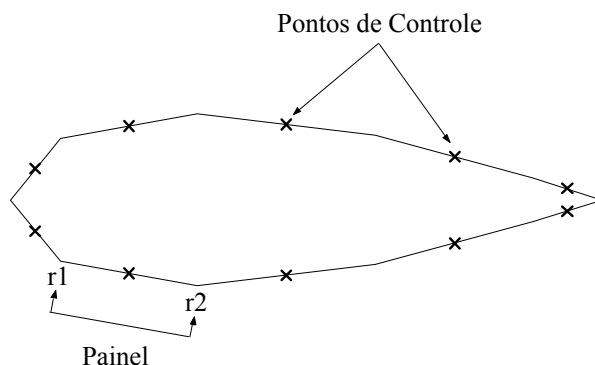


Figura 2 - Aerofólio discretizado, mostrando os pontos de controle.

A partir da geometria discretizada, e considerando, por simplicidade, o caso no qual a intensidade das singularidades é constante ao longo do painel, para um sistema discretizado com N painéis ao longo da superfície do corpo

$$\left\{ \sum_{k=1}^N \mu_k A_k + \sum_{k=1}^N \sigma_k B_k \right\} \cdot \mathbf{n} = -\nabla \phi_\infty \cdot \mathbf{n}, \quad (3)$$

onde A_k e B_k , os coeficientes de influência, dependem apenas da geometria do corpo. Esta equação é obtida através da imposição da condição de contorno de Neumann, Eq. (1b), e será usada para determinar a intensidade das singularidades escolhidas, originando um sistema de equações algébricas lineares. A equação que expressa a condição de Dirichlet pode ser desenvolvida analogamente.

4. Escolha de Singularidades

A modelagem do campo de escoamento deve considerar a situação física em questão, ou seja, escoamentos sem sustentação podem ser modelados com elementos simétricos (fontes), ao passo que escoamentos com sustentação devem incluir singularidades que gerem alguma assimetria (dipolos e/ou vórtices) no campo de pressão.

Além da modelagem física, é imprescindível uma modelagem matemática compatível. Neste contexto, escolhe-se uma distribuição de singularidades quadráticas, a fim de se comparar com os resultados obtidos para painéis de baixa ordem, Pereira et. al (2004).

O potencial de velocidade e as velocidades induzidas nas direções x e z , no sistema de coordenadas do painel, para as singularidades empregadas neste trabalho estão apresentados na Tab. (1). Estas expressões utilizam algumas variáveis auxiliares $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$, apresentadas na Fig. (3) e dadas por

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (z - z_k)^2} \text{ e } \theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{z - z_k}{x - x_k} \right). \quad (4.a,b)$$

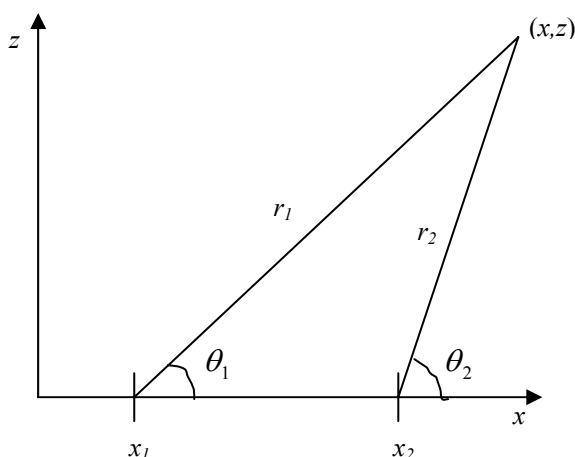


Figura 3 - Variáveis auxiliares no sistema de coordenadas do painel.

Como todas as variáveis da Tab. (1) estão expressas no sistema de coordenadas local (do painel) é necessário transformar as coordenadas de um sistema de coordenadas global (X, Z) para o local (x, z) , a relação entre os dois sistemas pode ser observada na Fig. (4), onde é indicado o ângulo β , diferente para cada painel, através do qual é possível fazer a rotação dos eixos.

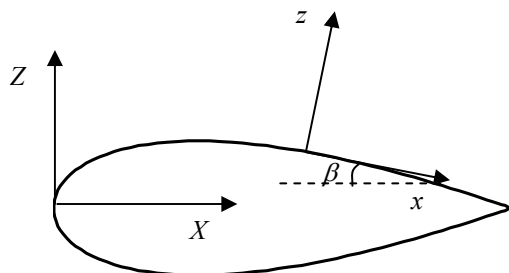


Figura 4 - Sistema de coordenadas global e local.

Tabela 1- Ordem da distribuição de singularidades sobre os painéis.

Elemento	Constante $\lambda(x) = \lambda_0$	Linear $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$	Quadrática $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$
Fonte	$\phi = \frac{\sigma_0}{2\pi} [(x-x_1) \ln r_1 - (x-x_2) \ln r_2 + z(\theta_2 - \theta_1)]$ $u = -\frac{\sigma_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$ $w = \frac{\sigma_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$	$\phi = \frac{\sigma_1}{4\pi} [(x^2 - x_1^2 - z^2) \ln r_1 - (x^2 - x_2^2 - z^2) \ln r_2 + 2xz(\theta_2 - \theta_1) - x(x_2 - x_1)]$ $u = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left[z(\theta_2 - \theta_1) - x \ln \frac{r_2}{r_1} - (x_2 - x_1) \right]$ $w = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left[z \ln \frac{r_2}{r_1} + x(\theta_2 - \theta_1) \right]$	$\phi = \frac{\sigma_2}{12\pi} [2(x^2 - z^2)(x_1 - x_2) + x(x_1^2 - x_2^2) + 2z(3x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + x_2^2 \log r_2^2 - x_1^2 \log r_1^2 - x(x^2 - 9z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$ $u = \frac{\sigma_2}{4\pi} [2x(x_1 - x_2) + x_1^2 - x_2^2 + 4xz(\theta_2 - \theta_1) - (x^2 - z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$ $w = \frac{\sigma_2}{2\pi} [(x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(x_2 - x_1) + xz \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$
Dipolo	$\phi = -\frac{\mu_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$ $u = -\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{z}{r_1^2} - \frac{z}{r_2^2} \right)$ $w = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{x-x_1}{r_1^2} - \frac{x-x_2}{r_2^2} \right)$	$\phi = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[z \ln \frac{r_2}{r_1} + x(\theta_2 - \theta_1) \right]$ $u = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) - z \left(\frac{x_2}{r_2^2} - \frac{x_1}{r_1^2} \right) \right]$ $w = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{x(x-x_2) + z^2}{r_2^2} - \frac{x(x-x_1) + z^2}{r_1^2} \right]$	$\phi = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[z(x_1 - x_2) - (x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) - x \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right]$ $u = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[z \left(\frac{x_2^2}{r_2^2} - \frac{x_1^2}{r_1^2} - \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) - 2x(\theta_2 - \theta_1) \right]$ $w = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[2(x_1 - x_2) + \frac{x_1^2(x-x_1)}{r_1^2} - \frac{x_2^2(x-x_2)}{r_2^2} + 2z(\theta_2 - \theta_1) - x \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right]$
Vórtice	$\phi = -\frac{\gamma_0}{2\pi} [(x-x_1)\theta_1 - (x-x_2)\theta_2 - z \ln \frac{r_2}{r_1}]$ $u = \frac{\gamma_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$ $w = \frac{\gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$	$\phi = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[xz \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{z}{2}(x_2 - x_1) + \frac{x^2 - x_2^2 - z^2}{2} \theta_2 - \frac{x^2 - x_1^2 - z^2}{2} \theta_1 \right]$ $u = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + z \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$ $w = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[(x_2 - x_1) - z(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$	$\phi = \frac{\gamma_2}{12\pi} [4xz(x_2 - x_1) + z(x_2^2 - x_1^2) + 2x_1^3\theta_1 - 2x_2^3\theta_2 + 2x(x^2 - 3z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(3x^2 - z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$ $u = \frac{\gamma_2}{12\pi} \left[(x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(x_2 - x_1) + xz \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right]$ $w = \frac{\gamma_2}{4\pi} [2x(x_2 - x_1) + x_2^2 - x_1^2 - 4xz(\theta_2 - \theta_1) + (x^2 - z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$

5. Implementação Computacional

A discretização cossenoidal é usada para aumentar o número de painéis nas regiões dos bordos de ataque e de fuga. Isto é feito para melhorar o modelamento geométrico (bordo de ataque) e para utilizar mais painéis em regiões onde se tem variação acentuada de velocidade. Deste modo, mesmo com uma discretização sem refinamento a condição de contorno será satisfeita.

Aplicando-se a condição de impenetrabilidade, Eq. (1b), utilizando uma distribuição quadrática de singularidades, no i -ésimo ponto de controle, obtêm-se

$$a_{i1}\lambda_{01} + b_{i1}\lambda_{11} + c_{i1}\lambda_{21} + \dots + a_{iN}\lambda_{0N} + b_{iN}\lambda_{1N} + c_{iN}\lambda_{2N} = RHS_i, \quad (5)$$

onde λ_{0j} , λ_{1j} e λ_{2j} representam a parte constante, linear e quadrática da distribuição de singularidades do j -ésimo painel, o mesmo ocorrendo para os coeficientes de influência, a_{ij} , b_{ij} e c_{ij} .

Ao escrever as equações de impenetrabilidade para os N pontos de controle, chega-se a um sistema de equações lineares indeterminado com N equações a $3N$ incógnitas. Para resolver este problema, admite-se que a distribuição de singularidades é contínua e diferenciável, exceto no bordo de fuga, pois neste é fisicamente incorreto admitir tal situação. Assim, têm-se mais $2N - 2$ equações que são dadas por

$$\lambda_{1j} + 2\lambda_{2j}\Delta c_j = \lambda_{1j+1} \quad (6.a)$$

$$\lambda_{0j} + \lambda_{1j}\Delta c_j + \lambda_{2j}\Delta c_j^2 = \lambda_{0j+1}, \quad (6.b)$$

onde Δc_j é o comprimento do painel j . Neste momento, o sistema de equações têm $3N - 2$ equações a $3N$ incógnitas, faltam ainda, portanto, mais duas equações.

Com relação ao bordo de fuga, podem-se utilizar duas condições de salto, uma para a função, condição de Kutta (Katz e Plotkin, 1991), e a outra para o fluxo da distribuição de singularidades no bordo de fuga. Deste modo, têm-se

$$\lambda_{11} + \lambda_{1N} + 2\lambda_{2N}\Delta c_N = 0 \quad (7.a)$$

$$\lambda_{01} + \lambda_{0N} + \lambda_{1N}\Delta c_N + \lambda_{2N}\Delta c_N^2 = 0. \quad (7.b)$$

Neste ponto o sistema de equações está fechado com $3N$ equações a $3N$ incógnitas. Entretanto, a resolução deste sistema sem nenhum tratamento, torna-se de difícil implementação, assim como bastante dispendiosa em termos computacionais. Para contornar este problema, utilizam-se as Eq. (7a,b) como fórmulas de recorrência, visto que é perfeitamente possível descrever as derivadas de ordem superior em função das derivadas de ordem inferior, reduzindo-se a ordem do sistema de $3N$ para $N + 2$. Deste modo,

$$\lambda_{1j} = \frac{2}{\Delta c_j}(\lambda_{0j+1} - \lambda_{0j}) - \lambda_{1j+1} \quad (8.a)$$

$$\lambda_{2j} = \frac{1}{2\Delta c_j}(\lambda_{1j+1} - \lambda_{1j}). \quad (8.b)$$

Substituindo as Eq. (8.a,b) em (5), obtêm-se uma equação com a seguinte forma

$$A_{i1}\lambda_{01} + A_{i2}\lambda_{02} + \dots + A_{i,N-1}\lambda_{0,N-1} + A_{iN}\lambda_{0N} + A_{i,N+1}\lambda_{1N} + A_{i,N+2}\lambda_{2N} = RHS_i, \quad (9)$$

onde a lei de formação dos coeficientes A_{ij} , Tab. (2), é uma função dos coeficientes de influência, a_{ij} , b_{ij} e c_{ij} .

Tabela 2 – Lei de Formação dos coeficientes A_j

Variáveis auxiliares:	
$R1(i,1) = 2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} .$	
$R1(i,j) = R1(i,j-1) + (-1)^{j-1} \left[\frac{c_{i,j-1}}{\Delta c_{j-1}} + 2b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right],$	$2 \leq j \leq N-1 .$
$R2 = b_{1N} + \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+N} \left(b_{1j} - \frac{c_{1j}}{\Delta c_j} \right) .$	
Coefficientes A_{ij} :	
$A_{i1} = a_{i1} - \frac{R1(i,1)}{\Delta c_1} .$	
$A_{ij} = a_{ij} + (-1)^j \left[\frac{R1(i,j-1)}{\Delta c_{j-1}} + \frac{R1(i,j)}{\Delta c_j} \right],$	
$2 \leq j \leq N-1 .$	
$A_{iN} = a_{iN} + (-1)^N \frac{R1(i,N-1)}{\Delta c_{N-1}} .$	
$A_{1N+1} = R2 .$	
$A_{1N+2} = c_{1N} .$	

Aplicando, portanto, a Eq. (10) em todos os pontos de controle e adicionando as duas equações referentes ao bordo de fuga, Eq. (7.a,b) , o sistema é então dado por

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} & A_{1N+1} & A_{1N+2} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} & A_{2N+1} & A_{2N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N-11} & A_{N-12} & \cdots & A_{N-1N} & A_{N-1N+1} & A_{N-1N+2} \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} & A_{NN+1} & A_{NN+2} \\ A_{N+11} & A_{N+12} & \cdots & A_{N+1N} & A_{N+1N+1} & A_{N+1N+2} \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 2\Delta c_N & \Delta c_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{01} \\ \lambda_{02} \\ \vdots \\ \lambda_{0N-1} \\ \lambda_{0N} \\ \lambda_{1N} \\ \lambda_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ RHS_{N-1} \\ RHS_N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

onde as demais intensidades das singularidades, λ ,são prontamente determinados pelas fórmulas de recorrência, Eq. (8.a,b).

O cálculo dos coeficientes de influência e a solução do sistema de equações lineares foram implementados em rotinas FORTRAN, e, uma vez calculados as intensidades das singularidades, é importante determinar alguns coeficientes aerodinâmicos, tais como: coeficiente de pressão ao longo do aerofólio (C_p) e coeficiente de sustentação (C_l) definidos por:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho Q_\infty^2}, \quad C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho Q_\infty^2 c}, \tag{11.a,b}$$

onde p_∞ é a pressão de referência, c é a corda do aerofólio, L a força de sustentação e ρ é a massa específica do fluido. Uma vez calculadas as intensidades das singularidades, é possível avaliar a velocidade tangencial ao i-ésimo painel e o coeficiente de pressão, através da equação de Bernoulli, é dado por

$$C_p = 1 - \frac{u_i^2 + w_i^2}{Q_\infty^2} \tag{12}$$

Para calcular o coeficiente de sustentação, C_L , pode-se proceder de duas maneiras. A primeira através da integração da pressão ao longo do aerofólio dado por

$$C_L = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^N C_{p_i} \Delta c_i \cos(\alpha - \beta_i) \tag{13.a}$$

E a segunda, que é a técnica utilizada neste trabalho, através do teorema de Kutta-Joukowski,

$$C_L = \frac{2}{Q_\infty c} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \Gamma_i = \gamma_i \Delta c_i & , \text{para vórtice} \\ \Gamma_i = \mu_i - \mu_{i+1} & , \text{para dipolo} \end{cases} \tag{13.b}$$

sendo Γ_i a circulação média, γ_i a circulação média por unidade de comprimento e μ_i a intensidade média do dipolo, relativos ao i -ésimo painel.

6. Resultados

A validação dos resultados é feita através da solução analítica, via Transformação Conforme, do aerofólio Van de Vooren com 15% de espessura e ângulo do bordo de fuga de 20° .

O primeiro caso a ser analisado é o escoamento sobre aerofólios simétricos com ângulo de ataque (α) nulo que podem ser descritos com o uso de fontes. Algumas modificações em cima do método clássico, dito convencional, podem ser propostas, tal como a troca de uma equação local por uma global ($\sum_{i=1}^N \bar{\sigma}_i \Delta c_i = 0$, conservação da massa), dito modificado, ou simplesmente por sua adição, fazendo-se uso do método dos mínimos quadrados.

O método modificado apresenta uma flutuação anômala, Fig. (5), no painel no qual houve a troca da equação local, Eq. (5), pela global, o que não ocorre para o método de mínimos quadrados, pois este tenta satisfazer ambas.

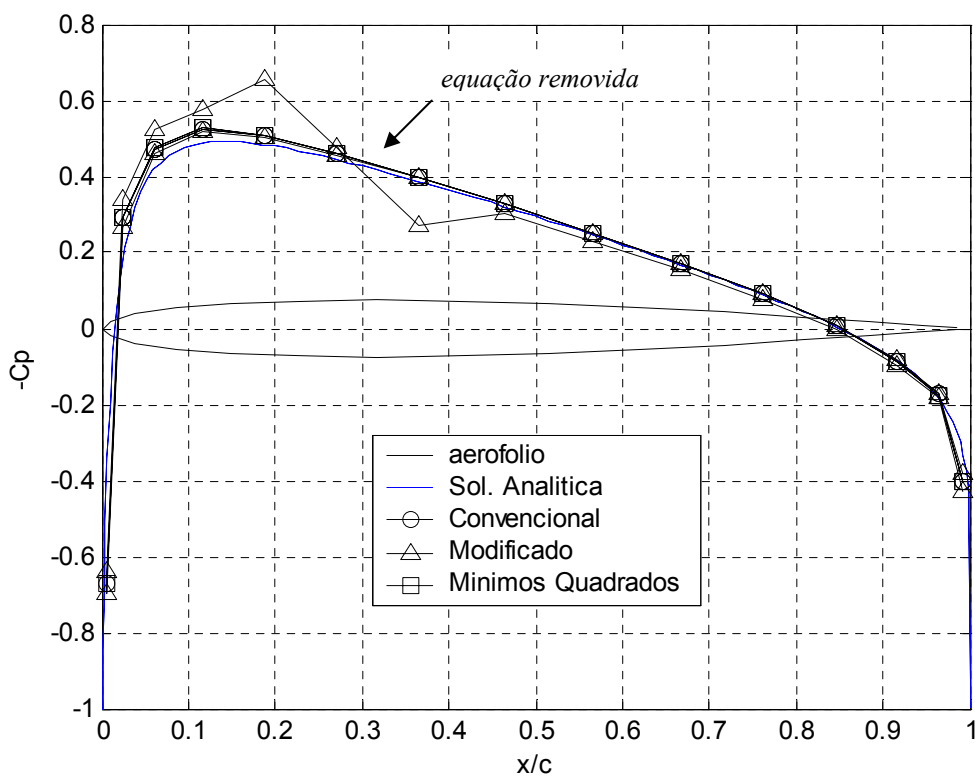


Figura 5 - Variação de C_p ao longo da superfície do aerofólio. ($N=30$, $\alpha = 0^\circ$)

A inclusão da equação de conservação global não acarreta na melhora do método, conforme pode ser verificado pela Fig. (5). O método convencional é o que apresenta melhores resultados, o mesmo se aplicando ao método de vórtices, onde a equação global é dada pela conservação de circulação, $\sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_i = \Gamma_o$, Pereira et.al (2004).

A Tab. (3) mostra o comportamento do somatório das fontes, conservação de massa, com o aumento da ordem de distribuição das fontes e do número de painéis. Através desta, pode-se verificar que com o aumento do número de painéis, o somatório das fontes tende a zero, o que já era de se esperar, ao passo que com o aumento da ordem de distribuição o mesmo não ocorre, permanecendo praticamente inalterado. Assim sendo, o uso de ordem quadrática para fontes apresenta soluções similares aos de baixa ordem, a mesma tendência verificada por Pereira et.al (2004).

Tabela 3 - Análise do somatório das fontes em função da ordem de distribuição das fontes e do número de painéis.

Singularidade	Distribuição	Método	N = 20	N = 60	N = 100	N = 300
Fonte (C.C.Neumann)	Constante	Convencional	0,0107	0,0035	0,0021	0,0007
	Linear	Convencional	0,0118	0,0036	0,0021	0,0007
	Quadrática	Convencional	0,0152	0,0040	0,0023	0,0007

Para aerofólios assimétricos ou para escoamentos com ângulo de ataque não-nulo, devem-se utilizar elementos de singularidade que gerem assimetria ao campo de escoamento (pressão), a fim de que haja sustentação, tais elementos são representados por dipolos e vórtices.

Para escoamento com ângulo de ataque de 10° sobre o aerofólio de Van de Vooren 15%, por exemplo, podem ser utilizadas várias distribuições diferentes de singularidade e de ordem, conforme pode ser visto na Tab. (4). Com o aumento do número de painéis o erro diminui, o mesmo acontecendo, em geral, para o aumento da ordem de distribuição.

O método do dipolo, com ou sem fonte, são implementados utilizando a c.c. de Dirichlet. Esta é imposta no interior do corpo e é equivalente à imposição da c.c. de Neumann na região exterior. O método do dipolo quadrático (s/ fonte) apresenta um erro menor do que o linear e este menor do que o constante. Além disso, este método apresenta erros no coeficiente de sustentação semelhantes aos do vórtice linear, Fig. (6), o que já era previsto, uma vez que para uma distribuição de dipolos de ordem M é equivalente ao de vórtices de ordem M - 1, enquanto que o método de dipolos (c/ fontes), o mesmo não ocorreu.

Para o método dos vórtices quadráticos impõe-se a c.c. de Neumann, o que leva a erros no coeficiente de sustentação semelhantes aos do linear, Tab. (4), entretanto o coeficiente de pressão oscila em torno da solução analítica, Fig. (7a), o que fisicamente não é correto. A troca da c.c. de Neumann para Dirichlet foi verificada, porém o resultado é ainda pior. Espera-se que com o aumento da ordem de discretização da geometria, inclusão do efeito de curvatura dos painéis, cesse com as oscilações do coeficiente de pressão. Pois, em geral, num PVC, a ordem de discretização da geometria deve ser igual ou maior a ordem da distribuição de singularidades.

Tabela 4 - Análise do erro do coeficiente de sustentação (Teo. De Kutta-Joukowski) em função do elemento de singularidade, da distribuição e do número de painéis. (Van de Vooren 15%, $\alpha = 10^\circ$)

C.C.	Singularidade	Distribuição	N=20	N=60	N=100	N=300
Neumann	Vórtice	Constante	-10,27%	-1,93%	-1,06%	-0,28%
		Linear	-0,84%	-0,10%	-0,04%	0,00%
		Quadrático	-0,69%	-0,10%	-0,03%	0,00%
Dirichlet	Fonte e Dipolo	Constantes	-6,91%	-2,35%	-1,40%	-0,47%
		Lineares	-11,48%	0,05%	0,09%	0,01%
		Quadráticos	-2,70%	-0,84%	-0,51%	-0,19%
	Dipolo (s/ Fonte)	Constante	-4,12%	-1,34%	-0,91%	-0,61%
		Linear	-11,48%	0,05%	0,09%	0,01%
		Quadrático	-0,83%	-0,09%	-0,03%	0,00%

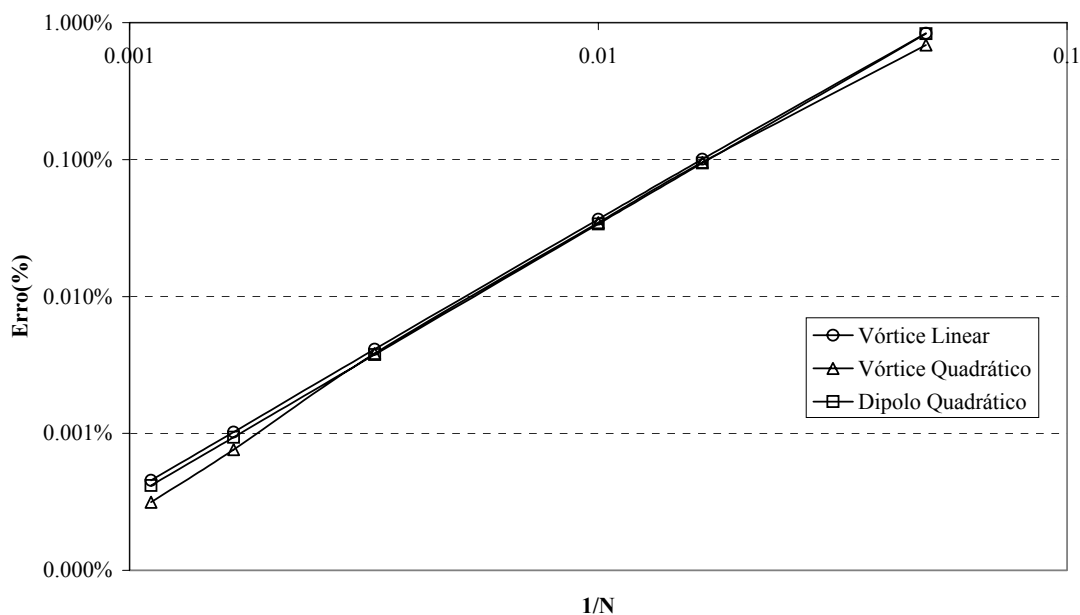


Figura 6 – Análise do erro (%) do coeficiente de sustentação (C_l) para o aerofólio de Van de Vooren 15% com ângulo de ataque (α) de 10° .

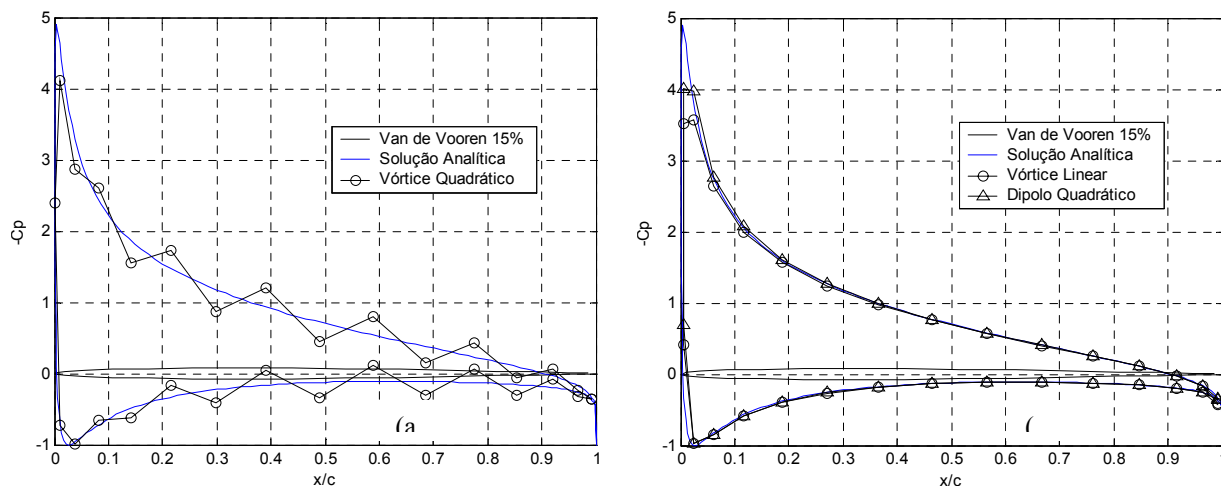


Figura 7. (a) Coeficiente de pressão ao longo do aerofólio, utilizando vórtices com distribuição quadrática. (b) Comparação entre os coeficientes de pressão (C_p) para vórtice linear e dipolo quadrático. $N=30$, $\alpha = 10^\circ$

A Fig. (7b) mostra graficamente a semelhança local, através do coeficiente de pressão (C_p), entre os métodos dos dipolos quadráticos e dos vórtices lineares, enquanto que a Tab. (4) indica esta propriedade globalmente, através do coeficiente de sustentação (C_L).

O tempo de processamento, “CPU time”, é um dado importante ao se comparar os métodos. É bem sabido que os métodos utilizando a condição de contorno de Dirichlet apresenta um tempo de processamento inferior aos que fazem uso da condição de Neumann, conforme pode ser visto na Fig. (8). Este dado torna-se mais expressivo para escoamentos tridimensionais sobre asas, por exemplo, onde este tempo não são apenas alguns segundos. Desta maneira, o método do dipolo quadrático apresenta a vantagem de ser mais rápido e com exatidão semelhante ao do vórtice linear. Deve-se, entretanto, evitar o uso da condição de Dirichlet para descrever escoamentos sobre corpos ou mesmo regiões deste onde a espessura seja muito fina.

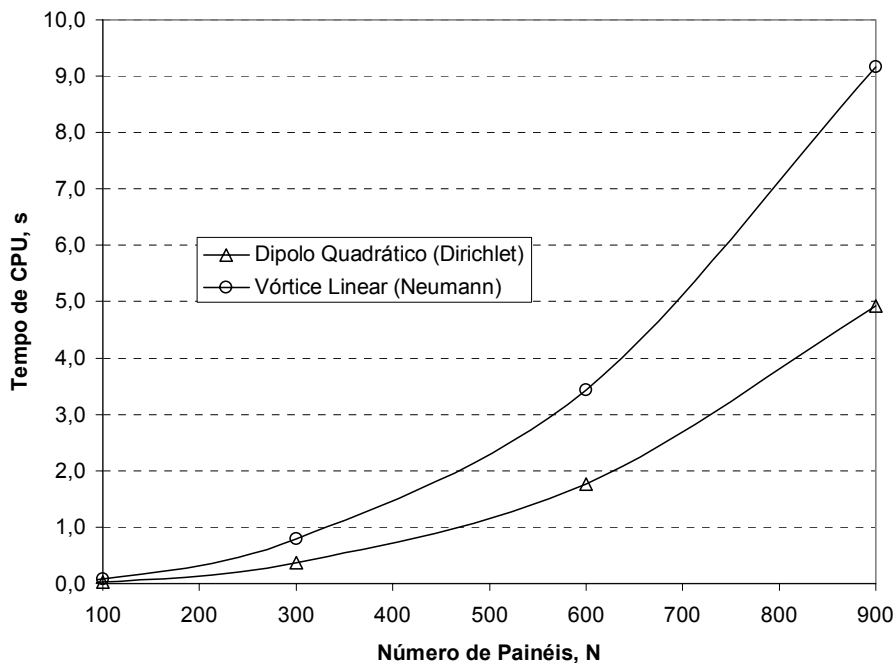


Figura 8 - Comparação do Tempo de Processamento do Método dos Painéis Utilizando Dipolos Quadráticos (C.C. Dirichlet) e Vórtices Lineares (C.C. Neumann).

A Fig. (9) mostra a distribuição quadrática de dipolos, C.C. Dirichlet, para $N = 120$ e $\alpha = 10^\circ$, na qual verifica-se a boa concordância do método na região crítica próxima ao bordo de fuga, em destaque.

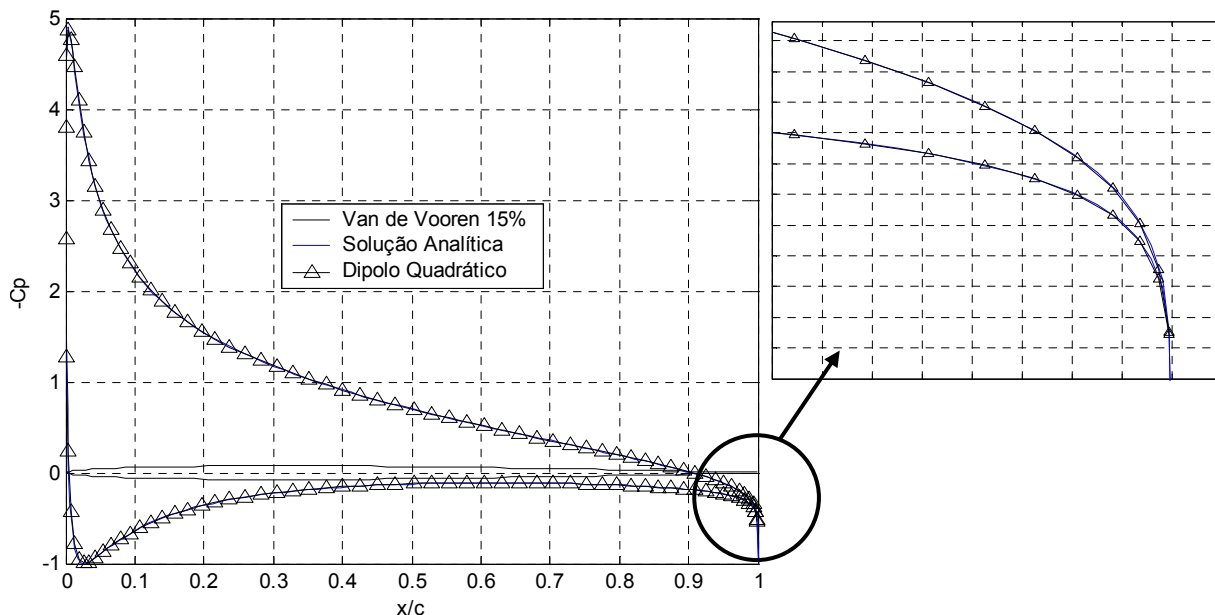


Figura 9 - Coeficiente de pressão para dipolos quadráticos com destaque para o bordo de fuga, C.C. de Dirichlet, $N=120$ e $\alpha = 10^\circ$.

7. Conclusões

Analisando os resultados do método dos painéis utilizando distribuição quadrática de singularidades, pode-se concluir:

- (a) O uso de fontes quadráticas, c.c. Neumann apresenta soluções similares aos de baixa ordem, constante e linear;
- (b) O uso de vórtices quadráticos, c.c. Neumann apresenta soluções similares aos do vórtice linear para o coeficiente de sustentação, entretanto, ao analisar o coeficiente de pressão verifica-se uma oscilação em torno da solução analítica que provavelmente cessará com a inclusão do efeito de curvatura;
- (c) O uso de dipolos quadráticos, c.c. Dirichlet apresenta solução melhor do que os de baixa ordem, constante e linear. Além disso, sua solução é similar ao de vórtice linear, c.c. Neumann, com tempo de processamento menor;
- (d) Para uma solução ainda mais precisa, deve-se introduzir o efeito de curvatura no painel, passando-se de uma discretização linear para uma quadrática ou mesmo cúbica.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES e ao CNPq, processo no. AI 551364/02-5, pelo apoio financeiro durante realização deste trabalho.

Referências

- Hess, J. L., Smith A. M. O., "Calculation of Potencial Flow About Arbitrary Bodies", Progress in Aeronautical Sciences, Vol.3, Pergamon Press, New York, 138p.
- Katz, J. and Plotkin, A., "Low - Speed Aerodynamics", 1991, 2nd edition, Cambridge University Press.
- Kreyszig, E., 1999, "Advanced Engineering Mathematics", 8th edition, J. Wiley.
- Martensen, E., 1959, "The Calculation of the Pressure Distribution on a Cascade of thick Airfoils by means of Fredholm Integral Equations of the Second Kind", Aerodynamics Experimental Station, Göttingen.
- Moran, J. An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- Pereira, L.H.G, Silva, D.F.S., Bodstein, G.C.R., 2004, "Numerical Analysis of the Approach for the Potencial Flow Over Airfoils Using Panel Method", 10th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, Brazil.

PANELS METHOD WITH QUADRATIC SINGULARITIES DISTRIBUTION APPLIED IN BIDIMENSIONAL FLOW OVER AIRFOILS

Luiz Henrique Gomes Pereira

Department of Mechanical Engineering - EE/COPPE.
Federal University of Rio de Janeiro.
e-mail: luizpereira@ufrj.br

Gustavo César Rachid Bodstein

Department of Mechanical Engineering- EE/COPPE.
Federal University of Rio de Janeiro
Address: Centro de Tecnologia – Bloco G – sala 204 – Ilha do Fundão.
21945-970, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.
e-mail: gustavo@serv.com.ufrj.br

Abstract.

This paper presents a numerical implementation of the Panel Method with quadratic singularity distribution in order to evaluate the aerodynamic loads on a two-dimensional airfoil, with or without lift. This need lies on the search for greater accuracy of the results coupled with the use of a small number of panels. The numerical method consists of distributing quadratic singularities, such as sources, doublets or vortices, on a closed surface in order to satisfy the no-penetration boundary condition on the airfoil surface. The incompressible mass conservation equation for potential flow becomes Laplace's Equation, which is linear and, therefore, allows for the superposition of singularities in the solution. In the present paper the Van de Vooren airfoil is studied, since an analytical potential flow solution is available. Results, such as the lift and pressure coefficients, for some types of tested singularities are compared to each other and also to the available analytical data, showing that the use of higher-order schemes provide better agreement than lower-order ones.

Keywords: panel method, airfoil, potential flow, aerodynamics.