

## SOLUÇÃO HÍBRIDA PARA CONVECÇÃO TRANSIENTE COM DIFUSÃO AXIAL VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL E FILTRO TRANSIENTE

**Gondim, Romberg Rodrigues** - [romberg@les.ufpb.br](mailto:romberg@les.ufpb.br)

Universidade Federal da Paraíba - CT/DTM, Campus I, Laboratório de Energia Solar, Caixa Postal 5115 - CEP 58051-970 - João Pessoa, PB, Brasil.

**Cotta, Renato Machado** - [cotta@serv.com.ufrj.br](mailto:cotta@serv.com.ufrj.br)

Mechanical Engineering Department, EE/COPPE/UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68503 - CEP 21945-970, Rio de Janeiro - RJ.

**Resumo.** *Analisa-se a convecção transiente forçada em canais de placas paralelas para a situação em desenvolvimento térmico laminar, considerando a presença da difusão axial na equação de energia. Utiliza-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada combinada a uma solução filtro transiente, objetivando melhorar o comportamento da convergência nas expansões em autofunções associadas, e por fim permitindo a inspeção da influência do número de Peclet na solução final convergida. Os resultados numéricos assim obtidos são criticamente comparados com outros disponíveis na literatura para a situação de número de Peclet infinito. Finalmente, uma análise de custo computacional é realizada para diferentes possíveis estratégias de filtragem para o mesmo problema.*

**Palavras-chave:** *Convecção transiente, Transformação integral, Difusão axial.*

### 1. INTRODUÇÃO

O estudo da convecção forçada transiente tem sido objeto de interesse em muitos trabalhos de pesquisa em ciências térmicas, devido a sua crescente importância prática na engenharia, em particular no controle ativo de equipamentos térmicos. A literatura se mostra bastante vasta em soluções e simulações para convecção forçada no interior de dutos para situações em regime permanente (Shah & Bhatti, 1987), em particular para escoamentos laminares. Soluções analíticas e/ou puramente numéricas para regime permanente encontram-se facilmente disponíveis para uma série de situações de interesse prático. Os problemas transientes por sua vez ainda apresentam desafios e motivações tanto sob o ponto de vista da proposição de algoritmos de solução quanto de interpretação física.

Dentre os problemas de convecção forçada transiente tratados na literatura recente, as situações de perturbações abruptas ou periódicas de alta frequência nas condições de entrada e de contorno dos canais representam casos-teste de difícil tratamento analítico e computacional. Na presente revisão citamos apenas algumas contribuições que utilizaram variações e combinações de métodos analíticos e numéricos nos últimos anos, como a combinação de Transformada Integral e Transformada de Laplace (Cotta&Ozisik, 1986, Kim

et al., 1990, Macedo & Quaresma, 1997), Transformada Integral no domínio complexo (Cotta & Ozisik, 1986b, Guedes et al., 1989, Kakaç et al., 1990, Santos et al., 1995), Diferenças Finitas com esquema *upwind* modificado (Cotta et al., 1986), e Transformada Integral combinada a Diferenças Finitas (Cotta & Gerke, 1994, Santana et al., 1999).

Mais recentemente, tem-se utilizado a Técnica da Transformada Integral Generalizada – G.I.T.T. (Cotta, 1993, Cotta, 1998), como ferramenta de solução híbrida analítico – numérica, em que a idéia básica consiste na transformação de um sistema de equações diferenciais parciais num sistema de equações diferenciais ordinárias, eliminando a dependência espacial em formulações transientes. Tem-se então a vantagem de não se requerer geração de malha em relação aos métodos numéricos clássicos e de se permitir um controle sobre o erro relativo dos resultados, estabelecido *a priori* e controlado automaticamente.

No presente trabalho busca-se a solução do problema de convecção forçada transiente diretamente via Transformada Integral, por transformação dupla da equação de energia para o problema bidimensional em geometria de placas paralelas. O termo de difusão longitudinal de calor é mantido na equação de energia para escoamento laminar completamente desenvolvido hidrodinamicamente e em desenvolvimento térmico, e a solução completa do problema é encontrada com a utilização da Técnica da Transformada Integral Generalizada - GITT (Gondim, 1997). Uma solução aproximada do próprio problema, obtida através da combinação da Transformada Integral e Transformada de Laplace (Gondim & Cavalcante, 1999), é usada como solução filtro transiente no intuito de acelerar a convergência da solução completa. Esta solução é comparada com uma outra que usa como filtro a solução analítica de um problema mais simples, puramente difusivo e em regime permanente (Gondim & Cotta, 2000). Apresenta-se uma análise de convergência das expansões duplas propostas numa ampla faixa do número de Peclet. Esta formulação mais geral também permite um estudo mais aprofundado sobre os valores do número de Peclet adotados como critério de emprego ou não do termo de difusão axial na equação de energia para a situação transiente.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

É analisado um escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido no interior de um duto de placas paralelas, submetido a convecção forçada transiente em desenvolvimento térmico. Considera-se o escoamento incompressível, as propriedades físicas constantes e os efeitos de dissipação viscosa, convecção livre e conjugação com a parede desprezíveis.

O sistema em estudo é constituído por um duto de placas paralelas infinitas na largura, de comprimento  $L^*$ , no interior do qual escoa um fluido newtoniano. O sistema assim definido está inicialmente em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T_o$ . É então provocada uma perturbação em degrau na temperatura de entrada do fluido no canal,  $T_e$ . As paredes são sólidas, impermeáveis e são mantidas à temperatura  $T_o$ . O escoamento laminar e completamente desenvolvido ocorre na direção  $x$  sendo simétrico em relação a  $y$ , conforme mostrado na fig. 1.

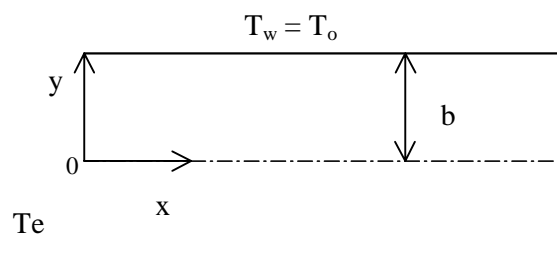


Figura 1 – Sistema de coordenadas e geometria do problema

## 2.1 Adimensionalização do Problema

Considerando os grupos adimensionais:

$$x = \frac{x^*/b}{\text{Re Pr}} = \frac{x^*}{b \text{Pe}}; \quad y = \frac{y^*}{b}; \quad u = \frac{u^*}{4u_{av}}; \quad t = \frac{\alpha t^*}{b^2}; \quad L = \frac{L^*/b}{\text{Re Pr}};$$

$$T = \frac{T^* - T_o}{T_e - T_o}; \quad \text{Re} = \frac{u_{av} 4b}{\nu}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}; \quad \text{Pe} = \text{Re Pr} = \frac{u_{av} 4b}{\alpha} \quad (1)$$

onde  $T^*$  representa o campo de temperatura,  $u^*$  a velocidade (longitudinal),  $\alpha$  a difusividade térmica,  $x^*$  a coordenada longitudinal,  $y^*$  a coordenada transversal e  $t^*$  o tempo, todos em forma dimensional.

O problema é definido matematicamente pelo sistema diferencial parcial a duas dimensões espaciais:

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} + u(y) \cdot \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2}; \quad 0 < y < 1, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$T(x,y,0) = 0, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3)$$

$$T(0,y,t) = 1, \quad T(L,y,t) = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (4, 5)$$

$$\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = 0, \quad T(x,1,t) = 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0 \quad (6, 7)$$

onde  $\text{Re}$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\text{Pe}$ ,  $u_{av}$  e  $\nu$  representam o número de Reynolds, o número de Prandtl, o número de Peclet, a velocidade média e a viscosidade cinemática do fluido, respectivamente.

## 3. TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA

Com o intuito de acelerar a convergência das expansões em autofunções, desdobra-se o potencial adimensional original  $T(x,y,t)$  da seguinte forma:

$$T(x,y,t) = \theta(x,y,t) + \theta_\ell(x,y,t) \quad (8)$$

onde  $\theta(x,y,t)$  é o novo potencial a ser determinado e  $\theta_\ell(x,y,t)$  é a solução analítica aproximada deste mesmo problema encontrada por Gondim & Cavalcante (1999), dada por:

$$\theta_\ell(x,y,t) = \sum_{g=1}^{\infty} \tilde{Y}_g(y) \bar{f}_g \int_0^t \left( \frac{\text{Pe } x}{2\sqrt{\pi} \tau^{1.5}} \exp \left[ \frac{\text{Pe}^2 \text{Al}_{gg} x}{2} + a_g \tau - \frac{(\text{Pe } x)^2}{4\tau} \right] \right) d\tau \quad (9)$$

onde,

$$\bar{f}_g = \int_0^1 \tilde{Y}_g(y) dy, \quad \text{Al}_{gg} = \int_0^1 \tilde{Y}_g(y) \tilde{Y}_g(y) u(y) dy \quad \text{e} \quad a_g = - \left( \frac{\text{Pe}^2 \text{Al}_{gg}^2}{4} + \beta_g^2 \right) \quad (10,11,12)$$

sendo  $\tilde{Y}_g$  e  $\beta_g$ , respectivamente, as autofunções normalizadas e os autovalores do problema de autovalor auxiliar adotado, qual seja:

$$\frac{d^2 \tilde{Y}_g(y)}{dy^2} + \beta_g^2 \tilde{Y}_g(y) = 0; \quad 0 < y < 1; \quad \frac{d\tilde{Y}_g(0)}{dy} = 0; \quad \tilde{Y}_g(1) = 0 \quad (13,14,15)$$

### 3.1 Aplicação da solução filtro

Aplicando o filtro transiente, eq. (8) nas eqs. (2-7), tem-se:

$$\frac{\partial \theta(x,y,t)}{\partial t} + u(y) \frac{\partial \theta(x,y,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \theta(x,y,t)}{\partial^2 y^2} - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta(x,y,t)}{\partial^2 x^2} = G(x,y,t) \quad (16)$$

$$\theta(x,y,0) = -\theta_\ell(x,y,0) = 0, \quad \theta(0,y,t) = 0, \quad \theta(L,y,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(x,y,t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (17,18,19,20)$$

$$\theta(x,1,t) = 0, \quad G(x,y,t) = -\frac{\partial \theta_\ell(x,y,t)}{\partial t} - u(y) \frac{\partial \theta_\ell(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_\ell(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta_\ell(x,y,t)}{\partial x^2}, \quad (21,22)$$

onde  $G(x,y,t)$  é um termo fonte transiente originado por efeito da aplicação do filtro.

### 3.2 Transformação do problema na direção transversal

Para resolver a Eq.(16), usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada, GITT, é necessário como primeiro passo, adotar-se um problema auxiliar de autovalor, que será o mesmo dado pelas Eqs. (13,14,15).

Escreve-se a função  $\theta(x,y,t)$  como uma expansão que tem como base as autofunções oriundas do problema de autovalor, onde  $\bar{\theta}_n(x,t)$  é uma função desconhecida que depende de  $x$  e  $t$ . Usando o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$  e observando-se a propriedade de ortogonalidade do problema auxiliar, obtém-se o par de fórmulas, Transformada – Inversa, respectivamente:

$$\bar{\theta}_n(x,t) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \theta(x,y,t) dy; \quad \theta(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Y}_n(y) \bar{\theta}_n(x,t) \quad (23,24)$$

Operando a Eq.(16) com o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$  e aplicando a Eq. da Inversa (24) a cada termo, a equação filtrada fica transformada no sistema diferencial parcial:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_n(x,t)}{\partial t} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{1nm} \frac{\partial \bar{\theta}_m(x,t)}{\partial x} + \beta_n^2 \bar{\theta}_n(x,t) - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n(x,t)}{\partial x^2} = \bar{G}_n(x,t) \quad (25)$$

$$\bar{G}_n(x,t) = -\frac{\partial \bar{\theta}_{\ell_n}(x,t)}{\partial t} - \sum_{m=1}^{\infty} A_{1nm} \frac{\partial \bar{\theta}_{\ell_m}(x,t)}{\partial x} - \beta_n^2 \bar{\theta}_{\ell_n}(x,t) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_{\ell_n}(x,t)}{\partial x^2} \quad (26)$$

E, transformando a condição inicial (17) e as condições de contorno(18,19):

$$\bar{\theta}_n(x,0) = -\bar{\theta}_{\ell_n}(x,0) = 0, \quad \bar{\theta}_n(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\theta}_n(L,t) = 0 \quad (27,28,29)$$

### 3.3 Transformação do problema na direção longitudinal

Objetivando a simplificação da análise matemática, e uma melhor performance no código computacional, faz-se uma mudança de variável no domínio de  $x$ , considerando um truncamento do duto, numa posição suficientemente afastada da entrada ( $L$ ):

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (30)$$

Para transformar o sistema (25-29) na direção " $\xi$ ", define-se previamente o problema auxiliar (Gondim, 1997) nesta direção:

$$\frac{d^2 \tilde{X}_k(\xi)}{d\xi^2} + \lambda_k^2 \tilde{X}_k(\xi) = 0; \quad 0 < \xi < 1; \quad \tilde{X}_k(0) = 0; \quad \tilde{X}_k(1) = 0 \quad (31,32,33)$$

onde  $\tilde{X}_k(\xi)$  e  $\lambda_k$  são as autofunções normalizadas e os autovalores, respectivamente.

Considerando o potencial  $\bar{\theta}_n(\xi, t)$  como uma expansão que tem como base as autofunções do problema de autovalor associado, encontra-se o par Transformada - Inversa:

$$\bar{\theta}_{nk}(t) = \int_0^1 \tilde{X}_k(\xi) \bar{\theta}_n(\xi, t) d\xi, \quad \bar{\theta}_n(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{X}_k(\xi) \bar{\theta}_{nk}(t). \quad (34,35)$$

Operando cada termo da equação (25), observando a transformação do domínio (30), e considerando o par transformada-inversa (34,35), obtém-se:

$$\frac{d\bar{\theta}_{nk}(t)}{dt} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L} (A_{1nm} B_{1kl}) + \phi_{nk}^2 \delta_{nm} \delta_{kl} \right\} \bar{\theta}_{ml}(t) = \bar{G}_{nk}(t) \quad (36)$$

onde

$$B_{1kl} = \int_0^1 \tilde{X}_k(\xi) \tilde{X}_l'(\xi) d\xi, \quad \phi_{nk}^2 = \beta_n^2 + \frac{\lambda_k^2}{Pe^2 L^2}, \quad \bar{G}_{nk}(t) = \int_0^1 \tilde{X}_k(\xi) \bar{G}_n(\xi, t) d\xi \quad (37,38,39)$$

e operando a condição inicial (27):

$$\bar{\theta}_{nk}(0) = 0 \quad (40)$$

### 3.4 Análise do termo fonte

Rescrevendo a solução filtro sem a aplicação da Transformada de Laplace, apenas com a transformada integral na direção transversal e considerando o mesmo problema auxiliar (13-15), escreve-se a função  $\theta_\ell(x, y, t)$  como uma expansão da autofunção  $\tilde{Y}_g(y)$  obtendo-se um

par transformada-inversa análogo ao dado pelas Eqs.(23,24). Usando o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$

na Eq. (2), utilizando-se a fórmula da inversa, considera-se a solução de menor ordem, onde despreza-se os elementos não diagonais na matriz de coeficientes:

$$A_{1gg} \frac{\partial \bar{\theta}_{\ell_g}(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial \bar{\theta}_{\ell_g}(x, t)}{\partial t} - \beta_g^2 \bar{\theta}_{\ell_g}(x, t) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_{\ell_g}(x, t)}{\partial x^2} \quad (41)$$

que é a EDP transformada na direção  $y$  e satisfeita pelo filtro proposto. Aplicando a Eq.(41) na Eq.(26) obtém-se:

$$\bar{G}_n(x,t) = - \sum_{m=1}^{\infty} (A1_{nm} - \delta_{nm} A1_{nn}) \frac{\partial \bar{\theta}_{\ell_m}(x,t)}{\partial x}, \quad (42)$$

e considerando a definição do perfil de velocidade do fluido no escoamento completamente desenvolvido:

$$u(y) = u_{\infty}(y) = \frac{3}{32}(1-y^2), \quad (43)$$

tem-se da aplicação da Eq. (42) na Eq.(39):

$$\bar{G}_{nk}(t) = \frac{3Pe}{64\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \delta_{nm} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{Y}_n(y) y^2 dy - \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{Y}_m(y) y^2 dy \right] \bar{f}_m \quad (44)$$

$$\left[ \int_0^t \int_0^1 \tilde{X}'_k(\xi) \frac{\xi}{\tau^{1.5}} \exp\left( C1_m \xi + a_m \tau - C2 \frac{\xi^2}{\tau} \right) d\xi d\tau \right]$$

onde,

$$C1_m = \frac{Pe^2 A1_{mm} L}{2}, \quad C2 = \left( \frac{Pe L}{2} \right)^2 \quad e \quad a_m = - \left( \frac{Pe^2 A1_{mm}^2}{4} - \beta_m^2 \right) \quad (45,46,47)$$

#### 4. REORDENAMENTO DAS EXPANSÕES DUPLAS

Com o objetivo de reduzir os custos, e assim otimizar o código computacional, rescreve-se os somatórios duplos das expansões na forma de somatórios simples, através de um processo de pré-seleção dos termos das expansões. Esta seleção pode ser efetivada por procedimentos distintos, seja por exemplo a partir do ordenamento dos autovalores originais, como também pelo ordenamento dos termos na expansão do filtro transformado, que é obtida convertendo o domínio da solução de menor ordem, Eq.(9), para  $\xi$ , e em seguida transformando-a nas duas direções espaciais:

$$\tilde{\theta}_{\ell_i}(t) = \frac{Pe L \bar{f}_n}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^t \int_0^1 \frac{\tilde{X}_k(\xi) \xi}{\tau^{1.5}} \exp\left[ \frac{Pe^2 A1_{nn} L \xi}{2} + a_n \tau - \frac{Pe^2 L^2 \xi^2}{4 \tau} \right] d\xi d\tau \right\} \quad (48)$$

Daí, os termos na expansão da solução completa são agora ordenados por uma ordem de importância (decrecente) pré-estimada, de acordo com a expressão acima. Os resultados finais deste trabalho foram obtidos com este procedimento, que ofereceu melhores taxas de convergência. Esta redução gera um agrupamento de dois índices em um, ou seja,  $\bar{\theta}_{nk}(t) \rightarrow \tilde{\theta}_i(t)$  e  $\bar{\theta}_{mi}(t) \rightarrow \tilde{\theta}_j(t)$ . Assim, a Eq.(36) e a condição inicial (40), tornam-se:

$$\tilde{\theta}_i'(t) + \sum_{j=1}^{\infty} C1_{ij} \tilde{\theta}_j(t) = \tilde{G}_i(t) \quad e \quad \tilde{\theta}_i(0) = 0, \quad \text{onde}, \quad (49,50)$$

$$C1_{ij} = \frac{1}{L} (A1_{nm} B1_{k\ell}) + \phi_i^2 \delta_{nm} \delta_{k\ell}, \quad \phi_i^2 = \beta_n^2 + \frac{\lambda_k^2}{Pe^2 L^2} \quad e \quad (51,52)$$

$$\tilde{G}_i(t) = -\frac{3Pe}{64\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \delta_{nm} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{Y}_n(y) y^2 dy - \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{Y}_m(y) y^2 dy \right] \bar{f}_m$$

$$\left[ \int_0^t \int_0^1 \tilde{X}'_k(\xi) \frac{\xi}{\tau^{1.5}} \exp\left( C1_m \xi + a_m \tau - C2 \frac{\xi^2}{\tau} \right) d\xi d\tau \right]$$
(53)

## 5. ALGORITMO COMPUTACIONAL

O sistema dado pelas equações (49-53), é truncado numa determinada ordem finita, de tal forma que se permita obter soluções convergidas para determinada precisão preestabelecida. O truncamento é feito em  $nt$  termos para a expansão global e em  $ng$  termos para as expansões do filtro. Substituindo a equação (35) na equação (24) e, da Eq.(9), transformando o domínio, tem-se:

$$\theta(\xi, y, t) = \sum_{i=1}^{nt} \tilde{Y}_n(y) \tilde{X}_k(\xi) \tilde{\theta}_i(t) \quad e \quad \theta_\ell(\xi, y, t) = \sum_{g=1}^{ng} \tilde{Y}_g(y) \bar{f}_g \bar{F}_g(\xi, t)$$
(54,55)

onde,

$$\bar{F}_g(\xi, t) = \int_0^t \frac{Pe L \xi}{2\sqrt{\pi} \tau^{1.5}} \exp\left[ \frac{Pe^2 A1_{gg} L \xi}{2} + a_g \tau - \frac{Pe^2 L^2 \xi^2}{4\tau} \right] d\tau$$
(56)

Substituindo as Equações (54,55) na Eq.(8), obtém-se o potencial original desejado:

$$T(\xi, y, t) = \left[ \sum_{i=1}^{nt} \tilde{Y}_n(y) \tilde{X}_k(\xi) \tilde{\theta}_i(t) \right] + \left[ \sum_{g=1}^{ng} \tilde{Y}_g(y) \bar{f}_g \bar{F}_g(\xi, t) \right]$$
(57)

Segundo a definição para a temperatura média de mistura e o perfil de velocidade adotado, Eq.(43), obtém-se:

$$T_{av}(\xi, t) = \frac{3}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{nt} \tilde{X}_k(\xi) \tilde{\theta}_i(t) \left[ \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy - \int_0^1 y^2 \tilde{Y}_n(y) dy \right] + \sum_{g=1}^{ng} \bar{f}_g \bar{F}_g(\xi, t) \left[ \int_0^1 \tilde{Y}_g(y) dy - \int_0^1 y^2 \tilde{Y}_g(y) dy \right] \right\}$$
(58)

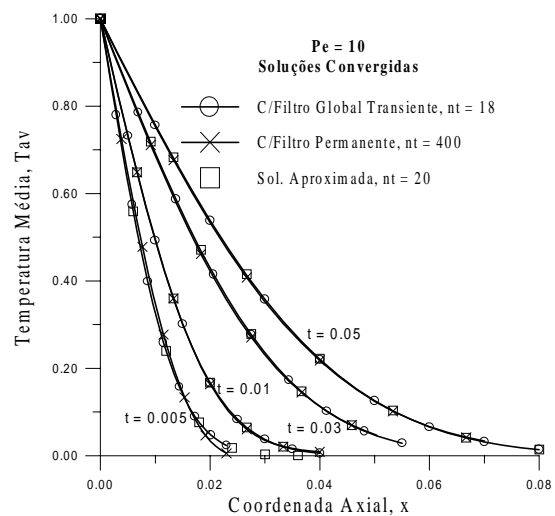
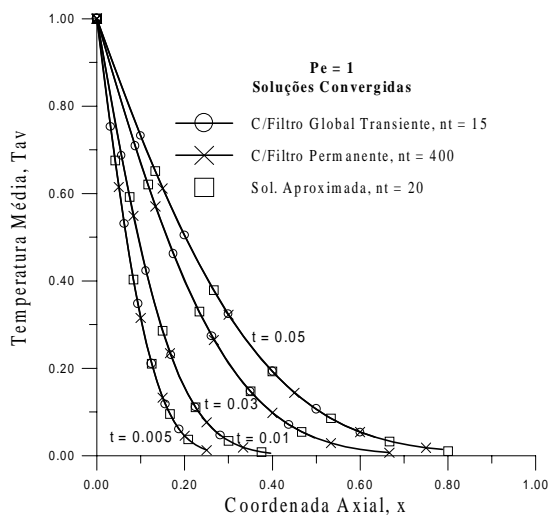
## 6 - RESULTADOS E ANÁLISE

O código computacional foi elaborado na linguagem Fortran (Microsoft Powerstation). A solução numérica do problema de valor inicial é encontrada com a utilização da subrotina DIVPAG, disponível na biblioteca IMSL (1989), para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com alto grau de rigidez. O controle de erro relativo é preestabelecido na chamada da subrotina e foi aqui estudado para os valores  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$ . Os tempos adimensionais de interesse selecionados para este estudo foram 0.005, 0.01, 0.03 e 0.05, onde o primeiro foi escolhido para se verificar o comportamento da convecção para tempos adimensionais pequenos e os três últimos serviram para a validação do código numa

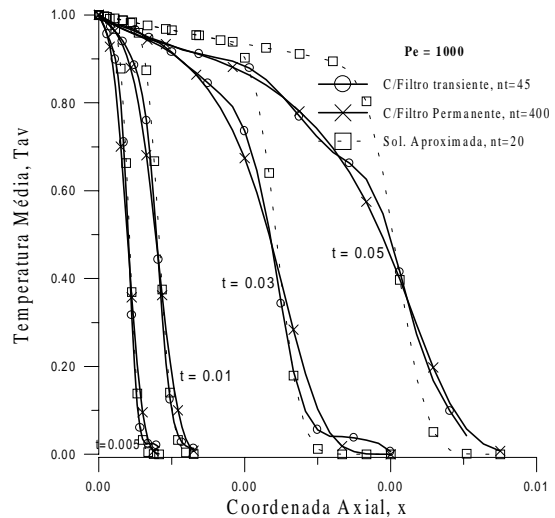
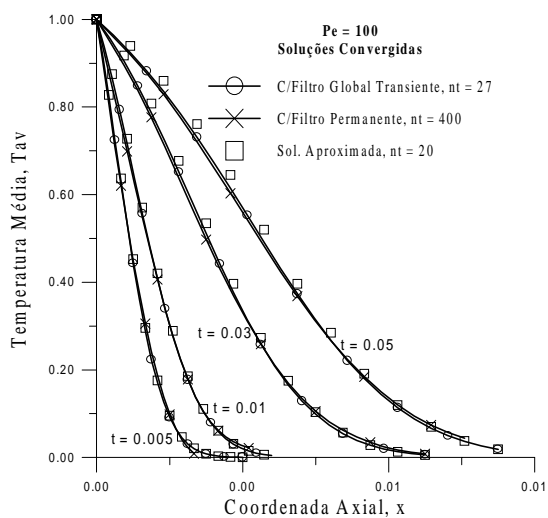
comparação com os resultados em formulação de camada limite ( $Pe \rightarrow \infty$ ) por Cotta e Gerk(1994), fazendo o número de Peclet tender para infinito na presente formulação, quando o termo correspondente à difusão axial torna-se progressivamente menos relevante, e os dois conjuntos de solução *benchmark* tendem a se aproximar (Gondim & Cotta, 2000).

Os números de Peclet adotados foram, 1, 10, 100 e 1000, e uma criteriosa análise de convergência foi feita para estes valores, adotando-se para cada um deles, um comprimento de duto, L, grande o suficiente para que a imposição da condição de contorno a jusante ( $x = L$ ) não perturbasse os resultados na região de entrada térmica.

Nas Figuras 2, 3, 4 e 5 são feitas comparações com os resultados já referendados por Gondim & Cotta (2000), onde foi usado um filtro difusivo permanente, e com a solução analítica aproximada de Laplace/GITT analisada por Gondim & Cavalcante (1999), e aqui utilizada como filtro transiente.



Figuras 2 e 3 – Comparação das soluções para  $Pe = 1$  e  $Pe = 10$ , respectivamente.



Figuras 4 e 5 – Comparação das soluções para  $Pe = 100$  e  $Pe = 1000$ , respectivamente.

Observa-se que para os números de Peclet 1, 10 e 100 há uma excelente concordância de resultados das duas soluções completas, com filtro permanente e filtro transiente. Na Figura 5, onde  $Pe = 1000$ , verifica-se uma tendência para concordância de resultados, uma vez que se obtenha convergência da solução com filtro transiente, aqui ainda não obtida mesmo para nt



$\leq 45$ . Esta dificuldade está diretamente relacionada ao comportamento do filtro transiente, ele próprio, que se desvia bastante da solução final neste maior número de Peclet. Na Figura 6, é feita uma análise de convergência específica para  $Pe = 1000$ , onde verifica-se claramente a necessidade de um maior número de termos para tempos maiores na presente solução.

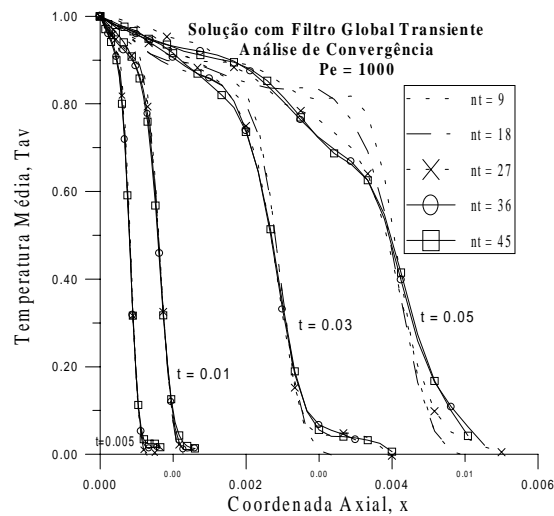


Figura 6 – Análise de convergência da presente solução para  $Pe = 1000$ .

O coeficiente gerado pela solução aproximada apresenta uma integral dupla que necessita de solução numérica e foi usada a subrotina DTWODQ da Biblioteca IMSL (1989), que apresentou um alto custo computacional, tornando este filtro caro em relação à solução com filtro permanente, apesar de requerer um número bem menor de termos na série para a convergência. Assim, apesar da marcante aceleração de convergência esta não resulta necessariamente, em todos os casos, numa redução de custo computacional.

Devido ao alto custo desta solução com filtro transiente, adotou-se o reordenamento através da expansão do filtro transformado, possibilitando um novo ordenamento para cada tempo (reordenamento dinâmico), que apresentou melhores resultados em relação ao ordenamento único pelos autovalores.

Objetivando um procedimento de menor custo computacional para grandes números de Peclet, propõe-se agora o estudo de novo filtro, que se auto modifique ao longo do processo de integração, e melhor traduza os efeitos de Peclet crescente (Macedo et al., 1999).

## 7. REFERÊNCIAS

- Cotta, R.M., 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- Cotta, R.M., Ed., 1998, *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering*, Begell House, Inc., New York.
- Cotta, R.M. e M.N. Ozisik, 1986, Transient Forced Convection in Laminar Channel Flow with Stepwise Variations of Wall Temperature, *Can J. Chem. Eng.*, V. 64, pp. 734-742.
- Cotta, R.M., M.N. Ozisik, e D.S. McRae, 1986, Transient Heat Transfer in Channel Flow with Step Change in Inlet Temperature, *Num. Heat Transfer*, V. 9, pp. 619-630.
- Cotta, R.M. e M.N. Ozisik, 1986, Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature, *Int J. Heat & Mass Transfer*, V. 29, N<sup>o</sup> 10, pp. 1495-1501.
- Cotta, R.M. e J.E.V. Gerk, 1994, Mixed Finite-Difference/Integral Transform Approach for Parabolic-Hyperbolic Problems in Transient Forced Convection, *Numerical Heat Transfer, Part B*, V.25, pp.433-448.

- Gondim, R.R., 1997, Convecção Forçada Transiente Interna com Difusão Axial: Solução Via Transformada Integral, Tese de D.Sc., UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil.
- Gondim, R.R. e F. Cavalcante, 1999, Solução Aproximada para a Convecção Forçada Transiente com Difusão Axial, COBEM 99, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil, Novembro (CD-ROM).
- Gondim, R.R. e R.M. Cotta, 2000, Convecção Interna Transiente com Difusão Axial: Solução Via Transformada Integral e Filtro em Regime Permanente, CONEM2000, Natal, RN, Brasil, Agosto 2000 (CD-ROM).
- Guedes, R.O.C., M.N. Ozisik, e R.M. Cotta, 1994, Conjugated Periodic Turbulent Forced Convection in a Parallel Plate Channel, J. Heat Transfer, V. 116, pp. 40-46.
- IMSL Library, 1989, Math/Lib., Houston, Texas.
- Kakaç, S., W. Li e R.M. Cotta, 1990, Unsteady Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature, J. Heat Transfer, V. 112, pp. 913-920.
- Kim, W.S., R.M. Cotta, e M.N. Ozisik, 1990, Laminar Internal Forced Convection with Periodically Varying, Arbitrarily Shaped Inlet Temperature, 9th Int. Heat Transfer Conference, Paper # 16-TR-17, pp. 383-388, Jerusalem, Israel, August.
- Macedo, E.N. e J.N.N. Quaresma, 1997, Transient Laminar Forced Convection Heat Transfer in Circular and Parallel-Plates Ducts of Herschel-Bulkley Fluids, Proc. of the 14<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, COBEM 97, Bauru, São Paulo, Brasil, December (CD-ROM).
- Macedo, E.N., R.M. Cotta, e H.R.B. Orlande, 1999, Local-Instantaneous Filtering in the Integral Transform Solution of Nonlinear Diffusion Problems, Computational Mechanics, V.23, pp.524-532.
- Santana, L.F.M., R.M. Cotta, e L.C.G. Pimentel, 1999, Hybrid Approach for Fully Transient Turbulent Forced Convection Inside Smooth Parallel-Plate Channels, COBEM 99, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil, December 1999 (CD-ROM); also, Hybrid Meth. Eng., V.2, no.3, in press.
- Santos, C.A.C., D.M. Brown, S. Kakaç e R.M. Cotta, 1995, Analysis of Unsteady Forced Convection in Turbulent Duct Flow, J. Thermophysics & Heat Transfer, Vol. 9, N<sup>o</sup> 3, pp. 508-515.
- Shah, R.K. e M.S. Bhatti, 1987, Laminar Convective Heat Transfer in Ducts, in: S. Kakaç, R.K. Shah, and W. Aung (eds.), Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, chap.3, pp.3.1-3.137, Wiley.

### **HYBRID SOLUTION FOR TRANSIENT CONVECTION IN CHANNELS WITH AXIAL DIFFUSION VIA INTEGRAL TRANSFORMS AND TRANSIENT FILTERING**

**Abstract.** *Transient forced convection within planar channels is solved for a thermally developing laminar flow situation, considering the presence of axial diffusion in the fluid energy equation. The analysis employs the generalized integral transform technique combined with a transient filtering solution, aimed at enhancing the convergence behavior of the associated eigenfunction expansions, and allowing for the inspection of the Peclet number influence on the final converged solution. The numerical results so obtained are critically compared against available results in the open literature for the infinite Peclet number situation. Finally, a computational cost analysis is performed among different possible filtering strategies for the same problem.*

**Keywords:** *Transient convection, Integral transform, Axial*