

ENCIT 96



LATCYM 96



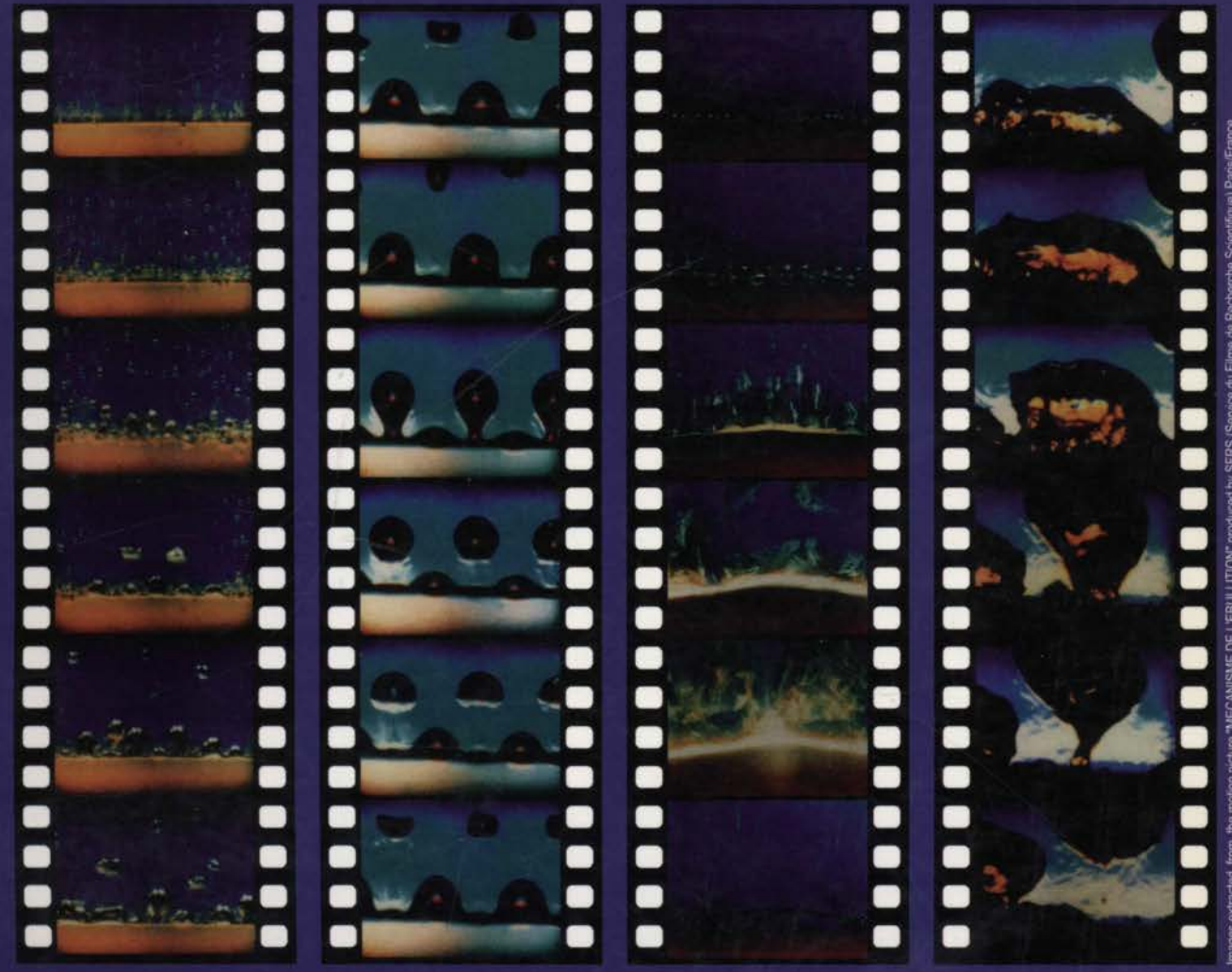
ENCIT 96



LATCYM 96



PROCEEDINGS OF THE  
 BRAZILIAN CONGRESS OF  
**ENGINEERING AND THERMAL SCIENCES**  
*6<sup>th</sup>*  
 LATIN AMERICAN CONGRESS OF  
**HEAT AND MASS TRANSFER**



Images extracted from the motion picture "MECANISME DE L'EBULLITION" produced by SFRS (Service du Film de Recherche Scientifique) Paris/France

FLORIANÓPOLIS / SC  
 BRAZIL

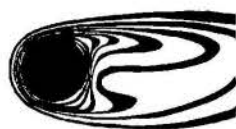
November 11th - 14th, 1996

III

VOLUME III



ENCIT 96



LATCYM 96



**PROCEEDINGS**

**VI CONGRESSO BRASILEIRO DE  
ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS**

*VI BRAZILIAN CONGRESS OF  
ENGINEERING AND THERMAL SCIENCES*

**VI CONGRESO LATINOAMERICANO DE  
TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA**

*VI LATIN AMERICAN CONGRESS OF  
HEAT AND MASS TRANSFER*

**VOLUME III**

**Florianópolis SC, November 11th - 14th 1996**



Associação Brasileira  
de Ciências Mecânicas



Universidade Federal de  
Santa Catarina



*Promoted by*



Universidade Federal  
de Santa Catarina



Associação Brasileira de Ciências Mecânicas



*Sponsors*



Secretaria de Estado de Governo  
FUNCITEC



*Instituto Euvaldo Lodi*



Financiadora de Estudos e Projetos



Conselho Nacional de Desenvolvimento  
Científico e Tecnológico





**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS - ABCM**  
*(BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES)*

Presidente: Carlos A. de Almeida  
Vice-Presidente: Arthur P. Ripper Neto  
Secretário Geral: Hans I. Weber  
Secretário: Paulo Batista Gonçalves  
Diretor de Patrimônio: Felipe B. de Freitas Rachid

**COMITÊ DE CIÊNCIAS TÉRMICAS DA ABCM**  
*(THERMAL SCIENCE COMMITTEE - ABCM)*

Antonio Fábio Carvalho da Silva  
Cláudio Melo  
Durval Duarte Jr.  
Leonardo Goldstein Jr.  
Luis Fernando Alzuguir Azevedo  
Luiz Augusto Horta Nogueira  
Silvio de Oliveira Jr.

**CENTRO LATINOAMERICANO DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA**  
*(LATIN AMERICAN CENTER FOR HEAT AND MASS TRANSFER)*

Presidente: Claudio Olivera-Fuentes  
Secretário: Alvaro Toubes Prata



**CONFERENCE ORGANIZING COMMITTEE**

Alvaro Toubes Prata  
Antonio Carlos Ribeiro Nogueira  
Antonio Fábio Carvalho da Silva  
César José Deschamps  
Cláudio Melo  
Clóvis Raimundo Maliska  
José Antonio Bellini da Cunha Neto  
Júlio César Passos  
Narciso Angel Ramos Arroyo  
Paulo César da Silva Jucá  
Vicente de Paulo Nicolau

**Secretary**

Eduardo Barbosa Bessa  
Gabriel Iwamoto



**COORDINATORS OF THE REVIEWING PROCESS  
AT EACH RESEARCH INSTITUTION**

Abimael F. Dourado Loula - LNCC  
Álvaro L. G. A. Coutinho - PEC/COPPE  
Antônio McDowell de Figueiredo - PEM/COPPE  
Demerval J. M. Sartori - UFSCar  
Fernando Eduardo Milioli - EESC/USP  
Gilmar Guimarães - UFU  
Giulio Massarani - PEQ/COPPE  
Horácio Antônio Vielmo - UFRGS  
João Andrade de Carvalho Jr. - INPE  
José Maurício Gurgel - UFPb  
José Luiz A. da Fontoura Rodrigues - UnB  
Jurandir Itizo Yanagihara - EPUSP  
Leonardo Goldstein Jr. - FEM/UNICAMP  
Luciano C. M. Varejão - UFES  
Luís Fernando A. Azevedo - PUC/RJ  
Luiz Augusto Horta Nogueira - EFEI  
Marcelo José dos Santos Lemos - ITA/CTA  
Márcio Ziviani - UFMG  
Milton Mori - FEQ/UNICAMP  
Paulo Moraes Jr. - IAE/CTA  
Pedro Carajilescov - UFF  
Selene M. A. Guelli Ulson de Souza - ENQ/UFSC

## REFEREES

- Abimael Fernando Dourado Loula - LNCC  
Afonso Henriques Moreira Santos - EFEI  
Agenor Furigio Júnior - UFSC  
Alain Marie B. Passerat de Silans - UFPb  
Alcir de Faro Orlando - PUC/RJ  
Aldo João de Sousa - UnB  
Algacyr Morgenstern - CTA/IAE  
Álvaro L. G. de A. Coutinho - UFRJ/COPPE/PEC  
Álvaro Toubes Prata - UFSC  
Ana Maria da Silveira - UFSCar  
Ângela O. Nieckele - PUC/RJ  
Antônio Augusto Ulson de Souza - UFSC  
Antônio Carlos Bannwart - UNICAMP/FEM  
Antônio Carlos Luiz Lisboa - UNICAMP/FEQ  
Antônio Carlos Ribeiro Nogueira - UFSC  
Antônio César Pinho Brasil Jr. - UnB  
Antônio Fábio Carvalho da Silva - UFSC  
Antônio Francisco Parentes Fortes - UnB  
Antônio M. de Figueiredo - UFRJ/COPPE/PEM  
Antônio Moreira dos Santos - USP/São Carlos  
Antônio Pralon Ferreira Leite - UFPb  
Antônio S. Vargas - PUC/RJ  
Araí A. Bernardez Pécora - UNICAMP/FEM  
Aristeu Silveira Neto - UFU  
Arlindo Tribess - EPUSP  
Armando Caldeira Pires - IST/Portugal  
Arnaldo C. da Silva Walter - UNICAMP/FEM  
Arno Bollmann - UFSC  
Arno Krenzinger - UFRGS  
Augusto César Galeão - LNCC  
Augusto Néelson Viana Carvalho - EFEI  
Caio Glauco Sanchez - UNICAMP/FEM  
Carlos A. Carrasco Altemani UNICAMP/FEM  
Carlos Alberto Gaspareto - UNICAMP/FEQ  
Carlos Alfredo Clezar - UFSC  
Carlos Antônio Cabral dos Santos - UFPb  
Carlos Chien Ching Tu - EPUSP  
Celso Peres Fernandes - UFSC  
César Costapinto Santana - UNICAMP/FEQ  
César José Deschamps - UFSC  
César Otaviano Ribeiro Negrão - UFSC  
Cezar W. de Almeida Thober - UFRGS  
Cirus M. Hackenberg - UFRJ/COPPE/PEQ  
Cláudio Alberto Torres Suazo - UFSCar  
Cláudio Melo - UFSC  
Clovis Raimundo Maliska - UFSC  
Clóvis Sperb de Barcellos - UFSC  
Cristiano P. Borges - UFRJ/COPPE/PEQ  
Demétrio Bastos Netto - INPE  
Denis José Schiozer - UNICAMP/FEM  
Dermeval José Mazzini Sartori - UFSCar  
Douglas Lauria - EPUSP  
Edgard Nobuo Mamiya - UnB  
Edson Bazzo - UFSC  
Edson Luiz Zapparoli - CTA/ITA  
Eduardo Alberto Fancello - UFSC  
Eduardo Bauzer Medeiros - UFMG  
Eduardo Lúcio Mendes Garcia - LNCC  
Élcio Nogueira - UNIVAP  
Elias Basile Tambourgi - UNICAMP/FEQ  
Elson Magalhães Toledo - LNCC  
Elyas Ferreira de Medeiros - CTA/IAE  
Emerson de Freitas Jaguaribe - UFPb  
Ênio Bueno Pereira - UFSC  
Euclides Carvalho Fernandes - CTA/ITA  
Euclides José Bonet - UNICAMP/FEM  
Eugene Uwimana - UFU  
Eugênio Spanó Rosa - UNICAMP/FEM  
Fábio Santana Magnani - UFSC  
Felipe Bastos de Freitas Rachid - UFF  
Fernando de Almeida França - UNICAMP/FEM  
Fernando Eduardo Milioli - USP/São Carlos  
Fernando Fachini Filho - INPE  
Fernando Oscar R. Pereira - UFSC  
Fernando Ribeiro - UFRJ/COPPE/PEC  
Florência Cecília Menegalli - UNICAMP/FEA  
Francisco Antônio Belo - UFPb  
Francisco Eduardo Mourão Saboya - UFF  
Francisco José Simões - UFPb  
Francisco Marcondes - UFPb  
Francisco Ricardo da Cunha - UnB  
Frederico da Cunha Furtado - UNICAMP/IMECC



Genésio José Menon - EFEI  
 Geraldo Augusto Campolina França - UFMG  
 Geraldo Lúcio Tiago Filho - EFEI  
 Gilmar Guimarães - UFU  
 Goyanni Brunello - EPUSP  
 Giulio Massarani - UFRJ/COPPE/PEQ  
 Gustavo Cesar R. Bodstein - UFRJ/COPPE/PEM  
 Gustavo Paim Valenca - UNICAMP/FEQ  
 Hélcio Rangel B. Orlande - UFRJ/COPPE/PEM  
 Hélio José Correa Barbosa - LNCC  
 Heraldo da Silva Couto - INPE  
 Horácio Antônio Vielmo - UFRGS  
 Humberto Jorge José - UFSC  
 Humberto Riella - UFSC  
 Jayme Pinto Ortiz - EPUSP  
 Jerzy T. Sielawa - INPE  
 João Andrade de Carvalho Jr. - INPE  
 João Luis Filgueiras Azevedo - CTA/IAE  
 João Nildo de Souza Vianna - UnB  
 João Nisan Correia Guerreiro - LNCC  
 João Roberto Barbosa - CTA/ITA  
 Jorge Isaias Llagostera Beltran - UNICAMP/FEM  
 Jorge Ninow - UFSC  
 José A. dos Reis Parise - PUC/RJ  
 José Antônio Bellini da Cunha Neto - UFSC  
 José Antônio Ribeiro de Souza - UFSC  
 José Bezerra Pessoa Filho - CTA/IAE  
 José Gobbo Ferreira - INPE  
 José Karam Filho - LNCC  
 José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues - UnB  
 José Luiz Drumond Alves - UFRJ/COPPE/PEC  
 José Luiz Fontes Monteiro - UFRJ/COPPE/PEQ  
 José Maria Saiz Jabardo - USP/São Carlos  
 José Maurício Gurgel - UFPb  
 José Ricardo Figueiredo - UNICAMP/FEM  
 José Ricardo Sodré - PUC/RJ  
 José Roberto Cardoso - EPUSP  
 José Roberto Nunhez - UNICAMP/FEQ  
 José Roberto Simões Moreira - EPUSP  
 José Tomaz Vieira Pereira - UNICAMP/FEM  
 José Vladimir - UFRJ/COPPE/PEQ  
 Júlio César Passos - UFSC  
 Júlio Romano Meneghini - EPUSP  
 Jurandir Itizo Yanagihara - EPUSP  
 Kamal Abdel Radi Ismail - UNICAMP/FEM  
 Katia Tannous - UNICAMP/FEQ  
 Keiko Wada - UFRGS  
 Leon R. Sinay - INPE  
 Leonardo Goldstein Júnior - UNICAMP/FEM  
 Leonel Teixeira Pinto - UFSC  
 Leopoldo Eurico G. Bastos - UFRJ/COPPE/PEM  
 Lígia Damasceno Ferreira Marczak - UFRGS  
 Luciano Varejão - UFES  
 Lúcio Renó Benedito Salomon - UnB  
 Luis Felipe Mendes de Moura - UNICAMP/FEM  
 Luís Fernando Alzuguir Azevedo - PUC/RJ  
 Luis Flávio Zorzetto - UNICAMP/FEQ  
 Luiz Augusto Horta Nogueira - EFEI  
 Luiz Fernando Milanez - UNICAMP/FEM  
 Lutero Carmo de Lima - UFU  
 Manoel E. Carvalho Cruz - UFRJ/COPPE/PEM  
 Mara G. Novy Quadri - UFSC  
 Marc Joseph Marie Mulkens - UFU  
 Marcelo Amorim Savi - UnB  
 Marcelo José Santos de Lemos - CTA/ITA  
 Marcelo Krajnc Alves - UFSC  
 Marcelo Moreira Ganzarolli - UNICAMP/FEM  
 Márcia E. Mantelli - UFSC  
 Márcio Bueno dos Santos - INPE  
 Márcio Fonte-Boa Cortez - UFMG  
 Márcio Ziviani - UFMG  
 Marco Antônio M. Silva Ramos - UFF  
 Marco Antônio Rosa Nascimento - EFEI  
 Marco Aurélio Cremasco - UNICAMP/FEQ  
 Marco T. M. B. De Vilhena - UFRGS  
 Marcos Aurélio Ortega - CTA/ITA  
 Marcos S. de Paula Gomes - PUC/RJ  
 Marcus A. V. Duarte - UFU  
 Marcus Vinícius Bortolus - UFMG  
 Mardson Queiroz McQuay - BYU/USA  
 Maria Clara Filippini Ierardi - UNICAMP/FEM  
 Maria do Carmo Ferreira - UFSCar  
 Maria Laura Martins Costa - UFF  
 Maria Regina Wolf Maciel - UNICAMP/FEQ  
 Marinho Bastos Quadri - UFSC  
 Mauri Fortes - UFMG  
 Mauro Esperanza Neto - PUC/RJ  
 Meuris Gurgel Carlos da Silva - UNICAMP/FEQ

Mikhail Mikhailov - UFRJ/COPPE/PEM  
Milton Biage - UFU  
Milton Mori - UNICAMP/FEQ  
Miriam Rocchi Tavares - EPUSP  
Mônica Feijó Naccache - PUC/RJ  
Narciso Angel Ramos Arroyo - UFSC  
Nísio de C. Lobo Brum UFRJ/COPPE/PEM  
Nivaldo Cabral Kuhnen - UFSC  
Orosimbo A. de Almeida Rego - UFU  
Osvair Vidal Trevisan - UNICAMP/FEM  
Oswaldir Taranto - UNICAMP/FEQ  
Paulo A. B. de Sampaio - UFRJ/COPPE/PEC  
Paulo Afonso de Oliveira Soviero - CTA/ITA  
Paulo Bordoni - LNCC  
Paulo César da Silva Jucá - UFSC  
Paulo César Philippi - UFSC  
Paulo de Barros Correia - UNICAMP/FEM  
Paulo de Tarso Rocha de Mendonça - UFSC  
Paulo Gomes - PUC/RJ  
Paulo Ignácio Fonseca de Almeida - UFSCar  
Paulo L.C. Lage - UFRJ/COPPE/PEQ  
Paulo Moraes Júnior - CTA/IAE  
Paulo Roberto de Souza Mendes - PUC/RJ  
Paulo S. Schneider - UFRGS  
Paulo Seleglim Júnior - USP/São Carlos  
Pedro A. N. Bernardini - UFSC  
Pedro Carajilescov - UFF  
Philemon M. Cunha - PUC/RJ  
Pio Caetano Lobo - UFPb  
Pradeep Kumar Bansal - UFSC  
Rahoma Sadik Mohamed - UNICAMP/FEQ  
Ramon Molina Valle - UFMG  
Regina Célia Cerqueira de Almeida - LNCC  
Regina F. P. Muniz Moreira - UFSC  
Reginaldo Guirardello - UNICAMP/FEQ  
Renata Crespo - UFES  
Renato Machado Cotta - UFRJ/COPPE/PEM  
Renato Simões Silva - LNCC  
Ricardo Fortes de Miranda - UFU  
Ricardo Nicolau Nassar Koury - UFMG  
Roberto da Mota Girardi - CTA/ITA  
Roberto Guardani - EPUSP  
Roberto Lamberts - UFSC  
Roger Josef Zem - UNICAMP/FEQ  
Rogério José da Silva - EFEI  
Rogério Pinheiro Klüppel - UFPb  
Rogério Silveira de Queiroz - UFES  
Rogério Tadeu da Silva Ferreira - UFSC  
Ronaldo Nobrega - UFRJ/COPPE/PEQ  
Rosa L. Dias Blanco - UFRGS  
Rubens Maciel Filho - UNICAMP/FEQ  
Rubens Sampaio - PUC/RJ  
Sandra Cristina dos S. Rocha - UNICAMP/FEQ  
Sandra Mara Cardoso Malta - LNCC  
Saulo Güths - UFSC  
Sebastião Varella - EFEI  
Selene M. A. Guelli Ulson de Souza - UFSC  
Sérgio Colle - UFSC  
Sergio Frey - UFF  
Sérgio Mourão Saboya - CTA/ITA  
Sérgio Pérsio Ravagnani - UNICAMP/FEQ  
Sergio Peters - UFSC  
Sérgio V. Möller - UFRGS  
Severino Rodrigues de Araújo - UFPb  
Sílvio de Oliveira Júnior - EPUSP  
Simone T. Sebben - UFRGS  
Tapan Kumar Sen - EFEI  
Theo Guenter Kieckbusch - UNICAMP/FEQ  
Tito Livio M. Alves - COPPE/UFRJ/PEQ  
Vera Maria M. Martins - UFRJ/COPPE/PEQ  
Vicente de Paulo Nicolau - UFSC  
Victor Juliano de Negri - UFSC  
Wilson Carlos da Silva Ferreira - UFRGS  
Waldir Antônio Bizzo - UNICAMP/FEM  
Waldir Luiz Ribeiro Gallo - UNICAMP/FEM  
Wanyr Romero Ferreira - UFMG  
Washington Braga Filho - PUC/RJ  
Webe Mansur - UFRJ/COPPE/PEC  
Wu Hong Kwong - UFSCar  
Zulcy de Souza - EFEI

## EDITORIAL

Both the Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, ENCIT, and the Latin American Congress of Heat and Mass Transfer, LATCYM, are the most important South American events in their field. For the first time these congresses are being held jointly, as a combined effort of both the Brazilian Society of Mechanical Sciences, ABCM, and the Latin American Center for Heat and Mass Transfer, CLATCAMA. The events are being sponsored by the Department of Mechanical Engineering of the Federal University of Santa Catarina.

This edition of the ENCIT is in celebration of the tenth anniversary of the event. The first ENCIT was held in Rio de Janeiro in 1986 after the Brazilian thermal science community decided that the Brazilian Congress of Mechanical Engineering, which was the main forum used so far, had become too large to allow a close interaction among the participants and to accommodate the large attendance. Following the ENCIT 86, came ENCIT 88 held in Águas de Lindóia, SP, the ENCIT 90 in Itapema, SC, the ENCIT 92 held again in Rio de Janeiro, and the ENCIT 94 that took place at São Paulo and was organized by the Universidade de São Paulo, USP in conjunction with the Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, IPT. For ENCIT 96 it was decided that the original name of the Congress, Brazilian Thermal Science Meeting, was no longer reflecting the scope and the size of the event, and was altered to Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, keeping the acronym ENCIT.

Traditionally, the LATCYM has been organized by the chemical engineering community, and the first event was held in La Plata, Argentina, in 1982. The second LATCYM was held in São Paulo, Brazil, in 1985. Mexico was the place for the third LATCYM that happened in 1988. The fourth and fifth LATCYM's were held in La Serena, Chile, in 1991, and Caracas, Venezuela, in 1994, respectively. For this edition of the LATCYM, for the first time, the mechanical engineers were invited to sponsor the event.

The result of this joint congress is represented by 331 accepted papers out of 408 submitted manuscripts. Sixty-six technical sessions were planned to accommodate the oral presentation of all the papers, which covered a very large spectrum of topics concentrated in main areas of Chemical and Mechanical Engineering. The proceedings, with 1890 pages divided in three volumes, are an indication of the maturity and the level of technical and scientific excellence acquired by the ENCIT and LATCYM series, and by the Latin American community active on applied and fundamental aspects of heat and mass transfer, fluid mechanics and thermodynamics. The large size of this joint congress also indicates that it may be time for creating new conferences or workshops with narrowest scope. It is worth mentioning that, in addition to the large number of papers from research institutions of Latin America, there are several contributions from other countries, mainly Europe and North America.

## INVITED SPEAKERS

*Stress Power, Dissipation and Variational Principles in Flow of Fluids with Arbitrary Constitutive Equations*

**Gianni Astarita**

Dip. Ingegneria dei Materiali e della Produzione  
Universita di Napoli "Frederico II"  
ITALY

*Some Aspects of Two-Phase Helium Flow*

**Jean-Marc Delhay**

Comissariat à l'Énergie Atomique/Grenoble  
FRANCE

*Solid Sorption Devices for CFC-Free Generation of Heat and Cold*

**Manfred Groll**

IKE-Institut für Kernenergetik und Energiesysteme  
Universität Stuttgart  
GERMANY

*Multiphase Flow and Boiling: Predictable or Impossible ?*

**Geoffrey F. Hewitt**

Department of Chemical Engineering  
Imperial College of Science, Technology and Medicine  
ENGLAND

*Monte Carlo Methods in Heat Transfer*

**John R. Howell**

Department of Mechanical Engineering  
University of Texas at Austin  
USA

*Modeling of Fluid Flow in Petroleum Exploration and Production*

**Oswaldo Antunes Pedrosa Júnior**

Superintendente de Exploração de Petróleo  
CENPES-Centro de Pesquisas da Petrobrás  
BRAZIL

*Large-Eddy Simulations and Statistical Turbulence Models: Comparison of their Predictive Abilities*

**Wolfgang Rodi**

Institut für Hydromechanik  
Universität Karlsruhe  
GERMANY



# CONTENTS

## VOLUME I

### AERODYNAMICS AND GAS DYNAMICS

ESTUDO EXPERIMENTAL DA INCLINAÇÃO DA SUPERFÍCIE FRONTAL EM MODELOS DE ÔNIBUS .....	1
Orlando Moreira Jr., Roberto M. Girardi.	
SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO RETANGULAR COM UMA FRESTA UTILIZANDO O MÉTODO DE VÓRTICES .....	7
Gustavo C. R. Bodstein, Carlos R. O. L. Roque, Miguel H. Hirata.	
FORÇA DE ARRASTO EM CORPOS ROMBUDOS DE FORMAS COMPLEXAS (UTILIZAÇÃO DE LÓGICA FUZZY E ALGORITMOS GENÉTICOS) .....	13
Vanessa G. Guedes, Leandro P. de Siqueira, Miguel H. Hirata.	
SHOCK TUBE PROBLEM WITH HIGH-TEMPERATURE EFFECTS IN EQUILIBRIUM AIR .....	19
Jorge Koreeda, Shigeki Harada, Hiroki Honma.	
MODELAGEM AERODINÂMICA DE TURBINAS EÓLICAS DE PASSO VARIÁVEL .....	25
Armando L. R. Medeiros.	
VISCOUS ANALYSIS OF NUMERICALLY DESIGNED AIRFOILS FOR GENERAL-UTILITY AIRCRAFTS .....	31
Bento Silva de Mattos.	
UM MÉTODO PARAMETRIZADO PARA A DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE SUSTENTAÇÃO SOBRE ASAS A PARTIR DA TEORIA DA LINHA SUSTENTADORA .....	37
Ricardo Luiz Utsch de F. Pinto, Marcos Vinicius Bortolus.	
ANÁLISE TEÓRICA DA INFLUÊNCIA DA PAREDE DE UM TÚNEL SOBRE A CURVA DE COEFICIENTE DE COLETA LOCAL .....	43
Carlos Daniel Ebinuma, Alexandre Testa Varallo.	
ANÁLISE NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS EM GRADES LINEARES DE PERFIS PARA VÁRIOS REGIMES DE VELOCIDADE .....	49
Edson Basso, João L. F. Azevedo.	
VLS- AERODINÂMICA DE DECOLAGEM .....	55
Paulo Moraes Jr..	

### ANALYTICAL METHODS

SEMI-ANALYTICAL SOLUTION FOR RADIAL STOKES FLOW BETWEEN TWO PARALLEL DISKS .....	61
Cristina H. Amon, Jauber C. Oliveira.	
MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO LAMINAR PERMANENTE NA REGIÃO DE ENTRADA DE UM DUTO CIRCULAR .....	67
Sérgio Rodrigues Fontes, Marcius Fantozzi Giorgetti.	
A COMPARISON OF INTEGRAL TRANSFORM STRATEGIES FOR SOLVING THE BOUNDARY LAYER EQUATIONS .....	73
E. F. da Silva, J. S. Pérez Guerrero, R. M. Cotta.	
NONSTATIONARY ITERATIVE METHODS APPLIED TO POSITIVE DEFINITE ALGEBRAIC LINEAR SYSTEMS .....	79
N. R. Santos.	

UM MÉTODO NÃO PARAMÉTRICO PARA A DETERMINAÇÃO APROXIMADA DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA .....	85
Miriam Denise Xavier Lazarini, Eduardo Bauzer Medeiros, Marclely L. Pereira.	
GENERAL INTEGRAL TRANSFORM SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL LAMINAR BOUNDARY LAYER EQUATIONS .....	91
Jian Su.	
ANÁLISE DO CUSTO COMPUTACIONAL PARA UM MODELAMENTO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE CONVECÇÃO .....	97
Sérgio Wortmann, Carlos A. C. Santos.	
<b>BOUNDARY ELEMENT METHOD</b>	
ANÁLISE DE FLUXOS PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL COM O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) .....	103
Renato Barbieri, Pablo Andrés Muñoz Rojas.	
UNA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA LA EVALUACIÓN DE VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE CALOR ENTRE PARED-PARTÍCULA Y PARTÍCULA-PARTÍCULA EN LECHOS RELLENOS .....	109
Néstor J. Mariani, Germán D. Mazza, Osvaldo M. Martinez, Guilherme F. Barreto.	
TRATAMIENTO DE PROBLEMAS TERMOELÁSTICOS MEDIANTE UNA NUEVA FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	113
Gemma Rodriguez, Berardi Sensale, Guillermo J. Creus.	
METODO INTEGRAL PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES .....	121
R. S. Cadoche, E. D. Negri, M. G. Chiovetta.	
<b>BUILDING THERMAL BEHAVIOR</b>	
NUMERICAL MODELLING OF THE MINI-CLIME IN A SPORTS STADIUM .....	127
Juan Gabriel Sosa, Eduardo Brizuela, John H. Kent.	
INFLUÊNCIA DE LA VENTILACIÓN NATURAL EN LA TEMPERATURA DEL AIRE INTERIOR DE VIVIENDAS: MEDICIONES EXPERIMENTALES .....	133
María Eugenia Sosa, Luis A. Rosales.	
ADVANCED BUILDING PERFORMANCE PREDICTION: AN OVERVIEW OF DEVELOPMENTS IN THE EUROPEAN UNION .....	139
Paul A. Strachan.	
EVALUACION DEL SINDROME DE EDIFICIO ENFERMO APLICANDO UN MODELO FACTORIAL FRACCIONADO SATURADO .....	145
Luis Miguel Sarache Belandria.	
TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA A TRAVES DE UNA PUERTA ABIERTA .....	149
Adelqui Fissore Sch., Reinaldo Bareyns R.	
COOLING LOADS FROM HEAT AND MOISTURE TRANSFER THROUGH POROUS WALLS: SENSITIVITY TO TREATMENT OF TRANSFER COEFFICIENTS IN THE PHILIP & DE VRIES MODEL .....	155
N. Mendes, F. C. Winkelmann, R. Lamberts, P. C. Philippi, J. A. B. da Cunha Neto, A. Pedrini.	
ESTUDO EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO TÉRMICO DE COBERTURAS PLANAS - VEGETAÇÃO E TERRAÇO .....	161
Maria Tereza F. Pouey, Miguel Aloísio Sattler, Paulo Smith Schneider.	

SIMULATION, BY THE NETWORK METHOD, OF THE HEAT CONDUCTION THROUGH A COMPOSITE WALL, UNDER PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS .....	167
F. Alhama, J. F. López Sánchez, M. Alarcón, C. F. Gonzáles-Fernandez.	
DETERMINAÇÃO DE PROPRIEDADES RELACIONADAS À TRANSFERÊNCIA DE MASSA EM TELHAS CERÂMICAS .....	171
A. D. Bueno, J. A. B. da Cunha Neto.	
DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA E DO CONTEÚDO MÁSSICO DE UMIDADE DE TELHAS EXPOSTAS AO MEIO AMBIENTE .....	177
A. D. Bueno, R. Lamberts, J. A. B. da Cunha Neto.	
UM MODELO DE TRANFERÊNCIA DE FLUXO RADIANTE ATRAVÉS DE PERSIANAS HORIZONTAIS EXTERNAS ESPELHADAS .....	183
Fernando O. Ruttkay Pereira.	
 <b>COGENERATION AND THERMOELECTRIC GENERATION</b>	
RECURSOS NATURAIS DE ENERGIA .....	189
Paulo César da Costa Pinheiro.	
ANÁLISE DE PARÂMETROS TERMODINÂMICOS DE DESEMPENHO E DE MÉTODOS DE ALOCAÇÃO DE CUSTOS EM SISTEMAS DE COGERAÇÃO EQUIPADOS COM TURBINAS DE CONTRAPRESSÃO .....	195
Arnaldo C. S. Walter, Jorge Llagostera, Waldyr L. R. Gallo.	
LA INCIDENCIA DE LA TRANSFERENCIA TÉRMICA ENTRE FLUIDOS INTERMEDIARIOS EN LA EFICIENCIA DE UN CICLO COMBINADO .....	201
Alberto Fushimi, Julio Mestroni.	
ANÁLISE EXERGÉTICA E ECONÔMICA DE PLANTAS TÉRMICAS SOB CONDIÇÕES DE INCERTEZA .....	207
Roberto A. Almeida, Afonso Henriques Moreira Santos, Edson C. Bortoni.	
TERMOCONOMIA APLICADA A MANUTENÇÃO DE CENTRAIS TERMELÉTRICAS .....	213
Fabiano da Rosa Carvalho, Luiz Augusto Horta Nogueira.	
 <b>COMBUSTION</b>	
INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS DE ATOMIZAÇÃO NA COMBUSTÃO DE SPRAYS EM COMBUSTORES TIPO TUBO DE RIJKE .....	219
Pedro T. Lacava, João A. de Carvalho Jr., Mardson Q. McQuay.	
EFFECT OF PRESSURE ON SINGLE PARTICLE COMBUSTION RATE .....	225
Carlos A. Gurgel Veras, João A. de Carvalho Jr., Jaakko Saastamoinen.	
MODELACIÓN DE UN COMBUSTOR DE CARBÓN PULVERIZADO USANDO LA METODOLOGIA DE VOLÚMENES FINITOS .....	231
Juan Moreno, A. Barrientos, J. Pares.	
DISTRIBUIÇÃO DE GOTAS FORMADAS POR JATOS MÚLTIPLOS NÃO COPLANARES .....	237
H. S. Couto, J. A. Carvalho Jr., D. Bastos-Neto.	
HIGH PRESSURE DROPLET BURNING EXPERIMENTS IN REDUCED GRAVITY .....	243
B. Vieille, C. Chaveau, A. Odeïde, I. Gökalp.	
MODELAGEM DA VAPORIZAÇÃO DE ÁGUA NEBULIZADA EM SISTEMAS DE PROTEÇÃO CONTRA INCÊNDIO .....	247
Rubens Romani, Jurandir I. Yanagihara.	

OBTENÇÃO DA TAXA DE REGRESSÃO VOLUMÉTRICA DE GRÃOS DE PÓLVORA ATRAVÉS DE RESULTADOS DE TESTES CONVENCIONAIS EM BOMBA MANOMÉTRICA .....	253
A. G. de Oliveira Filho, P. L. C. Lage.	
APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ZONAS PARA PREVISÃO DE CONDIÇÕES OPERACIONAIS DE INCINERADOR .....	259
Francisco Domingues Alves de Sousa, Laiete Soto Messias, Wilian T. Kobayashi.	
ACOUSTICAL AND LDV VELOCITY MEASUREMENTS ON PREMIXED FLAMES: INVESTIGATION OF COMBUSTION FLICKERING AT DIFFERENT REYNOLDS NUMBERS .....	265
N. Paone, Gian Marco Revel, E. P. Tomasini.	
BURNING RATE AND TURBULENT BURNING VELOCITY OF PREMIXED TURBULENT FLAMES IN STAGNATION FLOWS .....	271
E. Bourguignon, Y. Michou, I. Gökalp.	
EFEITOS DA VARIAÇÃO DE DENSIDADE EM CHAMAS DIFUSIVAS TRANSIENTES .....	275
Fernando S. Costa, M. Sichel.	
MODELAGEM DE PROCESSOS QUÍMICOS DESEQUILIBRADOS E DA EMISSÃO NO <sub>x</sub> EM CÂMARA DE COMBUSTÃO DE TURBOMOTOR .....	281
V. G. Krioukov, A. B. Demin, A. L. Abdulline.	
ESTUDO DO PROCESSO DE COMBUSTÃO DE QUEROSENE EM AR EM CONDIÇÕES DE ESTABILIZAÇÃO AERODINÂMICA DA CHAMA .....	287
Oleg. A. Khatchaturian.	
NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT DIFFUSION FLAMES USING A 4-STEP MECHANISM. ....	293
Victoria Echaniz, Samantha Lodi, Eduardo Brizuela, Robert W. Bilger.	
<b>DRYING</b>	
MODELAGEM DOS PROCESSOS EM FORNALHAS UTILIZANDO COMBUSTÍVEIS VEGETAIS PARA SECAGEM DE GRÃOS .....	299
V. Krioukov, L. Dalabrida, S. Dalepiane.	
COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN PROCESOS DE SECADO CON VAPOR RECALENTADO DIRECTO .....	305
P. I. Alvarez, R. Blasco.	
AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE SECAGEM DE MADEIRA COM AQUECIMENTO EM AMBIENTE SATURADO .....	309
José A. B. da Cunha Neto, Sandro Keine.	
SIMULAÇÃO DE SECADORES REAIS BIDIMENSIONAIS .....	315
J. L. F. Souza, W. R. Ferreira.	
SIMULAÇÃO DE SECADORES TIPO TÚNEL .....	321
V. M. S. Santos, W. R. Ferreira.	
ESTUDO PRELIMINAR SOBRE A SECAGEM DE MEIOS CAPILARES .....	327
L. A. Calçada, M. G. G. Mazza, G. Massarani.	
ESTUDO TEÓRICO DA CONVECÇÃO EM SECADORES SUBMETIDOS A ESCOAMENTO PULSANTE E PERMANENTE .....	333
S. L. Fraenkel, L. A. Horta Nogueira, J. A. de Carvalho Júnior.	
LAMINAR FORCED HEAT AND MASS TRANSFER AROUND A CYLINDER UNDER DRYING CONDITIONS .....	339
M. Fortes, W. F. Ferreira, A. A. Barreto.	



MATHEMATICAL MODELLING OF AN INDIRECT CONTACT ROTARY DRYER: EFFECT OF THE DRYING KINETICS .....	345
Pedro I. Alvarez, C. Shene.	

CONJUGATE CONVECTIVE DRYING OF MULTIPARTICLE SYSTEMS .....	349
Leandro Soares de Oliveira, Kamyar Haghghi.	

## ENGINEERING AND THERMAL SCIENCE EDUCATION

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE ACTIVO DE LOS FUNDAMENTOS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA .....	355
Enrique Albizzati, Alicia Arese, Diana Estenoz, Germán Rossetti.	

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE CONTROLE PID POR COMPUTADOR PARA BANHO TÉRMOSTATO - TROCADOR DE CALOR (CASCO-SERPENTINA) .....	359
Luiz Fernando M. de Santana, Roberto de Sousa, Ari José C. Pereira.	

MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS APLICADO A CAMADÁ LIMITE: UMA ABORDAGEM EDUCACIONAL USANDO O <i>MATHEMATICA</i> ® .....	365
Eugênio S. Rosa, Vicente L. Scalón, Ricardo A. Mazza.	

## ENVIRONMENTAL FLOWS

INFLUÊNCIA DA ALTURA EFETIVA DA PLUMA EM MODELOS DE ESTIMATIVA DE DISPERSÃO DE POLUENTES .....	371
Márcio Dimas Ramos, Genésio José Menon, Rogério José da Silva.	

COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E UMA SOLUÇÃO EXATA CONDICIONADA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO ATMOSFÉRICA .....	377
Rogério Silveira de Queiroz, Hermes Vazzoler Júnior, Maxsuel M. Rocha Pereira.	

TURBULENT WATER CHANNEL FLOWS UNDER SURFACE WIND ACTION .....	383
Paulo C. S. Jucá, C. R. Maliska.	

A FINITE ELEMENT MODEL BASED ON THE SUPG METHOD FOR SHALLOW WATER WAVES .....	389
Carlos Carbonel H., Augusto C. N. Galeão, Abimael D. Loula.	

## EQUIPMENTS, PROCESSES AND THERMAL SYSTEMS

MODELAMENTO MATEMÁTICO DO AQUECIMENTO DE BARRAS CILÍNDRICAS EM UM FORNO DE SOLEIRA ROTATIVA .....	395
Ledomiro Braga da Silva, Márcio Ziviani.	

VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE MODELO SIMPLIFICADO DE CALDEIRAS DOMÉSTICAS A COMBUSTÍVEL LÍQUIDO .....	401
Jaime Roberto Teixeira Rios, O. S. Hernandez.	

ESTUDIO DEL PROCESO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN COCINAS A BRIQUETAS DE CARBÓN .....	405
Estela de La Gracia Assureura E.	

AVALIAÇÃO DE UM FORNO INTERMITENTE DE CERÂMICA VERMELHA USANDO BAGAÇO DE CANA COMO COMBUSTÍVEL .....	411
Maria Eugenia Corria Aradas, Luís Augusto Barbosa Cortez, Electo Eduardo Silva.	

A GENERALIZED ALGORITHM FOR SIMULATION OF THERMAL SYSTEMS .....	417
Carlos Alberto de Melo, Gustavo L. C. M. de Abreu.	

ANÁLISE ECONÔMICA DE CICLOS COM TURBINA A GÁS UTILIZANDO BIOMASSA GASEIFICADA .....	423
Luis Antonio Bortolaia, Luiz Augusto Horta Nogueira, Marco Antônio Rosa do Nascimento.	
<b>EXERGY ANALYSIS AND COGENERATION</b>	
REPRESENTATION OF THERMOFLUID SYSTEMS USING TRUE BOND GRAPHS .....	429
Claudio Olivera-Fuentes, Marisol Delgado.	
ANÁLISE DAS DERIVADAS PARCIAIS DA EXERGIA DO VAPOR D'ÁGUA EM RELAÇÃO À PRESSÃO E À TEMPERATURA .....	435
Jorge Llagostera.	
METODOLOGIA ENERGÉTICA COMO FERRAMENTA NO GERENCIAMENTO DE QUALIDADE E PRODUTIVIDADE EM CULTIVOS AGRÍCOLAS .....	441
Rolando Nonato de Oliveira Lima, José Antônio da Silva, Marcelo Romano Maiello.	
ESTUDO DE POSSIBILIDADES DE INCREMENTO DA COGERAÇÃO EM USINAS AÇUCAREIRAS CUBANAS .....	447
Eduardo Rafael Barreda del Campo, Jorge Llagostera.	
ANÁLISE TERMOCÔNOMICA DE UM SISTEMA DE COGERAÇÃO DE UMA USINA AÇUCAREIRA CUBANA .....	453
Eduardo R. Barreda del Campo, Sérgio A. Araújo da Gama Cerqueira, Silvia Azucena Nebra.	
AVALIAÇÃO DO POTENCIAL DO USO DE RESÍDUOS INDUSTRIAIS NA PRÁTICA DE COGERAÇÃO .....	459
Emerson Bravo Stocco, José Antonio Perrella Balestieri.	
ANÁLISE EXERGÉTICA DO PROCESSAMENTO PRIMÁRIO DE PETRÓLEO .....	465
Silvio de Oliveira Junior, Marco Van Hombeeck.	
<b>FINITE ELEMENT METHOD</b>	
SIMULATION OF CROSS FLOW PAST A TUBE BANK EMPLOYING AN ADAPTIVE PARALLEL/VECTOR FINITE ELEMENT PROCEDURE .....	471
Paulo A. B. de Sampaio, Alvaro L. G. A. Coutinho.	
TRANSIENT THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF THERMAL FIELD IN STEEL AT HIGH TEMPERATURE VIA GGLS METHOD .....	477
E. G. D. do Carmo, F. A. O. Q. Braga, P. L. da Nóbrega.	
APROXIMAÇÕES DE PROBLEMAS DE CONVECÇÃO DE CALOR VIA METODOLOGIAS ESTABILIZADAS .....	481
Sérgio Frey.	
ON THE ACCURACY OF FINITE ELEMENT SOLUTIONS OF THERMAL PROBLEMS .....	487
Adriana Silva França, Kamyar Haghighi.	
NOVAS FORMULAÇÕES PETROV-GALERKIN PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS. PARTE I: ANÁLISE NUMÉRICA DO PROBLEMA MODIFICADO DE STOKES .....	493
E. G. D. do Carmo, F. M. L. Traiano, L. C. C. dos Santos.	
NOVAS FORMULAÇÕES PETROV-GALERKIN PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS. PARTE II: RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA MODIFICADO DE STOKES .....	499
E. G. D. do Carmo, F. M. L. Traiano, L. C. C. dos Santos.	
DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMOS DE SUB-ESTRUTURAÇÃO PARA ELEMENTOS FINITOS .....	505
Philippe R. B. Devloo, Misael L. M. Santana.	

REFINAMIENTO DE MALLA ADAPTABLE EN EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS .....	511
Juan F. Briceño.	

## **FINITE VOLUME METHOD**

SOLUTION OF INCOMPRESSIBLE AND COMPRESSIBLE FLUID FLOWS BASED ON RUNGE-KUTTA TIME-STEPPING SCHEMES .....	517
Álvaro Luiz de Bortoli.	

A MARKER-AND-CELL TECHNIQUE FOR SOLVING AXISYMMETRIC FREE SURFACE FLOWS .....	523
M. F. Tomé, A. Castelo Filho, J. Murakami, J. A. Cuminato.	

APPLICATION OF THE OPTIMIZED MODIFIED STRONG IMPLICIT PROCEDURE TO NON-LINEAR PROBLEMS .....	529
Paulo Laranjeira da Cunha Lage.	

ADAPTIVE OPTIMIZATION OF THE MODIFIED STRONG IMPLICIT PROCEDURE FOR LINEAR FIELD PROBLEM SOLUTION .....	535
Paulo Laranjeira da Cunha Lage.	

SIMPLE, SOLA E VORTICIDADE-FUNÇÃO CORRENTE: UM TESTE COMPARATIVO .....	541
Admilson Teixeira Franco, Ricardo Alan V. Ramos, Marcelo Moreira Ganzarolli.	

ANÁLISE DE ESCOAMENTOS HIPERSÔNICOS UTILIZANDO MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS .....	547
Heidi Korzenowski, João L. F. Azevedo.	

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS COM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS SOBRE CONFIGURAÇÕES AUTOMOTIVAS BÁSICAS COM UM MÉTODO PARA TODA A FAIXA DE VELOCIDADE .....	553
João L. F. Azevedo, Wladimir M. C. Dourado.	

UNSTRUCTURED MESH GENERATION: QUALITY ENHANCEMENT THROUGH SMOOTHING .....	559
Ricardo B. Auada, Julio R. Meneghini.	

ANÁLISE DA ACURÁCIA DE APROXIMAÇÃO DO LAPLACIANO EM VOLUMES FINITOS USANDO DIAGRAMAS DE VORONOI .....	565
Luciano A. Santos, João. F. V. Vasconcellos, Clovis R. Maliska.	

MALLAS IRREGULARES EN DIFERENCIA FINITA: ECUACIÓN DE TRANSPORTE TRANSIENTE .....	571
Luis Fernando Carvajal.	

UM ALGORITMO EM VOLUMES FINITOS PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS TRANSÔNICOS COM ONDA DE CHOQUE .....	577
Ernesto R. Ronzani, Angela O. Nieckele.	

PARALLEL SOLUTION OF FREE SURFACE FLOWS .....	583
Jose Alberto Cuminato, Antonio Castelo Filho, Murilo F. Tomé, Maurílio Boaventura.	

ESTUDO DE ESQUEMAS DE DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS CONVECTIVOS EM ESCOAMENTOS FORTEMENTE NÃO-ESTACIONÁRIOS .....	589
Marcos V. Bortolus.	

ADVANCES IN CFD SOFTWARE FOR HEAT TRANSFER AND COMBUSTION CALCULATIONS .....	595
Sanjay Mathur, Jayathi Y. Murthy, Dipankar Choudhury.	

## **FLUIDIZED AND SPOUTED BEDS**

MODELADO DE REACTORES DE LECHO SUSPENDIDO PARA LA BIODEGRADACION ANAEROBIA DE EFLUENTES LIQUIDOS CON ELEVADA CARGA ORGANICA .....	601
E. D. Negri.	

EFFECTIVE DRAG COEFFICIENTS IN A PNEUMATIC BED WITH A SPOUTED BED TYPE SOLID FEEDING SYSTEM .....	605
E. M. V. Silva, J. Mazucheli, M. C. Ferreira, J. T. Freire.	
DISTRIBUIÇÃO DE PARTÍCULAS EM LEITOS VISCOSOS VIBRO-JORRADOS .....	611
André G. Pereira, F. Keller, J. R. D. Finzer.	
DESEMPENHO TÉRMICO DE REGENERADORES DE CALOR NÃO ADIABÁTICOS .....	617
Samuel Luporini, João A. F. R. Pereira, Alberto L. de Andrade.	

## VOLUME II

### FOOD SCIENCE AND ENGINEERING

TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL HOMOGENEIZADO DE LA MIEL .....	623
M. Carnero, E. Ducrós, M. Ferrari, A. Lema, A. Peiretti, M. Zilletti, M. Pramparo.	
SIMULACION DE PERDIDAS DE NUTRIENTES DURANTE EL SECADO DE PLACAS DE PAPA .....	629
Clara O. Rovedo, Pascual E. Viollaz.	
EXTRACCION DE ACEITE DE GIRASOL USANDO CO <sub>2</sub> SUPERCRITICO .....	635
Alejandro Amborgi, M. Mattea, R. Eggers.	
VARIACION DE LAS CONCENTRACIONES PUNTUALES Y PROMEDIO DE ACIDO LACTICO Y NaCl DURANTE EL PROCESO DE SALADO DE QUESO PATEGRAS .....	641
Patricia E. Gerla, Amelia C. Rubiolo.	
INFLUÊNCIA DOS SOLUTOS NA CONSERVAÇÃO DE FATIAS DE MANGA NO PROCESSO COMBINADO DESIDRATAÇÃO OSMÓTICA E CONGELAMENTO .....	647
Maria Helena Nunes, Maria Helena Miguel, Theo Guenter Kieckbusch.	
DIFUSION DE CO <sub>2</sub> EN QUESOS .....	651
Susana E. Zorrilla, Amelia C. Rubiolo.	
ENTALPIA DE POLPA DE ABACAXI E SOLUÇÃO DE SACAROSE .....	657
S. B. Silva, L. C. Neves F., M. D. Hubinger.	

### FORCED CONVECTION

ESTUDO EXPERIMENTAL DA VARIÂNCIA DA TEMPERATURA EM TUBOS CIRCULARES COM PROMOTORES DE TURBULÊNCIA INTERNOS .....	663
Rosa L. D. Blanco, Sergio V. Möller.	
NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF VORTEX GENERATORS ON HEAT TRANSFER AND FLOW LOSSES IN FIN-TUBE CHANNELS .....	669
Jurandir I. Yanagihara, Rogério Rodrigues Jr.	
EXPERIMENTAL STUDY OF HEAT TRANSFER AUGMENTATION OF FIN-TUBE CHANNELS WITH VORTEX GENERATORS USING THE NAPHTHALENE SUBLIMATION TECHNIQUE .....	675
Jurandir I. Yanagihara, Juan José Gonzáles Bayón.	
SIMULAÇÃO-NUMÉRICA DE GRANDES ESCALAS DA CONVECÇÃO MISTA SOBRE UM CILINDRO HORIZONTAL AQUECIDO EM ROTAÇÃO .....	681
Rigoberto E. M. Morales, Aristeu da Silveira Neto.	

AN EXPERIMENTAL COMPARISON OF LIQUID JET ARRAY AND SPRAY IMPINGEMENT COOLING IN THE NON-BOILING REGIME .....	687
K. Oliphant, B. W. Webb, M. Q. McQuay.	
A NEW NUSSELT NUMBER CORRELATION FOR TURBULENT FORCED CONVECTION IN PIPES EXPOSED TO CONVECTIVE ENVIRONMENTS .....	693
Carlos Barroeta, Rafael Reyes, Ulises Lacoa, Antonio Campo	
INCREMENTO LOCALIZADO DEL INTERCAMBIO TÉRMICO EN FLUJO LAMINAR ENTRE PLACAS .	699
Manuel Sanchez, Daniel Rebollo, F. Alba Juez, C. Guevara, R. Fidalgo, A. Campo.	
TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO ESCOAMENTO TURBULENTO EM DESENVOLVIMENTO ENTRE PLACAS PLANAS PARALELAS .....	705
Marcio Bueno Dos Santos, Sergio Mourão Saboya, Edson L. Zapparoli.	
EL METODO DE LAS COLUMNAS APLICADO A LA TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA LAMINAR EN TUBERIAS CIRCULARES .....	711
Edgar Garcia, Jose Reboredo, Andres Tremante, Ciro Perez.	
UNSTEADY FORCED CONVECTION IN THE THERMAL ENTRANCE REGION .....	717
S. Cheroto, C. A. C. Santos, S. Kakaç.	
GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM SOLUTION TO THE LAMINAR THERMAL BOUNDARY-LAYER PROBLEM FOR FLOW PAST A CYLINDER .....	723
M. A. H. Bolivar, P. L. C. Lage, R. M. Cotta.	
ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS PARA O NÚMERO DE PRANDTL TURBULENTO EM CONVECÇÃO FORÇADA INTERNA .....	729
Luiz C. Gomes Pimentel, Elcio Nogueira, Renato M. Cotta, Sadik Kakaç.	

## HEAT AND MASS TRANSFER

TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA NO RESFRIAMENTO DE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL ATRAVÉS DA EVAPORAÇÃO DE UM FILME LÍQUIDO ESCOANDO EM PARALELO COM AR .....	735
Maria Regina da Silva Galetti, Pedro Carajileskov.	
EXPERIMENTAL AND THEORETICAL INVESTIGATION ON THE PERFORMANCE OF A COOLING TOWER .....	741
Marcos S. P. Gomes, Luis F. A. Azevedo, Francisco E. M. Saboya.	
DESEMPENHO EXPERIMENTAL DE UM DESTILADOR DE ÁGUA ATMOSFÉRICO DO TIPO REGENERATIVO .....	747
Naum Fraidenraich, Elielza M. de S. Barbosa.	
ENERGY BALANCES AND PHASE EQUILIBRIA IN BRINE CRYSTALLIZATION .....	753
Maria Eliza Taboada, Teófilo A. Graber, Leonel A. Zapata.	
ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA RETENÇÃO GASOSA, DA DIFUSIVIDADE MÁSSICA E DO EQUILÍBRIO INTERFACIAL NA MODELAGEM DE PROCESSOS DE EVAPORAÇÃO POR CONTATO DIRETO .....	757
E. M. Queiroz, C. M. Hackenberg.	
CINÉTICA DE CRISTALIZACIÓN Y COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA PARA CRISTALIZACIÓN DE CLORURO DE POTASIO .....	763
Teófilo A. Graber, Maria Elisa Taboada, Luis C. Nuñez.	

## HEAT AND MASS TRANSFER IN POROUS MEDIUM

INFLUÊNCIA DA PROFUNDIDADE DE ATERRAMENTO NO PROCESSO DE SECAGEM DE SOLOS QUE ENVOLVEM CABOS DE POTÊNCIA SUBTERRÂNEOS .....	769
Ligia Damasceno Ferreira Marczack	



MONITORAMENTO DE FRENTES DE UMIDIFICAÇÃO EM SOLOS USANDO A TÉCNICA DA REFLECTOMETRIA NO DOMÍNIO DO TEMPO .....	775
C. G. Larrosa R., J. A. B. da Cunha Neto, A. T. Prata.	

TRANSPORTE DE SOLUTOS EM SOLOS SOB CONDIÇÕES DE SATURAÇÃO TOTAL E PARCIAL EM ÁGUA. APLICAÇÃO AO PENTACLOROFENOL .....	781
M. G. Novy Quadri.	

TRANSFERÊNCIA DE MASSA GÁS-SÓLIDO EM ESTRUTURAS POROSAS COMPLEXAS .....	787
C. A. M. Abreu, F. R. C. Silva, M. Benachour, A. Knoechelmann.	

## HEAT CONDUCTION

ANISOTHERMAL ANALYSIS OF SHAPE MEMORY ALLOY BARS SUBMITTED TO THERMOMECHANICAL LOADINGS .....	791
Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco, Marcelo Amorim Savi.	

EXPERIMENTAL SETUP FOR MEASUREMENT OF OVERALL THERMAL RESISTANCE OF BOLTED JOINTS .....	797
Marcia B. H. Mantelli, M. M. Yavanovich.	

CÁLCULO NUMÉRICO SIMPLIFICADO DA TEMPERATURA DO NÚCLEO DE CONDUTORES CAA ...	803
Guilherme E. Filippo Fernandes Filho.	

THE CONJUGATE GRADIENT METHOD APPLIED TO INVERSE PROBLEMS IN HEAT CONDUCTION .....	809
A. J. Silva Neto.	

ANALYSIS OF HEAT CONDUCTION FOR FOOD FREEZING BY SPACE-TIME FINITE ELEMENT METHOD .....	813
Nelson Moraga, Gerardo Díaz, Aldo Aedo.	

FLUXO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIO EM MEIOS MULTI-COMPOSTOS .....	817
Paulo Otto Beyer.	

## HEAT EXCHANGER

ESTUDO COMPARATIVO DE PROCEDIMENTOS HEURÍSTICOS PARA A SÍNTESE DE REDES DE TROCADORES DE CALOR .....	823
S. G. Oliveira, E. S. Mendonça, F. L. P. Pessoa, E. M. Queiroz.	

MINIMUM UTILITY USAGE IN HEAT EXCHANGER NETWORK SYNTHESIS USING GENERALIZED GRAPH MODEL .....	829
V. F. Assunção, Paulo de Barros Correia.	

EL USO DE EXCEL EN EL ANÁLISIS TERMOHIDRÁULICO DE UN INTERCAMBIADOR DE CALOR TIPO ESTRELLA .....	835
José Aguerrevere, Francisco Barea, Ulises Lacoa e Antonio Campo.	

EFFECT OF TUBE-TO-TUBE CONDUCTION ON HEAT EXCHANGER PERFORMANCE .....	841
Ricardo Romero-Méndez, Mihir Sen, K. T. Yang and Rodney L. McClain.	

EFFECTO DE LA VARIACIÓN DE LAS PROPIEDADES TERMO FÍSICAS DE LOS FLUIDOS SOBRE LOS COEFICIENTES CONVECTIVOS EN INTERCAMBIADORES DE CALOR DE CARCASA Y TUBOS .....	847
F. García, J. Segura.	

ANÁLISIS Y SIMULACION DEL COMPORTAMIENTO TERMICO DE UN INTERCAMBIADOR DE DOBLE TUBO UTILIZADO COMO RECUPERADOR EN UN SISTEMA DE ABSORCION .....	853
José Fernández-Seara, Jesús Iglesias y Manuel Vázquez.	

HEAT TRANSFER ENHANCEMENT IN PLATE FIN-TUBE HEAT EXCHANGER BY LONGITUDINAL VORTEX GENERATORS .....	859
Jurandir I. Yanagihara, Hamilton Jorge Sabanai.	

FLUTUAÇÕES DE PRESSÃO NAS PAREDES DE UM BANCO DE TUBOS COM ESCOAMENTO TURBULENTO .....	865
Luiz Augusto M. Endres, Sérgio V. Möller.	

ANÁLISE "PINCH" E AVALIAÇÃO SISTEMÁTICA APLICADAS À SÍNTESE DE REDES FLEXÍVEIS DE TROCADORES DE CALOR .....	871
Marcene Lopes da Silva, Alberto Luiz de Andrade.	

FRICITION FACTOR IN ANNULAR CONDUITS WITH TUBULAR FINNS .....	877
J. R. Sodré, J. A. R. Parise.	

**HEAT PIPE, THERMOSIPHON AND CAPILLARY PUMPS**

EXPERIMENTAL EXAMINATION OF A PROTOTYPE OF THE CAPILLARY PUMPED LOOP WITH POROUS CONDENSER .....	883
Valeri V. Vlassov, Issamu Muraoka.	

COMPORTAMENTO TÉRMICO DE BOMBAS CAPILARES DE RANHURAS CIRCUNFERENCIAIS .....	889
E. Bazzo, J. C. Passos, S. Colle.	

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF VARIABLE CONDUCTANCE HEAT PIPE WITH EXTERNAL HOT UNWICKED RESERVOIR .....	895
Valeri V. Vlassov, Luis Carlos Cordeiro Jr.	

USO DE CONVECÇÃO INDUZIDA POR TENSÃO SUPERFICIAL NO BOMBEAMENTO DE VAPORES EM SISTEMAS DE VÁCUO .....	901
Luís Antônio Waack Bambace.	

**HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW IN POROUS MEDIUM**

MOMENTUM AND ENERGY TRANSFER IN AN INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW THROUGH A NONSATURATED POROUS MEDIUM .....	907
Maria Laura Martins-Costa, Rogério M. Saldanha da Gama.	

CARACTERIZAÇÃO HIDRODINÂMICA DE MEIOS POROSOS ENVOLVENDO A UTILIZAÇÃO DE UM PROGRAMA SIMULADOR DE UM TENSÍOMETRO .....	913
M. B. Quadri.	

DISCRETE MULTIPHASE EQUILIBRIUM SIMULATION IN POROUS MEDIA .....	917
R. A. Pieritz, J. P. Laurent.	

THERMO-HYDRAULIC CHARACTERIZATION OF COLD PLATES USING MECHANICALLY COMPRESSED PERMEABLE LAYERS .....	923
J. L. Lage, B. V. Antohe.	

**HEAT TRANSFER WITH PHASE CHANGE - BOILING**

ANALYSIS OF SUBCOOLED FLOW BOILING IN TUBES .....	929
Élcio Nogueira, Jan-Mark Kunberger, Claudia O. Gavrilescu, Sadik Kakaç.	

EBULIÇÃO EM PELÍCULA EM PAREDE CILÍNDRICA VERTICAL .....	935
José Antônio R. de Souza, Cirus M. Hackenberg.	

TWO-PHASE FLOW INSTABILITIES IN BOILING SYSTEMS .....	941
Sadik Kakaç, Claudia O. Gavrilescu, Elcio Nogueira.	

EFFECT OF MODELING ASSUMPTIONS ON THE DYNAMICS AND STABILITY OF HEATED BOILING CHANNELS .....	947
Mauricio A. Pinheiro Rosa, Michael Z. Podowski.	

## **HEAT TRANSFER WITH PHASE CHANGE - MELTING AND SOLIDIFICATION**

MODELING KINETIC UNDERCOOLING THROUGH PHASE-FIELD EQUATIONS WITH NON-LINEAR DYNAMICS .....	953
A. L. Fazenda, J. S. Travelho, Maurício Fabbri.	

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM MUDANÇA DE FASE EM GEOMETRIA AXI-SIMÉTRICA .....	957
A. J. Diniz, C. R. M. Maia, E. L. Zapparoli.	

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE MUDANÇA DE FASE USANDO FORMULAÇÃO EM UM DOMÍNIO COM ACOMPANHAMENTO DA FRENTE .....	963
Renata Santos Crespo, Clovis R. Maliska.	

ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DA SOLIDIFICAÇÃO DE LIGAS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM NUMÉRICA BASEADA NA ANALOGIA ENTRE SISTEMAS TÉRMICOS E CIRCUITOS ELÉTRICOS .....	969
Carlos Alexandre dos Santos, Noé Cheung, Jaime A. Spim Junior, Amauri Garcia.	

SIMULATION OF THE TRANSIENT THERMAL BEHAVIOR OF A FINITE SLAB IN A STEFAN PROBLEM, BY THE NETWORK METHOD .....	975
F. Alhama, J. F. López Sánchez, M. Alarcón, C. F. Gonzáles-Fernández.	

MELTING-SOLIDIFICATION IN PHASE CHANGE MATERIAL PACKAGE WITH NONUNIFORM FILLER .....	979
Valeri V. Vlassov.	

ESTUDO DA RECUPERAÇÃO DO CALOR ARMAZENADO EM MATERIAIS DE MUDANÇA DE FASE NO INTERIOR DE DUTOS CILÍNDRICOS .....	985
C. S. Stampa, S. L. Braga.	

FUSÃO EM CAVIDADES NA PRESENÇA DE CONVECÇÃO NATURAL .....	991
Gisele M. R. Vieira, S. L. Braga, Dominique Gobin.	

BALANCES DE ENERGÍA EN CRISTALIZADORES POR ENFRIAMIENTO .....	997
Horacio A. Correa, Cynthia L. Carvajal.	

SIMULAÇÃO DA RECUPERAÇÃO DA ENERGIA ARMAZENADA EM UM TERMOACUMULADOR COM MUDANÇA DE FASE .....	1001
Carlos Eduardo Leme Nóbrega, Sérgio L. Braga.	

OPTMIZACION DE LA CALIDAD DE LAS PIEZAS OBTENIDAS EN MOLDES CERAMICOS POROSOS MEDIANTE EL CONTROL DEL ENFRIAMIENTO DURANTE LA SOLIDIFICACION .....	1007
Pablo Varela, Osvaldo Oviedo, Nelson Cotella, Omar Radevich, Rodolfo Khol.	

## **INTERNAL COMBUSTION ENGINES**

MÉTODOS EXPERIMENTAIS PARA IDENTIFICAÇÃO DE DETONAÇÃO EM MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA .....	1011
Alessandro B. de S. Oliveira, Luiz Carlos Dantas Arboés, João Nildo de Souza Vianna, Fernando J. R. Neves.	

DESEMPENHO DE UM MOTOR ALIMENTADO A ÁLCOOL ALTAMENTE HIDRATADO .....	1017
Eduardo Klein, Pedro Mello.	

SPARK PLUG POSITION EFFECTS ON COMBUSTION, EMISSIONS AND PERFORMANCE OF AN ENGINE ACCORDING TO A FLAME GEOMETRY MODEL .....	1023
José Ricardo Sodré, D. A. Yates.	

ESTUDIOS PARAMETRICOS DE LOS CICLOS DE LOS MOTORES DE ENCENDIDO POR CHISPA . . . .	1029
Maria J. Martín V., Simón J. Fygueroa S., Domingo Hernández H.	
TRANSIENT HEAT TRANSFER ANALYSIS OF A DIESEL ENGINE PISTON . . . . .	1033
M. J. Colaço, Helcio R. B. Orlande.	
A SIMPLIFIED MODEL FOR IGNITION PROCESS IN A DIESEL COMBUSTION ENGINE . . . . .	1039
Fernado Fachini Filho, Amable M. Liñán.	
MODELADO Y SIMULACION DE MOTORES DE ENCENDIDO POR CHISPA DE CUATRO TIEMPOS . .	1045
Jesus Fernando Morea Roy, Mariano Muñoz, Francisco Moreno, Alfredo Gonzalez.	
MODELAGEM DOS COLETORES DE ADMISSÃO E DESCARGA PELO MÉTODO DA AÇÃO DAS ONDAS E SUA INFLUÊNCIA SOBRE A PRECISÃO DOS RESULTADOS DO PROGRAMA SIMULADOR DE MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA . . . . .	1051
João Nildo de Souza Vianna, Guilherme Lara Oliveira, Lúcio Hellery Holanda Oliveira.	
COMBUSTION PERFORMANCE OF SOOT (PARTICULATE MATTER) IN CERAMIC FILTER TRAPS . .	1057
Alejandro F. Romero, Rogelio Gutiérrez, Rodrigo García Moreno.	
 <b>INSTRUMENTATION AND EXPERIMENTAL TECHNIQUES</b>	
PODER TERMOELÉTRICO EM CIRCUITOS A ELETRODOS DEPOSITADOS . . . . .	1063
Saulo Güths, Rogério Vilain.	
HEAT FLUX MEASUREMENT APPLIED TO THE STUDY OF THERMAL HEAT TRANSFERS IN A COMPOSITE SOLAR WALL . . . . .	1067
L. Zalewski, S. Lassue, B. Duthoit.	
EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS IN ROUND BUBBLE PLUMES . . . . .	1073
Jader R. Barbosa Jr., L. J. S. Bradbury.	
LOCAL MEASUREMENT OF THE VOID FRACTION DISTRIBUTION IN TWO-PHASE FLOW USING A RESISTIVITY PROBE TECHNIQUE . . . . .	1079
Luiz Felipe M. de Moura, Christophe Marvillet.	
DETECÇÃO DA EBULIÇÃO SUBRESFRIADA ATRAVÉS DA ANÁLISE ESPECTRAL DOS SINAIS DE TRANSDUTORES DE PRESSÃO . . . . .	1085
Alfredo José Alvim de Castro, Dieter Stegemann.	
UTILIZAÇÃO DE TERMOPARES PARA MEDIÇÃO DE VELOCIDADE E TEMPERATURA EM ESCOAMENTOS TURBULENTOS . . . . .	1091
Aurimar M. Reis, Jurandir I. Yanagihara, Jeronimo S. Travelho.	
CONSTRUCTION AND CALIBRATION OF A SYSTEM FOR MEASURING LOW AIR FLOW VELOCITIES IN NATURAL CONVECTION HEAT TRASNFER PROCESSES . . . . .	1097
Alan C. B. da Rocha, George S. Marinho, Leônidas Hildebrandt Jr., Samuel W. Celere.	
VISUALIZAÇÃO EXPERIMENTAL DO ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS DE BASE QUADRADA POSICIONADOS TRANSVERSALMENTE AO FLUXO LIVRE . . . . .	1103
Sérgio Said Mansur, Edson Del Rio Vieira, Massami Saito, George A. S. Esperança.	
CONSTRUÇÃO E CALIBRAÇÃO DE DOIS MODELOS DE TUBO DE PITOT DE 5 FUROS PARA APLICAÇÃO EM CÂMARAS DE COMBUSTÃO . . . . .	1109
Waldir A. Bizzo, A. L. Cardoso, Leonardo Goldstein Jr.	
ESTUDO TEÓRICO DA MEDIÇÃO DE GRANDES VAZÕES BASEADA EM TRANSIENTES HIDRÁULICOS . . . . .	1115
Idalberto Ferreira de Ataídes, Aristeu da Silveira Neto, Carlos Roberto Ribeiro.	
THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS FOR THE RETARDING TORQUES OF A TURBINE FLOW METER . . . . .	1121
Wilson C. S. Ferreira, C. F. Favaretto.	

LIQUID FILM MOTION UNDER THE ACTION OF GRAVITATIONAL AND CENTRIFUGAL FIELDS .....	1127
Eugênio Spanó Rosa, Marcelo L. Morandin, Sílvio G. Dias, Fernando A. França.	

## **KINETIC, CATALYSIS AND REACTORS**

A UTILIZAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA, ASSOCIADA À METODOLOGIA "PINCH" DE RECUPERAÇÃO DE ENERGIA EM REDES, NA BUSCA DA MELHOR CONFIGURAÇÃO ENERGÉTICA, NA ETAPA DE CRAQUEAMENTO CATALÍTICO, NA REFINARIA DE PETRÓLEO DE PAULÍNEA (REPLAN) .....	1133
Luciano Fernando dos Santos Rossi, Antonio Carlos Bannwart.	

MODELADO DE REACTORES TANQUE AGITADO PARA LA BIODEGRADACION ANAEROBIA DE RESIDUOS ORGANICOS SOLIDOS .....	1139
Enrique D. Negri.	

METHANE PHOTO-POLYCHLORINATION IN THE NON-ISOTHERMAL TUBULAR REACTOR IN LAMINAR FLOW REGIME.I. APPLICABILITY OF STEADY-STATE APPROXIMATION vs. SCALE-UP ..	1143
Ricardo J. Grau, María I. Cabrera, Alberto E. Cassano.	

METHANE PHOTO-POLYCHLORINATION IN THE NON-ISOTHERMAL TUBULAR REACTOR IN LAMINAR FLOW REGIME.II. WALL REACTIONS INFLUENCE vs. SCALE-UP .....	1149
María I. Cabrera, Ricardo J. Grau, Alberto E. Cassano.	

TRANSFORMACIONES FLUIDO-SOLIDO REACTIVO - PARTE I: CARACTERIZACION, ECUACIONES,FUNDAMENTALES DE MODELADO Y CLASIFICACIÓN .....	1155
Oscar D. Quiroga, Jorge R. Avanza, Angel J. Fusco, Luis T. Villa.	

TRANSFORMACIONES FLUIDO-SOLIDO REACTIVO - PARTE II: MODELADO CINETICO DE TRASFORMACIONES I E II .....	1161
Oscar D. Quiroga, Jorge R. Avanza, Angel J. Fusco, Luis T. Villa.	

TRANSFORMACIONES FLUIDO-SOLIDO REACTIVO - PARTE III: MODELADO CINETICO DE TRASFORMACIONES III E IV .....	1167
Oscar D. Quiroga, Jorge R. Avanza, Angel J. Fusco, Luis T. Villa.	

## **LUBRICATION**

ANÁLISE DE ESCOAMENTOS VISCOSOS A BAIXAS VELOCIDADES UTILIZANDO UM MÉTODO NUMÉRICO IMPLÍCITO .....	1173
Marcello A. S. Ferrari, João L. F. Azevedo.	

NON STATIONARY FLOW BETWEEN TWO PARALLEL PLATES WITH THE GAP PARTIALLY FILLED WITH A POROUS MEDIA .....	1179
Ana Maria Aquino, Luiz R. Carrocci, Leon Sinay.	

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAIS AXIAIS DE SAPATAS SETORIAIS .....	1185
Georgette Emile El Mouallem, Nelson Manzanares Filho, Vilmar Arthur Schwarz.	

## **MASS TRANSFER**

DISPERSION Y RETROMEZCLADO EN UNA COLUMNA DE EXTRACCION LIQUIDO-LIQUIDO YORK-SCHEIBEL .....	1191
Maria G. Gómez, A. Ballesteros, J. M. Segnini, M. Zamora, F. Pironti.	

EXTRAÇÃO LÍQUIDO-LÍQUIDO EM COLUNAS COM PRATOS PULSANTES .....	1195
Luiz Mário Nelson de Góis, Elias B. Tambourgi, João A. F. R. Pereira.	



CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO EFEITO DO DISTRIBUIDOR DO GÁS SOBRE A TRANSFERÊNCIA DE MASSA GÁS/LÍQUIDO EM COLUNA DE BORBULHAMENTO ASCENDENTE .....	1201
D. S. H. Malta, A. Knoechelmann, C. A. M. de Abreu, M. Benachour.	
TRANSFERENCIA DE MASA SOLIDO-LIQUIDO EN TANQUES AGITADOS .....	1205
Graciela Montiel, Jorge Avanza, Oscar Quiroga.	
ESTUDO DA EFICIÊNCIA DE MURPHREE NUMA COLUNA AGITADA POR PALHETAS ROTATIVAS .....	1211
A. P. B. Rabelo, R. R. Souza, E. B. Tambourgi, J. A. F. R. Pereira.	
ISOTHERMS OF MAIZE AND SOYBEANS: STUDY OF THE GAB EQUATION AT DIFFERENT TEMPERATURES .....	1217
M. C. Gely, S. A. Giner.	
EVALUACION DE LA ALTURA EQUIVALENTE POR PLATO TEORICO A UN EMPAQUE ESTRUCTURADO NACIONAL .....	1223
Rosa Hilda Chávez, Arquimides O. Suástegui.	
MÓDELO DE ORDEM REDUZIDA DE UMA COLUNA DE DESTILAÇÃO EXTRATIVA SALINA. ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA ESCOLHA DO SAL .....	1229
Paulo R. Alves dos Reis, Sergio Persio Ravagnani.	
DIFUSION DE AGUA LIGADA EN BIOPOLIMEROS .....	1235
Marcela P. Tolaba, Constantino Suarez, Roberto J. Aguerre.	
ABSORÇÃO NÃO-ISOTÉRMICA COM REAÇÃO QUÍMICA .....	1239
Andréa Selene E. X. Stragevitch, Alberto L. de Andrade.	
ABSORPTION OF AMMONIA FROM A GASEOUS MIXTURE WITH HYDROGEN IN A WETTED WALL ABSORBER IN LAMINAR NATURAL CONVECTION .....	1245
Gilberto Martins, José Tomaz Vieira Pereira.	
A SERIES SOLUTION FOR THE FILM MODEL OF MULTICOMPONENT DIFFUSION .....	1251
Claudio Olivera-Fuentes.	
SIMULAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE MASSA EM UMA COLUNA DE ABSORÇÃO CO <sub>2</sub> -ÁGUA, UTILIZANDO O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS .....	1257
Adriano da Silva, Antônio Augusto Ulson de Souza, Selene M. A. Gueli Ulson de Souza, José Alexandre Borges Valle.	
AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DO COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE MASSA EM ESCOAMENTOS BIFÁSICOS COM GÁS OZÔNIO E ÁGUA EM REATORES TUBULARES .....	1263
A. Filipe Montalvão, Carlos Russo.	
ABSORÇÃO DE OXIGÊNIO E DESSORÇÃO DE GASES ORGÂNICOS PELA ÁGUA .....	1267
Alessandra Morales Momesso, Alan Cavalcanti da Cunha, Selva Amaral Garcia Schulz, Harry Edmar Schulz.	

### VOLUME III

#### MEMBRANE SEPARATION PROCESS

CHARACTERIZATION OF POROUS CERAMIC MEMBRANES FOR MICROFILTRATION .....	1273
Cristina Almandoz, Miguel Amaral, Rosa Antón, Jose Marchese.	
MODELO DIFUSIONAL DE EXTRACCION DE COBRE POR SOLVENTES SOBRE MEMBRANAS LIQUIDAS DE SOPORTE SOLIDO APLICADO A SOLUCIONES RESIDUALES DE LIXIVIACION DE MOLIBDENITA .....	1277
Fernando Valenzuela, Claudia Paratori, Cristián Tapia, Carlos Basualto, Jaime Sapag.	



FACILITATED TRANSPORT OF PROPYLENE IN SUPPORTED LIQUID MEMBRANES ..... A. Acosta, J. Cesco, J. Marchese.	1281
TRANSPORTE Y SEPARACION DE NIOBIO(V) Y TANTALIO(V) CON MEMBRANAS LIQUIDAS SOPORTADAS ..... M. Campderrós, A. Acosta, J. Marchese.	1287
SUPPORTS EFFECT ON COPPER TRANSFER THROUGH A LIQUID MEMBRANE ..... M. Campderrós, A. Acosta, J. Marchese.	1291
TRANSFER AND RETENTION COEFFICIENTS IN ULTRAFILTRATION ASYMMETRIC MEMBRANES ..... C. Pagliero, N. Ochoa, J. Marchese.	1295
EFEECTO DEL SOPORTE Y ESPESOR DE MOLDEADO SOBRE LOS PARAMETROS DE TRANSPORTE EN MEMBRANAS DE ULTRAFILTRACION ..... N. Ochoa, C. Pagliero, J. Marchese.	1299
<b>MULTIPHASE SYSTEMS</b>	
TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO ESCOAMENTO ANULAR DESENVOLVIDO DE DOIS LÍQUIDOS IMISCÍVEIS EM TUBOS CURVOS ..... Ricardo Junqueira Silva, Márcio Ziviani, Ramón M. Valle.	1303
MEZCLADO DEL LIQUIDO EN UNA COLUMNA DE BURBUJEO DE TUBOS CONCENTRICOS EN OPERACION TRIFASICA ..... E. Ventura-Medina, A. E. Sáez, F. F. Pironti.	1309
ESTABILIDADE DO ESCOAMENTO BIFÁSICO ANULAR ..... Eduardo F. Gaspari, Sérgio N. Bordalo.	1315
UMA SOLUÇÃO ASSINTÓTICA PARA O ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE UM ESCOAMENTO GÁS-LÍQUIDO A CONTRA-CORRENTE PARA CO-CORRENTE ..... Milton Biage, Idalberto Ferreira de Ataídes.	1321
AIR-WATER AND AIR-XANTHAN GUM VOID FRACTION IN UPWARD CO-CURRENT SLUG FLOW THROUGH INCLINED ANNULI ..... Paulo Hora de Andrade Jr., Edson Yoshihito Nakagawa, Antonio Carlos Bannwart.	1327
<b>NATURAL CONVECTION</b>	
CONJUGATE NATURAL CONVECTION HEAT TRANSFER PROCESS BETWEEN TWO FLUIDS SEPARATED BY AN HORIZONTAL WALL ..... E. Luna, C. Treviño, F. Méndez.	1333
CONVECÇÃO NATURAL EM UMA CAVIDADE RETANGULAR RESFRIADA NA PAREDE SUPERIOR .. D. J. Bispo, A. O. Nieckele, S. L. Braga.	1339
NATURAL CONVECTION BETWEEN CONCENTRIC ELLIPSES: ANALYSIS OF THE LIMITING CASES ..... A. R. Cunha, M. A. Livramento, J. F. Vasconcelos, C. R. Maliska.	1345
<b>PARTICULATE SYSTEMS</b>	
SHEAR-INDUCED GRADIENT DIFFUSIVITY OF A MONODISPERSE DILUTE SUSPENSION ..... Francisco R. da Cunha, Edward J. Hinch.	1351
SEDIMENTAÇÃO NA REGIÃO DE TRANSIÇÃO NA ENTRADA DE TUBOS DE SEÇÃO QUADRADA E RETANGULAR ..... Carlos Alberto Soares, Harry E. Schulz, W. N. L. Roma, L. Di Bernardo.	1357

A NUMERICAL METHOD FOR THE SIMULATION OF SEDIMENTING PARTICLES WITH IMPENETRABLE BOUNDARIES .....	1363
Francisco R. da Cunha.	
THE TURBULENCE OF MIXING OF IRON PARTICLES IN WATER SYSTEMS .....	1369
Guilherme G. Camozzato, Roberto de Souza, Alexandre J. da Silva, Átila P. Silva Freire.	
HYDRODYNAMIC SELF-DISPERSION OF SEDIMENTING NON-BROWNIAN SPHERES .....	1375
Francisco R. da Cunha, Edward J. Hinch.	
EFEITOS DE PAREDE E POPULAÇÃO NA VELOCIDADE DE QUEDA DE PARTÍCULAS IRREGULARES EM FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS .....	1381
Carlos H. M. de Sá, André L. Martins, Affonso M. F. Lourenço, Wilson B. Aguiar Jr.	
VARIAÇÃO DA CONCENTRAÇÃO DA HEMATITA DOS EXTRATOS NA FLUIDIZAÇÃO INTERMITENTE E CONTÍNUA DE MISTURAS DE HEMATITA E QUARTZO .....	1387
A. A. Brazil, R. de Souza, O. D. Cuéllar.	
NONLINEAR FLOW IN INDUSTRIAL CYCLONES .....	1393
Roberto A. Clemente, Adolfo L. Godoy, Silvia A. Nebra.	
IMPROVEMENT OF A SUGARCANE SEPARATOR EFFICIENCY USING NUMERICAL AND EXPERIMENTAL TECHNIQUES .....	1399
R. M. Girardi, Nide G. C. R. Fico Jr., J. L. F. Azevedo.	
MATHEMATICAL MODEL FOR THE TRANSPORT OF SOLIDS IN HORIZONTAL PIPES BY POLYMER SOLUTIONS .....	1405
N. E. Ramírez, J. B. Bello, A. E. Sáez.	
SPATIAL DISTRIBUTION OF GAS AND SOLID PHASES IN CONICAL SLURRY BUBBLE COLUMNS ..	1411
S. Siquier, A. Ronchetti, M. Calderón, P. Llaguno, A. E. Sáez.	
<b>PETROLEUM ENGINEERING</b>	
SLUG MEASUREMENTS IN A GAS-OIL PIPELINE .....	1417
Marcelo de A. Lima Gonçalves, Claudio B. Costa e Silva, Marcos H. J. Pedras.	
STUDY OF PIG MOTION IN PIPELINES .....	1423
L. F. A. Azevedo, A. M. B. Braga, M. G. F. M. Gomes.	
DEVELOPMENT OF SEMI-EMPIRICAL MODELS TO PREDICT THE CRITICAL CONDITIONS OF DRILLED CUTTINGS TRANSPORT IN DEVIATED WELLS .....	1429
Moacyr B. Laruccia, Erghu Gao, John T. Ford, Babs Oyeneyin, James M. Peden.	
REDUÇÃO DE ARRASTE EM ESCOAMENTOS DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO .....	1435
João C. de Queiroz Neto, André L. Martins, Carlos H. M. de Sá, Sandra C. S. Rocha.	
SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO TÉRMICO DE PETRÓLEO EM LINHAS SUBMARINAS SENDO AQUECIDO POR ABSORÇÃO DE RÁDIO-FREQUÊNCIA .....	1441
C. V. M. Braga, Sérgio L. Braga, D. Kircher, E. J. Coelho.	
AVALIAÇÃO COMPARATIVA DE DIFERENTES TÉCNICAS ANALÍTICAS PARA A DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA INICIAL DE APARECIMENTO DE CRISTAIS NO PETRÓLEO .....	1447
Luiz Carlos Carmo Marques, André L. C. Machado, L.C. Vieira, João Rodrigues Filho.	
ANÁLISE DO PROCESSO DE AQUECIMENTO ELETROMAGNÉTICO DE RESERVATÓRIOS PORTADORES DE ÓLEO DE ALTA VISCOSIDADE .....	1453
Sylvia T. Cambra, Cirus M. Hackenberg, P. L. Lage, Carlos M. Portela.	
EFEITOS DA CORRENTE ALTERNADA NA PERMEABILIDADE RELATIVA .....	1459
R. Z. Moreno, E. J. Bonet, Osvaldo V. Trevisan.	

DESIGNING FLUID VELOCITY PROFILES FOR OPTIMAL PRIMARY CEMENTING .....	1465
Maria das Graças Pena Silva, André Leibson Martins.	
POROUS MEDIA FLOW MODELING FOR PETROLEUM RESERVOIR SIMULATION .....	1471
Marcos H. J. Pedras, Marcelo J. S. de Lemos.	
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO: COMPARAÇÃO ENTRE AS METODOLOGIAS, TI, IMPES E AIM .....	1477
Francisco Marcondes, Clovis Raimundo Maliska, Mário César Zambaldi.	
ANÁLISE DO ERRO DAS APROXIMAÇÕES UTILIZADAS NA MODELAGEM DE ESCOAMENTOS DE ANULARES EXCÊNTRICOS .....	1483
Mário B. Villas-Boas, André L. Martins	

## PROPULSION

EXPERIMENTAL STUDY OF NOZZLES EROSION DUE TO THE ACTION OF COMBUSTION GASES .....	1489
José Gobbo Ferreira.	
EXPERIMENTAL PROGRESSES IN THE RESEARCH OF SOLID FUEL RAMJET PROPULSION .....	1495
José Gobbo Ferreira.	
MODELAGEM E PESQUISA DOS ESCOAMENTOS REAGENTES EM TUBEIRAS .....	1499
A. P. Spilimbergo, R. L. Iskhakova	
LIMITES DE OPERAÇÃO DE UMA TURBINA A GÁS .....	1505
Luís Henrique Getino, João Roberto Barbosa.	
GASDYNAMIC FLOW OVER A FLAME DEFLECTOR .....	1511
Paulo Moraes Jr., Algacyr Morgenstern Jr	
THERMAL DESIGN AND RESULTS ANALYSIS OF THE THERMAL BALANCE TEST OF THE CBERS BATTERY COMPARTMENT .....	1517
Rosângela M. G. Leite, Issamu Muraoka.	

## REFRIGERATION AND AIR CONDITIONING

MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE REFRIGERADORES DOMÉSTICOS: INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA AMBIENTE EM SEU DESEMPENHO .....	1523
Carlos Almir Monteiro de Holanda.	
ESTUDO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DO DESEMPENHO DE TUBOS CAPILARES ADIABÁTICOS E NÃO ADIABÁTICOS COM CFC 12 E HFC 134a .....	1527
Marco A. S. de Paiva, Flávio A. S. Fiorelli, Roberto A. Peixoto, Alberto Hernandez Neto, Otávio M. Silvares, Paulo Yodianitskaia.	
ESTUDOS SOBRE O DESEMPENHO DE SISTEMAS DE REFRIGERAÇÃO DE PEQUENO PORTE .....	1533
Flávio A. S. Fiorelli, Otávio M. Silvares.	
INFLUENCE OF THE REFRIGERANT PROPERTIES ON THE REFRIGERATION SYSTEM PERFORMANCES .....	1539
Claudio Saavedra O., Eric Winandy.	
PERFORMANCE ANALYSIS OF AIR-COOLED CONDENSING UNITS RUNNING ON CFC SUBSTITUTES .....	1545
S. Y. Motta, L. G. Chaves, J. A. R. Parise.	
PERFORMANCE DE UM SISTEMA FRIGORÍFICO COM BANCO DE GELO PARA CONDICIONAMENTO DE AR .....	1551
Dênio L. Panissi, Eli Silva, Manuel S. V. de Almeida.	

TERMOACUMULAÇÃO: SIMULAÇÃO E EXPERIMENTAÇÃO .....	1557
Oswaldo J. Venturini, Manuel S. V. de Almeida, Eli Silva.	

## RHEOLOGY

PHYSICO-CHEMICAL ASPECTS OF THE ADHESION OF CRUDE OIL TO WET MORTARS .....	1563
Geraldo S. Ribeiro, Michael S. Arney, Timothy J. Hall, Daniel D. Joseph.	
LIQUID HOLDUP MEASUREMENTS IN SLUG FLOW OF AIR/NON-NEWTONIAN LIQUID AND AIR/WATER THROUGH INCLINED PIPE .....	1569
João Tadeu Vidal de Sousa, Edson Yoshihito Nakagawa, Fernando de Almeida França.	
HEAT TRANSFER TO HERSCHEL-BULKLEY FLUIDS IN LAMINAR FLOW THROUGH SHORT TUBES .....	1575
Márcia Soares, Paulo R. Souza Mendes, Mônica F. Naccache.	
EXPERIMENTS, COMPUTATION AND THEORY FOR FLOWS OF BINGHAM LIQUIDS THROUGH IDEAL POROUS MEDIA .....	1581
Paulo R. Souza Mendes, Mônica F. Naccache, A. O. Nieckele, C. V. M. Braga, L.F.A. Azevedo, R.L.A. Santos.	
INVERSE PROBLEM FOR ESTIMATING THE HEAT FLUX TO A NON-NEWTONIAN FLUID IN A PARALLEL PLATE CHANNEL .....	1587
H. A. Machado, Helcio R. B. Orlande.	
ON A THERMODYNAMICALLY CONSISTENT MODELING OF NON-NEWTONIAN FLUID BEHAVIOR .....	1593
Heraldo S. Costa Mattos.	
PREDICTION OF TURBULENT FLOW OF NON-NEWTONIAN FLUIDS IN PIPES AND ANNULI .....	1599
Marco A. Teixeira, A. David Gosman.	

## SOLAR ENERGY

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM COLETOR SOLAR ACUMULADOR .....	1605
A. L. de Bortoli, Horácio A. Vielmo, A. Krenzinger.	
CONCENTRADORES TIPO - V DE MÚLTIPLOS ESTÁGIOS .....	1611
Danilo Lazzeri Pena.	
EFFICIENCY ANALYSIS OF A BOILING COLLECTOR IN THERMAL SIPHON OPERATION .....	1615
Maria Eugênia Vieira, Rafaela Frota Reinaldo.	
EFICIÊNCIA DE COLETORES SOLARES COM ABSORVEDORES ALETADOS .....	1621
Sergio Mourão Saboya, Francisco Eduardo Mourão Saboya.	
DESHIDRATADOR SOLAR: DISEÑO, CONSTRUCCION Y FUNCIONAMIENTO .....	1627
José L. Rodríguez, M. E. Guerrero, A. M. Gimenez, M. R. Palma.	
ESTUDO SOLARIMÉTRICO COM BASE NA DEFINIÇÃO DE MÊS PADRÃO E SEQUÊNCIA DE RADIAÇÃO DIÁRIA, COM BASE NA BIBLIOTECA DE MATRIZES DE MARKOV .....	1633
Ana Paula Cardoso Guimarães, Elizabeth Marques Duarte Pereira.	
CÁLCULO DE LA ENERGÍA SOLAR QUE INCIDE SOBRE CUALQUIER SUPERFICIE .....	1639
Juan Manuel Rodríguez Menéndez.	
MEDICIÓN Y MODELIZACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR ULTRAVIOLETA SOBRE ROSARIO, ARGENTINA (PERÍODO 1993-1995) .....	1645
Rubén D. Piacentini, Orlando M. Alfano, Enrique D. Albizzati.	
ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE UNA LAGUNA SOLAR. OPTIMIZACIÓN DEL CALOR RETIRADO .....	1649
Ernesto Francisco G., Juan Manuel Rodríguez Menéndez.	

## **THERMAL RADIATION**

- APPLICATION OF THE ZONING METHOD IN RADIATIVE INVERSE PROBLEMS ..... 1655  
F. H. R. França, L. Goldstein Jr.
- MÉTODO DAS ORDENADAS DISCRETAS ASSOCIADO À INTEGRAÇÃO FORMAL DA  
EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE RADIAÇÃO EM AXISSIMETRIA CILÍNDRICA ..... 1661  
Zaqueu E. da Silva, Domenique Doermann, Michel Laurent.
- COMPARAÇÃO ENTRE DOIS MÉTODOS DE ORDENADAS DISCRETAS APLICADAS A FORMA  
INTEGRAL DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA ..... 1667  
Luís M. Moura, Zaqueu E. da Silva, Jean-François Sacadura, Michel Laurent.
- RADIACION EN UN SISTEMA HETEROGENEO COMPUESTO DE PARTICULAS  
SEMITRANSSPARENTES. ABSORCION, DISPERSION Y FUNCION DE FASE EN  
EL LIMITE INDEPENDIENTE ..... 1673  
Enrique D. Negri.
- ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM GASES NÃO-CINZENTOS  
UTILIZANDO O MÉTODO DAS ORDENADAS DISCRETAS ASSOCIADA AO  
MODELO ESTATÍSTICO A BANDAS ESTREITAS ..... 1677  
A. B. de Miranda, J.-F. Sacadura, A. Delmas.
- CALORIMETRIC DETERMINATION OF THE LONGWAVE EMISSIVITY OF PAINTS ..... 1683  
Vicente de Paulo Nicolau, Saulo Güths, Luiz Fernandes Lemos.
- MODELO DE TROCA DE CALOR RADIANTE ENTRE DUAS SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS  
CONCÊNTRICAS PELO MÉTODO DE MONTE CARLO ..... 1687  
Jorge R. Henriquez, R. J. Rodriguez, Musa Mohamed R., Leonardo Goldstein Jr.
- CALCULO DEL FACTOR DE FORMA ENTRE LA PERSONA (CUYA FORMA SE ASIMILA A  
UNA ESFERA) Y LAS SUPERFICIES QUE LA RODEAN EN UN AMBIENTE INTERIOR ..... 1693  
Alfredo Esteves.
- DETERMINAÇÃO DE UMA CORRELAÇÃO PARA O CÁLCULO DA RADIAÇÃO SOLAR DIFUSA  
INCIDENTE A PARTIR DA RADIAÇÃO SOLAR GLOBAL ..... 1699  
Ênio Bueno Pereira, Samuel Luna de Abreu, Sérgio Colle.
- COLETOR E RADIADOR ESPACIAL ..... 1703  
E. C. Garcia, S. M. Saboya, E. L. Zapparoli.

## **THERMOHYDRAULIC OF NUCLEAR REACTORS**

- ANÁLISE EXPERIMENTAL DA CIRCULAÇÃO NATURAL DE ÁGUA ATRAVÉS DE UM  
CIRCUITO FECHADO EM REGIME TRANSITÓRIO ..... 1709  
Marcelo de Bastos Lavrador, Carlos Valois Maciel Braga, Pedro Carajilescov.
- UMA METODOLOGIA PARA ANÁLISE DO SISTEMA DE REMOÇÃO DE CALOR RESIDUAL  
DE REATORES RÁPIDOS ATRAVÉS DO VASO DE SEGURANÇA ..... 1713  
F. A. Braz Filho, Eduardo M. Borges, M. P. Rosa, F. Rocamora, L. Guimarães.
- BOMBA ELETROMAGNÉTICA DE CORRENTE CONTÍNUA COM IMÃS DE  
TERRAS RARAS PARA CONTROLE DE ESCOAMENTO DE METAIS LÍQUIDOS ..... 1719  
Eduardo M. Borges, F. Sircilli Neto, A. Passaro, F. A. Braz Filho.
- CIRNAT - A CODE FOR ONE AND TWO-PHASE NATURAL CIRCULATION ..... 1725  
José Luís Ferraz Bastos.
- ANÁLISE DE CORRELAÇÕES DE FLUXO CRÍTICO DE CALOR PARA REATORES PWR  
COM BAIXO FLUXO DE MASSA ..... 1731  
Pedro Carajilescov.



## **THERMOPHYSICAL PROPERTIES**

INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE APPLIED TO THE IDENTIFICATION OF SOLID'S THERMAL DIFFUSIVITY .....	1737
Zaqueu E. da Silva, Martin Raynaud, Michel Laurent.	
DETERMINAÇÃO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO URUCUM .....	1741
Lucianna Gama Vieira, Odélsia S. de Alsina.	
UM NOVO MÉTODO PARA ESTIMAÇÃO SIMULTÂNEA DE PROPRIEDADES TÉRMICAS IN SITU ...	1747
S. M. M. Lima e Silva, Gilmar Guimarães.	
IMPLEMENTAÇÃO E PROJETO DE UM APARELHO DE DICKERSON PARA DETERMINAÇÃO DE DIFUSIVIDADE TÉRMICA EM PRODUTOS HETEROGÊNEOS .....	1753
Claudio L. C. Frankenberg, Simone Bastos.	
THERMODYNAMIC PROPERTIES OF WATER AND THEIR MAIN FIRST PARTIAL DERIVATIVES ...	1757
Marcelo A. Veloso.	
OOB APPROACH FOR CALCULATING THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF HIGH-TEMPERATURE GAS MIXTURE S .....	1763
Jorge Koreeda, José Nivaldo Hinckel, Hélio Engholm Jr.	
PESQUISA DAS PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS E TERMOFÍSICAS DOS PRODUTOS DE COMBUSTÃO DE BIOMASSAS .....	1769
C. M. Auth, R. L. Iskhakova.	
DISEÑO DE UNA CELDA PARA MEDICIÓN DE COEFICIENTES DE DIFUSIÓN .....	1775
Georgina Díaz, Ximena Llanca.	

## **TRANSPORT PHENOMENA IN PACKED BEDS**

A LOCAL MODEL FOR A PACKED-BED HEAT EXCHANGER WITH A TWO-PHASE SOLID MATRIX ...	1781
Maria Laura Martins-Costa.	
APRESENTAÇÃO DE UM MODELO-SIMULADOR DO TRANSPORTE DE SOLUTOS EM COLUNAS DE RECHEIO .....	1787
M. G. Novy Quadri, M. B. Quadri.	
EXPERIMENTAL DETERMINATION OF TIME IN BIN COOLING FOR CORN AERATION: COOL-FRONT EVOLUTION .....	1793
A. M. Pagano, D. E. Crozza.	
COMPARACION DE MODELOS DE REACTORES ENZIMATICOS DE DISPERSION AXIAL Y FLUJO PISTON COM DISTINTAS CINÉTICAS .....	1797
Carlos R. Carrara, Enrique J. Mammarella, Amelia C. Rubiolo.	

## **TURBULENCE**

EVOLUTION OF NONLINEAR INSTABILITIES IN RADIAL FLOWS .....	1803
J. C. Oliveira, Cristina H. Amon.	
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM UM DEGRAU COM O MODELO DE TURBULÊNCIA $\kappa$ - $\epsilon$ RENORMALIZADO .....	1809
A. O. Nieceke, J. D. M. Abrunhosa, E. R. Ronzani.	
TURBULENT FLOW IN PERIODIC INTERRUPTED-SURFACE PASSAGES .....	1815
Simone Sebben, B. Rabi Baliga.	
ESCOAMENTO TURBULENTO EM TORNO DE UM CILINDRO PENDULAR .....	1821
Casimiro Cala, Antonio C. P. Brasil Junior, Aldo J. de Sousa.	



ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MODELOS DE TURBULÊNCIA $\kappa$ - $\epsilon$ E O MODELO ALGÉBRICO DO TENSOR DE REYNOLDS PARA ALTOS NÚMEROS DE REYNOLDS UTILIZANDO O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS .....	1827
Marcelo J. Pirani, Manuel da S. V. de Almeida, Nelson Manzanares Filho.	
THE ASYMPTOTIC STRUCTURE OF THE TURBULENT BOUNDARY LAYER WHEN SUBJECT TO AN INTERACTING SHOCK-WAVE .....	1833
Guilherme S. Terra, Jian Su, Atila P. Silva Freire.	
À CONSISTENT ASYMPTOTIC SOLUTION FOR THE K AND EPSILON EQUATIONS FOR TRANSPIRED BOUNDARY LAYER FLOWS .....	1839
Mila Rosendal Avelino, Jian Su, Atila P. Silva Freire.	
TRATAMENTO DA TURBULÊNCIA NA REGIÃO DA PAREDE .....	1845
H. D. Pasinato, Angela O. Nieckele.	
THE LAW OF THE WALL FOR TWO-PHASE SOLID-LIQUID SYSTEMS .....	1851
Guilherme G. Camozzato, Atila P. Silva Freire.	
UMA LEI DE POTÊNCIA PARA O COEFICIENTE DE ATRITO EM CAMADAS LIMITE EM EQUILÍBRIO, TURBULENTAS, COM GRADIENTE DE PRESSÃO .....	1857
Cláudio C. Pellegrini, Daniel O. A. Cruz.	
THE STANTON NUMBER EQUATION NEAR A SEPARATION POINT .....	1863
Daniel O. A. Cruz, Atila P. Silva Freire.	
<b>TURBOMACHINERY</b>	
DISIPADOR RADIAL, ECUACIONES GENERALES Y VALIDACION .....	1869
Maria Luisa Olivero, Julián Aguirre-Pe.	
ANÁLISE DE TURBINA DE REAÇÃO COM PÁ DE SIMPLES CURVATURA, UMA OPÇÃO PARA GERAÇÃO EM MICROCENTRAIS HIDROELÉTRICAS .....	1873
Frederico Fábio Mauad.	
ANÁLISE DO ESCOAMENTO ROTACIONAL EM GRADES DE PLACAS PLANAS COM VORTICIDADE UNIFORME .....	1877
Nelson Manzanares Filho, Ramiro G. Ramirez Camacho.	
A METHODOLOGY FOR AXIAL FLOW TURBOMACHINE DESIGN .....	1883
André L. Amarante Mesquita, N. Manzanares Filho, E. C. Fernandes.	
ANÁLISE HIDRODINÂMICA DE ROTORES AXIAIS PARA APROVEITAMENTO DA ENERGIA CINÉTICA DOS RIOS .....	1887
C. J. C. Blanco, Marco S. A. Veludo Gouveia, André L. Amarante Mesquita.	

## AUTHORS

### A

Abdulline, A. L.	. 281
Abreu, C. A. M.	. 787, 1201
Abreu, G. L. C. M.	. 417
Abreu, S. L.	. 1699
Abrunhosa, J. D. M.	. 1809
Acosta, A.	. 1281, 1287, 1291
Aedo, A.	. 813
Aguerre, R. J.	. 1235
Aguerrevere, J.	. 835
Aguiar Jr., W. B.	. 1381
Aguirre-Pe., J.	. 1869
Alarcón, M.	. 167, 975
Albizzati, E. D.	. 355, 1645
Alfano, O. M.	. 1645
Alhama, F.	. 167, 975
Almandoz, C.	. 1273
Almeida, M. S. V.	. 1551, 1557, 1827
Almeida, R. A.	. 207
Alsina, O. S.	. 1741
Alvarez, P. I.	. 305, 345
Amaral, M.	. 1273
Amborgi, A.	. 635
Amon, C. H.	. 61, 1803
Andrade Júnior, P. H.	. 1327
Andrade, A. L.	. 617, 871, 1239
Antohe, B. V.	. 923
Antón, R.	. 1273
Aquino, A. M.	. 1179
Arboés, L. C. D.	. 1011
Arese, A.	. 355
Arney, M. S.	. 1563
Assunção, V. F.	. 829
Assureura E., E. G.	. 405
Ataides, I. F.	. 1115, 1321
Auada, R. B.	. 559
Auth, C. M.	. 1769
Avanza, J. R.	. 1155, 1161, 1167, 1205
Avelino, M. R.	. 1839
Azevedo, J. L. F.	. 49, 547, 553, 1173, 1399
Azevedo, L. F. A.	. 741, 1423, 1581

### B

Balestieri, J. A. P.	. 459
Baliga, B. R.	. 1815
Ballesteros, A.	. 1191
Bambace, L. A. W.	. 901
Bannwart, A. C.	. 1133, 1327
Barbieri, R.	. 103
Barbosa Jr., J. R.	. 1073
Barbosa, E. M. S.	. 747
Barbosa, J. R.	. 1505
Barea, F.	. 835
Bareyns R., R.	. 149
Barreto, A. A.	. 339
Barreto, G. F.	. 109
Barrientos, A.	. 231
Barroeta, C.	. 693
Basso, E.	. 49
Bastos, J. L. F.	. 1725
Bastos, S.	. 1753
Bastos-Neto, D.	. 237
Basualto, C.	. 1277
Bayón, J. J. G.	. 675
Bazzo, E.	. 889
Belandriá, L. M. S.	. 145
Bello, J. B.	. 1405
Benachour, M.	. 787, 1201
Bernardo, L. Di	. 1357
Beyer, P. O.	. 817
Biage, M.	. 1321
Bilger, R. W.	. 293
Bispo, D. J.	. 1339
Bizzo, W. A.	. 1109
Blanco, C. J. C.	. 1887
Blanco, R. L. D.	. 663
Blasco, R.	. 305
Boaventura, M.	. 583
Bodstein, G. C. R.	. 7
Bolivar, M. A. H.	. 723
Bonet, E. J.	. 1459
Bordalo, S. N.	. 1315
Borges, E. M.	. 1713, 1719

Bortolaia, L. A.	423
Bortoli, A. L.	517, 1605
Bortolus, M. V.	37, 589
Bortoni, E. C.	207
Bourguignon, E.	271
Bradbury, L. J. S.	1073
Braga, A. M. B.	1423
Braga, C. V. M.	1441, 1581, 1709
Braga, F. A. O. Q.	477
Braga, S. L.	985, 991, 1001, 1339, 1441
Brasil Junior, A. C. P.	1821
Braz Filho, F. A.	1713, 1719
Brazil, A. A.	1387
Briceño, J. F.	511
Brizuela, E.	127, 293
Bueno, A. D.	171, 177

## C

Cabrera, M. I.	1143, 1149
Cadoche, R. S.	121
Cala, C.	1821
Calçada, L. A.	327
Calderón, M.	1411
Camacho, R. G. R.	1877
Cambra, S. T.	1453
Camozzato, G. G.	1369, 1851
Campderrós, M.	1287, 1291
Campo, A.	693, 699, 835
Campo, E. R. B.	447, 453
Carajilescov, P.	735, 1709, 1731
Carbonel H., C.	389
Cardoso, A. L.	1109
Carmo, E. G. D.	477, 493, 499
Carnero, M.	623
Carrara, C. R.	1797
Carrocci, L. R.	1179
Carvajal, C. L.	997
Carvajal, L. F.	571
Carvalho Jr., J. A.	219, 225, 237, 333
Carvalho, F. R.	213
Cassano, A. E.	1143, 1149
Castelo Filho, A.	523, 583
Castro, A. J. A.	1085
Celere, S. W.	1097
Cerqueira, S. A. A. G.	453
Cesco, J.	1281

Chaveau, C.	243
Chaves, L. G.	1545
Chávez, R.H.	1223
Cheroto, S.	717
Cheung, N.	969
Chiovetta, M. G.	121
Choudhury, D.	595
Clemente, R. A.	1393
Coelho, E. J.	1441
Colaço, M. J.	1033
Colle, S.	889, 1699
Cordeiro Jr., L. C.	895
Correa, H. A.	997
Correia, P. B.	829
Corria, M. E.	411
Cortez, L. A. B.	411
Costa, F. S.	275
Cotella, N.	1007
Cotta, R. M.	73, 723, 729
Coutinho, A. L. G. A.	471
Couto, H. S.	237
Crespo, R. S.	963
Creus, G. J.	115
Crozza, D. E.	1793
Cruz, D. O. A.	1857, 1863
Cuéllar, O. D.	1387
Cuminato, J. A.	523, 583
Cunha Neto, J. A. B.	155, 171, 177, 309, 775
Cunha, A. C.	1267
Cunha, A. R.	1345
Cunha, F. R.	1351, 1363, 1375

## D

Dalabrida, L.	299
Dalepiane, S.	299
Delgado, M.	429
Delmas, A.	1677
Demin, A. B.	281
Devloo, P. R. B.	505
Dias, S. G.	1127
Díaz, Georgina	1775
Díaz, Gerardo	813
Diniz, A. J.	957
Doermann, D.	1661
Dourado, W. M. C.	553

Ducrós, E. . . . . 623

## E

Ebinuma, C. D. . . . . 43  
Echaniz, V. . . . . 293  
Eggers, R. . . . . 635  
Endres, L. A. M. . . . . 865  
Engholm Jr., H. . . . . 1763  
Esperança, G. A. S. . . . . 1103  
Estenoz, D. . . . . 355  
Esteves, A. . . . . 1693

## F

Fabbri, M. . . . . 953  
Fachini Filho, F. . . . . 1039  
Favaretto, C. F. . . . . 1121  
Fazenda, A. L. . . . . 953  
Fernandes Fº, G. E. F. . . . . 803  
Fernandes, E. C. . . . . 1883  
Fernández-Seara, J. . . . . 853  
Ferrari, M. . . . . 623  
Ferrari, M. A. S. . . . . 1173  
Ferreira, J. G. . . . . 1489, 1495  
Ferreira, M. C. . . . . 605  
Ferreira, V. C. S. . . . . 1121  
Ferreira, W. F. . . . . 315, 321, 339  
Fico Jr., N. G. C. R. . . . . 1399  
Fidalgo, R. . . . . 699  
Finzer, J. R. D. . . . . 611  
Fiorelli, F. A. S. . . . . 1527, 1533  
Fissore Sch., A. . . . . 149  
Fontes, S. R. . . . . 67  
Ford, J. T. . . . . 1429  
Fortes, M. . . . . 339  
Fraenkel, S. L. . . . . 333  
Fraidenraich, N. . . . . 747  
França, A. S. . . . . 487  
França, F. A. . . . . 1127, 1569  
França, F. H. R. . . . . 1655  
Francisco G., E. . . . . 1649  
Franco, A. T. . . . . 541  
Frankenberg, C. L. C. . . . . 1753  
Freire, A. P. S. . . . . 1369, 1833, 1839, 1851, 1863  
Freire, J. T. . . . . 605  
Frey, S. . . . . 481

Fusco, A. J. . . . . 1155, 1161, 1167  
Fushimi, A. . . . . 201  
Fygueroa S., S. J. . . . . 1029

## G

Galeão, A. C. N. . . . . 389  
Galetti, M. R. S. . . . . 735  
Gallo, W. L. R. . . . . 195  
Gama, R. M. S. . . . . 907  
Ganzarolli, M. M. . . . . 541  
Gao, E. . . . . 1429  
Garcia, A. . . . . 969  
Garcia, E. . . . . 711  
Garcia, E. C. . . . . 1703  
García, F. . . . . 847  
Gaspari, E. F. . . . . 1315  
Gavrilescu, C. O. . . . . 929, 941  
Gely, M. C. . . . . 1217  
Gerla, P. E. . . . . 641  
Getino, L. H. . . . . 1505  
Gimenez, A. M. . . . . 1627  
Giner, S. A. . . . . 1217  
Giorgetti, M. F. . . . . 67  
Girardi, R. M. . . . . 1, 1399  
Gobin, D. . . . . 991  
Godoy, A. L. . . . . 1393  
Góis, L. M. N. . . . . 1195  
Gökalp, I. . . . . 243, 271  
Goldstein Jr., L. . . . . 1109, 1655, 1687  
Gomes, M. G. F. M. . . . . 1423  
Gomes, M. S. P. . . . . 741  
Gómez, M. G. . . . . 1191  
Gonçalves, M. A. L. . . . . 1417  
González-Fernández, C. F. . . . . 167, 975  
González, A. . . . . 1045  
Gosman, A. D. . . . . 1599  
Gouveia, M. S. A. V. . . . . 1887  
Graber, T. A. . . . . 753, 763  
Grau, R. J. . . . . 1143, 1149  
Guedes, V. G. . . . . 13  
Guerrero, J. S. P. . . . . 73  
Guerrero, M. E. . . . . 1627  
Guevara, C. . . . . 699  
Guimarães, A. P. C. . . . . 1633  
Guimarães, G. . . . . 1747  
Guimarães, L. . . . . 1713

Güths, S. . . . . 1063, 1683  
 Gutiérrez, R. . . . . 1057

## H

Hackenberg, C. M. . . . . 757, 935, 1453  
 Haghighi, K. . . . . 349, 487  
 Hall, T. J. . . . . 1563  
 Harada, S. . . . . 19  
 Henriquez, J. R. . . . . 1687  
 Hernandez H., D. . . . . 1029  
 Hernandez Neto, A. . . . . 1527  
 Hernandez, O. S. . . . . 401  
 Hildebrandt Jr., L. . . . . 1097  
 Hinch, E. J. . . . . 1351, 1375  
 Hinckel, J. N. . . . . 1763  
 Hirata, M. H. . . . . 7, 13  
 Holanda, C. A. M. . . . . 1523  
 Hombeeck, M. V. . . . . 465  
 Honma, H. . . . . 19  
 Hubinger, M. D. . . . . 657

## I

Iglesias, J. . . . . 853  
 Iskhakova, R. L. . . . . 1499, 1769

## J

Joseph, D. D. . . . . 1563  
 Jucá, P. C. S. . . . . 383  
 Juez, F. A. . . . . 699

## K

Kakaç, S. . . . . 717, 729, 929, 941  
 Keine, S. . . . . 309  
 Keller, F. . . . . 611  
 Kent, J. H. . . . . 127  
 Khatchatourian, O. A. . . . . 287  
 Khol, R. . . . . 1007  
 Kieckbusch, T. G. . . . . 647  
 Kircher, D. . . . . 1441  
 Klein, E. . . . . 1017  
 Knoechelmann, A. . . . . 787, 1201  
 Kobayashi, W. T. . . . . 259

Koreeda, J. . . . . 19, 1763  
 Korzenowski, H. . . . . 547  
 Krenzinger, A. . . . . 1605  
 Krioukov, V. G. . . . . 281, 299  
 Künberger, J.-M. . . . . 929

## L

Lacava, P. T. . . . . 219  
 Lacoa, U. . . . . 693, 835  
 Lage, J. L. . . . . 923  
 Lage, P. L. C. . . . . 253, 529, 535, 723, 1453  
 Lamberts, R. . . . . 155, 177  
 Larrosa R., C. G. . . . . 775  
 Laruccia, M. B. . . . . 1429  
 Lassue, S. . . . . 1067  
 Laurent, J. P. . . . . 917  
 Laurent, M. . . . . 1661; 1667, 1737  
 Lavrador, M. B. . . . . 1709  
 Lazarini, M. D. X. . . . . 85  
 Leite, R. M. G. . . . . 1517  
 Lema, A. . . . . 623  
 Lemos, L. F. . . . . 1683  
 Lemos, M. J. S. . . . . 1471  
 Lima, R. N. O. . . . . 441  
 Liñán, A. M. . . . . 1039  
 Livramento, M. A. . . . . 1345  
 Llagostera, J. . . . . 195, 435, 447  
 Llaguno, P. . . . . 1411  
 Llanca, X. . . . . 1775  
 Lodi, S. . . . . 293  
 Loula, A. D. . . . . 389  
 Lourenço, A. M. F. . . . . 1381  
 Luna, E. . . . . 1333  
 Luporini, S. . . . . 617

## M

Machado, A. L. C. . . . . 1447  
 Machado, H. A. . . . . 1587  
 Maia, C. R. M. . . . . 957  
 Maiello, M.R. . . . . 441  
 Maliska, C. R. . . . . 383, 565, 963, 1345, 1477  
 Malta, D. S. H. . . . . 1201  
 Mammarella, E. J. . . . . 1797  
 Mansur, S. S. . . . . 1103

Mantelli, M. B. H.	797
Manzanares Fº, N.	1885, 1827, 1877, 1883
Marchese, J.	1273, 1281, 1287, 1291, 1295, 1299
Marcondes, F.	1477
Marczack, L. D. F.	769
Mariani, N. J.	109
Marinho, G. S.	1097
Marques, L. C. C.	1447
Martin V., M. J.	1029
Martinez, O. M.	109
Martins, A. L.	1381, 1435, 1465, 1483
Martins, G.	1245
Martins-Costa, M. L.	907, 1781
Marvillet, C.	1079
Massarani, G.	327
Mathur, S.	595
Mattea, M.	635
Mattos, B. S.	31
Mattos, H. S. C.	1593
Mauad, F. F.	1873
Mazucheli, J.	605
Mazza, G. D.	109
Mazza, M. G. G.	327
Mazza, R. A.	365
McClain, R. L.	841
McQuay, M. Q.	219, 687
Medeiros, A. L. R.	25
Medeiros, E. B.	85
Mello, P.	1017
Melo, C. A.	417
Mendes, N.	155
Mendes, P. R. S.	1575, 1581
Méndez, F.	1333
Mendonça, E. S.	823
Meneghini, J. R.	559
Menéndez, J. M. R.	1639, 1649
Menon, G. J.	371
Mesquita, A. L. A.	1883, 1887
Messias, L. S.	259
Mestroni, J.	201
Michou, Y.	271
Miguel, M. H.	647
Miranda, A. B.	1677
Mohamed R., M.	1687
Möller, S. V.	663, 865
Momesso, A. M.	1267
Montalvão, A. F.	1263

Montiel, G.	1205
Moraes Jr., P.	55, 1511
Moraga, N.	813
Morales, R. E. M.	681
Morandin, M. L.	1127
Moreira Jr., O.	1
Moreno, F.	1045
Moreno, J.	231
Moreno, R. G.	1057
Moreno, R. Z.	1459
Morgenstern Jr., A.	1511
Motta, S. Y.	1545
Mouallem, G. E.	1185
Moura, L. F. M.	1079
Moura, L. M.	1667
Muñoz, M.	1045
Murakami, J.	523
Muraoka, I.	883, 1517
Murthy, J. Y.	595

## N

Naccache, M. F.	1575, 1581
Nakagawa, E. Y.	1327, 1569
Nascimento, M. A. R.	423
Nebra, S. A.	453, 1393
Negri, E. D.	121, 601, 1139, 1673
Neves F., L. C.	657
Neves, F. J. R.	1011
Nicolau, V. P.	1683
Nieckele, A. O.	577, 1339, 1581, 1809, 1845
Nóbrega, C. E. L.	1001
Nóbrega, P. L.	477
Nogueira, E.	729, 929, 941
Nogueira, L. A. H.	213, 333, 423
Nunes, M. H.	647
Nuñez, L. C.	763

## O

Ochoa, N.	1295, 1299
Odeide, A.	243
Oliphant, K.	687
Oliveira Filho, A. G.	253
Oliveira Junior, S.	465
Oliveira, A. B. S.	1011



Oliveira, G. L.	1051
Oliveira, J. C.	61, 1803
Oliveira, L. H. H.	1051
Oliveira, L. S.	349
Oliveira, S. G.	823
Oliveira-Fuentes, C.	429, 1251
Olivero, M. L.	1869
Orlande, H. R. B.	1033, 1587
Oviedo, O.	1007
Oyeneyin, B.	1429

## P

Pacheco, P. M. C. L.	791
Pagano, A. M.	1793
Pagliari, C.	1295, 1299
Paiva, M. A. S.	1527
Palma, M. R.	1627
Panissi, D. L.	1551
Paone, N.	265
Paratori, C.	1277
Pares, J.	231
Parise, J. A. R.	877, 1545
Pasinato, H. D.	1845
Pássaro, A.	1719
Passos, J. C.	889
Peden, J. M.	1429
Pedras, M. H. J.	1417, 1471
Pedrini, A.	155
Peiretti, M.	623
Peixoto, R. A.	1527
Pellegrini, C. C.	1857
Pena, D. L.	1611
Pereira, A. G.	611
Pereira, A. J. C.	359
Pereira, E. B.	1699
Pereira, E. M. D.	1633
Pereira, F. O. R.	183
Pereira, J. A. F. R.	617, 1195, 1211
Pereira, J. T. V.	1245
Pereira, M. L.	85
Pereira, M. M. R.	377
Perez, C.	711
Pessoa, F. L. P.	823
Philippi, P. C.	155
Piacentini, R. D.	1645
Pieritz, R. A.	917

Pimentel, L. C. G.	729
Pinheiro, P. C. C.	189
Pinto, R. L. U. F.	37
Pirani, M. J.	1827
Pironti, F.	1191, 1309
Podowski, M. Z.	947
Portela, C. M.	1453
Pouey, M. T. F.	161
Pramparo, M.	623
Prata, A. T.	775

## Q

Quadri, M. B.	913, 1787
Quadri, M. G. N.	781, 1787
Queiroz Neto, J. C.	1435
Queiroz, E. M.	757, 823
Queiroz, R. S.	377
Quiroga, O. D.	1155, 1161, 1167, 1205

## R

Rabelo, A. P. B.	1211
Radevich, O.	1007
Ramírez, N. E.	1405
Ramos, M. D.	371
Ramos, R. A. V.	541
Ravagnani, S. P.	1229
Raynaud, M.	1737
Rebollo, D.	699
Reboredo, J.	711
Reinaldo, R. F.	1615
Reis, A. M.	1091
Reis, P. R. A.	1229
Revel, G. M.	265
Reyes, R.	693
Ribeiro, C. R.	1115
Ribeiro, G. S.	1563
Rios, J. R. T.	401
Rocamora, F.	1713
Rocha, A. C. B.	1097
Rocha, S. C. S.	1435
Rodríguez Filho, J.	1447
Rodrigues Jr., R.	669
Rodríguez, G.	115
Rodriguez, R. J.	1687

Rodríquez, J. L.	1627
Rojas, P. A. M.	103
Roma, W. N. L.	1357
Romani, R.	247
Romero, A. F.	1057
Romero-Méndez, R.	841
Ronchetti, A.	1411
Ronzani, E. R.	577, 1809
Roque, C. R. O. L.	7
Rosa, E. S.	365, 1127
Rosa, M. A. P.	947, 1713
Rosales, L. A.	133
Rossetti, G.	355
Rossi, L. F. S.	1133
Rovedo, C. O.	629
Roy, J. F. M.	1045
Rubiolo, A. C.	641, 651, 1797
Russo, C.	1263

## S

Sá, C. H. M.	1381, 1435
Saastamoinen, J.	225
Saavedra O., C.	1539
Sabanai, H. J.	859
Saboya, F. E. M.	741, 1621
Saboya, S. M.	705, 1621, 1703
Sacadura, J.-F.	1667, 1677
Sáez, A. E.	1309, 1405, 1411
Saito, M.	1103
Sampaio, P.A.B.	471
Sánchez, J. F. L.	167, 975
Sanchez, M.	699
Santana, L. F. M.	359
Santana, M. L. M.	505
Santos, A. H. M.	207
Santos, C. A.	969
Santos, C. A. C.	97, 717
Santos, L. A.	565
Santos, L. C. C.	493, 499
Santos, M. B.	705
Santos, N. R.	79
Santos, R. L. A.	1581
Santos, V. M. S.	321
Sapag, J.	1277
Sattler, M. A.	161
Savi, M. A.	791

Scalon, V. L.	365
Schneider, P. S.	161
Schulz, H. E.	1267, 1357
Schulz, S. A. G.	1267
Schwarz, V. A.	1185
Sebben, S.	1815
Segnini, J. M.	1191
Segura, J.	847
Sen, M.	841
Sensale, B.	115
Shene, C.	345
Sichel, M.	275
Silva Neto, A. J.	809
Silva, A.	1257
Silva, A. J.	1369
Silva, C. B. C.	1417
Silva, E.	1551, 1557
Silva, E. E.	411
Silva, E. F.	73
Silva, E. M. V.	605
Silva, F. R. C.	787
Silva, J. A.	441
Silva, L. B.	395
Silva, M. G. P.	1465
Silva, M. L.	871
Silva, Ricardo J.	1303
Silva, Rogério J.	371
Silva, S. B.	657
Silva, S. M. M. L.	1747
Silva, Z. E.	1661, 1667, 1737
Silvares, O. M.	1527, 1533
Silveira Neto, A.	681, 1115
Sinay, L.	1179
Siqueira, L. P.	13
Siquier, S.	1411
Sircilli Neto, F.	1719
Soares, C. A.	1357
Soares, M.	1575
Sodré, J. R.	877, 1023
Sosa, J. G.	127
Sosa, M. E.	133
Sousa, A. J.	1821
Sousa, F. D. A.	259
Sousa, J. T. V.	1569
Souza, A. A. U.	1257
Souza, J. A. R.	935
Souza, J. L. F.	315

Souza, R.	359, 1369, 1387
Souza, R. R.	1211
Souza, S. M. A. G. U.	1257
Spilimbergo, A. P.	1499
Spim Junior, J. A.	969
Stampa, C. S.	985
Stegemann, D.	1085
Stocco, E. B.	459
Strachan, P. A.	139
Stragevitch, A. S. E. X.	1239
Su, J.	91, 1833, 1839
Suarez, C.	1235
Suástegui, A. O.	1223

## T

Taboada, M. E.	753, 763
Tambourgi, E. B.	1195, 1211
Tapia, C.	1277
Teixeira, M. A.	1599
Terra, G. S.	1833
Tolaba, M. P.	1235
Tomasini, E. P.	265
Tomé, M. F.	523, 583
Traiano, F. M. L.	493, 499
Travelho, J. S.	953, 1091
Tremante, A.	711
Treviño, C.	1333
Trevisan, O. V.	1459

## V

Valenzuela L., F.	1277
Valle, J. A. B.	1257
Valle, R. M.	1303
Varallo, A. T.	43
Varela, P.	1007
Vasconcellos, J. F. V.	565, 1345
Vázquez, M.	853
Vazzoler Júnior, H.	377
Veloso, M. A.	1757
Ventura-Medina, E.	1309
Venturini, O. J.	1557
Veras, C. A. G.	225
Vianna, J. N. S.	1011, 1051
Vieille, B.	243

Vieira, E. R.	1103
Vieira, G. M. R.	991
Vieira, L. C.	1447
Vieira, L. G.	1741
Vieira, M. E.	1615
Vielmo, H. A.	1605
Vilain, R.	1063
Villa, L. T.	1155, 1161, 1167
Villas-Boas, M. B.	1483
Viollaz, P. E.	629
Vlassov, V. V.	883, 895, 979
Vodianitskaia, P.	1527

## W

Walter, A. C. S.	195
Webb, B. W.	687
Winandy, E.	1539
Winkelmann, F. C.	155
Wortmann, S.	97

## Y

Yanagihara, J. I.	247, 669, 675, 859, 1091
Yang, K. T.	841
Yates, D. A.	1023
Yavanovich, M. M.	797

## Z

Zalewski, L.	1067
Zambaldi, M. C.	1477
Zamora, M.	1191
Zaparoli, E. L.	705, 957, 1703
Zapata, L. A.	753
Zilletti, M.	623
Ziviani, M.	395, 1303
Zorrilla, S. E.	651



## CHARACTERIZATION OF POROUS CERAMIC MEMBRANES FOR MICROFILTRATION

Almandoz C.<sup>1</sup>, Amaral M.<sup>1</sup>, Antón R.<sup>1</sup> and Marchese J.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Centro Regional de Estudios Avanzados - Gobierno de la Prov. de San Luis

<sup>2</sup>Facultad de Química, Bioquímica y Farmacia (U.N.S.L.) CONICET  
Av. del Fundador S/N. C.C. 256 - (5700) San Luis (Argentina)



### SUMMARY

The structural and permeoselective properties of non-supported ceramic membranes were determined by the gas and hydraulic permeability methods. The methods were applied to investigate the influence of the paste components upon membrane structural characteristics. A model that include the diffusive and viscous contributions to the total gas transport was used to interpret the gas fluxes data. The mean pore sizes were between 1 and 0.1 micra with an effective porosity between 44% and 7%. The high retention capacity of these membranes were verified.

### INTRODUCTION

Synthetic membranes have different applications in industries, for example: food, pharmaceutical, electronic, effluent treatment and biotechnology industries. The porous ceramic membranes show particular properties which make them attractive in these industry applications.

This kind of membranes possess a high thermal stability, they are resistant to corrosion, incompressible and show a high resistance to microbiological degradation.

The success of these membranes is related to a better knowledge about their structure and permeoselective behaviour. Among the most important parameters used in the characterization of these membranes can be mentioned: mean pore size ( $m$ ), pore size distribution, porosity ( $\epsilon$ ) and tortuosity ( $q$ ). Usually, these parameters can be established by  $N_2$  adsorption and/or mercury porosimetry (Lin and Burgraaf, 1993).

The main purpose of this work is the characterization of the microfiltration porous membranes synthesized in our laboratory. The membranes were prepared controlling the particle size, the paste formulation and the thermal treatment.

The separative capacity of these membranes were established by measuring the rejection coefficient for a liquid sample.

### THEORY

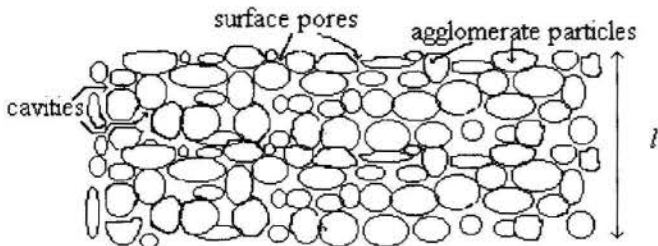


Figure 1 - Structure of a symmetric ceramic membrane

Figure 1 shows a scheme of a transversal section of a symmetric ceramic membrane. This membrane consists of small agglomerates and interstices or interconnected cavities (pores). The permeate species flow through these pores.

**Gas Permeability** The total gas flow through the pores occurs by a combination of Knudsen diffusion, bulk diffusion and viscous flow with the relative contribution of the transport mechanisms for a particular case, depending on the temperature and pressure conditions in the pore. Equation for flow in porous media, can be only approached by analogy with flow in capillaries. Carman (1956) suggests a general equation for permeability in capillaries with non-circular cross sections, in agreement with the pore shapes, Eq. (1)

$$K = \frac{4m\delta}{3lp_2k_1} \frac{\epsilon}{q^2} \bar{v} + \frac{m^2\bar{p}}{lk_0\eta p_2} \frac{\epsilon}{q^2} \quad (1)$$

where  $K$  is the total effective permeability. The first term on the right-hand side is related to slipping flux being  $\bar{v}$  the mean molecular speed of permeant, ( $\epsilon/q^2$ ) the effective porosity and  $l$  the membrane thickness. The last term is related to viscous flow term where  $\bar{p}$  is the mean pressure,  $\eta$  the permeant viscosity and  $p_2$  the downstream pressure. Numeric factors  $k_0$  and  $k_1$  account for change of pore shape;  $\delta$  is a numeric factor for a particular system and it is related to the mean pore size ( $m$ ) and the mean free path. Yasuda and Tsai (1974), Marchese and Pagliero (1991) found that, the values for these constants were  $k_0$ : 2.5 and  $\delta/k_1 \sim 0.8$ . These values were used in the Eq. (1), resulting:

$$K = 1.0667 \frac{m\bar{v}}{lp_2} \frac{\epsilon}{q^2} + 0.4 \frac{m^2}{l\eta p_2} \frac{\epsilon}{q^2} \bar{p} \quad (2)$$

For the same membrane and gas permeant all quantities in Eq. (2), except  $K$  and  $\bar{p}$  are constant. So a graphic of  $K$  vs.  $\bar{p}$  would give a straight line, where the intercept  $K_0$  at  $\bar{p} = 0$  and the slope  $B_0$  are given by:

$$K_0 = 1.0667 \frac{m\bar{v}}{lp_2} \frac{\epsilon}{q^2} \quad (3)$$

$$B_o = 0.4 \frac{m^2}{l \eta p_2} \frac{\epsilon}{q^2} \quad (4)$$

Combining Eq. (3) and (4) leads to

$$m = 2.667 \frac{B_o}{K_o} \eta \bar{v} \quad (5)$$

Equation (5) indicates that the mean pore size  $m$  can be calculate from gas permeability data, without further estimation of porosity and tortuosity. Once,  $m$  is evaluated the effective porosity can be calculated using the Eq. (3) and Eq. (4).

## EXPERIMENTAL

**Membrane Preparation** Both disc and tubular shape membranes were formed by plaster casting process and then consolidation, by sintering at 1100-1400°C, of resulting "green body". In the green dope formulation different percentages of the following powdered material in distilled water was prepared: ball clay, kaolin,  $\alpha$  alumina, calcium carbonate, silica, feldspath, and 0.1 - 2% w/w of additives to give rheological properties. The dopes formed have thixotropic properties close to those of clay between 1000 to 5000 mPa.s. Table 1 shows the different ceramic membranes obtained together with their particle size range in the dope composition. These are designated M-1 to M-5.

Table 1 - Membrane classifications

Membrane	Particle size (micra)
M-1	75 - 105
M-2	50 - 75
M-3	30 - 50
M-4	20 - 30
M-5	< 20

**Gas Permeability** Figure 2 shows a scheme of the apparatus used to determine the gas permeabilities, where C is the cell which contains the disc ceramic membrane; it is placed in a thermostatic box (TB). A differential pressure was applied to the membrane ( $\Delta p$ ), it was read on the differential pressure transducer (DT). The upstream pressure ( $p_1$ ) was maintained by means of a line-pressure regulator (B) and measured with an absolute pressure transducer (AT). The downstream pressure ( $p_2$ ) was kept with a micrometric needle valve  $L_2$ . The permeate gas fluxes were determined with a digital flowmeter F. A vacuum pump (VP) was used for sample degasification. The gas used in the permeation tests was  $N_2$ .

The experimental effective permeability at steady state was calculated by means of:

$$K = \frac{l p_A F_g T_a}{A \Delta p T_c} \quad (6)$$

where  $p_A$  is the atmospheric pressure,  $T_a$  the ambient temperature,  $A$  the cross sectional area of the membrane,  $T_c$  the cell temperature,  $F_g$  volumetric flux of permeate gas.

**Test of water flux** Water flux measurements were carried out in tubular membranes with a length of 0.2 m, and an inner

diameter  $ID=0.01$  m and wall thickness  $l$  of about  $10^{-3}$  m. These membranes were placed in a module showed in Figure 3. The water was pumped through the inner side of the membrane using a peristaltic pump. The transmembrane difference pressure  $\Delta p$ , is read in the manometer M and regulated with the  $L$  needle valve. The permeate water flux was calculated from measurements of the volume water flowing out per unit of time.

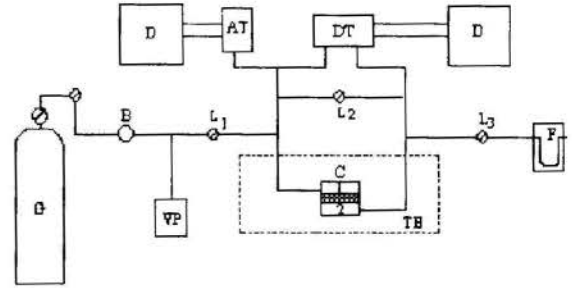


Figure 2 - Schematic representation of the gas permeability equipment.

**Test of Separation** The module described in the figure 3 was used to make the tests of the separative capacity of the membranes. A sample of liquid effluent, with a microbial charge near to 100 millions of viable aerobic colonies (CAV) per millilitre of effluent and 48 millions of total coliform bacteria (MPN) per millilitre was used. The sample was pumped through the inner side of the membrane, using a peristaltic pump. The amount of micro-organisms contained in the feed and permeate solutions were analyzed using the microbiological method described in the Standard Methods for the Examination of Water and Wastewater (1992). The most probable number (MPN) and recount in plate methods were used.

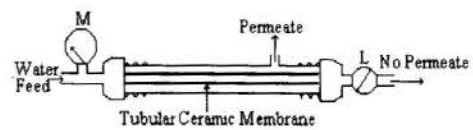


Figure 3 - Scheme of the tubular membrane module

MPN is the quantity of coliform bacteria developed at 37 °C in nutritive agar media with standard dilutions using as indicator the Echerichia coli or the lactose fermenting. It is made inoculating a lactose broth with convenient dilutions of the effluent sample. The smaller volume of inoculum producing fermentation gives an approximate indication of the quantity of fermenting lactose coliform bacilli in the sample.

The recount in plate is the total number of bacteria that have the sample. Dilutions and inoculations are made in two plates. The first one prepared with nutritive gelatine and incubated at 20°C and the other one prepared with nutritive agar and incubated at 37°C. In this way, it is possible to distinguish between the water natural bacteria which grow s at 20°C and the warm blooded animal ones which grows at 37°C. Biochemical tests are then made in order to characterize each germ.

**EXPERIMENTAL RESULTS:**

Determination of mean pore size and effective porosity

Nitrogen gas at 303 K was used for the gas permeabilities. The experimental results are showed in Figures 4 and 5, with  $\bar{p} = (p_1 + p_2) / 2$  and the molecular mean velocity given by:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{M}} \tag{7}$$

The viscosity was evaluated using the Chapman-Enskog equation.

$$\eta = 2,6693 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\Omega \sigma^2} \tag{8}$$

where  $\Omega$  and  $\sigma$  are the collision integral and the effective diameter of the molecule, respectively.

The  $K_0$  and  $B_0$  values were evaluated from the plots of Figures (4) and (5), according with Eq. (2). The  $m$  values were obtained from Eq. (5) and  $(\epsilon/q^2)$  data were calculated with equations (3) and (4). Results are summarized in table 2. The total porosity ( $\epsilon_T$ ) was experimentally determined by the wet-dry weigh method.

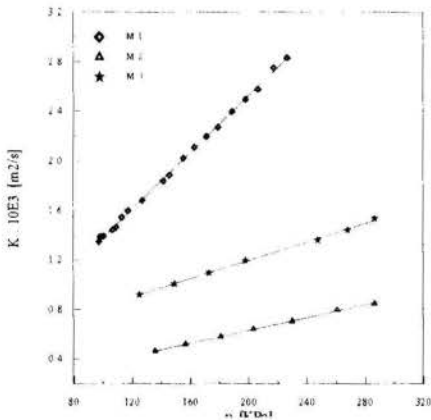


Figure 4 - Dependence of the effective permeability as a function of mean pressure for M-1, M-2 and M-3

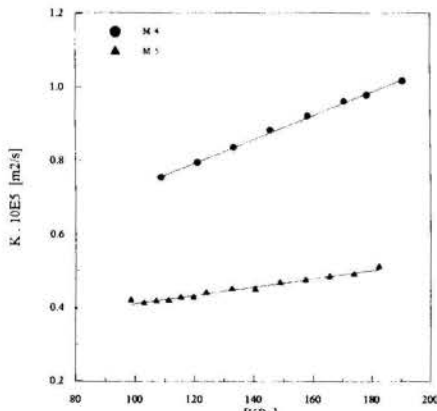


Figure 5 - Dependence of the effective permeability as a function of mean pressure for M-4 and M-5

Table 2 - Mean pore size , effective porosity and total porosity of the ceramic membranes.

Membrane	$K_0 \cdot 10^4$ ( $m^2 \cdot s$ )	$B_0 \cdot 10^8$	$l \cdot 10^2$ (m)	$m \cdot 10^6$ (m)	$\epsilon / q^2$	$\epsilon_{total}$
M-1	2.37	1.14	0.69	0.99	0.42	0.5
M-2	1.15	0.26	0.67	0.5	0.44	0.5
M-3	4.5	0.37	0.384	0.175	0.078	0.324
M-4	0.04	0.032	0.345	0.136	0.064	0.317
M-5	0.029	0.011	0.349	0.08	0.068	0.35

Determination of Hydraulic Permeability In order to determinate the hydraulic permeability of the membranes a feed flow of 0.025 l/s. and a transmembrane pressure between  $10^{-4}$  and  $10^{-5}$  Pa were used. The permeate liquid flow  $F_l$  was used to determine the hydraulic permeability  $L_h$ , according with:

$$F_l \left( \frac{l}{A} \right) = L_h \Delta p \tag{9}$$

The results are showed in Table 3.

Table 3 - Hydraulic Permeability of the Ceramic Membranes.

Membrane	$L_h \cdot 10^5$ ( $l \cdot m^3 / h \cdot m^2 \cdot Pa$ )
M-1	67.5
M-2	6.25
M-3	0.24
M-4	0.19
M-5	0.1

Determination of the rejection rate The tests run on the separative capacity of the membranes confirm an important reduction of CAV. In all cases, it was near  $10^5$  colonies. Figure 6 represents the rejection coefficient (%R) as a function of the mean pore radius, where:

$$\% R = \left( 1 - \frac{C_p}{C_a} \right) \cdot 100 \tag{10}$$

where  $C_p$  and  $C_a$  are the bacteria concentration (CAV) in the permeate and feed flow respectively.

**CONCLUSIONS**

The unsupported ceramic membranes were prepared by the slit-casting method, followed by sintering at 1100-1400°C. The main parameters used in the preparation were the particle size and the paste formulation.

The structural properties were determined using the gas permeability method. Results indicate that the membrane size and the effective porosity decrease with decreasing the particle size. The mean pore size was between 1 and 0.1  $\mu m$  with an effective porosity between 0.4 and 0.07. The total porosities were from 50 to 30%.

The total porosity determined from the wet-dry method may not necessarily be the same as the kinetic porosity ( $\epsilon$ ). If the membrane has many dead-end pores, the static porosity can be orders of magnitude larger than the kinetic porosity. Pores with



dead-ends do not contribute to the transport properties of the membrane.

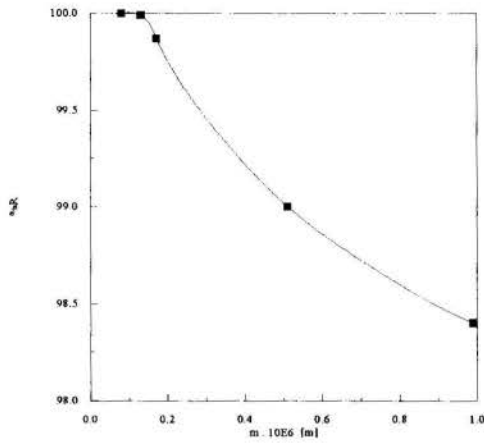


Figure 6 - Dependence of the micro-organism as a function of the mean pore size.

Therefore the effective porosity seems to be a better parameter to characterize transport properties of a membrane because both  $\epsilon$  and  $q$  are kinetic parameters so far as the transport properties of the membrane are concerned.

Water flux through membranes is connected with many important phenomena for the filtration processes. The hydraulic permeabilities values indicate a high water flux performance of the synthesized ceramic membranes. This is attributed to the intrinsically high membrane porosity.

Rejection tests were run with an effluent having micro-organism with size around 3 - 1  $\mu\text{m}$ . The high rejection values suggest that these membranes are useful for black water treatments.

#### REFERENCES

- Carman, P.C., 1956, "Flow of Gases Through Porous Media", Academic Press, New York.
- Lin Y.S. and Burggraaf A.J., 1993, "Experimental studies on pore size change of porous ceramic membranes after modification", *J. Membrane Sci.*, 79, 65.
- Marchese, J. and Pagliero C., 1991, "Characterization of asymmetric polysulphone membranes for gas separation", *Gas Separation & purification*, Vol 5 - N°4, 215-221.
- Standard Methods for the Examination of Water and Wastewater, 1992, ed. 18, 9050C, 9060A, 9211B, 9212
- Yasuda, H. and Tsai, J.T. *J. Appl. Polym Sci* (1974) 18 805-819



## MODELO DIFUSIONAL DE EXTRACCION DE COBRE POR SOLVENTES SOBRE MEMBRANAS LIQUIDAS DE SOPORTE SOLIDO APLICADO A SOLUCIONES RESIDUALES DE LIXIVIACION DE MOLIBDENITA

**Fernando Valenzuela, Claudia Paratori, Cristián Tapia, Carlos Basualto y Jaime Sapag**  
Laboratorio de Operaciones Unitarias, Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas,  
Universidad de Chile, Casilla 233, Santiago, CHILE.

### RESUMEN

*Se analizan mediante un modelo de transferencia de masa difusional los resultados experimentales obtenidos en el estudio de la recuperación de los contenidos de cobre presentes en soluciones residuales de la lixiviación ácida de concentrados de molibdenita, mediante extracción por solventes en un reactor continuo en base a membranas líquidas de soporte sólido del tipo "hollow fiber".*

### INTRODUCCION

Un gran avance tecnológico en el área de la hidrometalurgia lo constituye el uso de las membranas líquidas, en particular las de soporte sólido, dado las ventajas que ofrecen para separar y concentrar iones metálicos desde soluciones diluidas. Es posible predecir que este tipo de procesos serán absolutamente competitivos con procesos convencionales de extracción por solventes (SX) en extractores mezcladores-decantadores y procesos de intercambio iónico con resinas sólidas (IX) (Kim, 1984).

Dos tipos de membranas líquidas han sido empleadas en hidrometalurgia (Melling, 1979): las membranas líquidas surfactantes o tensoactivas consistentes en una doble emulsión acuosa-orgánica acuosa y las membranas líquidas de soporte sólido empleadas en este estudio. Estas consisten en un soporte sólido altamente poroso y delgado, de material polimérico, cuyos poros retienen la fase orgánica debido a fuerzas capilares. Son estables pero el flujo de metal y el área de membrana son pequeñas. Para compensar estas deficiencias se ha desarrollado una membrana basada en fibras huecas (hollow fibers) con un área bastante alta, al incorporar dentro de un reactor tubular un paquete de fibras huecas (Matsumoto, 1990).

En este trabajo se estudia la extracción de cobre por solventes sobre membranas líquidas de soporte sólido desde soluciones residuales de la lixiviación ácida de concentrados de molibdenita, empleando como transportador el extractante LIX 860, una salicilaldexima de amplio uso comercial. Con el propósito de poder explicar los resultados experimentales logrados en este estudio, se determinan parámetros de transferencia de masa e información que es fundamental para poder modelar el fenómeno de transporte del metal a través de la membrana líquida y permitir su comparación con la aplicación de un modelo de reacción

interfacial heterogénea propuesto en estudios anteriores a partir de soluciones puras de cobre (Valenzuela et al., 1994 a,b.).

### PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Se empleó un extractor continuo tubular de vidrio, en cuyo interior se dispuso "fibras huecas" microporosas de teflón como soporte sólido, con excelentes propiedades de flexibilidad, permeabilidad y resistencia química y mecánica. Sus especificaciones son 60-80 % de porosidad, 2,0  $\mu\text{m}$  como máximo tamaño de poro, 0,85 mm de diámetro interno, 1,8 mm de diámetro externo y 270 mm de longitud (Valenzuela et al., 1996 a,b).

Como fase acuosa se empleó una solución residual de la lixiviación con ácido nítrico de concentrados de molibdenita de la División El Salvador de Codelco-Chile. Es una solución fuertemente ácida, con contenidos variables de Cu(II) (0,6-1,0 g/L), 4-10 g/L de Mo(VI), 0,2-0,5 g/L de Re(VII) junto a otros metales.

Como fase orgánica en la preparación de la membrana líquida se utilizó el extractante LIX-860 (Henkel Co.) que corresponde a la 5-dodecilsalicilaldexima. Es un producto de peso molecular 305,4 g/mol-g, densidad relativa 0,93 (25 °C), de 130 cp de viscosidad a 30 °C, es un reactivo ácido, fuertemente extractor de cobre, que forma complejos del tipo quelatos con el metal. Como diluyente se empleó kermac 500-T, producto grado técnico cuya composición promedia 91 % alifáticos y nafténicos y 9 % constituyentes aromáticos.

Mediante bombas peristálticas apropiadas, la solución ácida de alimentación se hizo circular por el interior de las fibras y las soluciones orgánicas en flujo contracorriente por

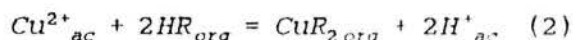
el exterior de las fibras. Muestras de ambos efluentes se tomaron a intervalos de tiempo para determinar la concentración del metal mediante espectrofotometría de absorción atómica en un equipo GBC-902.

## RESULTADOS

La velocidad promedio de transferencia de cobre  $J_M$  a través de la pared de la fibra hueca se obtuvo planteando un balance de masa en la fase acuosa, resultando:

$$J_M = - \frac{u d_i}{4 L} (C_{Cu_s} - C_{Cu_e}) \quad (1)$$

donde los subíndices "s" e "e" indican la concentración del metal a la salida y a la entrada del reactor respectivamente, "u" es la velocidad lineal de la fase acuosa,  $d_i$  el diámetro interno de la membrana y "L" su longitud. El extractante presenta una estructura que contiene un grupo oxima y otro grupo  $\text{OH}^-$  fenólico, lo que le permite actuar como ligante bidentado frente al ión  $\text{Cu(II)}$ , reaccionando de la siguiente forma:



En la Figura N°1 se presenta el efecto sobre la velocidad de transferencia del metal, del pH de la fase acuosa y el contenido del extractante en la fase orgánica. En ellas se aprecia un aumento del flujo del metal transportado con el aumento de la concentración de la salicilaldoxima en el solvente orgánico. Se aprecia además una moderada influencia del incremento del pH de la solución acuosa sobre la velocidad de extracción de cobre, efecto el cual va en aumento junto con una mayor concentración de LIX-860 en la fase orgánica en el rango de acidez sobre pH 1,5.

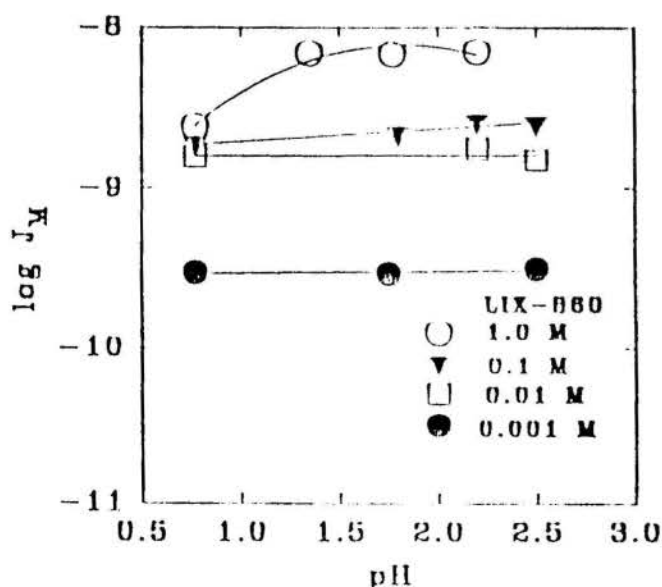


Figura 1.- Efecto de la concentración de extractante y el pH inicial de la solución de alimentación sobre el flujo de cobre

En la Figura N°2 se presenta la variación de la velocidad de transporte de cobre a través de la membrana líquida en función del tiempo de proceso, en experimentos realizados en diferentes condiciones de acidez y contenido de extractante en el solvente orgánico. Se observa que en general se requieren breves minutos para lograr condiciones de estado estacionario.

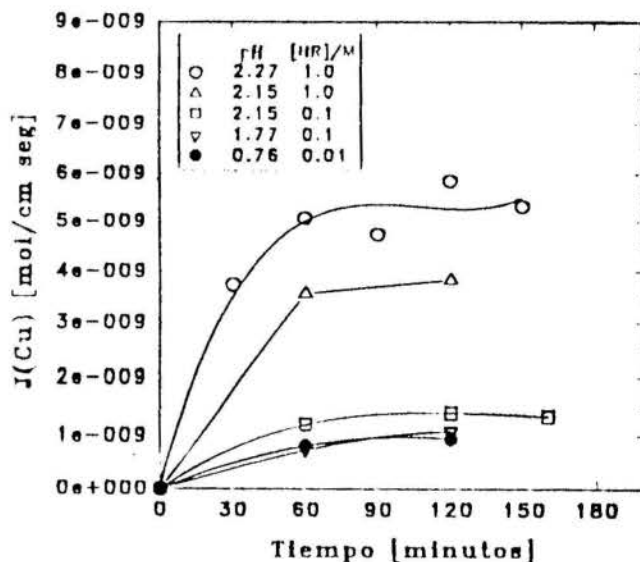


Figura 2.- Efecto del tiempo sobre el flujo de metal

## ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En la Figura N°3 se presenta un diagrama simplificado de la distribución de concentración de las especies en la membrana líquida.

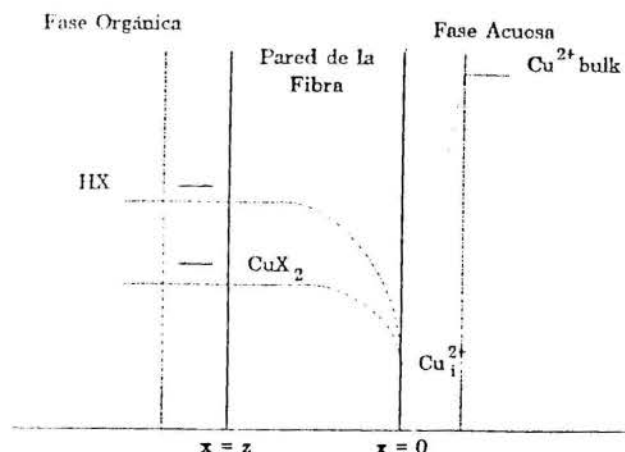


Figura 3. Perfil de concentraciones en la membrana líquida

Asumiendo que la reacción de extracción ocurre en la pared interna de la fibra hueca y que la etapa determinante del proceso es la difusión del complejo  $CuR_2$  en la membrana, es decir en la pared de la fibra hueca, se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

Ecuación básica:

$$\frac{\partial [Cu]}{\partial t} = D(Cu) \frac{\partial^2 [Cu]}{\partial x^2} \quad (3)$$

Las condiciones en la Eq.(3) son:

$$[Cu]_M = 0 \text{ en } t=0 \text{ para todo } x.$$

$$[Cu]_M = K(Cu) [Cu]_i \text{ en } x=0 \text{ para } t>0 \quad (4)$$

$$[Cu]_M = [CuR_2]_{org}, \text{ en } x=z \text{ para todo } t.$$

donde  $[Cu]_M$  es la concentración del metal en la membrana,  $K(Cu)$  la constante de equilibrio de distribución del metal en la interfase entre la fase acuosa y la membrana,  $z$  el espesor de la fibra hueca y  $D(Cu)$  el coeficiente de difusión del metal en la membrana.

Los moles de cobre transportados en el tiempo a través de la membrana,  $n(Cu)$ , se estiman según:

$$n(Cu) = A \int_0^t [-D(Cu) \frac{\partial [Cu]}{\partial x} ]_{x=z} dt \quad (5)$$

Siendo  $A$  el área de la membrana. Taga et al (1981) resuelve la Eq.(3) usando y combinando adecuadamente las Eq.(4) y Eq.(5), resultando la siguiente expresión para el transporte del metal:

$$n(Cu) = \left[ \frac{AK(Cu) [Cu]_i D(Cu)}{z} \right] \left[ t - \left( \frac{z^2}{6D(Cu)} \right) \right] \quad (6)$$

La concentración del metal en la membrana,  $[Cu]_M$ , a  $x=0$  y el correspondiente coeficiente de distribución del metal,  $D(Cu)$ , se obtuvieron de la pendiente y el intercepto de las líneas rectas de un gráfico  $n(Cu)$  vs  $t$ , al ordenar los datos experimentales según la Eq.(6).

A su vez, la velocidad de transferencia de masa en la película acuosa viene dada por:

$$J_M = k_L ( [Cu]_{bulk} - [Cu]_i ) \quad (7)$$

$$J_M = (k_{HR}/2) ( [HR]_{bulk} - [HR]_i ) \quad (8)$$

El coeficiente de transferencia de masa del metal,  $k_L$  en la Eq.(7) se estimó a partir de expresiones usuales válidas para fluidos en flujo laminar en función de los números adimensionales  $Re$  y  $Sc$  (Bennet y Myers, 1962).

El coeficiente de difusión del metal en fase acuosa requerido para la determinación de  $k_L$  se tomó de Kondo et al (1978). La difusividad del extractante se estimó empleando la correlación de Wilke-Chang. Se obtuvo un valor para  $k_L$  de  $3,56 \cdot 10^{-3}$  cm/seg. Los valores de  $k_{HR}$  resultaron entre  $4 \cdot 10^{-5}$  y  $2 \cdot 10^{-4}$  cm/seg, bastante similares a los calculados según el modelo de reacción interfacial heterogénea informado previamente (Valenzuela et al, 1994, a,b).

Usando el flujo del metal experimentalmente observado en estado estacionario (Figura N°2),  $k_L$  determinado y  $Cu_{bulk}$  conocido, se determinó la concentración del metal en la interfase  $[Cu]_i$ . Con estos valores,  $K(Cu)$  fue obtenido empleando la Eq.(4).

En la Tabla N°1 se resumen los resultados logrados de todos estos parámetros, en diferentes condiciones de experimentación. Se aprecia que los valores de  $D(Cu)$  están aproximadamente en el rango de  $10^{-6}$  cm<sup>2</sup>/seg, los que corresponden en la práctica a la difusividad del complejo en la fase orgánica en la matriz polimérica,  $D_{CuR_2}$ .

Asumiendo que la etapa controladora del proceso sería la difusión del complejo en la membrana, se procedió a recalcular los flujos del metal transportados, de acuerdo a la siguiente ecuación que representa la difusión del complejo  $CuR_2$  a través de la membrana líquida soportada:

$$J_M = \frac{D(CuR_2) \epsilon}{z \sigma} ( [CuR_2]_{i,x=0} - [CuR_2]_{i,x=z} ) \quad (9)$$

donde  $\epsilon(0,8)$  y  $\sigma(1,1)$  representan la porosidad y la tortuosidad de la fibra a considerar para efectos de estimar el área efectiva que ofrece la membrana al transporte. La diferencia de concentración del metal complejoado a ambos lados de la membrana en la práctica queda representada por  $[Cu]_M$  determinada experimentalmente a partir de la Eq.(6). Los resultados de estos flujos se presentan también en la Tabla N°1.

Además, en la Figura N°4 se presenta la comparación entre los valores de los flujos de transporte de cobre experimentales observados y los calculados según la Eq.(9). Se observa en general una buena correlación, lo que validaría el modelo difusional propuesto.

Estudios adicionales se requieren al respecto, sin embargo la información obtenida en este estudio es fundamental en la comprensión y el análisis global del proceso de transferencia del cobre en la membrana líquida de soporte sólido.

Tabla 1: Parámetros determinados en este estudio.

[Cu] <sub>bulk</sub> : 740 mg/L ; Q <sub>aq</sub> : 1.0 mL/min				
pH	HR <sub>in</sub> (mol/L)	D(CuR <sub>2</sub> ) (cm <sup>2</sup> /s)	J <sub>exp</sub> (mol/s.cm <sup>2</sup> )	J <sub>calc</sub> (mol/s.cm <sup>2</sup> )
0,76	0,01	0,53E-6	0,88E-9	0,77E-9
1,77	0,10	0,24E-6	0,91E-9	1,03E-9
2,15	0,10	0,92E-6	1,32E-9	1,05E-9
2,15	1,00	0,86E-6	3,71E-9	3,00E-9
2,27	1,00	0,41E-6	5,45E-9	4,61E-9

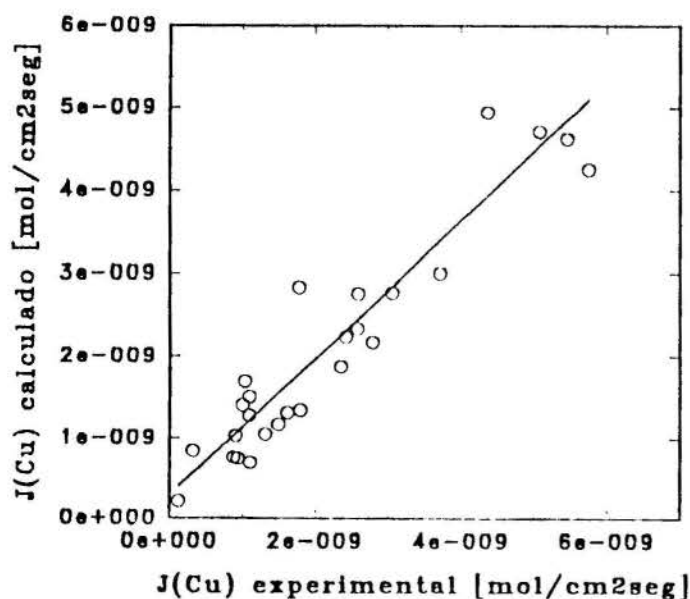


Figura 4.- Comparación entre los flujos de metal experimentalmente observados y los calculados por el modelo difusional.

**Agradecimientos:** Los autores desean expresar sus agradecimientos a **FONDECYT** por el apoyo económico brindado a este estudio a través del Proyecto N° 1940456.

#### REFERENCIAS

Bennett, C. and Myers, J., 1962, "Momentum, Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill, New York.  
 Kim, B.M., 1984, "Membrane-based solvent extraction for selective removal and recovery of metals", *J. Membrane Sci.*, Vol.21, pp. 5-  
 Kondo, K., Takahashi, S., Tsuneyuki, T., and Nakashio, F., 1978, "Solvent extraction of copper by benzoylacetone in a stirred transfer cell", *J. Chem. Eng. Japan*, Vol.11, pp. 193-197.

Matsumoto, M., Tsutsumi, Y., Kondo, K., and Nakashio, F., 1990, "Copper extraction with chelating reagent in a hollow-fiber membrane extractor", *J. Chem. Eng. Japan*, Vol.23, pp.233-235.

Melling, J., 1979, "Liquid Membrane Processes in Hydrometallurgy": a review, Warren Spring Laboratory.

Taga, J., Hashimoto, T., Sonobe, K., Ooya H. and Negishi, Y., 1981, "Extraction of copper with liquid membranes containing LIX-65N supported by hollow fibers", *Proc. 46th Meeting Soc. Chem. Eng. Japan*, pp.712.

Valenzuela, F., Nakashio, F. and Kondo, K., 1994a, "Extraction kinetics of copper with 8-OSAQ in a membrane extractor using a hollow fiber", *J. Lat. Applied Res.*, Vol. 24, pp. 33-39.

Valenzuela, F. and Basualto, C., 1994b, "Stripping kinetics of a copper chelate complex with hydrochloric acid in a hollow-fiber membrane extractor", *J. Lat. Applied Res.*, Vol.24, pp. 175-179.

Valenzuela, F., Basualto, C., Sapag, J., Tapia, C. y Verdugo, R., 1996a, "Modelo difusional de extracción de cobre por solventes sobre membranas líquidas de soporte sólido del tipo hollow fibers aplicado a aguas de minas", *Bol. Soc. Chil. Quim.*, Vol.41, pp.57-63.

Valenzuela, F., Basualto, C., Tapia, C., Sapag, J. and Paratori, C., 1996b, "Recovery of copper from leaching residual solutions by means of a hollow-fiber membrane extractor", *Minerals Engineering*, Vol.9, pp.15-22.

#### ABSTRACT

The transport of copper from acid leach residual solutions of chilean molybdenite concentrate by solvent extraction in a membrane extractor using a hollow fiber as solid support has been studied. LIX-860, a salicylaldoxime was used as carrier. The flux of metal was highly influenced by the extractant concentration and slightly by the pH of feed solution.

The experimental results were analyzed by a diffusion model which considers extraction chemical reaction would occur at inner interface of liquid membrane and assumes that diffusion of copper-extractant complex through the membrane would be the rate-controlling step. A good agreement was observed between the experimental results of flux and the calculated ones by use of this diffusional transport model.





FACILITATED TRANSPORT OF PROPYLENE IN SUPPORTED LIQUID MEMBRANES



Adolfo Acosta,<sup>1</sup> Juan Cesco<sup>1,2</sup> and José Marchese<sup>1,2</sup>  
<sup>1</sup> Depto de Química. Facultad de Qca. Bioqca. y Farmacia. UNSL - CONICET  
<sup>2</sup> Centro Regional de Estudios Avanzados  
 Chacabuco y Pedernera -C.C.256- 5700 - San Luis- Argentina

ABSTRACT

The purpose of this work was to carry out a mathematical and experimental investigation of propylene facilitated transport. The differential equations describing facilitated transport are presented and a generally applicable numerical solution is summarized. The experimental investigation consisted of the steady state rate of transport of propylene through thin films of Ag(I) ion solutions. The effect of Ag(I) ion concentration and olefin pressure on propylene transport has been analyzed. The experimental results were fitted by using a film theory with chemical reaction model.

INTRODUCTION

Performing separation processes with membranes has been an active field of research and development and over the years there has been many attempts to develop semipermeable membranes for separation processes.

Although several polymers such as silicone rubber and polysulfone are useful membrane materials, in general polymeric material are not desirable as semipermeable membranes as they are relatively impermeable to all gases and liquids. Several years ago, Robb et al. considered liquids as potential membrane materials, and based on this concept a highly effective immobilized liquid membrane for carbon dioxide removal from a life supporting environment was developed by Ward y Robb (1967). During this work it was found that it was possible to increase chemically the transport of carbon dioxide across the liquid film. This phenomenon known as facilitated transport, was first observed by Scholander (1960) and Wittenberg (1966) in the steady state diffusion of oxygen across thin films of aqueous hemoglobin solutions.

Facilitated transport is a process whereby the permeation of a solute across a membrane is chemically augmented. The system selected for the present experimental investigation was propylene in silver nitrate solution. The objective of the experimental investigation was to measure the steady state rate of transport of propylene through thin films of silver nitrate solutions and to measure independently the values of the system parameters, namely the solubility of propylene in silver nitrate solutions and the equilibrium constant of propylene-Ag formation.

A method of finite differences to obtain numerical solutions to the equations which describe the steady state diffusion of propylene has been used.

Mathematical Treatment of Facilitated Transport The system under study is shown in Figure 1 and it is formed by a supported liquid membrane (SLM) and two gaseous phases. The SLM is made by supporting a aqueous film containing the carrier, Ag ion (B), on a microporous membrane. The gaseous phase is propylene (A) to be transported

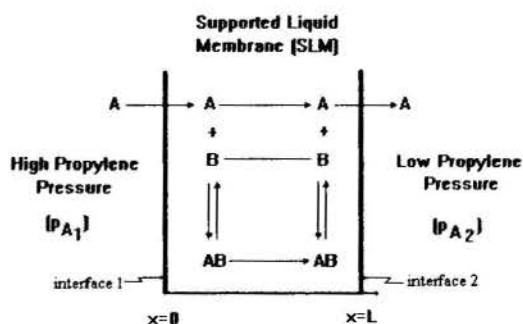
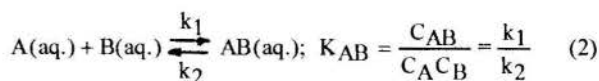


Figure 1- Representation of the Facilitated Transport of Propylene

The equations which describe the propylene solubility in the aqueous solution and the chemical reactions with Ag ion at the gas-liquid interface are:



where AB is the coordination complex propylene-Ag;  $K_A$  and  $K_{AB}$  are the solubility and complexations constants respectively; C is the molar concentration in the aqueous phase;  $P_A$  is the partial pressure of A.

The solubility and chemical reaction are represented in Figure 1, in which the transport direction (x) of each species are indicated with single arrows. In our analysis we consider an aqueous film of thickness L, containing a nonvolatile carrier B, across which propylene, A, is diffusing, a reversible reaction between A and carrier B occurs according to Eq. (2). If we assume dilute solutions with no bulk flow, the steady state, one-dimensional, diffusion-reaction equations are:

$$D_A \frac{d^2 C_A}{dx^2} = D_B \frac{d^2 C_B}{dx^2} = -D_{AB} \frac{d^2 C_{AB}}{dx^2} = r \quad (3)$$

where  $D_i$  is the diffusion coefficient of specie  $i$  ( $i = A, AB, B$ ), and  $r$  the reaction rate given by:

$$r = k_1 C_A C_B - k_2 C_{AB} \quad (4)$$

in which  $k_1$  and  $k_2$  are the kinetic coefficients of AB formation and decomposition, respectively.

The boundary conditions applicable are based on the assumption that the concentration of species A is known at the two boundaries and that the species B and AB do not leave the physical boundaries of the film, Thus:

$$\text{at } x=0, \quad C_A = C_{A_0}; \quad \frac{dC_B}{dx} = \frac{dC_{AB}}{dx} = 0 \quad (5)$$

$$\text{at } x=L, \quad C_A = C_{A_L}; \quad \frac{dC_B}{dx} = \frac{dC_{AB}}{dx} = 0$$

At this point we shall simplify the problem assuming  $D_{AB} = D_B$ , which is reasonable because the carrier molecule is much larger than the dissolved gas molecule with which it combines. As a consequence

$$C_B + C_{AB} = C_B^0 \quad (6)$$

where the total carrier concentration is constant at any point of the liquid film and is equal to the carrier concentration charged to the liquid film ( $C_B^0$ )

Equation (6) defines  $C_B$  as function of  $C_{AB}$ , reducing by one number of dependent variables. Therefore combining equations (3), (4) and (6), gives:

$$D_A \frac{d^2 C_A}{dx^2} = k_1 C_A C_{B_0} - k_1 C_A C_{AB} - \frac{k_1}{K_{AB}} C_{AB} \quad (7)$$

$$D_{AB} \frac{d^2 C_{AB}}{dx^2} = -k_1 C_A C_{B_0} + k_1 C_A C_{AB} + \frac{k_1}{K_{AB}} C_{AB} \quad (8)$$

In the final analysis, the quantity desired is the net molar flux of A,  $N_A^T$ . There is a closed solution to equation (7) and (8) from which  $N_A^T$  can be calculated. In this case, it is useful to proceed by adding both equation to give

$$D_A \frac{d^2 C_A}{dx^2} + D_{AB} \frac{d^2 C_{AB}}{dx^2} = 0 \quad (9)$$

The first integration of Eq. (9) results in a constant value at any point of the membrane and equal to  $N_A^T$ ,

$$-D_A \frac{dC_A}{dx} - D_{AB} \frac{dC_{AB}}{dx} = \alpha_1 = N_A^T \quad (10)$$

As AB is considered as a trapped species,  $N_A^T$  can be expressed by

$$N_A^T = -D_A \frac{dC_A}{dx} \Big|_{x=0} = -D_A \frac{dC_A}{dx} \Big|_{x=L} \quad (11)$$

In the facilitated transport system, where the complexation takes place inside the membrane, a basic parameter of interest is the facilitation factor,  $F$ , is defined as the facilitated propylene flux divided by the flux of propylene in absence of the carrier, then

$$F = \frac{N_A^T}{N_{A_0}} = \frac{-D_A \frac{dC_A}{dx} \Big|_{x=0}}{D_A \frac{C_{A_0} - C_{A_L}}{L}} \quad (12)$$

**Numerical Method** It is well known that, in order to solve numerically system Eqs. (3-5), it can be reduced to a second order differential equation for  $C_A$ . In addition, from (9), it follows that  $C_A = -(D_A/D_{AB}) C_{AB} + (1/D_{AB})(R_1 x + R_0)$  where  $R_1$  and  $R_0$  are two unknown numbers. One of the main issues in this approach is the estimation of these numbers. We use the method of finite differences.

## EXPERIMENTAL

**Solubility Measurements** A large number of complexes formed by Ag ions in the olefins in solution are known in the literature, Berverwijk (1970) and Van der Kerk (1969). Unfortunately very little about the solubility and argentation constants as a function of silver solution concentration is reported. To evaluate  $K_A$  and  $K_{AB}$  a solubility device showed in Figure 2 was used. Propylene is stored with a predetermine pressure in chamber A, and a certain volume (10 ml) of water solution with  $\text{NaNO}_3$  or  $\text{AgNO}_3$  was placed in cell B.

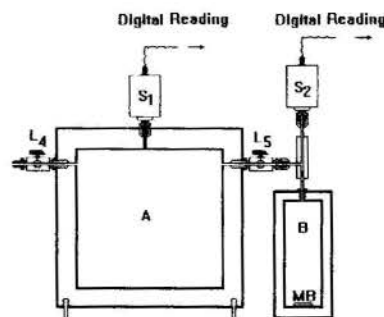


Figure 2- Solubility device: A, gas chamber; B, solubility cell

Propylene was allowed to come in the cell B through valve  $L_5$ . The aqueous solutions was stirred with magnetic bar (MB) until the equilibrium was reached. The chamber and cell pressures were measured with absolute transducers  $S_1$  and  $S_2$ , respectively

For each experimental run the gas pressure was varied between 1 to 6 atm. The amount of absorbed gas at equilibrium was calculated by means of:

$$n_A^j = [p_j - p_{ej}] \frac{V_2}{RT} + n_A^{j-1} \quad (13)$$

where  $n_A^j$  are the moles of gas absorbed in the step  $j$ ;  $p_j$  and  $p_{ej}$  the total and equilibrium pressures respectively,  $V_2$  free volume [cell volume ( $V_B$ ) - liquid volume ( $V_L$ )];  $n_A^{j-1}$  moles of gas absorbed in previous step ( $j-1$ ).

The molar concentration of dissolved propylene,  $C_{AT}$ , at a equilibrium pressure ( $p_A$ ) is evaluated by :

$$C_{AT} = \frac{n_A^j \times 10^3}{V_L} \quad (14)$$

**Transport Measurement SLM preparation:** The aqueous silver nitrate phase forming the liquid membrane was immobilized within the pores of microporous cellulose nitrate support. Filling the pores of these support membranes with the carrier agent was accomplished by immersing the membrane in the aqueous phase. The aqueous silver solutions were prepared with 20% (v/v) of hydrogen peroxide and 10% (v/v) of glycerol. The prepared SLM was placed in the cell (C), resulting in a cross sectional area of  $A = 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ .

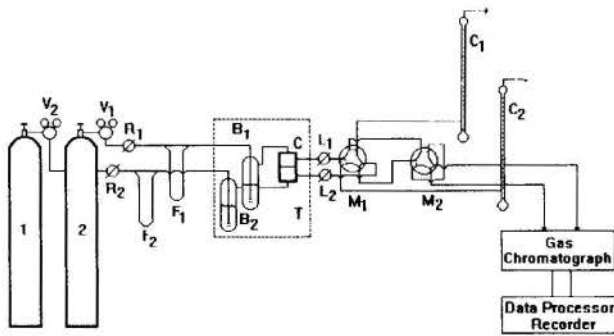


Figure 3-Schematic Representation of Permeability Equipment. (1) and (2) gas propylene and gas carrier ( $N_2$ ) cylinders; ( $V_1$ ,  $V_2$ ) gas regulator; ( $R_1$ ,  $R_2$ ) pressure regulators; ( $B_1$ ,  $B_2$ ) distilled water bubblers; ( $C_1$ ,  $C_2$ ) bubble flow meters; (C) permeation cell; ( $M_1$ ,  $M_2$ ) sampler valves

The propylene concentration in the feed and permeate side was determined by gas chromatography with a Shimadzu GC-3BT device.

#### INTERPRETATION OF EXPERIMENTAL RESULTS

**Solubility Constant,  $K_A$ .** To observe the effect of the ionic strength of the medium on propylene absorption, experimental tests of propylene solubility in aqueous solutions of  $NaNO_3$  ( $C_{Na} = 1; 0.5; 0.25 \text{ M}$ ) have been made. The results, expressed as molar concentration of propylene solubilized ( $C_A$ ) versus the equilibrium pressure ( $p_A$ ), are plotted in Figure 4

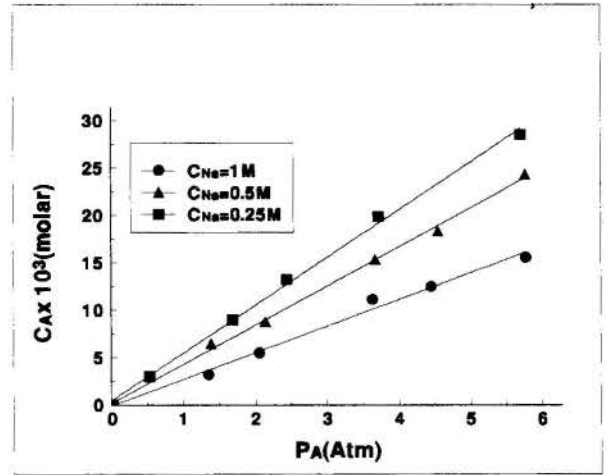
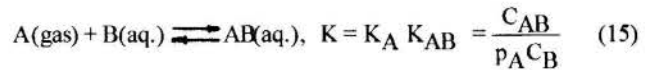


Figure 4- Solubility of propylene in  $NaNO_3$  Temperature: 308 K

The  $K_A$  values were obtained from the slopes, assuming that the Henry's law is fulfilled. The results are listed in Table 1. It should be noted that the solubility constant decrease with the increasing ionic strength.

**Complexation Constant Evaluation,  $K_{AB}$ :** In order to evaluate the argentation equilibrium constant, the solubility of propylene in aqueous silver nitrate (1- 0.5- 0.25 M) were determined. The argentation reaction can be expressed combining Equations (1) and (2), as follow:



Introducing Eq. (6) in Eq. (15) and rearranging (assuming that  $C_{AT} \cong C_{AB}$ ), gives:

$$\frac{1}{C_{AT}} \cong \frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_B^0} + \frac{1}{C_B^0 K} \frac{1}{P_A} \quad (16)$$

The  $1/C_{AT}$  values plotted against  $1/P_A$ . In all cases linear relations were observed, which were used to evaluate the  $K$  constants from the slopes. Figure 5 shows these experimental results and  $K$  and  $K_{AB}$  values are tabulated in Table 1

Table 1- Solubility, Argentation and Diffutivity parameters at  $T = 308 \text{ K}$

$C_B^0$ (M)	$K_A \times 10^5$ (mole /m <sup>3</sup> Pa)	$K \times 10^6$ (Pa <sup>-1</sup> )	$K_{AB} \times 10^2$ (m <sup>3</sup> /mole)	$D_A \times 10^{10}$ (m <sup>2</sup> /s)	$D_{AB} \times 10^{10}$ (m <sup>2</sup> /s)
1	2.76	1.35			
0.5	4.07	1.99	4.891	1.55	8.19
0.25	4.96	2.42			

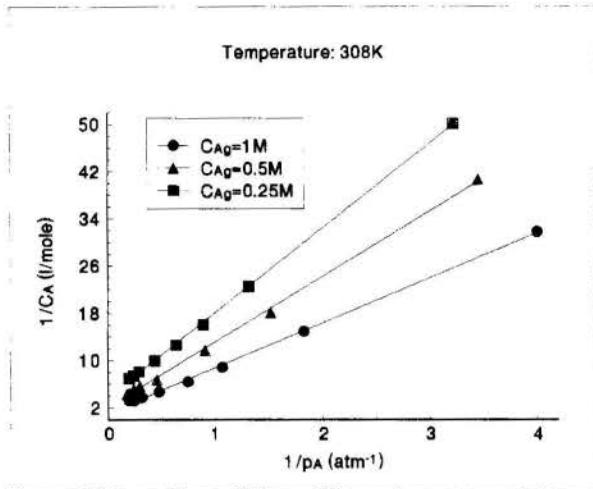


Figure 5- Equilibrium concentration of AB as a function of propylene pressure and carrier concentration

Diffusion Coefficients  $D_A, D_{AB}$ . The diffusion coefficients were estimate from the Stokes-Einstein equation:

$$D_i = \frac{kT}{6 \Pi r \mu} \quad (17)$$

where  $k$  is the Boltzmann constant;  $T$  is the absolute temperature;  $r$  is the molecular radius of the  $i$  species; and  $\mu$  is the viscosity of the aqueous phase. The results are presented in Table 1.

Facilitated Transport Interpretation. In the steady state the propylene flux is constant throughout the SLM and equal the propylene molar flux density ( $N_A^T$ ). A material balance for the propylene in the permeation cell gives

$$N_A^T = \frac{F_{v2} C_{A2}}{A} \quad (18)$$

where  $F_{v2}$  is the carrier volumetric flow and  $C_{A2} = K_A p_{A2}$  is the molar concentration of propylene at interface 2 of the SLM. The experimental results for different operational conditions are listed in Table 2, in which  $C_{Ag}^0 = C_B^0$  is the carrier concentration charged to SLM and  $p_{A1}$  the pressure in the feed side of the permeation cell.

The propylene flux in absence of the carrier,  $N_{A0}$ , was calculated by

$$N_{A0} = \frac{D_A (C_{A1} - C_{A2})}{L} \quad (19)$$

where  $C_{A1} = K_A p_{A1}$  is the propylene molar concentration at interface 1 of the SLM. The  $N_{A0}$  values evaluated are reported in Table 2.

Equations (7) and (8) were solved by the method of finite differences. By combining it with an appropriate use of the boundary conditions Eq. (5) we get a rather stable method of determining an approximation of the function  $C_A$ . The method was implemented in GAUSS 3 vmi. Computations were made by taking 150 points during the discretization step.

Table 2- Molar Flux Densities of Propylene from Experimental Data

$C_{Ag}^0$ (M)	$p_{A1}$ (atm)	$C_{A2} \times 10^5$ (M)	$N_{A0} \times 10^{12}$ (mole/m <sup>2</sup> s)	$N_A^T \times 10^{12}$ (mole/m <sup>2</sup> s)
1	0.921	1.68	0.33	2.47
	2.85	6.16	1.02	7.50
	4.79	9.24	1.72	12.15
	6.72	13.16	2.41	15.52
0.5	0.916	3.296	0.48	2.16
	2.85	10.71	1.50	7.21
	4.68	17.72	2.47	11.38
0.25	6.20	25.54	3.33	12.15
	0.921	4.52	0.60	1.85
	2.85	7.04	1.84	5.01
0.25	4.79	10.56	3.10	8.15
	6.72	13.58	4.35	10.65

In the solutions of Eq. (7) and (8)  $D_A, D_{AB}, K_{AB}$  values from Table 1 and  $k_1 = 2.5 \times 10^4$  were used. The concentration profiles obtained for  $C_B^0 = 0.5$  M and  $p_{A1} = 2.85$  atm are showed in Figure 6

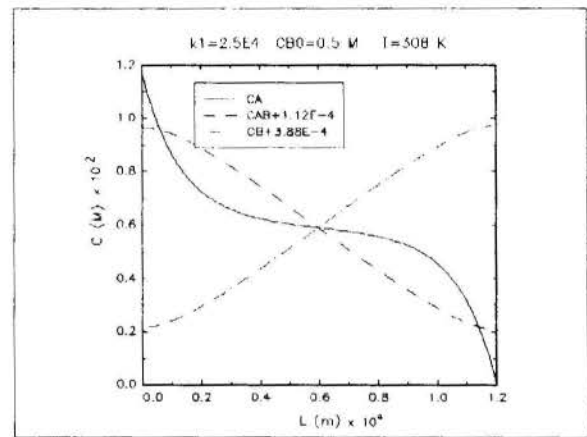


Figure 6- Typical predicted concentration profiles for SLM thickness  $L = 1,2 \times 10^{-4}$  m and  $p_{A1} = 2.85$  atm

The theoretical molar flux density of propylene was calculate with Eq (11) and is shown as dotted lines in Figure (7)

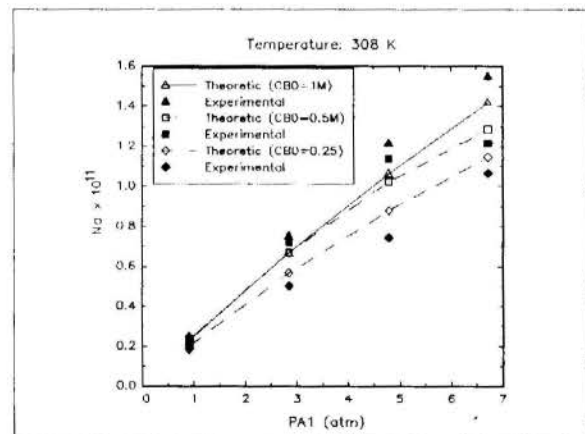


Figure 7- Molar flux density of propylene as a function of carrier concentration and the upstream propylene pressure

Figure (8) compares the predicted facilitation factor (Eq. 12) with experimental results. Figure (8) indicates the decrease in the extent of facilitation as a function of both the increasing upstream pressure and diminution of the carrier concentration.

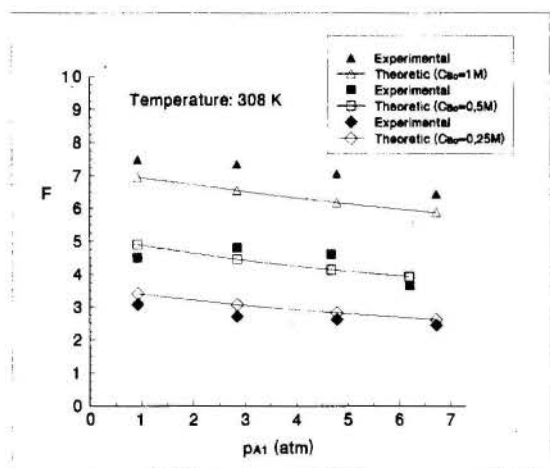


Figure 8- Facilitation versus  $p_{A1}$  on the high propylene side of the layer. Compares the theoretical predictions with the experimental results

#### CONCLUSIONS

The transport behavior of propylene gas across a supported liquid membrane containing silver ion as carrier was studied. The effect of propylene pressure and carrier concentration on facilitation propylene flux is investigated.

Permeation experiences showed a net transport of propylene through the SLM. The carrier concentration have a marked effect on propylene facilitation while the feed propylene pressure does not. With increasing concentration of the agent in the liquid membrane the facilitation increase. When the upstream pressure is augmented the facilitation gently decrease indicating that, in the range of upstream pressure studied, the carrier is saturated throughout the membrane, preventing any significant facilitation.

The propylene facilitated transports by silver ion was fitted to an analytical diffusion-reaction model. The experimental results compare well with the non-equilibrium model predictions.

#### REFERENCES

- Berverwijk, C.D.M., Van der Kerk G.J.M., Leusink A.J. and Noltes, J.G., 1970, "Organosilver Chemistry" *Organometallic Chemistry Reviews A*. Elsevier Sequoia S.A., Lausanne pp. 215-280
- Robb W.L. et al, U.S. Patent 3,335,545
- Scholander, P.F., 1960, "Oxygen Transport Through Hemoglobin Solutions", *Science* Vol 131, pp 585
- Ward, W.J. and Robb, W.L., 1967, "Carbon Dioxide-Oxygen Separation: Facilitated Transport of Carbon Dioxide Across a Liquid Film" *Science* vol 156 pp 1481
- Wittenberg, J. B. "The Molecular Mechanism of Hemoglobin-Facilitated Oxygen Diffusion", 1966, *Journal Biological Chemistry* vol 241 pp 104.





## TRANSPORTE Y SEPARACION DE NIOBIO(V) Y TANTALIO (V) CON MEMBRANAS LIQUIDAS SOPORTADAS

Mercedes Campderrós<sup>1</sup>, Adolfo Acosta<sup>1</sup> y José Marchese<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Depto de Química, Facultad de Qca. Bioqca. y Farmacia, UNSL - CONICET

<sup>2</sup> Centro Regional de Estudios Avanzados

Chacabuco y Pedernera - C.C.256- 5700 - San Luis- Argentina



### RESUMEN

En este trabajo se investiga la transferencia y separación de Nb(V) y Ta (V) en medio clorhídrico a través de una membrana líquida soportada conteniendo Tributyl fosfato como agente complejante. Se realizaron experiencias de partición líquido-líquido para evaluar las condiciones experimentales de las fases acuosas a ambos lados de la membrana. Las experiencias de transporte se realizaron con una celda de permeación. La concentración de ácido clorhídrico tiene un marcado efecto sobre el transporte de Nb. Con el aumento de la concentración de HCl el transporte de Nb aumenta y se obtiene un máximo entre 6-8M. El transporte de Ta fue escaso en las condiciones experimentales ensayadas, por lo que se logra una separación selectiva del Nb.

### INTRODUCCION

El niobio y el tantalio son elementos escasos, su contenido en la corteza terrestre es de aproximadamente  $1 \times 10^{-3}$  y  $2 \times 10^{-4}$  %p/p. Se los encuentra juntos naturalmente, en muchos minerales que los contienen se hallan como principales constituyentes, pero en los restantes se encuentran como impurezas. En la tecnología moderna son muy importantes debido a sus propiedades físico-químicas que los hacen elementos muy versátiles. El niobio es usado en aleaciones resistentes al calor y superconductoras, y como material de construcción en energía nuclear. El tantalio es usado para la construcción de recipientes para tratamiento químico de combustible nuclear, en aleaciones de aparatos resistentes a la corrosión en la industria química, entre otros, (Gibalo, 1970).

Los principales métodos que han sido probados en el tratamiento de sus minerales pueden ser divididos en cuatro grupos, (Gupta and Jena, 1965): fusión con hidróxidos alcalinos o carbonato; tratamiento con flujos ácidos; digestión con mezclas de ácidos; y cloración (Ruiz et al. 1993). Posteriormente son purificados, siendo la extracción con solventes una de las técnicas más empleada (Carlson and Nielsen, 1960 and Deorkar and Khopkar, 1991).

Dentro de los procesos separativos, las membranas líquidas soportadas han comenzado a jugar un rol atractivo. Su eficiencia y ventajas económicas las destacan como óptima solución de algunos problemas de la ciencia y la tecnología, tal como la recuperación de metales preciosos, eliminación de productos tóxicos de aguas contaminadas, etc, (Campderrós and Marchese, 1994; Moreno et al., 1993).

En este trabajo se estudia la transferencia y separación de los iones niobio (V) y tantalio (V) por un mecanismo de transporte facilitado, en medio clorhídrico a través de una membrana líquida soportada (M.L.S). La M.L.S está formada por Tri-butyl fosfato (TBP) como agente carrier, impregnado en un soporte polimérico microporoso de teflón.

Se investigó el efecto de la concentración de ácido clorhídrico en ambos lados de la membrana sobre el transporte de las especies metálicas.

### PARTE EXPERIMENTAL

Preparación de la M.L.S. La fase orgánica de la membrana líquida fue el tributyl fosfato (TBP). Este compuesto actúa a su vez como agente transportador de tipo solvatante, de difundido uso en procesos de extracción son solventes. El TBP es introducido en el soporte polimérico por capilaridad

La membrana soporte fue una banda comercial de teflón hidrofóbico. Sus características estructurales fueron experimentalmente determinadas: espesor de la membrana,  $l = 33.4 \mu\text{m}$  medido con un micrómetro, porosidad aproximada,  $\epsilon = 89\%$  determinada por pesada, tamaño nominal de poro = 0.895 evaluada mediante permeabilidades de gases. Los valores obtenidos concuerdan con otras membranas de teflón microporosas típicas.

Reactivos. Fase Acuosa. Las soluciones acuosas de niobio se obtuvieron a partir de soluciones patrones preparadas fundiendo aproximadamente 50 mg de  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  químicamente puro con un gramo de piro-sulfato de potasio en cápsula de platino, tomando el fundido con ácido clorhídrico concentrado. Las soluciones acuosas de tantalio se prepararon fundiendo 35 mg de  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  con un gramo de piro-sulfato, se adicionan 5 ml de ácido tartárico se lleva a ebullición y luego se toma con HCl (c).

La concentración de los iones fue determinada en fase acuosa, en medio HCl 11 M, donde el Nb forma un complejo con un máximo de absorción a 281 m $\mu$  y Ta presenta su máximo a 220 m $\mu$  (Alimarin et al., 1962). Las medidas se realizaron con un espectrofotómetro doble haz Shimadzu (UV-150). Las soluciones obtenidas resultaron muy estables y obedecen la Ley de Beer en el rango de concentración entre 0.8 y 12  $\mu\text{g}$  de  $\text{Me}_2\text{O}_5/\text{ml}$ .

Partición Líquido-Líquido. a) Extracción: Se realizaron experiencias contactando iguales volúmenes de fase orgánica (TBP) y acuosa, soluciones puras de Nb(V) y Ta(V) a diferentes concentraciones de HCl, en el rango entre 1 y 10 M. Las soluciones se agitaron durante 10 minutos y se dejaron en reposo 2 hr. en baño termostático a 25 °C para que el sistema alcance el equilibrio.



b) *Contraextracción*: Se realizaron una serie de experiencias con la fase orgánica "cargada" con cada ión, equilibrándola con soluciones acuosas de HCl en concentraciones entre 1 y 7 M.

Medidas de Transporte. El equipo empleado en los estudios de permeabilidad se muestra en la Fig. 1. La celda está formada por dos hemiceldas, ambas con entrada y salida de soluciones, de tal manera que puede operar con flujo continuo. Todas las experiencias de permeación se llevaron a cabo con un flujo de alimentación de  $(5 \pm 0.02) \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$  impulsado por una bomba peristáltica. La celda está recubierta por una camisa del mismo material por la que circula agua termostatazada a  $298 \pm 0.5 \text{ K}$ . Las soluciones fueron mecánicamente agitadas a 100 rpm, por medio de motores sincrónicos.

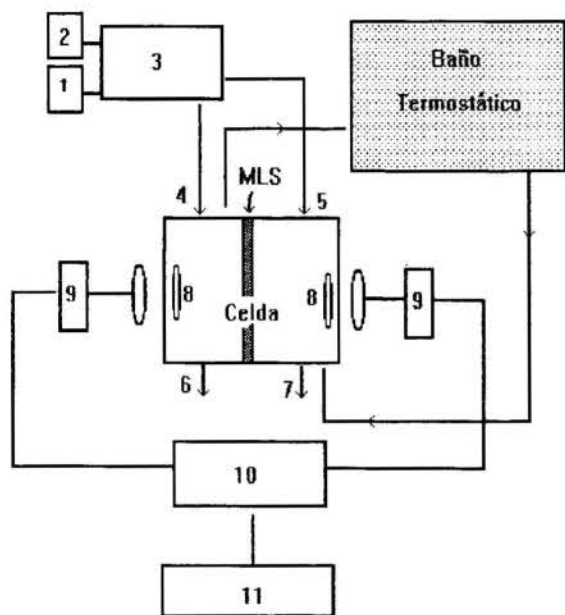


Figura 1: Esquema del equipo experimental empleado (1) Soluc. Donora, (2) Soluc. Aceptora, (3) Bomba Peristáltica, (4) Alimentac. Sol. Donora, (5) Alimentac. Sol. Aceptora, (6) Salida Sol. Donora, (7) Salida Sol. Aceptora, (8) Barras Magnéticas, (9) Motor, (10) Sincronizador, (11) Fuente de Poder.

La densidad de flujo molar de los iones metálicos,  $N_{\text{Me}}$ , se calculó en condiciones estacionarias de acuerdo a:

$$N_{\text{Me}} = \frac{F_{v2} ([\text{Me}]_{e2} - [\text{Me}]_{s2})}{A} \quad (1)$$

donde  $F_{v2}$  es el flujo volumétrico de la solución aceptora;  $[\text{Me}]_{e2}$ ,  $[\text{Me}]_{s2}$  las concentraciones de metal a la entrada y salida de la solución aceptora, y  $A$  es el área transversal de membrana. Los balances de masa cerraron con un error relativo de  $\pm 10\%$ .

## RESULTADOS Y DISCUSION

Extracción y Contra Extracción Líquido-Líquido. Los resultados se encuentran en las Figuras 2 y 3 para niobio y

tantalio respectivamente, donde el porcentaje de extracción, (%E) y el porcentaje recuperado de la fase orgánica, (%R), se calcularon de acuerdo a:

$$\%E = \frac{[\text{Me}]_{\text{org}}}{[\text{Me}]_{\text{org}} + [\text{Me}]_{\text{ac}}} \times 100 \quad (2)$$

$$\%R = \frac{[\text{Me}]_{\text{ac}}}{[\text{Me}]_{\text{org}} + [\text{Me}]_{\text{ac}}} \times 100 \quad (3)$$

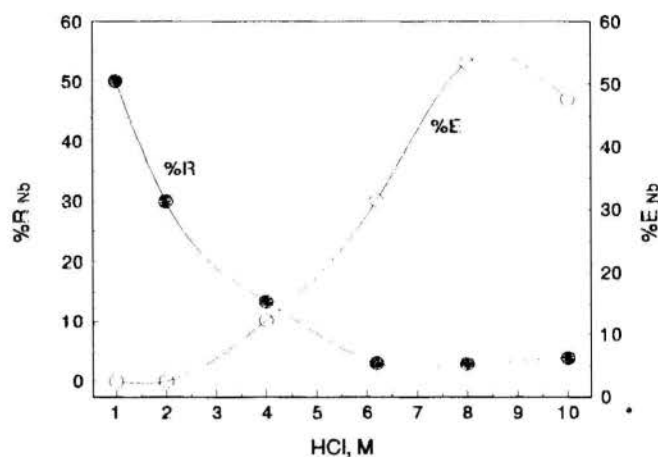


Figura 2. Extracción y contra-extracción del ion Nb(V) en función de la concentración de HCl ( $T=298 \text{ K}$ )

Los resultados obtenidos en la Fig. 2 mostraron que el ión Nb(V), presenta un máximo de extracción por encima de 7 M de HCl, con un porcentaje de extracción superior al 50%. Por otro lado el Nb es recuperado con eficiencia en concentraciones próximas a HCl 1 M. Por debajo de esta concentración ácida se produce la hidrólisis de ambos iones, con formación de precipitados de tipo coloidal.

Estos resultados están en concordancia con la bibliografía, (Gibalo, 1970), que indica la formación de los siguientes complejos del ión Nb(V) dependiendo de la  $[\text{HCl}]$ :

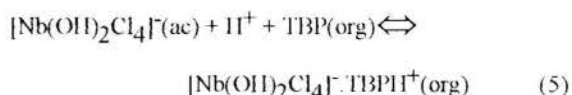
- entre 4 - 6,5 M, predomina el complejo neutro:  $[\text{Nb}(\text{OH})_2\text{Cl}_3]$
- entre 6- 8 M, predomina el complejo aniónico:  $[\text{Nb}(\text{OH})_2\text{Cl}_4]^-$
- por encima de 8 M, predomina  $[\text{HNbOCl}_3]^+$

De acuerdo con la formación de estos complejos para Nb, se postulan los siguientes posibles mecanismos de reacción por los que el ión puede ser extraído en fase orgánica por el TBP:

a) Formación de un aducto con el complejo neutro:



b) Formación de una asociación iónica con el complejo aniónico:



La reacción (5) se produce dado que el TBP en medio ácido fuerte actúa como base de Lewis.

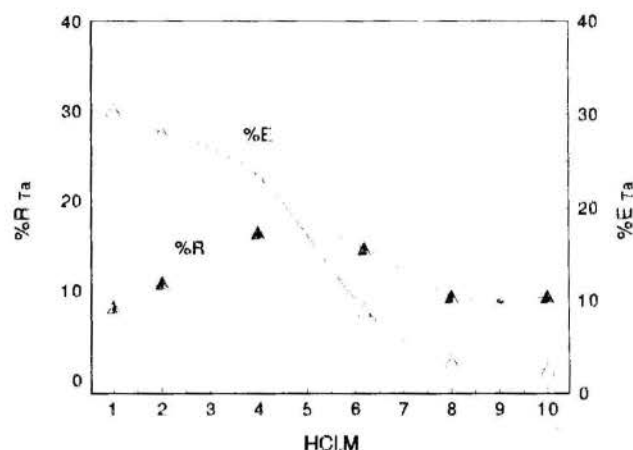


Figura 3. Extracción y contra-extracción del ion Ta(V) en función de la concentración de HCl (T=298 K)

En la Fig. 3 el ión Ta(V), que es un ión menos reactivo y con poca tendencia a formar complejos clorurados, presenta un máximo de aproximadamente 30 % de extracción en concentraciones clorhídricas bajas, aunque éstas soluciones presentan una ligera turbidez, debido a la formación de hidróxidos coloidales.

Experiencias de Permeación. Separación Nb-Ta en la M.L.S. Se realizaron experiencias de permeación a fin de determinar el grado de transporte de las especies investigadas y la eficiencia del sistema en la separación Nb-Ta en función de la concentración de HCl en la fase acuosa de alimentación. Los datos de partición líquido-líquido fueron tomados como base para llevar a cabo estas experiencias.

En todas las corridas experimentales la alimentación en lado 1 de la membrana consistió en una mezcla Nb(V)-Ta(V) de aproximadamente 15 ppm de cada uno de los iones a diferentes concentraciones de HCl, la alimentación en el lado 2 de la membrana fue HCl 1M. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 4.

La transferencia del ion Nb(V) con TBP a través de la M.L.S, presenta un máximo para [HCl] aproximadamente entre 6 y 8 M, mientras que Ta(V) no es prácticamente transportado en el rango experimental analizado.

De acuerdo a estos resultados y las experiencias de partición líquido-líquido las ecuaciones químicas que representarían la extracción del Nb(V) en la interfase 1, son: a) la formación de una asociación iónica con el complejo aniónico de Nb de acuerdo a la ec. (5), y la formación de un aducto con el complejo neutro de niobio, ec. (4). El mecanismo de transporte a través de la M.L.S postulado es el que se representa en la Figura 5:

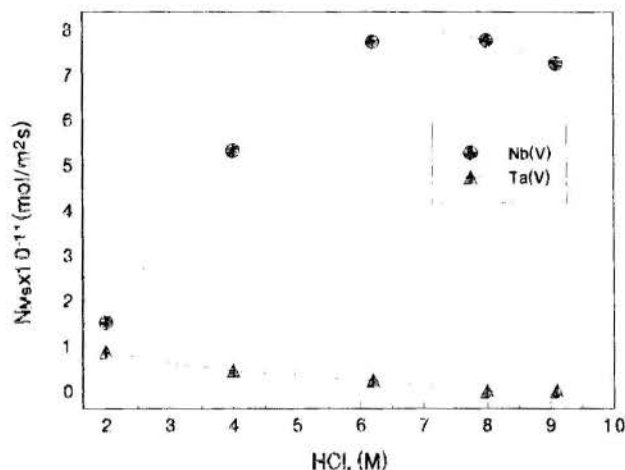


Figura 4. Densidad de flujo molar de Nb y Ta en función de la concentración de ácido clorhídrico, empleando TBP como agente carrier en la M.L.S.

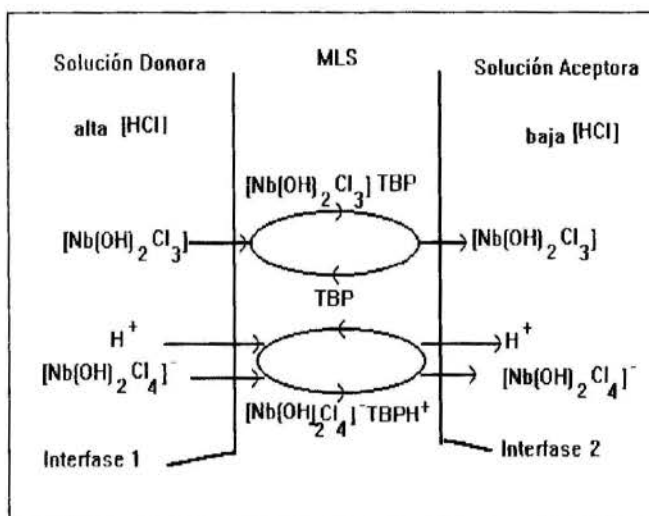


Figura 5. Representación esquemática del transporte facilitado del ion Nb(V) a través de la M.L.S.

## CONCLUSIONES

Se realizó un estudio experimental de la extracción y contra extracción líquido-líquido de los iones Nb(V) y Ta(V). Niobio fue extraído en fase orgánica por formación de diferentes complejos con el agente empleado TBP.

Las experiencias de permeación mostraron un transporte neto de Nb(V) a través de la M.L.S. Se encontró que la concentración de ácido clorhídrico en la solución donora tiene un marcado efecto sobre la transferencia de Nb(V) a través de la M.L.S. Con un aumento de la concentración de ácido clorhídrico el transporte de niobio aumenta obteniéndose un máximo para concentración entre 6 y 8 M de HCl. El transporte de tantalio fue despreciable en el rango de condiciones experimentales

estudiadas, por lo que se puede lograr una eficiente separación del ión Nb(V) con respecto al ión Ta (V).

#### REFERENCIAS

Alimarin, I.P., Gibalo, I.M. and Ch'in, K-L., 1962, "The determination of niobium by the differential spectrophotometric method", *Zh. Analit. Khim*, 17, pp 60-64.

Campderrós, M.E. and Marchese, J., 1994, "Membrane transport of cobalt, copper and nickel with trioctylamine", *Ind. J. Chem Tech*, 1, pp. 35-39.

Carlson, C.W. and Nielsen, R.H., 1960, "Pure Columbium and Tantalum oxides by liquid-liquid extraction", *J. Metals*, 6, pp. 472-475.

Deokar, N.V. and Khopkar, S.M., 1991, "Separation of niobium from chloride media by solvent extraction with dicyclohexyl-18-crown-6". *Analyst*, 116, pp. 961-963.

Gibalo, I. M., 1970, "General Information on Niobium and Tantalum and Separation of Niobium from Tantalum". In *Analytical Chemistry of Niobium and Tantalum*, Ed. Arbor-Humphrey Publishers, London, pp. 1-5 and pp. 131-133.

Gupta, C.K. and Jena, P.K., 1965, "Extractive metallurgy of niobium and tantalum", *Trans. of the In. Ins. of Metals*, 6, pp. 89-99.

Moreno, C., Hrdlicka, A. and Valiente, M., 1993, "Permeation of neodymium and praseodymium through supported liquid membrane containing di-2-(ethyl hexyl) phosphoric acid as a carrier", *J. Memb. Sci.*, 81, pp. 121-126.

Ruiz, M.C., Gonzalez, J.A. and Olsina, R., 1993, "Analysis of Niobium, Tantalum and Titanium extracted from Tantalite and Columbite", *J. Chem. Tech. Biotechnol.*, 57, pp. 375-378.

#### SUMMARY

*The transfer and separation of Nb(V) and Ta(V) ions in chloride medium across a supported liquid membrane containing Tri-butyl phosphate as carrier has been investigated.*

*Conditions for both feed and stripping solutions, were investigated by means of liquid liquid extraction experiment. The transport experiments were carried out with a permeation cell with continous flow system and a constant agitation. The hydrochloric acid concentration in the feed solution has a marked effect on Nb(V) transport. With increasing hydrochloric acid concentration the transport of Niobium (V) increase and a maximum flow of this ion between 6 and 8 M of HCl was obtained. The Ta(V) transport was negligible in the range of experimental conditions studied, so a selective separation of Nb(V) from Ta(V), could thus be performed.*



## SUPPORTS EFFECT ON COPPER TRANSFER THROUGH A LIQUID MEMBRANE

Mercedes Campderrós<sup>1</sup>, Adolfo Acosta<sup>1</sup> and José Marchese<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Depto de Química, Facultad de Qca. Bioqca. y Farmacia, UNSL - CONICET

<sup>2</sup> Centro Regional de Estudios Avanzados

Chacabuco y Pedernera - C.C. 256 -5700 - San Luis- Argentina



### SUMMARY

The coupled transport of copper (II) ion through a supported liquid membrane containing LIX 984 as the mobile carrier dissolved in kerosene has been studied. Many commercial membrane support has been evaluated at different stirrer speed in a permeation cell. The system resistances evaluation has been performed by means of a mathematical treatment.

### INTRODUCTION

Liquid membranes play an attractive role in separation science. Their efficiency and economic advances designate them as the optimal solution of some important problems in science and technology, such as precious metal recovery (Juang, 1993), elimination of toxic product from waste waters (Kathios et al., 1994), radioactive products (Chiarizia, 1991), etc. Therefore, scientific research in this field continues to be very active despite some important solution-awaiting technological problems, that actually place this technology in a "stand-by" state (Schulz, 1988)

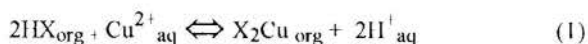
The separating power of liquid membranes is related to the efficiency of the carrier molecules present in the membrane. A great deal of research has been devoted to this problem (Goto and Yanamoto, 1991; Patel et al., 1995). Much less information is available about the role played by the membrane support itself, which is directly related to the membrane lifetime, one of the most important problem to resolve.

In the present paper a study of coupled transport of copper(II) with LIX 984 in kerosene through different commercial support is performed. The carrier is a chelation agents, highly selective for copper and often used in industrial solvent extraction. Thickness and porosity effects as soon as resistances of ion transport through the supported liquid membrane (SLM) has been studied with a mathematical model.

### THEORY

The system under study consists of two aqueous phases and an organic phase which contains the carrier, denoted by HX, confined within the membrane pore via capillary action. The membrane serves both as a support for the organic phase and as a uniform barrier between two aqueous phases. This results in two aqueous-organic phases with well-defined transfer areas. Figure 1 shows a schematic representation of the coupled transport of Cu.

The relationships involved between the metal ion and the carrier in the membrane interfaces are governed by the equilibrium:



with

$$K = \frac{[\overline{\text{CuX}_2}][\text{H}^+]^2}{[\text{HX}]^2[\text{Cu}^{2+}]} \quad (2)$$

where K is the complejation constant and the overbar indicates the concentration in the organic phase.

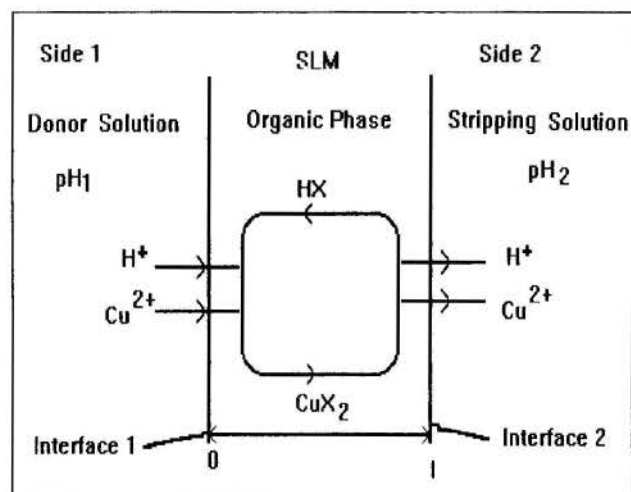


Figure 1- Schematic representation of coupled transport of Cu(II) with LIX 984

The transport of metals through the supported liquid membrane system is considered to be composed of many elementary steps (Marchese et al., 1993). In our theoretical considerations the following steps are taken into account, (i) diffusion of metals through the stagnant layer of feed and stripping solutions; (ii) diffusion of the extractant and the metal-carrier complex in the organic membrane phase. In agreement of these supposition the mathematical expression of the metal flux density,  $N_{\text{Cu}}$ , at steady state is expressed as:

$$N_{Cu} = \left[ Ro \frac{1}{K C_{HX}^o} + Ra \left( \frac{1}{[H^+]_1^2} + \frac{1}{[H^+]_2^2} \right) \right]^{-1} \Delta \frac{[Cu^{2+}]}{[H^+]^2} \quad (3)$$

The driving force of the transport process is:

$$\Delta \left( \frac{[Cu^{2+}]}{[H^+]^2} \right) = \left( \frac{[Cu^{2+}]}{[H^+]^2} \right)_1 - \left( \frac{[Cu^{2+}]}{[H^+]^2} \right)_2 \quad (4)$$

where the subscripts 1 and 2 refer to side 1 and 2 of the SLM respectively.

Ro and Ra are the organic phase resistance and the stagnant layer resistance respectively, with

$$Ro = \tau / D_{CuX_2} \varepsilon \quad (5)$$

$$Ra = \delta / D_{Cu} \quad (6)$$

being  $\tau$ , the SLM thickness,  $\tau$  and  $\varepsilon$  the support tortuosity and porosity,  $\delta$  the stagnant layer thickness,  $D_{CuX_2}$  is the diffusion coefficient of the metal complex in the organic phase, and  $D_{Cu}$  is the diffusion coefficient of the metal in the aqueous phase.

## EXPERIMENTAL

**Reagents.** The carrier agent used in these studies was LIX 984. It reagent is a 1:1 volume blend of LIX 860 (5-dodecyl salicylaldoxime in kerosene) and LIX 84 (2-hydroxy-nonylacetophenone oxime in kerosene). The mixture of these two reagents results in a compound highly selective copper extractant, with fast kinetic and thermodynamically strong (Tech. Bull., Henkel, 1986). The LIX 984 is an hydrogen donor agent, and its reaction would be compared to an ionic interchange system (Eq. 1).

The donor solution was an aqueous solution of Cu(II) as  $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ , at an ionic concentration of  $0.1 \text{ g dm}^{-3}$ , in distilled water saturated with kerosene. The extraction of Cu(II) solution with LIX is pH dependent, thus buffers acetic-acetate were used. The stripping take place at strong acid medium, in this work solution of sulphuric acid was employed. Analytical grade reagents were used throughout.

Kerosene was used as organic solvent for its low solubility in water, high surface tension, and low volatility, which makes the liquid membrane highly stable. The kerosene used, JP1 grade, has a boiling point between 523-300 K and a viscosity of  $0.15 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  (298 K).

**Polymeric Support:** The different support analyzed are showed in Table 1.

TABLE I: Structural characteristic of the support.

Support	Pore size ( $\mu\text{m}$ )	Thickness $\mu\text{m}$
Polyethersulfone <sup>a</sup>	0.2	110
2F-PP <sup>a</sup> (polypropylene)	0.2	150
2F-11F PP <sup>a</sup> (polypropylene)	0.2	160
Teflon <sup>c</sup>	1.0	45
Teflon <sup>b</sup>	0.2	163

<sup>a</sup> AKZO

<sup>b</sup> Cole Parmer

<sup>c</sup> Goretex

**Transport Measurements.** The experimental transport measurements have been carried out with a small stirred cell, which is represented in Figure 2. The cell has two half-cells, each of which has both inlet and outlet, and thus can operate as a continuous flow system. The SLM was clamped between the half-cells, resulting in a cross-sectional area of  $A=1.37 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . The donor and stripping solutions are fed by a peristaltic pump. Both compartments are stirred with magnetic bars that are driven by synchronous motors. The experimental temperature was  $298 \pm 0.5 \text{ K}$ . The concentration of the metal ions was determined by atomic absorption after steady state was reached.

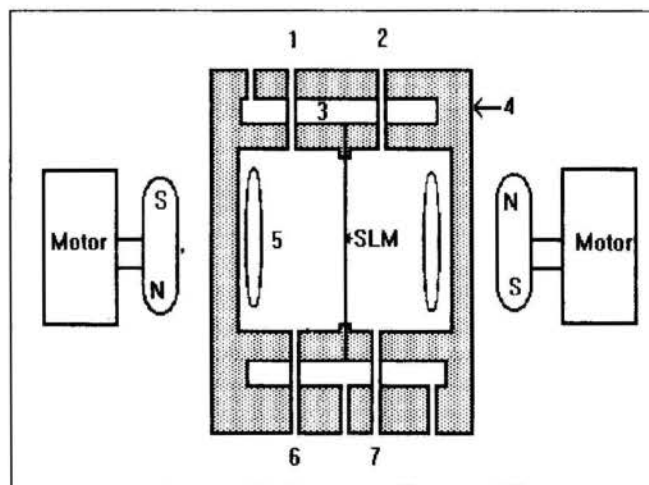


Figure 2 Cross sectional diagram of the continuous stirred cell. (1: donor solution feed; 2:stripping solution feed; 3:thermostatic jacket; 4: plexiglas cell; 5:Spin bar; 6:donor solution exit; 7: stripping solution exit.)

## RESULTS AND DISCUSSION

**Effect of the Stagnant Layer:** A series of permeation experiments were performed to investigate the effect of stirrer speed ( $w$ ) upon Cu(II) transport.

In all the experiences the donor solution was an aqueous Cu(II) solution at pH=2 (buffer acetic-acetate). The stripping solution was sulphuric acid of 2.7 M.

The organic phase in the membrane was LIX 984, 30% in kerosene and was incorporated to the support membrane by capillary action.

The flow rate of both aqueous solution were  $(5 \pm 0.02) \times 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ .

The figure 3 shows the results for the different support analyzed. In all cases, the ion metals flux increases with increasing stirring rate (decrease stagnant layer). Due to the fact that high stirring speeds promote the possible loss of organic phase by removal and solubilization in the aqueous phase, the experiments were carried out at  $w$  less than 250 rpm.

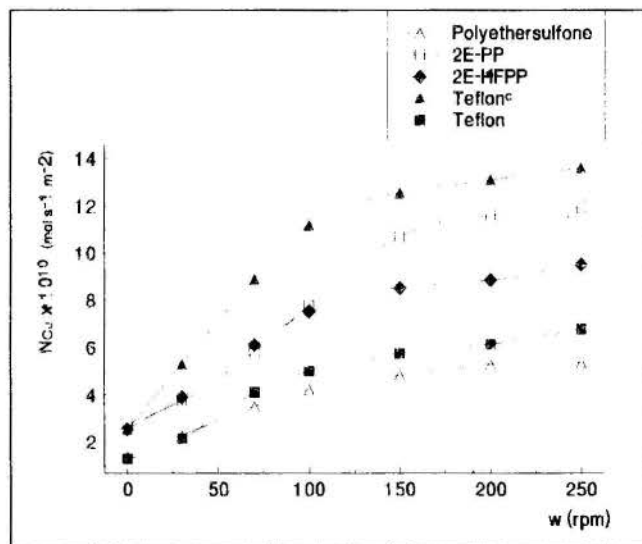


Figure 3. Copper molar flux density through the SLM vs. rpm for different membrane supports.

**Resistances Evaluation of the SLM.** In accordance with our experimental conditions, the proton concentrations in both donor and stripping sides of the membrane have been kept constant, and  $[H^+]_1 \ll [H^+]_2$ , thus,

$$\left( \frac{1}{[H^+]_1^2} + \frac{1}{[H^+]_2^2} \right) \cong \frac{1}{[H^+]_1^2} \quad (7)$$

introducing Eq.(7) in Eq.(3) and rearrangement, the overall resistance is given by:

$$R_T = \frac{[H^+]_1^2 \wedge ([Cu^{2+}] / [H^+]^2)}{N_{Cu}} \quad (8)$$

with

$$R_T = R_a + R_o \quad (9)$$

and

$$R_o = R_o [H^+]_1^2 / K C_{LIX}^2 \quad (10)$$

The  $R_o$  can be experimentally evaluated by plotting  $R_T$  against stirrer speed raised to negative power  $\gamma$ . This exponent is a function of both the cell geometry and hydrodynamic conditions, and its value is,  $\gamma = 0,74$  (Marchese and col. 1989). The results are presented in Fig. 4.

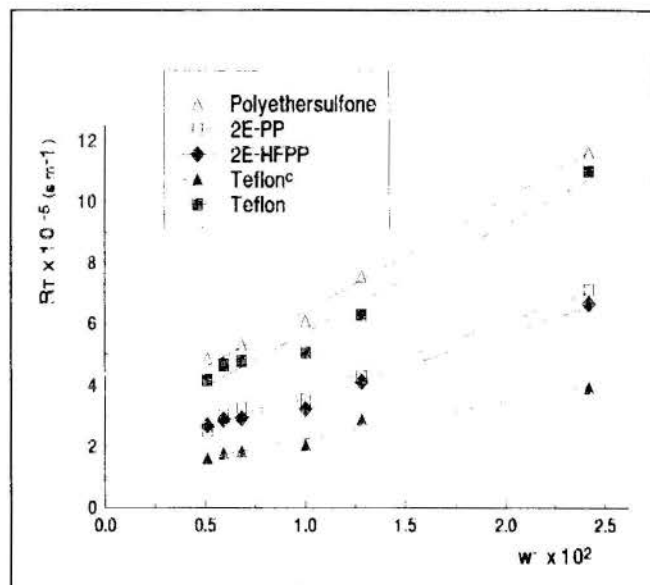


Figure 4. Effect of stirrer speed on copper overall resistance through the SLM. ( $\gamma=0.74$ ).

The  $R_o$  values were obtained from the y axis intercept for  $\text{rpm} \rightarrow \infty (\delta \rightarrow 0 \text{ y } R_a \rightarrow 0)$

Combining Eq. (10) with Ec.(5) the factor of effective porosity ( $\epsilon/\tau$ ) is evaluated.  $K$  is approximately  $2.8 \times 10^{-4}$  (Valenzuela et al., 1993), and the diffusion coefficient of the complex,  $D_{CuX2}$ , was estimated by the Stokes-Einstein equation. The results are in Table 2.

Table 2: Experimental Values of Transport Resistance and Effective Porosity for Different Support.

Support	$R_o \times 10^{-5}$	$\epsilon/\tau$
Polyethersulfone	2.58	0.42
2EPP	1.52	0.91
2EHFPP	1.57	0.89
Teflon (c)	1.01	0.55
Teflon	2.10	0.77

## CONCLUSIONS

The copper (II) coupled transport with LIX 984 in kerosene solution through a SLM with different commercial support has been investigated.



Permeation experience showed the existence of a stagnant layer. The ion Cu(II) flux increase with increasing stirring rate. At low stirring rate ( $w= 30$  rpm), the stagnant layer adjacent to the membrane is relatively thick. The resulting concentration gradient of the metal in this layer will tend to decrease the metal flux. With increasing stirring speed the stagnant layer thickness is reduced and the metal flux is increased.

A permeation rate equation was derived taking into account diffusion of metals through the stagnant layer of feed and stripping solution and diffusion of the extractant and the Cu-LIX complex in the organic membrane phase.

By means of this treatment the copper overall transfer resistance and the experimental determination of the effective porosity value ( $\epsilon/\tau$ ), for each membrane support have been performed. The ( $\epsilon/\tau$ ) factor is an important parameter to evaluate the effectiveness of a support on the SLM transport properties, since both  $\epsilon$  and  $\tau$  are kinetic parameters, that take into account the real empty fraction and path for the transport process. For the same conditions, the 2E-PP membrane seems to be the better support so far as the transport properties of the membrane are concerned.

#### REFERENCES

- Chiarizia, R., 1991, "Application of supported liquid membranes for removal of nitrate, technetium (VII) and chromium (VI) from ground water", *J. Membrane Sci.*, 55, pp. 39-64.
- Kathios, D.J., Jarvine, G.D., Yarbrow, S.L. and Smith B.F., 1994, "A preliminary evaluation of microporous hollow fiber membrane modules for the liquid-liquid extraction of actinides", *J. Membrane Sci.*, 97, pp. 251-261.
- Marchese, J., Campderrós M.E., Acosta A., 1993, "Mechanistic Study of cobalt, nickel and copper transfer across a supported liquid membrane", *J. Chem. Tech. & Biotechnol.*, 57, pp. 37-42.
- Goto, M. and Yanamoto, H., 1991, "Effect of new surfactants on Zn extraction with supported liquid membrane", *J. Membrane Sci.*, 57, pp.161-174.
- Juang, R-S, 1993, "Modeling of the competitive permeation of Co and Ni in a di (2- ethylhexyl) phosphoric acid supported liquid membrane process", *J. Membrane Sci.*, 85, pp. 157-166.
- Marchese, J., Lopez, J. and Quinn, J.A., 1989, "Facilitated Transport of Benzylpenicillin through immobilized liquid membrane", *J. Chem. Tech. & Biotechnol.*, 46, pp. 149-159.
- Palet, C., Muñoz, M., Hidalgo, M. and Valiente M., 1995, "Transport of vanadium (V) through a tricaprylyl-methylammonium solid Supported liquid membrane from aqueous acetic / acetate solutions", *J. Membrane Sci.*, 98, pp. 241-248.
- Reagents for mineral processing industry., 1986, RED Line. Technical Bulletin. Henkel/ MID.
- Schulz, G. , 1988, "Separation techniques with supported liquid membranes", *Desalination*, 68, pp. 191-202.
- Valenzuela, F.L., Nakashio F. and Kondo K., 1994, "Extraction Kinetics of copper with 8- octanesulfonamido quinoline in a membrane extractor using a hollow fiber", *J. Lat. Applied Research*, 24, pp. 33-39.

ABCm

TRANSFER AND RETENTION COEFFICIENTS IN ULTRAFILTRATION  
ASYMMETRIC MEMBRANESCecilia Pagliero<sup>1</sup>, Nelio Ochoa<sup>1</sup> and José Marchese<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Depto de Química, Facultad de Qca. Bioqca. y Farmacia, UNSL - CONICET<sup>2</sup>Centro Regional de Estudios Avanzados  
Chacabuco y Pedernera -C.C.256- 5700 - San Luis- Argentina

## ABSTRACT

Supports Polysulfone membranes for ultrafiltration (UF) were produced by a phase inversion process. The effect of the polymer concentration in the casting solution on hydraulic permeability, true retention and mass transfer coefficients were studied. These coefficients were evaluated applying the film layer theory for the concentration polarization phenomena.

## INTRODUCTION

The applications of UF membranes in concentration and fractionation processes has been developed during the last two decade. Among them, specific applications as different as effluent treatment and biomedical can be mentioned. The broad field of applications shows how significant is the development of such separative barriers.

The membrane efficiency can be estimated by different methods. These methods allow to evaluated the distribution of the pore size as well as the properties of mass transport under normal operational conditions. Water transport is one of the most frequently reported properties by manufactures of commercial membranes. This information together with the membrane cut-off are used as a comparison parameters between the different UF membranes offered in the market.

As is well known (Blatt, W. F.; 1976 and Poter, M. C. et al., 1972), permeation of solutions of macromolecules having sharp molecular weight distributions are widely used for the purpose of determining the effective sieving activity of the membrane or its molecular cut-off. Nevertheless, the separation performance of a membrane is dependent not only on the dimensions of the solute molecule, but also on its shape and interactions with the membrane surface. When a macromolecular solute is present at the membrane surface, a polarization effect which is concentration dependent appears. In general, the polarization phenomenon reduces the separation efficiency. There are different models that describe this behavior. The film theory is the most widely applied (Jonsson and Boesen, 1984).

In this paper, we report on the performance properties of several UF polysulfone membranes relative to different polymer concentration in the casting solution. For such, measurements of flux and retention of dextran solutions has been made. The mass transfer and real retention coefficients for this macromolecules solutions were obtained by the application of the film theory.

## THEORY

In any membranes process an accumulation or depletion of solutes takes place near the membrane surface because of the

permselectivity of the membrane. Thus a concentration gradient is formed at which steady state is established by the diffusion of solute back through the stagnant film layer. This phenomenon is called polarization. Figure 1 shows the concentration profile in the stagnant boundary layer. The mass transport within the film is assume to be one-dimensional. In the steady state the solute flux is constant throughout the film and equal the solute flux density through the membrane,  $N_s$ .

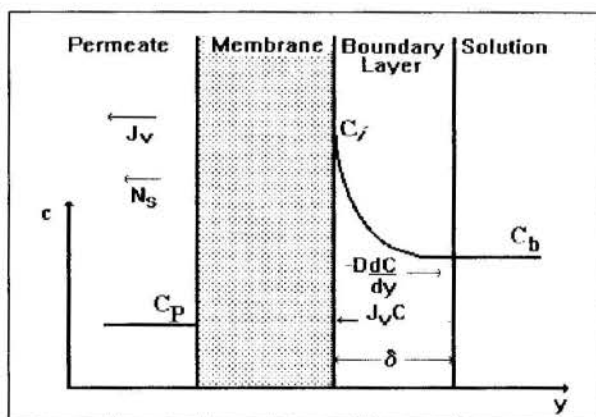


Figure 1 - Schematic of the film-theory model

A material balance for the solute in a differential element gives

$$N_s = J_v C_p = J_v C - D(dC / dy) \quad (1)$$

where  $J_v$  is the total flux through the membrane;  $C_i$ ,  $C_b$ , and  $C_p$  are the solute concentrations at the membrane-solution interface, in the bulk solution and the permeate respectively;  $C$  the solute concentration at any point in the solution phase;  $D$  the diffusion coefficient of solute.

Integration of Eq. (1) with the following boundary conditions

$$\begin{aligned} C=C_A & \quad \text{at} \quad y=0 \\ C=C_S & \quad \text{at} \quad y=\delta \end{aligned} \quad (2)$$

gives

$$\frac{(C_i - C_p)}{(C_b - C_p)} = e^{(J_v/k)} \quad (3)$$

where the mass transfer coefficient  $k = D/\delta$ .

Eq. (3) can be rearranged to give a relation between the observed retention ( $R_o = 1 - C_p / C_b$ ) and the true retention ( $R = 1 - C_p / C_i$ ) as follows

$$\ln\left(\frac{1 - R_o}{R_o}\right) = \ln\left(\frac{1 - R}{R}\right) + \frac{J_v}{k} \quad (4)$$

For the same solute and constant flow velocity of the feed solution, Eq. (4) shows that a plot of  $\ln [(1-R_o)/R_o]$  vs.  $J_v$  should give a straight line, intersecting the ordinate axis at  $\ln [(1-R)/R]$  and slope equal to  $k^{-1}$ .

## EXPERIMENTAL

**UF Membranes Preparation.** The polysulfone (PSf) membranes were prepared following the traditional wet phase inversion process (Loeb y Sourirajan, 1960). The flat supports were glued on glass plates and the PSf solutions were cast at 25 °C in air, using a film extendor. The operational conditions were:

- PSf concentration : 12-20 % p/p
- Solvent: Dimethylformamide
- Non-solvent: distilled water
- Wet casting thickness: 275  $\mu$ m
- Bath coagulation temperature: 25 °C
- Relative humidity: 40 %
- Non woven support: J26

The UF membranes prepared from different PSf concentration are listed in Table 1.

Table 1. UF membranes classifications

Membrane	PSf % (w/w)	DMF % (w/w)
M-12	12	88
M-13	13	87
M-14	14	86
M-15	15	85
M-16	16	84
M-17	17	83
M-20	20	80

**Water Flow and Dextran Retention Measurement:** For both the pure water flux through the membranes and dextran retentions tests a Millipore Minitan S device was used.

The hydraulic permeability was calculated from Darcy's law, measuring the permeate amount of pure water at different transmembrane pressure (20 - 100 KPa). The water flow in the feed was kept constant at rate of  $2,5 \times 10^{-2}$  l/sec.

The observed retention coefficient were evaluated with aqueous solutions of dextrans supplied by Fluka with nominal average molecular weight from 8.800 to 2.000.000. The dextran concentration of the feed solution was 0,5 % (w/v) with a flow rate of  $2,5 \times 10^{-2}$  l/sec. The dextran concentrations were determined by refractometry (Index Instruments GPR11-37).

## RESULTS AND DISCUSSION

**Hydraulic Permeabilities ( $L_h$ ):** Figure 2 shows the water flux through the membranes against of the transmembrane pressure. The hydraulic permeabilities were evaluated from the slope of straight lines according to:

$$J_v = L_h \Delta p \quad (5)$$

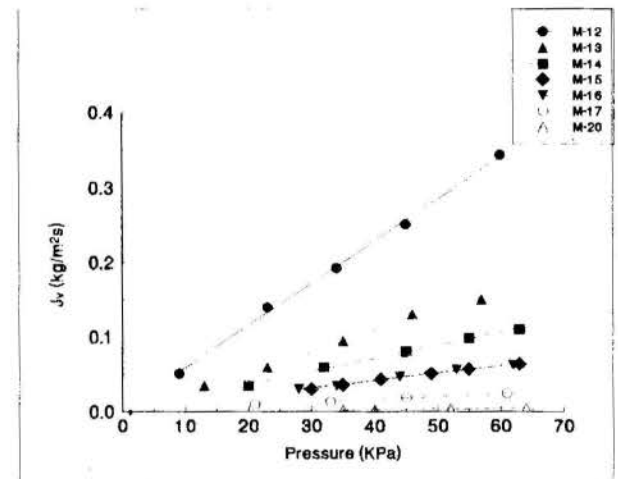


Figure 2 - Water flux variation with the transmembrane pressure

The  $L_h$  values obtained are given in table 2 and they are represented in Figure 3 against the polysulfone concentration. In this plot a linear correlation between  $L_h$  and PSf % is observed. The water permeability decreases when polymer concentration in the casting solution increases. The results allows to predict the transport properties of a membrane, for a given set of casting parameters, just by controlling the concentration of the polymeric solution.

Table 2. Hydraulic Permeabilities of the prepared membranes

Membrane	$L_p \times 10^6$ (Kg/m <sup>2</sup> sPa)
M-12	5.60
M-13	2.70
M-14	1.74
M-15	1.03
M-16	0.99
M-17	0.40
M-20	0.07

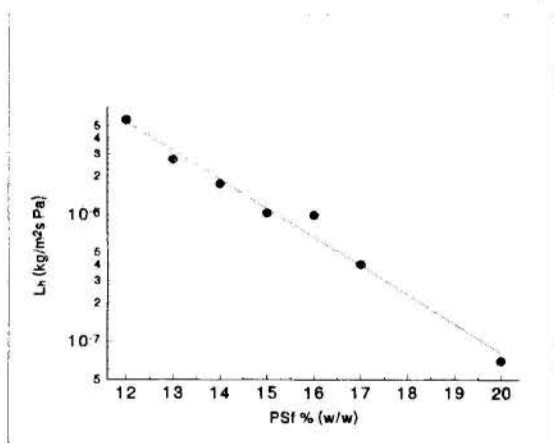


Figure 3. Effect of polymer concentration in the casting solution on the hydraulic permeability.

**Mass Transfer Coefficient (k).** The dextran transport in the membranes has been calculated by the observed retention ( $R_0$ ) as a function of transmembrane pressure. These results are represented in Figure 4 for M-15 UF membrane. Then the  $R_0$

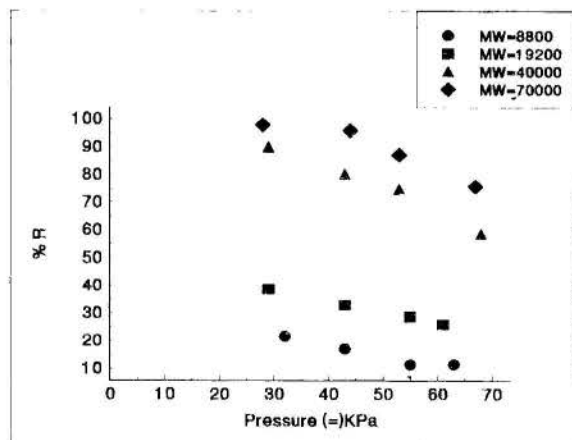


Figure 4 - Observed retention coefficients versus transmembrane pressure for M-15

values are plotted against  $J_v$  according with Eq. (4). In all cases there is a linear correlation. Eq. (4) is used to identify the mass transfer coefficient from the slope and the true retention ( $R$ ) intersecting the ordinate axis at  $\ln[(1-R)/R]$ .

The  $R$  and  $k$  values evaluated for the synthesized membranes are reported in Table 3. For a given molecular weight of dextran, there is a marked increase in the retention with the increasing polysulfone concentration. This relative restriction to solute transport through the membrane is due to the fact that increasing the polymer amount in the casting solution gives smaller mean pore size at the membrane surface.

Figure 5 shows the dependence between the mass transfer coefficient and the polysulfone concentration for a given dextran molecular weight.

Table 3 - True retention and mass transfer coefficients

Membrane	MW (g/mol)	%R	$k \times 10^5$ (m/s)
M-12	70,000	12.35	16.67
	110,000	21.25	12.50
	580,000	100.00	0.15
	2,000,000	100.00	0.12
M-13	70,000	19.78	5.00
	110,000	60.35	1.92
	580,000	100.00	1.49
M-14	19,200	45.00	4.35
	40,000	74.27	3.85
	70,000	98.82	0.95
	110,000	100.00	0.94
M-15	8,800	11.10	6.67
	19,200	44.27	3.12
	40,000	95.65	0.63
	70,000	100.00	0.21
M-16	8,800	24.97	5.26
	19,200	71.91	2.56
	40,000	99.40	0.54
	70,000	100.00	0.11
M-17	8,800	38.22	3.57
	19,200	60.82	2.22
	40,000	99.79	0.49
	70,000	100.00	0.089
M-20	8,800	46.25	0.93
	19,200	80.33	0.85
	40,000	100.00	0.070

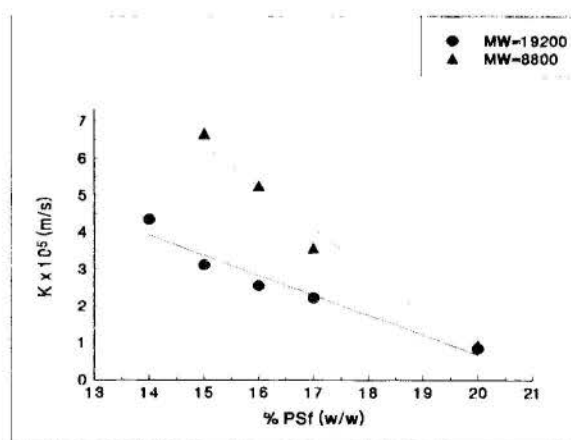


Figure 5 - Mass transfer coefficient as a function of polysulfone concentration (for two dextran molecular weight).

The true retention is plotted against dextran molecular weights, allowing to estimate the membrane molecular cut-off. The decreasing cut-off values obtained with increasing polymer concentration are showed in Figure 6.

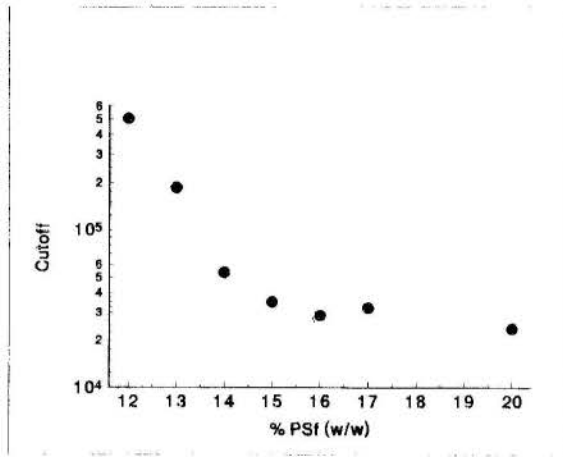


Figure 6 - Effects of polymer concentration on membrane cut-off

## CONCLUSIONS

Supported UF membranes were prepared by the inversion phase technique from polysulfone solutions with different polymer concentration.

The true retention and mass transfer coefficients were evaluated applying the film layer theory for the concentration polarization phenomena. For that measurement of water flux and retention test with polydisperse polymer solutes (dextrans) has been made. An increase of polymer concentration in the casting solution affects the structure of the prepared membrane diminishing both effective porosity and mean pore size in the dense skin. This will provide a higher membrane resistance to the water flux decreasing the hydraulic permeability. A diminution in the mean pore size affects the solute retention decreasing the membrane cut-off.

## REFERENCES

- Blatt W. F., 1976 "Principles and Practice of Ultrafiltration", *Membrane Separation Processes*, Meares P. ed., Elsevier, Chap. 3
- Porter M. C. and Nelson L., 1972 "Recent Developments in Separation Science", CRC Press, Cleveland
- Jonson G. y Boesen C., 1984 "Polarization Phenomena in Membrane Process", *Synthetic Membrane Processes*, Belfort G. ed., Academic Press Inc. pp. 101-130
- Loeb S. y Sourirajan S. 1960, UCLA Report 60.



## EFFECTO DEL SOPORTE Y ESPESOR DE MOLDEADO SOBRE LOS PARAMETROS DE TRANSPORTE EN MEMBRANAS DE ULTRAFILTRACION



Nelio Ochoa<sup>1</sup>, Cecilia Pagliero<sup>1</sup> y José Marchese<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Depto de Química, Facultad de Qca. Bioqca. y Farmacia. UNSL - CONICET

<sup>2</sup> Centro Regional de Estudios Avanzados

Chacabuco y Pedernera -C.C.256- 5700 - San Luis- Argentina

### RESUMEN

Para analizar el efecto de espesor de moldeado y soporte sobre las propiedades de transporte en membranas de ultrafiltración se prepararon membranas con distintos espesores de moldeado y con distintos tipos de soportes no tejidos comerciales. La permeabilidad de cada una de las membranas fue evaluada tanto medidas de flujo de agua pura como por pruebas de ultrafiltración con solutos polidispersos (Dextranos). Los datos de rechazo de los dextranos fueron interpretados mediante el modelo de capa película, el que fue utilizado para el cálculo de los coeficientes de transferencia de masa ( $k$ ) y el rechazo real de la membrana. Este último permitió estimar el corte de peso molecular para cada membrana.

### INTRODUCCION

La ultrafiltración (UF) es un proceso de separación con membranas en donde la fuerza impulsora es la presión y se utiliza para la separación de macromoléculas (Cherian, 1986). En las membranas de ultrafiltración la barrera separadora efectiva constituye una capa densa o piel de unos pocos nanómetros, debajo la cual está una subestructura porosa polimérica. Sin embargo debido a las presiones de transmembrana utilizada en los procesos de ultrafiltración estas membranas frecuentemente se fracturan perdiendo su eficiencia. Es por este motivo que las membranas de UF son generalmente soportadas en una matriz no tejida de mayor resistencia mecánica, moldeándose la capa polimérica a un determinado espesor sobre dicho soporte.

En estos casos la permeabilidad en el sistema de membranas de UF puede estar dada en términos de varias resistencias: resistencia de la capa límite, resistencia de soluto depositado en la membrana y resistencia de la membrana de UF. Esta última influye las características estructurales de la membrana asimétrica y del soporte.

En el presente trabajo se analiza el efecto del espesor de moldeado y del soporte sobre los parámetros de transporte en las membranas de UF. Para ello se prepararon membranas con diferentes espesores de moldeado y con distintos soportes no tejidos comerciales.

### EXPERIMENTAL

#### Preparación de las Membranas Asimétricas Soportadas:

**Materiales:** Polisulfona P-3500 fue provista por AMOCO Inc.; y N, N-Dimetilformamida grado HPLC fue suministrada por Merck.

Los soportes no tejidos utilizados en la síntesis de las membranas asimétricas soportadas (MAS) fueron provistos por SEPAREM S.A. cuyas características son:

Soporte: J26  
Material: Poliester  
Espesor:  $0.11 \pm 0.02$  mm  
Permeabilidad al aire a 2 mbar:  $150 \pm 40$  dm<sup>3</sup>/s m<sup>2</sup>

Soporte: Holitex  
Material: Poliester  
Espesor:  $0.132 \pm 0.02$  mm  
Permeabilidad al aire a 2 mbar:  $700 \pm 100$  dm<sup>3</sup>/s m<sup>2</sup>

Soporte: Viledon 2430  
Material: Polipropileno/Polielileno  
Espesor:  $0.22 \pm 0.02$  mm  
Permeabilidad al aire a 2 mbar:  $180 \pm 50$  dm<sup>3</sup>/s m<sup>2</sup>

Soporte: Viledon 2431  
Material: Polipropileno/Polielileno  
Espesor:  $0.14 \pm 0.02$  mm  
Permeabilidad al aire a 2 mbar:  $500 \pm 70$  dm<sup>3</sup>/s m<sup>2</sup>

**Procedimiento:** Las membranas se prepararon por el método de inversión de fase (Kesting, 1985), el cual consiste en moldear la solución polimérica mediante un extensor de película sobre una placa de vidrio la cual tiene adherida el soporte, extendiéndose la solución sobre el mismo. Posteriormente se deja evaporar el solvente durante 30 segundos y se introduce en un baño que contiene agua bidestilada. Una vez formada la membrana se transfiere a otro baño que contiene agua por dos horas para eliminar el solvente atrapado en el interior de la membrana y finalmente se realiza un post-tratamiento con agua a 85 °C durante 10 minutos. En la Tabla 1 se indican las condiciones operacionales de preparación de las membranas sintetizadas.



Tabla 1- Condiciones operacionales de síntesis de las MAS

Membrana	% PSf (p/p)	Espesor Húmedo, l (μ)	Soporte
M-1	20	175	J26
M-2	20	230	J26
M-3	20	275	J26
M-4	20	340	J26
M-5	20	450	J26
M-6	17	275	Holitex 3426
M-7	17	275	Viledon2430
M-8	17	275	Viledon2431
M-9	17	275	J26

Medidas de Permeabilidad

*Equipo de Permeación:* En la Figura 1 se muestra el esquema del equipo de permeación utilizado para las medidas de permeabilidades hidráulicas y de solutos polidispersos.

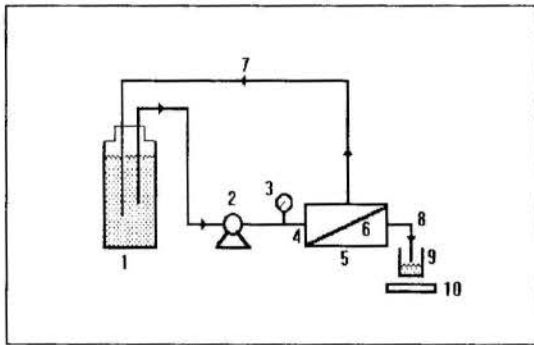


Figura 1 - Esquema del equipo de permeabilidades, en donde: 1 reservorio, 2 bomba peristáltica, 3 manómetro de presión, 4 entrada de alimentación, 5 celda de permeación Minitan-S, 6 membrana, 7 recirculación del no-permeado, 8 salida del permeado, 9 vaso de muestreo, 10 balanza

*Medidas de Flujo de Agua (J<sub>v</sub>):* Las medidas de J<sub>v</sub> se determinaron haciendo pasar agua bidestilada y prefiltrada (microfiltro de 0.2 μ ) a través de las membranas sintetizadas, a diferentes presiones de transmembra.

*Medidas de Rechazo o Coeficientes de Retención:* Estas pruebas tienen por objeto determinar el corte de pesos moleculares (cut-off) de las membranas obtenidas. Para caracterizar las membranas se prepararon soluciones patrones con dextranos comerciales (Fluka) de peso molecular de 8.800, 19.200, 40.000, 70.000 y 110.000 g/mol con una concentración de 5g/l, las mismas fueron impulsadas a la celda de permeación con un caudal constante de 1.500 ml/min y las presiones de transmembra aplicadas tuvieron un rango de 20 -100KPa. Todas las corridas se llevaron a cabo a 25°C y las

concentraciones de dextranos fueron determinadas con un refractómetro digital.

RESULTADOS Y DISCUSION

*Permeabilidad Hidráulica (L<sub>h</sub>):* En la Tabla 2 se indican los valores de permeabilidades hidráulicas obtenidas de la pendiente que resulta de graficar los valores de flujo volumétrico de agua (J<sub>v</sub>), en función de la presión de transmembra (Δp), de acuerdo a la siguiente expresión:

$$J_v = L_h \Delta p \tag{1}$$

Tabla 2 - Permeabilidades Hidráulicas de las Membranas Preparadas

Membrana	L <sub>h</sub> x 10 <sup>7</sup> (Kg/m <sup>2</sup> sPa)
M-1	6.00
M-2	1.00
M-3	0.70
M-4	0.32
M-5	0.09
M-6	4.70
M-7	12.3
M-8	10.7
M-9	4.00

En la Figura 2 se muestra la disminución lineal de la permeabilidad hidráulica como una función del aumento del espesor húmedo de moldeado para las membranas M-1 a M-5. Este comportamiento es debido a que un aumento del espesor de moldeado aumenta la cantidad de polímero disponible en la interfase solución aire, en el proceso de inversión de fase. Esto contribuye a la formación de una capa densa o piel superficial con tamaños de poros y porosidad menor.

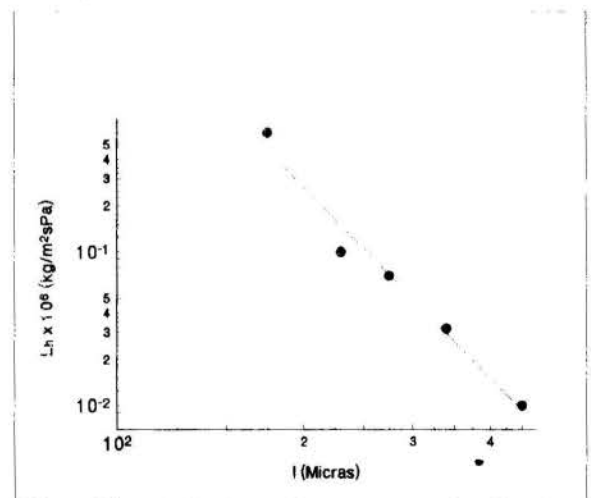


Figura 2 - Influencia del Espesor de Moldeado sobre la Permeabilidad Hidráulica.

Los soportes Viledon 2430 y Viledon 2431 utilizados en la preparación de las membranas de UF muestran mayores permeabilidades hidráulicas que aquellas preparadas sobre Holitex 3426 y J26.

Coefficientes de Retención y Transferencia de Masa: mediante la permeación de soluciones de dextranos ha sido posible evaluar el tamizado efectivo de las membranas preparadas, definiéndose para tal fin el coeficiente de retención observado (R) como:

$$R = [1 - (C_P / C_A)] \quad (2)$$

donde  $C_P$  es la concentración de dextrano en el permeado y  $C_A$  es la concentración del soluto en la alimentación.

Mediante el uso de la teoría de la película (Jonson, G. y Boesen, C., 1984), la cual incluye el efecto de polarización por concentración, es posible determinar el coeficiente de retención real ( $R_r$ ):

$$R_r = [1 - (C_P / C_S)] \quad (3)$$

donde  $C_S$  es la concentración de soluto en la superficie de la membrana en contacto con la solución de alimentación.

La teoría pelicular permite establecer la siguiente relación entre el flujo de agua ( $J_v$ ) y las concentraciones.

$$J_v = k \ln \frac{(C_S - C_P)}{(C_A - C_P)} \quad (4)$$

en donde k es el coeficiente de transferencia de materia, combinando las Ecs. (2), (3) y (4) se tiene que:

$$\ln \left( \frac{1 - R}{R} \right) = \ln \left( \frac{1 - R_r}{R_r} \right) + \frac{J_v}{k} \quad (5)$$

Cuando los caudales de alimentación son iguales y constantes para un mismo soluto, la Ec.(5) representa la ecuación de una línea recta.

Los valores de R obtenidos de los datos experimentales son graficados en función de  $J_v$ , acorde con la Ec.(5). De esta representación se obtiene el valor de  $R_r$  en la ordenada al origen y k de la pendiente de la recta. La Figura 3 muestra una gráfica característica para la M-7, y en la Tabla 3 se hallan volcados los valores de  $R_r$  y k para cada dextrano y membrana analizada.

Corte de Pesos Moleculares (Cut-off). Como el tamaño y forma de la molécula de dextrano es modificada a la entrada del poro debido al esfuerzo de corte que es sometida con las diferentes presiones de transmembra ( $\Delta p$ ), se define el corte de peso molecular como aquel valor para el cual el  $R_r$  a  $\Delta p=0$  ( $J_v=0$ ) es igual al 90 %.

Para obtener el cut-off de cada membrana se grafica  $R_r$  en función del peso molecular (PM) de cada dextrano, y de la curva obtenida se interpola el PM para el cual  $\%R_r=90$  %. Este procedimiento esta ejemplificado para la M-2 en la Figura 4.

Tabla 3 - Coeficientes de retención reales y de transporte de masa.

Membrana	PM (g/mol)	$\%R_r$	$k \times 10^5$ (m/s)
M-1	8,800	21.41	18.86
	19,200	32.95	17.54
	40,000	89.10	1.44
	70,000	94.50	1.40
	110,000	100.00	0.32
M-2	8,800	28.64	2.63
	19,200	66.15	0.90
	40,000	95.25	0.37
	70,000	100.00	0.17
M-3	8,800	46.25	0.93
	19,200	67.95	0.85
	40,000	100.00	0.07
M-4	8,800	60.83	0.22
	19,200	68.13	0.20
	40,000	100.00	0.016
M-5	8,800	91.91	0.025
	19,200	94.96	0.024
	40,000	100.00	0.014
M-6	8,800	32.10	3.22
	19,200	48.75	3.00
	40,000	91.21	1.19
	70,000	97.00	0.92
M-7	8,800	23.86	4.35
	19,200	71.10	1.64
	40,000	98.74	0.79
	70,000	100.00	0.14
	110,000	100.00	0.12
M-8	8,800	34.52	5.26
	19,200	66.37	2.86
	40,000	98.91	0.71
	70,000	100.00	0.35
M-9	8,800	38.22	3.57
	19,200	60.82	2.22
	40,000	99.79	0.49
	70,000	100.00	0.089

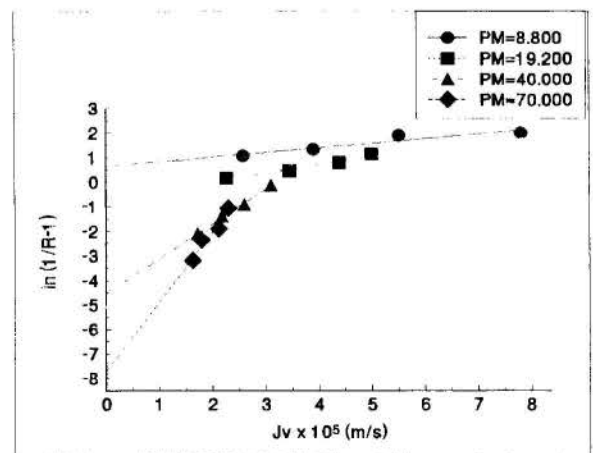


Figura 3 - Estimación gráfica de  $R_r$  y k para M-7.

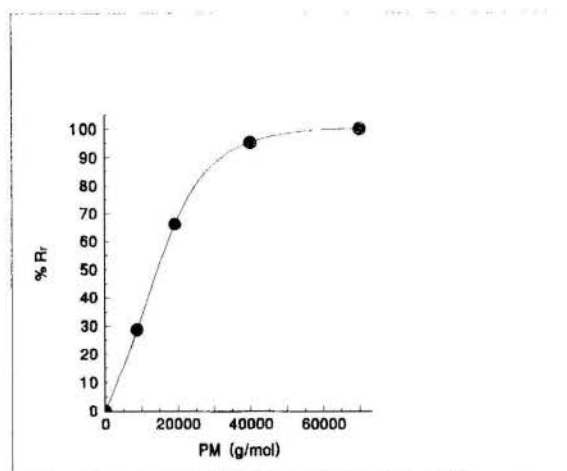


Figura 4 - Representación del Coeficiente de Rechazo Real en función del Peso Molecular para la M-2

En la Tabla 4 se encuentran los valores de cut-off para cada membrana como era de esperar. Se observa una disminución en los valores de cut-off encontrados a medida que el espesor húmedo moldeado se incrementa.

Tabla 4 - Corte de Pesos Moleculares de las Membranas Sintetizadas

Membrana	Cut-off
M-1	43,478
M-2	41,000
M-3	30,000
M-4	27,000
M-5	7,912
M-6	40,000
M-7	30,000
M-8	30,810
M-9	35,000

## CONCLUSIONES

Se estudió el efecto del espesor de moldeado y del soporte sobre los parámetros permeosselectivos de membranas asimétricas de UF.

La permeabilidad de cada una de las membranas fue evaluada tanto medidas de flujo de agua pura como por pruebas de ultrafiltración con solutos polidispersos (Dextranos).

Los datos de rechazo de los dextranos fueron interpretados mediante el modelo de capa película, el que fue utilizado para el cálculo de los coeficientes de transferencia de masa ( $k$ ) y el rechazo real de la membrana. Este último permitió estimar el corte de pesos moleculares para cada membrana definido como aquel valor de PM cuando el rechazo o la retención es del 90 %.

Los resultados mostraron que existe una variación de la permeabilidad hidráulica con los distintos soportes utilizados sin afectar mayormente el corte de peso molecular. Los soportes de Viledon 2430 y 2431 son mas apropiados por presentar las mayores permeabilidad hidráulicas.

El aumento de espesor de la solución de moldeado afecta a la estructura de las membranas sintetizadas de dos maneras fundamentales: a) produce un aumento del espesor de la membrana final, y b) provee una mayor cantidad de polímero en la superficie densa en el instante de producirse la coagulación disminuyendo por lo tanto el tamaño de poro medio y la porosidad de la piel. Estos dos factores provocan una mayor resistencia al flujo de agua disminuyendo la permeabilidad hidráulica. Por otro lado la disminución del tamaño medio de poro incide directamente en la retención de los solutos, disminuyendo el corte de pesos moleculares.

## REFERENCIAS

- Cheryan, M., 1986 "Ultrafiltration Handbook" ed. Technomic Publishing Company, Inc.  
 Jonson G. y Boesen C., 1984 "Polarization Phenomena in Membrane Process", *Synthetic Membrane Processes*, Belfort, G, Ed., Academic Press Inc. pp 101-130.  
 Kesting R., 1985 "Synthetic Polymeric Membranes: a Structural Perspective" 2°ed. John Wiley & Sons

## SUMMARY

The effect of both the casting thickness and support on the properties transport in the ultrafiltration (UF) membranes were studied. For this asymmetric polysulfone membranes from different casting thickness and distinct types of commercial nonwoven supports were prepared. The permeability of each membrane was evaluated through the measurement of water flux and by ultrafiltration test with polydisperse polymer solutes. The retention of dextran data were interpreted through the film-theory model, which was used to evaluate the mass transfer ( $K$ ) and the true retention coefficients. This allowed to estimate the membrane cut-offs.



## TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO ESCOAMENTO ANULAR DESENVOLVIDO DE DOIS LÍQUIDOS IMISCÍVEIS EM TUBOS CURVOS

Ricardo J. Silva, Márcio Ziviani e Ramón M. Valle

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
31270-901 - Belo Horizonte - MG - Brasil



### RESUMO

Neste trabalho estudou-se a troca de calor na região completamente desenvolvida de um escoamento anular de dois líquidos imiscíveis no interior de tubos horizontais retos e ligeiramente curvos de seção circular, em regime laminar permanente. As equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia foram resolvidas utilizando-se o método de diferenças finitas com formulação em volumes de controle, utilizando o esquema de interpolação *Power-law*. No acoplamento pressão-velocidade foi utilizado o método SIMPLE. Os resultados são comparados com dados da literatura.

### INTRODUÇÃO

Nesse trabalho estuda-se a troca convectiva de calor na região completamente desenvolvida do escoamento anular de dois líquidos imiscíveis em trechos retos e curvos de um tubo horizontal de seção circular constante. O escoamento é dito anular quando os dois fluidos que o compõem escoam segregados, um como um filme junto à parede e outro no núcleo da tubulação.

O escoamento bifásico como o estudado no presente trabalho ocorre em vários sistemas e equipamentos industriais. Em sistemas de geração e distribuição de vapor, os fluidos são fases distintas da mesma substância; já em trocadores de calor por contato direto e em tubulações industriais são fases distintas (gás-líquido) ou iguais (líquido-líquido) de substâncias diferentes. A presença de um outro fluido no escoamento pode ser inerente ao processo, como nos trocadores de calor por contato direto; inevitável, como nos vazamentos de óleo nas bombas e compressores, ou um segundo líquido pode ser propositalmente injetado no escoamento para formar um filme junto à parede do tubo.

Esse filme pode ter a função de reduzir a perda de carga em escoamentos como os de óleos pesados, com um filme de água (Gould et al., 1974). Pode aumentar ou reduzir a perda de calor através da parede nos casos em que há troca de calor (Lieb et al., 1977). Ou ainda criar uma proteção contra oxidação ou incrustação na parede em circuitos de água, usando um filme de querosene (Nogueira, 1988). Qualquer que seja o caso, é

importante que se garanta a integridade do filme, já que seu colapso poderia causar o superaquecimento ou o aparecimento de pontos de oxidação.

O escoamento em uma curva é uma aproximação daquele em um arranjo helicoidal, desprezando-se a inclinação devido ao passo da hélice, ou seja, considerando  $D \gg p$ , conforme Fig. 1. Sabe-se, há muito tempo, que o processo de troca de calor nesse arranjo é mais eficiente que em tubos retos, devido ao escoamento secundário, além de produzir equipamentos mais compactos.

Um problema convectivo é composto por dois problemas distintos, embora acoplados: o problema hidrodinâmico e o problema térmico. A maior dificuldade encontrada na solução de problemas convectivos está na parte hidrodinâmica, porque envolve a solução simultânea da equação de conservação da quantidade de movimento (equação do *momentum*) nas três direções coordenadas e da equação de conservação da massa (equação da continuidade).

O Problema Hidrodinâmico. O estudo se inicia com William et al. (1902), que observaram o deslocamento da velocidade máxima na direção externa da curvatura do tubo. Eustice (1910), utilizando a técnica dos traçadores de Reynolds, observou a existência do escoamento secundário em forma de duas helicoidais.

A primeira solução se deve a Dean (1927), que mostrou que os efeitos centrífugos deslocam o pico da velocidade principal para o lado externo da curvatura e dão origem ao escoamento secundário. Além disso, estabeleceu a representação deste escoamento por um grupo adimensional, que hoje leva seu nome:

$$K = Re \sqrt{a/r_c} \quad (1)$$

onde  $K$  é o número de Dean,  $a$  o raio do tubo,  $r_c$  o raio de curvatura e  $Re$  o número de Reynolds dado por

$$Re = \bar{\rho} a \bar{w} / \bar{\mu} \quad (2)$$

onde  $\bar{w}$  é a velocidade principal média,  $\bar{\rho}$  e  $\bar{\mu}$  são a massa específica e a viscosidade médias na seção transversal, ponderadas pela área transversal de cada fluido:

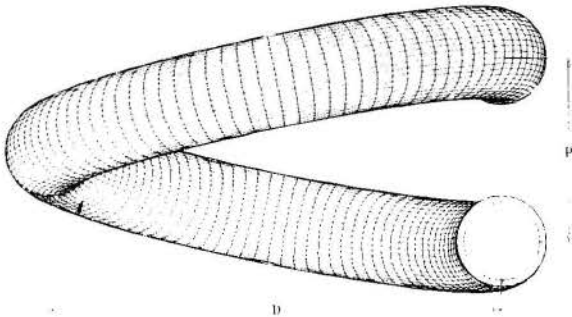


Figura 1 - Tubo circular helicoidal.

$$\bar{\rho} = \rho_n \left( (2\delta)^2 (1 - \rho^*) + \rho^* \right) \quad (3)$$

$$\bar{\mu} = \mu_n \left( (2\delta)^2 (1 - \mu^*) + \mu^* \right) \quad (4)$$

onde  $\rho^*$  e  $\mu^*$  são as razões entre as propriedades do filme e do núcleo:

$$\rho^* = \rho_f / \rho_n \quad (5)$$

$$\mu^* = \mu_f / \mu_n \quad (6)$$

Desta forma, o escoamento em tubos curvos é caracterizado pelo número de Dean e pela razão de curvatura ( $r_c/a$ ), sendo que quando essa última é grande o escoamento é controlado apenas pelo número de Dean.

Segundo Berger et al. (1983) o número de Dean é a medida do escoamento secundário, e pode ser interpretado como:

$$K = \sqrt{F_i F_c} / F_v \quad (7)$$

sendo  $F_i$  a força de inércia ( $F_i = \rho a^2 \bar{w}^2$ ),  $F_c$  a força centrífuga ( $F_c = \rho a^3 \bar{w}^2 / r_c$ ) e  $F_v$  a força viscosa ( $F_v = \mu a \bar{w}$ ).

O escoamento secundário é explicado pelo surgimento de um gradiente de pressão induzido centrifugamente na seção transversal devido a diferença de velocidade entre o fluido escoando mais lentamente na parte interna e mais rapidamente na parte externa da curva, como ilustra a Fig. 2.

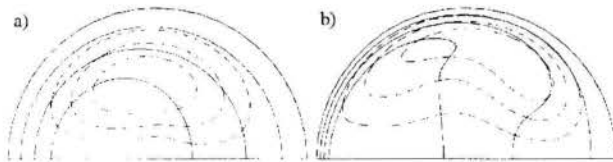


Figura 2 - Padrão do escoamento secundário.  
a) Baixos número de Dean; b) Altos número de Dean.  
(— velocidade principal, -- linha de corrente.)

A partir de um determinado número de Dean as equações de Navier-Stokes apresentam solução dual, com o aparecimento de quatro vórtices (Ito, 1987). O limite do número de Dean para isso ocorrer não está claro na literatura, mas Brum (1988) citando Nandakumar e Masliyah (1982) afirma ser esse fenômeno mais comum em geometrias cuja parede externa do duto é plana.

Recentemente, Nogueira (1993) estudou o escoamento completamente desenvolvido de fluidos imiscíveis em tubos retos. Ziviani (1991) resolveu numericamente o problema do escoamento anular de dois líquidos imiscíveis em tubos retos e curvos, na região de entrada, considerando a interface entre eles circular e concêntrica ao eixo do tubo. Braga (1995) estudou a região completamente desenvolvida, com as mesmas considerações de Ziviani.

**O Problema Térmico.** Os trabalhos experimentais correlacionando o número de Nusselt médio com os diversos parâmetros do problema no escoamento monofásico em tubos curvos iniciam com Richter (1919) e prossegue com os trabalhos de Jeschke (1925), McAdams (1942), Berg e Bonilla (1950), Kirpikov (1957), Prabhudesai e Shah (1959) e Seban e McLaughlin

(1963).

O primeiro trabalho teórico deveu-se a Mori e Nakayama (1965) que, com a condição de contorno de fluxo de calor prescrito na parede (condição de contorno de 2ª espécie), utilizam o modelo de camada limite restrito a problemas completamente desenvolvidos e altos números de Dean; resolvem também o caso turbulento (1967a) e com condição de contorno de temperatura de parede constante (condição de contorno de 1ª espécie), além de apresentarem correlações para o número de Nusselt (1967b).

Dravid et al. (1971) apresentam uma solução numérica, para as regiões de entrada térmica e desenvolvida, usando o modelo de camada limite e resolvendo pelo método numérico ADI (Implícito de Direções Alternadas). São utilizadas condições de contorno de 1ª e 2ª espécies.

Akiyama e Cheng (1971) resolvem o problema hidrodinâmica e termicamente desenvolvido com condição de contorno de 1ª e 2ª espécies, para altos números de Dean. Kalb e Seader (1972) fazem o mesmo sem a restrição no número de Dean. Os mesmos autores apresentam soluções para condição de contorno de 1ª espécie (Akiyama e Cheng em 1972 e Kalb e Seader em 1974).

Patankar et al. (1974) resolvem numericamente as regiões de entrada e completamente desenvolvidas, com condições de contorno de 1ª e 2ª espécies.

Bentwich e Sideman (1964) estudam a transferência de calor no escoamento anular de dois líquidos em um tubo reto horizontal, nas regiões de entrada e completamente desenvolvidas, com condição de contorno de 1ª espécie.

Lieb et al. (1977) investigam a transferência de calor no escoamento anular de dois líquidos em um tubo reto vertical, com condição de contorno de 1ª espécie.

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

**Sistema de Coordenadas.** A configuração geométrica e o sistema de coordenadas utilizado estão representados na Fig. 3.



Figura 3 - Geometria e sistema de coordenadas adotado.

**Modelamento Matemático.** No escoamento completamente desenvolvido as derivadas com relação a  $z$  são nulas, o gradiente de pressão constante e

$$u = u(r, \omega), \quad v = v(r, \omega), \quad w = w(r, \omega), \quad \theta = \theta(r, \omega), \quad (8)$$

onde  $\theta$  é a temperatura adimensional, definida por

$$\theta(r, \omega) = (T(r, \omega, z) - T_s) / (T_{ref}(z) - T_s). \quad (9)$$

Aqui  $T_{ref}$  é uma temperatura de referência. Com isso, supõe-se



que a pressão possa ser escrita como a soma de um valor médio na seção ( $\bar{p}$ ) com uma flutuação na seção ( $p^{**}$ ), ou seja,

$$p(r, \omega, z) = \bar{p}(z) + p^{**}(r, \omega, z). \quad (10)$$

Considera-se ainda que a flutuação de pressão é independente da posição axial, pois,

$$\frac{\partial p^{**}}{\partial z} \ll \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}, \quad (11)$$

Define-se ainda uma pressão modificada que inclua os efeitos gravitacionais

$$p^* = p^{**} + \rho g r \sin \omega. \quad (12)$$

Considerando apenas tubos com grande raio de curvatura, as equações descritivas do problema se reduzem a: equação da continuidade:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho u) = 0 \quad (13)$$

equação da conservação da quantidade de movimento direção axial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v w) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho u w) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial \omega} \right) & \end{aligned} \quad (14)$$

direção radial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho u v) &= -\frac{\partial p^*}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial \omega} \right) &+ Sc_v + Sp_{v,v} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{onde: } Sc_v = \frac{\rho u^2}{r} + \frac{\rho w^2}{r_c} \cos \omega - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \omega} \quad (16)$$

$$Sp_{v,v} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (17)$$

direção angular:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho u u) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p^*}{\partial \omega} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \omega} \right) &+ Sc_u + Sp_{u,u} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{onde: } Sc_u = -\frac{\rho w^2}{r_c} \sin \omega + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \omega} \quad (19)$$

$$Sp_{u,u} = -\frac{\rho v}{r} - \frac{\mu}{r^2} \quad (20)$$

equação da energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_c T) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho u_c T) &= \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( k \frac{\partial T}{\partial \omega} \right) &+ Sc_T \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{onde: } Sc_T = -\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (22)$$

As condições de contorno do problema são:

- Na parede do tubo ( $r = a$ ). Não deslizamento, impermeabilidade e temperatura superficial constante ou fluxo de calor constante:

$$u = 0, v = 0, w = 0 \text{ e } T = T_s \text{ ou } -k \frac{\partial T}{\partial r} = q_s. \quad (23)$$

- No plano de simetria ( $\omega = 0$  e  $\omega = \pi$ ). Devido à simetria do problema, não há fluxo de massa ou calor nesse plano:

$$u = 0, \frac{\partial v}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial w}{\partial \omega} = 0 \text{ e } \frac{\partial T}{\partial \omega} = 0. \quad (24)$$

- No eixo do tubo ( $r = 0$ ). O eixo do tubo é um ponto singular com área igual a zero:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, v = 0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \text{ e } \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (25)$$

Interface entre os líquidos. Devido à complexidade dos fatores que afetam a forma e a posição da interface e observando os trabalhos experimentais de Anderson e Hills (1974) e Maddock e Lacey (1974), foram feitas simplificações no modelo. O modelo utilizado considera que os dois líquidos escoam completamente segregados, não havendo penetração, formando uma interface sem espessura, lisa, circular e concêntrica ao eixo do tubo (Ziviani, 1991). São desconsiderados portanto os efeitos da instabilidade de Kelvin-Helmholtz provocada pelo salto de viscosidade na interface.

A região ocupada por cada líquido é definida pela posição da interface ( $\delta$ ). Essa posição é tal que satisfaça a equação de conservação da massa para cada líquido, ou seja:

$$\dot{m}_n = 2 \int_0^\pi \int_0^\delta \rho_n w r dr d\omega, \quad (26)$$

$$\dot{m}_f = 2 \int_0^\pi \int_\delta^a \rho_f w r dr d\omega. \quad (27)$$

O modelo apresentado é válido em todo ponto do domínio em que as propriedades sejam contínuas e continuamente diferenciáveis. No contato entre os dois líquidos ( $r = \delta$ ), devido às discontinuidades nas propriedades físicas, as equações de conservação assumem formas específicas, representando continuidade de velocidade, de temperatura, de tensões de cisalhamento e de fluxo de calor:

$$\begin{aligned} u_{\delta^+} = u_{\delta^-}, v_{\delta^+} = v_{\delta^-}, w_{\delta^+} = w_{\delta^-}, T_{\delta^+} = T_{\delta^-}, \\ \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{\delta^+} = \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{\delta^-}, \left[ \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right]_{\delta^+} = \left[ \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right]_{\delta^-}, \\ \left[ \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\delta^+} = \left[ \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\delta^-} \text{ e } \left[ k \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{\delta^+} = \left[ k \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{\delta^-}. \end{aligned} \quad (28)$$

Número de Nusselt. Para comparação entre a troca de calor foram calculados números de Nusselt assim definido:



$$Nu = \frac{h2a}{k_f} \quad (29)$$

onde  $h$  é o coeficiente convectivo e  $k_f$  a condutividade térmica do filme.

### METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

As equações foram discretizadas segundo o método de Diferenças Finitas com formulação em volumes de controle, conforme descrito por Patankar (1980). Foi utilizado o esquema de interpolação *Power-law* e o acoplamento pressão-velocidade nas direções angular e radial foi feito com o algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Metod for Pressure Linked Equations). O acoplamento pressão-velocidade na direção axial foi feito por um procedimento semelhante. Foi adotado um esquema desencontrado de alocação das variáveis (Patankar, 1980). A malha adotada foi não-homogênea, com refinamento nas regiões próximas à parede e à interface

### VALIDAÇÃO DO MODELO

Não foram encontrados dados experimentais de escoamento anular, por isso o modelo foi validado simulando um escoamento monofásico. Para a validação do modelo foram comparados os perfis de temperatura com resultados experimentais de Mori e Nakayama (1965) e numéricos obtidos por Patankar et al. (1974).

Os resultados nas seções A-A e B-B (ver Fig. 3) são mostrados na Fig. 4 onde  $T_{ref}$  (ver Eq. (9)) é a temperatura do centro do tubo. A discrepância observada entre os resultados encontrados e os experimentais de Mori e Nakayama na parte interna da curva (seção A-A) se deve à dificuldade, no trabalho experimental, de se manter a temperatura da parede do tubo uniforme na seção. No entanto concordam bem na parte externa da seção, na seção B-B e com os resultados de Patankar et al., cujo erro máximo é 6,8 %.

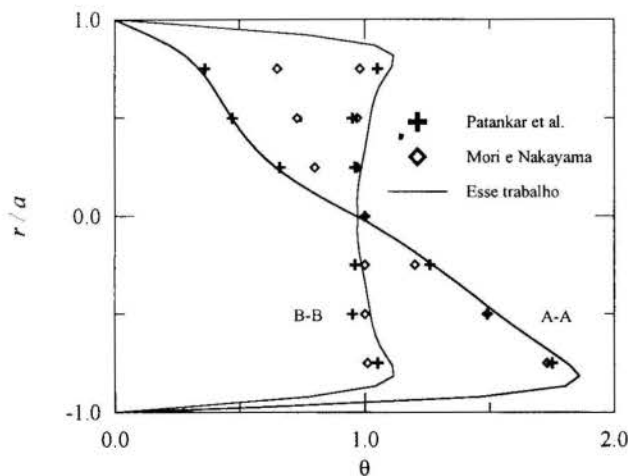


Figura 4 - Validação do modelo.

### RESULTADOS

Foram analisados os efeitos do número de Dean sobre os perfis de temperatura em duas composições: querosene / água e água / querosene, onde o primeiro componente de cada mistura escoava no filme. Na Tab. 1 estão indicadas as relações entre as

Tabela 1 - Relação entre propriedades físicas nas composições consideradas (filme / núcleo).

	Querosene / água	Água / querosene
$\rho^*$	1,04	0,9615
$\mu^*$	2,2459	0,4453
$k^*$	0,3196	3,1289
$c_p^*$	0,4762	2,1186

propriedades dos líquidos nas composições estudadas.

Neste trabalho foi utilizada uma razão de curvatura ( $r_c/a$ ) constante igual a 6,25 em todas as simulações. A definição desse valor se deu em função de sua utilização por Patankar et al. (1974). A razão de vazões considerada foi 0,5.

Nas isocurvas do escoamento principal (Fig. 5 e 9) está representada a velocidade principal adimensional, ou seja,  $w/\bar{w}$ . Nas isotermas (Fig. 7 e 11) está apresentada a temperatura adimensional  $\theta$ , com  $T_{ref}=T_{média}$  (ver Eq. (9)). Na representação dos vetores do escoamento secundário (Fig. 6 e 10), para melhor visualização, as figuras não mantêm a mesma escala. Na mistura querosene / água um vetor da Fig. 6b equivale a 13,9 vezes um da Fig. 6a; na mistura água / querosene o fator de escala é 28,8.

Foram feitos diversos testes para definir o número de malhas nas direções radial e angular. Foi escolhida uma malha com 62 pontos na direção radial e 51 na direção angular.

Neste trabalho foram estudadas situações onde ocorrem apenas os vórtices principais, o que ocorreu com número de Dean até 600 para a composição querosene / água e até 400 para a composição água / querosene.

**Querosene / água.** Nesta composição o líquido mais viscoso e com menor condutividade térmica escoava no filme; o que significa que a introdução de um filme de querosene dificulta tanto o escoamento quanto a transferência de calor, comparado ao escoamento monofásico de água.

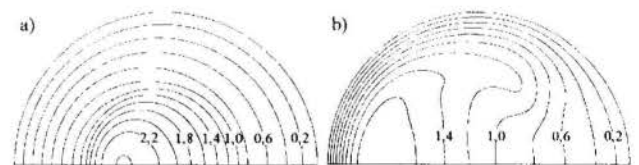


Figura 5 - Escoamento principal. Querosene / água. a)  $K=30$ ; b)  $K=600$ .

Nas Fig. 5 e 6 observa-se que o escoamento com  $K=600$  apresenta acentuada variação da velocidade principal na região próxima à parede e um escoamento secundário muito mais intenso que o escoamento com  $K=30$ , devido ao aumento da força centrífuga. Por isso, a transferência de calor no primeiro caso é muito mais eficiente. Esse efeito pode ser observado no

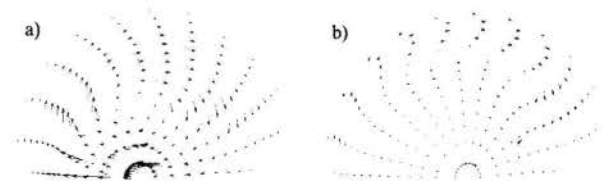


Figura 6 - Escoamento secundário. Querosene / água. a)  $K=30$ ; b)  $K=600$ .

gráfico de  $Nu \times K$  apresentado na Fig. 8.

Com a análise das Fig. 6 e 7 conclui-se que os gradientes de velocidade maiores no escoamento secundário provocam gradientes mais acentuados de temperatura e maior eficiência no processo de troca de calor. Por isso, quanto maior o número de Dean maior será a transferência de calor.

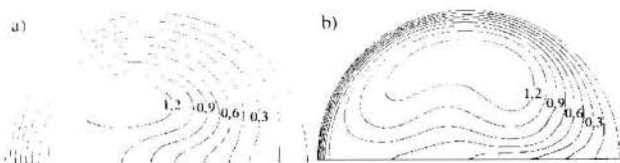


Figura 7 - Isotermas. Querosene / água.  $T_w$  constante. a)  $K = 30$ ; b)  $K = 400$ .

Conforme já observado por Patankar et al. (1974) no escoamento monofásico, as condições de contorno de fluxo prescrito e temperatura prescrita não alteram substancialmente os resultados obtidos, como observado na Fig. 8. São apresentadas apenas as isotermas para a condição de temperatura prescrita já que a forma dos perfis de temperatura também são semelhantes.

As Eq. (30) e (31) fornecem as correlações do número de Nusselt com o número de Dean para condição de contorno de

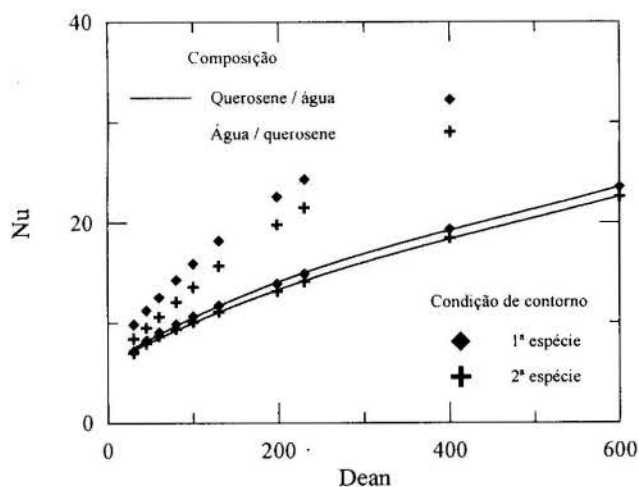


Figura 8 - Efeito do número de Dean no número de Nusselt.

fluxo prescrito ( $Nu_q$ ) e de temperatura prescrita ( $Nu_T$ ).

$$Nu_T = 5,981 + 5,135 \times 10^{-2} K - 6,329 \times 10^{-5} K^2 + 4,437 \times 10^{-8} K^3 \quad (30)$$

$$Nu_q = 5,881 + 4,573 \times 10^{-2} K - 4,964 \times 10^{-5} K^2 + 3,324 \times 10^{-8} K^3 \quad (31)$$

Água / querosene. Nesta situação o líquido menos viscoso e com maior condutividade escoo no filme, facilitando tanto o escoamento quanto a troca de calor, quando comparado ao escoamento monofásico de querosene.

Assim como no caso anterior, observa-se nas Fig. 9 e 10 uma diminuição dos gradientes de velocidade próximo ao centro do tubo e um conseqüente aumento desse gradiente junto à parede, e o aumento do escoamento secundário com o aumento do número de Dean.

O efeito desse aumento é observado na Fig. 11, onde vemos que, com o aumento do número de Dean, as isotermas se aproximam da parede do tubo, indicando um maior gradiente de

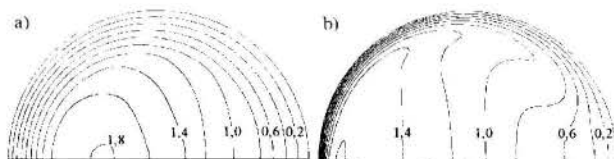


Figura 9 - Escoamento principal. Água / querosene. a)  $K = 30$ ; b)  $K = 400$ .

temperatura, ou seja, maior transferência de calor. Isso pode ser observado na Fig. 8.

A variação do número de Nusselt com o número de Dean para esse caso é:

$$Nu_T = 6,797 + 1,047 \times 10^{-1} K - 1,496 \times 10^{-4} K^2 + 1,165 \times 10^{-7} K^3 \quad (32)$$

$$Nu_q = 5,887 + 8,34 \times 10^{-2} K - 7,109 \times 10^{-5} K^2 + 1,822 \times 10^{-8} K^3 \quad (33)$$

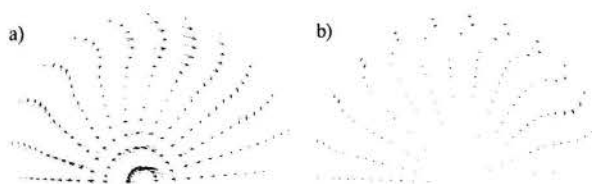


Figura 10 - Escoamento secundário. Água / querosene. a)  $K = 30$ ; b)  $K = 400$ .

Comparação das composições estudadas. Analisando os dois casos estudados vimos que a troca de calor é influenciada fundamentalmente pelo escoamento secundário.

As Fig. 5 e 9 nos mostram que há um maior gradiente de velocidade principal próximo à parede externa na composição água / querosene devido à menor viscosidade do líquido que escoo no filme.

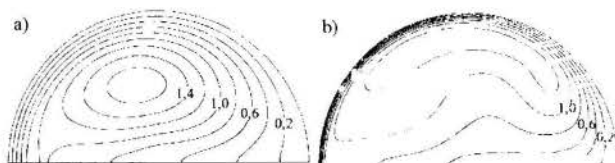


Figura 11 - Isotermas. Água / querosene.  $T_w$  constante. a)  $K = 30$ ; b)  $K = 400$ .

Pelo mesmo motivo, comparando as Fig 6 e 10 percebe-se que o escoamento secundário é maior nessa composição que na querosene / água.

Assim sendo, a troca de calor é maior na composição água / querosene, caracterizado pelo maior gradiente de temperatura próximo à parede (Fig. 7 e 11) e pelo número de Nusselt (Fig. 8).

## CONCLUSÕES

A presença da curvatura no tubo desloca o máximo da velocidade principal para próximo da parede externa e causa um escoamento secundário. Isso acentua a troca convectiva aumentando a eficiência da troca de calor.

Como esperado, o aumento simultâneo do gradiente de velocidade principal próximo à parede e do escoamento

secundário com o número de Dean levam a um aumento do número de Nusselt, melhorando a eficiência da troca de calor.

O fato da condição de contorno ser de temperatura prescrita ou de fluxo de calor prescrito não altera significativamente a troca de calor.

Devido à importância do escoamento anular em muitas áreas da engenharia, considera-se relevante os resultados obtidos, ainda que com um modelo simplificado. Modelos mais complexos, que se aproximem melhor do problema real, estão sendo desenvolvidos pelos autores.

## REFERÊNCIAS

Akiyama, M. e Cheng, K. C., 1971, "Boundary Vorticity Method for Laminar Forced Convection Heat Transfer in Curved Pipes." *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 14, pp. 1659-1675.

Akiyama, M. e Cheng, K. C., 1972, "Laminar Forced Convection Heat Transfer in Curved Pipes with Uniform Wall Temperature." *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 1426-1431.

Anderson, G. H. e Hills, P. D., 1974, "Two-Phase Annular Flow in Tube Bends." *Symp. Multi-Phase Flow Systems*, University of Strathclyde, Glasgow, Paper J1. Publicado como *Instn. Chem. Engrs. Symp. Series n° 38*.

Bentwitch, M. e Sideman, S., 1964, "Temperature Distribution and Heat Transfer in Annular Two-phase (Liquid-Liquid) Flow." *The Canadian J. of Chemical Engineering*, Fevereiro, pp. 9-13.

Berg, R. B. e Bonilla, C. F., 1950, "Heating of Fluids in Coils." In: Nogueira, E., 1988, "Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Fluidos Imiscíveis sem Estratificação." Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP.

Berger, S. A., Talbot, L. e Yao L.-S., 1983, "Flow in Curved Pipes." *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, vol. 15, pp. 461-512.

Braga, F. P., 1995, "Escoamento Anular Desenvolvido de Dois Líquidos Imiscíveis no Interior de um Tubo Curvo, em Regime Laminar Permanente." Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, MG.

Brum, N. C. L., 1988, "O Problema de Graetz em Tubos Curvos." Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Dean, W. R., 1927, "Note on the Motion of the Fluid in a Curved Pipe." *Philos. Mag.* n° 20, pp. 208-223.

Dravid, A. N., Smith, K. A., Merrill, E. W. e Brian, P. L. T., 1971, "Effect of Secondary Flow Motion on Laminar Flow Heat Transfer in Helically Coiled Tubes." *AIChE Journal*, vol. 17, n° 5, pp. 1114-1122.

Eustice, J., 1910, "Flow of Water in a Curved Pipe." *Proc. R. Soc. London Ser. A* 84, pp. 107.

Ito, H., 1987, "Flow in Curved Pipes." *JSME International Journal*, vol. 30, n° 262, pp. 543-552.

Jeschke, D., 1925, "Heat Transfer and Pressure Losses in Coiled Pipes." In: Nogueira, E., 1988, "Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Fluidos Imiscíveis sem Estratificação." Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP.

Kalb, C. E. e Seader, J. D., 1972, "Heat and Mass Transfer Phenomena for Viscous Flow in Curved Circular Tubes." *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 801-817.

Kalb, C. E. e Seader, J. D., 1974, "Fully Developed Viscous-Flow Heat Transfer in Curved Circular Tubes with Uniform Wall Temperature." *AIChE Journal*, vol. 20, n° 2, pp. 340-346.

Kripikov, A. V., 1957, "Heat Transfer in Helically Coiled Pipes." In: Nogueira, E., 1988, "Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Fluidos Imiscíveis sem Estratificação." Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos

Campos, SP.

Leib, T. M., Fink, M. e Hasson, D., 1977 "Heat Transfer in Vertical Annular Laminar Flow of Two Immiscible Liquids." *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 3, pp. 533-549.

McAdams, W. H., 1942, "Heat Transmission." McGraw-Hill.

Maddock, C. e Lacey, P. M., 1974, "The Structure of Two-Phase Flow in a Curved Pipe." *Symp. Multi-Phase Flow Systems*, University of Strathclyde, Glasgow, Paper J2. Publicado como *Instn. Chem. Engrs. Symp. Series n° 38*.

Mori, Y. e Nakayama, W., 1965, "Study on Forced Convective Heat Transfer in Curved Pipes. (1<sup>st</sup> report, laminar region)." *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 8, pp. 67-82.

Mori, Y. e Nakayama, W., 1967a, "Study on Forced Convective Heat Transfer in Curved Pipes. (2<sup>nd</sup> report, turbulent region)." *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 10, pp. 37-59.

Mori, Y. e Nakayama, W., 1967b, "Study on Forced Convective Heat Transfer in Curved Pipes. (3<sup>rd</sup> report, theoretical analysis under the condition of uniform wall temperature and practical formulae)." *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 10, pp. 681-695.

Nandakumar, K e Masliyah, J. H., 1982, "Bifurcation in Steady Laminar Flow through Curved Tubes." In: Brum, N. C. L., 1988, "O Problema de Graetz em Tubos Curvos." Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Nogueira, E., 1988, "Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Fluidos Imiscíveis sem Estratificação." Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP.

Nogueira, E., 1993., "Solução Analítica para Escoamento e Transferência de Calor em Regime Bifásico Anular Vertical." Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Patankar, S. V., Prata, V. S. e Spalding, D. B., 1974, "Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes." *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 62, part. 3, pp. 539-551.

Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow." Hemisphere Publishing Corp.

Prabhudesai, R. K. e Shah, S. M., 1959 "Heat Transfer through Helical Coils." In: Nogueira, E., 1988, "Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Fluidos Imiscíveis sem Estratificação." Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP.

Richter, G. A., 1919, "Double Pipe Heat Interchangers." In: Nogueira, E., 1988, "Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Fluidos Imiscíveis sem Estratificação." Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP.

Seban, R. A. e McLaughlin, E. F., 1963, "Heat Transfer in Tube Coils with Laminar and Turbulent Flow." *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 6, pp. 387-395.

William, G. S., Hubbel, C. W. e Fenkel, G. H., 1902, "Experiments at Detroit, Mich., on the Effect of Curvature upon the Flow of Water in Pipes." *Trans. ASCE*, vol. 47, pp. 1-196.

Yao, L. S. e Berger, S. A., 1978, "Flow in Heated Curved Pipes." *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 88, part. 2, pp. 339-354.

Ziviani, M., 1991, "Escoamento Anular de Dois Líquidos Imiscíveis em Tubos Retos e Curvos." Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

## ABSTRACT

The present paper reports the heat transfer in the fully developed region in a steady laminar annular flow of two immiscible fluids inside an horizontal and slightly curved tubes with circular cross section. The finite volume method was used to solve the mass, momentum and energy conservation equations. Results are compared to literature data.





## MEZCLADO DEL LIQUIDO EN UNA COLUMNA DE BURBUJEO DE TUBOS CONCENTRICOS EN OPERACION TRIFASICA

E. Ventura-Medina, A.E. Saéz, F.F. Pironti  
 Departamento de Termodinámica y Fenómenos de Transferencia  
 Universidad Simón Bolívar, Apartado 89000  
 Caracas, Venezuela



### RESUMEN

*El objetivo de este estudio fue investigar el mezclado del líquido en una columna de burbujeo de tubos concéntricos (CBTC) de 150 l con un sistema trifásico constituido por aire, agua y arena a altas concentraciones de sólidos en operación semicontinua y continua. El equipo experimental está formado por dos tubos de plexiglas dispuestos de forma concéntrica. La velocidad superficial de gas varió desde 0,057 hasta 0,22 m s<sup>-1</sup>. La concentración de sólidos varió desde 120 hasta 500 kg m<sup>-3</sup>. La operación fue semicontinua y continua. Se inyectó un trazador al sistema y a partir de las respuestas, fueron determinados el tiempo de circulación y de mezclado. Los datos experimentales fueron comparados con un modelo de N tanques en serie con recirculación interna y aunque el ajuste no es perfecto, el modelo muestra la tendencia correcta y en todos los casos analizados el número de tanques en serie obtenidos en la comparación fue cercano a 28. Se estableció una correlación empírica para el tiempo de circulación.*

### INTRODUCCION

Las columnas de burbujeo son ampliamente usadas como reactores químicos en procesos industriales. Estas consisten en recipientes a través de los cuales una mezcla multifásica fluye en cocorriente ascendente. En algunas aplicaciones es necesario incrementar la circulación y el contacto entre las fases lo cual puede lograrse al colocar un tubo en el interior de la columna de forma concéntrica (lazo interno) o un tubo externo que conecte el tope y el fondo (lazo externo). En la configuración de lazo interno, el tubo interno permite formar canales de circulación mediante la entrada del chorro de gas por interior del mismo, con lo cual se induce una recirculación global en la que el flujo es ascendente por el tubo interno y descendente en la región anular. Para estos sistemas se emplea usualmente una sección de entrada cónica a fin de ayudar la circulación del líquido y el sólido además de evitar la deposición del sólido.

Las columnas de burbujeo de tubos concéntricos (CBTC) son de gran interés ya que tienen un simple diseño, mezclado satisfactorio y gran capacidad para transferencia de masa. Estos reactores ofrecen la posibilidad de una muy alta y efectiva fluidización lo cual sugiere un alto potencial en aplicaciones de procesos trifásicos donde el gas, el líquido y el sólido deban permanecer en contacto. Estos sistemas tienen gran aplicación en procesos de fermentación, reactores químicos y procesos para tratamiento de efluentes. En una CBTC la presencia de una alta concentración de sólidos puede afectar el patrón de circulación y mezclado normalmente observado en un sistema bifásico. En un sistema de este tipo los sólidos pueden ser uno de los reactivos o un catalizador. Algunos parámetros pueden establecer el patrón de mezclado en una CBTC tales como el tiempo de circulación y mezclado, la velocidad superficial de gas, la concentración de sólidos y la geometría del sistema.

El objetivo de este estudio fue investigar el mezclado del líquido mediante un análisis de la distribución de los tiempos de residencia incluyendo el tiempo de circulación y de mezclado. La operación se realizó en forma semicontinua y continua y operación trifásica (aire, arena y agua) para diferentes velocidades superficiales de gas, concentración de sólidos y velocidad superficial de líquido.

### EQUIPO EXPERIMENTAL

El equipo experimental usado está formado por una sección cilíndrica con un diámetro interno de 0,3 m y 3 m de longitud. El tubo interno dispuesto de forma concéntrica tiene un diámetro de 0,14 m y 2 m de longitud con un espesor de pared de 0,5 cm. La sección de entrada es de forma cónica con un ángulo de 60° y una longitud de 0,26 m (Fig.1). El tubo interno fue colocado 9 cm encima de la base del cono tal como proponen Pironti *et al.* (1995) para este sistema. La columna dispone de 21 puntos de toma muestra localizados axialmente con separación de 9 cm que permiten determinar la concentración local. La sección de tope que corresponde a la zona de separación del gas posee dos salidas que permiten la recirculación de una porción de la suspensión hacia un tanque para luego ser introducida nuevamente a la columna mediante una bomba de diafragma de modo que pueda realizarse la operación en continuo. Para medir la variación de la concentración de trazador en el líquido se dispone de dos electrodos de conductividad, colocados uno en la zona de separación del gas (tope) y otro en la sección cónica (fondo). Los electrodos están conectados a un sistema de adquisición de datos que permite recopilar datos de concentración en función del tiempo.

Los experimentos fueron realizados a presión atmosférica y 25°C. Se usó aire como fase gaseosa, el cual se introdujo a la columna por la parte inferior de esta (sección cónica). El flujo de aire se midió mediante un rotámetro pre-calibrado. La fase líquida fue agua y la fase sólida arena polidispersa de densidad 2800 kg m<sup>-3</sup> con un tamaño de partícula promedio de 280 μm. La operación fue semicontinua y continua, siendo la altura de operación 2,2 m. La velocidad superficial de gas basada en la sección transversal del tubo interno fue variada desde 0,057 hasta 0,22 m s<sup>-1</sup> y la velocidad superficial del líquido basada en la sección transversal de la columna se varió desde 0 hasta 0,0155 m s<sup>-1</sup>. La concentración de sólidos fue variada desde 100 hasta 500 kg m<sup>-3</sup>.

La señal de entrada que se usó fue un pulso ideal de solución salina (10- 15 g l<sup>-1</sup>) que se introdujo por el tope de la columna. La respuesta del sistema es monitoreada mediante el sistema de adquisición de datos que permite tomar datos cada 0,1 s. A partir de las respuestas del sistema se determinaron el tiempo de

circulación y mezclado. La retención global de gas se midió como la diferencia entre la altura de operación y la de la suspensión estancada. La distribución axial de sólidos se determinó mediante muestras de suspensión tomadas a lo largo de la columna para diferentes posiciones radiales. La concentración puntual se determinó midiendo el volumen de las muestras y su peso después de secarlas. El tiempo de circulación se determinó como la distancia entre dos picos consecutivos en la curva de respuesta y el tiempo de mezclado fue medido como el tiempo requerido para que el sistema alcanzara 5% de no homogeneidad en la curva de respuesta.

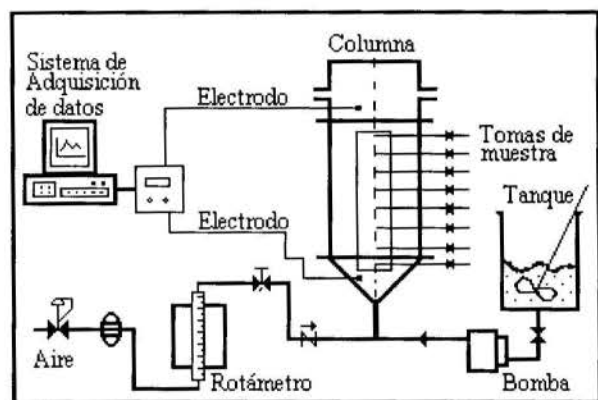


Figura 1- Diagrama del equipo experimental.

## BASE TEORICA

El tiempo de circulación se determinó a través de las curvas de respuesta del trazador. Con los valores obtenidos de esta forma se ha propuesto una correlación empírica para el tiempo de circulación en el rango de operación dado con respecto a la velocidad superficial de gas ( $U_g$ ), la fracción volumétrica de sólidos ( $\phi_s$ ) y la velocidad superficial de líquido ( $U_l$ ). Muchos investigadores han determinado relaciones de proporcionalidad del tiempo de circulación con algunos de estos parámetros. Kawase y Moo-Young (1989), midieron tiempos de circulación en una columna de burbujeo de tubos concéntricos y establecieron que este disminuye con el aumento de la velocidad superficial de gas. Verlaan *et al.* (1989) investigaron la dispersión axial y la transferencia de masa en una columna de burbujeo con un lazo externo y encontraron que el número de Bodenstein basado en la velocidad superficial del líquido disminuye cuando el tiempo de circulación aumenta y el tiempo de mezclado parece ser directamente proporcional al número de Bodenstein. Kenard y Janekeh (1991) estudiaron el mezclado en un fermentador de tubos concéntricos y establecieron que el tiempo de circulación es inversamente proporcional a la velocidad superficial de gas y determinaron un coeficiente de dispersión a partir de la teoría de penetración. En este trabajo se propone para el tiempo de circulación la siguiente expresión:

$$t_c = a \frac{(1 - \phi_s / 0.58)^b U_g^c}{(1 + d U_l^e)} \quad (1)$$

donde a,b,c,d,e son constantes determinadas mediante una regresión de los datos experimentales y  $\phi_s$  es la fracción de sólidos que ha sido relacionada con la mayor fracción de sólidos que puede tenerse en una columna de burbujeo para que ocurra fluidización del lecho ( $\phi_s = 0.58$ ). La fracción de sólidos se

relaciona con la retención global de gas ( $\epsilon_g$ ) y la concentración de sólidos ( $C_s$ ) como sigue:

$$\phi_s = (1 - \epsilon_g) \frac{C_s}{\rho_s} \quad (2)$$

Merchuk y Siegel (1988) sugieren un modelo para el mezclado del líquido en CBTC en el que consideran tres partes diferentes: la sección de ascenso, el separador de gas y la sección de descenso. Una versión simplificada del modelo supone que el separador de gas es un tanque de mezcla completa mientras que las zona de ascenso (tubo interno) y de descenso (ánulo) pueden considerarse como flujo pistón. Obradovic *et al.* (1994) estudiaron el mezclado del líquido en un reactor con un tubo interno en operación trifásica y determinaron que el mezclado del líquido puede ser descrito usando un modelo de dispersión axial con el número de Bodenstein en un rango de 0,3 a 0,9. Ellos analizan el flujo de líquido en el tubo interno y en ánulo como un flujo pistón con dispersión axial mientras que la sección del tope puede aproximarse como un tanque de mezcla ideal. Wen-Jan *et al.* (1994) estudiaron el mezclado del líquido en la zona de ascenso y descenso de un reactor trifásico con lazo interno usando el modelo de flujo pistón con dispersión axial y mediante un análisis en el dominio temporal determinan el número de Bodenstein en cada sección del sistema.

En este trabajo el mezclado del líquido es estudiado por un modelo de N tanques en serie con recirculación interna originalmente propuesto por Levenspiel (1986). El modelo de tanques en serie puede representar desviaciones de un flujo tipo pistón o de un tanque de mezcla perfecta que resulta sencillo debido a que tiene un solo parámetro de ajuste que corresponde al número de tanques N y la solución analítica no depende de la posición del punto de medida. El modelo original propuesto por Levenspiel (1986) da una expresión para la concentración en función del tiempo cuando la medida se realiza en el mismo punto de inyección tal como sigue:

$$C = N e^{-N\theta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(N\theta)^{mN-1}}{(mN-1)!} \quad (3)$$

donde C representa la concentración adimensional, N el número total de tanques, m es el número de pasos del trazador y  $\theta$  es el tiempo adimensional. En el equipo experimental de este trabajo hay dos puntos para medir la concentración del trazador (Fig. 2) uno en la sección de tope y otro en la sección de fondo. La inyección en todos los experimentos se realizó por el tope por lo que es necesario modificar el modelo anterior para el caso de las medidas en el cono. Si la respuesta del sistema es medida en la sección cónica el modelo debe considerar la fracción de volumen desde el punto de inyección hasta el punto de medida. La relación de los volúmenes de la zona de ascenso ( $V_a$ ) y descenso ( $V_d$ ) para este sistema experimental con respecto al volumen total (V) es:

$$V_a = \frac{1}{4} V \quad \text{y} \quad V_d = \frac{3}{4} V \quad (4)$$

Por lo tanto si todos los tanques en el modelo tienen igual volumen, la relación entre el número de tanques en cada sección y el número de tanques totales debe ser igual a la relación entre el volumen de cada sección y el volumen total. Considerando el sistema mostrado en la Figura 2b, en el primer paso de trazador la respuesta medida en el tanque j está dada por la siguiente expresión:



$$C^1 = \frac{N e^{-N\theta} (N\theta)^{j-1}}{(j-1)!} \quad (5)$$

en el segundo y tercer paso de trazador la concentración adimensional será:

$$C^2 = \frac{N e^{-N\theta} (N\theta)^{N+j-1}}{(N+j-1)!} \quad (6)$$

$$C^3 = \frac{N e^{-N\theta} (N\theta)^{2N+j-1}}{(2N+j-1)!} \quad (7)$$

para el paso m:

$$C^m = N e^{-N\theta} \frac{(N\theta)^{(m-1)N+j-1}}{((m-1)N+j-1)!} \quad (8)$$

considerando  $j = \frac{3}{4} N$  y aplicando el principio de superposición, la solución es de la forma siguiente:

$$C = N e^{-N\theta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(N\theta)^{mN-N/4-1}}{(mN-N/4-1)!} \quad (9)$$

Esta solución es consistente solo cuando N es múltiplo de cuatro. Los datos experimentales son adimensionalizados como sigue:

$$\theta = \frac{t}{t_c} \quad \text{y} \quad C = \frac{C^i - C_0}{C_{\infty} - C_0} \quad (10)$$

donde  $C^i$ ,  $C_0$ ,  $C_{\infty}$  son la concentración puntual, la concentración inicial y la concentración final de trazador respectivamente y  $t_c$  es el tiempo de circulación. N fue determinado por comparación de la respuesta experimental y el modelo. El valor de N seleccionado es el que resulta con menor error al comparar la curva experimental y la teórica. El error es calculado según la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (C^e - C^t)^2} \quad (11)$$

El modelo fue usado tanto para operación semicontinua como continua debido a que la curva de respuestas es igual en ambos casos lo cual indica que el sistema es de tiempos característicos pequeños ya que el tiempo para la recirculación interna es mucho menor que el tiempo para la recirculación externa en operación continua.

El coeficiente de dispersión asociado al modelo de N tanques en serie con recirculación interna es calculado mediante la siguiente expresión:

$$D_N = \frac{(V/N)^{2/3}}{t_c} \quad (12)$$

donde  $D_N$  es el coeficiente de dispersión, V es el volumen total del sistema y  $t_c$  el tiempo de circulación.

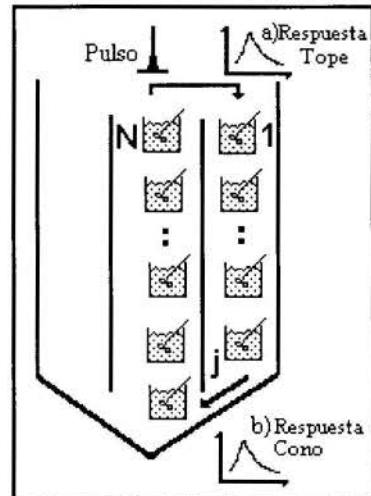


Figura 2 -Modelo de N tanques en serie con recirculación interna a) inyección y medida en el mismo punto b) inyección en el tope y medida en el cono.

## RESULTADOS Y DISCUSION

La distribución axial de sólidos resultó pseudohomogénea a lo largo de los canales del sistema. En todos los casos, la concentración promedio de la zona de descenso (ánulo) fue un poco mayor que en la zona de ascenso (tubo interno) debido a que la retención de fase gaseosa en el ascenso es siempre mayor que en el descenso. La retención global de gas determinada en todos los casos aumentó con un incremento en la velocidad superficial de gas y disminuyó con la concentración de sólidos como se muestra en la Figura 3. En operación semicontinua la retención global de gas fue mayor que en operación continua para iguales condiciones de concentración de sólidos y velocidad superficial de gas debido a la continua entrada de suspensión a la columna lo cual aumentó la fracción de líquido en la misma.

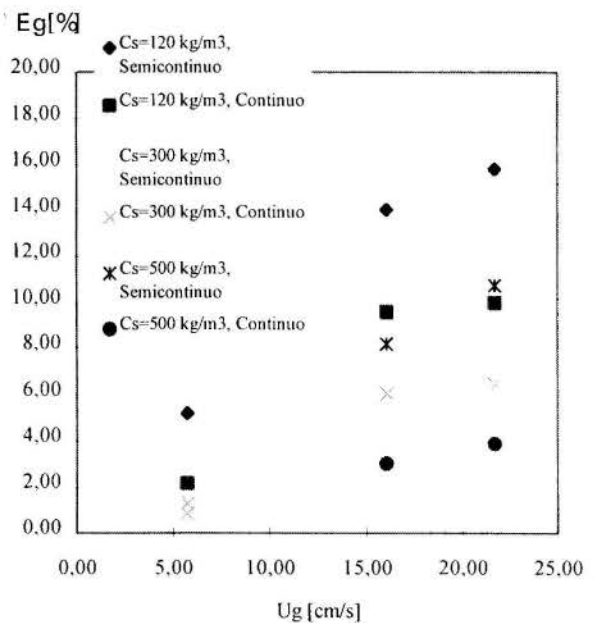


Figura 3- Retención de gas en función de la velocidad superficial de gas en operación semicontinua y continua.

Las curvas típicas de respuesta del sistema en términos de la concentración adimensional de trazador como función del tiempo se muestran en las Figuras 4 y 5. El modelo de N tanques en serie con recirculación se compara con la curva de respuesta experimental en todos los casos. Aunque el ajuste no es perfecto, el modelo describe la tendencia correctamente y en todos los casos analizados el número de tanques obtenidos (N=28) fue prácticamente constante e independiente de la posición de la señal de respuesta con lo cual se demuestra la consistencia del modelo. El número de tanques para este tipo de sistemas es indicador del grado de dispersión del mismo; si el valor de N es muy grande el patrón de flujo se aproxima al flujo pistón mientras que si el valor de N es pequeño el sistema tiende a comportarse como un tanque de mezcla perfecta. Para este estudio, N=28 indica que existe un bajo grado de dispersión con respecto a un flujo pistón.

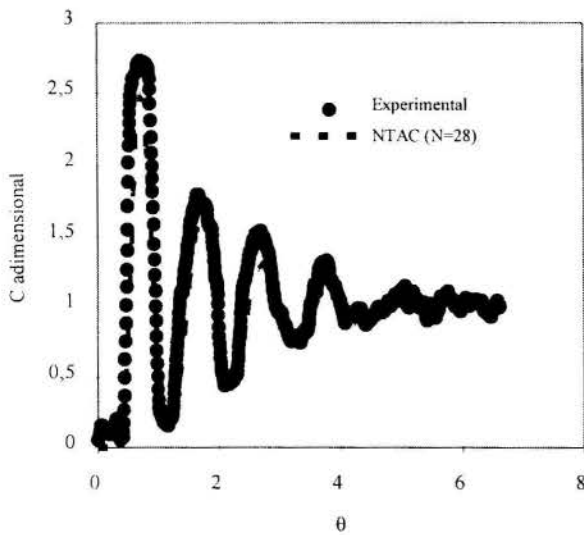


Figura 4 -Concentración de trazador en función del tiempo para  $U_g=0,22 \text{ m s}^{-1}$  y  $C_s=138 \text{ kg m}^{-3}$  en operación semicontinua.

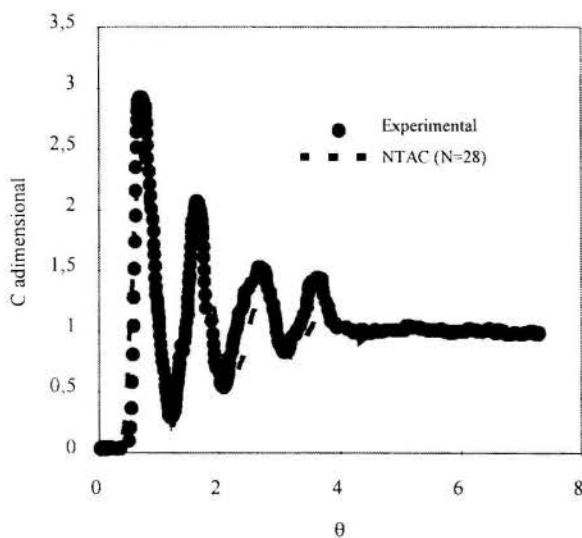


Figura 5- Concentración de trazador en función del tiempo para  $U_g=0,16 \text{ m s}^{-1}$ ;  $C_s=288 \text{ kg m}^{-3}$  y  $U_l=0,0136 \text{ m s}^{-1}$  en operación continua.

El tiempo de circulación y de mezclado se determinaron en todos los casos y mediante un método de regresión se obtuvieron las constantes para la ecuación (1) correspondiente al tiempo de circulación en función de otros parámetros característicos, resultando la siguiente expresión:

$$t_c = 22,174 \frac{(1 - \phi_s / 0,58)^{0,335} U_g^{-0,195}}{(1 + 0,14 U_l^{0,976})} \quad (13)$$

con un factor de regresión de 0,997. Esta expresión establece que el tiempo de circulación decrece con el aumento de la velocidad superficial de gas y la velocidad superficial de líquido y disminuye cuando la fracción de sólidos disminuye, resultando el efecto más importante el cambio con la velocidad superficial de líquido.

Se determinaron tiempos de circulación empíricos a partir de la correlación y se compararon con los valores experimentales encontrándose que el error relativo máximo es de  $\pm 11\%$ . Se realizó la prueba estadística F a los valores anteriores y se encontró que la correlación describe apropiadamente los datos experimentales con una tolerancia de 0,05. Adicionalmente se graficaron los valores de tiempos de circulación experimentales en función de los empíricos, como se observa en la Figura 6 en donde los valores se distribuyen alrededor de la línea de valores iguales en una banda de  $\pm 15\%$ . Se encontró que el tiempo de mezclado varía entre 45 y 70 s lo que muestra que el sistema se estabiliza rápidamente.

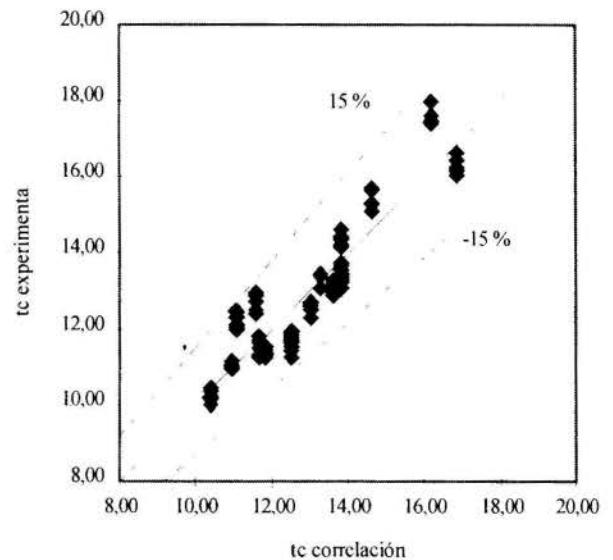


Figura 6- Tiempo de circulación experimental y empírico.

El coeficiente de dispersión fue estimado a partir de la ecuación (12) para diferentes condiciones de operación, como se muestra en la Tabla I, siendo la tendencia de este inversa a la del tiempo de circulación con respecto a la concentración de sólidos: disminuye cuando la concentración de sólidos aumenta. Cuando la velocidad superficial de gas aumenta el coeficiente de dispersión también aumenta, de igual forma ocurre con un aumento de la velocidad superficial del líquido, esto como consecuencia del alto grado de mezclado del sistema. Como se observa en la Tabla I, los valores de los coeficientes de dispersión son del orden de  $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  lo cual demuestra un bajo grado de dispersión en el sistema con respecto al flujo pistón.

Tabla 1- Comparación de los coeficientes de dispersión de una columna de burbujos de tubos concéntricos y una columna de burbujeo convencional a diferentes condiciones de operación.

$U_g$ [cm/s]	$C_s$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$U_j$ [cm/s]	$D_N \times 10^3$ [m <sup>2</sup> /s]	$D_b \times 10^3$ [m <sup>2</sup> /s]
5,72	119	0,00	1,46	58,20
5,72	289	0,00	1,34	58,20
16,05	132	0,00	1,77	82,09
16,05	302	0,00	1,60	82,09
16,05	506	0,00	1,54	82,09
21,72	134	0,00	2,01	90,81
21,72	305	0,00	1,88	90,81
21,72	515	0,00	1,78	90,81
5,72	111	1,34	1,80	58,20
5,72	263	1,53	1,77	58,20
16,05	168	1,49	1,90	82,09
16,05	287	1,36	1,86	82,09
16,05	447	1,55	2,07	82,09
21,72	119	1,42	2,32	90,81
21,72	298	1,36	2,15	90,81
21,72	505	1,30	2,07	90,81

Adicionalmente, en la Tabla 1 se muestra la comparación con los coeficientes de dispersión  $D_b$  estimados a iguales condiciones de operación mediante una correlación propuesta por Zehner (1986) para columnas de burbujeo convencionales:

$$D_b = 0,368 D_c^{1,3} (g U_g)^{1,3} \quad (14)$$

donde  $D_c$  es el diámetro de la columna,  $g$  es la aceleración de gravedad y  $U_g$  la velocidad superficial de gas.

Como se observa en la tabla 1, los coeficientes de dispersión de una columna de burbujeo convencional son apreciablemente mayores que los correspondientes a sistemas de tubos concéntricos.

## CONCLUSIONES

Los resultados presentados en este trabajo demuestran que la distribución axial de sólidos es pseudohomogénea a lo largo de los canales del sistema. La retención global de gas aumenta con el aumento de la velocidad superficial del mismo y con una disminución de la concentración de sólidos, además de ser mayor en operación semicontinua que en operación continua. El tiempo de circulación disminuye cuando aumenta la velocidad superficial de gas y cuando disminuye la concentración de sólidos. En operación continua el tiempo de circulación es menor que en operación semicontinua. Se obtuvo una correlación para el tiempo de circulación con respecto a las velocidades superficiales de gas y de líquido y la concentración de sólidos con un coeficiente de regresión de 0,997 y un error relativo de  $\pm 11\%$ . El tiempo de mezclado es pequeño para este sistema por lo que se alcanza estabilidad rápidamente. El modelo de  $N$  tanques en serie con recirculación interna describe adecuadamente el patrón de flujo del sistema, resultando en la mayoría de los casos estudiados que el número de tanques es 28. El patrón de flujo es similar en condiciones de operación continua y semicontinua. Se encontró que los coeficientes de dispersión calculados a partir del modelo son valores pequeños e inversamente proporcionales al tiempo de circulación. El sistema tiene un bajo grado de dispersión con respecto a un flujo pistón y comparativamente con una columna de burbujeo convencional, el sistema de tubos concéntricos presenta menores coeficientes de dispersión para el líquido.

## REFERENCIAS

- Kawase, Y. y Moo-Young, M. "Liquids circulation time in concentric tube airlift columns with non Newtonian fermentation broths". *J. Chem. Technol. Biotechnol.*, 46,4,267-274,(1989).
- Kennard, M. y Janekch, M. "Two and three phase mixing in a concentric draft tube gas lift fermentor". *Biotechnol. Bioengineering*, 38, 1261-1270, (1991).
- Levenspiel, O. "Ingeniería de las reacciones químicas". Editorial Reverté, España. (1986).
- Lu, Weng-Jang; Hwang, Shyh-Jye y Chang, Chun-Min. "Liquid mixing in internal loop airlift reactors". *Ind. Eng. Chem. Res.*, 33,2180-2186, (1994).
- Merchuk, J.C. y Siegel, M.H. "Air lift reactor in Chemical and Biological Technology". *J.Chem.Technol. Biotechnol.* 41,2,105-120,(1988).
- Obradovic,B.; Dudukovic, A.; Vunjak-Novakovic,G. "Local and overall mixing characteristics of gas-liquid-solid air lift reactor". *Ind. Eng. Chem; Res.*, 33, 698-702, (1994).
- Pironti,F.F.; Medina, V.R.; Calvo, R.; A.E. Saéz. "Effect of the draft tube position on the hydrodynamics of a draft tube slurry bubble column". *The Chem. Eng. J.*,60, 155-166 ,(1995).
- Verlaan, P.; Chris, J. y van't Riet, K. "Axial dispersion and oxygen transfer in the transition from bubble column to airlift loop reactors". *J. Chem. Technol. Biotechnol.*, 45, 3, 181-190, (1989).
- Zehner, P. "Momentum, mass and heat transfer in bubble columns. Part 2. Axial blending and heat transfer". *Int. Chem. Eng.*, 26, (1986).

## SUMMARY

The purpose of this study was to investigate the liquid mixing behavior of a 150 l concentric draft tube bubble column (DTBC) with a water-air-sand system at high solid concentrations. A pulse of solution of sodium chloride was injected into DTBC, and a conductivity cell was employed to measure the variation of tracer concentration in the liquid. The fluidizing assembly included a 0,29 m I.D.  $\times$  3 m Plexiglas column with a conical bottom (cone angle of 60°) and a 0,14 m I.D.  $\times$  2 m internal draft tube. The gas superficial velocity based on the cross section of the riser tube varied from 0,057 to 0,22 m s<sup>-1</sup>. Sand particles of 280  $\mu$ m in averaged size were used, with concentration that varied from 120 to 500 kg m<sup>-3</sup>. The column was operated either semibatch or continuous with a superficial suspension velocity of 0,01 m s<sup>-1</sup>. From the tracer outputs, circulation time (distance between peaks centers) and mixing time (time required to achieve a 5% inhomogeneity) were determined after the pulse had been injected. Experimental data were analyzed with a tank in series model with recirculation. Although the fit is not perfect the model does show the correct tendency, and, in all cases analyzed, the number of the tank in series obtained was in the neighborhood of 28. The circulation and mixing times were found to increase with the solids concentration and when the operation of the column was changed from semibatch to continuous, and to decrease as the riser gas velocity was increased. The effect of the gas velocity,  $U_g$  (m s<sup>-1</sup>), and the solid volumetric fraction,  $\phi_s$ , upon the circulation time,  $t_c$  (s), was assessed by an empirical correlation. It appears that a DTBC has a low dispersion degree with respect to plug flow and a dispersion coefficient value of an order of magnitude lower than a conventional bubble column.



ESTABILIDADE DO ESCOAMENTO BIFÁSICO ANULAR

Eduardo F. Gaspari, Sérgio N. Bordalo  
 Departamento de Engenharia de Petróleo  
 Faculdade de Engenharia Mecânica  
 Universidade Estadual de Campinas  
 13083-970 - Campinas - SP - Brasil



RESUMO

A estabilidade interfacial do escoamento bifásico anular é analisada por dois métodos: usando-se um simulador transiente para se observar o comportamento de ondas solitárias; e empregando-se uma análise linearizada e o critério Kelvin-Helmholtz Viscoso para se determinar os autovalores do sistema. Este estudo demonstra a influência da compressibilidade do gás, até então negligenciada, no mecanismo e limite de estabilidade; notadamente no caso de escoamento vertical.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é a determinação do limite de estabilidade do padrão anular do escoamento bifásico líquido-gás, particularmente nos casos de grande inclinação e vertical. Os resultados obtidos, além de contribuírem para uma melhor teoria do mecanismo da dinâmica destes escoamentos, também tem grande importância prática na engenharia nuclear e na engenharia de petróleo.

**Mapas e Padrões de Fluxo.** As figuras 1 e 2 apresentam exemplos de mapas empíricos de padrão de fluxo para o escoamento horizontal e vertical. A elaboração destes mapas envolve um enorme investimento de recursos materiais e humanos, impedindo que se estude, de forma adequada, as faixas de valores das variáveis significantes: vazões, dimensões, inclinações, tipos de fluidos etc. Uma certa subjetividade, ou imprecisão de critérios, na classificação visual dos padrões aumenta o grau de incerteza dos resultados. Por estes motivos é necessário desenvolver-se uma metodologia de cálculo que permita estimar os limites de transição, pelo menos tão bem quanto os mapas empíricos.

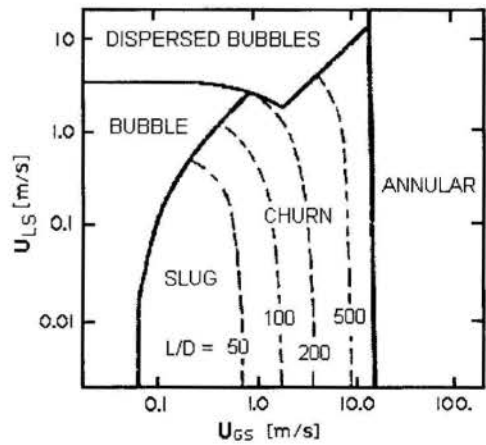


Figura 2 - Mapa de padrões para escoamento vertical.

As figuras 3 e 4 ilustram as transições do padrão anular que ocorrem quando o filme de líquido não se sustenta: no caso **horizontal** - transição para o padrão intermitente (slug); no caso **vertical** - transição para o padrão intermitente ou para o padrão turbilhonado (churn).

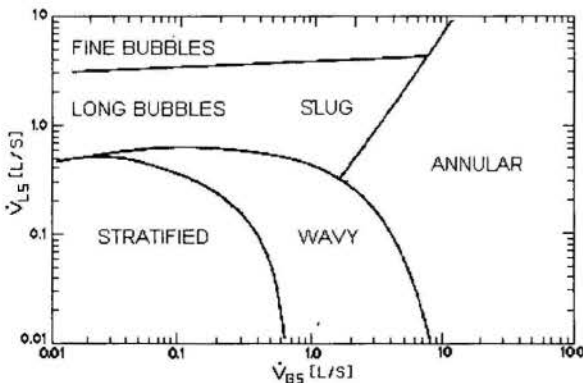


Figura 1 - Mapa de padrões para escoamento horizontal.

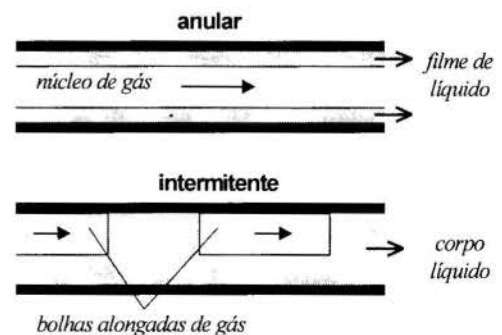


Figura 3 - Padrões anular e intermitente horizontais.



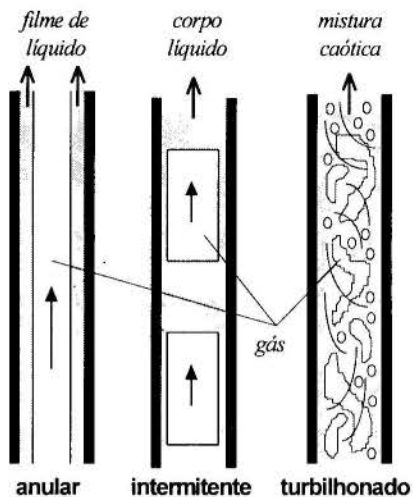


Figura 4 - Padrões anular, intermitente e turbilhonado vertical.

Estudos Anteriores. Um dos primeiros trabalhos de análise da estabilidade interfacial foi desenvolvido por Jeffrey (1925) para escoamento em canais. Wallis (1973) estudou a estabilidade do padrão estratificado. Taitel e Dukler (1976) admitiram comportamento inviscido para ambas fases em escoamento horizontal. Hanratty (1983), Lin e Hanratty (1986), Wu et al. (1987), Crowley et al. (1992), incluíram efeitos viscosos em suas análises, também para escoamento horizontal. Barnea e Taitel (1993 e 1994) combinaram os critérios de estabilidade linear de Kelvin-Helmholtz Inviscido (IKH) e Viscoso (VKH) para o escoamento estratificado horizontal. No caso do escoamento anular vertical, Barnea e Taitel (1994) concluem que o escoamento **não** possui estabilidade interfacial, por razões que serão expostas adiante; e, por isso, delinearão uma teoria de estabilidade estrutural para explicar a “paradoxal” existência estável, experimentalmente comprovada, do padrão anular. Todos os trabalhos mencionados utilizam equações unidimensionais.

Física da Interface. Quando uma perturbação deforma a interface conforme a figura 5, as linhas de fluxo do gás tendem a se aproximar, a velocidade do gás tende a aumentar e a pressão na fase gasosa tende a diminuir (“efeito Bernoulli”), enquanto que o inverso ocorre na fase líquida. Este desequilíbrio entre as pressões interfaciais tende a aumentar a espessura do filme de líquido (lift), gerando uma realimentação positiva neste processo, que pode levar à instabilidade. Em oposição a este mecanismo, surgem forças restauradoras. Uma é a ação da gravidade; o centro de massa do líquido sobe, e tende a baixar. Este é o mais importante mecanismo de estabilização no caso horizontal estratificado, que mantém a interface plana em baixas velocidades do gás. Velocidades do gás mais altas favorecem o diferencial de pressão interfacial, tornando o escoamento ondulado (wavy). Para velocidades muito altas a força da gravidade não equilibra o sistema. *No escoamento vertical não existe este efeito estabilizador da gravidade.* Outra força restauradora é a tensão superficial,

que confere um comportamento de película elástica à interface das fases. Quando a perturbação curva a interface, surge uma resultante que tende a puxar o líquido à conformação original. No entanto, esta é uma força importante apenas para pequenos comprimentos de onda, e grande curvatura (pequeno raio), sendo negligenciável para comprimentos de onda longos típicos de transientes em dutos industriais de médio e grande porte, *tanto no caso horizontal, quanto no caso vertical.* A tensão superficial é responsável pela manutenção de bolhas pequenas e grandes nos padrões com fase gasosa dispersa, e no padrão intermitente.

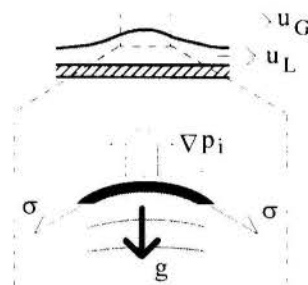


Figura 5 - Forças na interface.

Este modelo, e as análises matemáticas de trabalhos anteriores, predizem que, embora o padrão anular vertical seja uma solução das equações unidimensionais de movimento no regime permanente, este padrão é incondicionalmente instável. Admite-se, porém que uma onda instável ao crescer possa ser “quebrada” por uma forte corrente de gás; mas este processo não-linear e tridimensional é difícil de ser simulado num computador.

Os trabalhos anteriores consideram o gás como um fluido incompressível, o que é razoável para as baixas velocidades do gás no escoamento estratificado. Para as velocidades mais altas do escoamento anular, argumenta-se que, na prática, o escoamento ainda é subsônico e que a velocidade do gás é muito menor que a velocidade crítica, i.e., a velocidade do som, supondo-se, assim, uma influência negligenciável da compressibilidade. No entanto, o problema de autovalores do escoamento de duas fases separadas é totalmente distinto do caso monofásico, existindo, no caso bifásico, velocidades críticas bem mais baixas que a velocidade do som. Efetivamente, à altas velocidades, o efeito da variação de densidade, refletido na equação da continuidade, é minorar a variação da velocidade do gás passando acima da perturbação da interface, restringindo, assim, a variação de pressão, solapando o “efeito Bernoulli”, e, até, invertendo-o, tornando-o um mecanismo restaurador da interface. Esta inversão de comportamento é análogo ao conhecido processo que ocorre no escoamento monofásico compressível em canais convergente-divergentes.

Em conclusão, a **compressibilidade é um fator estabilizante** do escoamento anular horizontal e vertical, sendo preponderante à *altas velocidades.*

## EQUAÇÕES.

O simulador de regime transiente foi desenvolvido para o modelo de fases separadas, sem transferência de massa, incluindo as gotículas de líquido dispersas no núcleo de gás, introduzindo taxas de asperção e deposição ( $\Gamma_a$  e  $\Gamma_d$ ). Considerando o enfoque na transiência do filme de líquido, associada a tempos característicos mais longos que o tempo característico do gás, admite-se que o gás atinja rapidamente o equilíbrio (equações quase-permanente). Na interface prescreve-se

$$P_{Li} = P_{Gi} + \sigma k \quad (1)$$

onde  $\sigma$  é a tensão superficial,  $k$  a curvatura da interface, e  $P_{Li}$  e  $P_{Gi}$  as pressões do lado líquido e gás. As equações fundamentais são dadas abaixo.

O balanço de massa total de líquido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_L A_L \left( 1 + \frac{u_L}{u_G} \cdot \frac{F}{1-F} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_L A_L u_L \left( 1 + \frac{F}{1-F} \right) \right] = 0 \quad (2)$$

O balanço de massa de gás:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_G A_G u_G) = 0 \quad (3)$$

O balanço de momentum no filme de líquido:

$$\rho_L A_L \left( \frac{\partial u_L}{\partial t} + u_L \frac{\partial u_L}{\partial x} \right) = -\tau_w S_w + \tau_i S_i - A_L \frac{\partial P_{Li}}{\partial x} - \rho_L A_L g \cos(\beta) \frac{\partial h_L}{\partial x} + \Gamma_d (u_G - u_L) - \rho_L A_L g \sin(\beta) \quad (4)$$

O balanço de momentum na fase gás com gotículas:

$$\begin{aligned} (\rho_L A_d + \rho_G A_G) u_G \frac{\partial u_G}{\partial x} &= -\tau_i S_i - (A_d + A_g) \frac{\partial P_{Gi}}{\partial x} - \\ &(\rho_L A_d + \rho_G A_G) g \cos(\beta) \frac{\partial h_L}{\partial x} + \Gamma_a (u_L - u_G) - \\ &(\rho_L A_d + \rho_G A_G) g \sin(\beta) \end{aligned} \quad (5)$$

Onde  $\rho$ ,  $u$ ,  $A$ ,  $P$ , são a densidade, velocidade, área de fluxo, e pressão das fases, designadas pelos índices  $L$  e  $G$ , para o líquido e gás.  $F$  é a fração de gotículas dispersas e  $A_d$  sua área efetiva de fluxo;  $\beta$  é a inclinação do duto;  $h_L$  é a espessura do filme de líquido;  $\tau$  e  $S$  são a tensão e superfície de atrito viscoso, designadas pelos índices  $w$  e  $i$ , para a parede do duto e interface. As correlações de fechamento para as taxas de asperção e deposição, fração de gotículas dispersas, e fatores de atrito viscoso são apresentadas em detalhe por Gaspari (1995).

Emprega-se o método numérico semi-implícito (ref. Trapp e Riemke (1985)) para discretizar e resolver as equações deste modelo, com incrementos de tempo bem inferiores ao tempo característico convectivo na malha espacial.

Este simulador foi usado para o estudo da estabilidade interfacial. Determina-se, primeiramente, uma solução de regime permanente, a qual é usada como condição inicial para a simulação. A partir de perturbações na condição de contorno à entrada do duto, gera-se uma onda solitária, que se propaga ao longo do comprimento. Observando-se o comportamento destas ondas, demarcam-se as condições de estabilidade: se a onda cresce indefinidamente, admite-se a instabilidade da interface.

Para a análise do escoamento anular pelo critério de Kelvin-Helmoltz, as equações foram simplificadas, negligenciando-se as gotículas dispersas; entretanto, o termo transiente do gás é considerado, a fim de que a equação de autovalores fique completa. O sistema resultante é linearizado, da maneira usual, decompondo-se cada variável ( $a$ ) em dois termos: seu valor médio ( $\bar{a}$ ), e uma pequena oscilação em torno deste valor ( $a'$ ). O sistema pode ser manipulado algébricamente, eliminando-se as variáveis em favor de  $\alpha'$  e  $P'$ , obtendo-se

$$\begin{aligned} \alpha'^2 + A_1 \alpha'_{ix} + B_1 \alpha'_{x^2} + C_1 \alpha'_i + D_1 \alpha'_x + \\ G_1 P'_x + H_1 P'_i + K_1 P'_x = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \alpha'^2 + A_2 \alpha'_{ix} + B_2 \alpha'_{x^2} + C_2 \alpha'_i + D_2 \alpha'_x + \\ E_2 P'_i + F_2 P'_{ix} + G_2 P'_{x^2} + H_2 P'_i + K_2 P'_x = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Os coeficientes deste sistema são detalhados no trabalho de Gaspari (1995).  $\alpha$  é a fração superficial de gás  $A_g/A$ , que pode ser intercambiada por  $H_L$ , a fração de líquido  $A_L/A$ , onde  $A$  é a área de fluxo total no duto. O coeficiente de compressibilidade do gás

$$c_g = \frac{\partial p}{\partial P} \quad (8)$$

aparece nos coeficientes  $E_2$ ,  $F_2$ ,  $G_2$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ . No caso incompressível, o sistema reduz-se a uma única equação para  $\alpha$ . Assumindo-se soluções do tipo  $\alpha' = T(t).X(x)$ , onde

$$X_j(x) = e^{-i \frac{x}{\lambda_j}} \quad (9)$$

$$T(t) = e^{i \omega t} \quad (10)$$

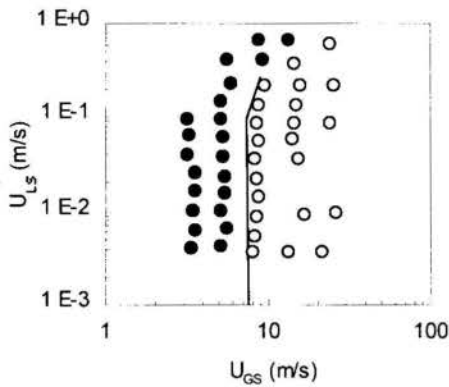
e  $\omega = \omega_r + i \omega_i$ . A parte real de  $\omega$  é responsável pelas oscilações, e a parte imaginária pelo decaimento ou amplificação da onda. O modo de oscilação é definido pelo comprimento de onda  $\lambda$ . Sendo a solução uma combinação linear dos modos, o primeiro modo a se instabilizar torna toda a solução instável. Inspeccionando o sistema, conclui-se que este modo é justamente o modo fundamental, i.e., o de maior comprimento de onda.



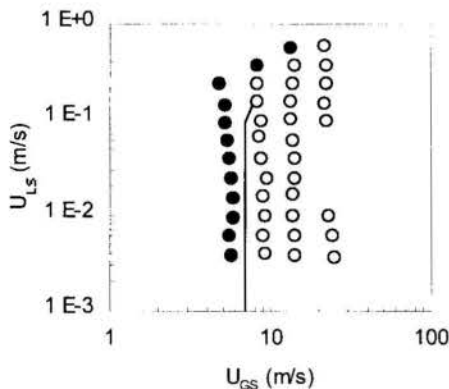
O sistema reduz-se, portanto, à determinação de  $\omega$ , na forma de uma equação polinomial de quarta ordem. No caso incompressível tem-se uma equação quadrática, com uma solução analítica fechada. Não sendo possível resolver analiticamente o sistema obtido, optou-se pelo emprego do software *Matematica*.

**RESULTADOS.**

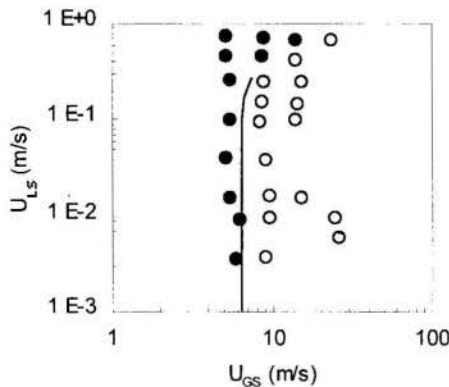
Os gráficos a seguir mostram os limites de estabilidade obtidos para o escoamento anular com a simulação das ondas solitárias, em relação aos mapas empíricos de Shoham (1982).



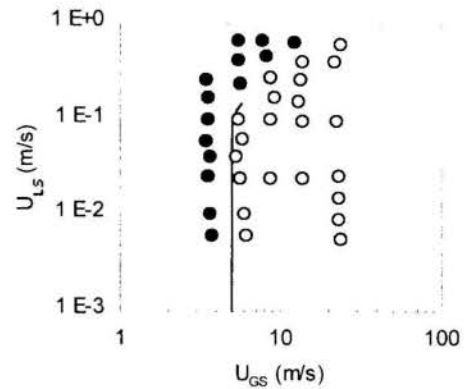
(6.1) - Inclinação  $\beta=90^\circ$



(6.2) - Inclinação  $\beta=30^\circ$



(6.3) - Inclinação  $\beta=15^\circ$



(6.4) - Inclinação  $\beta=5^\circ$

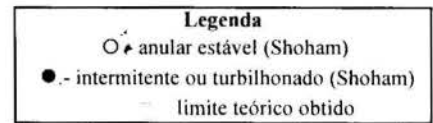


Figura 6 - Mapas de padrões de fluxo

Nestes gráficos,  $U_{GS}$  e  $U_{LS}$  são as velocidades superficiais das fases do gás e do líquido, definidas como a vazão da fase por área total de fluxo do duto  $A$ .

$$U_{GS} = u_G \alpha \quad \text{e} \quad U_{LS} = u_L H_L \quad (11)$$

Nota-se, para baixas vazões de líquido, a existência de uma vazão crítica de gás, praticamente independente da vazão de líquido, abaixo da qual o padrão anular não se mantém. Acima desta vazão crítica, existem soluções com padrão anular em regime permanente estável, o que não era admissível no caso incompressível.

A tabela a seguir mostra o efeito da compressibilidade nos autovalores do sistema, obtidos pela análise VKH.

Tabela 1 - Autovalores  $\omega$

		$c_g^2$			
		$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$10^{-10}$
-7E-6 + i 3E-10	-7E-6 + i 7E-9	-7E-6 - i 6E-9	-7E-6 - i 6E-9	-7E-6 - i 6E-9	
+2E-5 + i 9	+3E-5 + i 9	+6E-4 + i 9	+2E-1 + i 9	+2E-1 + i 9	
+2E-4 + i 1E-8	+9E-5 + i 1E-7	-1E-2 + i 9E-6	-12 - i 1	-12 - i 1	
+2E-4 + i 170	+3E-4 + i 170	+1E-2 + i 170	+11 + i 170	+11 + i 170	

$$U_{GS} = 20 \text{ m/s}, U_{LS} = 0,01 \text{ m/s}, d = 25 \text{ mm}$$

$$P = 0,1 \text{ MPa}, T = 298 \text{ K}$$

Os autovalores enfatizados na tabela são os que geram instabilidade, por terem sua parte imaginária negativa. Nota-se que o sistema torna-se instável com a diminuição da compressibilidade do gás.

O gráfico seguinte apresenta um estudo preliminar do efeito da compressibilidade na vazão crítica de gás, usando-se o simulador de transiente, para valores fixos do diâmetro e da vazão de líquido.

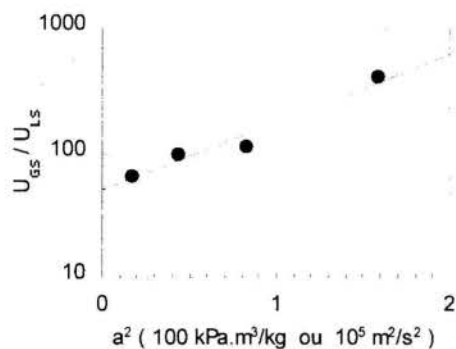


Figura 7 - Influência da compressibilidade.  
 $a^2 = 1/c_g$ ,  $d = 25$  mm, e  $U_{LS} = 0,02$  m/s.

No escoamento anular vertical, com baixa velocidade do gás, ou para pequena compressibilidade, inclusive para fluidos incompressíveis, a única força restauradora é provida pela tensão superficial. Neste caso, o resultado da análise VKH incompressível, indica o limite mais restrito da estabilidade. A figura 8 mostra o comprimento de onda  $\lambda$  do modo fundamental vs. a velocidade do gás. Observa-se o quão pequena é a faixa de estabilidade. Considerando que o modo fundamental é da ordem de grandeza do comprimento  $L$  do duto, conclui-se que, no caso calculado, o padrão anular não se sustenta para comprimentos maiores do que uma fração do diâmetro  $d$ , para  $u_G > 2$  m/s, e no máximo  $2d$  quando  $u_G \rightarrow 0$ . Isto sugere uma transição do padrão anular para o padrão intermitente, a baixa velocidade, onde o escoamento acomoda trechos de escoamento anular de pequeno comprimento, alternados com trechos de escoamento com bolhas dispersas num corpo líquido; ou transição para o turbilhonado, de características caóticas, a velocidades mais elevadas..

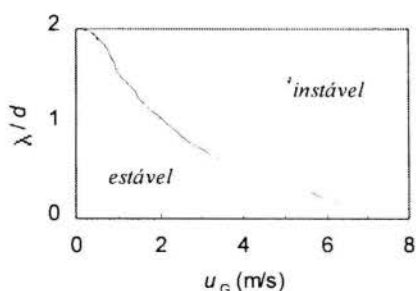


Figura 8 - Modo fundamental crítico.  
 $U_{LS} = 0,02$  m/s,  $P = 1,3$  MPa,  $T = 300$  K  
 $\sigma = 30$   $\mu$ N/m,  $\mu_L = 0,8$  mPa.s,  $\mu_G = 0,02$  mPa.s

## CONCLUSÃO

Demonstrou-se a “paradoxal” existência do padrão anular vertical, apontando-se a compressibilidade do gás como o mecanismo responsável pela estabilidade interfacial do escoamento. Limites de estabilidade foram obtidos, e comparados de forma satisfatória com mapas empíricos. Para baixas vazões de líquido, estes limites estão associados a uma vazão crítica de gás, acima da qual o padrão se mantém. A estabilidade do padrão anular é função da pressão e temperatura do escoamento, e do tipo de gás (composição molecular), pois estas são variáveis termodinâmicas que condicionam o comportamento PVT do gás (compressibilidade), descrito por sua equação de estado.

Propõe-se prosseguir este trabalho com o objetivo de produzir mapas de fluxo, levando em consideração outras variáveis relevantes, e para obter correlações adimensionais para os limites de estabilidade.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos Professores Dr. Fernando A. França (UNICAMP), Dr. Iberê N. Alves e MSc. Atílio Triggia (Petrobras), Dr. Yehuda Taitel (Tel-Aviv Univ.) pela atenção em discussões sobre o tema deste trabalho. Agradecimentos são devidos à Petrobras, ao CEPETRO/UNICAMP, e ao Departamento de Engenharia de Petróleo/FEM/UNICAMP pelo suporte ao desenvolvimento desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- Barnea, D. e Taitel, Y., 1993, “Kelvin-Helmholtz Stability Criteria for Stratified Flow”, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 19, No. 4, pp. 639-649.
- Barnea, D. e Taitel, Y., 1994, “Interfacial and Structural Stability of Separated Flow”, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 20, Suppl., pp. 387-414.
- Crowley, C. J., Wallis, G. B., Barry, J. J., 1992, “Validation of a One-dimensional Wave Model for the Stratified to Slug Flow Regime Transition”, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 18, No. 2, pp. 249-271.
- Gaspari, E. F., 1995, “Simulação e Análise de Estabilidade do Escoamento Bifásico Padrão Anular Vertical em Regime Transiente”, *Tese de Mestrado*, G213s, Dept. Eng. Petróleo, FEM, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.
- Hanratty, T. J., 1983, “Interfacial Instabilities Caused by Air Flow”, *Waves on Fluid Interfaces*, pp. 221-259, Academic Press, New York.
- Jefreys, H., 1925, “On the Formation of Water Waves by Wind”, *Proc. Royal Society*, A107, pp. 189-206.
- Lin, P. Y., e Hanratty, T. J., 1986, “Prediction of the Initiation of Slugs with Linear Stability Theory”, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 12, No. 1, pp. 79-98.

Shoham, O., 1982, "Flow Patterns Transitions and Characterization in Gas-Liquid Two Phase Flow in Inclined Pipes, *Ph.D. Thesis*, Tel-Aviv Univ., Ramat-Aviv, Israel.

Taitel, Y., e Dukler, A., 1976, "A Model for Predicting Flow Regime Transition in Horizontal and Near Horizontal Gas-Liquid Flow", *AIChE J.*, Vol. 22, pp. 47-56.

Trapp, J. A., e Riemke, R. A., 1985, "A Nearly Implicit Hydrodynamic Numerical Scheme for Two-phase Flows", *J. Computational Physics*, Vol. 66, pp. 62-82.

Wallis, G. B., 1973, "The Onset of Slugging in Horizontal Stratified Air-Water Flow", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 1, pg. 173.

Wu, H. L., Pots, B. F. M., Hollenberg, J. F. e Meerhoff, R., 1987, "Flow Pattern Transitions in a Two-phase Gas-Condensate Flow at High Pressure in a 8" Horizontal Pipe", *Proc. 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow*, The Hague, The Netherlands, pp. 13-21.

#### ABSTRACT

Two methods are used in the analysis of the interfacial stability of annular two-phase flows: the Kelvin-Helmholtz criteria is used to obtain the eigenvalues of the system, and a transient flow numerical simulator is used to determine the behavior of single traveling waves. This study reveals the important role of the gas compressibility, which had been neglected so far, in the dynamics and limits of stability, particularly for vertical flow.



## UMA SOLUÇÃO ASSINTÓTICA PARA O ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE UM ESCOAMENTO GÁS-LÍQUIDO A CONTRA-CORRENTE PARA CO-CORRENTE.



Milton Biage e Idalberto Ferreira de Ataídes

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Uberlândia  
38400-902 - Uberlândia - MG - Brasil

### SUMÁRIO

*Neste artigo deu-se ênfase à interpretação física das equações para a espessura do filme líquido, obtidas através de uma expansão assintótica e apresentou-se uma formulação matemática bastante criteriosa de forma a identificar, com sucesso, o ponto de "flooding". Este ponto é caracterizado pela transição de um escoamento de um filme líquido a contra-corrente para co-corrente a um escoamento de gás. Para a solução do problema aplicou-se as equações de conservação para um escoamento bidimensional e isotérmico. Utilizou-se o teorema dos PI de Vashy-Buckingham na realização de uma minuciosa análise dimensional, onde se obteve parâmetros que possibilitaram estabelecer uma análise assintótica para as equações adimensionais. Em seguida, reduziu-se um conjunto de EDP's a uma única EDP para a espessura do filme líquido. Esta EDP foi decomposta em uma equação para o problema permanente e outra referente ao transiente. Resolveu-se somente a equação não-linear permanente, aplicando-se o Método Espectral da Colocação de Chebyshev para sua discretização. Os resultados são comparados com outros resultados experimentais e teóricos encontrados na literatura, o que comprovou a boa qualidade da modelação utilizada para o problema.*

### INTRODUÇÃO

A interface entre duas fases pode conter matéria em distintos estados físicos que exibem propriedades termodinâmicas diferentes daquelas da fase gasosa ou líquida (L. E. Scriven, 1960). Devido a este fato, as formulações de conservação aplicadas ao domínio do escoamento envolvem um conjunto de equações de conservação para cada fase e outro conjunto de equações de conservação para a interface. A contribuição da energia livre da interface com relação à energia total livre do sistema é relativamente pequena. Entretanto, o comportamento dinâmico do escoamento pode ser profundamente influenciado pelo efeito interfacial, mesmo que a região material da interface seja extremamente pequena. O interesse na análise do comportamento interfacial entre dois fluidos ou duas fases está relacionado com a eficiência de vários problemas de interesse prático que existem na engenharia química, do petróleo ou nuclear.

Em nosso estudo é desenvolvido uma análise sobre o escoamento de um filme viscoso sobre um plano vertical, escoando contra-corrente a um escoamento de gás. O escoamento de um filme líquido sobre a parede de um canal, na presença de um gás escoando a contra-corrente, pode existir somente para um intervalo de vazões de gás abaixo de um certo limite, para uma vazão de líquido fixa. Acima deste limite, experimenta-se uma forte diminuição da vazão de líquido descendente sob forma de filme. O conjunto composto pela vazão de gás crítica e a vazão de líquido, que corresponde a esta limitação, é considerado como a definição do que se denomina de ponto de "flooding" (Ataídes, 1994 e Biage, 1989).

O termo "flooding" tem sido utilizado para descrever vários aspectos da transição do filme líquido escoando a contra-corrente ao escoamento de gás para um escoamento co-corrente. Nos estudos experimentais, a definição de "flooding", quando se considera a injeção de líquido como sendo feita através de uma parede porosa, é dada como sendo o ponto definido pelo par de vazões de líquido constante injetado e de gás que para vazões de gases inferiores, o líquido escoar na direção da base da seção

de ensaio e para vazões de gases superiores, uma parte de líquido é arrastada na direção da parte superior do canal e continuando a outra parte a escoar em direção da base (Biage, 1989).

Esta definição dada ao "flooding" corresponde, na realidade, a uma transição na estrutura do filme líquido descendente. Esta mudança constitui o início de um brusco processo de transição da configuração do escoamento, sendo este ponto o mais apropriado para comparação entre os resultados da modelização teórica com os resultados experimentais.

Os mais recentes experimentos com técnicas de medidas da espessura do filme líquido instantânea, velocidade e direção das ondas, têm revelado que este tipo de escoamento apresenta uma estrutura bastante complexa. Biage (1989) analisou a estrutura da interface gás-líquido que baseou-se nas medidas da espessura do filme líquido instantânea ao longo de um canal retangular vertical e sobre as propriedades estatísticas calculadas a partir deste sinal (auto-correlação, função de densidade espectral, função da densidade de probabilidade, etc.). O autor descreve que a estrutura da interface gás-líquido apresenta uma estrutura diferenciada ao longo canal. Mesmo para uma vazão de gás contra-corrente nula, a interface gás-líquido é constituída por duas zonas com estruturas interfaciais diferentes. Uma primeira zona, chamada de zona lisa, situada próximo do ponto da injeção de líquido, é caracterizada por pequenas ondulações, devido essencialmente ao efeito de capilaridade. Uma segunda zona, chamada de zona de grandes ondas irregulares, situada entre a região intermediária e o ponto de extração de líquido, é caracterizada por grandes ondas irregulares que se desenvolvem em amplitudes ao longo do canal devido ao efeito gravitacional. Se a vazão do gás é aumentada, a amplitude das ondas situadas na interface gás-líquido aumenta e quando a vazão de gás aproxima daquela correspondente ao ponto de "flooding", a amplitude das ondas na primeira zona aumenta mais intensamente que as ondas existentes na segunda. Este fato caracteriza um aumento espacial da segunda zona e uma diminuição da primeira. Assim, observa-se uma tendência de homogeneização da interface gás-líquido em todo o canal. No momento em que as ondas de grande amplitude alcançam o nível do ponto de injeção de líquido (ou melhor,

quando a segunda zona atinge o nível da injeção de líquido), o "flooding" acontece. Ele provoca a homogeneização da estrutura da interface ao longo de todo o canal, causando significativas mudanças em sua estrutura.

A estrutura das ondas no ponto de transição do escoamento ("flooding") revela a presença de grandes ondas altamente instáveis. Este fato demonstra que o "flooding" é um fenômeno dinâmico que só pode ser descrito por uma teoria não linear de instabilidade que inclui os efeitos dos vários parâmetros que interferem na estrutura do escoamento, tais como: viscosidade, densidade, tensão de superfície, tensão de cisalhamento, gravidade, etc. Neste tipo de estudo seria ideal considerar as equações de conservação completas, tanto para a fase gás como para a fase líquida e interface. Entretanto, uma solução envolvendo uma formulação completa constitui uma árdua tarefa devido a complexa estrutura do escoamento que é turbulenta na fase gasosa e apresenta grandes ondas instáveis na interface.

Em nosso estudo, nós simplificamos a equação de Navier-Stokes de tal forma que nossa análise será restringida ao efeito das ondas de grande comprimento de onda. O conjunto de equações diferenciais parciais é reduzido a uma equação diferencial parcial não-linear mais simples, como uma função do tempo e da coordenada espacial. Esta redução da ordem de variáveis envolvidas no problema resulta da aplicação da teoria da perturbação. Os efeitos da fase gás são convenientemente estudados através de correlações empíricas para a tensão interfacial. Usando este procedimento, não é necessário usar modelos complexos para descrever o comportamento do escoamento turbulento da fase gás. Também, o efeito das pequenas ondulações devido ao efeito do atrito interfacial e de capilaridade são considerados indiretamente, pois os mesmos estão embutidos nas correlações experimentais utilizadas. Qualitativamente, a presença de pequenas ondulações sobre a interface aumenta o efeito do atrito entre as fases. Embora, correlações experimentais para a tensão interfacial instantâneas não existam na literatura, é usado neste estudo correlações experimentais médias no tempo, as quais têm mostrado satisfatórios resultados (H. Chang, 1986).

#### TRANSFORMAÇÃO DO CONJUNTO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO PARA A UMA ÚNICA EQUAÇÃO PARA A ESPESSURA DO FILME LÍQUIDO.

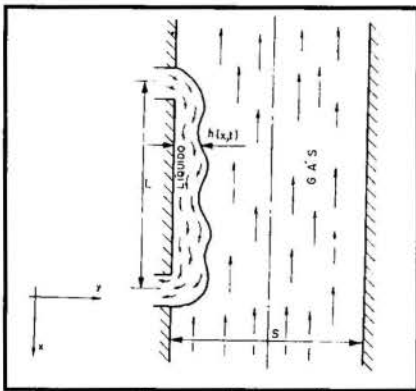


Figura 1: Representação esquemática do sistema.

**Formulação Matemática.** Na figura 1, apresenta-se esquematicamente um filme líquido escoando em uma das paredes de um duto retangular, a contra-corrente ao escoamento de um gás.

Para se proceder a formulação matemática deste sistema são utilizadas as seguintes hipóteses: escoamento bidimensional, fluido newtoniano, isotérmico e sem mudança de fase, com tensão superficial constante e ausência de escorregamento na parede.

O sistema de equações de conservação, utilizado neste estudo, é constituído das equações da continuidade e da conservação do momento aplicadas ao domínio e as mesmas equações aplicadas à interface, além da condição cinemática na interface gás-líquido (Ataides, 1994).

As equações diferenciais parciais de conservação (EDP's) que regem o escoamento em estudo, apresentam grandes dificuldades para a solução, devido tratar-se de um problema acoplado entre duas fases. Assim, estas EDP's deverão ser transformadas para se obter uma única EDP para a espessura do filme líquido em função da variável espaço,  $x$ , e do tempo  $t$ . Este procedimento é realizado pela técnica de expansão assintóticas (M. Van Dike, 1964). Uma adequada aplicação da técnica de expansão assintótica exige a utilização de um pequeno parâmetro perturbador,  $\epsilon$  e a adimensionalização das EDP's, através de parâmetros criteriosamente obtidos por meio de uma análise dimensional. O grau de interferência de cada variável no sistema, traduzido pela presença do elemento perturbador  $\epsilon$ , resume-se a uma análise de ordem de grandeza.

A energia interfacial das ondas é uma função de vários parâmetros, como definido pela equação abaixo:

$$E = E(Q_l, \rho_l g, \rho_l, \mu_l, \sigma, \tau_i, x) \quad (1)$$

onde  $Q_l$  é a vazão volumétrica do filme líquido por unidade de largura do canal,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\rho_l$  é a densidade do filme líquido,  $\mu_l$  é a viscosidade dinâmica do filme líquido,  $\tau_i$  é a tensão interfacial,  $\sigma$  é a tensão superficial e  $x$  é a variável espacial na direção vertical.

As propriedades termodinâmicas referentes ao filme líquido mostradas na Eq. (1) e outras variáveis, que serão utilizadas daqui para frente, serão escritas sem o sub-índice  $l$ , entretanto, quando estas propriedades e variáveis estiverem referindo à fase gás, será utilizado o índice  $G$ .

Os grupos adimensionais foram determinados através da aplicação do teorema de Vashy-Buckingham, considerando-se as variáveis dependentes envolvidas na Eq. (1). Estes grupos são utilizados como escalas para as variáveis definidas abaixo (Biage, 1989):

$$u^* = \left(\frac{gQ^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} u; \quad v^* = \epsilon \left(\frac{gQ^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} v \quad (2,3)$$

$$x^* = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\nu Q}{g}\right)^{\frac{1}{3}} x; \quad y^* = \left(\frac{\nu Q}{g}\right)^{\frac{1}{3}} y \quad (4,5)$$

$$h^* = \left(\frac{\nu Q}{g}\right)^{\frac{1}{3}} h; \quad P^* = \frac{1}{\epsilon} \left(\rho^2 g^2 \mu Q\right)^{\frac{1}{3}} P \quad (6,7)$$

$$\sigma^* = \frac{1}{\epsilon^3} \left(\rho g \mu^2 Q^2\right)^{\frac{1}{3}} \sigma; \quad \tau^*_{yx} = \mu \left(\frac{g^2 Q}{\nu^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tau_{yx} \quad (8,9)$$

$$t^* = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\nu^2}{g^2 Q}\right)^{\frac{1}{3}} t \quad (10)$$

Nos grupos adimensionais definidos pelas Eqs. (2) a (10), quando aplicados à fase gás, serão usados o sub-índice  $G$ ,



indicando que as propriedades são referentes a esta fase. O sinal de asterístico caracteriza os termos na forma dimensional. As variáveis  $u$  e  $v$  são as velocidades nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $P$  é a pressão,  $\tau^{yx}$  é a tensão tangencial no plano normal a  $y$  e na direção  $x$  e  $h(x,t)$  é a espessura do filme líquido. Estes grupos adimensionais apresentam também o parâmetro perturbador  $\varepsilon$ , que é definido como segue:

$$\varepsilon = \frac{h_N}{L}; \quad h_N = \left( \frac{3Q\nu}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (11,12)$$

onde  $h_N$  é a espessura de Nusselt para o filme líquido e  $L$  é o comprimento do canal, definido na Fig. 1. Com a definição dada acima para o parâmetro perturbador, a próxima análise será restringida ao efeito das ondas de grande comprimento de onda e longos canais.

O sistema de equações adimensionalizadas que rege o comportamento físico do problema é o seguinte (Ataides, 1994 e Bachir, 1987).

a) Equações do Movimento para o filme líquido (Navier-Stokes):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 - \frac{\partial P}{\partial x} - \varepsilon \text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^3 \text{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

b) Equação da Continuidade para o filme líquido:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

c) Condição de Contorno Cinemática na Interface Gás-Líquido:

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (16)$$

d) Tensão Normal na Interface Gás-Líquido:

$$(az)^2 \left[ P^2 - \left( \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \left\{ -2az \left[ zP^2 + (P_G - a^2 \tau_G^{yy})P - z \left( \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} + \varepsilon^2 \left\{ z^2 \left[ \left( a \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right] P^2 + 2z \left( P_G - 3a^2 \tau_G^{yy} - 2a^2 z \frac{\partial v}{\partial y} \right) P + \left( P_G - a^2 \tau_G^{yy} \right) - \left( \frac{\sigma}{\nu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 1 - 2 \left( a \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (17)$$

onde

$$z = \frac{\mu \left( \frac{g^2 Q}{\nu^2} \right)^{\frac{1}{3}}}{\mu_G \left( \frac{g^2 Q}{\nu^2} \right)^{\frac{1}{3}}_G}; \quad a = \frac{s}{L}; \quad \text{Re} = \frac{Q}{\nu} \quad (18,19,20)$$

onde  $s$  é a espessura do canal, definida na Fig. 1 e  $\text{Re}$  é o número de Reynolds.

e) Tensão Tangencial na Interface Gás-Líquido:

$$\tau_G^{yx} - z \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon \left( 2a\tau_G^{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left[ z \frac{\partial u}{\partial y} - \tau_G^{yx} \right] \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \left( \tau_G^{xx} + 2z \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon^4 \left[ z \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \quad (21)$$

f) Velocidade do Líquido na Parede:

$$u = v = 0 \quad (22)$$

Nestas equações de conservação aparecem, além das variáveis já citadas, as tensões normais  $\tau_G^{xx}$  e  $\tau_G^{yy}$ , que serão desprezadas por serem insignificantes quando comparadas à pressão (Bachir, 1989).

**Transformação do Sistema de EDP's.** O sistema de EDP's, definido pelas Eqs. de (11) a (22), será transformado a fim de se obter uma única EDP para a espessura do filme em função das variáveis  $x$  e  $t$ . Para tanto, serão expandidas as velocidades e pressão do filme líquido em séries assintóticas em relação ao parâmetro perturbador  $\varepsilon$ , como apresentado a seguir:

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \varepsilon^3 v^{(3)} + \dots \quad (23)$$

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \varepsilon^3 v^{(3)} + \dots \quad (24)$$

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \varepsilon^3 P^{(3)} + \dots \quad (25)$$

Aplicando-se as equações (23) a (25) nas relações adimensionalizadas (11) a (22), obtêm-se vários sistemas de equações referentes aos termos de ordem  $O(\varepsilon^0)$ ,  $O(\varepsilon^1)$ , etc.. Resolvendo-se estes sistemas, obtêm-se uma EDP para a espessura do filme  $h(x,t)$ , altamente não-linear.

Considerando-se que o parâmetro perturbador é definido como uma razão entre a espessura do filme líquido média e o comprimento do canal, a expansão acima representa uma boa aproximação para problemas com canais longos. Por exemplo, para um canal de um metro e para vazões de filmes líquidos médias, os termos de

$$O(\varepsilon^0) \approx O(1), \quad O(\varepsilon^1) \approx O(10^{-4}) \quad \text{e} \quad O(\varepsilon^2) \approx O(10^{-16});$$

assim, retendo na solução do problema somente os termos de ordem zero, obtém-se uma solução para o problema com boa precisão (Bachir, 1989). Além disso, o problema em estudo apresenta uma característica racional; isto é, a sua solução aumenta em precisão quando o parâmetro perturbador tende a zero, e converge para uma exata solução quando retido somente alguns termos de ordem superior na expansão (M. Van Dike). A equação resultante para  $h(x,t)$ , escrita a seguir, apresenta apenas os termos de  $O(\varepsilon^0)$ , para maiores detalhes sobre os termos de ordem superior consulte Ataides (1994):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} h \left( h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \right) + \frac{\sigma}{3} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^3 + \frac{1}{2z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} h^2 + O(\varepsilon^1) = 0 \quad (26)$$

Apesar de retermos para a análise do problema em estudo somente os termos de primeira ordem, não existem dificuldades adicionais para imbutir na solução do problema os termos de ordem superior. A solução da equação composta pelos termos de primeira ordem é suficiente para se obter resultados satisfatórios na solução do problema.

**Solução da EDP Não-Linear para  $h(x,t)$ .** Para se obter a solução da equação (26), é necessário proceder-se algumas transformações na mesma, a fim de tornar possível a aplicação do método numérico.

O Método Espectral da Colocação de Chebyshev (Canuto, 1988) será aplicado neste trabalho. Suas funções tentativas são definidas no intervalo  $[-1,1]$ , o que exige transformações na Eq. 26 (Ataides, 1994). Não será apresentada aqui esta transformação.

A tensão tangencial da fase gás, que se apresenta na EDP para  $h(x,t)$ , será definida através de uma relação experimental obtida para a tensão de cisalhamento interfacial (Biage, 1989 e Bharatan, 1978). Esta relação para  $\tau_i$ , já adimensionalizada, é dada por:

$$\tau_i = \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \left( \bar{f}_i K_p K_v Re_G^2 \right) \quad (27)$$

onde

$$\bar{f}_i = A \left[ 0.005 + B(1 - \alpha_s)^C \right], \quad A = 1, \quad B = 14.6 \quad (28)$$

$$e \quad C = 1.87 \quad \text{para} \quad (1 - \alpha_s) < 0.1$$

$$\alpha_s = \frac{A_G}{A}; \quad K_p = \frac{\rho_G (s - h_N) g}{\rho h_N g} \quad (29,30)$$

$$K_v = \frac{v_G^2}{(s - h_N)^3 g}; \quad Re_G = \frac{Q_G}{v_G} \quad (31,32)$$

onde  $A_G$  é a área transversal ocupada pela fase gás,  $A$  é a área transversal do canal,  $\alpha_s$  é fração de vazio. Os demais parâmetros são grupos adimensionais característicos da fase gasosa.

Para o caso do sistema de referência mostrado na Fig. 1, tem-se:

$$\tau_G^{yx} = -\tau_i \quad (33)$$

A partir das considerações precedentes, a equação (26) será transformada como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + 6 \frac{\partial h}{\partial x} h^2 + 16 \epsilon^3 W \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^3 + \\ + 48 \epsilon^3 W \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} h^2 - 3 \bar{f}_i K_p K_v Re_G^2 \frac{\partial h}{\partial x} h = O(\epsilon) \end{aligned} \quad (34)$$

onde o número de Weber ( $W$ ) é definido como segue:

$$W = \left( \frac{\sigma}{\rho g h_N^2} \right) \quad (35)$$

**Técnica da Estabilidade da Solução Permanente.** Conforme descrito por Stakgold (1979), no regime permanente, estuda-se um problema de valor limite em coordenadas espaciais. O problema dependente do tempo é do tipo valor inicial e do tipo valor limite no espaço. Em cada tempo  $t$ , a solução  $h$  é um elemento num espaço de Hilbert ( $H$ ). Quando muda-se  $t$ , o

elemento  $h = h(t)$  move, no espaço  $H$ , de acordo com a seguinte equação de evolução:

$$\frac{d}{dt} h(x,t) = F(h, Re_G); \quad t > 0; \quad h_{t=0} = h_0 \quad (36)$$

onde  $h_0$  é o valor inicial de  $h$  e  $F$  é uma transformação de  $H$  dentro dele mesmo, onde estão contidas as derivadas com respeito às coordenadas espaciais.

Uma das principais questões relacionadas à Eq. (36) é a que trata da estabilidade de regimes permanentes. Considera-se  $h_i$  como sendo um elemento do espaço  $H$  que satisfaz

$$F(h_i, Re_G) = 0, \quad \text{quando} \quad t \rightarrow 0 \quad (37)$$

O elemento  $h_i$  não depende de  $t$ , sendo uma solução da Eq. (36) com valor inicial  $h_0$ . Considera-se  $h_i$  uma solução permanente ou um estado de equilíbrio que intera sempre pelo efeito de pequenas perturbações, que podem crescer ou permanecer do mesmo tamanho. A análise que permite caracterizar o efeito destas perturbações consiste em estudar a Eq. (36) com valor inicial  $h_0$ , próximo de  $h_i$ . Diz-se que  $h_i$  é estável se existe um  $\epsilon > 0$ , tal que a solução de  $h(x,t)$ , da Eq. (36), satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|h - h_i\| = 0 \quad \text{quando} \quad \|h_0 - h_i\| \leq \epsilon \quad (38)$$

Considera-se  $h(x,t)$  uma solução da Eq. (36) correspondente ao valor inicial  $h_0$ , próximo a  $h_i$ , como segue:

$$h = h_i + \epsilon \tilde{h} \quad (39)$$

onde  $\epsilon$  é um pequeno parâmetro perturbador e  $\tilde{h}$  é a espessura do filme líquido flutuante.

Substituindo-se a Eq. (39) na Eq. (36), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{h}}{dt} = \frac{F(h_i + \epsilon \tilde{h}, Re_G) - F(h_i, Re_G)}{\epsilon} = \\ F_h(h_i, Re_G) \tilde{h} + r \end{aligned} \quad (40)$$

onde  $F_h(h_i, Re_G)$  é a derivada de Fréchet de  $F$  em função de  $h_i$  e do parâmetro  $\epsilon$ . O parâmetro  $r$  é o erro de ordem superior em  $h$ :

$$\lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \left( \|r\| / \|\tilde{h}\| \right) = 0. \quad (41)$$

Sendo pequeno o valor inicial de  $\tilde{h}$ , o comportamento da solução da Eq. (39) será determinado pela equação linearizada

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = F_h(h_i, Re_G) \tilde{h} \quad (42)$$

Portanto, para determinar o comportamento da espessura do filme flutuante, definido pela Eq. 41, torna-se necessário determinar primeiro a solução permanente, definida pela Eq. (37), dada pela derivada de Fréchet. Se todas as soluções da Eq. (42) diminuírem exponencialmente com  $t$  e com  $x$ , deseja-se então obter soluções para  $\tilde{h}(x,t)$  suficientemente pequenas. Para uma solução da forma

$$\tilde{h}(x,t) = A e^{[i k(x-ct) + \beta t]} \quad (43)$$

onde  $A$  é um elemento de  $H$ , independente do tempo e da coordenada  $x$ , aplicada à Eq. (42), o resultado é da forma:

$$F_h(h_i, Re_G) = \beta - ikc \quad (44)$$

onde  $k$  é o número de onda,  $c$  é a velocidade de propagação de uma onda elementar e  $\beta$  é o coeficiente de amplificação temporal. Nesta análise de instabilidade temporal, sobre ondas periódicas, é conveniente definir uma variável complexa  $C$ , que estabeleça uma relação entre a variação de  $\tilde{h}$  com  $t$  e também de  $\tilde{h}$  com  $x$ . Esta relação é descrita da seguinte maneira:

$$C = -\frac{\left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}\right)}, \quad \text{onde } C = c + i \frac{\beta}{t} \quad (45)$$

Para cada modo  $k$ , existe uma ou várias soluções correspondentes a  $C$ , cuja parte real é a velocidade de propagação e a parte imaginária é o fator de amplificação. Uma onda com  $c > 0$  e  $k < 0$  é convectivamente, instável.

Neste estudo resolveu-se somente a solução permanente, dada pela Eq. 37, ficando para uma etapa posterior a análise da solução transiente.

#### Aplicação da técnica nas Equações do Problema.

Aplicando-se a Eq. (37) na Eq. (34), obtém-se:

$$F(h_i, Re_G) = -6 \frac{\partial h_i}{\partial x} h_i^2 - 16 \epsilon^3 W \frac{\partial^4 h_i}{\partial x^4} h_i^3 - \quad (46)$$

$$-48 \epsilon^3 W \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3} \frac{\partial h_i}{\partial x} h_i^2 + 3 f_i K_p K_v Re_G^2 \frac{\partial h_i}{\partial x} h_i = 0$$

As condições de contorno na entrada do líquido é dada por:

$$h_i = h_N; \quad \frac{\partial h_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 h_i}{\partial x^4} = 0 \quad (47)$$

Na saída do líquido, a condição limite é:

$$h_i = h_N; \quad \frac{\partial h_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 h_i}{\partial x^4} = 0 \quad (48)$$

onde  $h_i$  representa a solução permanente de  $h(x,t)$ ,  $h_N$  é a espessura de Nusselt e  $Re_G$  é o número de Reynolds do gás.

As condições limite exercem forte influência sobre a estrutura do escoamento e, conseqüentemente, sobre o "flooding". Entretanto, neste trabalho será explorada somente a situação caracterizada pelas equações (47) e (48).

No conjunto das equações dado por (46), (47) e (48) será aplicada a técnica espectral da colocação de Chebyshev para a solução do problema.

**Método Espectral da Colocação de Chebyshev.** Utilizou-se o método espectral para a solução das Eqs. 46, 47 e 48. Os métodos espectrais são diferenciados não somente pelo tipo de método como também pela escolha particular das funções tentativas. O mais versátil conjunto de funções tentativas é composto pelos polinômios de Chebyshev, que são definidos no intervalo  $[-1,1]$ . Não apresentaremos neste artigo os detalhes desta técnica. Para maiores informações consulte em Ataídes (1994 e 1996).

## DISCUSSÃO E RESULTADOS

**Discussão.** Na implementação numérica deste problema, a espessura  $h_i(x)$ , assim como suas derivadas com relação a  $x$ , serão expandidas até a ordem de 30 termos. O procedimento de execução do programa, para encontrar o ponto de "flooding", é aquele em que a vazão de líquido por unidade de área é fixada e a vazão do gás (número de Reynolds) é aumentada gradualmente até ultrapassar o ponto de transição do escoamento. Este ponto é obtido quando o número de Reynolds do gás é aumentado e

ocorre um sensível aumento da espessura média até atingir um valor máximo, seguido de um brusco decaimento da mesma. Deste decaimento, conclui-se que parte do líquido descendente é arrastado devido ao atrito interfacial provocado pelo escoamento do gás. Este ponto, no qual se constata o primeiro arrastamento parcial do líquido descendente, é tomado como o ponto de "flooding" (Biage, 1989). A ocorrência de novos picos na espessura média do filme líquido caracteriza novos pontos de "flooding", até o processo de transição atingir o seu estado final, quando o filme estará a co-corrente com o gás (Ataídes, 1994).

Os resultados que serão apresentados no próximo item envolvem as velocidades superficiais do gás ( $J_G$ ) e do líquido ( $J_L$ ), que são classicamente utilizadas em escoamento bifásico. Estas grandezas são definidas como

$$J_G = \frac{Q_G}{A}; \quad J_L = \frac{Q}{A} \quad (49)$$

onde  $Q_G$  e  $Q$  são, respectivamente, as vazões volumétricas do gás e do filme líquido, e  $A$  é a área da seção transversal do canal.

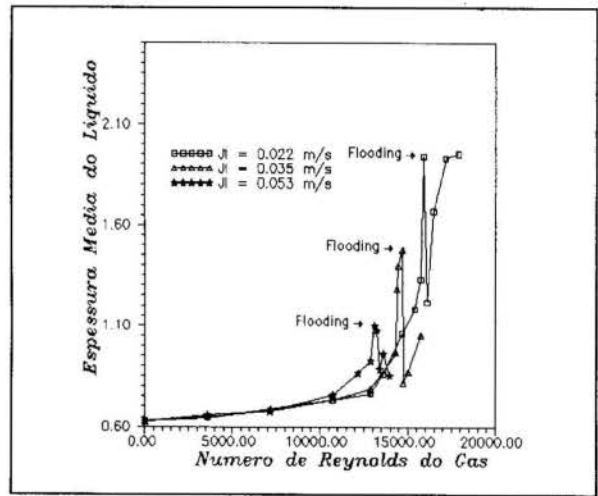


Figura 2: Evolução da espessura média espacial do filme líquido em função do número de Reynolds do gás, para três velocidades superficiais do líquido ( $J_L$ ). Figura 5:

**Resultados.** Nos cálculos obtidos com o código computacional elaborado, a espessura do filme líquido oscila ao longo do canal e aumenta consideravelmente em função do aumento do número de Reynolds para todas as velocidades superficiais do líquido. Este aumento é mais significativo quando a velocidade superficial do líquido é maior. Entretanto, a flutuação da espessura  $h_i(x)$  ao longo do comprimento do canal aumenta com a diminuição da velocidade superficial do líquido. Também, as flutuações da espessura média do filme líquido aumentam com o crescimento do número de Reynolds do gás. O fato das flutuações serem mais significativas para menores velocidades superficiais de líquido, deve-se às tensões da parede e da interface que atuam numa faixa percentualmente maior, no interior do filme líquido, quando a espessura deste é menor. As flutuações do filme ocorrem essencialmente devido à viscosidade e, portanto, tudo isto é coerente com o comportamento físico do problema.

A figura 2 mostra a espessura média espacial do filme líquido versus o número de Reynolds do gás, para três diferentes velocidades do líquido. Pode-se confirmar que a espessura do filme cai mais acentuadamente quanto menor for a vazão de líquido. Outro fato importante é que o ponto de "flooding" aumenta com a diminuição da vazão de líquido. Fisicamente, isto ocorre devido às interações das tensões da parede em contato com o filme líquido e da interface que atuam numa maior porção no interior do filme líquido. Os novos picos após o ponto de "flooding", que caracterizam novos

arrastamentos de líquido pelo gás, em direção a parte superior do canal, podem ser observados. Portanto, tomou-se como ponto de "flooding", o ponto inicial do processo de arrastamento.

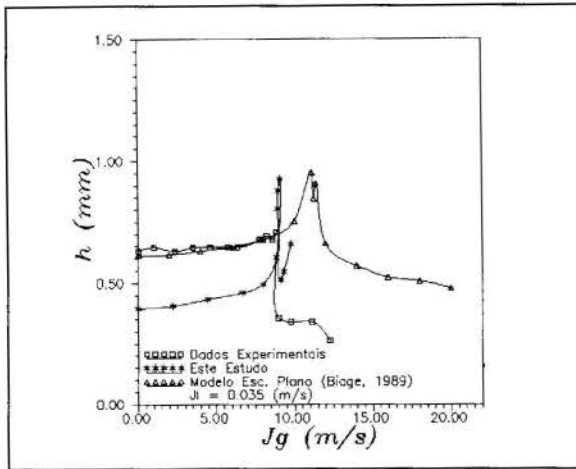


Figura 3: Comparação da espessura do filme líquido obtida neste trabalho com as de outros dois estudo.

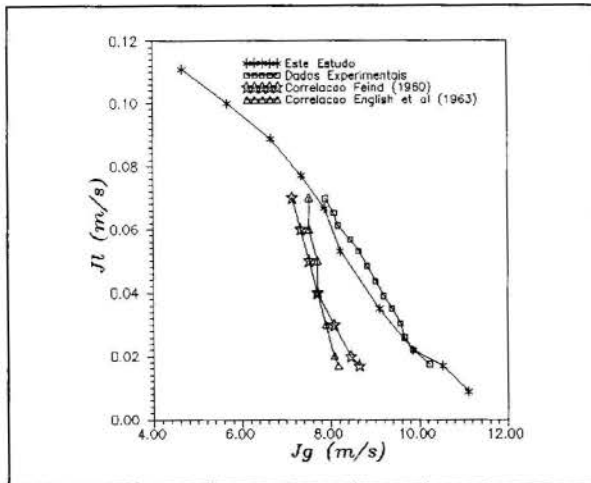


Figura 4: A Carta de "Flooding".

A figura 3 mostra a evolução da espessura média espacial do filme líquido em função da velocidade superficial do gás, para uma velocidade superficial do líquido específica ( $J_l = 0.035$  m/s). Nesta figura mostra-se também, os dados experimentais e a estimativa para a espessura do filme médio, obtida por um modelo de escoamento plano (Biage, 1989). O pico da espessura do filme obtido neste estudo apresenta uma boa concordância com aquele obtido experimentalmente. Os valores médios entretanto mostram diferenças de, aproximadamente 35%, o que corresponde a uma diferença em torno de 0.02 mm com relação aos valores experimentais. Porém, medidas experimentais em canais com precisão desta ordem de grandeza são bastante difíceis, devido à imprecisão nos ajustes da parede do canal que é desta ordem de grandeza (Biage, 1989). É importante salientar que a curva da espessura média apresentada para o modelo de escoamento plano, nesta figura, concorda melhor com os dados experimentais que com o atual modelo. Entretanto, o modelo de escoamento plano é constituído de um critério de instabilidade do perfil de velocidade, a partir de um perfil de velocidade plano, o qual foi considerado inicialmente coincidente com a espessura média obtido experimental.

Figura 4 apresenta o que denominamos de Carta de "Flooding", cujos eixos representam a velocidade superficial do líquido ( $J_l$ ) versus a velocidade superficial do gás ( $J_g$ ). Esta carta

é de grande interesse para o desenvolvimento de projetos em sistemas que apresentam situações em que filmes líquidos escoam a contra corrente a um escoamento de gás, como em sistema de exploração de gás natural. Nesta figura encontram-se plotados, além da relação obtida neste trabalho, os pontos experimentais obtidos por Biage, (1989), como também de outras duas correlações experimentais (Biage, 1989). Observa-se uma boa concordância entre a curva de "flooding" referente a este estudo e aquela dos resultados experimentais. O erro relativo médio constatado entre os valores referentes a este estudo e aqueles experimentais obtidos por Biage, (1989) é de aproximadamente 3%. Os estudos experimentais de Feind (1960) e também de English et al (1963) apresentam erros relativos médios acima de 10%. Conclui-se que os termos flutuantes, que não foram tratados neste trabalho, influenciam relativamente pouco na transição do escoamento em longos canais, ficando por conta da parte permanente a maior parcela de contribuição para no processo de transição.

#### REFERÊNCIAS

- Chang, H. C., 1986, "Non linear Waves on Liquid Film Surfaces - I. Flooding in a Vertical Tubes", *Chemical Engineering Science*, Vol. 41, pp. 2463-2476.
- Ataídes, I. F., 1994, "Estrutura da Superfície Livre de um Filme Líquido sobre uma Placa Plana Vertical: Fenômeno do Flooding"; Tese de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil.
- Ataídes, I. F. e Biage, M., 1996, "Estudo Teórico da Estrutura da Superfície Livre de um Filme Líquido Escoando Sobre uma Placa Plana Vertical: Fenômeno do "Flooding", IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Recife, Brasil.
- Biage, M., 1989, "Structure de la Surface Libre d'un Film Liquide Ruisselant sur une Plaque Plane Verticale et Soumis a un Contre-Courant de Gaz: Transition vers L'écoulement Cocourant Ascendant", Tese de Doutorado, L'institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, França.
- Bachir, A., 1987, "Etude de L'instabilité d'un Film Liquide Ruisselant sur une Plaque Verticale et Soumis à une Contre-Courant de Gaz. Transition vers L'écoulement Cocourant Ascendant", Tese de Doutorado, L'institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, França.
- Canuto, C. et al, 1978, "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer-Verlag, New York.
- Bharatan, D. et al, 1978, "Air Water Counter-Current Annular Flow", EPRI Report., No. NP - 786.
- Scriven, L. E., 1960, *Dynamics of a fluid interface*, Chemical Engineering Science, Vol. 12, pp. 98-108.
- Stakgold, I., 1979, "Green's Functions and Boundary Value Problems", John Wiley & Sons, New York, USA.
- Van Dyke, M., 1964, "Perturbation methods in fluid mechanics", Academic Press, New York, USA.

#### ABSTRACT

This study presented a mathematical formulation to identify the flooding point. This point is characterized by the liquid film transition from a liquid and gas counter-current flow to a concurrent flow. For the solution the problem was used an asymptotic expansion to transform the set of conservation equation to a one differential partial equation for the liquid film thickness. To solve this non-linear equation we have used the collocation spectral method. The numerical results of this study were compared with the experimental results and they showed relative error less than 3%.





## AIR - WATER AND AIR - XANTHAN GUM VOID FRACTION IN UPWARD CO-CURRENT SLUG FLOW THROUGH INCLINED ANNULI

Paulo Hora de Andrade Jr. , Edson Yoshihito Nakagawa

CENPES - "PETROBRAS Research Center"

21949-900 - Rio de Janeiro-RJ - Brazil

and

Antônio Carlos Bannwart

Departamento de Energia - F.E.M. - UNICAMP



### SUMMARY

*Air-water and air-Xanthan gum mixtures in upward co-current slug flow through concentric annuli were experimentally studied in horizontal, vertical and four other inclinations. Air phase and liquid phase superficial velocities were controlled, the volumetric void fractions were measured, by the usage of quick-closing ball valves, and plotted against the mixture superficial velocities to be compared with Zuber & Findlay model. Hewitt's correlation for the void fraction is tested.*

### 1. INTRODUCTION

Gas-liquid two-phase flows can be found in different patterns, depending upon each fluid flow rate, the physical properties of the fluids and also on the duct inclination. A very common and important pattern characterized by long gas bubbles is known as slug flow. The long gas bubbles (also called Taylor bubbles or Dumitrescu bubbles) are surrounded by a liquid film and are separated, in the longitudinal way, by liquid pistons (called "slugs") in which small gas bubbles are found. When the flow is vertical, the long gas bubbles are axis-symmetric and the liquid film is thin and constant width. In the other hand, if the duct is inclined there will be no axial symmetry and the liquid annulus will be thicker in the lower side of the duct.

The bubble length and frequency are not constant even when the flow is stabilized. If not well stabilized, bubble rise velocities will be quite different and some bubbles will catch up with the next ones. That is why one can speak of slug flow as a transient flow. When the duct is not horizontal there will be a gravitational pressure gradient through the longitudinal way of the duct and so the bubbles will expand while flowing. That expansion will be bigger if the duct is open to atmosphere. The velocities of the liquid slugs and so the bubble velocity will be increased due to bubble expansions.

In the present work the goal is the measurement of Taylor bubble actual velocity and the superficial velocities of the fluids, as well as the flow void fraction, in order to compare to Zuber & Findlay model and test the compatibility with Hewitt's void fraction correlation. It is very important to remind that these correlations were developed for flows of gas with Newtonian liquids in pipes. This work investigates the applicability of those models to the flow of gas with a non-Newtonian liquid through an annular cross section duct. Several works have been published about two-phase-flows of air with Newtonian liquids through pipes (cylindrical cross section), in horizontal or vertical position (Davies and Taylor, 1950; Bankoff, 1960; Zuber, 1960; Griffith and Wallis, 1961; Nicklin et al., 1962; Moïssis and Griffith, 1962; Zuber and Findlay, 1965; Mandhane et al., 1974; Dukler and Hubbard, 1975; Taitel et al., 1980; Hewitt, 1982; Chen and Spedding, 1983; Orell and Rembrand, 1986; Fabre and Liné, 1992; etc.). There are some others about inclined flow of air with Newtonian liquids through pipes (Wallis, 1969; Beggs and Brill, 1973; Taitel and Dukler, 1976; Weisman and Kang, 1981; Bendiksen, 1984; Couët et al., 1987; etc.). Very

few papers have been published however, on flow of air with non-Newtonian fluids. Most of these discuss about flow through circular cross section ducts (common pipes) in vertical or horizontal position; examples are Farooqi et al., 1980; Farooqi and Richardson, 1982; Khatib and Richardson, 1984; Chhabra et al., 1984; Chhabra and Richardson, 1984; Chhabra and Richardson, 1985). There has been published some works about two-phase flow through annular cross section duct with Newtonian liquid (Griffith, 1964; Sadatomi et al., 1982; Caetano, 1985; Barnea and Shemer, 1986; Couët et al., 1987; etc.). Nakagawa (1990) and Johnson & Cooper (1993) studied gas/non-Newtonian fluid in different inclinations, through eccentric annuli. Sousa (1995) worked with air/Xanthan gum flows, in different inclinations, through circular duct. There has not been found any work about gas/non-Newtonian fluid flow, in the whole inclination band, from horizontal up to vertical, through concentric annular duct, like this one. That is why this work can give an important contribution to the topic.

### 2. EXPERIMENTAL APPARATUS

**Test Section.** A flow system consisting of a 4.5-m-long test section, limited by two ball valves was designed and built. It is part of a 9-m long concentric annulus with 77.2-mm-inside-diameter casing (external pipe) and 42.2-mm-outside-diameter tubing (internal pipe).

Both ball valves are 72.2-mm ID, like the external pipe. They are connected to each other by a steel bar in such a way, that both are open and closed together, in order to block the 4.5-m-long test section when void fraction has to be measured. The first valve is a three-way valve. When it is closed, the upstream flow should be diverted and returned to liquid tank. Upstream from the three-way valve, a 3-m-long annular duct, with the same arrangement as the test section, was installed to avoid entrance effects in the test section during flow measurements of pressure, pressure drop and temperature. Downstream from the two-way valve a 1-m-long annular section was placed also to avoid disturbs in the test section. That annulus has the same configuration as the others.

In the middle of the 4.5-m-long actual test section were installed a thermometer and a pressure transmitter, both 4-20 mA analogic signal output. The values measured were used to calculate the air local flow rate, from air standard flow rate measured before mixture, upstream from test section.



At beginning and at the end of the 4.5-m-long test section, symmetrically from its center, were installed two pairs of resistivity sensors. These instruments measured the mean time Taylor bubbles took to travel from one to the other. Mean velocities of the bubbles were calculated by the micro-computer using the known distance between the sensors (3.5 m).

The whole system could be fixed in several positions, according to the inclination angle wanted. Fig. (1) shows the 9-m-long duct, the three-way valve and the 75-mm-ID diverter hose.

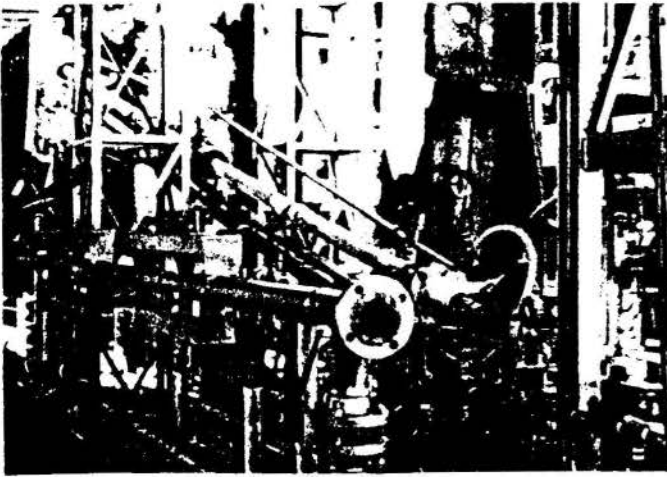


Figure 1 - Test section and partial view of gas system

**Liquid System.** The liquid phase was stored in 0.5-m<sup>3</sup> cylindrical tank, from which the liquid flowed to the pump. A speed controller device could set the pump rate according to the liquid flow rate desired. After pumped, the liquid was filtered and so passed by a flow rate meter station in which it could be measured by one of two positive-displacement flow rate meters, according to the value range to be measured. Selection was made by manifolds and ball valves. Each flow meter delivers 4-20 mA output sign to data acquisition system.

Then the liquid passed by a check valve and reached the mixture nozzle to meet the gas phase and both together get into the 3-m-long stabilizing section described above and form the slugs initially defined. In order to get the slug pattern on a previously chosen liquid gas flow rate configuration both rates could be set. The liquid could be easily regulated by the speed controller installed between the electrical motor and the pump.

After flowing for the whole 9-m-long annular section (including 3-m-long stabilizing section, 0.5-m-long three-way-valve, 4.5-m-long test section and 1-m-long post-stabilizing section) the liquid got into a 0.1-m<sup>3</sup> atmospheric-pressure vented tank. This tank worked as a separator, taking the gas away by a vent and delivering liquid to the 75-mm-ID downstream hose. It is fixed to the pipe section basic structure in such a way it can be inclined to any pipe position, from horizontal up to vertical. The liquid was then returned to the main tank.

**Gas System.** Air was taken from a 100-mm 500-KPa manifold through a 25-mm pipe. A needle valve imposed the first pressure drop and could be set as a rough pressure and flow rate control so that the air pressure in the mixture nozzle

described above was about the same as the liquid and enough to form the slugs. After the needle valve the air passed through a net filter and reached an oil separator before being admitted to a pressure control unit. In that unit the air could be controlled by one or both of the two PCV (pressure control valve) installed, depending on the pressure drop needed. One of them has a maximum flow coefficient equal to 0.7 and the other one 2.0.

A thermometer and a manometer are installed downstream. Both delivers 4-20 mA output to the data acquisition system. After those measurements the air passes through a standard flow rate meter station. It is composed by two orifice plates and a 4/20-mA-output differential pressure transmitter which was connected to the inlet and outlet manifolds of each plate. That differential pressure together with plate calibration data, local pressure and temperature were used by the program to calculate the standard air flow rate.

Before reaching the mixture nozzle described above, the air passed through a fine-adjustment needle valve for fine control of flow.

**Data Acquisition System.** The 4-20 mA output of each instrument were converted to 1-5 V analogic signal and delivered to the computer. They were then converted to digital signal values and displayed on the screen. All measured values could be monitored simultaneously, from control room. After a satisfactory cycle of measurements (with good measurement of Taylor bubbles velocities and void fraction measured by closing ball valves and reading test section volume) all data were taken as the cycle mean value and recorded by the computer. A matrix was being generated in a file in which each vector was the result of a reading cycle.

### 3. FLUID PROPERTIES

Each test condition of flow rates and inclination angle was measured both for air-water and for air-Xanthan gum flow. Water was clean and totally transparent. The Xanthan gum used was prepared in a concentration of 4.28 Kg/m<sup>3</sup> (basic powder polymer mass per water volume). After prepared, solution density was 1000 Kg/m<sup>3</sup>. It was almost transparent and that was excellent for visibility of Taylor bubbles through liquid films and through transparent pipes.

Xanthan gum solution shows shear-thinning non-Newtonian behavior. That means its apparent viscosity decreases when shear rate (and so fluid velocity) increases. Rheological curve is shown in Fig. (2). Three rheological models were tested.

**Power-law model.** The polymeric solution used has been well modeled, by other authors, using power-law equation:

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad (1)$$

where  $\tau$  is shear stress,  $\dot{\gamma}$  is shear rate and "K" and "n" are power-law model parameters called consistency index and flow behavior index, respectively. They must be found experimentally. For the polymeric solution used "K" was determined as 0.96 Pa.s<sup>n</sup> where "n" was equal to 0.34.

That model, however, does not fit well for very low shear rates due to the yield point of this polymer. However, this work dealt solely with moderate or high velocities (otherwise it would not be easy to get slug pattern flows) and so power-law model fitted well.

**Bingham model** . This model is useful for fluids that presents yield point:

$$\tau = \mu_p \dot{\gamma} + \tau_0 \quad (2)$$

where  $\mu_p$  represents plastic viscosity and  $\tau_0$  is the yield point. These parameters were found to be 0.0066 Pa.s and 3.8051 Pa, respectively.

**Herschel-Bulkley model**. This model also considers the yield point and delivered the best agreement to rheological data. It is defined as:

$$\tau = K_{HB} \dot{\gamma}^{n'} + \tau_{HB} \quad (3)$$

where  $K_{HB}$  and  $n'$  are Herschel-Bulkley parameters equivalent to "K" and "n" of power-law model, eq. (1).  $\tau_{HB}$  is Herschel-Bulkley yield point which has the same physical meaning of Bingham's  $\tau_0$ , eq. (2), i.e. the minimum shear stress to cause fluid movement. These parameter values were found to be 0.16 Pa.s<sup>n'</sup>, 0.55 and 2.78 Pa, respectively.

In Fig. (2) are plotted the three discussed model equations together with the rheological curve of the polymeric solution used.

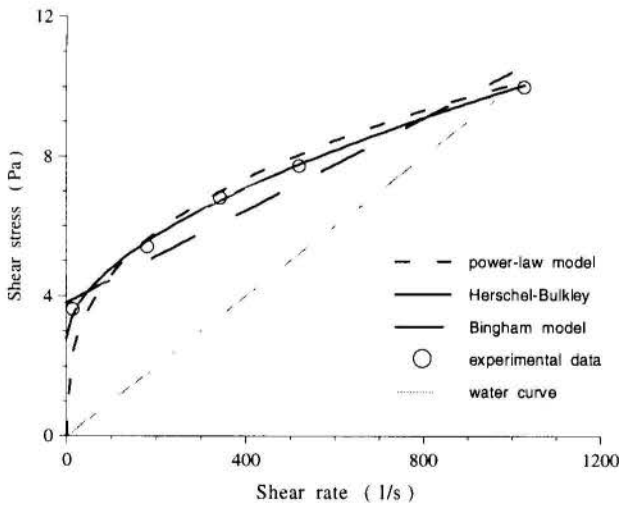


Figure 2 - Rheological curves of Xanthan gum

#### 4. BASIC CONCEPTS

Local void fraction is defined in a given cross section of a duct as:

$$\alpha_G = \frac{A_G}{A} \quad \text{and} \quad \alpha_L = \frac{A_L}{A} \quad (4)$$

where "A" is the cross section area and subscripts "G" and "L" corresponds to liquid and gas phase, respectively. From here on, to simplify, subscripts "G" will be omitted for gas void fraction, as it often happens in literature.

As this works deals to two-phase flow, comes from definition:

$$\alpha_L = 1 - \alpha \quad (5)$$

Superficial velocities or volumetric flow rate fluxes are defined as

$$j = \frac{Q}{A} = \frac{Q_G}{A} + \frac{Q_L}{A} = j_G + j_L \quad (6)$$

where "Q" is volumetric flow rate. The absence of subscript means that definition refers to the mixture. But,

$$v_G = \frac{Q_G}{A_G} \quad \text{and} \quad v_L = \frac{Q_L}{A_L} \quad (7)$$

where "v" is the longitudinal flow velocity. Combining eqs. (4), (5), (6) and (7) yields:

$$j_G = \frac{Q_G}{A} = \frac{v_G \cdot A_G}{A} = \alpha \cdot v_G \quad (8-a)$$

and

$$j_L = \frac{Q_L}{A} = \frac{v_L \cdot A_L}{A} = \alpha_L \cdot v_L = (1-\alpha) \cdot v_L \quad (8-b)$$

#### 5. VOID FRACTION CORRELATIONS

**Zuber & Findlay**. Zuber and Findlay (1965), based on Nicklin et al. (1962), proposed, for upward vertical air-water flow through circular cross section ducts (pipes) :

$$v_G = j_G / \alpha = C_0 \cdot j + v_{\infty} \quad (9)$$

where "C<sub>0</sub>" and "v<sub>∞</sub>" are parameters obtained from experiments. For that scenario, the angular coefficient, C<sub>0</sub>, was suggested to be near 1.2 while linear coefficient, v<sub>∞</sub>, was related to pipe diameter. When coefficients are known, eq. (9) is very useful and simple to determine void fraction. Eq. (6) can be used since flow rates are often easy to be measured.

**Hewitt**. From eqs. (4) and (7) the velocity ratio "S" can be related to void fraction:

$$S = \frac{v_G}{v_L} = \frac{\frac{Q_G}{A \cdot \alpha}}{\frac{Q_L}{A \cdot (1-\alpha)}}$$

solving for  $\alpha$  :

$$\frac{S \cdot Q_L}{(1-\alpha)} = \frac{Q_G}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{Q_G}{S \cdot Q_L + Q_G} \quad (10)$$

Hewitt (1982), based on Premoli et al., presented, for vertical gas/Newtonian fluid flow through pipes, an empirical correlation for "S":

$$S = 1 + E_1 \cdot \left( \frac{\beta_1}{1 + \beta_1 \cdot E_2} - \beta_1 \cdot E_2 \right)^{1/2} \quad (11)$$

where

$$\beta_1 = \frac{\beta}{1-\beta} \quad (12)$$

$$E_1 = 1,578 \cdot \overline{Re}^{-0.19} \cdot \left( \frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{0.22} \quad (13)$$

$$E_2 = 0,0273 \cdot \overline{We} \cdot \overline{Re}^{-0.51} \cdot \left( \frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{-0.08} \quad (14)$$

$\beta$ , in eq. (13), represents the flow ratio or non-slip void fraction:

$$\beta = \frac{Q_G}{Q} = \frac{j_G}{j} \quad (15)$$

$\rho$ , in eqs. (13) and (14) is fluid density.  $\overline{We}$  and  $\overline{Re}$  are called, respectively, Weber number and Reynolds number modified to gas-liquid flow and defined as:

$$\overline{Re} = \frac{G \cdot D}{\mu_L} = \frac{(G_L + G_G) \cdot D}{\mu_L} = \frac{(\rho_L \cdot j_L + \rho_G \cdot j_G) \cdot D}{\mu_L} \quad (16)$$

$$\overline{We} = \frac{G^2 \cdot D}{\sigma_L \cdot \rho_L} = \frac{(\rho_L j_L + \rho_G j_G)^2 \cdot D}{\sigma_L \cdot \rho_L} \quad (17)$$

where "D" is pipe diameter,  $\mu$  and  $\sigma$  are, respectively, viscosity and superficial tension and "G" is mass flux, defined as mass flow rate per area:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \frac{\dot{m}_L + \dot{m}_G}{A} = \frac{\rho_L \cdot Q_L + \rho_G \cdot Q_G}{A} = \rho_L \cdot j_L + \rho_G \cdot j_G \quad (18)$$

The importance of Hewitt's correlation is that it is function of flow rates, which in most of cases are easily to be measured, and on physical properties of fluids, that can be previously known.

## 6. RESULTS

Experimental data, collected by Andrade (1995) for air/water and for air/Xanthan gum flows through annular cross-section duct in different inclinations, are compared in this work with the correlations exposed in chapter (5), which were proposed for vertical flow through circular cross-section ducts (tubes). Zuber & Findlay and Hewitt correlations were developed for gas/Newtonian-fluid flows but are compared here also with air/Xanthan gum flows. Figs. (3) to (7) present the comparisons. In all this work inclination angles are referred to horizontal position.

**Zuber & Findlay Model.** In Figs. (3) and (4) are presented experimental points, graphics and equations obtained by linear regression, for air/water flows and for air/Xanthan gum flows,

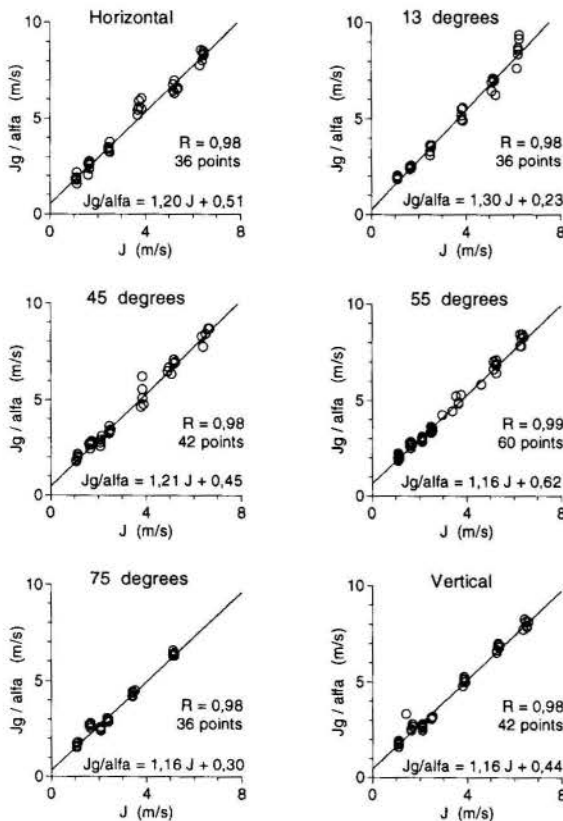


Figure 3 - Zuber & Findlay correlation applied to air-water experimental data in different inclinations

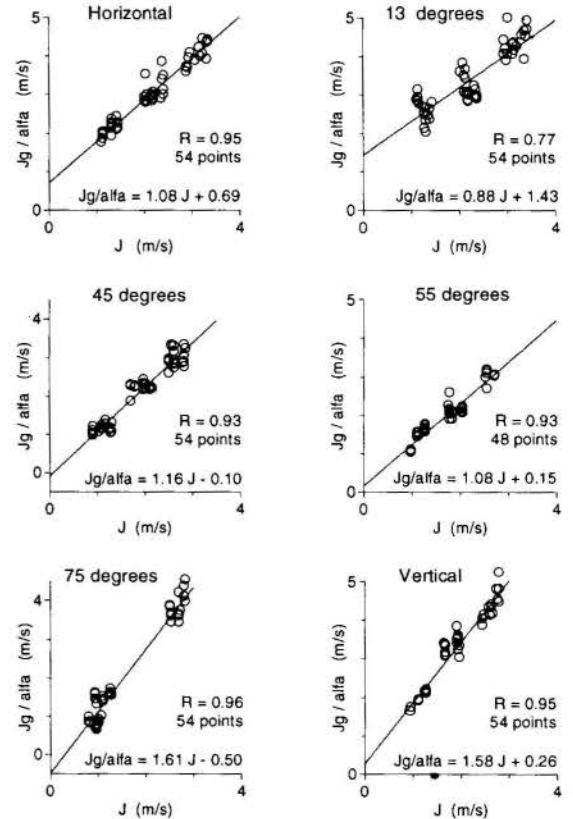


Figure 4 - Zuber & Findlay correlation applied to air-Xanthan gum experimental data in different inclinations

respectively, in six different inclinations. The two sets of graphics were built side by side in order to make comparison easier. The model fits quite well to data.

Hewitt / Premoli Correlation. The results are shown in Figs. (5) and (6), side by side, for air/water and for air/Xanthan gum, again. For each two-phase flow, in each inclination, air void fraction were plotted versus measured air void fraction versus air void fraction calculated by eqs. (10) to (18).

Fitness for air/water flows was excellent in all inclinations. For air/Xanthan gum flows the agreement was not good in the two intermediate inclinations (45 and 55 degrees). It may have happened due to high air void fraction in the liquid phase, in the form of small bubbles, increased by some surf formation. Near horizontal and vertical positions ( 0, 13, 75 and 90 degrees) experimental data are close to calculated values.

The correlation had to be adapted to annular cross-section duct. In place of pipe diameter "D", eqs. (16) and (17), an equivalent diameter "Deq" was used. Several equivalent diameters suggested in literature were tested. The best fitness was obtained with the simplest equation: the hydraulic diameter. For a concentric annulus the hydraulic diameter is:

$$D_{eq} = D - d \tag{19}$$

where "D" is the inside diameter of the external pipe and "d" is the outside diameter of the internal cylindrical bar.

The model should also be adapted to non-Newtonian fluid. In eq. (16) Newton's liquid viscosity was substituted for Herschel-Bulkley model equivalent viscosity:

$$\mu_{eq} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \tag{20}$$

where shear rate  $\dot{\gamma}$  was calculated by:

$$\dot{\gamma} = \frac{6j}{D_{eq}} \tag{21}$$

and shear stress  $\tau$  was calculated from eq. (3), using the three parameters values already written in the paragraph below eq. (3).

Usage of Hewitt's correlation into Zuber & Findlay equation. The advantage is to find coefficients  $C_0$  and  $v_{\infty}$  of Zuber and Findlay equation (eq. 9). In this way a great range of air void fraction can be predicted for values of superficial velocities "j" (and volumetric flow rates "Q") not measured. For known flow rates values Hewitt's correlation gives good results. Zuber and Findlay graphics and equations shown in Fig. (4) are redrawn, exchanging the measured values of air void fraction with the air void fraction calculated by Hewitt's correlation, with the same experimental values of superficial velocities "j".

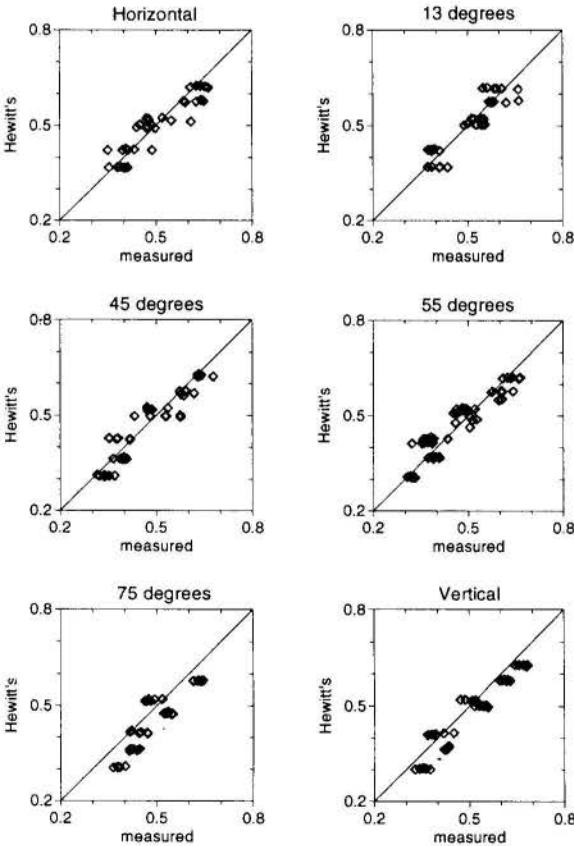


Figure 5 - Air-water flow void fractions: comparison of Hewitt's correlation with experimental data

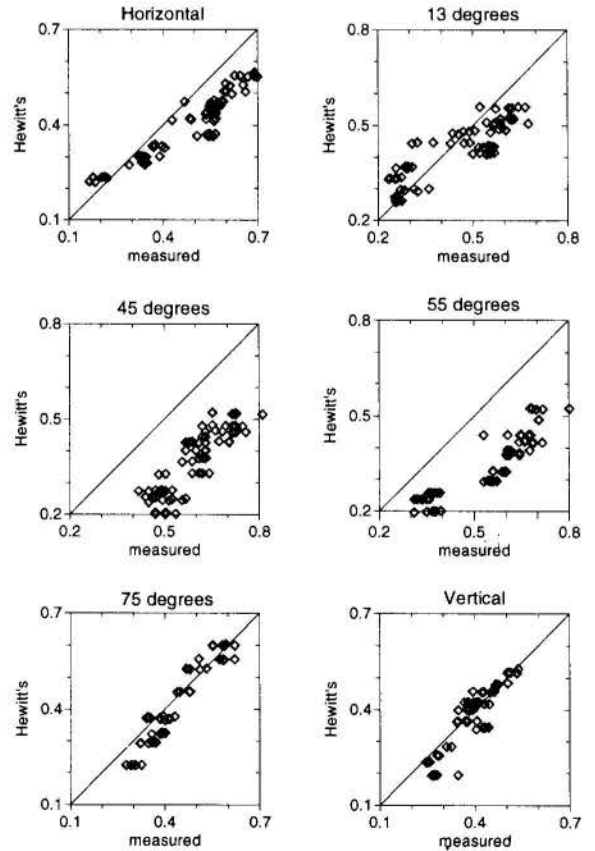


Figure 6 - Air-Xanthan gum flow void fractions: comparison of Hewitt's correlation with experimental data

The knew graphics are plotted in Fig (7). Due to space limitation the graphics corresponding to the ones shown in Fig. (3), of air/water flows are not presented. Air/Xanthan gum graphics are more important and air/water flows produced perfect results with correlation coefficients "R" about 0,999 in all inclinations.

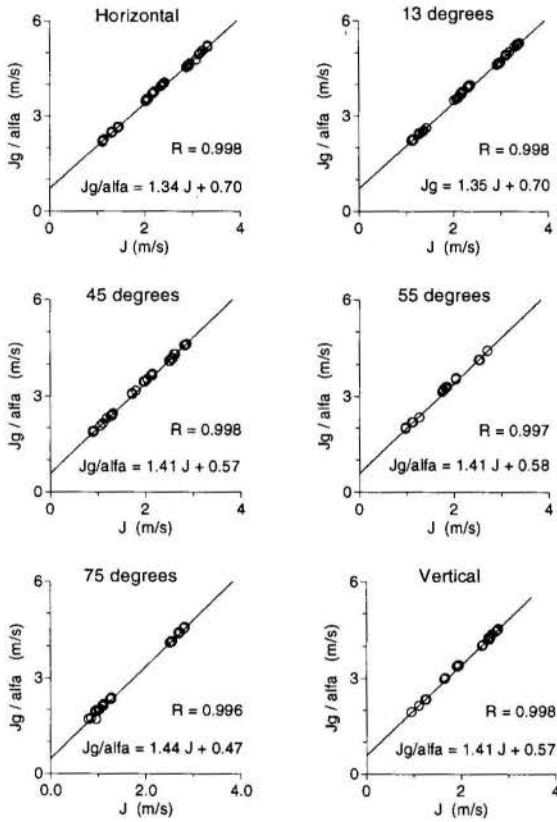


Figure 7 - Zuber & Findlay correlation applied to air-Xanthan gum experimental data and void fraction calculated by Hewitt's correlation

It can be seen in Fig. (7) that the compatibility is excellent. It's a great advantage for predicting gas void fraction in not tested flow rates, when physical properties and geometry are known.

## 7. CONCLUSIONS

Zuber & Findlay model, developed for air/Newtonian liquid flows through pipes, can be very well applicable for the same fluids when flowing through concentric annular section ducts. That model also showed excellent agreement with air/Xanthan gum flow through annular duct. This is very useful for relating void fraction to the fluid flow rates, when the duct geometry is known.

A great superficial velocity matrix was tested, both for air/water and for air/Xanthan gum solution, showing the same "slug" pattern. That shows the air/Xanthan gum two-phase flow pattern borders do not change significantly from the ones previously known to air/water two-phase flow.

Hewitt's correlation, for void fraction determination from fluid superficial velocities and fluid properties, was developed for air/Newtonian-liquid vertical two-phase flow through pipes. It showed excellent compatibility to inclined and also horizontal air/water flow through concentric annular duct. The fitting was very good to air/Xanthan gum flow, through the same annular duct, for all inclinations, too. However, it was necessary to adapt the equations, changing the pipe diameter in original equations by an equivalent diameter, representing the annular duct, considering its two diameters. Some equivalent diameters were tested. The one that gave the best fitting was the hydraulic diameter. This conclusion is very useful for predicting void fraction, mainly in situations it cannot be directly measured, since fluid properties are almost always known, as well as duct geometry and fluid flow rates are usually easily measurable.

In this experiment no entrance effect was detected. These conclusions simplify new studies in the topic.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to PETROBRAS for giving the whole material support during the experiments and for its permission to publish this paper.

## REFERENCES

- Andrade Jr., P. H., 1995, "Velocities and Void Fractions in Air/Water and Air/Xanthan Gum Slug Flows through Annular Duct, in Different Inclinations", Master Dissertation, UNICAMP, Brazil (in Portuguese).
- Hewitt, G. F., 1982, Handbook of Multiphase Systems, edited by G. Hetsroni, McGraw-Hill Book Company, section 2.3, pp. 2.76-2.94.
- Zuber, N. and Findlay, J. A., 1965, "Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow Systems", Journal of Heat Transfer, November 1965, pp. 453-468, Transactions of the ASME.





## CONJUGATE NATURAL CONVECTION HEAT TRANSFER BETWEEN TWO FLUIDS SEPARATED BY AN HORIZONTAL WALL

E. Luna, C. Treviño and F. Méndez  
Facultad de Ciencias, UNAM  
04510 México D. F., Mexico



### SUMMARY

*The conjugate heat transfer across a thin horizontal wall separating two fluids at different temperatures is investigated both numerically and asymptotically. The solution for large Rayleigh numbers is shown to depend on two nondimensional parameters;  $\alpha/\varepsilon^2$ , with  $\alpha$  being the ratio of the thermal resistance of the boundary layer in the hot medium to the thermal resistance of the wall and  $\varepsilon$  the aspect ratio of the plate, and  $\beta$ , the ratio of the thermal resistances of the boundary layers in the two media. The overall Nusselt number is an increasing function of  $\alpha/\varepsilon^2$  taking a finite maximum value for  $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow \infty$  and tending to zero for  $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow 0$ .*

### INTRODUCTION

The study of coupled interaction of conduction and convection heat transfer is extremely important because it appears in many practical and industrial devices. The influence of solid heat conduction on convective heat transfer has been analyzed in many works related to natural convection on vertical surfaces (Kelleher and Yang, 1967, Anderson and Bejan, 1980, Sakakibara et al., 1992, Treviño et al., 1996). However, in relation to the natural convective heat transfer on horizontal surfaces, there is a lack on studies on conjugate conduction-convection heat transfer problems. Many works have appeared in the literature studying the heat transfer from solid surfaces facing up or down, with prescribed surface temperature or heat flux (Gill et al., 1965, Rotem and Claasen, 1969, Aihara et al., 1972, Higuera, 1993), among others, since the now classical work of Stewartson (1958). An excellent review can be found in Gebhart et al. (1988).

The objective of this paper is to evaluate the heat conduction of a horizontal plate, which divides to fluids at different temperatures on the overall heat transfer. We will study here the case where the hotter fluid is located below the plate. For very large values of the Rayleigh numbers,  $Ra_i$ , two boundary layers develop from the edges of the plate towards the center, forming here a buoyant plume rising above the upper surface and falling below the lower surface. The thickness of the plume is of the order of magnitude of the thickness of the boundary layer at the center. Here, the boundary layer approximation breaks down. However, for large values of the Rayleigh number, the thickness of this region related to the length of the plate is very small, of order  $Ra_i^{-1/5}$ . The central region is for this problem not very important, because the higher heat transfer rates occur on the edges of the plate. For these reasons,

it is justified to neglect the influences of both plumes in the present work.

### FORMULATION

Consider a horizontal heat conducting strip of width  $2L$  and thickness  $h$  in an otherwise adiabatic wall separating two fluids at temperatures  $T_{1\infty}$  and  $T_{2\infty} < T_{1\infty}$ . The hotter fluid 1 is assumed to be in this case below the strip. Due to the heat conduction across the strip, temperature differences of order  $\Delta T = T_{1\infty} - T_{2\infty}$  appear in the fluids that induce natural convection flows. order of magnitude analysis shows that for large values of the Rayleigh numbers these motions occur in boundary layers of thickness  $L/Ra_i^{1/5}$  on the sides of the strip, where  $Ra_i = g\beta_i\Delta T Pr_i L^3/\nu_i^2$  are the Rayleigh numbers, with  $i = 1, 2$  denoting the hot and cold media, respectively.  $g$  is the acceleration of gravity,  $\beta_i$  and  $\nu_i$  are thermal expansion coefficients and kinematic viscosities of the fluids.  $Pr_i$  denote the Prandtl number of fluid  $i$ ,  $Pr_i = \mu_i c_i/\lambda_i$ , where  $\mu_i$  is the dynamic coefficient of viscosity,  $c_i$  is the specific heat and  $\lambda_i$  is the thermal conductivity of fluid  $i$ , respectively. Introducing the characteristic temperature changes in the fluids as well in the plate as  $\Delta T_i$  and  $\Delta T_w$ , respectively, the order of magnitude of the boundary layer thicknesses are

$$\delta_i \sim L \left( \frac{\Delta T}{Ra_i \Delta T_i} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (1)$$

Due to the adiabatic conditions at the edge of the plate,  $x = 0$  and at the symmetry plane,  $x = L$ , the overall transversal heat flux through both fluids and the plate must be of the same order of magnitude. Therefore, we can relate the characteristic temperature drop in each fluid,  $\Delta T_i$ , with that of the plate,  $\Delta T_w$  as:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T} \sim \left( \frac{\alpha \Delta T_w}{\varepsilon^2 \Delta T} \right)^{\frac{5}{6}}, \quad \frac{\Delta T_2}{\Delta T} \sim \left( \frac{\alpha \beta \Delta T_w}{\varepsilon^2 \Delta T} \right)^{\frac{5}{6}}, \quad (2)$$

where  $\varepsilon$  is the aspect ratio of the plate,  $\varepsilon = h/L$ ,  $\alpha$  is the nondimensional heat conduction parameter defined by

$$\alpha = \frac{\lambda_w h}{\lambda_1 L} Ra_1^{-\frac{1}{6}}, \quad (3)$$

and  $\beta$  relates the thermal conductances of both fluids as

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \frac{Ra_1}{Ra_2} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (4)$$

Parameter  $\alpha$  corresponds to the ratio of heat conducted by the plate to the heat convected from the hotter fluid. This parameter can be much larger or much smaller than unity. Parameter  $\beta$  is of order of unity for practical cases and is exactly unity for the same fluid. However,  $\beta$  can vary strongly by using very different fluids at both sides of the horizontal wall. From relationships (2), we obtain the relative temperature drop at the wall as a function of the most important parameters as

$$\left( \frac{\alpha \Delta T_w}{\varepsilon^2 \Delta T} \right)^{\frac{5}{6}} (1 + \beta^{\frac{5}{6}}) + \frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim 1. \quad (5)$$

We suppose first that the first term on the left hand side is of order unity. Then

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha (1 + \beta^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{5}}}. \quad (6)$$

For very small values of this ratio, the temperature variations in the transversal direction in the wall are very small and can be neglected in a first approximation. This limit corresponds to the thermally thin wall approximation and can be obtained for large values of  $\alpha/\varepsilon^2$  and any value of  $\beta$ , or with values of  $\beta$  such as

$$\beta \gg \left| \left( \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right)^{\frac{6}{5}} - 1 \right|^{\frac{5}{6}}. \quad (7)$$

The characteristic temperature drop in both fluids are in this limit

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T} \sim \frac{1}{1 + \beta^{\frac{5}{6}}}, \quad \frac{\Delta T_2}{\Delta T} \sim \frac{\beta^{\frac{5}{6}}}{1 + \beta^{\frac{5}{6}}}. \quad (8)$$

For values of  $\beta$  of order unity, the temperature changes in both fluids are important and must be retained in the analysis. However, for large values of  $\beta$  compared with unity, the thermal resistance of fluid  $i$  is very small, thus reducing to the case of the heat transfer process above an horizontal isothermal wall. On the other hand, for small values of  $\beta$ , the problem reduces to the heat transfer problem below an isothermal horizontal plate.

The thermally thick wall approximation corresponds to the case where the relative temperature variations in the transversal direction of the wall are of order unity. For values of  $\beta$  of order unity, this corresponds to values of  $\alpha/\varepsilon^2 \sim 1$ . The characteristic temperature drop in both fluids are in this limit

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T} \sim \left( \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{5}{6}}, \quad \frac{\Delta T_2}{\Delta T} \sim \left( \frac{\alpha \beta}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{5}{6}}. \quad (9)$$

For values of  $\alpha/\varepsilon^2 \sim 1$  with values of  $\beta \ll 1$ , the problem reduces to the heat transfer problem below an horizontal wall with a known temperature at the upper surface. However, in this case the temperature variations in the wall are important and must be retained. This is the main difference with the case of an uniform wall temperature mentioned above. The other case corresponds with small values of  $\alpha/\varepsilon^2$ , with values of  $\beta \sim \varepsilon^2/\alpha$ .

The most important parameter to be determined by the present work is the nondimensional overall heat flux or Nusselt number defined by

$$Nu = \frac{qL}{\lambda_1 \Delta T} \sim Ra_1^{\frac{1}{6}} \left( \frac{\Delta T_1}{\Delta T} \right)^{\frac{5}{6}}. \quad (10)$$

For the thermally thin wall we obtain a reduced Nusselt number as

$$Nu^* = \frac{Nu}{Ra_1^{\frac{1}{6}}} \sim \frac{1}{(1 + \beta^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{5}}}, \quad (11)$$

which is independent of  $\alpha$  and  $\varepsilon$ . On the other hand, for the thermally thick wall, we have

$$Nu^* = \frac{Nu}{Ra_1^{\frac{1}{6}}} \sim \frac{\alpha}{\varepsilon^2}. \quad (12)$$

Therefore, for small values of  $\alpha/\varepsilon^2$ , the reduced Nusselt number  $Nu^*$  increases linearly with  $\alpha/\varepsilon^2$ , reaching the asymptotic value of  $1/(1 + \beta^{5/6})^{6/5}$ , for large values of  $\alpha/\varepsilon^2$ . The main objective of the present work is to obtain the solution covering the whole parametric space mainly in  $\alpha/\varepsilon^2$ . We will find that the response is in this case monotonic, and a maximum on the reduced Nusselt number is achieved for values of the parameter  $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow \infty$ . The relative influence of the longitudinal heat conduction in the plate can be obtained from the ratio of the longitudinal to the transversal heat conduction terms as

$$R \sim \alpha \left( 1 + \beta^{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{6}{5}} \frac{\Delta T_{Lw}}{\Delta T}, \quad (13)$$

where  $\Delta T_{Lw}$  corresponds to the characteristic temperature difference on the wall in the longitudinal direction. For large values of  $\alpha$ ,  $\Delta T_{Lw}/\Delta T$  is very small of order  $\alpha^{-1}(1 + \beta^{5/6})^{-6/5}$ . The longitudinal heat conduction is very small and could be neglected for values of  $\alpha \ll (1 + \beta^{5/6})^{-6/5}$ .

Using the guidance of the order of magnitude estimates, we introduce the following nondimensional independent variables

$$\chi = \frac{x}{L}, \eta_1 = Ra_1^{1/5} \frac{(y - \frac{h}{2})}{5^{1/5} L \chi^{3/5}},$$

$$\eta_2 = -Ra_2^{1/5} \frac{(y + \frac{h}{2})}{5^{1/5} L \chi^{3/5}}, z = \frac{y}{h}, \quad (14)$$

together with the nondimensional dependent variables

$$f_i = \frac{\psi_i Pr_i}{5^{1/5} \nu_i Ra_i^{1/5} \chi^{3/5}}, \phi_i = \frac{(p - p_0) L Pr_i}{5^{1/5} \rho_i \nu_i^2 Ra_i^{1/5} \chi^{3/5}},$$

$$\theta_1 = \frac{T_{1\infty} - T_1}{T_{1\infty} - T_{2\infty}}, \theta_2 = \frac{T_2 - T_{2\infty}}{T_{1\infty} - T_{2\infty}},$$

$$\theta_w = \frac{T_w - T_{2\infty}}{T_{1\infty} - T_{2\infty}}. \quad (15)$$

Here  $x$  is the horizontal distance from one of the edges of the strip,  $y$  is the vertical distance measured from the middle of the strip toward the hot medium,  $\psi_i$  are the stream functions defined in the usual way and  $p$  is the pressure. The nondimensional balance equations, using the Boussinesq and boundary layer approximations, take the form

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta_i^2} + 3f_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} = 5\chi \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \chi} - \frac{\partial f_i}{\partial \chi} \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_i} = \theta_i \quad (17)$$

$$\frac{\partial^3 f_i}{\partial \eta_i^3} + \frac{2}{5} \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_i} - \frac{2}{5} \phi_i - \chi \frac{\partial \phi_i}{\partial \chi} = \frac{1}{Pr_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \right)^2$$

$$+ \frac{1}{Pr_i} \left[ -3f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta_i^2} + 5\chi \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \chi \partial \eta_i} - \frac{\partial f_i}{\partial \chi} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta_i^2} \right) \right], \quad (18)$$

for the fluids and

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2} = 0, \quad (19)$$

for the wall. The boundary conditions for these equations are

$$f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} = 0, \theta_1 = 1 - \theta_w, \frac{\partial \theta_w}{\partial z} =$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{\alpha \chi^{3/5}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \text{ at } \eta_1 = z - \frac{1}{2} = 0 \quad (20)$$

$$f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2} = 0, \theta_2 = \theta_w, \frac{\partial \theta_w}{\partial z} =$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{\alpha \beta \chi^{3/5}} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \text{ at } \eta_2 = z + \frac{1}{2} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} = 0 \text{ for } \chi = 0 \text{ and } \chi = 1 \quad (22)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} = \theta_i = \phi_i = 0 \text{ for } \eta_i \rightarrow \infty. \quad (23)$$

## THERMALLY THIN WALL

For very large values of  $\alpha(1 + \beta \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}) / \varepsilon^2$  compared with unity, the temperature variations in the transversal direction in the wall can be neglected. In this limit the nondimensional energy equation in the wall (19) can be integrated along the transversal coordinate, resulting after applying the boundary conditions (20) and (21)

$$\alpha \frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} = \frac{1}{\chi^{3/5}} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right]. \quad (24)$$

This equation must be solved with the adiabatic conditions for the wall given by eqs. (22). An attempt to solve eqs. (16), (17), (18) and (24) with the corresponding boundary conditions, by perturbation techniques with  $1/\alpha$  as the small parameter of expansion, of the form

$$\theta_w = \theta_{w0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^j} \theta_{wj}(\chi) \quad (25)$$

$$\theta_i = \theta_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^j} \theta_{ij}(\chi), \quad (26)$$

will conduce us to the result that  $\theta_{wj} = \theta_{ij} = 0$ , for all  $j \geq 1$ . Integrating now eq. (24) along the longitudinal coordinate and using the adiabatic conditions, we obtain

$$\int_0^1 \frac{d\chi}{\chi^{3/5}} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right] = 0. \quad (27)$$

It can be shown that the appropriate solution for eq. (27) requires that the argument between brackets is exactly zero at each station  $\chi$ . This happens if

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0},$$

$$\text{with } \theta_1 = 1 - \theta_2 \text{ at } \eta_1 = \eta_2 = 0. \quad (28)$$

It means that the heat flux from fluid 1 to the wall is exactly the same as from the wall to fluid 2. This is only possible for a wall with an uniform temperature as mentioned earlier in this section. Using the invariance of the boundary layer equations under the group of transformations

$$\theta_i \Rightarrow B_i \theta_i, \eta_i \Rightarrow B_i^{-1/5} \eta_i, \phi_i \Rightarrow B_i^{3/5} \phi_i, f_i \Rightarrow B_i^{1/5} f_i, \quad (29)$$

we can normalize the boundary layer equations. In this case  $B_1 = (1 - \theta_w)$  and  $B_2 = \theta_w$ . The problem then reduces to the classical heat transfer problem with a surface nondimensional temperature of unity for both flows (Gebhart et al., 1988). Therefore

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\dots, \dots} = -G(Pr_1)(1 - \theta_w)^{3/5},$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \right|_{\eta_1=0} = -G(\text{Pr}_2) \theta_w^{\frac{5}{6}}, \quad (30)$$

where  $G$  is the nondimensional temperature gradient at the wall for the normalized case,  $G = 0.394 \text{Pr}^{1/20}$ , for Prandtl numbers close to unity (Gebhart et al., 1988). From eq. (28) we obtain the corresponding nondimensional temperature

$$\theta_w = \frac{\left( \frac{\beta G(\text{Pr}_1)}{G(\text{Pr}_2)} \right)^{\frac{5}{6}}}{1 + \left( \frac{\beta G(\text{Pr}_1)}{G(\text{Pr}_2)} \right)^{\frac{5}{6}}}, \quad (31)$$

and the overall reduced Nusselt number is

$$\overline{Nu} = - \int_0^1 \frac{d\chi}{\chi^{\frac{5}{6}}} \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=0} = \frac{5G(\text{Pr}_1)(1 - \theta_w)^{\frac{5}{6}}}{3}. \quad (32)$$

In this limit the longitudinal heat conduction plays no role due to the absence of finite temperature gradients in the longitudinal direction.

### THERMALLY THICK WALL

In the opposite limit  $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow 0$  the thermal resistance of the wall is much larger than that of the boundary layers and most of the temperature drop occurs across the wall, leading to  $\theta_w = z + 1/2$  in a first approximation. In this limit, the longitudinal heat conduction in the strip is very small and can be neglected. The boundary conditions at both interfaces, now can be written as

$$\begin{aligned} 1 - \theta_1(\chi, 0) - \theta_2(\chi, 0) &= - \frac{\varepsilon^2}{\alpha \chi^{\frac{5}{6}}} \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=0} \\ &= - \frac{\varepsilon^2}{\alpha \beta \chi^{\frac{5}{6}}} \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \right|_{\eta_2=0}, \end{aligned} \quad (33)$$

with the initial conditions

$$\theta_1(\chi = 0, 0) = \theta_2(\chi = 0, 0) = 0. \quad (34)$$

Assuming a solution of the form

$$\theta_i = B_i \chi^n \bar{\theta}_i(\bar{\eta}_i), \quad \text{with } \bar{\eta}_i = (B_i \chi^n)^{\frac{1}{6}} \eta_i, \quad (35)$$

eq. (33) reduces to

$$\begin{aligned} 1 - (B_1 + B_2) \chi^n &\sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha} B_1^{\frac{5}{6}} \chi^{\frac{6n-2}{6}} G_{n1} \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon^2}{\alpha \beta} B_2^{\frac{5}{6}} \chi^{\frac{6n-2}{6}} G_{n2}, \end{aligned} \quad (36)$$

where  $G_n(\text{Pr}) = -d\bar{\theta}/d\bar{\eta}$  for a given value of  $n$ . For small values of  $\chi$  or small values of  $\alpha/\varepsilon^2$ , the value of  $n$  has to be  $1/3$ , resulting to the leading order

$$B_1 = \left( \frac{\alpha}{\varepsilon^2 G_{1/3}(\text{Pr}_1)} \right)^{\frac{5}{6}}, \quad B_2 = \left( \frac{\alpha \beta}{\varepsilon^2 G_{1/3}(\text{Pr}_2)} \right)^{\frac{5}{6}}, \quad (37)$$

with  $G_{1/3}(\text{Pr}) \simeq 0.501 \text{Pr}^{1/20}$ , for values of the Prandtl number close to unity (Gebhart et al., 1988). The nondimensional temperature in the wall is then

$$\begin{aligned} \theta_w &= z + \frac{1}{2} - \\ &\left( \frac{\alpha}{\varepsilon^2 G_{1/3}(\text{Pr}_1)} \right)^{\frac{5}{6}} \chi^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1 - \tilde{\beta}}{2} + (1 + \tilde{\beta})z \right) \\ &\text{for } \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \ll 1, \end{aligned} \quad (38)$$

where

$$\tilde{\beta} = \left[ \frac{\beta G_{1/3}(\text{Pr}_1)}{G_{1/3}(\text{Pr}_2)} \right]^{\frac{5}{6}}.$$

There is a plane in the wall which maintains an uniform temperature, being independent of  $\chi$ . The position of the plane is given by

$$z_T = \frac{\tilde{\beta} - 1}{2(\tilde{\beta} + 1)},$$

with a nondimensional temperature

$$\theta_w = z_T + \frac{1}{2} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\beta} + 1}, \quad (39)$$

which is exactly the same as that obtained in the thermally thin wall regime. The temperature in this plane is then invariant under any change in the parameter  $\alpha$ .

The reduced Nusselt number is in this limit

$$\overline{Nu} \simeq \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{\alpha}{\varepsilon^2 G_{1/3}(\text{Pr}_1)} \right)^{\frac{5}{6}} (1 + \tilde{\beta}) \right], \quad (40)$$

for small values of  $\alpha/\varepsilon^2$ .

### NUMERICAL RESULTS

The system of eqs. (16) to (23) were integrated numerically using Keller's method (Cebeci and Bradshaw, 1984) for the boundary layer equations, together with the technique of alternate directions from Peaceman, Rachford and Douglas for the Laplace equation for the plate (Sqd, 1985). Due to the elliptic nature of the problem, the fluid phase equations were solved initially using a given plate temperature, obtaining the corresponding heat flux distribution to be used for the solid energy equation. We use this flux as boundary conditions for the pseudo-transient heat conduction equation in the plate, giving the new plate temperature distribution after a small time step. Then again, the energy and momentum equations for the fluid were solved to generate the new heat flux at the solid fluid interface. The procedure continues until convergence is reached. The mesh used for the fluid balance equations were  $40 \times 90$ , in the longitudinal and transversal directions, respectively. For the solid we used a  $10 \times 20$  grid.



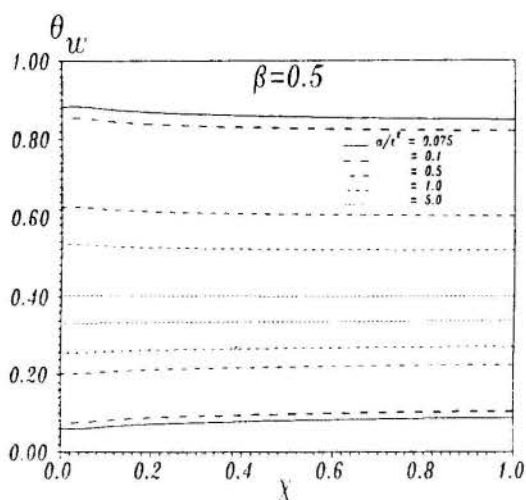


Figure 1: Nondimensional temperature profiles at both surfaces facing the hot and cold fluids, for different values of the parameter  $\alpha/\varepsilon^2$ .

Fig. 1 shows the nondimensional wall temperature distributions at both interfaces as a function of  $\chi$  for  $\beta = 0.5$ ,  $Pr_1 = Pr_2 = 1$  and different values of  $\alpha/\varepsilon^2$ . Upper curves are related to the surface facing the hotter fluid. For very large values of  $\alpha/\varepsilon^2$ , the nondimensional temperature of the plate tends to a uniform temperature of the plate as predicted above. As the value of  $\alpha/\varepsilon^2$  decreases, the temperatures at both surfaces diverges tending to the temperature of the corresponding fluid. Fig 2. shows the overall reduced Nusselt number as a function of  $\alpha/\varepsilon^2$ , for two different values of  $\beta$ ,  $\beta = 1$  and  $0.5$ . Both the numerical solution as well the asymptotic solution for the thermally thick wall regime, eq. (38) are plotted. In this case, the overall reduced Nusselt number increases monotonically as the value of  $\alpha/\varepsilon^2$  increases, reaching the maximum value given by eq. (32) for  $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow \infty$ . In general, the influence of the longitudinal heat conduction is not important because of the absence of longitudinal temperature gradients in the thermally thin wall regime. However, for the thermally thick wall regime, longitudinal heat conduction is only needed close to the edges in order to satisfy the adiabatic boundary conditions.

#### Acknowledgements

This work has been supported by the research grant IN107795, DGAPA at UNAM, Mexico.

#### REFERENCES

Aihara T., Y. Yamada and S. Endo (1972), "Free convection along the downward-facing surface of a heated horizontal plate", *Int. J. heat Mass Transf.*, 15, pp. 2535-2549.

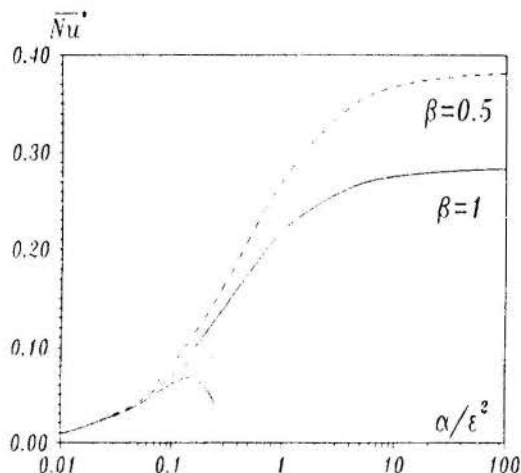


Figure 2: Overall reduced Nusselt number as a function of  $\alpha/\varepsilon^2$ , for two different values of  $\beta$ ,  $\beta = 1$  and  $0.5$ .

Anderson R. and A. Bejan (1980), "Natural convection on both sides of a vertical wall separating fluids at different temperatures", *J. Heat Transfer* 102, 630-635.

Cebeci, T. and Bradshaw, P. (1984), *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer, Berlin.

Gebhart B., Y. Jaluria, R.L. Mahajan and B. Sarmakia (1988), "Buoyancy-induced flow and transport". Hemisphere, NY.

Gill W.N., D.W. Zeh and E. del Casal (1965), "Free convection on a horizontal plate", *Z. A. M. P.*, 16, pp. 539-541.

Higuera F.J. (1993), "Natural convection below a downward facing horizontal plate", *Europ. Journal of Mechanics: B/Fluids*, 12, n° 3, pp.289-312.

Kelleher M. and K-T. Yang (1967), "A steady conjugate heat transfer problem with conduction and free convection", *AI. Sci. Res.* 17, 249-269.

Rotem Z. and L. Claassen (1969), "Natural convection above unconfined horizontal surfaces", *J. Fluid Mech.*, 38, pp. 173-192.

Sakakibara M., H. Amaya, S. Mori and A. Tanimoto (1992), "Conjugate heat transfer between two natural convections separated by a vertical plate", *Int. J. Heat Mass Transfer* 35, 2289-2297.

Sod, A. Gary (1985), *Numerical Methods in Fluid Dynamics: Initial and initial boundary-value problems*, Cambridge University Press, USA.

Stewartson K. (1958), "On the free convection from a horizontal plate", *Z. A. M. P.*, 9a, pp. 276-282.

Treviño C., F. Méndez and F. J. Higuera (1996), "Heat transfer across a vertical wall separating two fluids at different temperatures", *Int. J. Heat Mass Transfer*, in press.





CONVECÇÃO NATURAL EM UMA CAVIDADE RETANGULAR RESFRIADA NA PAREDE SUPERIOR

D. J. Bispo, A.O. Nieckele e S. L. Braga  
 Departamento de Engenharia Mecânica  
 Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
 22453-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil



RESUMO

*O presente trabalho apresenta uma análise do campo de temperaturas no interior de cavidade retangular, com a avaliação do ganho de calor do ambiente. Considera-se uma cavidade retangular com a parede superior resfriada e ganhando calor do ambiente através das paredes verticais e inferior. Os campos de velocidade e temperatura são obtidos numericamente através do método de volumes finitos, utilizando a aproximação de Boussinesq. É analisada a influência do número de Grashof, com especial atenção para o ganho de calor do ambiente.*

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, tem sido crescente a ênfase dada, à importância da redução do consumo de energia em todas as áreas. Estudos mostram que 20% de toda a energia elétrica produzida no país destina-se ao consumo doméstico, e destes, 32% são gastos em sistemas de refrigeração.

Um dos pontos de grande importância no projeto de geladeiras mais eficientes com baixo consumo de energia, é a determinação do campo de temperaturas, e a avaliação do ganho de calor do ambiente externo.

Neste trabalho considera-se, como um primeiro modelo aproximado de uma geladeira, uma cavidade retangular resfriada na parede superior, e ganhando calor do ambiente através das paredes verticais e inferior. O coeficiente global de troca de calor é estimado através de modelos unidimensionais de paredes compostas com convecção natural externa. Entretanto, o coeficiente de troca de calor interno, principal incógnita do problema, é determinado numericamente baseado no campo de velocidade e temperatura.

Dentro da área de conhecimento em transferência de calor, a análise da convecção natural tem sido objeto de muitas publicações. Entretanto, a maioria destes trabalhos tem investigado o tema basicamente em duas configurações: fluido submetido a um gradiente horizontal de temperatura, ou a um gradiente vertical instável de temperatura. Configurações em que a convecção natural é provocada por gradientes diagonais de temperatura, onde o aquecimento e o resfriamento ocorrem em paredes adjacentes tem sido relativamente pouco estudadas.

Dentre os diversos trabalhos de convecção natural, podemos citar alguns. Kimura e Bejan (1985) analisaram as características do escoamento e da transferência de calor que ocorrem numa cavidade retangular aquecida por uma parede vertical e resfriada pela parede inferior, sendo as outras paredes adiabáticas. A razão de aspecto da cavidade é variada até a razão de 1/4. Anderson e Lauriat (1986) examinaram o desenvolvimento das camadas limite em uma cavidade quadrada resfriada por uma parede vertical e aquecida pela parede inferior, com as outras paredes adiabáticas, preenchida por um fluido viscoso. Trevisan e Campelo (1987) estudaram a convecção natural em uma cavidade porosa numa geometria equivalente à anterior, variando a razão geométrica da cavidade de 1 a 8. Ganzarolli e Milanez (1992) analisaram uma cavidade retangular aquecida

pela base e simetricamente resfriada pelos lados, sendo a parede superior adiabática, variando a razão de aspecto de 1 a 9.

A cavidade analisada no presente trabalho possui razão de aspecto  $H/L = 2,6$ ; onde H é a altura da cavidade e L a base. Esta razão foi selecionada por ser um valor típico de geladeiras comerciais. É verificado o efeito do aumento do número de Grashof na transferência de calor e no escoamento.

ANÁLISE MATEMÁTICA

A situação física é mostrada na Fig.1. A parede superior está resfriada a uma temperatura  $T_c$ , simulando um evaporador, e pelas outras paredes existe um fluxo de calor do ambiente para dentro da cavidade. O ambiente está à temperatura  $T_\infty$ , e os coeficientes globais de troca de calor nas paredes verticais  $U_1$  e na base  $U_2$ , são calculados levando-se em consideração a resistência térmica das paredes, e o coeficiente externo de troca de calor por convecção natural em superfícies planas submetidas a uma diferença de temperatura.

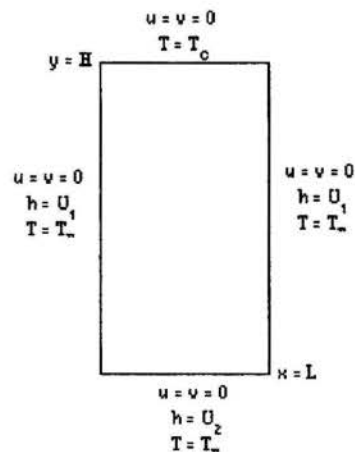


Figura 1 - Situação Física

Segundo Chenoweth e Paolucci (1986), a transição para regime turbulento na convecção natural do ar em uma cavidade retangular com esta razão geométrica, isolada na base e no topo, submetida a um gradiente de temperatura entre as paredes verticais, ocorre para o número de Rayleigh Ra igual a  $5 \times 10^6$ , e em  $Ra = 5 \times 10^7$  o escoamento já se encontra no regime turbulento. No presente trabalho, para  $Ra > 2,5 \times 10^7$  ( $Gr > 3,6 \times 10^7$ ) considerou-se o escoamento turbulento, utilizando-se o modelo de turbulência de 2 equações diferenciais  $\kappa - \epsilon$  (Lauder e Spalding 1974).

Para a solução do escoamento considerou-se as seguintes hipóteses:

- fluido Newtoniano
- regime permanente
- propriedades constantes, com exceção da densidade no termo de força de corpo
- aproximação de Boussinesq
- efeitos de dissipação viscosa desprezíveis
- modelo bi-dimensional
- geração de calor nula.

Introduzindo a seguinte adimensionalização:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{H} & Y &= \frac{y}{H} \\ U &= \frac{uH}{v} & V &= \frac{vH}{v} & P &= \frac{P^*}{\rho_{ref}} \left( \frac{H}{v} \right)^2 \\ \theta &= \frac{T - T_c}{T_a - T_c} & K &= \frac{\kappa}{(v/\delta)^2} & E &= \epsilon \frac{H^4}{v^3} \end{aligned} \quad (1)$$

As equações de conservação de massa, quantidade de movimento linear, energia, juntamente com as equações do modelo de turbulência  $\kappa - \epsilon$ , isto é, conservação de energia cinética turbulenta  $\kappa$  e sua taxa de dissipação  $\epsilon$  podem ser escritas na forma adimensional como:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}(UU) + \frac{\partial}{\partial Y}(UV) &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left(1 + \mu^*\right) \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left(1 + \mu^*\right) \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left(1 + \mu^*\right) \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left(1 + \mu^*\right) \frac{\partial V}{\partial X} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}(UV) + \frac{\partial}{\partial Y}(VV) &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + Gr\theta + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left(1 + \mu^*\right) \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left(1 + \mu^*\right) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left(1 + \mu^*\right) \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left(1 + \mu^*\right) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}(U\theta) + \frac{\partial}{\partial Y}(V\theta) &= \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left( \frac{1}{Pr} + \frac{\mu^*}{Pr_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left( \frac{1}{Pr} + \frac{\mu^*}{Pr_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}(UK) + \frac{\partial}{\partial Y}(VK) &= \mu^* Gr \frac{\partial \theta}{\partial Y} - E + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left(1 + \frac{\mu^*}{\sigma_\kappa}\right) \frac{\partial K}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left(1 + \frac{\mu^*}{\sigma_\kappa}\right) \frac{\partial K}{\partial Y} \right] \\ &+ \mu^* \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}(UE) + \frac{\partial}{\partial Y}(VE) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left(1 + \frac{\mu^*}{\sigma_E}\right) \frac{\partial E}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left(1 + \frac{\mu^*}{\sigma_E}\right) \frac{\partial E}{\partial Y} \right] + \\ &+ C_{1E} C_\mu K \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \\ &+ C_{1E} C_\mu K \frac{Gr}{Pr_t} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - C_{2E} \frac{E^2}{K} \end{aligned} \quad (7)$$

onde:

$$\mu^* = \frac{\mu_t}{\mu} \quad (8)$$

Para o escoamento laminar,  $\mu_t$  é igual a zero, portanto  $\mu^* = 0$ , já para o escoamento turbulento, de acordo com o modelo  $\kappa - \epsilon$ , a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  para altos números de Reynolds é dada por  $\mu_t = C_\mu \rho \kappa^2 / \epsilon$ , logo

$$\mu^* = \frac{\mu_t}{\mu} = \frac{C_\mu K^2}{E} \quad (9)$$

Gr e Pr são, respectivamente, os números de Grashof e Prandtl:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TH^3}{v^2} \quad Pr = \frac{v}{\alpha} \quad (10)$$

sendo  $\beta$  o coeficiente de expansão térmica,  $v$  a viscosidade cinemática,  $v_t$  a viscosidade cinemática turbulenta e  $\alpha$  a difusividade térmica do fluido,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\Delta T$  a diferença entre a temperatura ambiente  $T_a$  e a temperatura da parede fria  $T_c$  e  $H$  a altura da cavidade. O número de Rayleigh Ra é definido como  $Ra = Gr Pr$ .

Nas equações acima,  $C_\mu$ ,  $C_{1E}$  e  $C_{2E}$  são constantes empíricas, assim como  $Pr_t$ ,  $\sigma_\kappa$  e  $\sigma_E$  que são os números de Prandtl turbulento e Prandtl da energia cinética e sua taxa de dissipação, os quais de acordo com Launder e Spalding (1974) recebem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0,09 & \sigma_\kappa &= 1,0 \\ C_{1E} &= 1,44 & \sigma_E &= 1,3 \\ C_{2E} &= 1,92 & Pr_t &= 0,7 \end{aligned} \quad (11)$$

O modelo de turbulência  $\kappa - \epsilon$  só é válido no núcleo turbulento onde  $\mu_t \gg \mu$ . Na região de parede, utiliza-se a lei da parede como recomendado por Patankar e Spalding, (1970).

As condições de contorno do escoamento são de velocidade zero em todas as superfícies sólidas. As condições de contorno térmicas são as seguintes:

$$\text{Em } X=0 \text{ e em } X=\frac{L}{H}: \quad -\frac{\partial\theta}{\partial X} = U_1^* (1-\theta)$$

$$\text{Em } Y=0: \quad -\frac{\partial\theta}{\partial Y} = U_2^* (1-\theta) \quad (12)$$

$$\text{Em } Y=1: \quad \theta = 0$$

onde  $U_1^*$  e  $U_2^*$  são, respectivamente, os coeficientes globais de troca de calor adimensionais nas paredes verticais e na base:

$$U^* = \frac{UH}{k} = \frac{Bi}{Bi+1} \frac{H k_p}{\delta k} \quad (13)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica do fluido,  $k_p$  é a condutividade térmica do isolante da parede,  $\delta$  é a espessura da parede,  $h_e$  é o coeficiente externo de troca de calor por convecção natural em superfícies planas e  $Bi$  é o número de Biot:

$$Bi = \frac{h_e \delta}{k_p} \quad (14)$$

Observa-se que os parâmetros adimensionais que governam o problema são o número de Grashof ( $Gr$ ), o número de Prandtl ( $Pr$ ), os coeficientes globais adimensionais ( $U_1^*$  e  $U_2^*$ ) e a razão geométrica da cavidade ( $H/L$ ).

## ANÁLISE DOS RESULTADOS

Como etapa inicial do presente trabalho, investigou-se o escoamento devida a convecção natural em uma cavidade quadrada, com as paredes superior e inferior isoladas e as paredes laterais com temperaturas diferentes. Os resultados obtidos para a distribuição de velocidade e temperatura concordaram muito bem com os valores apresentados por Vahl Davis e Jones (1983) e a diferença no número de Nusselt médio nas paredes foi inferior a 0,1%. Uma vez validado o procedimento de solução, resolveu-se o problema em questão.

O problema foi resolvido utilizando-se o código computacional FLUENT (Fluent Inc, 1995). Com este "software" as equações de conservação são resolvidas utilizando o método de volumes finitos e o esquema "Power-Law" para a aproximação do perfil de velocidades, conforme descrito por Patankar (1980). Para o acoplamento entre a velocidade e a pressão utilizou-se o algoritmo SIMPLEC. O sistema algébrico foi resolvido com a técnica de "multigrid" com 6 níveis máximos.

Após um teste de malhas preliminar, selecionou-se uma malha uniforme com 50x100 pontos nodais nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Devido à limitação de espaço, neste trabalho investigou-se somente o efeito do número de Grashof no escoamento e na troca de calor. Os outros parâmetros foram mantidos constantes e serão descritos a seguir.

Os coeficientes globais de troca de calor adimensionais usados nas paredes verticais e inferior foram, respectivamente,  $U_1^* = 23,4$  e  $U_2^* = 25,9$ . Estes valores foram obtidos baseados

em dados típicos de espessura e condutividade térmica de isolantes encontrados em geladeiras e coeficientes de troca de calor por convecção natural em paredes verticais resfriadas e horizontais com a superfície resfriada voltada para baixo.

Especificou-se  $Pr = 0,7$  valor típico para ar e a razão de aspecto  $H/L$  foi mantida igual a 2,6.

Foram obtidos resultados numéricos para números de Grashof na faixa de  $10^3$  a  $10^8$ . O modelo de turbulência foi introduzido em  $Gr=3,6 \times 10^7$ .

As Figuras 2 e 3, apresentam as linhas de corrente e as isotermas, respectivamente, para o caso de regime laminar, correspondendo aos números de Grashof iguais a  $1 \times 10^3$ ,  $1 \times 10^5$  e  $1 \times 10^6$ . As isocurvas encontram-se uniformemente espaçadas.

Para números de Grashof mais baixos, o fluido na parte inferior da cavidade encontra-se estagnado, e portanto a alta temperatura. Analisando a Fig. 2, pode-se observar um deslocamento para baixo do centro da recirculação a medida que o número de Grashof cresce, juntamente com um aumento na intensidade da recirculação. Portanto, com o aumento do número de Grashof, ocorre uma maior movimentação do fluido no interior da cavidade, fazendo com que a temperatura da parte inferior da cavidade diminua (Fig. 3).

Todo o calor que penetra na cavidade pelas paredes verticais e pela base, é retirado pelo evaporador, representado pela parede fria no topo da cavidade. Portanto, como era de se esperar, o gradiente de temperaturas é muito mais acentuado na parte superior da cavidade, próximo à parede fria, como pode ser observado na Fig. 3 pela proximidade das isotermas.

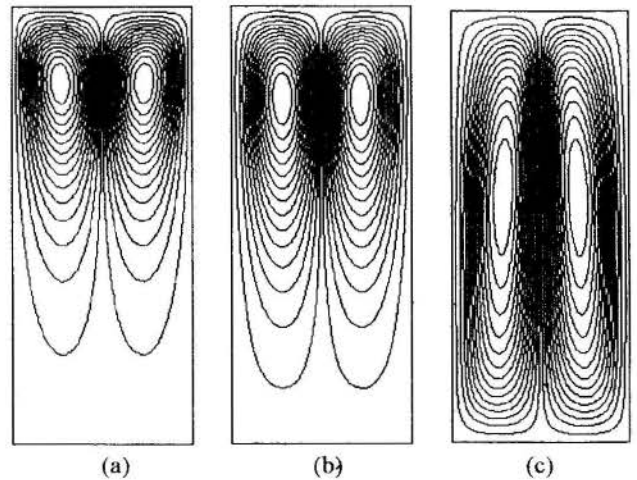


Figura 2 - Linhas de Corrente para: (a)  $Gr = 1 \times 10^3$ , (b)  $Gr = 1 \times 10^5$  e (c)  $Gr = 1 \times 10^6$

Ainda analisando a forma das isotermas, na Fig. 3, pode-se perceber que para baixos números de Grashof, a parcela difusiva na equação da energia prevalece sobre a convectiva, pois o fluido encontra-se praticamente estagnado.

Com o aumento do número de Grashof, cresce gradativamente a importância da convecção sobre a difusão, pois as velocidades do fluido no interior da cavidade são muito maiores. A seguir são apresentados os resultados para número de Grashof igual a  $3,6 \times 10^7$ . Como este número de Grashof se encontra próximo a faixa de transição, resolveu-se investigar a influência do regime de escoamento na solução do problema, considerou-se portanto, para este número de Grashof, tanto o regime laminar, quanto o turbulento. As Figuras 4 e 5, apresentam as linhas de corrente e as isotermas, para os dois regimes de escoamento para  $Gr = 3,6 \times 10^7$ .

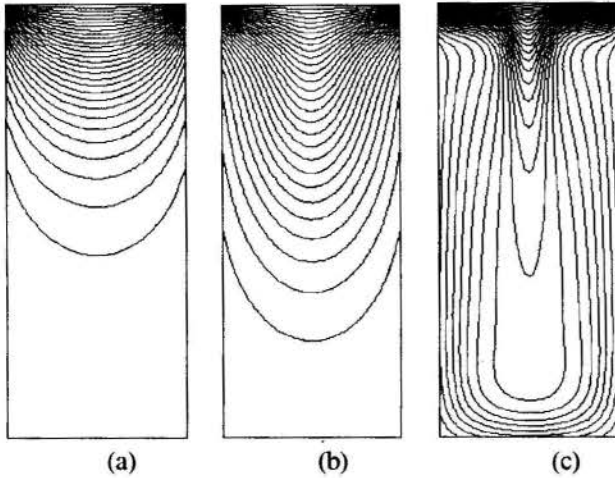


Figura 3 - Isotermas para : (a)  $Gr = 1 \times 10^3$ , (b)  $Gr = 1 \times 10^5$  e (c)  $Gr = 1 \times 10^6$

A seguir são apresentados os resultados para número de Grashof igual a  $3,6 \times 10^7$ . Como este número de Grashof se encontra próximo a faixa de transição, resolveu-se investigar a influência do regime de escoamento na solução do problema, considerou-se portanto, para este número de Grashof, tanto o regime laminar, quanto o turbulento. As Figuras 4 e 5, apresentam as linhas de corrente e as isothermas, para os dois regimes de escoamento para  $Gr = 3,6 \times 10^7$ .

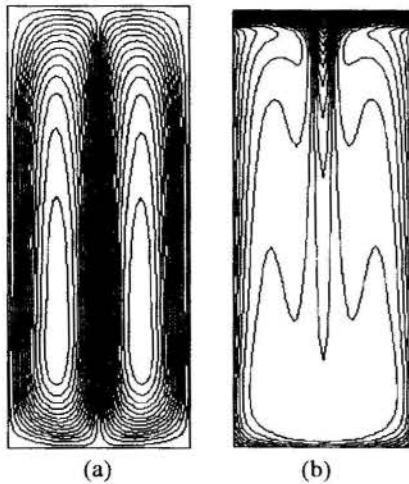


Figura 4 - (a) Linhas de Corrente e (b) Isotermas, para  $Gr = 3,6 \times 10^7$ , considerando o regime laminar

Ao analisar o escoamento com a transferência de calor, no regime laminar, observou-se que a medida que o número de Grashof cresce, o centro da recirculação desce, além de aumentar de intensidade. A Fig. 4 correspondente a  $Gr = 3,6 \times 10^7$  ilustra que neste caso, o ponto de recirculação desceu significativamente, aumentando substancialmente as velocidades no fundo da cavidade. Como consequência, as temperaturas na parte inferior da cavidade ficaram mais baixas, pois maior quantidade de fluido frio é trazido para o fundo da cavidade. Além disso, observa-se uma estratificação da temperatura na região central da geladeira.

Ao considerar-se o regime como turbulento, Fig. 5, o ponto de recirculação permanece na parte superior da cavidade, e a forma das linhas de corrente se assemelha ao caso com baixo número de Grashof, porém com velocidades mais elevadas. O

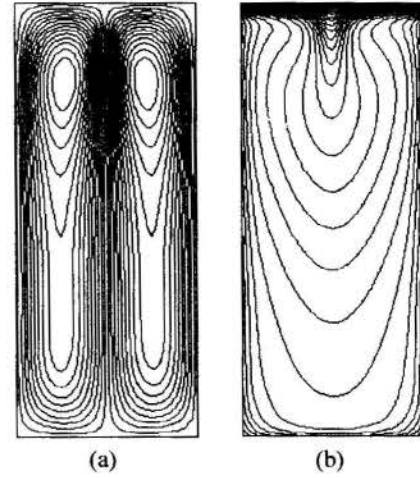


Figura 5 - (a) Linhas de Corrente e (b) Isotermas, para  $Gr = 3,6 \times 10^7$ , considerando o regime turbulento

que pode ser explicado pois o escoamento turbulento é mais difusivo. Neste caso, temos uma variação gradativa da temperatura no centro da geladeira, e gradientes menos acentuados próximo às paredes.

De acordo com Chenoweth e Paolucci (1986), para esses valores do número de Grashof, o regime realmente já se encontra turbulento. Considerando, variações gradativas do escoamento e transferência de calor, a medida que o Grashof cresce, os resultados considerando o regime como turbulento parecem mais razoáveis, porém verificações experimentais são necessárias para validar o modelo. Estas verificações encontram-se em fase de desenvolvimento e serão assunto de um próximo trabalho.

A Figura 6 apresenta as linhas de corrente e as isothermas para o caso em regime turbulento, com o número de Grashof igual a  $1 \times 10^8$ . Verifica-se que a forma das curvas praticamente não se altera em relação ao caso anterior, observando-se gradual aumento nas velocidades, à medida em que o número de Grashof cresce, e uma queda na temperatura máxima.

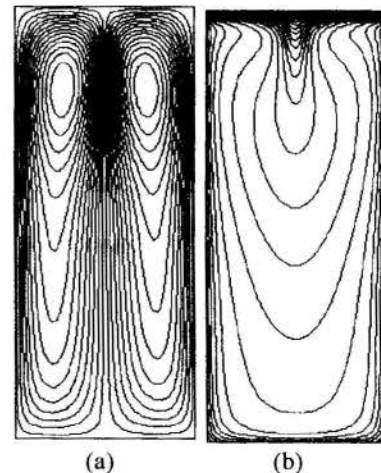


Figura 6 - (a) Linhas de Corrente e (b) Isotermas, para  $Gr = 1 \times 10^8$ , considerando o regime turbulento

**Ganho de Calor.** O ganho de calor local pelas paredes da cavidade pode ser avaliado através do fluxo de calor local adimensional definido como

$$q_1^* = -\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=0}, \quad q_2^* = -\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} \quad (15)$$



onde  $q_1^*$  é o ganho pela parede vertical esquerda, o qual é igual ao ganho pela parede vertical direita, devido a simetria.  $q_2^*$  é o ganho pela base.

A Figura 7 mostra a distribuição do fluxo de calor local adimensional ao longo das paredes verticais para diferentes números de Grashof. Como esperado, o fluxo de calor é muito maior na extremidade superior da parede, próximo à superfície fria. Observa-se que o ganho de calor é aproximadamente uniforme ao longo da parede e cresce com o aumento do Grashof.

Observa-se que para o número de Grashof igual a  $3,6 \times 10^7$ , considerando-se o regime como laminar, o fluxo de calor na base da cavidade é maior do que na região superior, pois o fluido frio foi levado para a parte inferior, como mostrado na Fig 4. Ao considerar-se o regime como turbulento, verifica-se que o fluxo de calor cresce ao longo da parede vertical, devido à diminuição gradativa da temperatura com a altura no interior da cavidade.

A Figura 8 mostra a distribuição do fluxo de calor local adimensional ao longo da parede inferior, para o diferentes números de Grashof. Devido à estagnação do fluido no fundo da cavidade para baixos números de Grashof, o fluxo de calor na parede inferior é praticamente desprezível para estes casos. Com o aumento do número de Grashof, o fluxo de calor cresce, devido à maior movimentação do fluido. Isto é notado também nas paredes verticais, onde o fluxo de calor também sofre um aumento considerável na extremidade inferior, à medida em que o número de Grashof cresce.

Considerando-se o regime como turbulento para o número de Grashof igual a  $3,6 \times 10^7$ , obtém-se um fluxo de calor mais baixo do que ao considerar-se o regime como laminar, indicando que a temperatura no fundo da cavidade está mais elevada para o caso turbulento.

O calor recebido pelas paredes laterais e inferior é igual ao calor retirado pela parede superior, a qual representa o evaporador. Consequentemente o fluxo de calor ao longo da parede superior é bem maior que ao longo das outras paredes, sendo definido por

$$q_s^* = \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{Y=1} \quad (16)$$

A Figura 9 apresenta a distribuição do fluxo de calor local adimensional ao longo da parede superior para os diferentes número de Grashof. A baixos números de Grashof, o forçamento para o escoamento é menor, resultando em menor perda de calor pela parede superior, de forma análoga ao que acontece com as outras paredes. Com o aumento do número de Grashof, há um grande aumento do fluxo de calor pelas extremidades da parede superior, onde o fluido se encontra mais quente, como pode ser observado pela variação da forma da curva.

A taxa de transferência de calor ao longo de cada superfície, pode ser obtida integrando-se o fluxo de calor local ao longo de cada uma delas

$$Q = \int q \, dA \quad (17)$$

As Figuras 10 e 11, ilustram o efeito do aumento do número de Grashof no fluxo de calor adimensional médio nas paredes verticais e inferior, respectivamente. Observa-se que o ganho de calor pelas paredes é aproximadamente constante com o número de Grashof até o valor de  $10^5$ , quando então o ganho de calor cresce sensivelmente.

Como já foi observado, o fluxo de calor adimensional na base da cavidade, é muito pequeno para números de Grashof até a ordem de  $10^5$ . Para números de Grashof mais elevados, o fluxo

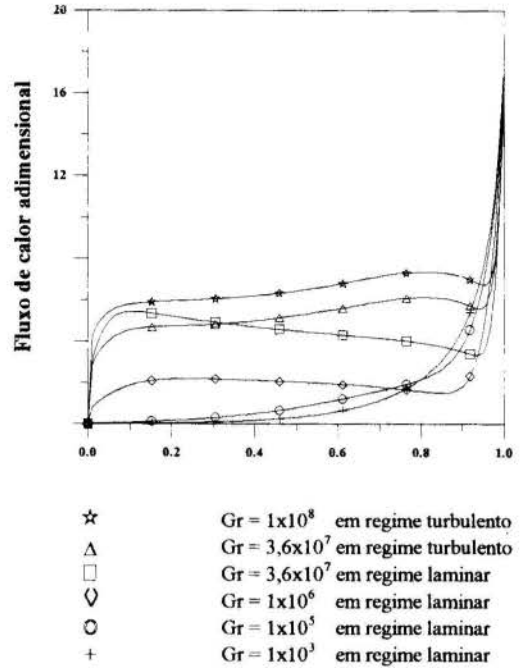


Figura 7 - Influência do número de Grashof na distribuição do fluxo de calor adimensional nas paredes verticais

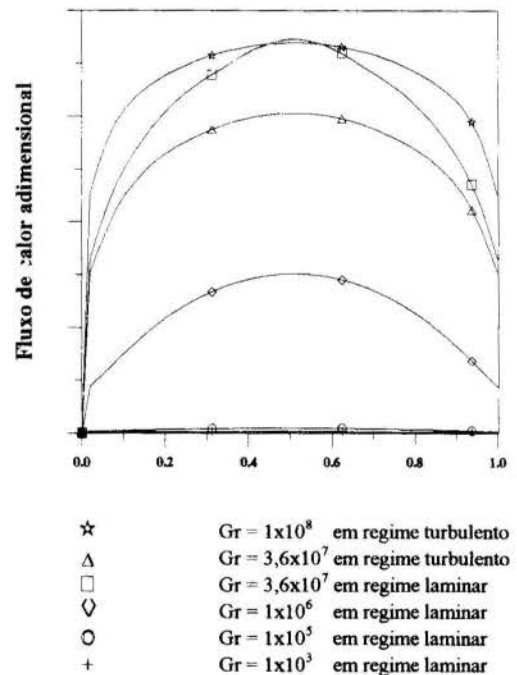


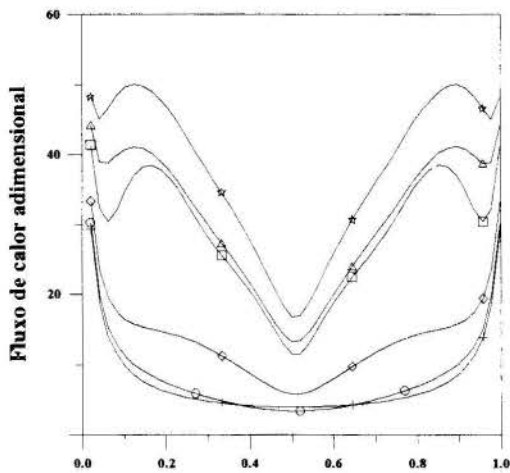
Figura 8 - Influência do número de Grashof na distribuição do fluxo de calor adimensional na parede inferior

de calor através da base, é da mesma ordem de grandeza que o fluxo de calor através das paredes verticais, pois devido a maior circulação do fluido, há uma melhor distribuição de temperaturas no interior da cavidade.

#### COMENTÁRIOS FINAIS

Foi analisada numericamente a influência do número de Grashof sobre o escoamento e a transferência de calor em uma cavidade retangular, com a parede superior resfriada e trocando calor com o ambiente através das outras paredes.





- ☆ Gr =  $1 \times 10^8$  em regime turbulento
- △ Gr =  $3,6 \times 10^7$  em regime turbulento
- Gr =  $3,6 \times 10^7$  em regime laminar
- Gr =  $1 \times 10^6$  em regime laminar
- Gr =  $1 \times 10^5$  em regime laminar
- + Gr =  $1 \times 10^3$  em regime laminar

Figura 9 - Influência do número de Grashof na distribuição do fluxo de calor adimensional na parede superior

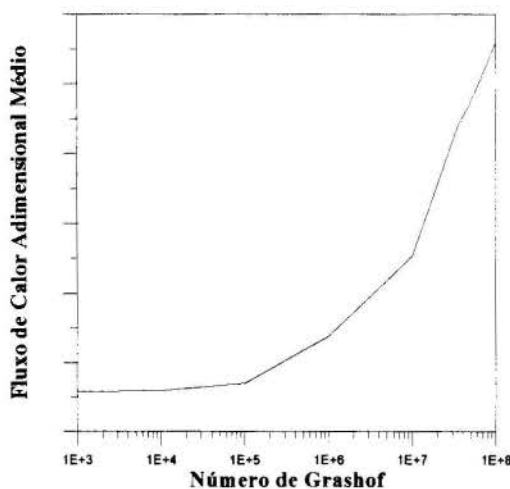


Figura 10 - Influência do número de Grashof no fluxo de calor adimensional médio nas paredes verticais

Considerou-se regime de escoamento laminar e turbulento para altos números de Grashof. Para a simulação do escoamento turbulento utilizou-se o modelo de turbulência de duas equações diferenciais  $\kappa$ - $\epsilon$ .

Verificou-se que a medida que o número de Grashof cresce, o fluido frio é distribuído pela parte inferior da geladeira, o que acarreta um maior ganho de calor pelas paredes laterais.

Investigou-se a possibilidade de o escoamento estar em regime turbulento para números de Grashof acima de  $10^7$ , e foram comparadas as soluções numéricas para o caso laminar e turbulento com o número de Grashof igual a  $3,6 \times 10^7$ . Observou-se mudanças gradativas no escoamento ao se utilizar o modelo de turbulência, enquanto que mudanças radicais foram observadas ao se manter a hipótese de escoamento em regime laminar.

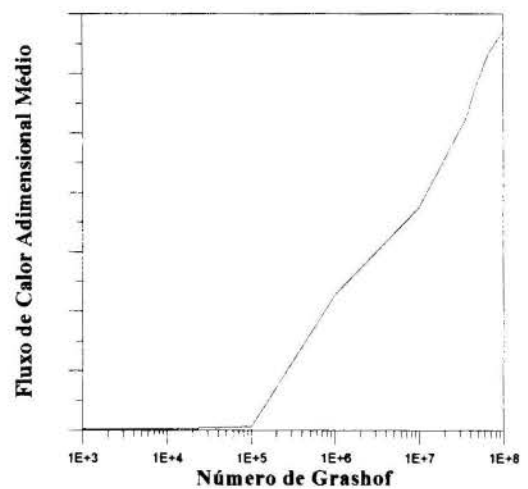


Figura 11 - Influência do número de Grashof no fluxo de calor adimensional médio na parede inferior

## REFERÊNCIAS

- Anderson, R. and Lauriat, G. , 1986, "The Horizontal Convection Boundary Layer Regime in a Closed Cavity", *Proceedings of the Eighth International Heat Transfer Conference*, Vol. 4, pp. 1453-1458.
- Chenoweth, D. and Paolucci, S. , 1986, "Natural Convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences", *J. Fluid Mech.*, Vol. 169, pp. 173-210.
- Ganzarolli, M. e Milanez, L. , 1992, "Influência da Razão Geométrica na Convecção Natural em Cavidade Retangular Aquecida pela Base", ENCT 92, pp.115-118.
- Kimura, S. and Bejan, A. , 1985, "Natural Convection in a Differentially Heated Corner Region", *Physics of Fluids*, Vol. 28, pp. 2980-2989.
- Launder, B. E. e Spalding, D. B., 1974, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 3, pp. 269-289.
- Patankar, S. , 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, New York.
- Patankar, S. V. e Spalding, D. B., 1970, "Heat and Mass Transfer in Boundary Layers", Intertext Books, London.
- Trevisan, O. e Campelo, C., "Convecção Natural em Cavidades Porosas Aquecidas por Baixo e Resfriadas Lateralmente", 1987, COBEM 87, pp. 81-84.
- Vahl Davis, G. e Jones, I.P. , 1983, "Natural Convection in a Square Cavity: A Comparison Exercise", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 227-248.

## SUMMARY

The present works presents an analysis of the flow and heat transfer in the interior of a rectangular cavity, estimating the gain of heat through the walls from the ambient. The rectangular cavity considered has a cold upper surface, gaining heat from the ambient through the lateral and inferior walls. The velocity and temperature filed are determined numerically by the finite volume method, using the Boussinesq approximation to evaluate the density variation. The influence of the Grashof number in the results is investigated.



## NATURAL CONVECTION BETWEEN CONCENTRIC ELLIPSES ANALYSIS OF THE LIMITING CASES

Cunha, A. R., Livramento, M. A., Vasconcellos, J. F. and Maliska, C. R.

SINMEC - Computational Fluid Dynamics Laboratory  
Mechanical Engineering Department - UFSC  
88040-900- Florianópolis - SC- Brazil



**SUMMARY** - The natural convection flow between concentric ellipses is analyzed numerically using a boundary-fitted finite volume method. A family of elliptical cavities, using the ratios of ellipses semi-axis and theirs perimeters, is generated. Interesting flow patterns are obtained in the limiting cases, being one of them the appearance of the Bénard cells when part of the cavity resembles the parallel plates configuration.

### INTRODUCTION

Natural convection heat transfer inside cavities has received a great deal of attention due in part to its importance in fundamental and applied science. Numerical works have been done to solve the buoyancy-driven flow on several kinds of geometrically complex enclosures. By large, these works have been focused on the rectangular and cylindrical enclosures. Although to the authors knowledge, the problem here proposed was not yet solved, there is a large number of numerical solutions for non-rectangular geometries. Related to elliptical cavities very few analysis are registered in the literature. Campo *et alii* (1987) carried out a study about natural convection in a semielliptical cavity using a finite-element algorithm. Schreiber and Singh (1987) analyzed the natural convection between confocal ellipses considering stable and instable stratification. However, the boundary conditions employed up to now do not allow the appearance of the Bénard flow, one of the limiting cases analyzed in this work.

Computations were performed for Rayleigh number,  $Ra_L$ , in the range from  $1 \times 10^3$  to  $1 \times 10^7$ , with the perimeter ratio,  $Per_i / Per_o$ , ranging from 0.2 to 0.6 and the ratio  $b_o / a_o$  ranging from  $1/4$  to  $4/1$ .

Of key interest in this work is to capture the Bénard cells when the configuration resembles the problem of parallel plates heated from below.

The following sections outline the governing equations, the numerical scheme, results and discussions.

### FORMULATION OF THE PROBLEM

The one-half enclosure model is presented in Fig. 1. The fluid is treated as Newtonian and incompressible. The dependence of the density on temperature is introduced through the Boussinesq approximation:

$$\rho = \rho_c [1 + \beta(T - T_{ref})] \quad (1)$$

where  $T_{ref} = (T_o + T_i) / 2$  is the average temperature,  $\rho$  the density,  $\rho_c$  the reference density,  $\beta$  the coefficient of volumetric expansion,  $T_o$  the temperature of the outer wall and  $T_i$  the temperature of the inner wall. The enclosure is initially occupied by motionless fluid. The initial fluid temperature is uniform and equal to  $T_{ref}$ .  $T_i$  is always greater than  $T_o$ .

The equations governing are:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u u - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho u v - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u v - \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v v - \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \beta (T - T_{ref}) \quad (4)$$

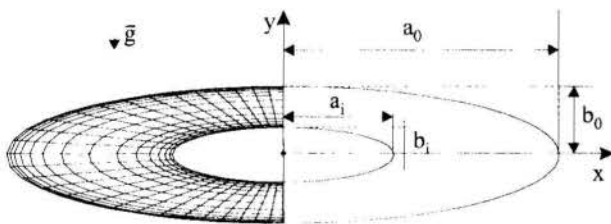


Figure 1 - Elliptical geometry

The present work is based on the numerical solution of the two-dimensional form of the Navier-Stokes and energy equations with constant properties. Viscous dissipation and compression work are neglected. Attention will be concentrated upon buoyancy-driven cavity flow on elliptic geometry using boundary-fitted coordinates.

A finite volume method using non-orthogonal grids with collocated variables was used to formulate the algebraic equation approximations. The difficulty associated with the use of collocated variables was removed using the approximation of the pressure gradients proposed by Peric *et alii* (1988), with the improvements presented in Marchi and Maliska (1994).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u T - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v T - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0 \quad (5)$$

Considering that two-dimensional flow exists, due to symmetry, the equations are solved in half of the region.

The boundary conditions are as follows:

Inner surface:

$$u = v = 0 \quad \text{and} \quad T = T_i \quad (6)$$

Outer surface:

$$u = v = 0 \quad \text{and} \quad T = T_o \quad (7)$$

Symmetry lines:

$$u = \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = 0 \quad (8)$$

where  $\bar{n}$  is the normal with respect to the boundary.

The Rayleigh number is defined as:

$$Ra_L = \frac{\rho g \beta (T_i - T_o) L^3}{\nu^2} Pr \quad (9)$$

where  $L = (Per_o - Per_i) / 2\pi$ .  $Per_i$  and  $Per_o$  are the inner and outer perimeter of the geometry. In this work, the rate  $b_o / a_o$  is always equal to the rate  $b_i / a_i$  (see Fig. 1).

The equation written for a general coordinate system  $(\xi, \eta)$  for a generic scalar  $\phi$  is (Maliska, 1995):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( c_1 \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( c_2 \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c_2 \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c_4 \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + S^\phi - P^\phi \end{aligned} \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} U &= u y_\eta - v x_\eta \\ V &= v y_\xi - u x_\xi \\ J &= (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1} \\ c_1 &= J(x_\eta x_\eta + y_\eta y_\eta) \\ c_2 &= -J(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \\ c_4 &= J(x_\xi x_\xi + y_\xi y_\xi) \end{aligned} \quad (11)$$

The  $\phi$  variable represents the mass conservation equation, the two cartesian velocity components  $u$  and  $v$  in the  $x$  and  $y$  directions, respectively, and  $T$  the temperature. The values of  $\Gamma$ ,  $S^\phi$ ,  $P^\phi$  are summarized in Table 1.

Table 1 - Values of  $\Gamma$ ,  $S^\phi$  and  $P^\phi$

$\phi$	$\Gamma$	$S^\phi$	$P^\phi$
1	0	0	0
u	$\mu$	0	$y_\eta \frac{\partial P^*}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial P^*}{\partial \eta}$
v	$\mu$	$\rho g \beta (T - T_{ref})$	$x_\xi \frac{\partial P^*}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial P^*}{\partial \xi}$
T	$\frac{k}{c_p}$	0	0

### DISCRETIZED EQUATIONS

To obtain the discretized equations using the finite-volume concept, Eq. (10) is integrated over the regular elemental volume in the  $(\xi, \eta)$  domain, see Fig. 2.

The value of  $\phi$  and its derivatives at the control volume interfaces are evaluated, as a function of nodal points, using the WUDS scheme (Raithby and Torrance, 1974).

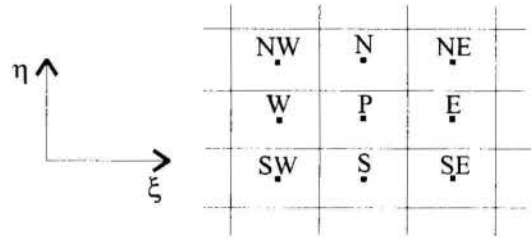


Figure 2 - Computational domain

Integration of the Eq. (10) in space results in:

$$\begin{aligned} M_e \phi_e - M_w \phi_w + M_n \phi_n - M_s \phi_s = -L[\hat{P}^\phi]_p \Delta V - \\ L[\hat{S}^\phi]_p \Delta V + \left[ D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e - \left[ D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w + \\ \left[ D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e - \left[ D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_s \end{aligned} \quad (12)$$

where  $M_e$  and  $D_1$ , for example, are given by

$$\begin{aligned} M_e &= (\rho U)_e \Delta \eta \\ D_1 &= \Gamma \phi_{c2} J \Delta \eta \end{aligned} \quad (13)$$

and  $L[ ]$  means the numerical approximation of the term inside the brackets.

### NUMERICAL SCHEME

The general purpose computer code, SINFLOW, was used to compute these flows. It is a computer program, available at the SINMEC, developed to solve two-dimensional transient laminar problems using the finite volume approach based in a boundary-fitted framework, with a co-located scheme for dependent vari-

ables ( $u$ ,  $v$ ,  $P$  and  $T$ ), as described in Marchi and Maliska (1994). It uses the SIMPLEC method proposed by Van Doormaal and Raithby (1984) for treating the pressure-velocity coupling.

The results shown in this work were performed on a  $30 \times 60$  grid in the radial and circumferential direction, respectively. Explanatory study on coarser and finer grids were performed to provide guidance for choosing the best grid. The grid lines were more closely packed near the boundaries, as shown in the left side of the Fig. 1.

The convergence criterion includes the overall energy balance for the cavity as follows

$$\frac{Nu_o - Nu_i}{Nu_o} \leq 10^{-5} \quad (14)$$

where  $Nu_o$  and  $Nu_i$  are proportional to the heat transport across the outer and inner surface, respectively. This convergence criterion assures that the energy conservation equation is being satisfied according to the specific tolerance.

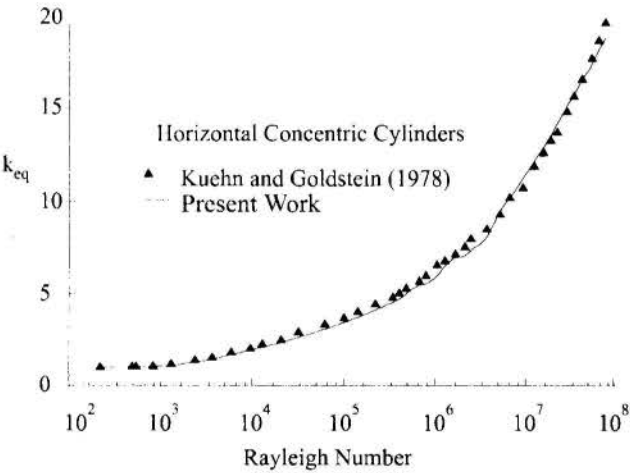


Figure 3 - Horizontal concentric cylinder. Comparison with experimental data

All computation were performed on an SUN SPARK 10 computer with two scalar processors.

Eq. (12), after using the interpolation functions, written in compact form is,

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + (L[S^\phi] - L[P^\phi]) \Delta V_p \quad (15)$$

where "a" is the coefficients in the linear equations and  $L[ ]$  means the numerical approximation of the source term in the equation for  $\phi$ . To solve the four systems of algebraic equation are solved by an ADI procedure as described in Silva *et alii* (1991). To obtain the values of  $u$ ,  $v$ ,  $T$  and  $p$  the following procedure was used (Maliska, 1995):

- 1) The initial condition is assigned to all volumes in domain.
- 2) Calculate the coefficients and source terms for  $u$  and  $v$ . Solve the corresponding linear systems.

3) Calculate the coefficients and solve the pressure correction equation. (SIMPLEC method).

4) The velocities  $u$  and  $v$  are corrected using the pressure correction calculated in step 3.

5) Solve for temperature.

6) Return to step 2 until the convergence criteria is achieved.

## RESULTS AND DISCUSSION

The results are presented using the average heat transfer rate in the form of an equivalent conductivity

$$k_{eq} = \frac{\overline{Nu}}{Nu_{cond}} \quad (16)$$

where  $\overline{Nu}$  is the average Nusselt number and  $Nu_{cond}$  is the Nusselt number for  $Ra_L = 0$ .

### TEST CASE:

This problem precludes any analytical solution, but it is possible to check the numerical model with the available numerical and experimental data. One chooses the experimental results of Kuehn and Goldstein (1978) due to its reliability.

The geometry is a concentric horizontal cylindrical annuli with the ratio  $a_i / a_o = 2.6$  and the ratio  $b_i / a_i = 1$ . Fig. 3 shows the comparison between their experimental data and the model used in this work. The numerical predictions are in very good agreement with the experimental measurements.

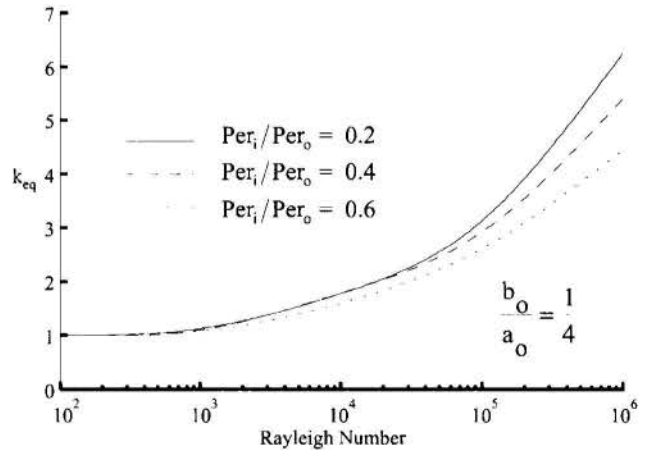


Figure 4 - Influence of the perimeter ratio  $Per_i / Per_o$  and Rayleigh Number on the  $k_{eq}$ , for  $b_o / a_o = 1/4$

### ELLIPITIC CAVITIES

Numerical results were obtained for many different elliptical cavities, changing the perimeter ratio and  $b_o / a_o$ . As mentioned, one is interested finding the elliptical cavities which presents the Bénard cells.

Fig. 4 shows the behavior of the equivalent conductivity,  $k_{eq}$ , with Reynolds number,  $Ra_L$ , for a cavity with

$b_o/a_o = 1/4$ . Three perimeter ratios were analyzed: 0.2, 0.4 and 0.6. These geometries can be seen in Figs. 7, 8 and 9, respectively.

Table 2 - Nusselt number for pure conduction

$Per_i / Per_o$	$Nu_{cond}$
0.2	1.1986
0.4	2.1513
0.6	3.9152

It can be seen in Fig. 4 that  $k_{eq}$  increases when the perimeter ratio decreases. In order to appreciate this behavior it is necessary to compute the Nusselt number for pure conduction, this is, for  $Ra_L = 0$ . Table 2 shows that when the perimeter ratio increases the heat transfer by conduction also increases, since the two walls get closer and the conduction resistance decreases. Therefore, the decrease in  $k_{eq}$  when the perimeter ratio increases is due, mainly, to the rapid growth of  $Nu_c$  with the increase in perimeter ratio.

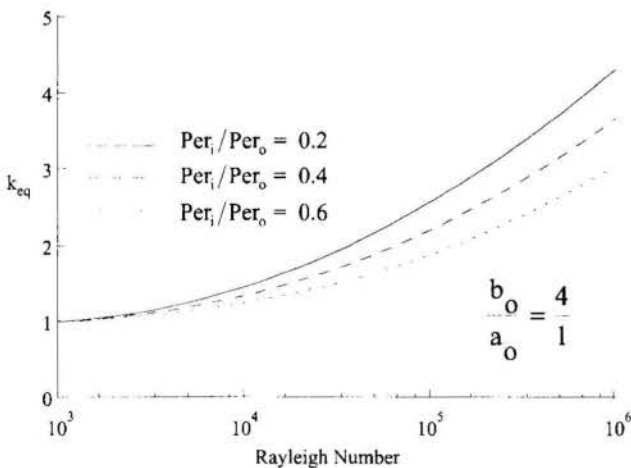


Figure 5 - Influence of the perimeter ratio  $Per_i / Per_o$  and Rayleigh Number on the  $k_{eq}$ , for  $b_o/a_o = 4/1$ .

Increasing  $L$  one approaches the situation where part of the horizontal internal wall (heated) is parallel to part of the external wall (cooled). This reproduces the well known Bénard problem, where pairs of convective cells arises depending on the size of the cavity.

Fig. 5 shows the behavior of the equivalent conductivity,  $k_{eq}$ , with Reynolds number,  $Ra_L$ , for a cavity with  $b_o/a_o = 4/1$ . Three perimeter ratios were analyzed: 0.2, 0.4 and 0.6. Fig. 10 shows two cavities with this  $b_o/a_o$  ratio. The behavior showed in Fig. 5 is the same of the Fig. 4. The greater the perimeter ratio is the smaller convective cells are.

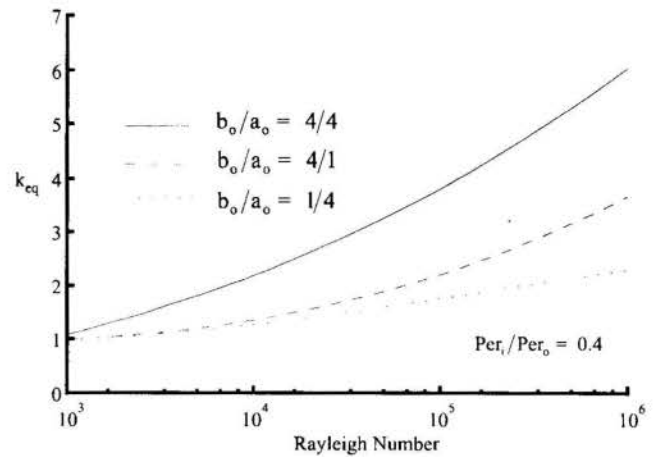


Figure 6 - Influence of the ratio  $b_o/a_o$  and Rayleigh Number on the  $k_{eq}$  for the perimeter ratio  $Per_i / Per_o = 0.4$

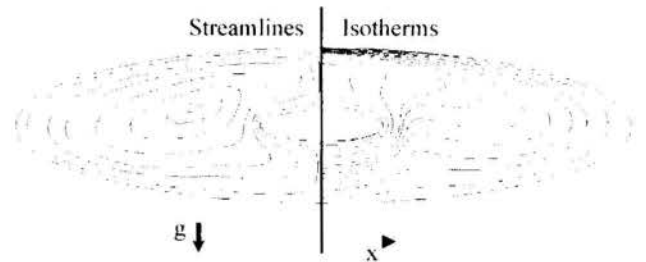


Figure 7 - Streamlines and isotherms for  $b_o/a_o = 1/4$ ,  $Per_i / Per_o = 0.2$  and Rayleigh number  $10^5$ .

Fig. 6 shows the influence of the ratio  $b_o/a_o$  and Rayleigh number on the  $k_{eq}$  for the perimeter ratio  $Per_i / Per_o = 0.4$ . This figure shows that a cylindrical cavities are better geometries to the heat transport. Convective cells are bigger in this cavities than in the others. It can be seen also that the geometry which presents the Bénard cells ( $b_o/a_o = 1/4$ ) shows smaller  $k_{eq}$  than the one with ( $b_o/a_o = 4/1$ ), that is, the vertical cavity. This was also expected since the heat is easier transported by the flow movements of the vertical cavity than by the flow which characterizes the Bénard cells. Recall that for these two geometries heat transfer by conduction is equal, therefore, the difference in  $k_{eq}$  is due solely to convection effects.

Two equations approximating the calculated results are as follows:

$$k_{eq1} = 0.1565 (Ra_e)^{0.2093} \left(\frac{b_o}{a_o}\right)^{0.0201} (d_e)^{0.1309} \quad (17)$$

$$k_{eq} = 0.1257 (Ra_e)^{0.2303} \left(\frac{b_o}{a_o}\right)^{0.0591} (d_e)^{0.1316} \quad (18)$$

where  $Ra_e$  is the Rayleigh number defined in equation (19) and  $d_e$  is de equivalent diameter.

$$Ra_e = \frac{\rho g \beta (T_i - T_o) d_e^3}{\nu^2} Pr \quad (19)$$



Equation (17) was found to be valid for  $10^3 \leq Ra_L \leq 10^4$  and equation (18) was found to be valid for  $10^5 \leq Ra_L \leq 10^6$ .

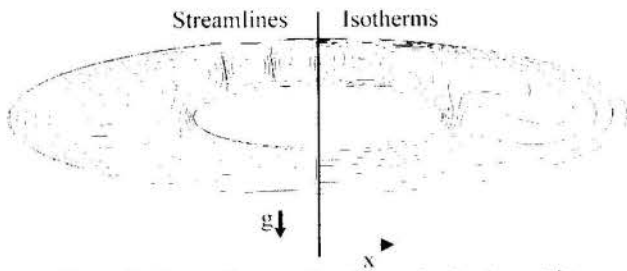


Figure 8 - Streamlines and isotherms for  $b_0/a_0 = 1/4$ ,  $Per_1/Per_0 = 0.4$  and Rayleigh number  $10^5$ .

### CONCLUSION

The analysis of the natural convection flow inside elliptical cavities allowed to appreciate the variety of flow patterns offered by these geometries. Of particular interest is the limiting case where Bénard cells are obtained, showing that for several perimeter ratios part of the elliptical cavity resembles the well-know flow between parallel plates heated from below. The remaining results can be incorporated to the others existing for complex geometries and be used for engineering calculations.

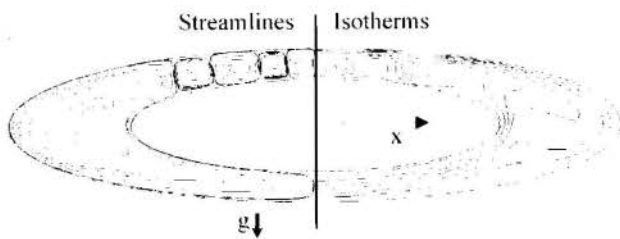


Figure 9 - Streamlines and isotherms for  $b_0/a_0 = 1/4$ ,  $Per_1/Per_0 = 0.6$  and Rayleigh number  $10^5$ .

### REFERENCES

Campo, E. M., Sen, M. and Ramos, E., 1987, *Natural Convection in a Semielliptic Cavity*, Numerical Heat Transfer, Vol. 12, pp. 101-119.

Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J., 1978, *An Experimental Study of Natural Convection Heat Transfer in Concentric and Eccentric Horizontal Cylindrical Annuli*, Journal of Heat Transfer, Vol. 100, pp. 635-640.

Maliska, C. R., 1995, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional - Fundamentos e Coordenadas Generalizadas*, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A (in Portuguese).

Marchi, C. H. and Maliska, C. R., 1994, *A Non orthogonal Finite-Volume Method for Solution of All Speed Flows using Co-Located Variables*, Numerical Heat Transfer - Part B, Vol. 26, pp. 293-311.

Raithby, G. D. and Torrence, K. E., 1974, *Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow*, Computers & Fluids, Vol. 2, pp. 191-206.

Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G., 1988, *Comparison of Finite Volume Numerical Methods with Staggered and Co-located Grids*, Computers & Fluids, Vol. 16, pp. 389-403.

Schreiber, W. C. and Singh, S. N., 1987, *Natural Convection in a Stratified Fluid Between Confocal Horizontal Elliptical Cylinders*, Numerical Heat Transfer, Vol. 11, pp. 183-197.

Silva, A. F. C., Marchi, C. H., Livramento, M. A. and Azevedo, J. L. F., 1991, *On the Effects of Vectorization for Efficient Computation of three-dimensional Segregated Finite Volume Solutions*, Proceedings of the XI Brazilian Congress of Mechanical Engineering, pp. 109--112, São Paulo, Brazil.

Van Doormaal, J. P. and Raithby, G. D., 1984, *Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow*, Numerical Heat Transfer, Vol. 7, pp. 147-163.

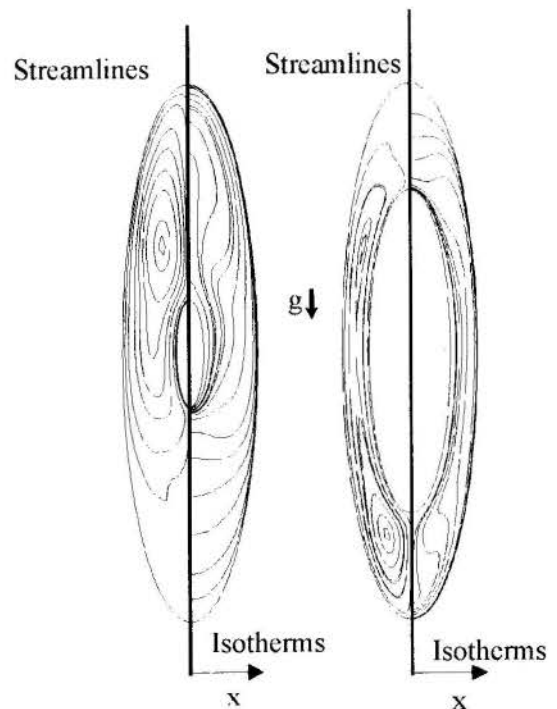


Figure 10 - Streamlines and isotherms for  $b_0/a_0 = 4/1$ ,  $Per_1/Per_0 = 0.2$  (left) and  $0.6$  (right) and Rayleigh number  $10^5$ .

### ACKNOWLEDGMENT

Financial support to A. R. Cunha and J. F. V. de Vasconcellos by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) and to M. A. Livramento by Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior (CAPES) are gratefully appreciated.

SHEAR-INDUCED GRADIENT DIFFUSIVITY OF  
A MONODISPERSE DILUTE SUSPENSION

Francisco Ricardo da Cunha

Departament of Mechanical Engineering  
University of Brasília - 70910 900 - Brasília - DF - Brazil

Edward John Hinch

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics  
University of Cambridge CB3 9EW - Cambridge - EnglandSUMMARY

*This article is a theoretical microhydrodynamic investigation of the way in which surface roughness can induce migration of spheres undergoing shear. We describe a theoretical determination of the down-gradient diffusivity in the plane of shear as a function of the surface roughness in a dilute suspension of noncolloidal rigid spheres. The calculation involves two rough spheres the trajectories of which were determined by using far field, near field asymptotic expressions and two models of surface roughness.*

INTRODUCTION

Shear-induced particle dispersion has been shown to play an important role in a variety of phenomena involving concentrated suspensions, which affect certain of their properties in a profound way. Shear-induced particle dispersion was first studied experimentally by Eckstein, Bailey and Shapiro (1977), who measured the lateral shear-induced coefficients of self-dispersion of spherical particles at low Reynolds number by monitoring the random walk of a marked particle immersed in a suspension undergoing shear in Couette device. They found a self-diffusivity of the random walk across the streamlines  $D$  which was proportional to the scale  $\gamma a^2$ , with  $a$  the particle size and  $\gamma$  the shear rate of the flow. A new experimental technique was proposed by Leighton and Acrivos (1987 a) who found the lateral self-diffusivity to have the asymptotic form  $D \sim 0.5a^2\gamma\phi^2$  in the dilute limit  $\phi \leq 0.05$ . Two dimensional numerical simulations by Bossis and Brady (1988) were found to agree qualitatively with the scaling  $\gamma a^2$  in the pure hydrodynamic limit of their Stokesian dynamics simulation. Recently, by considering only two particle interactions Acrivos, Batchelor, Hinch, Koch and Mauri (1992) derived an analytic expression for the coefficient of shear-induced particle in the direction of the fluid motion for a dilute suspension suspension undergoing a simple shearing motion.

In the absence of Brownian motion, inertia and interparticle forces, two equal smooth spheres collide in a simple shear flow in a reversible way returning to their initial streamlines. Because the minimum separation during the collision can be less than  $10^{-4}$  of their radius, quite small surface roughness can have a significant irreversible effect on the collision. This is supported by the experiments of Arp and Mason (1977) who provided careful observations of two isolated interacting spheres. Real particles, which seen by the naked eye appear be smooth spheres, however when viewed using a scanning electron microscope are found to have a typical surface roughness of order  $10^{-4}$  to  $10^{-2}$  particle radius (see plate in Figure 4). Measurements of effective surface roughness in viscous hydrodynamic interactions of real non-colloidal spheres has been carried out by Smart and Leighton (1989).

In this paper we explore the effect of surface roughness on the collisions between two spheres. It must be emphasized that the irreversible mechanism which we shall examine is viscous in nature and it is only produced by allowing the

particles having surface roughness. The main goal is to show how surface roughness can explain shear-induced dispersion arising from irreversible interparticle interactions. A related problem of hydrodynamic dispersion produced by effects of surface roughness on the statistical motion of a heavy sphere falling through a dilute suspension of neutrally buoyant spheres was studied by Davis (1992).

THE FLOW OUTSIDE A RIGID SPHERE

We use the approach which consists in replacing the presence of the particle by a superposition of distribution of forces and moments at its centre  $\mathbf{x}_o$ . This corresponds to writing the Stokes' equation in the form

$$-\mu\nabla^2\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \mathbf{D} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \mathbf{Q} : \nabla\nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \dots, \quad (1)$$

where  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$  is the Dirac delta function, and the quantities  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{Q}$  correspond to the forces and moments applied to the fluid by the particle (monopole, dipole, quadrupole). The solutions  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  and  $p(\mathbf{x})$  are generalized functions and they essentially express the disturbance caused by the relative motion of a particle immersed in an ambient solenoidal field  $\mathbf{U}^\infty(\mathbf{x})$ . The flow representation at any  $\mathbf{x}$  in the fluid domain can then be written as  $\mathbf{U}^\infty(\mathbf{x})$  plus the flow generated by the superposition of stokeslets distributed over the particle surface  $S_\alpha$ , with source strength  $\mathbf{t}$  per unit area  $(\sigma(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{n})$ . The integral representation of the flow is

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}) - \oint_{S_\alpha} (\sigma(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) dS, \quad (2)$$

where  $\mathbf{x}_\alpha$  is a surface coordinate,  $\mathbf{n}$  is the unit vector into the fluid,  $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left( \frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3} \right)$  is the fundamental Green's function for Stokes flow and  $\mathbf{I} = \delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$  is the unit isotropic tensor.

The derivative of any order of Stokeslet is also solution of the Stokes' equations as (1) indicates. These derivatives are readily obtained from the formal multipole expansion of the fundamental disturbance field in which the coefficients are moments of the surface traction  $\sigma \cdot \mathbf{n}$  (i.e.  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{Q}$ , etc). We shall set  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}_\alpha|$  and take the Taylor series of  $\mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)$  about  $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{0}$  to obtain

$$\mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_\alpha \cdot \nabla\mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\alpha : \nabla\nabla\mathbf{G}(\mathbf{x}) + \dots$$

By substituting the above series into the integral representation (2) we find

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \oint_{S_\alpha} \mathfrak{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\alpha) dS, \quad (3)$$

where  $\mathfrak{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\alpha) = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{x}_\alpha \cdot \nabla)^n \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})$ .

In the present work is sufficient to restrict the hydrodynamic potential analysis to the leading order terms of the far field expansion (3) associated with the net hydrodynamic force monopole and the Stokes doublet,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}) = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{D} : \nabla \mathbf{G} + \dots$ , where  $\mathbf{F}$  and  $\mathbf{D}$  are defined by looking at the equation (3),  $\mathbf{F} = \oint_{S_\alpha} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{n}) dS$  and  $\mathbf{D} = \oint_{S_\alpha} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{x}_\alpha dS$ . The dipole  $\mathbf{D}$  can be grouped as a combination of an isotropic part, which has no dynamic effect since  $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ ; an antisymmetric part connected with the hydrodynamic torque; and a symmetric dipole field intimately identified with straining motions,  $\mathbf{D} = \mathcal{S} + \mathcal{T}$ . The hydrodynamic torque exerted by the fluid on the particle can be simply calculated by the relation  $\mathbf{L} = \int_{S_\alpha} \mathbf{x}_\alpha \times (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{n}) dS$ . In addition, note that  $\mathcal{T} : \nabla \mathbf{G} = -\frac{1}{2} \epsilon_{jki} L_i G_{j,m,k} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \times \nabla) \cdot \mathbf{G}$ . Then an equivalent expression to the multipole expansion may be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}) &= -\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}) + (\mathcal{S} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{G} + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \mathbf{L} \times \nabla \right) \cdot \mathbf{G} + \dots \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}) &= -\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{L} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \\ &+ \mathcal{S} : \mathbf{I} \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{3}{|\mathbf{x}|^5} \mathbf{x} \cdot \mathcal{S} \cdot \mathbf{x} \quad (4) \end{aligned}$$

Now we may obtain the complete solution of the equation (4) by determining the multipole moments  $\mathbf{F}$ ,  $\mathcal{T}$  and  $\mathcal{S}$ . Taking into account that at the surface of the particles the non-slip condition must be satisfied at each point of  $S_\alpha$ , i.e.  $\mathbf{U}_o + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{U}^\infty + \mathbf{u}'(\mathbf{x})$ . The key point is to express the multipole moments in terms of  $\mathbf{U}^\infty$  and its derivative (i.e. a Taylor expansion about the centre of the particle, and integrating over  $S_\alpha$ , and using the creeping flow condition  $\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{U}^\infty = 0$  the result takes the form of direct relations, known as Faxén laws, with

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu a \left[ \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}_o) + \left( \frac{1}{6} a^2 \nabla^2 \mathbf{U}^\infty \right)_o - \mathbf{U}_o \right]$$

and

$$\mathbf{L} = 8\pi\mu a^3 \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^\infty(\mathbf{x}_o) - \boldsymbol{\Omega}_o \right).$$

Following Batchelor and Green (1972) we determine the expression for the stresslet  $\mathcal{S}$  exerted by an isolated rigid sphere on the fluid

$$\mathcal{S} = \frac{20}{3} \pi\mu a^3 \left[ \mathbf{E}^\infty(\mathbf{x}_o) + \left( \frac{1}{10} a^2 \nabla^2 \mathbf{E}^\infty \right)_o \right].$$

One of our assumptions is to consider torque-free particles placed in a linear field like  $\mathbf{U}^\infty + \mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega}^\infty + \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}$ . We use the Faxén laws to express the surface traction  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  as the superposition of the translating and straining field,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{F}}{4\pi a^2} + \frac{3}{4\pi a^3} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_o}{a} \right) \cdot \mathcal{S} \\ &= -\frac{3\mu}{2a} \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}_o) + 5\mu \mathbf{E}^\infty(\mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

The first term on the left hand side in the above is particularly simple due to its uniformity over the surface, and the

second represents a stationary surface stress distribution in space which is independent of the radius  $a$ .

Now, expanding the Green's function  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  about the centre of the spheres we obtain the velocity disturbance field  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$  produced by a torque-free particle as being

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{x}) &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \oint_{S_\alpha} [\mathbf{G}(\mathbf{r}) + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_o) \cdot \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_o)(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_o) : \nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}) \dots] dS, \end{aligned}$$

with  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$ . Integrating and using the creeping flow condition  $\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{G} = \nabla \cdot \mathbf{G} = 0$  produces a velocity disturbance field,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{x}) &= \mathbf{F} \cdot \left( 1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla^2 \right) \mathbf{G}(\mathbf{r}) + \\ &+ (\mathcal{S} \cdot \nabla) \cdot \left( 1 + \frac{1}{10} a^2 \nabla^2 \right) \mathbf{G}(\mathbf{r}) + \dots \quad (5) \end{aligned}$$

## THE PROBLEM STATEMENT

We consider a dilute monodisperse suspension of spheres of radius  $a$  immersed in an unbounded incompressible Newtonian fluid of density  $\rho$  and viscosity  $\mu$ . Suppose now that the spheres are sufficiently large so that effect of thermal fluctuations in the fluid (i.e. Brownian motion) and colloidal interparticle forces can be neglected. There is, however, the possibility of particles having surface roughness so that non-hydrodynamic interactions can occur due to this effect. Here the Péclet number  $Pe$  expresses the ratio of particle advection by the imposed shear to Brownian diffusion and  $Ni$  gives the relative importance of the interparticle forces. The regime of interest in the present work is for  $Pe = \frac{Ua}{D_o} = \frac{6a^3 \pi \mu \gamma}{kT} \gg 1$  and  $Ni = \frac{6a^3 \pi \mu \gamma}{|F_p|} \gg 1$ . Under these conditions it is appropriate to scale time with the magnitude of shear rate,  $\gamma^{-1}$  rather than with diffusive time  $a^2/D_o$ . Here  $|F_p|$  is defined as the magnitude of interparticle forces,  $U$  is the effective fluid velocity in the flow direction and  $D_o (= kT/6\pi\mu a)$  is the ordinary Stokes-Einstein diffusivity.

The spheres are supposed to be neutrally buoyant so that the most obvious possibility of migration due to gravity can be ignored. One might define the sedimentation number  $Ng$  and impose the condition  $Ng = \frac{2}{9} \frac{\rho_s - \rho}{\mu \gamma} g \ll 1$ . Finally the suspension is considered in the limiting case in which the Reynolds number based on the flow around the suspended particle is very small, i.e.  $Re = \frac{\rho(\gamma a)a}{\mu} \ll 1$ . The Lagrangian equation of the particles is deduced by dropping out all unimportant effects (i.e.  $Pe^{-1} = 0$ ,  $Re = 0$ ,  $Ni^{-1} = 0$  and  $Ng = 0$ ). We exploit this fact by writing that

$$\frac{d\mathbf{x}^\alpha}{dt} = \boldsymbol{\Omega}^\infty \times \mathbf{x}^\alpha + \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}^\alpha + \mathcal{M}^\alpha \cdot (\mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}^\alpha), \quad (6)$$

where  $\mathcal{M}$  is the mobility matrix that is a central element describing the hydrodynamic interaction among particles.

The Interaction of Spheres in a Linear Field. In our analysis of low particle concentration,  $\phi (= \frac{4}{3} \pi a^3 n \ll 1)$ , the calculations can be concentrated on the theoretical hydrodynamic aspect of encounters between only two spheres. The first and second Faxén's laws show that force and torque free spheres may undergo a rigid body motion that matches the surrounding fluid velocity and vorticity at the centre of the particles. This means that in a linear field the only possible response of the effectively isolated particle is to rotate passively with the bulk vorticity and resist the bulk straining. The contribution of pure straining motion gives rise to



a far-field disturbance flow that decays as  $1/|\mathbf{x}^2|$  induced by the symmetric dipole stresslet. Hence equation (5) for a point particle takes the form

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) \sim (\mathcal{S} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}).$$

Such a disturbance motion at the position of a second particle gives it an additional translational velocity, and also requires a change of the distribution of stress at the surface of the second particle. This coupling of the particles' motion via the fluid is called hydrodynamic interaction. In reality hydrodynamic interactions are not pairwise additive in view that the interaction between two particles is influenced by the presence of a third, and so on. However the underlying of Stokes' equations allows us to break up the complicated multiparticle interaction problem into a sequence of simpler problem in which a single particle interacts with an ambient flow. Such a description corresponds to the so-called method of reflections. The method consists of a systematic scheme of successive iterations, since a correction of the ambient field about a given particle generates a new disturbance solution for that particle, which in turns modifies the ambient field about another particle.

**Governing Equations.** We use the method of reflections to deduce the basic structure of the governing equation for the problem here. The disturbance produced by the motions of two spheres  $A$  and  $B$  (zeroth order solution) are simply given by the equation,  $\mathbf{u}'_a(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) \sim (\mathcal{S}_a^{(0)} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$ , where  $\mathcal{S}_a = \frac{20}{3}\pi\mu a^3 \mathbf{E}^\infty$ . Here and into the following expressions the solutions for the sphere  $B$  may be obtained from the preceding by switching  $A$  and  $B$  and the indices 1 and 2. The superscripts denotes to the order of reflection (0), (1), (2) and the subscripts  $a \rightarrow b$ ,  $a \rightarrow b \rightarrow a$  denote the sequence of reflections. The first reflection field  $\mathbf{u}'_{a \rightarrow b}$  is expanded as  $\mathbf{u}'_{a \rightarrow b} = (\mathcal{S}_a^{(1)} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \dots$  with the particles translational velocity and Stresslet obtained from the Faxén laws  $\mathbf{U}_a^{(1)} = (1 + \frac{1}{6}a^2\nabla^2) \mathbf{u}'_b|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}$  and  $\mathcal{S}_a^{(1)} = \frac{20}{3}\pi\mu a^3 (1 + \frac{1}{10}a^2\nabla^2) \mathbf{E}'_b|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}$ .

At the second reflection the field  $\mathbf{u}'_{a \rightarrow b \rightarrow a} = (\mathcal{S}_a^{(2)} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \dots$ , with motion and stresslet determined again by the Faxén's laws as follows

$$\mathbf{U}_a^{(2)} = \left(1 + \frac{1}{6}a^2\nabla^2\right) \mathbf{u}'_{a \rightarrow b}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}$$

and

$$\mathcal{S}_a^{(2)} = \frac{20}{3}\pi\mu a^3 \left(1 + \frac{1}{10}a^2\nabla^2\right) \mathbf{E}'_{b \rightarrow a}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}.$$

The results for  $\mathbf{U}_a$  and  $\mathbf{U}_b$  are obtained by adding the contributions from the reflections,  $\mathbf{U}_a = \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}_1) + \mathbf{U}_a^{(1)} + \mathbf{U}_a^{(2)}$  and  $\mathbf{U}_b = \mathbf{U}^\infty(\mathbf{x}_2) + \mathbf{U}_b^{(1)} + \mathbf{U}_b^{(2)}$ . Inserting the appropriate expressions of the Green's function and its derivatives we obtain with no loss of generality that the governing equation must have the following basic structure

$$\mathbf{U}_a = \Omega^\infty \times \mathbf{x}_1 + \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}_1 - \mathcal{M} \cdot \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}_1,$$

and

$$\mathbf{U}_b = \Omega^\infty \times \mathbf{x}_2 + \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}_2 - \mathcal{M} \cdot \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}_2.$$

$\mathcal{M}$  is the mobility matrix which appears in this calculation as being  $\mathcal{M} = \mathcal{A}(r)\mathbf{d}\mathbf{d} + \mathcal{B}(r)(\mathbf{I} - \mathbf{d}\mathbf{d})$ . Here  $\mathbf{d}$  is a unit vector along the line of centres defined by  $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$ , with  $\mathbf{R} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ . It will be convenient to describe the dynamics of interacting in terms of the relative and centre of mass

motion by defining,  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{U}_b - \mathbf{U}_a$  and  $\dot{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_b}{2}$ . It follows that

$$\dot{\mathbf{R}} = \Omega^\infty \times \mathbf{R} + \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{R} - \mathcal{M} \cdot \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{R} \quad (7)$$

and  $\dot{\mathbf{Z}} = \Omega^\infty \times \mathbf{Z} + \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{Z}$ . Note that due to the symmetry of the system, the midpoint between the two spheres moves with velocity not influenced by the hydrodynamic disturbance produced during the motion of the spheres.

Now, let the suspension undergoes a steady simple shearing motion in which the undisturbed velocity, rate of strain tensor and the vorticity are given respectively by  $\mathbf{U}^\infty = \gamma x_2 \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{E}^\infty = \frac{\gamma}{2}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)$  and  $\Omega^\infty = -\frac{\gamma}{2} \mathbf{e}_3$ . The final form of the governing equations to compute the particle trajectories are obtained making all lengths nondimensional by the particles radius  $a$  and by choosing  $\gamma a$  as velocity scale and  $\gamma^{-1}$  as time scale. Thus the corresponding components of the velocity of the centre of sphere  $A$  relative to sphere  $B$  are found from the general expression (7) to be

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_2 + \frac{r_1^2 r_2}{r^2} [\mathcal{B}(r) - \mathcal{A}(r)] - \frac{1}{2} \mathcal{B}(r) r_2 \\ \dot{r}_2 = \frac{r_1 r_2^2}{r^2} [\mathcal{B}(r) - \mathcal{A}(r)] - \frac{1}{2} \mathcal{B}(r) r_1 \\ \dot{r}_3 = [\mathcal{B}(r) - \mathcal{A}(r)] \frac{r_1 r_2 r_3}{r^2} \end{cases} \quad (8)$$

with  $\dot{z}_1 = z_2$ ,  $\dot{z}_2 = 0$  and  $\dot{z}_3 = 0$ . The scalar functions  $\mathcal{A}(r)$  and  $\mathcal{B}(r)$  are purely geometric quantities that depend on the instantaneous configurations of the two particles (i.e. relative positions of the spheres) and thus are implicit functions of the time. More importantly, these functions represent the kinematic and dynamic aspects of the hydrodynamic interactions by characterising the motion along and perpendicular to the line of centres respectively. When computing the trajectories of the spheres the range of separation between the particles was divided into four according to Cunha and Hinch (1996). In that paper we present the expressions for  $\mathcal{A}(r)$  and  $\mathcal{B}(r)$  derived by using twin multipole expansions and asymptotic expansions at the lubrication limit, when the two spheres are close together or in the range in which  $r = R/a = O(1)$ .

**The Effect of Surface Roughness.** We make the simplifying assumption that the surface of the spheres are covered by an array of spherical bumps of typical diameter  $a\epsilon$ , and each bump will contribute the same area to the area of contact. The surface roughness parameter  $\epsilon$  must be interpreted as a measure of how close the spheres may come before they interact through the roughness of their surface, and the contact forces is transmitted from one sphere to other via interaction of the bumps on the surface. The problem of the surface roughness is examined from a kinematic point of view in which a continuous sliding satisfies the condition  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$  in terms of mobility functions, the sliding condition is found from (8) to be of the form  $r_1 r_2 [1 - \mathcal{A}(r)] = 0$ . In the compressional quadrants  $r_1 r_2 < 0$ , the mobility functions based on hydrodynamics alone would give the spheres approaching with  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} < 0$ . The surface roughness stops this, with a positive reaction normal force so that  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ . This behaviour can be modeled by setting  $\mathcal{A} = 1$  in the compressional quadrants. On the other hand in the extensional quadrants  $r_1 r_2 > 0$ , the pure hydrodynamic mobility functions give the spheres separating with  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \geq 0$ . In this case the surface roughness do not resist the motion and exert no force. Thus we retain the original mobility function  $\mathcal{A}(r)$  into extensional quadrant. For this simple sliding model, we use unaltered the pure hydrodynamic mobility function  $\mathcal{B}(r)$  in both to extensional and compressional quadrants.

Now it is possible to adopt an alternative simple model of the surface roughness. One can argue that the asperities fuse the particles and so the two spheres become locked and rotate as a single rigid body. Alternatively one can argue that the asperities act as gear teeth and the two particles roll around one another without slipping. To prevent the slipping, a tangential force and a torque are exchanged in addition to a normal force, and this modifies the mobility  $\mathcal{B}(r)$ . Cunha and Hinch (1996) propose  $\mathcal{B} = 0.4046$ , which corresponds to their lubrication formula to the mobility  $\mathcal{B}(r)$  in the touching limit. For this alternative model of the effect of roughness, we set  $\mathcal{A} = 1$  and  $\mathcal{B} = 0.4046$  when both  $r_1 r_2 < 0$  and  $r = 2 + \epsilon$ .

### DOWN-GRADIENT DIFFUSION

Consider now a suspension which has a small gradient in the concentration in the direction of the velocity gradient, i.e.  $n(\mathbf{x}) = n_0 + r_2 \frac{\partial n}{\partial r_2}$ . Physically, the presence of higher particle concentration on one side of a teste sphere in the suspension leads the sphere to migrate towards the region of lower concentration since it interacts with more rough spheres on one side than the other. We can get first a feel for the scaling of the down-gradient diffusivity by using simple scaling arguments. The net displacement after each interaction is  $O(a)$  and the extra rate of interaction from regions of higher concentrations is  $O(a\gamma\nabla n)$ . Then the mean flux of particle should scale like  $a^2\gamma\phi\nabla n$  in a dilute suspension where only detail of the interactions between two particles are considered. This indicates that the down-gradient diffusivity must have the same scaling found by Cunha (1993) for the random self-diffusion coefficient, i.e.  $O(a^2\gamma\phi)$ .

We need to calculate the net rate at which particles cross per unit area a plane perpendicular to the concentration gradient, due to particle displacements across the streamlines. It is assumed that the suspension is sufficiently dilute that the concentration gradient has a negligible effect on the velocity gradient. Consider a test sphere starting at  $\mathbf{X}^{-\infty}$  being displaced  $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{+\infty} - \mathbf{X}^{-\infty}$  across the streamlines as a result of, a collision, with a second sphere starting at  $\mathbf{Y}^{-\infty}$ . With the relative separation  $(r_1, r_2, r_3)$  of the two spheres defined as,  $\mathbf{r} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ , the rate of these collisions is  $n(\mathbf{Y}^{-\infty})\gamma|r_2^{-\infty}|$ . For a given initial separation of the colliding pair  $\mathbf{r}^{-\infty}$ , and hence a given final displacement across the streamlines  $\Delta\mathbf{X}$ , any test sphere starting with  $X_2^{-\infty}$  in the range  $-\Delta X_2 < X_2^{-\infty} < 0$  will cross the plane  $r_2 = 0$  from one side, and any test sphere starting with  $X_2^{-\infty}$  in the range  $0 < X_2^{-\infty} < -\Delta X_2$  will cross the plane from the other side, depending on the sign of  $\Delta X_2$ . Hence the net flux of particles across the plane is

$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G} dr_2^{-\infty} dr_3^{-\infty},$$

which accounts for particles crossing the plane of interest from both sides by noting that  $r_2^{-\infty} \Delta X_2 \geq 0$ . Here

$$\mathcal{G} = \int_{-\Delta X_2}^0 n(X_2^{-\infty})n(Y_2^{-\infty})\gamma|r_2^{-\infty}|dX_2^{-\infty}.$$

We substitute  $Y_2^{-\infty} = X_2^{-\infty} - r_2^{-\infty}$  and the linear variation of the concentration, neglecting quadratic terms in the gradient. By integrating, we find a flux

$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\gamma|r_2^{-\infty}|dr_2^{-\infty}dr_3^{-\infty},$$

where  $\mathcal{H} = n_0^2\Delta X_2 - n_0 \frac{\partial n}{\partial r_2} (-\Delta X_2^2 - r_2^{-\infty} \Delta X_2)$ . The first term vanishes, as averaging over the collisions there is no

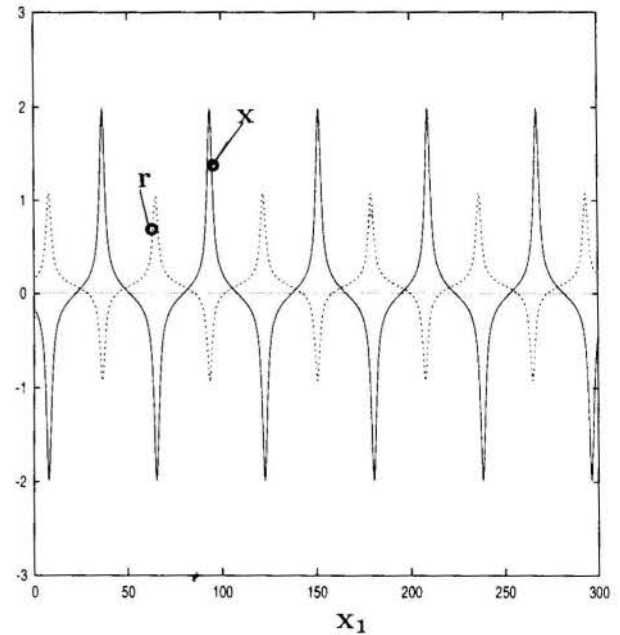


Figure 1: Periodic orbits of the particle. The dashed line is the transversal relative coordinate of the particles  $r_2$ ; the solid line is the transversal coordinate of one of the particles  $x_2$ .

net displacement. Hence the flux is proportional to the concentration gradient, with the coefficient of proportionality being a diffusivity.

Non-dimensionalising the lengths in the integrand with  $a$ , we have the diffusivities

$$D_2^c = 2D_2^s + \mathcal{K}(\phi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_2^{-\infty} \Delta X_2 |r_2^{-\infty}| dr_2^{-\infty} dr_3^{-\infty}.$$

with  $\mathcal{K}(\phi) = \frac{3}{4\pi} a^2 \gamma \phi$ . One of the two  $D_2^s$  is the standard contribution of the random walk to a flux down a concentration gradient which is analogous to what was calculated by Cunha (1993). The other  $D_2^s$ , together with the final integral, is due to the slightly higher concentration of particles colliding on one side of a test sphere systematically nudging it across the streamlines towards the lower concentration.

### RESULTS AND DISCUSSIONS

The governing equations for the trajectories of the pair of particles were integrated numerically using a fourth-order Runge-Kutta scheme. The choice of the time was dependent on the separation between the spheres, and it must be chosen so that the relative separation does not change significantly in one step. After several preliminary tests of our computer simulations we decide the dimensionless time steps as being:  $\Delta t = 0.01$  for  $r > 2.5$  (far field),  $\Delta t = 0.005$  for in the intermediate region  $2.01 < r < 2.5$ , and  $\Delta t = 0.001$  in the lubrication region  $2 < r < 2.01$ . One test of the integration with the closed doublet starting form  $r_1 = -3$ ,  $r_2 = 0.1$ ,  $r_3 = 0.1$  is presented in Figure 1. The results show that there is no loss in amplitude over more than five cycles, when the suspension is undergoing purely viscous condition (i.e. roughness effects are absent). This periodic behaviour is an interesting illustration of the symmetry imposed by the time reversibility of the Stokes flow. Figure 2 shows some typical trajectories of one sphere relative to the other in the  $r_1 r_2$  plane. In contrast to the reversible situation in Figure 1, the relative trajectories of



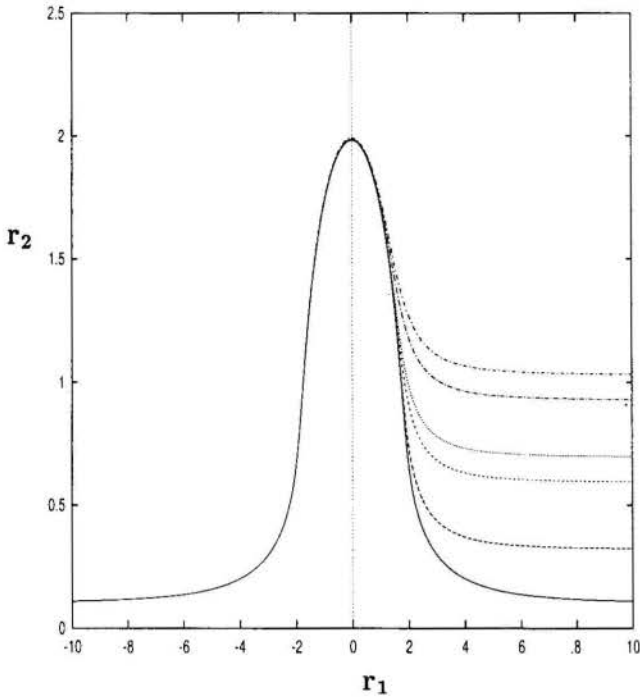


Figure 2: The effect of roughness on particle trajectories in the  $r_1 r_2$ -plane. The initial conditions are  $r_1 = -10$  and  $r_2 = r_3 = 0.1$ . The different curves correspond to different values of the roughness. Following from the lower curve to the top curve, the roughness related to each curve are respectively:  $\epsilon = 0$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$ ,  $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$ ,  $\epsilon = 10^{-2}$ .

the spheres are significantly modified if irreversible surface interaction occur as a consequence of the surface roughness. A notable feature of the set of the relative trajectories is that the trajectories passing exceedingly close to the minimum separation of the surface roughness, a roughness equal to  $10^{-4}a$  is sufficient to break trajectories symmetry imposed by time reversibility of the creeping flow. For the trajectory starting at  $r_1 = -10$  and  $r_2 = r_3 = 0.1$ , the minimum separation of the smooth spheres was found to be  $4.75 \times 10^{-5}a$ . It is seen that once the surface roughness  $\epsilon$  is greater this minimum separation the spheres separate on streamlines further apart on their approach.

We note that since the trajectories crowd considerably during the collision, quite small displacement by the roughness across the crowded trajectories produces a large displacement across the streamlines. Cunha and Hinch (1996) estimated the scaling of this crowding of the trajectories. They found that trajectories with separation  $\delta(\epsilon) = O(\epsilon^{0.1093}(\ln(1/\xi) + 1.347)^{-0.1753})$  crowd together to an  $\epsilon$  separation as the spheres pass. To calculate the diffusivity  $D_2^c$ , we need to evaluate the net displacement across streamlines caused by collision. Numerical computations follow the trajectory  $\mathbf{r}(t)$  starting the spheres at a great separation on approaching streamlines,  $r_1 \rightarrow -\infty$ , with  $r_2^{-\infty} > 0$ , and integrating until the spheres are again at large separations, now on the receding streamline  $x \rightarrow \infty$ . Using the centre of mass motion given earlier, we find the net streamline displacement of the test sphere is  $\Delta X_2 = X_2^{+\infty} - X_2^{-\infty} = \frac{1}{2}(r_2^{+\infty} - r_2^{-\infty})$ . To avoid computations to very large separations, which take long time on the slow trajectories with  $r_2$  small, we use two extrapolations from a more moderate value of the separations,  $r_1 = \pm 10$ . The cal-

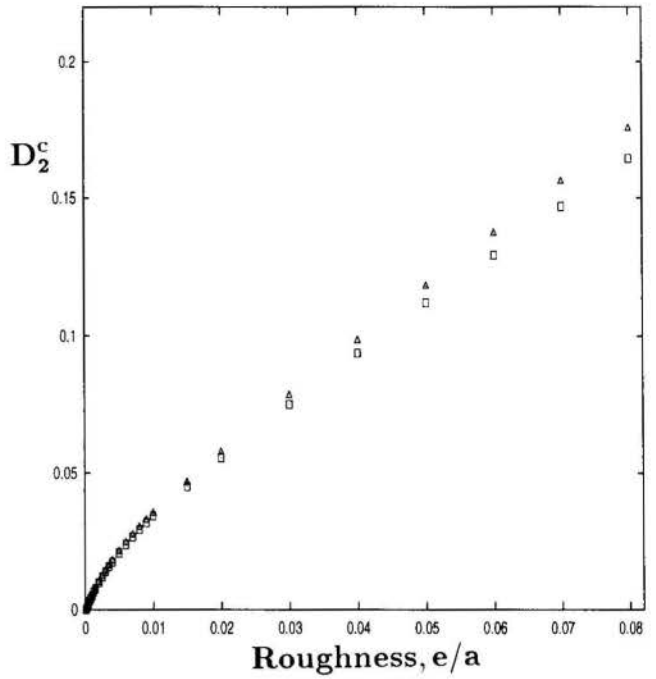


Figure 3: Down-gradient diffusivity divided by  $\phi a^2 \gamma$ . The squares are the results for the model with only a normal force and the triangles for the alternative model with the two spheres locked together.

ulation of these asymptotic solutions are describe in Cunha and Hinch (1996). Applying the extrapolation, the eventual streamline position is found with an error of less than  $10^{-3}$ . The diffusivities were calculated by using numerical integration over a grid of  $r_2^{-\infty} r_3^{-\infty}$  points. Since the domain of integration was regular and  $\Delta X_2$  was found to be a smooth function, the diffusivity integral was performed breaching up it into repeated one-dimensional integrals being solved by means of a sequence of trapezoidal scheme. The spacing of 0.05 between points produced an error less than 0.1%. All computer simulations were performed for values of surface roughness ranging  $10^{-4}$  to  $8 \times 10^{-2}$  which is consistent with the experimental range of roughness reported by Smart and Leighton (1989). Figure 3 shows the dependence of the diffusivity  $D_2^c$  for down-gradient diffusion upon the surface roughness. This coefficient characterizes the migration of spheres normal to the direction of fluid motion within the plane of shear in the presence of a small gradient in concentration. The dispersion of particles in the plane normal to the plane of shear (parallel to the vorticity direction) was also investigated by Cunha and Hinch (1996). We note that the diffusivities for self-diffusion (pure random walk) differ from those for down-gradient diffusion, and both are zero in the dilute limit of  $\phi = 0$ , in contrast to the results for Brownian diffusion in dilute suspension. This is because interactions between the particles are essential for the hydrodynamic diffusion considered here, whereas Brownian diffusivities are finite and not affected by particle-particle interaction in the dilute limit. We find that down-gradient diffusivities are larger than self diffusivities by a factor of 5. This is associated in part with the fact that a test sphere moving into regions of higher concentration experience a extra rate of collisions compared to those regions of lower concentration.

Finally, it is seen that the two different models of the effect of roughness produce very similar results with the

first model which considers just a normal force in the compressional quadrant producing a slightly smaller diffusivity. Based on the discussion of Cunha and Hinch (1996) of the large  $\delta(\epsilon)$  displacements in the final streamline caused by a small surface roughness  $\epsilon$ , we found that the diffusivity follows approximately the functional relation  $D_2^s \propto \phi \gamma a^2 \epsilon^{0.4374} (\ln(1/\epsilon) + 1.347)^{-0.7012}$ , over the range  $10^{-4} \leq \epsilon \leq 10^{-3}$ . We have no experimental results with which to compare our prediction.

Scanning electron micrographs of non-Brownian glass spheres of  $600 \mu\text{m}$  in diameter are shown in Figure 4. The pictures illustrate details of irregularities associated with surface roughness and deviation of the particles from their spherical form. The last two pictures show two distributions of the surface irregularities for small (i.e.  $\sim 10^{-4}a$ ) and large roughness (i.e.  $10^{-3}a$ ). The pictures were taken from the electron microscopy unit in Cambridge University, Department of Biology. We use  $5 \text{ V}$  of the electron microscope and full focus. During the observations the spheres were jet washed in alcohol and air dried. Future studies should investigate the interaction between two smooth non-spherical particles. An important feature is to know whether the largest  $O(\phi)$  term of the diffusivity is due to the particle shape anisotropy, surface roughness or three-particle interactions breaking symmetry. Although our theoretical analysis has been restricted to dilute suspension for which pairwise interactions between the spheres may be used, it is hoped that the insights gained from the treatment of the roughness effects may be useful for more general problem.

#### REFERENCES

- Acrivos, A., Batchelor, G.K., Hinch, E.J., Koch, D.L., and Mauri, R., 1992, "Longitudinal shear-induced diffusion of spheres in a dilute suspension", *J. Fluid Mech.*, **240**, pp. 651-657.
- Arp, P.A., and Mason, S.G., 1977, "The kinetics of flowing dispersions. IX. Doublets of rigid spheres", *J. Colloidal Interface Sci.*, **61**, pp. 44-61.
- Batchelor, G.K., and Green, J.T., 1972, "The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field", *J. Fluid Mech.*, **56**, pp. 375-400.
- Bossis, G., and Brady, J.F., 1987, "Self-diffusion particles in concentrated suspensions under shear", *J. Chem. Phys.*, **87**, pp. 5437-5448.
- Cunha, F.R., and Hinch, E.J., 1996, "Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres", *J. Fluid Mech.*, **309**, pp. 211-223.
- Cunha, F.R., 1993, "Transversal shear-induced self-diffusion in a dilute suspension", *Proceedings, 12<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Brasilia, **2**, pp. 981-984.
- Cunha, F.R., 1994, "Hydrodynamic dispersion in suspensions", Ph.D. Thesis, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge University, UK.
- Davis, R.H., 1992, "Effects of surface roughness on a sphere sedimenting through a dilute suspension of neutrally buoyant spheres", *Phys. Fluids*, **A4**, pp. 2607-2619.
- Eckstein, E.C., Bailey, D.G., and Shapiro, A.H., 1977, "Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension", *J. Fluid Mech.*, **79**, pp. 191-208.
- Leighton, D.T., and Acrivos, A., 1987, "The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions", *J. Fluid Mech.*, **181**, pp. 415-439.
- Smart, J.R., and Leighton, D.T., 1989, "The measurement of the hydrodynamic surface roughness of non-colloidal spheres", *Phys. Fluids A*, **1**, pp. 52-60.

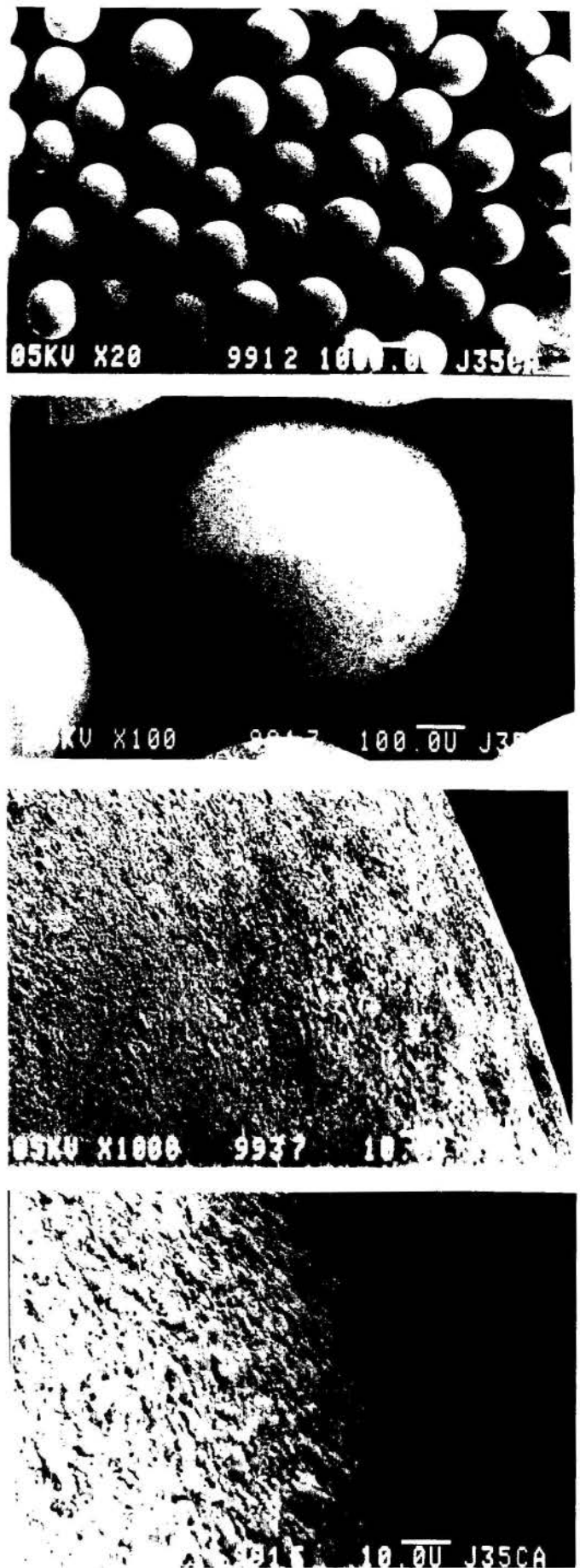


Figure 4: Scanning electron micrographs of non-Brownian glass spheres of  $600 \mu\text{m}$  in diameter (Cunha 1994).



## SEDIMENTAÇÃO NA REGIÃO DE TRANSIÇÃO NA ENTRADA DE TUBOS DE SEÇÃO QUADRADA E RETANGULAR

Carlos Alberto Soares, Harry Edmar Schulz\*,  
Woodrow Nelson Lopes Roma, Luiz Di Bernardo

(\*Departamento de Hidráulica e Saneamento, EESC-USP, Av. Dr. Carlos Botelho 1465,  
13560-270, C.P.359, São Carlos, São Paulo, Brasil. (\*Membro da ABCM)



### RESUMO

*As necessidades no tratamento de águas de abastecimento e efluentes geram problemas que pedem soluções simples e viáveis para implantação. Isto ocorre na otimização de sedimentadores (decantadores) de estações de tratamento existentes que operam em condições extremas. Atualmente testa-se a sedimentação em tubos, dispostos ao longo do escoamento, inclinados, que diminuem o tempo de queda dos sólidos (menor altura de sedimentação) e aumentam a capacidade dos decantadores. Neste texto calculam-se trajetórias de sólidos que sedimentam na região de entrada de tubos quadrados e retangulares, visando o estabelecimento de padrões de projeto para tais decantadores. Abordam-se situações usuais de trabalho. Vê-se que toda a sedimentação pode ocorrer na região de entrada. Assim, precisa-se de critérios de projeto que considerem esta região.*

### INTRODUÇÃO

A sedimentação pela ação da gravidade é um dos métodos mais difundidos para reduzir a quantidade de partículas suspensas na água, nas estações de tratamento de água. Hazen (1904) talvez tenha sido o primeiro a apresentar as conclusões de suas observações e estudos de forma organizada, sendo, por isso, uma obra de referência clássica no tema. Hazen (1904) abordou os decantadores tradicionais, compostos de tanques, projetados para determinada vazão de água a ser tratada. Posteriormente Camp (1946) desenvolveu estudos mais detalhados acerca dos processos de decantação, propondo metodologias para analisar as características da sedimentação de suspensões e um modelo para converter os resultados obtidos em parâmetros aplicáveis ao estudo de decantadores convencionais. A necessidade de aumentar a capacidade de decantação nas estações de tratamento, que foram se tornando obsoletas ou subdimensionadas com o aumento exagerado dos centros urbanos, exigiu a criação de metodologias alternativas para acelerar o processo de sedimentação. Yao (1970) apresenta um estudo pioneiro no qual a sedimentação de alta taxa, assim denominada a sedimentação que ocorre no interior de tubos, foi inicialmente quantificada para situações de perfis de velocidade totalmente desenvolvidos. Os estudos mostram que os escoamentos de interesse prático são laminares, permitindo uma abordagem analítica rigorosa. Yao (1970) concentrou sua atenção em tubos circulares e canais entre placas planas paralelas. Apesar de ter sido fornecida uma primeira formulação com algumas simplificações muito a favor da segurança, os conceitos que foram então utilizados permanecem válidos. A questão da exagerada segurança desagrada, sobretudo, aos engenheiros que se utilizam dos conceitos de Yao (1970), uma vez que o aumento na segurança implica em aumento no custo das obras a serem executadas nas estações de tratamento de água. A evidência prática de que a teoria em uso superdimensiona as estruturas projetadas foi demonstrada por Di Bernardo e Cunha (1991), cujo trabalho veio corroborar o estudo teórico de Fadel e Baumann (1990), que demonstraram que uma parcela do processo de sedimentação podia ocorrer em situação de regime não desenvolvido, na entrada dos tubos. Fadel e Baumann

(1990) estudaram a sedimentação em tubos de seção circular na região de transição do escoamento, de perfil plano para perfil parabólico, na situação de regime laminar. Como, na prática, também são utilizadas estruturas de tubos quadrados e retangulares, Soares (1992) realizou um estudo amplo acerca das características do escoamento e do processo de sedimentação na região de transição de escoamentos em dutos de seção retangular e quadrada, cujos resultados apontam para a necessidade de estabelecer novos padrões de projeto das estruturas de sedimentação em decantadores de alta taxa. O presente trabalho apresenta alguns dos principais resultados e conclusões levantados sobre o tema até o momento. Os estudos estão sendo realizados no Departamento de Hidráulica e Saneamento da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

### METODOLOGIA

A resolução do problema de transferência de massa decorrente da sedimentação foi efetuada para a situação ideal na qual o escoamento do fluido não é perturbado pela presença das partículas. Embora esta seja uma situação simplificada, trata-se de uma boa aproximação para as situações nas quais a concentração de partículas no meio líquido não é muito elevada. Esta situação é geralmente encontrada nos casos de estações de tratamento de água. Caso a concentração de partículas seja elevada, um primeiro problema que pode ocorrer é o aparecimento de correntes de densidade que deslocam grandes massas de líquido, distorcendo o perfil de velocidades em relação àquele da situação ideal. Um segundo problema é que as interferências das características das partículas, quanto a serem discretas ou floculentas, tornam-se mais pronunciadas para as altas concentrações, sendo necessário efetuar uma modelação mais detalhada do fenômeno de sedimentação.

Assim, reconhecida a situação de o processo de sedimentação não interferir no escoamento do fluido, torna-se possível quantificar o perfil de velocidade do escoamento e sobrepor, posteriormente, a sedimentação das partículas para estudar as suas trajetórias. A quantificação do perfil de velocidades na região de transição entre a entrada do tubo e a situação de escoamento desenvolvido não é, contudo, um problema trivial. As soluções encontradas na literatura são



aproximadas, baseadas em linearizações convenientes das equações de Navier-Stokes. Aqui utilizou-se o procedimento proposto por Langhaar, citado por Han (1960), para quantificar os perfis de velocidade, a evolução da pressão e o comprimento da região de transição em tubos de seção quadrada e retangular. Han (1960) apresenta detalhadamente o seu procedimento de cálculo, bem como os seus resultados, sendo possível reproduzi-los com precisão. As relações entre base e altura das seções retangulares aqui estudadas abrangem as relações estudadas por Han (1960), sendo possível complementar informações a partir desta referência.

A principal relação para o cômputo das velocidades em cada ponto da seção quadrada ou retangular, na região de transição, é apresentada na Eq.(1).

$$\frac{u}{U} = \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{\sum_{m,n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} \cos(m\pi x / 2a) \cos(n\pi y / 2b)}{mn[m^2 + n^2(a/b)^2 + (2\beta a / \pi)^2]}}{\sum_{m,n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn[m^2 + n^2(a/b)^2 + (2\beta a / \pi)^2]}} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

onde  $u$  representa a velocidade em cada ponto  $(x,y)$ ,  $U$  é a velocidade média na seção transversal,  $2a$  e  $2b$  são, respectivamente, a altura e a largura da seção transversal,  $x$  é paralelo ao lado  $2a$  e  $y$  é paralelo ao lado  $2b$ .  $\beta$  é um parâmetro que decorre da linearização efetuada, o qual assume o valor zero para perfil de velocidade completamente desenvolvido e tende a  $\infty$  para perfil de velocidade uniforme.  $\beta$  é uma função da distância a partir da entrada do tubo, a qual é determinada por aproximação numérica.

Neste trabalho admite-se que a velocidade de sedimentação ( $V_s$ ) atinge seu valor terminal imediatamente após o lançamento da partícula no escoamento. Além disso, interessa estabelecer a trajetória da partícula lançada na posição mais desfavorável do tubo, ou seja, aquela partícula que ocupa o maior comprimento do tubo para sedimentar e que determinará o comprimento necessário do sedimentador. Assim, o procedimento seguido foi o de acompanhar esta única partícula no escoamento, não interessando as demais partículas que compõe a mistura que entra no sedimentador, uma vez que sedimentam em espaços menores. Para o cálculo das trajetórias o procedimento seguido foi baseado naquele de Fadel e

Baumann (1990), com as modificações necessárias devido às alterações de geometria e devido às características próprias do programa computacional aqui desenvolvido.

Os passos para o cálculo da trajetória podem ser assim resumidos:

- 1- Considera-se a partícula entrando no ponto A, seção I, da figura 1.
- 2- A partícula atinge o ponto B na seção II, a uma distância  $\Delta z$  da origem.
- 3- Considera-se que a distância de sedimentação entre A e B é  $\Delta y_0 = 0,05b$  (primeira aproximação).
- 4- A partir do  $\Delta z$  desejado, calcula-se  $\beta$  e o perfil de velocidade nas seções I e II.
- 5- Admite-se a velocidade da partícula na direção do escoamento como sendo
 
$$V_m = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$
 As velocidades estão indicadas na figura 1.
- 6- Calcula-se o tempo necessário para a partícula ir do ponto A para o ponto B como  $\Delta t = \frac{\Delta z}{V_m}$
- 7- Calcula-se a distância de sedimentação a partir de  $\Delta y_1 = V_s \cdot \Delta t$
- 8- Compara-se  $\Delta y_1$  e  $\Delta y_0$ . Se a diferença for maior que um erro pré-estabelecido, impõe-se  $\Delta y_0 = \Delta y_1$  e repetem-se os passos 5 a 8. Caso contrário, executa-se o passo 9.
- 9- A velocidade  $V_4$  passa a ser a velocidade  $V_1$  para o trecho entre as seções II e III.
- 10- Repetem-se os passos aqui descritos para o trecho II e III e, sucessivamente, para os demais trechos, até que o fundo do tubo seja atingido ou até atingir o comprimento de transição para esta situação de escoamento.
- 11- A soma dos comprimentos incrementais  $\Delta z$  fornece o comprimento necessário para a sedimentação da partícula.

Tanto o cálculo dos perfis de velocidade como da trajetória das partículas foram efetuados utilizando micro-computadores.

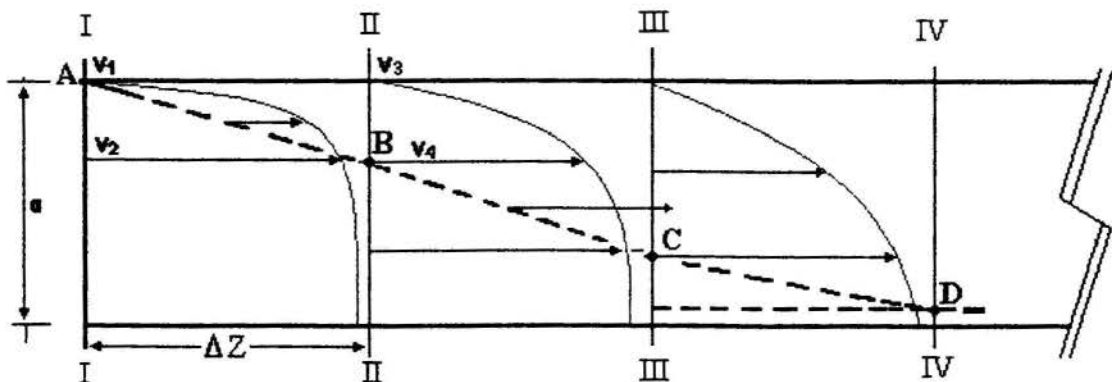


FIGURA 1 - Esquema da passagem da partícula dentro do duto, baseado em Fadel e Baumann (1990).

**SITUAÇÃO DE TRABALHO**

Nos resultados aqui apresentados, as faixas de trabalho utilizadas foram estabelecidas a partir de uma situação básica na qual se fixou o número de Reynolds de referência ( $Re_b$ ) como sendo 579,12 e a velocidade de sedimentação de referência ( $V_{s_b}$ ) como sendo 0,00051 m/s. O número de Reynolds foi fixado a partir de dimensões de base e altura das seções dos tubos, velocidade média do escoamento e viscosidade, próximas às de trabalho e de resultados da literatura. Outros números de Reynolds ( $Re$ ) e velocidades de sedimentação ( $V_s$ ) foram definidos a partir dos valores de referência. Representando a dimensão da base por  $2b$  e a dimensão da altura por  $2a$ , as simulações aqui apresentadas foram realizadas para as seguintes situações de trabalho:

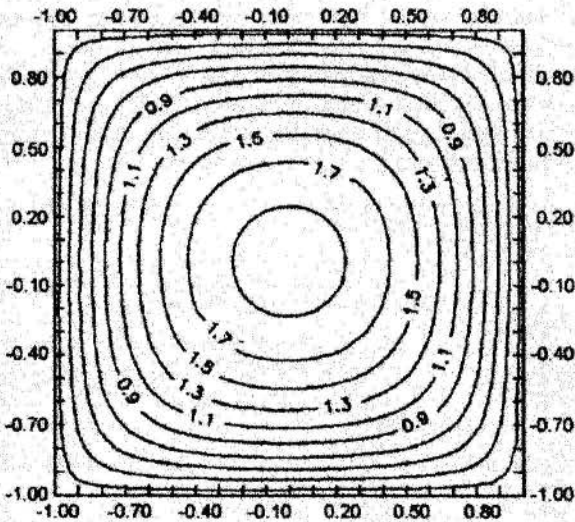
- i - Quanto à relação  $a/b$  foram usados valores de 1,0; 0,75; 0,50; 0,25; 0,125 e 0,0.
- ii - Quanto à relação  $Re/Re_b$  foram usados valores de 0,25; 0,50; 1,0; 2,0; 5,0 e 10,0
- iii - Quanto à relação  $V_s/V_{s_b}$  foram usados valores de 0,25; 0,50; 1,0 e 2,0.
- iv - Quanto à inclinação do tubo, todos os cálculos foram feitos pra tubos horizontais.

A definição do número de Reynolds utilizada neste trabalho é:

$$Re = \frac{4ab V}{(a + b) \nu} \quad (2)$$

**RESULTADOS**

A figura 2 mostra isótacas calculadas a partir da Eq.(1) para relação  $a/b=1$ , na seção do tubo que se encontra a iguais distâncias do início e do fim do comprimento de transição. Os resultados mostram-se coerentes com medidas efetuadas por diferentes autores, como Goldstein e Kreid (1967) e Sparrow et al. (1964). Os valores indicados correspondem à razão entre a velocidade pontual e a velocidade média.





A figura 5 mostra trajetórias de sedimentação para  $a/b=1,0$ , considerando diferentes relações  $Re/Re_b$ . A figura 6, por sua vez, apresenta resultados semelhantes para  $a/b=0,75$ . Observa-se, por comparação, que os tubos com relação  $a/b$  próxima a  $1,0$  necessitam geralmente de comprimentos maiores do que os tubos cuja relação  $a/b$  é mais próxima de  $0,0$  para que ocorra a sedimentação (há, contudo uma ressalva concernente ao uso de sedimentadores cujo comprimento coincide com aquele da região de transição, indicada na figura 8). Também são apresentados, nas figuras 5 e 6, os comprimentos de transição para os escoamentos com o número de Reynolds básico. Conclui-se, assim, que em sendo a forma e o comprimento parâmetros que possam ser controlados no projeto (quando independer de dimensões de tubos padronizadas pelo fabricante, por exemplo), convém optar por tubos de seção retangular  $a/b < 1$ .

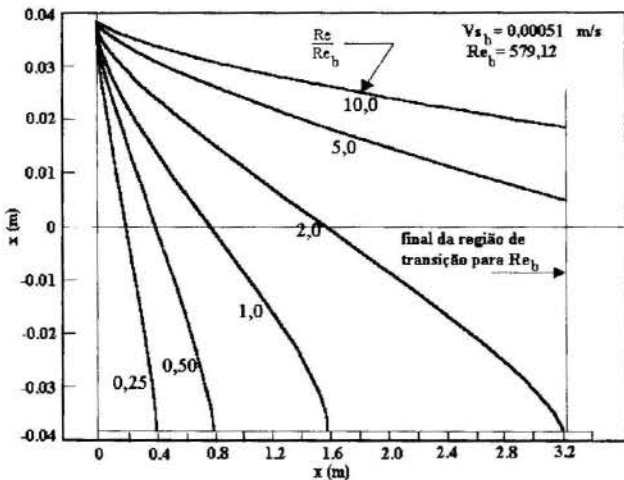


Figura 5 - Trajetórias de partículas em tubo com  $a/b=1$ , para diferentes relações  $Re/Re_b$ . ( $a=b=0,038\text{ m}$ )

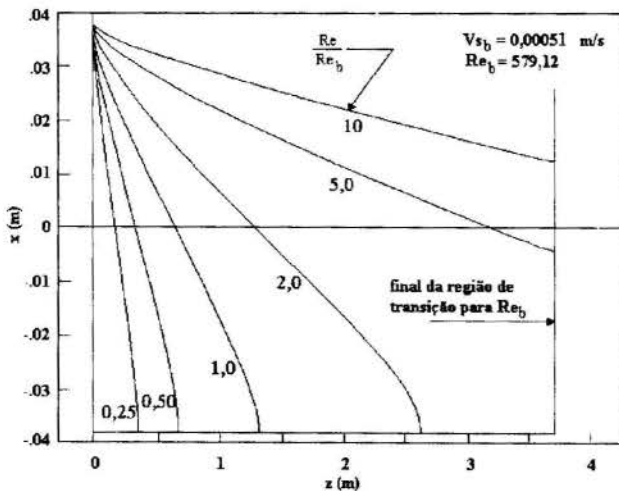


Figura 6 - Trajetórias de partículas em tubo com  $a/b=0,75$ , para diferentes relações  $Re/Re_b$ . ( $a=0,038\text{ m}$ )

A figura 7 mostra trajetórias de sedimentação para  $a/b=1,0$ , para diferentes relações  $V_s/V_{s_b}$ . Observou-se mais uma vez que os tubos com relação  $a/b$  próxima a  $1,0$  necessitam geralmente de comprimentos maiores do que os tubos cuja relação  $a/b$  é mais próxima de  $0,0$ , para que ocorra a sedimentação. Novamente indica-se, na figura, o comprimento de transição para  $Re_b$ .

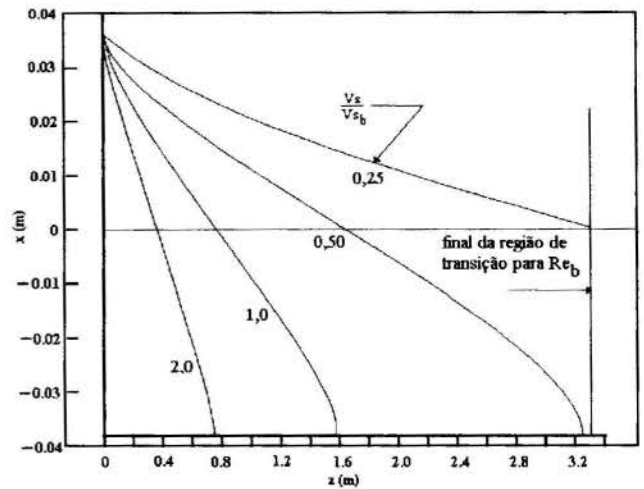


Figura 7 - Trajetórias de partículas em tubo com  $a/b=1$ , para diferentes relações  $V_s/V_{s_b}$ . ( $a=b=0,038\text{ m}$ )

Nas figuras 3 a 7 observa-se que existem situações de sedimentação (que englobam uma grande porcentagem das situações práticas) nas quais todo o processo de queda da partícula ocorre enquanto a mesma se encontra no interior da região de transição **entre** o perfil de velocidades plano e o perfil desenvolvido, após a entrada do tubo. Portanto, o uso indiscriminado de formulações simplificadas, que consideram apenas a velocidade média ou o perfil de velocidades plenamente desenvolvido, pode conduzir a erros de projeto, caso fatores de correção que considerem os resultados obtidos com a presente formulação não sejam adotados.

A figura 8, por sua vez, mostra que, mantendo o número de Reynolds constante, o comprimento de transição apresenta um ponto de máximo em variando a relação  $a/b$ . Em se desejando que todo o processo de sedimentação ocorra na região de transição (a partir de critérios de projeto), observa-se que há uma situação ótima que pode ser explorada. Maiores comprimentos de transição implicam que partículas com menores velocidades de sedimentação podem ser removidas, considerando, evidentemente, a situação na qual a partícula lançada na posição mais desfavorável atinge ao mesmo tempo o final da região de transição e o final do sedimentador.

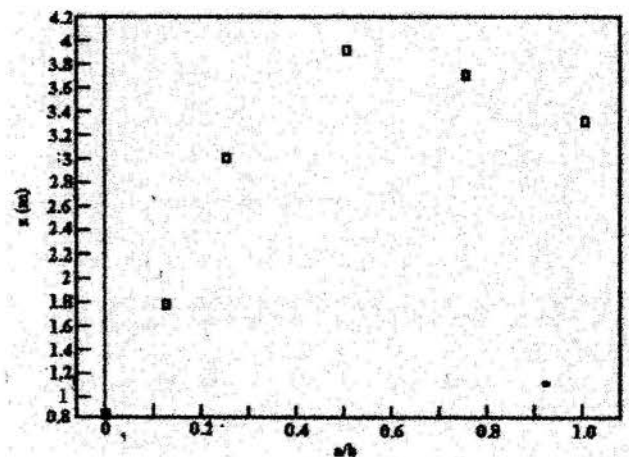


Figura 8 - Os pontos indicam valores de comprimentos de transição calculados para diferentes valores de  $a/b$ , para número de Reynolds mantido constante.

## CONCLUSÕES

Os resultados permitiram observar que, para uma grande gama de situações de sedimentação em tubos de seção quadrada ou retangular, todo o processo de sedimentação ocorre na região de transição entre a entrada do tubo e a região de escoamento plenamente desenvolvido. Este fato mostra que critérios de projeto de decantadores de alta taxa que se fundamentam em situações de escoamento médio ou de escoamento plenamente desenvolvido são simplificações cuja validade é questionável.

Observou-se que para a região de transição há a tendência de os tubos de seção quadrada necessitarem de um comprimento maior, em relação aos tubos retangulares, para que ocorra a sedimentação da partícula lançada na posição mais desfavorável.

Observou-se que a área efetiva do sedimentador na qual o sedimento se deposita é menor do que a área disponível, com excessão dos sedimentadores de placas planas paralelas horizontais. Caso a homogeneidade da distribuição dos sedimentos sobre o fundo do sedimentador se mostre como um fator relevante nos critérios de projeto, as considerações aqui tecidas permitem uma quantificação mais segura desta característica.

A região de intrusão de partículas no sedimentador foi convenientemente quantificada, mostrando que partículas lançadas em diferentes posições apresentam diferentes comprimentos de sedimentação. Nos estudos aqui efetuados, a posição mais desfavorável sempre localizou-se no ponto superior do plano longitudinal vertical central do tubo.

A adequação das metodologias de projeto ora em uso é assunto que se encontra em discussão. Os resultados aqui apresentados quantificam algumas variáveis relevantes para a sedimentação de alta taxa e permitem encaminhar as discussões de forma mais objetiva.

## AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos à FAPESP, CNPq e CAPES, pelos auxílios e bolsas que permitiram a execução deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Camp, T.R. 1946, "Sedimentation and the Design of Settling Tanks". *ASCE Transactions*, Vol 111, p.895.
- Di Bernardo, L. e Cunha, F.H.R. 1991, "Investigação Experimental sobre o Uso de Dutos com Seção Retangular na Decantação de Alta Taxa". *16º Congresso Brasileiro de Engenharia Sanitária e Ambiental-ABES*, Vol 2, pp. 41-50.
- Fadel, A.A. e Baumann, E.R. 1990, "Tube Settler Modeling". *JEE-ASCE*, Vol 116(1), pp. 107-124.
- Goldstein, R.J. & Kreid, D.K. 1967, "Measurement of Laminar Flow Development in a Square Duct using a Laser-Doppler Flowmeter". *Journal of Applied Mechanics*, pp. 813-818.
- Han, L.S. 1960, "Hydrodynamic Entrance Lengths for Incompressible Laminar Flow in Rectangular Ducts". *Journal of Applied Mechanics*, pp.403-409.
- Hazen, A. 1904, "On Sedimentation". *ASCE Transactions*, Vol 53, p.45-88.
- Soares, C.A. 1992, "Sedimentação de Partículas Discretas na Zona de Transição em Dutos de Seção Quadrada e Retangular". Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos para obtenção do Título de Mestre. 96 p.
- Sparrow, E.M., Lin, S.J., Lundgren, T.S. 1964, "Flow Development in the Hydrodynamic Entrance Region of Tubes and Ducts". *Journal of Physics of Fluids*, Vol 7, No.3, pp. 338-347.

Yao, K.M. 1970, "Theoretical Study of High-Rate Sedimentation". *JWPCF*, Vol 42(2), p.218.

## SUMMARY

*The growing demands on water and wastewater treatment generate problems which need simple yet useful solutions. This is the case of optimization of existing settling tanks, which are operating at extreme conditions. Nowadays sedimentation within tubes placed in the settling tank (the so called "high rate sedimentation") is being tested to increase the capacity of existing tanks. In the present study the sedimentation paths of discrete particles within square and rectangular ducts are calculated, considering the transition region of the flow (or entrance zone) for such ducts. It is shown that a substantial part of sedimentation processes may occur within the entrance zone of the settling duct, and that design procedures must take this fact into account.*

A NUMERICAL METHOD FOR THE SIMULATION OF SEDIMENTING  
PARTICLES WITH IMPENETRABLE BOUNDARIES



**Francisco Ricardo da Cunha**  
Department of Mechanical Engineering  
University of Brasília - 70910 900 - Brasília - DF - Brazil



SUMMARY

*A method for computing the hydrodynamic interactions among an infinite sedimenting suspension of particles, under condition of vanishingly small Reynolds number, is presented. We show how to include the long range interactions into periodic and fixed boundary conditions a highly non-trivial problem. The numerical method based on point-like particles with some excluded volume is carefully tested before rather applications are presented. The accuracy of the method is illustrated by comparing with the known exact results for spatially random suspensions and with the limited experimental data available.*

INTRODUCTION

Calculating the interactions among a large number of hydrodynamically interacting particles at zero particle Reynolds number is complicated by the long-range nature of interactions. The fluid velocity disturbance on which a net external force acts (i.e. the gravity) decays as  $1/r$ , where  $r$  is the distance from the particles. A large collection of such forced particles (as in an infinite sedimenting suspension), results in a severely non-convergent sum of interactions. The sedimentation velocity cannot be found simply by adding up the contributions from all the pair interaction in which a test sphere takes part. This procedure results velocity of a test particle which diverges as  $L^2$ , where  $L$  is the size of the system. The origin, significance and interpretation of the convergence difficulties and methods of renormalization for overcoming it, resulting in well-posed, absolutely convergent expression for the sedimentation velocity is described by Batchelor (1972) and Hinch (1977). When on attempts to study the behaviour of suspensions through dynamic simulation, however, these methods are not suitable because the preaverage the interactions. The long-range nature of the hydrodynamic interactions in sedimentation requires care to simulating an infinite suspension. For computational efficiency it is essential that the sums or integrals associated with the particle interactions are cast into a form which converges rapidly. At the present the more appropriated way is by using periodic boundary conditions which permits representing an infinite suspension as a spatially periodic array of identical cells. With the use of periodic boundaries the sum of particles interactions becomes lattice sums, and Ewald (1921) summation technique can be applied to accelerate their convergence. The idea is closely connected to the theoretical procedure of renormalization introduced by O'Brien (1979) and in a new version applied to Stokes flows by Brady and Bossis (1988).

The present work presents the fundamental aspects of a method to simulate a suspension of point particles with excluded volume repulsion sedimenting in a regular box with periodic sides and impenetrable bottom and top. In this direction we expect a progress beyond the generalities of rational mechanics where usually the transport properties are not well-defined physically.

METHOD

In this section a method is presented for constructing hydrodynamic interaction among  $N$  sedimenting particles

in a dilute suspension under condition such that the particle Reynolds number is small, so that the fluid motion is governed by Stokes' equations. In addition, we consider the limit case where Péclet number is high which corresponds to a suspension of non-Brownian particles,  $Pe = \frac{\rho U_s a}{\mu} = \frac{6\pi\mu a^2 U_s}{kT} \gg 1$ , where  $U_s$  is the sedimentation velocity of a single sphere and  $D$  is the ordinary diffusivity of a very dilute dispersion of independent spheres of radius  $a$  as first derived by Einstein.

A Periodic Stokes Flow. Owing to the long range of the velocity disturbance in a dilute sedimenting suspension, the interest here is in particle interactions at separation that are large compared with particle radius. The simplest level of approximating the hydrodynamic, a point-force approximation is considered with the fluid velocity governed by

$$-\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \sum_{\alpha} \mathbf{f} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}) \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Thus, with an error  $O(\phi)$  in the sedimentation velocity of the particles, we have neglected the finite size of the spheres, looking the suspension as an distribution of point forces. Here  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha})$  denotes Dirac's delta function, and  $\mathbf{f}$  is the hydrodynamic force exerted on the particle  $\alpha$  by the fluid.

Consider now condition with no mean flow, i.e.  $\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{0}$ . Taking an average of the first equation in (1) we find an expression for the mean pressure gradient,  $\langle \nabla p \rangle = \langle \sum_{\alpha} \mathbf{f} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}) \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \int_{\alpha} \mathbf{f} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}) d\mathbf{x} = n \bar{\mathbf{f}}$  or  $\langle p \rangle = n \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{x}$ , which is the macroscopic hydrostatic balance between the average pressure gradient and the average force the particle exert on the fluid. In particular the result suggests that in point-particle approximation the pressure  $p$  in (1) must be adjusted to reflect the macroscopic increase in the density of the fluid  $\phi \Delta \rho = n |\bar{\mathbf{f}}| / g$ . In view of this the pressure is decomposed into a periodic part  $p'(\mathbf{x})$  and a linear part  $\langle p \rangle$  in the following manner  $p(\mathbf{x}) = \langle p \rangle + p'(\mathbf{x})$ . Substituting the value of the reduced pressure  $p'(\mathbf{x})$  into (1) one obtains

$$-\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p' = \sum_{\alpha} \mathbf{f} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}) - \bar{\mathbf{f}} n. \quad (2)$$

Consider now the solution of the equations (1) in a rectangular box of dimensions  $L \times L \times 2H$  which satisfies the following periodic boundary conditions

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}) & \text{periodic in } x \text{ and } y \text{ with period } L \\ u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}) & \text{periodic in } z \text{ with period } 2H \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) & = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{\alpha}) \end{cases}$$

where  $u, v, w$ , are the velocity components of the fluid motion in the direction  $x, y, z$  respectively. For this purpose, it is convenient to introduce three-dimensional finite Fourier transforms of the velocity  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  and the pressure field, according to equations  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\vartheta} \int_{b_{0\alpha x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$  and  $\hat{p}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\vartheta} \int_{b_{0\alpha x}} p'(\mathbf{x}) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$ . Now taking the Fourier transform of (1), ones obtain respectively that  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0$ , and

$$4\pi^2 \mu k^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) - 2\pi i \mathbf{k} \hat{p}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\vartheta} \sum_{\alpha} \mathbf{f} e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}} - n \bar{\mathbf{f}} \delta(\mathbf{k}). \quad (3)$$

The sum on the right hand side of the equation (3) is, except for the multiplying factor  $1/\vartheta$ , precisely a summation of  $\delta$ -functions over the reciprocal lattice points  $\sum_{\alpha} e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}} = \frac{1}{\vartheta} \sum_{\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\beta})$  and  $\frac{1}{\vartheta} \sum_{\alpha} e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}} \sim n \delta(\mathbf{k})$  as  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ , shows the full balance of the governing equation (3).

Taking the dot product with  $\mathbf{k}$  in the transformed equation of motion, and using the continuity equation, this gives

$$\hat{p}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi \vartheta} \mathbf{f} \cdot i \mathbf{k} \sum_{\alpha} (e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}} - \delta(\mathbf{k})). \quad (4)$$

Then substituting the above expression back into (3), this gives an expression for  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ , namely

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2 \mu \vartheta} \mathbf{f} \cdot \left( \frac{\mathbf{I}}{k^2} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^4} \right) \sum_{\alpha} (e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}} - \delta(\mathbf{k})). \quad (5)$$

Providing that the solution must satisfies the imposed periodic boundary conditions we expand the pressure and velocity field in a three dimensional Fourier series as follows,  $p'(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}_{\beta}} \hat{p}(\mathbf{k}_{\beta}) e^{-2\pi i \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{x}}$  and  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}_{\beta}} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_{\beta}) e^{-2\pi i \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{x}}$ . Hence the solution of for the governing equations is

$$p'(\mathbf{x}; \mathbf{x}_o) = \frac{1}{4\pi^2 \vartheta} (\mathbf{f} \cdot \nabla) \left( \sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}) - \sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}; \mathbf{x}_o) \right)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_o) &= C (\mathbf{f} \cdot \mathbf{I}) \left( \sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}; \mathbf{x}_o) - \sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}) \right) \\ &+ C \left( \mathbf{f} \cdot \frac{\nabla \nabla}{4\pi^2} \right) \left( \sum_2' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}; \mathbf{x}_o) \sum_2' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}) \right), \end{aligned}$$

where  $C = \frac{1}{4\pi^2 \mu \vartheta}$  and the sums  $\sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta})$  are defined as

$$\sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}) = \sum_{\mathbf{k}_{\beta}}' \frac{e^{-2\pi i \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{x}}}{k_{\beta}^2},$$

$$\sum_2' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}) = \sum_{\mathbf{k}-\beta}' \frac{e^{-2\pi i \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{x}}}{k_{\beta}^4}.$$

Note that the notation  $\sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta}; \mathbf{x}_o)$  represents the summation in which the vector  $\mathbf{x}$  is switched by  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ , and  $\sum_1'$  indicates a summation over all reciprocal lattice vector  $\mathbf{k}_{\beta}$ , except where  $|\mathbf{k}_{\beta}| = 0$ . This vector represents a wave number which can be defined here as  $\mathbf{k}_{\beta} = \left( \frac{\beta_1}{L}, \frac{\beta_2}{L}, \frac{\beta_3}{2H} \right)$ , where  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  are integers positive or negative  $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ,  $\vartheta$  is the volume of the periodic box  $\vartheta = L^2 \times 2H$ , and  $\mathbf{x}_o$  is the position vector of a singularity in the box.

The difficulty in evaluating the above series is always the question of their convergence. A great deal of attention to this particular problem was given by Ewald (1921) when

examining the slow convergence of lattice sums arising from Coulomb interactions (which also decrease slowly with distance). In the existing literature on calculations of transport properties in suspensions some published papers have applied Ewald's technique successfully (see, for example, Hasi-moto 1959, Sangani and Acrivos 1982, Beenakker 1986).

Rewriting the  $\sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta})$   $\sum_2' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta})$  and the gradients  $\nabla \sum_1' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta})$ ,  $\nabla \nabla \sum_2' (\mathbf{x} | \mathbf{k}_{\beta})$  by applying Ewald (1921), in the version of Nijboer and Wette (1957), for  $m = 1$  and  $m = 2$ , and making several algebraic manipulations and taking the real part of the equations, the solution is found to be (see Cunha 1994)

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}; \mathbf{x}_o) &= \sum_{\alpha} [\mathbf{P}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha, s}) - \mathbf{P}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha})] \cdot \mathbf{f} + \\ &+ \frac{1}{\vartheta} \sum_{\mathbf{k}_{\beta}}' \mathbf{P}^{rs}(\mathbf{k}) [\sin(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_s) - \sin(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{x})] \cdot \mathbf{f} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_o) &= \sum_{\alpha} [\mathbf{G}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha, s}) - \mathbf{G}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha})] \cdot \mathbf{f} + \\ &+ \frac{1}{\vartheta} \sum_{\mathbf{k}_{\beta}}' \mathbf{G}^{rs}(\mathbf{k}) [\cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_s) - \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{x})] \cdot \mathbf{f}, \end{aligned}$$

where  $\mathbf{P}^{ps}$ ,  $\mathbf{P}^{rs}$ ,  $\mathbf{G}^{ps}$  and  $\mathbf{G}^{rs}$  we have defined as being Green's functions in the physical and ( $ps$ ) and reciprocal ( $rs$ ) spaces which conforms with the periodicity of the flow,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{ps}(\mathbf{r}) &= C_1 \lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{-\frac{1}{2}}^* \left( \frac{\pi r^2}{\lambda} \right) \mathbf{I} + \\ &+ 2\pi C_1 \lambda^{-\frac{3}{2}} \Gamma_{\frac{1}{2}}^* \left( \frac{\pi r^2}{\lambda} \right) \mathbf{r}\mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}^{rs}(\mathbf{k}) = C_1 [2\lambda \Gamma_0^*(\pi k^2 \lambda) \mathbf{I} - 2\pi \lambda^2 \Gamma_1^*(\pi k^2 \lambda) \mathbf{k}\mathbf{k}]$$

$\mathbf{P}^{ps}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{2} \Gamma_{\frac{1}{2}}^* \left( \frac{\pi r^2}{\lambda} \right) \mathbf{r}$  and  $\mathbf{P}^{rs}(\mathbf{k}) = \frac{i\lambda}{2} \Gamma_0^*(\pi k^2 \lambda) \mathbf{k}$ . Here  $C_1 = 1/8\pi\mu$ ,  $\Gamma_{\nu}^*(y)$  is the incomplete gamma function and  $\lambda > 0$  is an arbitrary parameter that sets the speed of convergence of the above sums. For optimal convergence,  $\lambda$  should be chosen neither too small nor too large in order to give equal rates of convergences for the two sums in the reciprocal and physical space (Cunha 1994). The tensor  $\mathbf{I}$  denotes the unit second-rank tensor ( $e_x e_x + e_y e_y + e_z e_z$ ), and the vector  $\mathbf{r}_{\alpha, s}$  is related to the source point force and the lattice vector  $\mathbf{x}_{\alpha} = (\alpha_1 L, \alpha_2 L, \alpha_3 2H)$  with  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , in the following manner,  $\mathbf{r}_{\alpha, s} = [(x - x_o - x_{\alpha}), (y - y_o - y_{\alpha}), (z - z_o - z_{\alpha})]$ .

**An Impenetrable Boundary.** In particular, we are interested in a new solution in which all components of the velocity field ( $u, v, w$ ) are periodic in  $x$  and  $y$  with period  $L$ , the horizontal components  $u, v$  periodic in  $z$  with period  $H$ , but the vertical component  $w$  satisfying an impenetrable bottom and top condition of vanishing vertical velocity.

The image system proposed is illustrated in Figure 1 (a, b). The Figure is a simple diagram of the problem of a Stokeslet in the presence of an impenetrable boundary with slip condition. The part (a) of the diagram shows that the image force is added in opposite direction to the source point  $F$  at the image point  $\mathbf{x}_i = (x_o, y_o, -z_o)$ . This configuration has  $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})$  periodic in  $z$  with period  $2H$ ,  $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$  periodic in  $x$  with period  $H$  but  $w(x, y, H) = w(x, y, 0) = 0$ . While in diagram (b) the image source is added in same direction of the point source,



asking  $u(\mathbf{x})$ ,  $v(\mathbf{x})$ ,  $w(\mathbf{x})$  periodic in  $z$  with period  $2H$  and  $w(x, y, H) = w(x, y, 0) = 0$  with  $u(\mathbf{x})$ ,  $v(\mathbf{x})$  periodic in  $z$  with period  $H$ . It should be noted that the latter situation has a minor difference from the case of vertical forces because it holds the horizontal mean pressure gradient as part of the solution. The image system is then added into

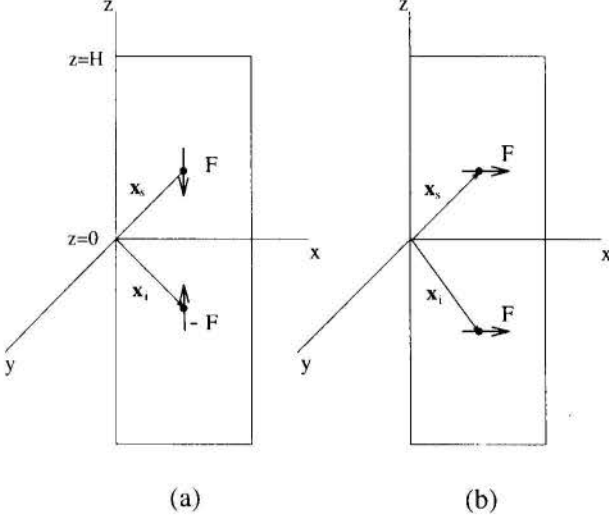


Figure 1: Diagram illustrating the image system for a point source located at  $\mathbf{x}_s = (x_o, y_o, z_o)$ . (a) Vertical force and (b) Horizontal force.

the problem of solving Stokes flow in periodic box in order to obtain the complete solution of the new problem with impenetrable bottom and top and periodic sides. It can be written down as follows,

$$u_i(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i) = \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^3 M_{ij}^{ps}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\alpha}; \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i) f_j + \frac{1}{\vartheta} \sum'_{\mathbf{k}_{\beta}} \sum_{j=1}^3 M_{ij}^{rs}(\mathbf{k}_{\beta}) f_j \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{k}_{\beta}; \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i), \quad (6)$$

The tensors  $M_{ij}^{ps}$  (physical space),  $M_{ij}^{rs}$  (reciprocal space) and the function  $\Theta$  are defined as

$$M_{ij}^{ps} = \begin{cases} G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,s}) + G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,i}) - 2G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha}) & \text{if } j = 1, 2, \\ G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,s}) - G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,i}) & \text{if } j = 3 \end{cases}$$

$\Theta = \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_s) + \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_i) - 2\cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{x})$  if  $j = 1, 2$  and  $\Theta = \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_s) - \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_i)$  if  $j = 3$ . The positions vectors  $\mathbf{r}_{\alpha,s}$  and  $\mathbf{r}_{\alpha,i}$  in the above equations are associated with the source point force and the image point force (see Cunha 1994 for details).

## APPLICATION OF THE METHOD

We illustrate now the use of the method in the problem of sedimentation with the particles free of inertia. It is hoped that these few applications give an indication of the diverse types of information that can be obtained with this simulation.

**N Particles Free of Inertia.** Consider now  $N$  spherical particles settling within a impenetrable box with periodic sides of dimensions  $L \times L \times H$ . Let  $\mathbf{x}_i$  denote the position of the particle  $i$ . Suppose an external  $\mathbf{f}_i$  is exerted on

particle  $i$  and let  $\mathbf{v}_i$  be its translation velocity. Then the governing equation (6) for the appropriate formulation of hydrodynamic interaction which relates the velocity  $\mathbf{v}_i$  and the forces  $\mathbf{f}_i$  is given by

$$\mathbf{v}^i = \sum_{\alpha} \sum_j^N \mathcal{M}_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha,s}, \mathbf{r}_{\alpha,i}) \cdot \mathbf{f}_j + \frac{1}{\vartheta} \sum'_{\mathbf{k}_{\beta}} \sum_{j=1}^N \mathcal{M}_{ij}^{rs}(\mathbf{k}_{\beta}) \cdot \mathbf{f}_j \Theta, \quad (7)$$

where the relative position vectors are defined as  $\mathbf{r}_{\alpha,s} = [(x_i - x_j - x_{\alpha}), (y_i - y_j - y_{\alpha}), (z_i - z_j - z_{\alpha})]$  for the source and  $\mathbf{r}_{\alpha,i} = [(x_i - x_j - x_{\alpha}), (y_i - y_j - y_{\alpha}), (z_i + z_j - z_{\alpha})]$  for the image. The coupling between the particle velocities and forces, the grand mobilities matrix  $\mathcal{M}^{ps}$  and  $\mathcal{M}^{rs}$ , are both  $N \times N$  matrix of  $3 \times 3$  blocks which describe long range or far-field interaction between the particles in the physical and reciprocal space respectively.

**Dimensionless Governing Equations.** We consider that  $a$ ,  $U_s$  (i.e. the Stokes sedimentation velocity for an isolated particle) and  $6\pi\mu a U_s$  represent respectively the characteristic reference scales of length, velocity and force. The dimensionless parameter having a relevant significance is the volume fraction of particles  $\phi (= \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{N}{L^2 H})$  which is a nondimensional measure of concentration. Here symbols with a superscript “\*” and the capital letters will denote dimensionless quantities.

The case of particles free of inertia is a particular situation of the general formulation, corresponding to the image system when  $j = 3$  (vertical force). Under this condition the mean pressure gradient is not required, and the mobilities matrix which describe the fluid motion in the physical and reciprocal spaces, in terms of nondimensional variables are calculated respectively by

$$M_{\ell 3}^{ps}(\mathbf{R}) = \frac{3}{4} \lambda^* \Gamma_{-\frac{1}{2}}^* \left( \frac{\pi R^2}{\lambda^*} \right) \delta_{\ell 3} + \frac{3\pi}{2} \lambda^* \Gamma_{\frac{1}{2}}^* \left( \frac{\pi r^2}{\lambda^*} \right) R_{\ell} R_3 \quad \text{and}$$

$$M_{\ell 3}^{rs}(\mathbf{K}_{\beta}) = \frac{3}{2} \lambda^* \Gamma_0^* (\pi K_{\beta}^2 \lambda^*) \delta_{\ell 3} - \frac{3}{2} \pi \lambda^{*2} \Gamma_1^* (\pi K_{\beta}^2 \lambda^*) K_{\ell}^{\beta} K_3^{\beta}.$$

Here  $i = 1, 2, 3$  and the function  $\Theta = \cos(2\pi \mathbf{K}_{\beta} \cdot \mathbf{R}_s) - \cos(2\pi \mathbf{K}_{\beta} \cdot \mathbf{R}_i)$ . Note that the mobilities are now purely geometric quantity that describes particles interactions. Then the dimensionless equations governing the motion of the  $N$  point particles can be written as

$$\mathbf{U}^i = \sum_{\alpha} \sum_j^N \mathcal{M}_{ij}^{ps}(\mathbf{R}_{\alpha,s}, \mathbf{R}_{\alpha,i}) \cdot \mathbf{F}_j + \frac{1}{V} \sum'_{\mathbf{K}_{\beta}} \sum_{j=1}^N \mathcal{M}_{ij}^{rs}(\mathbf{K}_{\beta}) \cdot \mathbf{F}_j \Theta, \quad (8)$$

with  $\mathbf{F}_j = \frac{2}{9\mu} a^2 \frac{\Delta \rho}{U_s} \mathbf{g} = (0, 0, 1)$  since the particles are free of inertia. The equation (8) is the heart of our dynamic simulation in the absence of fluid and particle inertia. It is an exact description for  $N$  point-particles sedimenting within the impenetrable box due to the gravity, and interacting hydrodynamically. Given an initial distribution of particles  $\mathbf{X}(0)$ , the equation  $\frac{d\mathbf{X}^i}{dt} = \mathbf{U}^i$  can be integrated in time to



follow the dynamic evolution of the suspension microstructure. The above equation represents a mobility problem with the hydrodynamic interactions calculated by using pairwise additivity in the mobility matrix  $\mathcal{M}_{ij}^{ps}$  and  $\mathcal{M}_{ij}^{rs}$ .

**Results and Discussions.** The three-dimensional fluid motion is described by the governing equation (6) in a dimensionless form. A cut-off parameter  $R_{min}$  is defined so that interactions between particles separated by a distance smaller than  $2R_{min}$  are excluded so as to avoid the singularity in calculating the incomplete Gamma functions. To accelerate the calculations of Ewald summations and thereby obtain a considerable savings in computer time, the incomplete gamma functions were then tabulated for the values of  $\nu$  which appear in the solution series (6),  $\nu = (-1/2, 0, 1/2, 1)$ , and their calculation required for each particle pair interaction were determined by simple linear interpolation away these tables. Since we can perform simulations with different box aspect ratio  $H/L (= 2, 3, 4, 5)$ , it was desirable to investigate the optimum values of the link-parameter,  $\lambda$ , between the physical and reciprocal spaces. Cunha (1994) shows the dependence of the  $\lambda_{optimum}$  on the aspect ratio  $H/L$  for two suitable number of boxes (27 and 125).

An useful test was carried out to investigate the three-dimensional solution of the fluid motion for each component  $u/U_s, v/U_s, w/U_s$  of the equation (6), and to verify numerically the behaviour of the imposed periodic boundary conditions of the system. The results are briefly shown in Figure 2 (a, b, c, d). Basically, they give the velocity field produced by a point-particle in a plane  $z = constant$  in the impenetrable box with periodic sides. The velocity components  $u/U_s$  and  $v/U_s$  appear to be quite symmetric (Figure 2 a, b). More important is that in Figure 2c it may be clearly observed the back flow effect associated with the fact that the isolated spheres must carries with it a flux of fluid equivalent to  $6\pi a^3 U_s$ . This indicates the existence of an excluded volume shell  $a < r < 2a$  for the centre of a second interacting particle. The periodicity in space of the system is shown in Figure 2d for a transversal distance equal to  $2L$ . As a first result of time evolution we let down the single particle, free of inertia, to falling from a certain initial condition close to the top, following its motion until the time it takes to reach at the impenetrable bottom. The integration of  $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{U}$ , via a fourth order Runge-Kutta scheme provided the instantaneous position of the particles motion, with  $\mathbf{U}$  being evaluated at each time step by means of the equation (6). The magnitude of the time step  $\Delta t$  in the Runge Kutta procedure was set up as  $\Delta t \sim O(a/U_s)$  (that is the time taken of a single particle to fall across its own radius). The horizontal components of the particle velocity were seen to be null, and the vertical component persisted constant until the particle gets in the region of influence of the image system (the finite effect of the box). At the bottom the particle completely stopped its settling motion (see Figure 3). This information is essential to define a bulk region of the suspension in which the statistical data analysis should produce meaningful statistics. Thus we holds that during the calculation of the transport properties of the suspension the statistical data analysis is evaluated in a region of the box where the variations in the individual velocity of a reference particle is only due to its interaction with neighbouring. Different numbers of particles (e.g.  $N_{max} = 170$ ) were selected to compute the statistics of the suspension over 100 independent configurations in which the particles were located randomly and independently (with no overlappings) in the box. During these simulations the aspect ratio

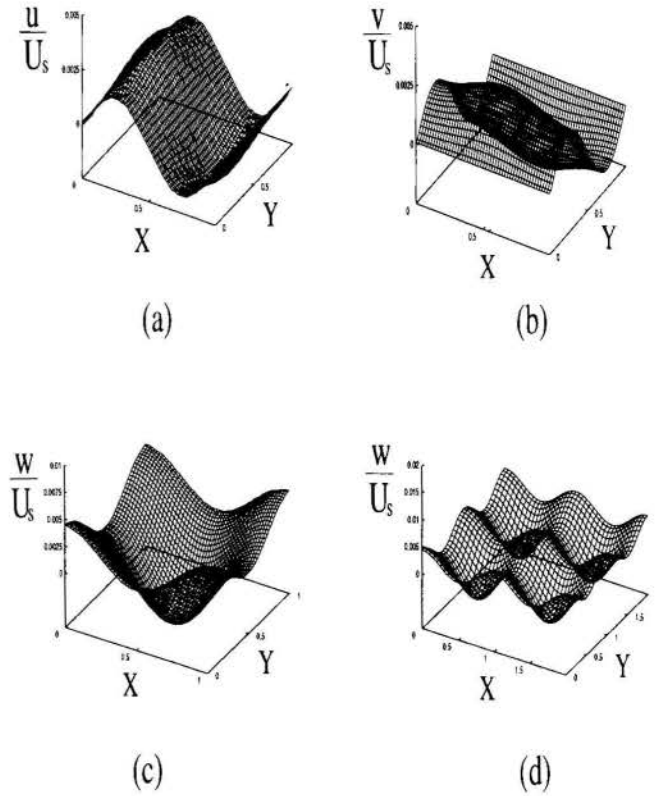


Figure 2: The three-dimensional solution of the fluid motion in the impenetrable box with periodic sides. (a)  $U$  component, (b)  $V$  component, (c)  $W$  component and (d) the side periodicity of the system. The number of box was made equal to 125,  $H/L = 3$ ,  $a/L = 0.05$ , and the singularity was located at  $\mathbf{X}_o = (0.5, 0.5, 0.25)$ .

$H/L$  remained constant and equal to 3. The particle concentrations were varied throughout the range  $0 \leq \phi \leq 3\%$ , and three different values of the aspect ratio  $a/L (= 0.05, 0.06$  and  $0.07)$  were considered.

Figure 4 shows a typical result of the computer simulations. The suspension was simulated with  $a/L = 0.05$  and 114 particles that gives a particle concentration of 2%. The distribution of bars on the Figures corresponds to the mean values calculated over all particles in each configuration whereas the horizontal lines are obtained by averaging over the 100 configurations. The following observations should be noted. (i) The horizontal structure factor of the suspension having its value pretty close to the unit indicates that the numerical process of locating particles randomly and independently in the box produced a well-stirred suspension. The small deviation appears due to the finite size of the box in our system. (ii) The values of the relative vertical fluctuation in Figure 4(b) is appreciably large,  $O(1)$  which is in good agreement with the experiments of Ham and Homay (1988), and with those measurements of fluctuations recently reported by Nicolai et al. (1995) who found a relative fluctuation of 77% of the mean for  $\phi = 5\%$ . On the other hand this order of magnitude is substantially less than the theoretical prediction,  $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} = 2.2U_s$ , found by Koch

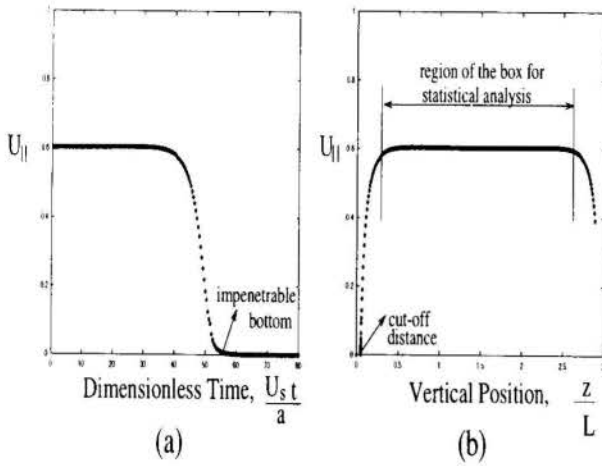


Figure 3: Velocity of a single sphere settling under gravity in the impenetrable box with periodic side of aspect ratios  $H/L = 3$  and  $a/L = 0.05$ .  $\parallel$  denotes the gravity direction.

and Shaqfeh (1991). (iii) The ratio between the vertical and the horizontal fluctuation shown in Figure 4(c) was found to be 2.5, that indicates a strong anisotropy in velocity fluctuations. These results also agree well with the experimental measurements due to Nicolai et al. (1995) who obtained this ratio approximately equal 2, and it is fairly close to the same ratio predicted by numerical simulation of Ladd (1993) who found 3. The computations are used to examine the average velocity of the particles for providing some information about the hindered settling behaviour of our system. In Figure 5 the components parallel and perpendicular to the gravity direction of the average velocity of the particles were made dimensionless with the Stokes velocity  $U_s$ . It is seen a good agreement between  $\langle U_{\parallel} \rangle / U_s$  and Batchelor (1972) who predicted that for point-particle approximation the slope of the curve fitting the numerical data should be  $-5.5\phi$ . This corresponds to the compensating backflow effect of the fluid induced by the settling of the particles which can be seen as a direct effect of the hydrodynamic interactions between the particles. Also, the Figure 5 shows that the mean horizontal velocity,  $\langle U_{\perp} \rangle / U_s$ , has been found equal to zero in our simulated system. This indicates that the numerical experiments is not perturbed by any mean horizontal flow. These results were pretty useful to verify the accuracy of computing the statistics of the suspension. Typical pictures of the sedimentation process obtained with the dynamical simulation are displayed in Figure 6. The picture was collected at different times throughout one arbitrary realization between the ten ones simulated. Essentially, this Figure shows the projections on the vertical plane,  $xz$ , of the time development of sedimentation for a particles concentration of  $\phi (= 5\%)$  corresponding to a number of particle  $N (= 286)$  and the aspect  $a/L = 0.05$  and  $H/L = 3$ . The first picture of the Figure 6 corresponds to the initial positions of the particles in which particles are distributed randomly and independently. Note that it is possible observing a slightly spreading of the suspension interface, and clearly the growth of the sediment layer on the impenetrable bottom. In addition, we also examined the instantaneous trajectories of particles for different concentrations  $\phi (= 1\%, 2\%, 3\%$  and  $5\%)$ . Figure 7(a,b) shows the projected trajectories of particles on the vertical plane  $xz$ . It is seen that a particle moves mainly downward in the gravity direction, while simultaneously responding to the lateral fluctuations caused

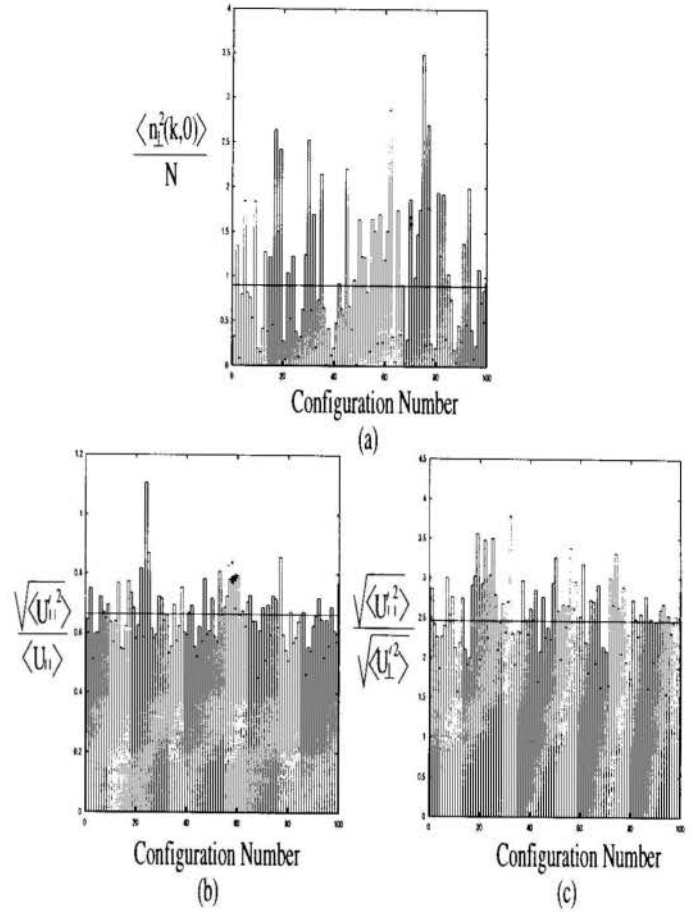


Figure 4: Numerical simulation results with statistics over 100 random and independent distribution of particles in the impenetrable box. The aspect ratios were  $H/L = 3$ ,  $a/L = 0.05$ , and the number of particles was equal to 114 corresponding to a volume concentration of 2%. (a) Horizontal density number fluctuations; (b) vertical relative velocity fluctuation; (c) ratio between the vertical and horizontal velocity fluctuations.

by the continual change in configurations of its neighbouring and resulting hydrodynamic interactions. These results provide evidence that the fluctuating positions behaves as it should for a random walk process, justifying the description of particles migration in sedimentation as a hydrodynamic self-diffusion process. We plan to study fluctuations and hydrodynamic self-diffusion in sedimentation in a future publication. We will show that the impenetrable boundary considered in the present method is very important of reducing the strong anisotropy of the diffusivities to realist proportions of the recent experiments reported by Nicolai et al. (1995).

#### REFERENCES

Batchelor, G.K., 1972, "Sedimentation in a dilute dispersion of spheres", *J. Fluid Mech.*, **52**, 245–268.  
 Beenakker, C.W.J., 1986, "Ewald sum of the Rotne-Prager tensor", *J. Chem. Phys.*, **85**, 1581–1582.  
 Brady, J.F., and Bossis, G., 1988, "Stokesian dynamics", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20**, 111–157.  
 Da Cunha, F.R., 1994, "Hydrodynamic dispersion in suspensions", Ph.D. Thesis, Department of Applied Mathemat-

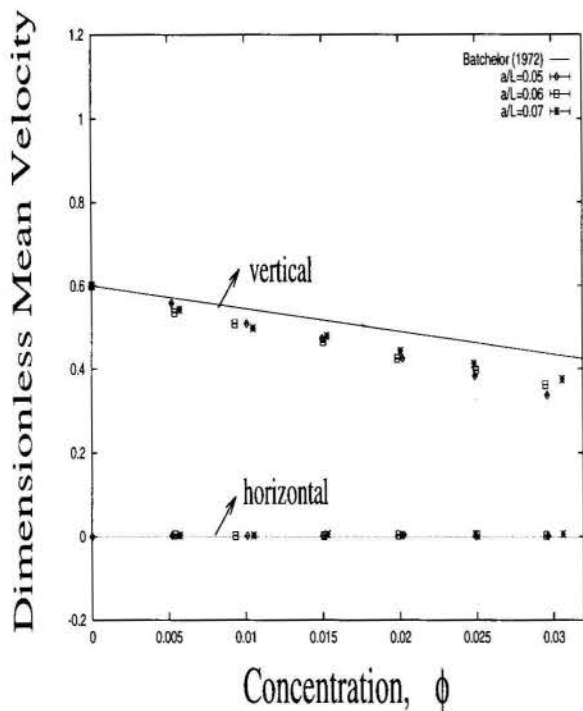


Figure 5: Dimensionless mean settling velocities of the particles calculated over 100 random and independent configurations as a function of the particle concentration.

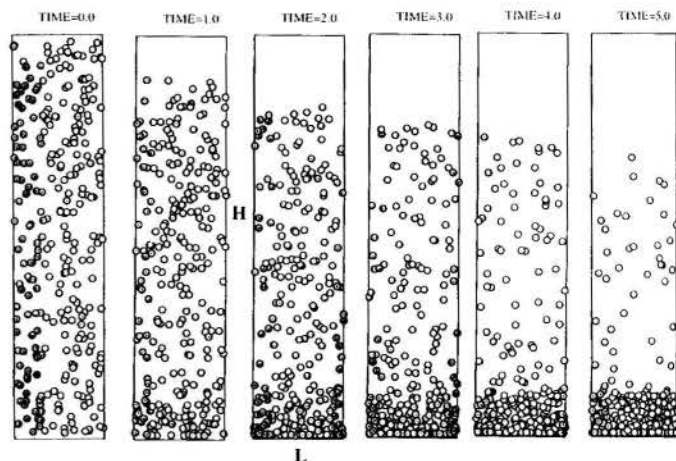


Figure 6: Typical pictures of the dynamical simulations for  $a/L = 0.05$ ,  $H/L = 3$  and  $N = 286$ .

ics and Theoretical Physics, Cambridge University, UK.

Ewald, P.P., 1921, "Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale", *Ann. Phys.*, **64**, 253-287.

Ham, J.M., and Homsy, G.M., 1988, "Hindered settling and hydrodynamic dispersion in quiescent sedimenting suspensions", *Intl J. Multiphase Flow*, **14**, 533-546.

Hasimoto, E.J., 1959, "On the periodic fundamental solution of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres", *J. Fluid Mech.*, **5**, 317-328.

Hinch, E.J., 1977, "An averaged-equation approach to particle interactions in a fluid suspension", *J. Fluid Mech.*, **83**, 695-720.

Koch, D., and Shaqfeh, E.S.G., 1991, "Screening in sedimenting suspensions", *J. Fluid Mech.*, **224**, 275-303.

Ladd, A.J.C., 1993, "Dynamical simulations of sedimenting spheres", *Phys. Fluids A*, **5**, 299-310.

Nicolai, H., Herzhaft, B., Hinch, E.J., Oger, L., and Guazzelli E., 1995, "Particle velocity fluctuations and hydrodynamic self-diffusion of sedimenting non-Brownian spheres", *Phys. Fluids*, **7**, 12-23.

Nijboer, B.R.A., and De Wette, F.W., 1957, "On the Calculation of lattice sums", *Physica*, **23**, pp. 309-321.

O'Brien, R.W., 1979, "A method for the calculation of the effective transport properties of suspensions of interacting particles", *J. Fluid Mech.*, **91**, 17-39.

Sangani, A.S., Acrivos, A., 1982, "Slow flow through a periodic array of spheres", *J. Multiphase Flow*, **8**(4), pp. 343-360.

#### ACKNOWLEDGMENT

I would like to thank E.J. Hinch from DAMTP at Cambridge University for useful discussions and critical comments during this work.

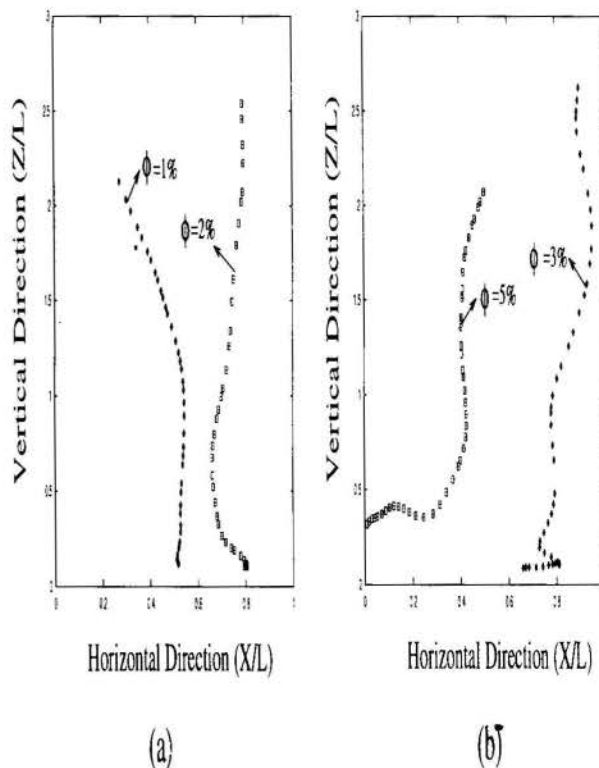


Figure 7: Results of the computer simulations showing four typical particle trajectories at different concentrations simulated.



## The Turbulence of Mixing of Iron Particles in Water Systems



by Guilherme G. Camozzato, Roberto de Souza,  
Alexandre José da Silva and Atila P. Silva Freire  
Mechanical Engineering Program (PEM/COPPE/UFRJ)  
C.P. 68503, 21945-970 Rio de Janeiro, Brazil

**ABSTRACT**

*A particle-laden flow that normally occurs in the metallurgical industry is studied here. The purpose of the work is to investigate in which situation the particles in suspension in a certain waste disposal tank can be separated from the main flow. The separation process to be analysed here is of particular difficult solution because the velocity field is very complex, presenting curvature and tri-dimensionality. The interaction process between the flow field and the particles is also very complex. Particles collected on the field were experimentally analysed having their size and density been determined through nuclear techniques. The velocity field was simulated by a two-equation differential model, the K-epsilon model. Numerical simulations gave predictions of the amount of particles separated in a model separator as well as on the real scale tank. The scaled model was used to calibrate the model constants. The project premises were taken from these numerical simulations.*

**1. INTRODUCTION**

Many process operations in the metallurgical industry involve systems where mixtures of solids particles and of fluids are present. Invariably, the existence of solids in suspension is an undesirable feature, so that separation processes must be promoted. Unfortunately, if the flow is in a turbulent regime, the construction of a consistent theory that can proficiently describe the problem is very difficult. The reasons for this are several. The interaction process between the velocity shear flow field and the concentration field is inadequately understood both from a theoretical and an experimental point of view. Indeed, the great hostility of particle-laden flows to the presence of intrusive measurement techniques makes it very difficult to gather information for the development of a useful turbulence model. For example, only two works (Rashidi et alii(1990), Rogers and Eaton(1991)) are available in literature which present experimental data on particle-laden, flat plate, turbulent boundary layer flows. Even so, these works only deal with the flow defect region. This severely hampers, for instance, the development of low Reynolds number near wall turbulence models.

The purpose of this work is to study a particle-laden flow that commonly occurs in the metallurgical industry. Our ultimate goal is to assess in which situation the particles in suspension can be separated from the flow. The separation process under analysis here is of particularly difficult solution because the velocity field found in the separation cells is very complex. Also, a further aggravation for the problem analysis is the complex interaction process that takes place between the solid particles and the flow field. As we shall see, the properties of the solid particles are not constant in time and this really makes the problem very complex.

The study of the present problem was motivated by the reject tank TQ-4 of the Brazilian Steel Company (CSN). The return water from the showers used to promote a thermal treatment of hot plates was heavily contaminated by particles, and these had to be separated from the flow. The excess in particles over the admissible concentration was reducing the quality of the plates and causing severe main-

tenance problems. The geometry (see figure 1, next section) to be studied here was proposed by the present authors in order to maximize the amount of separated particles.

The working flow presents tri-dimensionality and flow curvature and rotation, what makes the mathematical description of the velocity field a very complex problem in its own right. Here, to keep the problem within a manageable context, several simplifying assumptions will be made, including two-dimensionality and stationarity.

The study will contemplate both the experimental and the theoretical aspects of the problem. The experiments were carried out in order to disclose the particles characteristics and the flow pattern. The most important experimental result is the rate of particle deposition in the separation cells. This is the result that will really be used to validate the theoretical predictions presented here.

The solid particles will be investigated through the gamma ray attenuation technique.

To describe the velocity and the concentration fields, two approaches are available: the Eulerian approach and the Lagrangean approach. For systems with a large number of particles, the former approach is normally preferred. The implementation of an Eulerian approach to the problem, however, is not trivial. Some basic questions about the nature of the coupling drag term, the damping of turbulence by the particles, the kind of the boundary conditions, and many others, are far from being answered.

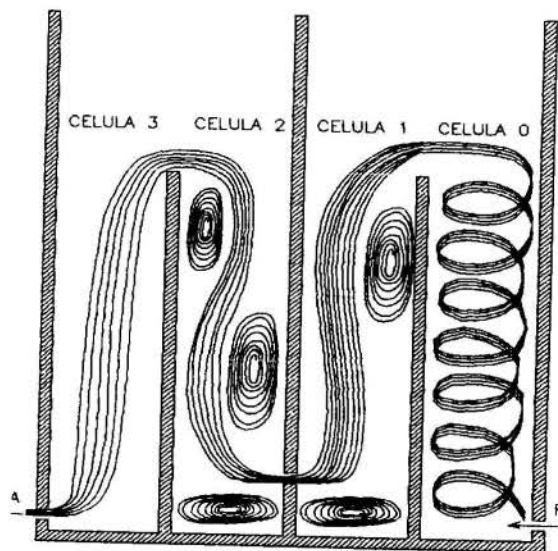
In fact, in an accompanying paper (Camozzato and Silva Freire(1996)), the authors show how some of these questions can be addressed. Here, the problem is dealt through a hybrid Eulerian/Lagrangean approach. While the velocity field is resolved via a two-equation turbulence model, the  $\kappa - \epsilon$  model, the particle field is resolved via a Lagrangean approach. This procedure is licit if the particles are considered small enough so that they do not interfere with the fluid motion. This hypothesis, although appearing at first to be very restrictive, will be fully justified by an analysis of the local Reynolds number of the particles.

While presenting some difficulties for the prediction of flows near walls, in special in the regions of adverse pressure gra-

dient flow, the  $\kappa - \epsilon$  turbulence model proved to be capable of correctly predicting the mean properties of the flow in the separation cells. The paper presents results for the velocity field and for the particle deposition rates which are compared with the experimental data. The particle trajectories are also illustrated here.

## 2. FLOW GEOMETRY

A sketch of the fluid-particle mixture separation cell proposed here is shown in figure 1. The mixture is introduced at the bottom of cell 0 where it forms two large vortices that rise and penetrate in cell 1. The descending motion in this cell causes the streamlines to curve passing through the gap at the dividing wall. This curvature causes the solid particles to be thrown outwards (due to centrifugal forces) against the bottom wall where they are collected. Part of the particles that enter cell 2 are trapped in the bottom recirculation zone remaining there. The remaining particles are directed to cell 3 from where they return to cell 0.



Separation Cell Geometry  
Figure 1

## 3. EXPERIMENTAL PROCEDURE

In the process under study, the nature of the solid particles is such that a portion of the surrounding fluid adheres to them completely modifying their features. The added mass is composed, in our case, of oil, water and air, which provoke a sharp decrease in the specific mass of the particle. In fact, the dispersed particles in the water/oil mixture will tend to form aggregates of quite different sizes and density which will have a completely distinct behaviour from the original particles.

The characteristics of the particles were here determined through the gamma-ray attenuation technique. Our ultimate aim would be to build a theory which could faithfully reproduce the particle aggregates formation process. Since this turns out to be a very difficult task, we will measure here the aggregate deposition rate. It is these data that will be of great importance for the correct assessment of the particle separation process. We emphasize here, however, the importance in knowing the particles characteristics so as to be able, as just mentioned, of understanding the process formation of the aggregates.

The particle size distribution of the material under interest was determined by examination through nuclear techniques of a sedimenting suspension of the particles. Hence, the size of the particles will be expressed here in terms of the settling velocity of an equivalent sphere, that is, the diameter of a sphere of the same density as the particle, having the same terminal velocity under the same condition.

The particles to be analyzed may be introduced in the experimental setup as a thin layer on top of a column of clear liquid, the two layer technique; or it may be uniformly dispersed in the liquid, the homogeneous suspension technique. In the analysis method to be used here, the incremental method, changes with time in the concentration or density of the suspension at known heights are found and from these the size distribution is determined. The incremental method can therefore be divided into a fixed time and a fixed height method. Here the latter will be used.

The gamma-ray attenuation technique was chosen to be used here since it provedly furnishes good results in the determination of concentration in binary suspensions whose different constituents have different attenuation coefficients. Besides, this technique has the great advantage of not interfering with the medium under study.

Consider now a small horizontal element in the suspension at a height  $h$ . At the beginning of the sedimentation process, there exists a certain spatial homogeneity so that the particles leaving the element are balanced by the particles entering it from above. When the largest particles initially present at the surface of the suspension leave the element there will be no similar particles entering to replace them. As a result the concentration of this element will have particles smaller than  $D$  in the suspended phase.

The velocity and diameter of the falling particles can be easily found if we consider that they travel at a terminal velocity. Then summoning Stokes hypothesis that in this situation the drag on a spherical particle falling in a fluid of infinite extent is due entirely to viscous forces within the

liquid, and realizing that this force must exactly balance the gravitational field force, we can write

$$v = \frac{h - h_0}{t}, \quad (1)$$

$$D_{St} = \left[ \frac{18\mu v}{(\rho_s - \rho)g} \right]^{1/2}, \quad (2)$$

where all symbols have their classical meaning. The subscript  $s$  stands for solid.

For concentrated suspensions, an empirical correction due to Richardson and Zaki(3) must be considered. In this case,

$$v = \frac{h - h_0}{t(1 - c)^h}, \quad (3)$$

where  $c$  = smoothed concentration in time,  $h = 4.65$ . In the interaction between the gamma-rays and the suspension, part of the emitted photons are absorbed. For monoenergetic beams, the variation in the intensity of the incident beam,  $I_0$ , is related to the thickness ( $= L$ ) and the density ( $= \rho$ ) of the suspension through the Lambert equation



$$I(E) = I_0(E) \exp(-\eta(E)\rho L), \quad (4)$$

where

$I(E)$  = beam intensity after crossing the suspension,  
 $h$  = attenuation coefficient of the suspension ( $cm^2/g$ )  
for the considered energy.

For a binary solid-fluid mixture,  $\eta$  and  $\rho$  are related to the single component properties through equations

$$\eta(E)\rho = \eta_l \rho_l c_l + \eta_s \rho_s c_s, \quad (5)$$

$$c_s + c_l = 1 \quad (6)$$

With these relations, the Lambert equation can be written as

$$\ln\left(\frac{I(t)}{I_0}\right) = -L(\mu_l \rho_l (1 - c_s) + \mu_s \rho_s c_s), \quad (7)$$

The above equation gives the concentration of solid particles as a function of the attenuation of a gamma-ray monoenergetic beam. The attenuation coefficient of a chemical compound can be obtained from the coefficients of the several constituent elements, though expression

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i w_i, \quad (8)$$

$n$  = number of constituents,  
 $w_i$  = weight fraction of constituent  $i$ ,  
 $h_i$  = mass attenuation coefficient of  $i$ .

The particle characteristics were obtained from a sample of 40 kg of solid material received from the Brazilian National Steel Company (CSN). The material had the appearance of black mud, clearly revealing the presence of organic substance.

To analyse the particles, the following procedure was used:

- 1) 500 grams of solid material was separated and laid in a 1000ml Erlenmeyer,
- 2) 280 grams of a solvent was added to the above material,
- 3) the resulting mixture was filtered, washed and dried at a temperature of 200°C during 24 hours.

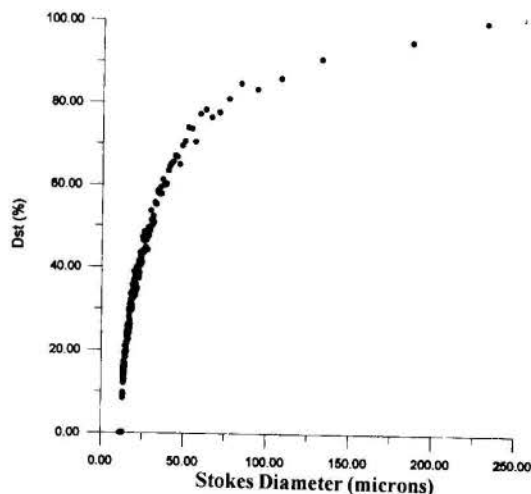
In the end, a mass of 360 grams of pure solid particles was obtained. The density of the solid particles, determined through the picometer method, was

$$\rho_s = 4.101g/cm^3.$$

To apply the gamma-ray attenuation technique, a source of Am 241 (Eg=60KeV) was chosen. The mixture was made with vaseline, so as to avoid the formation of rust flakes.

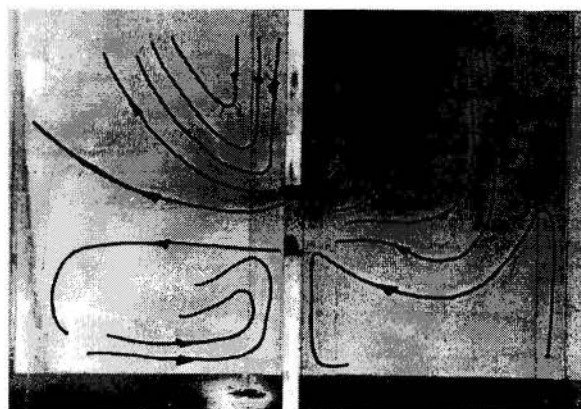
The volume of the Stokes cell was 790ml; its height 36.5cm. The mass of particles used corresponded to 1% of the cell volume, giving a set at a height of 5.5cm.

The granulometric distribution of particles is shown in figure 2.



Granulometric distribution  
Figure 2

A visualisation of the flow was obtained with bubbles and dyers. The general flow pattern is shown in figure 3. Five recirculation zones were observed in cells 1 and 2. These must be matched by the numerical calculations.



General Flow Pattern  
Figure 3

To measure the amount of particle trapped in each of the four cells, the following procedure was adopted. Seventy grams of particles were released at the dividing line between cells 0 and 1. After two hours, the flow was stopped and the water drained. The particles were then collected and dried. The results are shown in Table 1.

Table 1 Experimental deposition of particles

	Weight(g)	% of filtered	% of total
Cell 0	2.067	4.643	2.929
Cell 1	29.996	67.384	42.511
Cell 2	8.326	18.704	11.500
Cell 3	4.126	9.269	5.848
Summation	44.515	100.0	63.088

Row two of table 1 shows that only 63% of the total mass particle was separated by the system after a run of two hours. Furthermore, the results show that 67% of the total

separated mass was separated in cell 1. This results, again, must be reproduced by the numerical calculations.

#### 4. NUMERICAL SIMULATION

As mentioned in the introduction, the velocity field will be described through a two equation differential model, the  $\kappa - \epsilon$  model. Here, a standard  $\kappa - \epsilon$  formulation was chosen. The numerical difficulties were then reduced to the implementation of the flow geometry and the coupling with the concentration field.

The motion equations for a two-dimensional, incompressible, turbulent flow can be written as (9),(10)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -\rho \overline{u'_i u'_j} - P \delta_{ij} + \nu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right], \quad (10)$$

where,  $x_1$  and  $x_2$  are the longitudinal and transversal coordinates,  $u_1$  and  $u_2$  are the mean velocities,  $u'_1$  and  $u'_2$  the velocity fluctuations,  $\rho$  and  $p$  the fluid density and pressure, and  $\nu$  the molecular viscosity.

In the standard  $\kappa - \epsilon$  model, the turbulent quantities are related to the mean velocity field through the eddy viscosity concept which reads [11]

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \rho \nu_t \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} \kappa, \quad (11)$$

with  $K$  =turbulent kinetic energy,  $\delta_{ij}$  =Kronecker delta,  $\nu_t$ =eddy viscosity.

The eddy viscosity,  $\nu_t$ , depends on the local turbulence structure, being characterised by parameters  $\kappa$  and  $\epsilon$  (=dissipation rate per mass unit). Parameter  $\epsilon$  is the specific amount of turbulent kinetic energy  $\kappa$  transformed into internal energy of the fluid.

The eddy viscosity is, given by

$$\nu_t = c_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon}, \quad (12)$$

where  $c_\mu$  is an empirical constant.

The behaviour of the turbulence parameters,  $K$  and  $\epsilon$  over the flow is given by (13) and (14)

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_1 \kappa - \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ u_2 \kappa - \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right] = P_\kappa - \epsilon, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_1 \epsilon - \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ u_2 \epsilon - \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] = \frac{\epsilon}{\kappa} (c_{\epsilon 1} P_\kappa - c_{\epsilon 2} \epsilon), \quad (14)$$

The terms on the left side of the above equations give the temporal and convective change of  $K$  and of  $\epsilon$ .  $P_\kappa$  and  $\epsilon$

are, of course, the production and destruction rates.  $P_\kappa$  is defined by (15)

$$P_\kappa = \nu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (15)$$

The constants in equations (13) and (14) are determined experimentally. Typical values are  $c_{\epsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\epsilon 2} = 1.92$ ,  $\sigma_\kappa = 1.0$ ,  $\sigma_\epsilon = 1.3$ .

The standard  $\kappa - \epsilon$  model does not apply to low Reynolds number flow regions, and hence also not to the viscous near wall region. The solution in this layer is represented in terms of a logarithmic function with the form

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + A, \quad (16)$$

The Von Karman constant  $k$  and constant  $A$  assume the values 0.4 and 5.0 respectively. The friction velocity  $u_\tau$  is given by

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (17)$$

The value of  $\kappa$  at the first grid element is obtained from the  $\kappa$ -balance for a control volume adjacent to the wall, with convective and diffusive transport through the wall set zero. The local equilibrium condition results in

$$\kappa_w = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}}. \quad (18)$$

The value of  $\epsilon$  at the first grid point is then given by

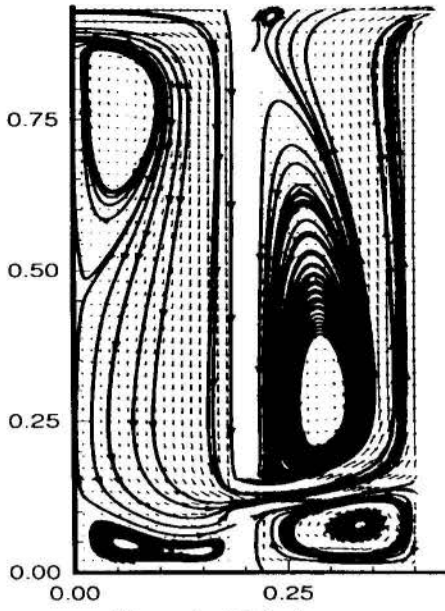
$$\epsilon_w = c_\mu^{1/4} \frac{u_\tau^3}{\kappa y_\epsilon}, \quad (19)$$

where  $y_\epsilon$ =distance from the wall to the first grid point.

The geometry and flow conditions for the present study are exactly those described in section two. The numerical solution procedure uses a conservative finite-volume method in primitive variables that was developed for CAST (Computer Aided Simulation of Turbulence, Peric and Scheuerer (1989)). This program is similar in structure to other existing fluid flow prediction schemes like TEACH and TEAM. It differs from these codes in the co-located variable arrangement, the discretization scheme, the solution algorithms for the linear equation systems assign from discretization, and in the pressure-velocity coupling which is adapted to the co-located variable storage.

An extensive modification of the original code was made here so that results could be obtained for our geometry. Modifications included primarily the possibility of working with multiple walls in the interior of the domain

A numerical grid consisting of 40x50 control volumes was used for the calculations. Figure 4 shows the calculated velocity vectors. Please compare these result with the observed streamlines. Note the close agreement of the predicted separation zones with the experimental data.



Numerical Velocity  
Figure 4

When a solid particle is accelerated or decelerated during its motion in a fluid, the governing equation can be written as (20)

$$\frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho_p \frac{du}{dt} = \frac{4}{3}\pi R_p^3 (\rho_p - \rho)g - c_d \frac{\pi}{2} R_p^2 \rho u |u| - c_a \frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho \frac{du}{dt} - c_h R_p^2 (\pi \rho \mu)^{1/2} \int_0^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (20)$$

The first term on the right-hand side is the buoyancy term; the second term which always opposes the direction of motion is the drag force. The third term accounts for the fact that not only the particle has to be accelerated but also a portion of the surrounding fluid that adheres to the particle surface. The value of the constant  $c_a$  is normally taken in literature to be 0.5. The last term is referred to as the history effect term. This term allows for the dependence of the instantaneous drag on the local flow conditions around the particle to be taken into account. The classical value of  $c_h$  is 0.6.

In many practical situations the acceleration effects may safely be neglected. This is clearly not the case here. In our case the particles move in a turbulent flow field so that, in principle, all terms in equation (20) should be considered.

In these preliminary study of the phenomenon we focused on the first two terms of the right-hand side. In general, the drag force exerted by the fluid over the particle will depend on the turbulence level and on the particle Reynolds number.

For a spherical particle, the drag coefficient,  $c_d$ , has been experimentally determined as a function of the particle Reynolds number defined by

$$\epsilon_w = R_p = 2 \frac{R_p u}{\nu} \quad (21)$$

In our working range  $R_p < 2$  so that we may write

$$\epsilon_w = c_d = \frac{24}{R_p} \quad (22)$$

For nonspherical particles a correction factor is applied to (22).

To characterize the aggregates that will form when a certain amount of particles/oil mixture is thrown into the water, an statistical approach was taken. As such, the particle size distribution was considered to follow a gaussian distribution.

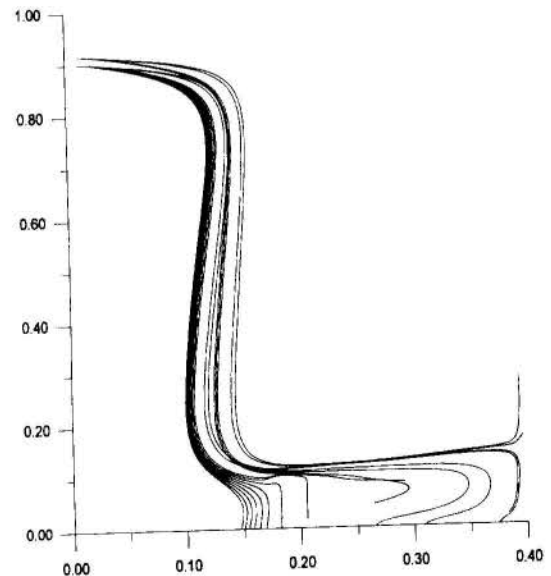
A numerical integration of equation (20) was then carried out to find the particles paths. The particles were released on the top of cell 1, at the indicated positions. The density of the aggregates was considered to be  $166 \text{ kg/m}^3$ .

The results are presented in Fig. 5. According to the numerical simulation the deposition rate per cell was :

Table 2 Deposition rate per cell

Cell	Weight	deposition
Cell 1	40.6	58%
Cell 2	25.2	36%
non-retained particles	4.2	6%

This predictions are not too far from the experimental data of section 3, in particular, in what concerns cell 1. The lack of the last two terms on the right-hand side of equation (20) in the calculations has, however, clearly been missed.



Particles Trajectories  
Figure 5

## 5. CONCLUSION

A prototype was built where experiments on a particular type of particle separator could be performed. The experiments confirm the impression that most of the material will be retained in cell 1, yielding quantitative values for the particle deposition rates. A detailed analysis of the particles was also made here, giving specific information about their mass and size distribution.

Preliminary results concerning the numerical simulation of a solid-liquid mixture separation process were also given here. The approach uses a  $\kappa - \epsilon$  turbulence model to describe the flow field and a Lagrangian formulation for the particle field. Despite the simplicity of the approach, useful predictions were achieved which give a good idea on the separator's performance.

Any more sophisticated approach would have to incorporate a much better model on the interaction process between the velocity shear flow field and the concentration field and this is clearly out of the scope of the present work.

For the engineering results desired here the compromise between simplicity and accuracy was certainly obtained.

(Acknowledgments.) The present work was carried out under grant COPPETEC ET-120119. Further financial support was given by the CNPq through grant No 350183/93-7. The authors are grateful for the support given by the engineers of the Companhia Siderúrgica Nacional (CSN).

## 6. REFERENCES

- [1] Allen T., 1975, "Particle Size Measurement", Chapman and Hall.
- [2] Camozzato G. G. and Silva Freire A. P., 1996, "The Law of the Wall for Two-Phase Solid-Liquid Systems", submitted to publication, VI ENCIT/VI LATCYN.
- [3] Ferraz E.S.B., 1980, "Medidas de Fluxo pelo Método de Atenuação de Radiação Gama", Anais do VIII ENEMP, Curitiba.
- [4] Freitas, S.P., 1980, "Estudo das Sedimentação com Segregação Utilizando o Método de Atenuação de Raios Gamas", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.
- [5] Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 1992.
- [6] Peric M. and Scheuerer G., 1989, "CAST - A Finite Volume Method for Predicting Two-dimensional Flow and Heat Transfer Phenomena", GRS Technische Notisz SRR-89-01.
- [7] Richardson, J. F. and Zake, W. N., 1954, "Sedimentation and Fluidization", Trans. Inst. Chem. Eng., 32, 35-53.
- [8] Rashidi M., Hetsroni G. and Banerjee S., 1990, "Particle-Turbulence Interaction in a Boundary Layer", International Journal of Multiphase Flow vol.16 no 6, pp.935-949.
- [9] Rodi W., Launder B. E., Reynolds W. C., 1984, "Turbulence Models and Their Application", vol 2, Editions Eyrolles.

[10] Rogers C. B. and Eaton J. K., 1991, "The Effect of Small Particles on Fluid Turbulence in a Flat-Plate, Turbulent Boundary Layer in Air", Physics Fluids A3 (5).

[11] Szekely J., 1979, "Fluid Flow Phenomena in Metal Processing", Academic Press.

HYDRODYNAMIC SELF-DISPERSION  
OF SEDIMENTING NON-BROWNIAN SPHERES



Francisco Ricardo da Cunha

Department of Mechanical Engineering  
University of Brasília - 70910 900 - Brasília - DF - Brazil

Edward John Hinch

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics  
University of Cambridge CB3 9EW - Cambridge - England



SUMMARY

*Theoretical extensions of Batchelor's renormalization to the variance of the sedimentation velocity show that the variance diverges as the number of particles in the suspension is allowed to increase without limit. In non-Brownian systems there can still fluctuations in the velocity of the particle due to the constantly changing configurations of neighbouring particles. This randomly fluctuating particle velocity has a long time behaviour characteristic of a diffusion process which we call hydrodynamic self-dispersion. We show some computer simulations of this which reproduced the experimental correlation time and anisotropy.*

INTRODUCTION

The origin, significance and interpretation for overcoming the convergence difficulties with calculating the sedimentation velocity in a random monodisperse dilute suspension are now well understood after Batchelor (1972) and Hinch (1977). A dramatic illustration of the convergence problem in such suspension is, however, formed by the divergence of the variance  $\langle U^2 \rangle$  (the simplest measure of the particle velocity fluctuations) of the sedimentation velocity. This paradoxical situation was first noticed by Caffish and Luke (1985), who showed that Batchelor's renormalization does not resolve the divergence difficulties associated with calculating the variance of the sedimentation velocity. They found that the variance of the particle velocity in a monodisperse suspension of spheres whose the positions were randomly distributed with uniform probability would depend on the linear dimension  $\ell$  of the container, i.e. the variance would be  $O(U_s \phi \ell / a)$ . A scaling analysis based on arguments of buoyancy-driven convection in sedimentation was proposed by Hinch (1988). The scalings confirmed the result predicted by Caffish and Luke (1985).

Experimental works have also been carried out to investigate fluctuations and self-dispersion in sedimentation. Ham and Homsy (1988) carried out experiments on a random suspension for values of particle concentration ranging 2.5% to 10% under creeping flow condition. The self-dispersion coefficient parallel to gravity was seen to increase from  $\approx 2aU_s$  at  $\phi = 25\%$  to  $\approx \beta aU_s$  at  $\phi = 5\%$ . The most recent experiments in sedimentation were carried out by Nicolai et al. (1995) and Nicolai and Guazzelli (1995), who have also investigated the problem of velocity fluctuations and self-induced hydrodynamic dispersion in a monodisperse sedimenting suspension of non-Brownian spheres under condition of low Reynolds number and particle concentration in the interval  $\phi = 5\% \leq \phi \leq 40\%$ . The measurements of these experiments estimated velocity fluctuations larger than those of Ham and Homsy (1988) (between 75% and 170% of the mean), however still smaller than the theoretical predictions of Koch and Shaqfeh (1991) who suggested  $\sqrt{\langle U^2 \rangle} = 2.2U_s$ . More surprisingly the latter experiments has suggested that particle velocity fluctuations and hydrodynamic self-dispersion coefficients did not depend on the container dimension, as the inner width of the vessel varied

by a factor of four.

Finally, we should mention the related phenomenon of shear-induced hydrodynamic diffusion for which diffusivities in sheared monodisperse suspensions of spheres have been determined experimentally (e.g. Leighton and Acrivos 1987) and theoretically (e.g. Cunha and Hinch 1996). Davis (1996) summarizes the key findings and areas of discussion at a recent IUTAM symposium on hydrodynamic diffusion of suspended particles in sedimenting and shearing suspensions. The sedimentation problem addressed in the present article concerns fluctuations and dispersion as particles sediment. The important issue that we shall look at here is to see whether the particles remain randomly and independently positioned as they fall. Thus we shall observe how the positions of the spheres evolve in a box with impenetrable bottom and top and periodic sides.

ANALYSIS

For rigid spherical particles of radius  $a$  sedimenting in a incompressible Newtonian fluid of dynamic shear viscosity  $\mu$  and density  $\rho_f$ , since the inertial effects of the fluid are negligible and the time scale are large compared to the viscous relaxation time ( $a^2/\nu$ ), the appropriate equations of the fluid motion in the usual Eulerian description of an inertial frame are the pseudo-steady Stokes equations

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

where  $\mathbf{u}$  and  $p$  are the velocity and the pressure field. The above equations valid within the fluid, are supplemented by a non-slip boundary condition on the surface of each particle  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_\alpha + \Omega_\alpha \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)$  on  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha| = a$ . Here  $\mathbf{U}_\alpha$  and  $\Omega_\alpha$  are respectively the velocity and the angular velocity of the sphere  $\alpha$  with radius  $a$  and at center  $\mathbf{x}_\alpha(t)$ . In a dilute suspension of sedimenting particles the condition for the Stokes equation to be valid is  $Re \ll a/\ell^*$ , where  $\ell^*$  is the length scale characteristic of the interaction range (i.e. the mean interparticle distance). With  $\ell^* \sim O(n^{-1/3}) \sim O(a\phi^{-1/3})$  such as occurs in sedimentation, the particle Reynolds number must satisfies  $Re = \frac{\rho_f a U_s}{\mu} \ll \phi^{-1/3}$ . In addition, we consider the limit case where Péclet number is high which corresponds to a suspension of non-Brownian particles,  $Pe = \frac{aU_s}{D} = \frac{6\pi\mu a^2 U_s}{kT} \gg 1$ ,



where  $D$  is the ordinary diffusivity of a very dilute dispersion of independent spheres of radius  $a$  as first derived by Einstein. The above condition holds the hydrodynamic forces dominates Brownian motion in determining the suspension microstructure.

Owing to the long range of the velocity disturbance in a dilute sedimenting suspension the interest is in particle interactions at separation that are large compared with particle radius. We consider then the simplest level of approximating the hydrodynamic, a point-force approximation with fluid velocity governed by

$$-\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \sum_{\alpha} \mathbf{f} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}) \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Thus, with an error  $O(\phi)$  in the sedimentation velocity of the particles, we have neglected the finite size of the spheres, looking the suspension as an distribution of point forces. Here  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha})$  denotes Dirac's delta function, and  $\mathbf{f}_{\alpha}$  is the hydrodynamic force exerted on the particle  $\alpha$  by the fluid. In the absence of particle inertia,  $\mathbf{f} = \frac{4}{3} \pi a^3 \Delta \rho \mathbf{g}$ , which is just the net force of gravity with the buoyancy removed.

Consider now  $N$  point-particles settling in a periodic box of dimensions  $\ell \times \ell \times 2h$ . Let  $x_i$  denote the position of the particle  $i$ . Suppose an external force  $\mathbf{f}_i$  is exerted on the particle  $i$  and let  $\mathbf{u}_i$  be its translation velocity. In particular, we are interested in a solution in which all components of the velocity field ( $u, v, w$ ) are periodic in  $x$  and  $y$  with period  $\ell$ , the horizontal components  $u, v$  periodic in  $z$  with period  $h$ , but the vertical component  $w$  satisfying an impenetrable bottom and top condition of vanishing vertical velocity. Then we add an image system into the problem of solving Stokes flow in a wholly periodic box in order to obtain the complete solution of the new problem of sedimenting particles in an impenetrable box with periodic sides. The element needed to compute the motion of the particles taking into account the hydrodynamic interactions between them is the following equation (Cunha 1994)

$$\mathbf{U}^i = \sum_{\alpha} \sum_j^N \mathcal{M}_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,s}, \mathbf{r}_{\alpha,i}) \cdot \mathbf{f}_j + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_{\beta}} \sum_{j=1}^N \mathcal{M}_{ij}^{rs}(\mathbf{k}_{\beta}) \cdot \mathbf{f}_j \Theta. \quad (1)$$

This equation consists of two lattice sums; one in the real space over lattice vector  $\mathbf{r}_{\alpha}$  and the other into the reciprocal space over lattice vector  $\mathbf{k}_{\beta}$ . The relative position vectors are defined as  $\mathbf{r}_{\alpha,s} = [(x_i - x_j - x_{\alpha}), (y_i - y_j - y_{\alpha}), (z_i - z_j - z_{\alpha})]$  for the source and  $\mathbf{r}_{\alpha,i} = [(x_i - x_j - x_{\alpha}), (y_i - y_j - y_{\alpha}), (z_i + z_j - z_{\alpha})]$  for the image. The coupling between the particle velocities and forces, the grand mobilities matrix  $\mathcal{M}^{ps}$  and  $\mathcal{M}^{rs}$ , are both  $N \times N$  matrix of  $3 \times 3$  blocks which describe long range or far-field interaction between the particles in the physical and reciprocal space respectively. The expression to calculate the elements of the mobilities matrix  $M_{ij}^{ps}$ ,  $M_{ki}^{rs}$  and  $\Theta$  are defined in Cunha (1994) respectively as being

$$M_{ij}^{ps} = \begin{cases} G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,s}) + G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,i}) - 2G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha}) & \text{if } j = 1, 2, \\ G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,s}) - G_{ij}^{ps}(\mathbf{r}_{\alpha,i}) & \text{if } j = 3 \end{cases}$$

$$\Theta = \begin{cases} \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_s) + \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_i) - 2 \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{x}), \\ \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_s) - \cos(2\pi \mathbf{k}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_i) \end{cases}$$

Here  $\mathbf{G}^{ps}(\mathbf{r})$  and  $\mathbf{G}^{rs}(\mathbf{k})$  are the periodic Green's functions associated with the physical and reciprocal spaces respec-

tively

$$\mathbf{G}^{ps}(\mathbf{r}) = C_1 \lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{-\frac{1}{2}}^* \left( \frac{\pi r^2}{\lambda} \right) \mathbf{I} + 2\pi C_1 \lambda^{-\frac{3}{2}} \Gamma_{\frac{1}{2}}^* \left( \frac{\pi r^2}{\lambda} \right) \mathbf{r} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{G}^{rs}(\mathbf{k}_{\beta}) = C_1 [2\lambda \Gamma_0^*(\pi k_{\beta}^2 \lambda) \mathbf{I} - 2\pi \lambda^2 \Gamma_1^*(\pi k_{\beta}^2 \lambda) \mathbf{k}_{\beta} \mathbf{k}_{\beta}],$$

where  $C_1 = 1/8\pi\mu$ ,  $\Gamma_r^*(y)$  is the incomplete gamma function and  $\lambda$  is the important link parameter between the physical and reciprocal spaces. The tensor  $\mathbf{I}$  denotes the unit second-rank tensor ( $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$ ).

We shall work with dimensionless variables by considering that  $a$ ,  $U_s$  (i.e. the Stokes sedimentation velocity for an isolated particle) and  $6\pi\mu a U_s$  represent respectively the characteristic reference scales of length, velocity and force. The dimensionless parameter having a relevant significance is the volume fraction of particles  $\phi (= \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{N}{\ell^2 h})$  which is a nondimensional measure of concentration.

## GENERAL ASPECTOS OF THE SIMULATIONS

**Initial Distribution.** Some information is needed to starting with the computation of particles' trajectory in the simulation. Here the simulation all started at time=0 with the particles located randomly and independently within the impenetrable box. This kind of configuration was generated by the hypothetical process of choosing the positions of the particles centres one by one at random in  $\vartheta = \ell^2 h$ , obeying to the rule that the centre of one sphere cannot be located, however, within an excluded volume shell  $a < r < 2a$  of any other sphere. This process is equivalent to exclude the configurations for which overlappings of spheres occurs, with all allowed configurations having equal probability.

**Statistical Analysis.** All statistical calculations were performed over a significant number of particles to obtain an ensemble average over 100 independent configurations in the first stage of computer simulations (i.e. the studies at time=0) as well as over 10 realizations in studying the time evolution of the sedimentation process at the second stage of the computer simulation. We observe that even the two types of averages being different in developing the two stages of the calculations, they produced pretty close values of the sedimentation velocity, horizontal density fluctuations and velocity fluctuations corresponding to the beginning of the simulation.

The statistics routine in our program included calculations of the horizontal density fluctuation, sedimentation velocity and its variances parallel and perpendicular to the gravity direction, the velocity auto-correlation functions, the hydrodynamic self-diffusivities and correlation times. The expressions used to obtain these macroscopic properties are described in following this subsection.

**Density Number Fluctuation** The determination of the structure factor of the suspension is the simpler way of obtaining the density number fluctuation. It is defined as being

$$F(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j,k}^N e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_k(t)]} \right\rangle.$$

We were principally interested in looking at Fourier component corresponding to the box wave number  $\mathbf{k} = 2\pi(1/\ell, 1/\ell, 1/h)$  rather than particle-particle separation.

**Sedimentation Velocity.** The sedimentation velocity is given by the average velocity of the particles in the suspension defined by

$$\langle U_j \rangle = U_s \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_j^i(t) \right\rangle.$$

**Velocity Fluctuations.** The fluctuations in velocity of an individual particle in the suspension  $U_j^i(t) = U_j^i(t) - \bar{U}_j(t)$ , is a measure of the deviation of the particle velocity from the mean velocity  $\bar{U}_j$  calculated over all particles in the configuration  $1/N \sum_{i=1}^N U_j^i(t)$  or at each time step in dynamical simulation. Hence, we can define the variances of the sedimentation velocity as

$$\langle U_j^2(t) \rangle = U_s^2 \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [U_j^i(t) - \bar{U}_j(t)]^2 \right\rangle.$$

**Normalized Velocity Auto-Correlation Function.** The normalized velocity fluctuations auto-correlation functions  $C_j$  were calculated in our simulations through the following expression

$$C_j = \frac{\langle U_j^i(0)U_j^i(t) \rangle}{\sqrt{\langle U_j^i(0)^2 \rangle \langle U_j^i(t)^2 \rangle}}.$$

**Self-Diffusivity.** The self-dispersion coefficients were calculated in terms of the velocity auto-correlation function in the following manner

$$D_j = aU_s \int_0^\infty \langle U_j^i(0)U_j^i(t) \rangle dt,$$

and the corresponding correlation times can be estimated by the relation

$$t_j^c = \frac{D_j}{aU_s} \langle U_j^i \rangle.$$

Here the angle brackets denote a sum over all particles, and an average over all configurations or realizations (i.e. an average over time in the dynamic simulation).

## RESULTS AND DISCUSSIONS

In this section we present the results of the numerical simulations and, whenever possible, compare them with the experimental data, theoretical works and other recent numerical investigations.

### Results Based on Statistics over 100 Configurations.

Different numbers of particles (e.g.  $N_{max} = 170$ ) were selected to compute the statistics of the suspension over 100 independent configurations in which the particles were located randomly and independently in the box according to the above description. During the simulations the aspect ratio  $h/\ell$  remained constant and equal to 3. The particle concentrations were varied throughout the range  $0 \leq \phi \leq 3\%$ , and three different values of the aspect ratio  $a/\ell (= 0.05, 0.06$  and  $0.07)$  were considered. The main goal in this stage of the computer simulations was investigating the type of dependence of the velocity fluctuations on the box parameter  $\phi L/a$  as just starting the sedimentation process.

Microstructural changes, that is the variations in the relative arrangements of the particles, are among the most important and interesting features of the sedimentation process. The distribution of neighbouring particles around a

reference particle can be characterized by the structure factor of the suspension defined above. We found the horizontal density number fluctuation corresponding to the box wave number  $k_\perp$ , as a function of the number of particles. Figure 1 shows results of the statistics calculations of  $F_\perp(\mathbf{k}, 0)$  which were obtained by averaging over 100 initial random and independent configuration simulated. It is seen that the horizontal structure factor measured by the computer simulations is essentially independent of the number of particles exhibiting just a small degree of scatter around the unit which we attribute to the effect of the finite size of the box. In particular, the dimensionless horizontal density fluctuation is found to be just  $\sqrt{N}$  statistical density fluctuations in agreement with the predicted by the scaling analysis of Hinch (1988).

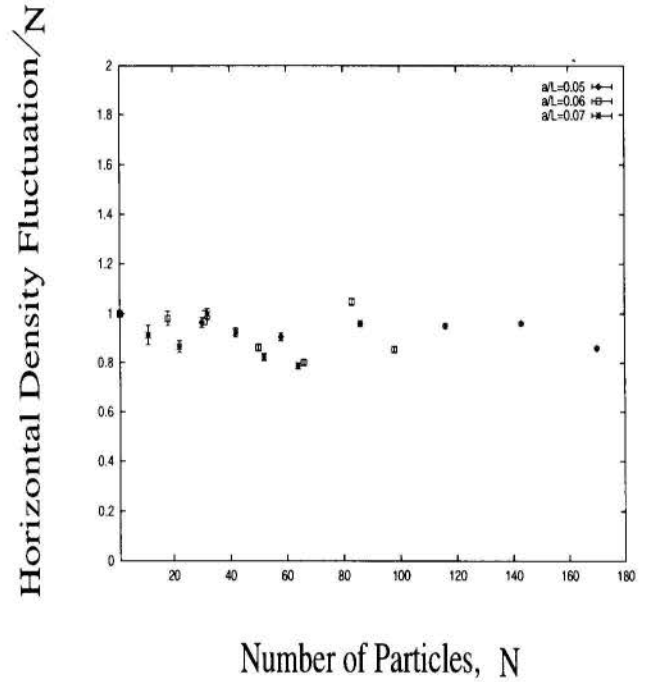


Figure 1: Dimensionless horizontal density fluctuation obtained over 100 random and independent configurations as a function of the number of particles.

In order to verify whether the observed scaling  $U' \sim \phi\ell/a$  also occurs in the computer simulations, the quantities  $\langle U_\perp'^2 \rangle$  and  $\langle U_\parallel'^2 \rangle$  were evaluated and then plotted versus the box parameter  $\phi\ell/a$  in Figure 2 (a, b) respectively. It is seen that since the data plotted lie through enough the origin the results suggest that the velocity fluctuations may be described as depending linearly on the size of the settling box if the particles were distributed uniformly random within the numerical box. Again the scatter of points appear to be associated with the finite size effect of the impenetrable box. The most striking aspect of the computer simulations was have shown that the variances in the settling velocity depends upon the linear size of the box, with variance increasing linearly with increasing the size of the box. With these numerical experiments we were able to find the same scaling for the velocity fluctuations first suggested by Caffish and Luke (1985) and Hinch (1988).

**Time Evolution.** We start the computation of particles' motion by randomly distributing a number of  $N$  particles in the impenetrable and periodic sides box. At this stage

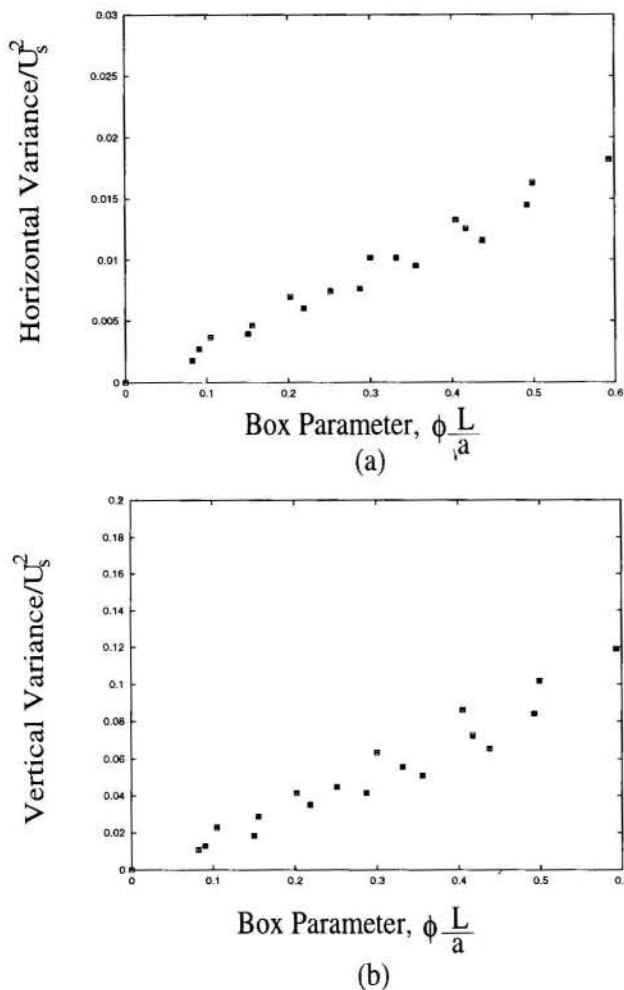


Figure 2: Dimensionless variances of the mean settling velocity of the particles as a function of the box parameter  $\phi L/a$ . (a) The variance perpendicular to the gravity and (b) the variance parallel to the gravity.

of the simulations the particle dispersion statistics was obtained over a significant number of realisations (e.g. 10) which showed to produce meaningful statistics. The volume concentrations of the particles were in the range of dilute suspension,  $0 \leq \phi \leq 5\%$ , and different number of particles were simulated. From  $N_{min} = 25$  (for  $a/\ell = 0.06$ ,  $h/\ell = 3$  corresponding to  $\phi = 1\%$ ) to a maximum value of 286 particles which was used for simulating the suspension with  $\phi = 5\%$  ( $a/\ell \approx 0.05$  and  $h/\ell = 3$ ). Usually, 100 time steps yielding a dimensionless time of 0.04 were used, and most of simulations were run with the aspect ratio  $h/\ell = 3$ . At a give time step the velocities were found by solving the equation (1), and new particle positions were provided using a fourth order Runge-Kutta algorithm.

Figure 3 shows the time evolution of the horizontal density fluctuations for different conditions of the simulated system. Here each curve was obtained by averaging over 10 independent realizations. Sometimes the number of realisations was decreased with increasing the number of particles in order to save computer time. It is seen, that the initial density fluctuations did not go way in time, indicating that convection does not decrease density fluctuations. This shows that systematic change in the microstructure of the suspension is absent, except, as expected, some oscillations

of small amplitude due to statistical noise.

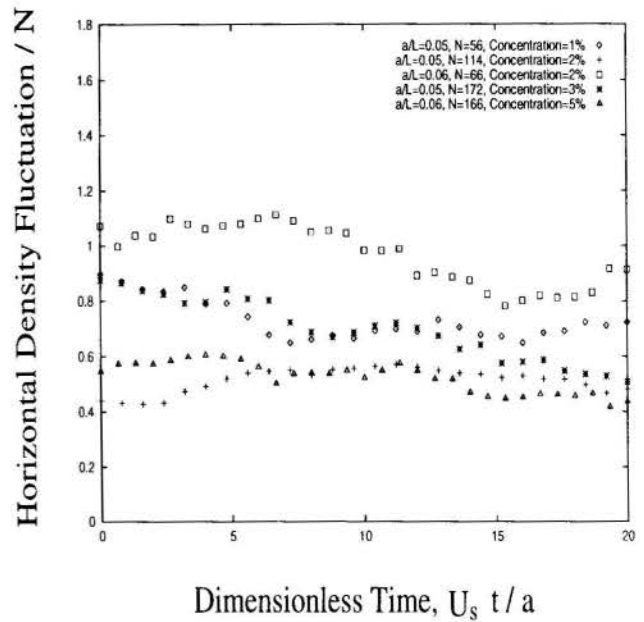


Figure 3: Results of the computer simulations for the time development of the dimensionless horizontal density number fluctuation at different conditions of the simulated system with the aspect ratio  $h/\ell = 3$ .

Apart from this, Figure 4 (a, b) shows that the large velocity variances, both parallel and perpendicular to the gravity direction, do not decay in time. The particles instead of to adopt configurations which would lead to finite variances in the sedimentation speed appear to remain nearly to the same initial structure (i.e. randomly positioned and independently), and so with velocity fluctuations remaining proportional to  $\phi \ell/a$ , as the particles fall, in a length scale substantially large ( $\approx 20a$ ). The results indicate that these computer simulations were strongly dominated by convective motions occurring in a relatively large settling distance ( $\ell \approx 20a$ ) on the length scale of the numerical box. These convective currents being developed slowly in a time scale  $t_{convective} \sim \ell/U_{\parallel}^{\prime}$ , with  $U^{\prime} \sim \langle U \rangle$  appear to have no sufficient time of producing uniform density in horizontal before some particles reached on the bottom (that is, the time scale of the computer simulations).

The computer simulations predicted fluctuations growing with the size of the box, while the experiments measured fluctuations that are independent of the size of box. One way for the theory and experiments to differ is for the positions of the particles not to be independently random. As the experiments are reproducible and the stirring is different each time, one possibility is that the initial distribution evolves some form of fluctuations not like  $\phi \ell/a$ . The difference they see are within the confidence limits. Our theoretical expectations are outside the confidence limits of the experiments. The open question that we leave here is what is the difference between placing the particles initially at random in the computer simulations and stirring the suspension in laboratory?

The long-time behaviour of the fluctuations in sedimentation speed has appeared to be a self-hydrodynamic dispersion process as the result of the viscous hydrodynamic interactions between the particles in the suspension. The Figures 5 (a, b) compares numerical and experimental (Nicolai et

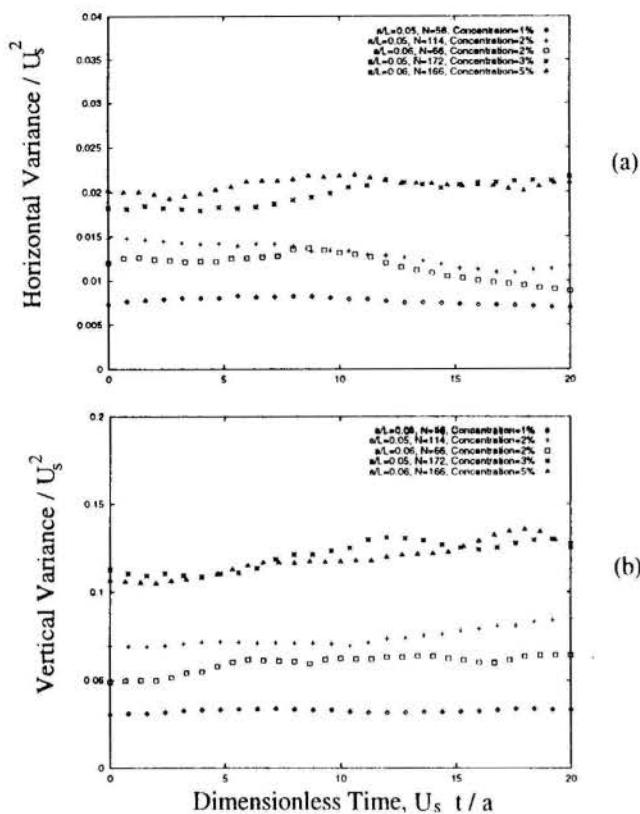


Figure 4: Results of the computer simulations for the time development of the dimensionless variances, both perpendicular to gravity and parallel to gravity (b) for different conditions of the simulated system with the aspect ratio  $h/\ell = 3$ .

al. 1995) time development of the normalized velocity fluctuation auto-correlation functions. It is seen a good agreement. The simulations and experiments both indicate that these functions decay in time as a single exponential toward zero, indicating that particle velocity becomes totally uncorrelated after long time. In all cases of the present simulations it is observed some oscillations around zero of the auto-correlation functions associated with statistical noise. The results suggest a correlation time as being approximately the time to fall through  $\approx 20$  particle radius which is pretty close to the one of Nicolai et al. (1994) measurement at 5% in particle concentration.

A complementary result corresponding to the hydrodynamic diffusivities both parallel and perpendicular to the gravity direction is displayed in Figure 6. The numerical simulation here determined values of the  $D_{\parallel} \approx 2aU_s$  which is slightly smaller than those reported by experiments. The experiments by Ham and Homsy (1988) found this coefficient increasing from  $2aU_s$  at  $\phi = 2.5\%$  to  $6aU_s$  at 5%, and the recent experiments of Nicolai et al. (1994) reported the same self-diffusivity as being  $5aU_s$ . One possible explanation for this difference is that the comparison with experiments must be made with the understanding that the values of our diffusivities depend on size of the box since they were calculated as the integral of the velocity autocorrelation functions. The laboratory experiments are at dilute limit ( $\phi = 5\%$ ), but they also have a box about 100 times the particle diameter, which is obviously impossible to copy due to the limited size of our system in simulating larger

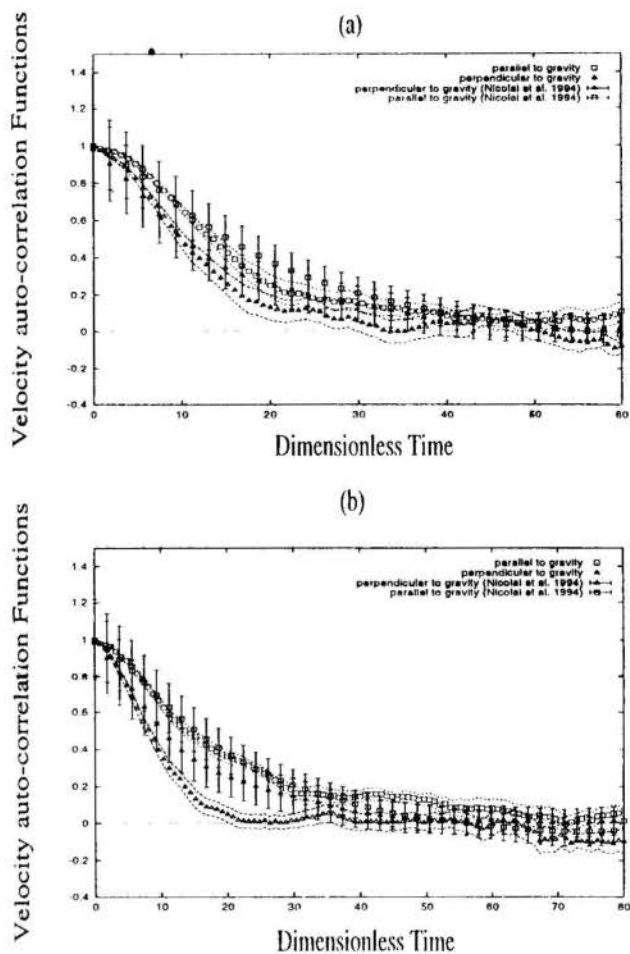


Figure 5: Normalized velocity fluctuation auto-correlation functions parallel and perpendicular to the gravity direction. (a) Computer simulations for  $h/\ell = 3$ ,  $a/\ell = 0.05$ ,  $N = 114 \Rightarrow \phi = 2\%$  and (b) Computer simulations for  $h/\ell = 3$ ,  $a/\ell = 0.05$ ,  $N = 172 \Rightarrow \phi = 3\%$ . The error bars represent experimental data from Nicolai et al. (1995) with  $\phi = 5\%$ ,  $h/\ell = 4$ ,  $h/w = 10$  and  $w/a \approx 100$ . The dashed lines indicates the uncertainly range of the present computer simulations.

number of particles.

An interesting finding with the present simulations was the constant anisotropy in velocity fluctuations, self diffusivities and correlation times being independent of the box size parameter  $\phi\ell/a$  (see Figure 7 (a, b)). The results show a strong anisotropy of the diffusion process but in realistic proportion as the experiments (Nicolai et al. 1995). It is seen that the amount of anisotropy in velocity fluctuations agrees well with results of numerical simulations by Ladd (1993) and with the recent theory of Koch (1994) both having found  $\sqrt{\langle U_{\parallel}^2 \rangle} / \sqrt{\langle U_{\perp}^2 \rangle} \approx 3$ . However the results of Ladd and Koch with respect to the ratio of diffusivities and correlation times were much different of the experiments and the present simulation. We have found  $D_{\parallel}/D_{\perp} \approx 10$  throughout all computations and Nicolai et al. (1995) experiments an 5, while they suggested an  $O(100)$ . This large discrepancy can be justified by the fact that in Ladd's numerical simulations and Koch's theory both obtained a very large anisotropy in correlations time  $\approx 9$  in contrast with



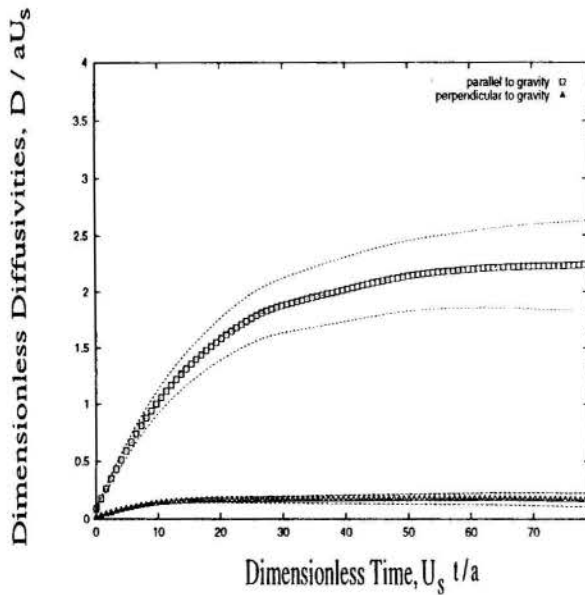


Figure 6: Dimensionless hydrodynamic self-diffusivities obtained by integrating the velocity auto-correlation functions for  $h/\ell = 3$ ,  $a/\ell = 0.05$ ,  $N = 172 \Rightarrow \phi = 3\%$ .

the one that has been shown by us and Nicolai et al. (1995) measurements, i.e.  $t_{\parallel}/t_{\perp} \approx 2$ . Essentially, his theory predicted that the large difference in the ratio of correlation times arises from the imposed periodic boundary in the vertical direction in cubic box numerical simulation ( $h/\ell = 1$ ). In this point we believe that our impenetrable box do play a vital role in simulating a sedimentation process. Physically, large fluctuations in the vertical velocity that increases with the size of the box are due to large horizontal density fluctuations, just  $\sqrt{N}$  statistical fluctuations. When a periodic bottom is considered the heavy part of the suspension falls indefinitely preserving the density excess. On the other hand if it imposed an impenetrable box, then there must be a convection current down on the heavy side, along the bottom, up the light side and cross the top. At a long time this convection decrease density fluctuations, and so reduces the correlation time, and increases horizontal fluctuations in velocity, producing the more realistic amount of anisotropy observed here. We plan, in a future publication, to study the effect of particle inertia on the fluctuations and self-diffusivities in sedimentation, and the microstructure changes when considering initial distributions of particles with a density stratification in the gravity direction.

#### REFERENCES

- Batchelor, G.K., 1972, "Sedimentation in a dilute dispersion of spheres", *J. Fluid Mech.*, **52**, 245-268.
- Caffisch, R.E., and Luke, J.H.C., 1985, "The Variance in the sedimentation speed of a suspension", *Phys. Fluids.*, **28**, 759-760.
- Cunha, F.R., 1994, "Hydrodynamic dispersion in suspensions", Ph.D. Thesis, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge University, UK.
- Cunha, F.R., and Hinch, E.J., 1996, "Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres", *J. Fluid Mech.*, **309**, 211-223.
- Davis, R.H., 1996, "Hydrodynamic diffusion of suspended particles: a symposium", *J. Fluid Mech.*, **310**, 325-335.

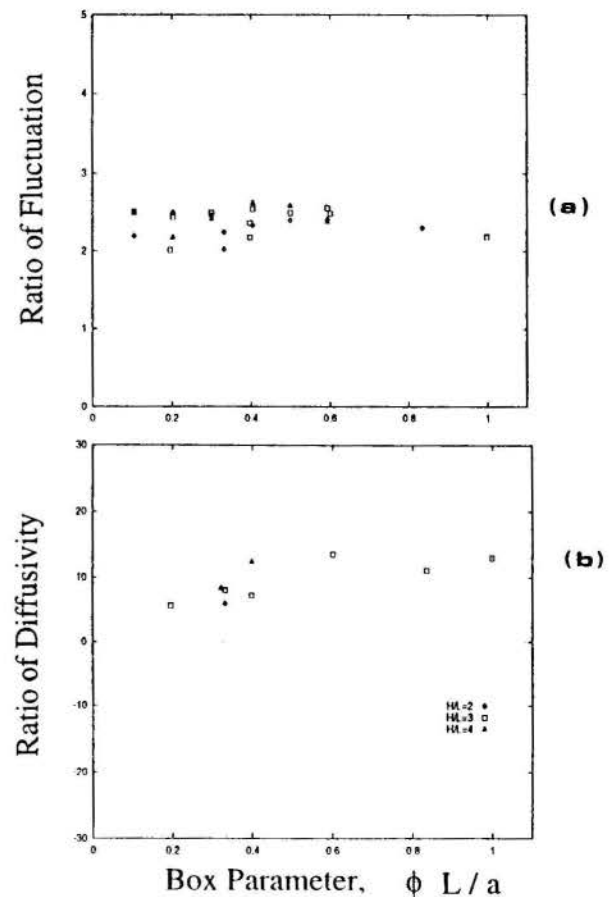


Figure 7: Ratio of anisotropy calculated during all the computer simulations. (a) Degree of anisotropy in the fluctuations, (b) in the self-diffusivities.

- Ham, J.M., and Homsy, G.M., 1988, "Hindered settling and hydrodynamic dispersion in quiescent sedimenting suspensions", *Intl J. Multiphase Flow.*, **14**, 533-546.
- Hinch, E.J., 1977, "An averaged-equation approach to particle interactions in a fluid suspension", *J. Fluid Mech.*, **83**, 695-720.
- Hinch, E.J., 1988, "Sedimentation of small particles", *In Disorder and Mixing*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 153-161.
- Koch, D., and Shaqfeh, E.S.G., 1991, "Screening in sedimenting suspensions", *J. Fluid Mech.*, **224**, 275-303.
- Koch, D., 1994, "Hydrodynamic diffusion in a suspension of sedimenting point particles with periodic boundary conditions", *Phys. Fluids*, **6**(9), 2894-2900.
- Ladd, A.J.C., 1993, "Dynamical simulations of sedimenting spheres", *Phys. Fluids A*, **5**, 299-310.
- Leighton, D.T., and Acrivos, A., 1987, "The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions", *J. Fluid Mech.*, **181**, 415-439.
- Nicolai, H., Herzhaft, B., Hinch, E.J., Oger, L., and Guazzelli E., 1995, "Particle velocity fluctuations and hydrodynamic self-diffusion of sedimenting non-Brownian spheres", *Phys. Fluids*, **7**, 12-23.
- Nicolai, H., and Guazzelli E., 1995, "Effect of the vessel size on the hydrodynamic diffusion of sedimenting spheres", *Phys. Fluids*, **7**, 12-23.





## EFEITOS DE PAREDE E POPULAÇÃO NA VELOCIDADE DE QUEDA DE PARTICULAS IRREGULARES EM FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

Carlos H.M. Sá, André L. Martins, Affonso M.F. Lourenço e Wilson B. Aguiar Jr.  
 PETROBRÁS / Centro de Pesquisas  
 Ilha do Fundão - Cid. Universitária - Quadra 7 - Prédio 20  
 21949-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil



### SUMÁRIO

*Utilizando dados experimentais obtidos através da fluidização de partículas esféricas e irregulares foram obtidas correlações para previsão da velocidade de queda de sólidos em fluidos não newtonianos. Este tipo de experimento é considerado representativo do fenômeno do transporte de sólidos resultantes da perfuração de poços, permitindo a avaliação de efeitos de parede e população.*

### INTRODUÇÃO

Um aspecto importante na engenharia de perfuração de poços de petróleo é a garantia da remoção, do fundo do poço até a superfície, dos sólidos gerados pela broca. Este transporte é feito pelo fluido de perfuração, normalmente de características não Newtonianas que escoam na região anular poço - coluna de perfuração. Uma etapa fundamental para a compreensão do fenômeno é a quantificação da velocidade de queda das partículas no fluido. Este tema vem sendo estudado há bastante tempo, através de duas estratégias distintas de experimentação: a sedimentação e a fluidização. Estes experimentos objetivam o levantamento de correlações que possam prever o transporte de sólidos em poços verticais, ou que sirvam como dados de entrada para modelos mecanicistas que descrevam o fenômeno para poços horizontais e de alta inclinação, onde há a tendência à deposição de um leito de sólidos na parte inferior do anular (Martins e Santana, 1990).

O presente estudo, baseado em um criterioso estudo de análise dimensional (Martins et al., 1994), visa quantificar a velocidade de queda de partículas de forma irregular em soluções poliméricas, considerando-se efeitos de concentração e de parede. Para tal foi realizado uma série de experimentos de fluidização visando reproduzir as fases finais da perfuração de um poço de petróleo, onde a questão do transporte de cascalhos é crítica.

### ASPECTOS TEÓRICOS

Velocidade de Queda de Partículas Esféricas em um Meio Infinito. As técnicas de sedimentação vêm sendo empregadas como alternativas simples de medidas de velocidades de queda de partículas em fluidos. Basicamente, o sistema particulado mais investigado foi o de uma esfera rígida em um fluido Newtoniano. Khan e Richardson (1987) apresentaram a seguinte equação para a previsão do coeficiente de arraste  $C_D$  com uma incerteza média menor do que 5% na faixa de  $10^{-2} < Re < 3 \times 10^5$ :

$$C_D = (2,25Re^{-0,31} + 0,36Re^{0,06})^{3,45} \quad (1)$$

onde:

$$C_D = \frac{4 d_p g (\rho_p - \rho_f)}{3 v_\infty \rho_f} \quad (2)$$

$$Re = \frac{\rho_f v_\infty d_p}{\mu} \quad (3)$$

Para a queda de uma partícula esférica rígida em um fluido não Newtoniano, existem diversas correlações de diversos autores. Porém, cada autor ajusta um determinado modelo reológico que melhor caracteriza o comportamento do fluido. Isso traz alguns inconvenientes quando se quer fazer uma análise comparativa entre as mesmas. Dedegil (1987), com uma definição mais interessante para o número de Reynolds, chega a uma correlação que se ajusta a qualquer modelo reológico, inclusive o modelo Newtoniano:

$$C_D = \frac{24}{Re_*}, \text{ para } Re_* < 8 \quad (4)$$

$$C_D = \frac{22}{Re_*} + 0,25, \text{ para } 8 < Re_* < 150 \quad (5)$$

$$C_D = 0,4, \text{ para } Re_* > 150 \quad (6)$$

Redefinindo o  $C_D$  e o número de Reynolds para:

$$C_D = \frac{2}{v_\infty^2 \rho_f} \left[ \frac{2}{3} (\rho_p - \rho_f) d_p g - \pi \tau_0 \right] \quad (7)$$

$$Re_* = \frac{v_\infty^2 \rho_f}{\tau} \quad (8)$$

onde:

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}) \quad (9)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{v_\infty}{d_p} \quad (10)$$

Porém, na maioria das aplicações de interesse, as partículas não apresentam forma esférica, possuindo formatos irregulares. Uma forma bastante usual e interessante de se representar essa irregularidade é através da esfericidade ( $\psi$ ):

$$\psi = \frac{\text{superfície da esfera de mesmo volume que a partícula}}{\text{superfície da partícula}} \quad (11)$$

Chien (1994) conseguiu correlacionar, para a faixa de escoamento turbulento e laminar, o coeficiente de arraste, o número de Reynolds e a esfericidade. O que já se torna bastante apropriado para os nossos propósitos. Em seu recente trabalho observamos a seguinte correlação:

$$C_D = \left( \frac{30}{Re} \right) + \frac{67,289}{e^{5,036\psi}}, \text{ para } 0,2 \leq \psi \leq 1,0 \quad (12)$$

Velocidade de Queda de Partículas Esféricas em um Meio Confinado. Richardson e Zaki (1954) realizaram vários experimentos de fluidização com partículas esféricas, fluidos Newtonianos e geometria cilíndrica, chegando a resultados bem definidos. Um dos resultados importantes foi a relação entre a velocidade intersticial do fluido ( $v$ ) e a porosidade do leito ( $\epsilon$ ):

$$\frac{v}{v_\infty} = \epsilon^n \quad (13)$$

Como Richardson e Zaki (1954) trabalharam com diâmetros de partículas bastante pequenos com relação ao diâmetro do cilindro, isto é, efeitos de parede desprezíveis, quando se faz  $\epsilon \rightarrow 1$ , obtém-se que a velocidade intersticial do fluido se iguala a velocidade de queda de uma partícula no meio infinito.

Laruccia (1990) realizou experimentos de fluidização por fluidos não Newtonianos de partículas irregulares em geometria tubular.

Sá (1990), trabalhando com partículas esféricas, fluidos não-Newtonianos e geometria anular, e utilizando o conceito do diâmetro hidráulico advindo da aproximação da fenda plana, também chegou à mesma forma de relação entre a velocidade intersticial do fluido ( $v$ ) e a porosidade do leito ( $\epsilon$ ):

$$\frac{v}{v_w} = \epsilon^s \quad (14)$$

Nos experimentos de Sá (1990), os diâmetros de partículas não eram desprezíveis com relação ao diâmetro hidráulico da região anular e, portanto, havia manifestação do efeito de parede. Quando se faz a porosidade tender à unidade, obtém-se que a velocidade intersticial do fluido se iguala a velocidade de queda de uma partícula na região anular considerando o efeito de parede ( $v_w$ ).

Uma forma bastante conveniente de se expressar esta velocidade é correlacionando-a com a velocidade de queda da mesma partícula em um meio infinito:

$$F_w = \frac{v_w}{v_\infty} \quad (15)$$

Através de análise dimensional, Sá (1990) correlacionou o fator  $F_w$  com os seguintes números adimensionais relevantes:

$$\Pi_1 = \frac{d_p}{D_h} \quad (16)$$

$$\Pi_2 \equiv Re_w = \frac{\rho v_w^2}{\tau_w} \quad (17)$$

$$D_h = 0,816(D_e - D_i) \quad (18)$$

A correlação encontrada foi a seguinte:

$$F_w = 1 - 0,264 \left( \frac{d_p}{D_h} \right)^{0,215} Re_w^{0,351}, \text{ para } 1 < Re_w < 20 \quad (19)$$

Teixeira e Frola (1995) também observaram o efeito de parede para partículas esféricas em fluidos Newtonianos e não Newtonianos.

Efeito de População. Richardson e Zaki (1954) com os mesmos experimentos citados anteriormente, chegaram a correlações entre o expoente "n" da Eq. (13), obtido através do cálculo da tangente no gráfico  $\log(v)$  versus  $\log(\epsilon)$ , e os mesmos números adimensionais relevantes, para diferentes faixas de número de Reynolds:

$$n = \left( 4,35 + 17,5 \frac{d_p}{D} \right) Re^{-0,03}, \text{ para } 0,2 < Re < 1 \quad (20)$$

$$n = \left( 4,45 + 18 \frac{d_p}{D} \right) Re^{-0,1}, \text{ para } 1 < Re < 200 \quad (21)$$

$$n = 4,45 Re^{-0,1}, \text{ para } 200 < Re < 500 \quad (22)$$

Sá (1990) chegou a uma correlação similar também com os seus experimentos já citados em geometria anular:

$$s = \left( 4,07 + 3,96 \frac{d_p}{D_h} \right) Re_w^{-0,211}, \text{ para } 1 < Re_w < 20 \quad (23)$$

## ESTUDO EXPERIMENTAL

O presente estudo tem por objetivo a obtenção da velocidade de queda de partículas de formato irregular, mas esfericidade conhecida, considerando o efeito de parede da geometria anular e o efeito da população de partículas em fluidos não Newtonianos, através de correlação entre os parâmetros físicos da partícula, parâmetros reológicos do fluido e geometria de escoamento. Esse trabalho estende o estudo anterior de Sá (1990) onde foram utilizadas partículas esféricas, além de ampliar a faixa do número de Reynolds generalizado.

A técnica de fluidização foi escolhida por ser considerada mais representativa do fenômeno em estudo, uma vez que

permite a determinação dos efeitos de parede e população. Além disso, esta técnica apresenta um grau de repetibilidade bastante adequado.

**A Unidade de Fluidização.** O experimento de fluidização é constituído por duas seções de testes com arranjos geométricos distintos, visando simular a perfuração de fases de 8,5 pol ( $2,2 \times 10^{-1}$  m) e 12,25 pol ( $3,1 \times 10^{-1}$  m) respectivamente, com colunas de perfuração de 5 pol ( $1,3 \times 10^{-1}$  m). Cada uma das seções de testes é composta de dois tubos de acrílico concêntricos de 1,5 m de comprimento verticalmente dispostos. A perfeita centralização do tubo interno em relação ao externo é feita com discos de acrílico de  $2 \times 10^{-2}$  m de espessura colocados nas extremidades inferior e superior dos tubos. O disco inferior apresenta orifícios uniformemente distribuídos, de modo a homogeneizar o escoamento do fluido durante o experimento. A figura 1 mostra de forma esquemática a seção de testes. A unidade de fluidização opera acoplada ao Laboratório de Simulação Física montado no Centro de Pesquisas da PETROBRAS que conta com sistemas de preparo e bombeio de fluidos, instrumentação adequada e sistema de aquisição de dados.

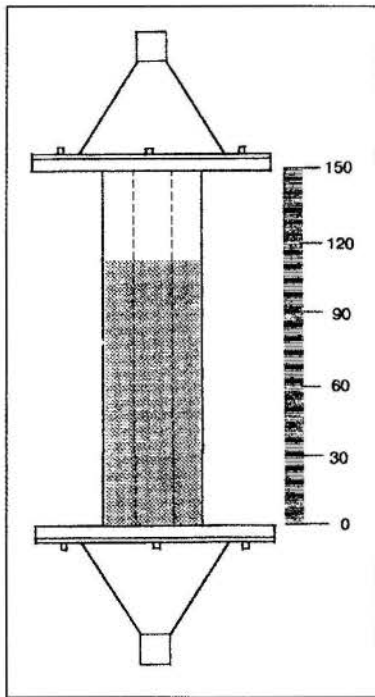


Figura 1 - Esquema da Unidade de Fluidização

**Matriz de Testes.** Foram realizados 57 testes para as seguintes condições:

- fluidos : água e soluções poliméricas de goma Xantana em três concentrações distintas;
- partículas: esferas de vidro e partículas de areia de formato irregular, representando os diâmetros de 0,25 pol ( $6,4 \times 10^{-3}$  m) e 0,5 pol ( $1,3 \times 10^{-2}$  m) para cada uma das geometrias de poço simuladas.

#### Procedimento de Testes.

- coloca-se uma massa conhecida de partículas no interior da unidade; mede-se a altura inicial do leito;
- aumenta-se lentamente a vazão até ter início a fluidização do leito. Registra-se a velocidade de fluidização calculada a partir da vazão registrada;
- incrementa-se, a partir deste ponto, a vazão em intervalos pré - definidos. Para cada vazão, registra-se a altura do leito fluidizado;
- quando o leito estiver demasiadamente expandido, registrando grandes variações na leitura da altura, encerra-se o teste.

#### ANÁLISE DE RESULTADOS

**Velocidade de Queda de Partículas em um Meio Infinito.** A partir da definição de Dedegil (1987) para o coeficiente de arraste e para o número de Reynolds generalizado, dos resultados experimentais em Dedegil (1987), Valentik e Whitmore (1965), Hottovy e Sylvester (1979), Walker e Mayes (1975), e Hopkin (1967), e utilizando o método das assíntotas de Churchill (1983), chegamos a uma expressão bastante interessante que correlaciona o coeficiente de arraste modificado, o número de Reynolds generalizado e a esfericidade (Fig. 2):

$$C_D = \left[ \left( \frac{24}{Re_g} \right)^m + \left( \frac{103,3}{e^{5,411\psi}} \right)^m \right]^{1/m}, \text{ para } 0,4 \leq \psi \leq 1,0 \quad (24)$$

$$m = 0,9779 - 0,1557\psi \quad (25)$$

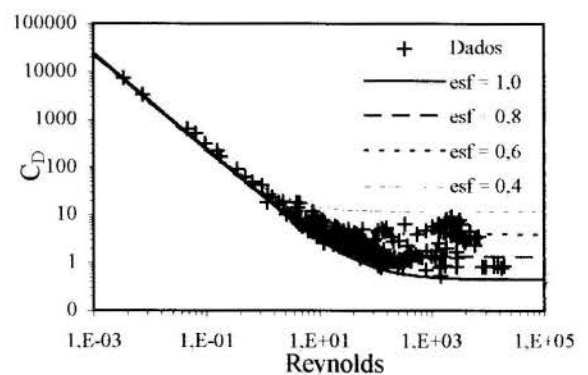


Figura 2 - Influência da esfericidade no coeficiente de arraste

**Velocidade de Queda de Partículas em Geometria Anular.** Através dos experimentos na unidade de fluidização, medindo a velocidade intersticial do fluido e a altura correspondente do leito expandido, observamos curvas com a tendência expressa na Eq. (14). A extrapolação das curvas seguintes para a porosidade de valor unitário nos dá a velocidade de queda da determinada partícula com o efeito das paredes do anular " $v_w$ ". O coeficiente angular "s" da reta formada em coordenadas bi-logarítmicas da

velocidade intersticial do fluido versus a porosidade do leito expandido nos dá a idéia do efeito de população.

As figs. 3 e 4 ilustram a influência do diâmetro da partícula na velocidade de queda de partículas irregulares e esféricas respectivamente. As partículas de maior diâmetro, devido às suas maiores massas, apresentam maior velocidade de queda sob mesmas condições.

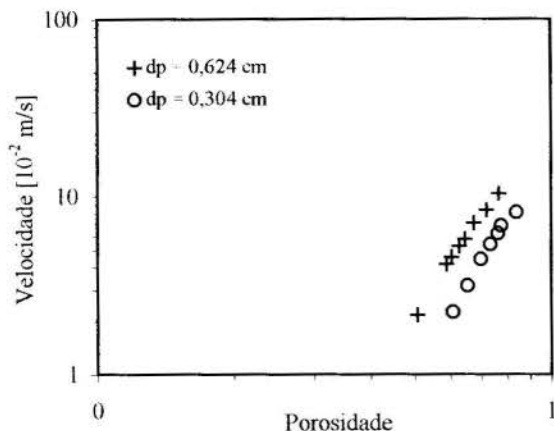


Figura 3 - Influência de  $d_p$  na velocidade de queda de partículas irregulares ( $\psi = 0,9$ )

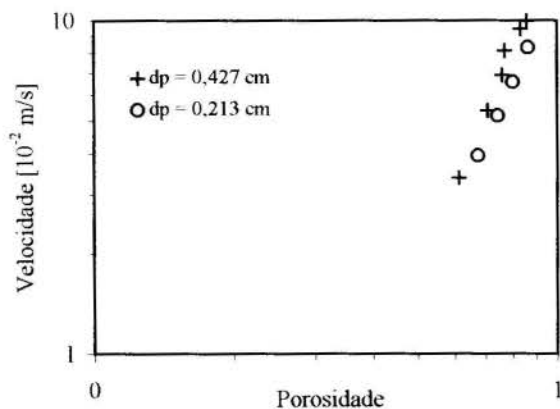


Figura 4 - Influência de  $d_p$  na velocidade de queda de partículas esféricas

A fig. 5 mostra a ocorrência do efeito de parede através da comparação da velocidade de queda da mesma partícula em um dado fluido em geometrias diferentes. Observa-se que há um maior retardo na velocidade de queda para um menor diâmetro hidráulico, demonstrando a importância do efeito de parede no transporte de cascalhos durante a perfuração de poços de petróleo.

As figs. 6 e 7 mostram a influência da reologia do fluido na velocidade de queda de partículas irregulares e esféricas

respectivamente. Nota-se que o aumento da viscosidade do fluido retarda a velocidade de queda de partículas. Tal efeito foi mais pronunciado nas partículas de formato irregular do que nas partículas esféricas.

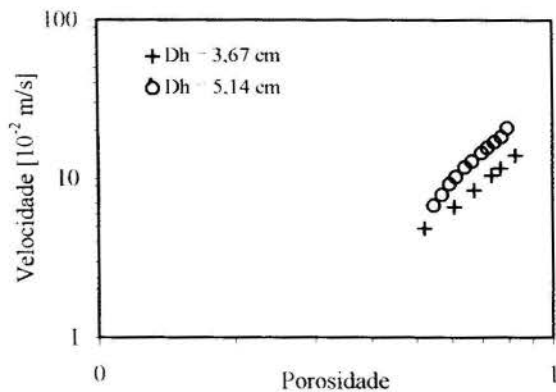


Figura 5 - Quantificação do efeito de parede na velocidade de queda de partículas irregulares.

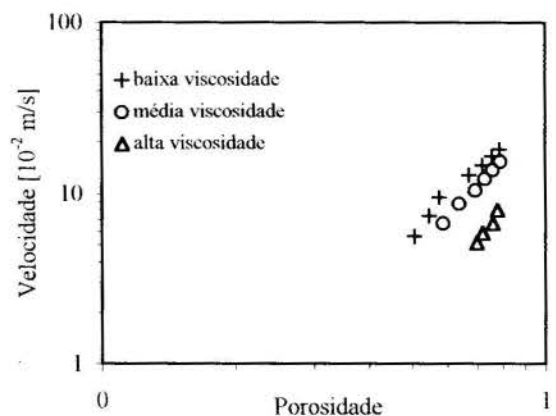


Figura 6 - Influência da viscosidade do fluido na velocidade de queda de partículas irregulares

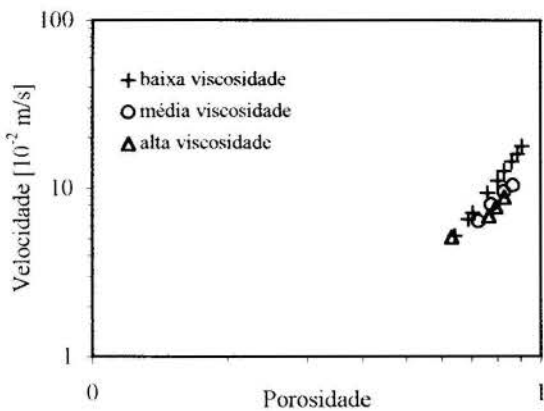


Figura 7 - Influência da viscosidade do fluido na velocidade de queda de partículas esféricas.

Através da extrapolação da velocidade de queda de uma dada partícula “ $v_w$ ” de acordo com o gráfico das figuras 3 a 7 e do cálculo da velocidade de queda da mesma partícula em um meio infinito, isto é, sem efeitos de parede, através da eq. (24), conseguimos uma correlação entre o fator de correção para o efeito de parede e os números adimensionais relevantes:

$$F_w = \frac{v_w}{v_{\infty}} = 1 - 0,800 \left( \frac{d_p}{D_h} \right)^{0,690} Re_w^{0,042}, \text{ para } 1 < Re_w < 3500 \quad (26)$$

A fig. 8 mostra a correlação entre o “ $F_w$ ” experimental e o calculado pela eq. (26). O erro médio encontrado foi de 12%.

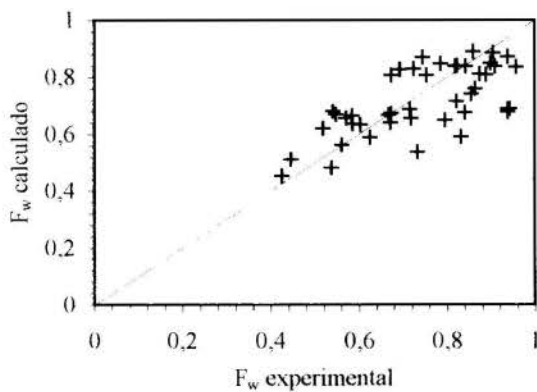


Figura 8 - Grau de adequação da eq. (26) aos resultados experimentais

Tratando o efeito de população “ $s$ ”, voltamos a correlacionar os coeficientes angulares das curvas obtidas em gráficos do tipo da figura 3 com os grupamentos adimensionais relevantes ao fenômeno. A correlação segue abaixo:

$$s = \left( 3,44 + 2,66 \frac{d_p}{D_h} \right) Re_w^{-0,082}, \text{ para } 1 < Re_w < 3500 \quad (27)$$

A fig. 9 mostra a correlação entre o “ $s$ ” experimental e o calculado pela eq. (27). O erro médio encontrado foi de 13%.

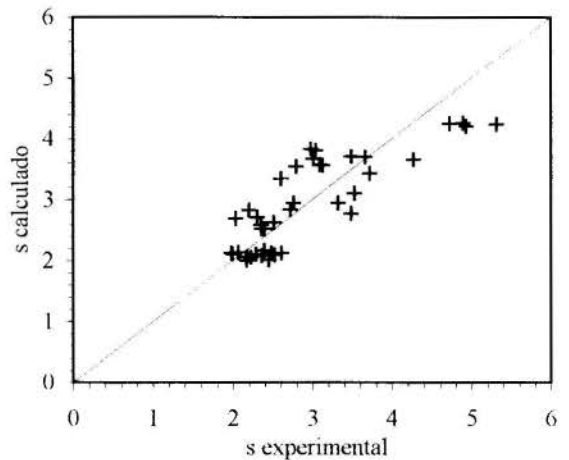


Figura 9 - Grau de adequação da eq. (27) aos resultados experimentais

## CONCLUSÕES

- Foi analisado o fenômeno da velocidade de queda de partículas irregulares e esféricas em fluidos não Newtonianos através da técnica de fluidização. Tal técnica mostrou-se precisa e adequada para os objetivos do presente trabalho;
- Os efeitos de parede e população na velocidade de queda de partículas são significativos para a ampla faixa de variáveis estudada. Conseqüentemente, a avaliação de transporte de cascalhos em poços de petróleo deve ser feita através de equações que contemplem tais efeitos;
- Foram disponibilizadas correlações empíricas de fácil uso baseadas nos dados experimentais obtidos neste estudo.

## NOMENCLATURA

- $C_D$  ≡ coeficiente de arraste;  
 $D$  ≡ diâmetro do tubo cilíndrico;  
 $D_e$  ≡ diâmetro externo da unidade de fluidização;  
 $D_i$  ≡ diâmetro interno da unidade de fluidização;  
 $D_h$  ≡ diâmetro hidráulico;  
 $d_p$  ≡ diâmetro da partícula;  
 $F_w$  ≡ fator de correção para o efeito de parede;  
 $g$  ≡ aceleração da gravidade;  
 $m$  ≡ expoente assintótico de Churchill;  
 $n$  ≡ coeficiente angular da reta no gráfico log  $v$  versus log  $\epsilon$ ;  
 $Re$  ≡ número de Reynolds;



$Re_w$   $\equiv$  número de Reynolds considerando o efeito de parede;  
 $Re_*$   $\equiv$  número de Reynolds generalizado;  
 $s$   $\equiv$  coeficiente angular da reta no gráfico  $\log v$  versus  $\log \epsilon$ ;  
 $v$   $\equiv$  velocidade intersticial do fluido;  
 $v_w$   $\equiv$  velocidade de queda de uma partícula considerando o efeito de parede;  
 $v_{\infty}$   $\equiv$  velocidade de queda da partícula em um meio infinito;  
 $\epsilon$   $\equiv$  porosidade do leito fluidizado;  
 $\gamma$   $\equiv$  taxa de cisalhamento do fluido;  
 $\mu$   $\equiv$  viscosidade do fluido;  
 $\Pi_1$   $\equiv$  primeiro número adimensional;  
 $\Pi_2$   $\equiv$  segundo número adimensional;  
 $\rho_f$   $\equiv$  densidade do fluido;  
 $\rho_p$   $\equiv$  densidade da partícula;  
 $\tau$   $\equiv$  tensão de cisalhamento do fluido;  
 $\tau_0$   $\equiv$  limite de escoamento do fluido;  
 $\tau_w$   $\equiv$  tensão de cisalhamento com o efeito de parede;  
 $\psi$   $\equiv$  esfericidade da partícula.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chien, S.F., 1994, "Settling Velocity of Irregularly Shaped Particles", *SPE Drilling & Completion*, dezembro, pag. 281 - 283.

Churchill, S.W., 1982, "The Development of Theoretically Based Correlations for Heat and Mass Transfer", *Anais, First Latin American Congress on Heat and Mass Transfer*, La Plata, Argentina, 2 de Novembro, pag. 207 - 229.

Dedegil, M.Y., 1987, "Drag Coefficient and Settling Velocity of Particles in Non-Newtonian Suspensions", *Journal of Fluids Engineering*, setembro, vol. 187, pag. 319 - 323.

Hopkin, E.A., 1967, "Factors Affecting Cuttings Removal During Rotary Drilling", *Petroleum Transactions*, junho, pag. 807 - 814.

Hottovy, J.D. e Sylvester, N.D., 1979, "Drag Coefficients for Irregularly Shaped Particles", *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, vol. 18, num. 3, pag. 433 - 436.

Khan, A.R. e Richardson, J.F., 1987, "The Resistance to Motion of a Solid Sphere in a Fluid", *Chemical Engineering Commun.*, vol. 62, pag. 135.

Laruccia, M.B., 1990, *Velocidade de Sedimentação em Fluidos Não-Newtonianos: Efeito da Forma e da Concentração de Partículas*, Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Martins, A.L., Sá, C.H.M., Barros, D.S. e Horta, P.S.S., 1994, "Projeto e Construção de Unidades Experimentais para Avaliação do Transporte de Cascalhos na Perfuração de Poços de Petróleo", *Anais, 5 Congresso Brasileiro de Petróleo*, IBP, Rio de Janeiro, outubro.

Martins, A.L. e Santana, C.C., 1990, "Modelagem e Simulação do Escoamento Axial Anular de Misturas Sólido - Fluido Não Newtoniano", *Anais, 3 Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, ABCM, Itapema, Sc, dezembro, pag. 709 - 712.

Richardson, J.F. e Zaki, W.N., 1954, "Sedimentation and Fluidisation: Part I", *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, vol. 32, pag. 35 - 53.

Sá, C.H.M., 1990, *Avaliação Experimental dos Efeitos de Parede, da Concentração de Partículas e da Reologia em um Escoamento Axial Anular Sólido-Fluido Não Newtoniano*, Tese

de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 163p.

Teixeira, M.A.O.M. e Frota, M.N., 1995, "Wall Effects for a Sphere Falling in a Non-Newtonian Fluid", *Anais, Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ABCM*, Belo Horizonte, MG.

Valentik, L. e Whitmore, R.L., 1965, "The Terminal Velocity of Spheres in Bingham Plastics", *Brit. J. Appl. Phys.*, vol. 116, pag. 1197.

Walker, R. E. e Mayes, T.M., 1975, "Design of Muds for Carrying Capacity", *Journal of Petroleum Technology*, julho, pag. 893 - 900.

#### ABSTRACT

Using experimental data obtained from spherical particles and non spherical sandstone particles in a fluidization unit in annular geometry, correlations are developed in order to evaluate the particle concentration effect on particle settling velocity ("hindering effect") in non-Newtonian fluids. This kind of experiment is thought to be representative of actual situations once the unit reproduces dynamically a cuttings transport environment. Another approach adopted in this research is the retarding effect in the particle settling velocity caused by the annulus wall, known as "wall effect".

Experimental data were obtained for four different fluids, eight particle diameters and two annular gaps. Measurements of fluidized bed heights were recorded for each fluid flow rate tested. Plots of fluid velocity against fluidized bed porosity are presented. Correlations for particle settling velocity, as functions of several dimensional analysis parameters, were established using a non linear regression technique.



## VARIAÇÃO DA CONCENTRAÇÃO DA HEMATITA DOS ESTRATOS NA FLUIDIZAÇÃO INTERMITENTE E CONTÍNUA DE MISTURAS DE HEMATITA E QUARTZO



A.A. Brazil, R. de Souza e O. D. Cuéllar  
EE/UFRJ, PEM/COPPE/UFRJ E PEMM/COPPE/UFRJ  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
21945-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

### RESUMO

Foi estudada a variação da concentração de hematita nos estratos originados no processo de separação de misturas grossas de hematita e quartzo com 10, 20, 30 e 50% em peso de hematita, na faixa granulométrica de  $-841 \mu\text{m} + 595 \mu\text{m}$  ( $-20 + 28$  malhas Tyler), submetidas a dois tipos de fluidização gasosa: contínua e intermitente, com 30 pulsos por minuto. O perfil de concentração axial durante a separação das misturas foi realizado utilizando a técnica de atenuação de raios gama. Os resultados mostraram que a fluidização intermitente permite obter uma separação mais eficiente que a contínua.

### INTRODUÇÃO

A teoria existente sobre o estudo da separação e da concentração de minérios em jigge permite concluir que durante a jigagem acontece uma seqüência de dois processos: no primeiro, a estratificação em camadas com densidades e tamanhos definidos e, no segundo, a separação dos estratos.

Existe apreciável quantidade de trabalhos experimentais sobre a segregação em sistemas fluidizados gás-sólido. Alguns destes sistemas contendo dois tipos de partículas (misturas binárias) foram estudados por diversos pesquisadores, tais como Rowe e Nienov (1976). Estes autores, estudando sistemas fluidizados onde existia diferença nos tamanhos e nas densidades das partículas, concluíram que quando existe diferença de densidade entre as partículas, a segregação é favorecida com maior intensidade do que quando existe diferença de tamanhos. Outros autores, como Hoffmann et al. (1993) e Garcia-Ochoa et al. (1993) confirmam esta conclusão.

No presente trabalho foi estudada a concentração de hematita nos estratos originados no processo de separação de misturas grossas de hematita e quartzo de densidades diferentes com dois tipos de fluidização gasosa: a contínua e a intermitente, com 30 pulsos por minuto.

### FUNDAMENTOS

A variação da concentração de hematita em relação ao tempo de fluidização nos estratos formados no processo de separação da hematita a partir de misturas de hematita e quartzo por fluidização gasosa contínua e intermitente pode ser representada pela Eq.(1) apresentada abaixo, como foi mostrado por Banks (1973) para o fenômeno de crescimento:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \quad (1)$$

onde:

**N** é a percentagem em peso de hematita em um determinado estrato;

**a** é o coeficiente de crescimento da concentração de hematita em um determinado estrato; e

**b** é o coeficiente de aglomeração.

A solução da Eq.(1) é dada pela Eq.(2):

$$N = \left[ \frac{1}{N^*} + \left( \frac{1}{N_0} - \frac{1}{N^*} \right) e^{-at} \right]^{-1} \quad (2)$$

onde:

$N^* = a/b$ ; e

$N = N_0$  quando  $t = 0$ .

A Eq. (2) também pode ser escrita na seguinte forma:

$$N = N^* \left[ 1 + \left( \frac{N^*}{N_0} - 1 \right) e^{-at} \right]^{-1} \quad (3)$$

Para o caso em que  $N^* = 1$ , e denominando  $U = N/N^*$ ,  $U_0 = N_0$ , a Eq.(3) pode ser transformada como segue:

$$U = \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{U_0} - 1 \right) e^{-at}} \quad (4)$$

**MATERIAIS E MÉTODOS**

Neste trabalho, para a determinação das concentrações de hematita e quartzo foi utilizado o método de atenuação dos raios gama, desta forma foi necessário determinar experimentalmente a curva de calibração a ser utilizado no método acima. Na calibração foram utilizadas misturas de hematita e quartzo com concentrações de hematita preestabelecidas. Esta técnica consiste de um feixe colimado e monoenergético de radiação gama de uma fonte de amerício 241, que emite um fóton de energia correspondente a 60 KeV. Como resultado deste procedimento, foi possível obter a curva de calibração representada pela Eq. (5),

$$C_m = \alpha_H \cdot 100\% = a_0 + b \cdot \ln\left(\frac{R_0(E)}{R_i(E)}\right) \tag{5}$$

$$C_m = 1.38096 + 14.0062 \cdot \ln\left(\frac{R_0(E)}{R_i(E)}\right)$$

onde o valor de  $R_0(E)$  (taxa de contagem) foi obtido com o leito fixo contendo somente quartzo, isto é, a concentração de hematita igual a zero na determinação de  $R_0(E)$ . Portanto, o valor de  $R_0(E)$  é constante e  $R_i(E)$  corresponde a uma dada concentração  $C_{Hi}$  de hematita e  $\alpha_H$  é a fração de hematita numa dada amostra do estrato.

Para levantar o perfil de concentração axial durante o processo de separação das partículas de hematita e quartzo foi instalado um sistema de medição constituído dos seguintes componentes: uma fonte radioativa (Am 241), um leito fluidizado, um detector de cintilação (NaI(Tl)) contendo aparelhagem eletrônica associada, conforme mostrado na figura 1.

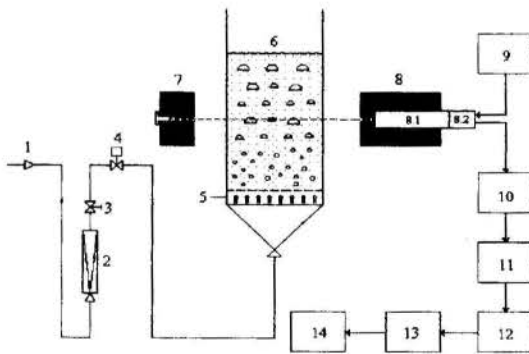


Figura 1 - Representação esquemática do equipamento experimental.

- |  |                              |
|--|------------------------------|
| 1) Alimentação de ar.                          | (8.1) Detector de cintilação |
| 2) Medidor de vazão (rotâmetro).               | (NaI(Tl)).                   |
| 3) Válvula reguladora de vazão.                | (8.2) Base do detector.      |
| 4) Válvula solenóide.                          | 9) Fonte de alta tensão.     |
| 5) Distribuidor do leito.                      | 10) Amplificador.            |
| 6) O leito fluidizado.                         | 11) Discriminador.           |
| 7) Fonte radiativa (amerício 241) e blindagem. | 12) Contador ou registrador. |
| 8) Blindagem do detector.                      | 13) Analisador multicanal.   |
|  | 14) Microcomputador.         |

No sistema descrito na figura 1, misturas de hematita e quartzo com teores de 10, 20, 30 e 50% em peso de hematita na faixa granulométrica de -841  $\mu$ m +595  $\mu$ m (-20 +28 malhas Tyler) foram submetidas a dois tipos de fluidização gasosa: fluidização contínua e fluidização intermitente com 30 pulsos por minutos, utilizando uma coluna de acrílico de 5 cm de diâmetro e 50 cm de altura. Este procedimento foi realizado após intervalos de fluidização, isto é, o sistema era fluidizado durante 2 a 5 minutos, em seguida a fluidização era interrompida e, com o leito fixo, levantava-se então o perfil de concentração da hematita com o feixe de raios gama. Após este procedimento, o sistema era novamente fluidizado durante 2 a 5 minutos e levantava-se de novo o perfil de concentração de hematita com feixe de raios gama, e assim sucessivamente até a completa segregação da mistura. A velocidade de mínima fluidização utilizada foi 1780 cm/min para a faixa de -841  $\mu$ m +595  $\mu$ m (-20 +28 malhas Tyler).

**RESULTADOS E DISCUSSÃO**

As figuras 2(a, b, c e d) e 3(a, b, c e d) mostram os resultados experimentais obtidos para a faixa granulométrica utilizada nas fluidizações contínua e intermitente das misturas de hematita e quartzo.

A tabela 1 apresenta os valores dos coeficientes  $a$ ,  $N^*$  das Eqs.(3 e 4) para as diferentes condições de operação. Nas figuras 2 e 3 (a,b,c e d) pode ser visto que a formação de um estrato com altura (H) de 5mm se completa em aproximadamente 15 minutos. Para a formação de um estrato com 15 milímetros de altura, no entanto, há a necessidade de fluidizar em torno de 25 minutos.

Para a granulometria estudada, a fluidização intermitente apresenta maior taxa de crescimento de concentração de hematita, sendo possível atingir concentrações da ordem de 100% quando a concentração da hematita não é maior que 20%.

As Eqs. (3) e (4) representam adequadamente o processo de estratificação nas condições estudadas.

A técnica da atenuação dos raios gama mostrou ser uma ferramenta adequada para a determinação do perfil de concentração das partículas ao longo do leito. Por ser um método não destrutivo, sua precisão e eficiência são muito maiores que as dos métodos convencionais utilizados.

**CONCLUSÃO**

Um estrato com altura de 5 mm e teor de 100% de hematita se completa em 15 minutos na fluidização intermitente de misturas de hematita e quartzo com granulometria -841  $\mu$ m + 595  $\mu$ m (-20 + 28 malhas Tyler). Para se obter estratos com idênticas características e com altura de 15 milímetros há necessidade de um tempo de fluidização em torno de 25 minutos.

Para a granulometria estudada, a fluidização intermitente apresenta maior taxa de crescimento da concentração de hematita.

As Eqs. (3) e (4) representam adequadamente o processo de estratificação por fluidização contínua e intermitente nas condições estudadas no presente trabalho.

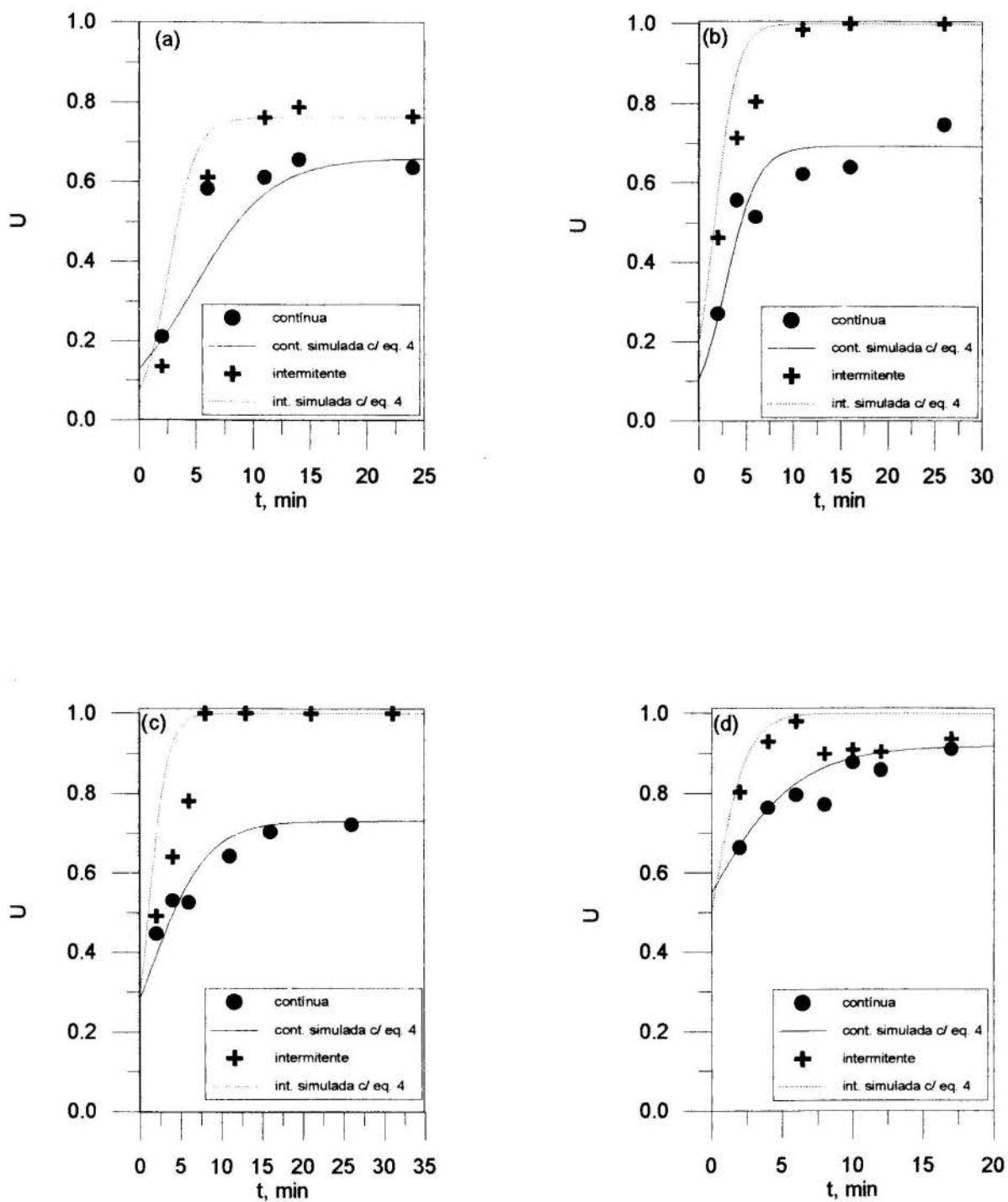


Figura 2. Variação da concentração de hematita em função do tempo nos ensaios de fluidização contínua e intermitente realizados com misturas de hematita e quartzo com: (a) 10% de hematita, (b) 20% de hematita, (c) 30% de hematita e (d) 50% de hematita em peso. Granulometria (-20, +28 malhas Tyler) e 5mm de altura do leito.

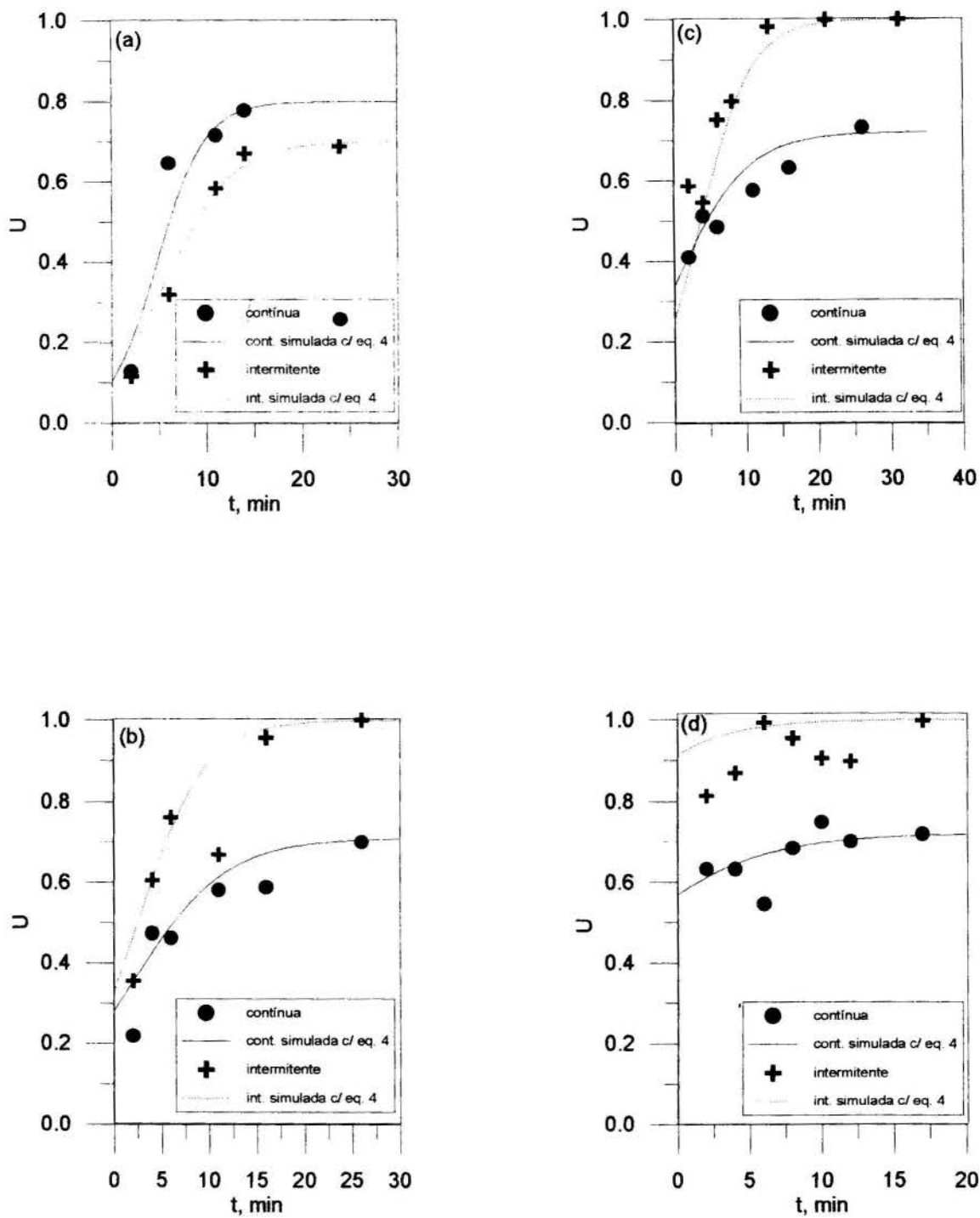


Figura 3. Variação da concentração de hematita em função do tempo nos ensaios de fluidização contínua e intermitente realizados com misturas de hematita e quartzo com: (a) 10% de hematita, (b) 20% de hematita, (c) 30% de hematita e (d) 50% de hematita em peso. Granulometria (-20, +28 malhas Tyler) e 15 mm de altura do leito.



Tabela 1 - Valores das constantes da equação 3 para a fluidização contínua e intermitente

FLUIDIZAÇÃO	H mm	f %	a	N*
CONTÍNUA	5	10	-0,2956	0,66
		20	-0,2956	0,69
		30	-0,2956	0,73
		50	-0,2956	0,92
	15	10	-0,2063	0,80
		20	-0,2063	0,71
		30	-0,2063	0,75
		50	-0,2063	0,75
INTERMITENTE	5	10	-0,8426	0,76
		20	-0,8426	1,00
		30	-0,8426	1,00
		50	-0,8426	1,00
	15	10	-0,2843	0,70
		20	-0,2843	1,00
		30	-0,2843	1,00
		50	-0,2843	1,00

#### SIMBOLOGIA

- $R(E)$  Taxa de contagem do feixe de radiação gama após atravessar um meio físico, contagem por unidade de tempo[CPS] [T<sup>-1</sup>];
- $R_0(E)$  Taxa de contagem do feixe de radiação gama antes de atravessar um meio físico, contagem por unidade de tempo[CPS] [T<sup>-1</sup>];
- X Espessura do meio [L];

- $\alpha_H$  Fração volumétrica de hematita;
- $\rho_Q$  Densidade do quartzo [ML<sup>-3</sup>];
- $\rho_H$  Densidade da hematita [ML<sup>-3</sup>];
- N Percentagem em peso de hematita em um determinado estrato;
- a Coeficiente de crescimento da concentração de hematita em um determinado estrato [T<sup>-1</sup>];
- b Coeficiente de aglomeração [T<sup>-1</sup>]; e
- N\* a/b.
- H Altura do estrato [L];
- f Porcentagem de hematita da mistura.

#### BIBLIOGRAFIA

- Banks, R.B., 1994, "Growth and Diffusion Phenomena", Springer, Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 27-35.
- Garcia-Ochoa, F. Romero, A., e Villar, J. C., 1993, "Segregation in Gas Fluidized Bed; Mixing Index for Solids of Type D", International Chemical Engineering vol. 33, n° 3, pp. 456 - 459
- Hoffmann, A.C., Janssen, L.P.B.M., e Prins, J., 1993, "Particle Segregation Fluidized Binary Mixtures", Chemical Engineering Science, vol. 48, n° 9, pp. 1583 - 1592.

- Rowe, P.N., e Nienow, A.W., 1976, "Particle Mixing and Segregation in Gas Fluidized Beds. A Review", Powder Technology, vol.15, pp. 141 - 147.

#### SUMMARY

The rate of hematite segregation by continuous and intermittent gas fluidization of beds containing hematite and quartz mixtures with 10, 20, 30, and 50% of hematite, with sizes -841 $\mu$ m + 595 $\mu$ m (-20 +28 Tyler mesh) were studied. The axial hematite concentration profile was determined using a gamma ray attenuation technique. The results shown that the intermittent gas fluidization is better than continuous gas fluidization.



### Nonlinear Flow in Industrial Cyclones

Roberto A. Clemente\* Adolfo L. Godoy\*\* Silvia A. Nebra\*\*\*

Instituto de Física\* e Departamento de Energia\*\*\* Departamento de Engenharia Mecânica\*\*  
 Universidade Estadual de Campinas Universidade Metodista de Piracicaba  
 13083-970 - Campinas - Brasil 13450-000 - Santa Bárbara d'Oeste - Brasil



#### SUMMARY

*The inviscid flow of an incompressible fluid inside the conical part of an industrial cyclone is considered. The problem is treated with spherical coordinates and it is reduced to a partial differential equation for the stream function. The usual approximation of slow radial variation is applied and suitable hypotheses, on the total head and azimuthal velocity circulation functional dependence with the stream function, are introduced. This allows to obtain radial and azimuthal velocity profiles free from singularities, even without an air core. Such profiles depend on two parameters related to the geometry of the cyclone and to the value of the maximum stream at a given radius.*

#### INTRODUCTION

Industrial conical cyclones are widely used for different purposes, such as chemical or mineral separation and drying. They consist essentially of a cylindrical section with a central tube, the finder, connected to a conical section with a discharge tube (see fig. 1). An inlet tube is attached to the top section of the cylinder in such a way that the fluid enters tangentially the cyclone, swirling downwards within the cone and exiting through the finder.

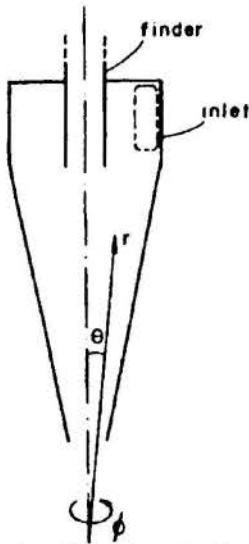


Fig. 1 - Schematic view of a cyclone together with indication the spherical coordinate system to be used.

Several works have been devoted to modelling the flow inside the cyclone (Bloor and Ingham, 1973, 1984, 1987; Davidson, 1988a, 1988b; Hsieh and Rajamani 1988, 1991; Hwang et al., 1993; Malhotra, et al. 1994), where analytical and numerical treatments have been presented together with some experimental data. Simpler models assume the flow as inviscid (Bloor and Ingham, 1973, 1984, 1987; Davidson, 1988; Hwang et al., 1993) and the resulting flow pattern always presents singularities at the symmetry axis of the conical section if an air core is not allowed. Such unphysical characteristic is due to the free, or almost free, vortex

assumption for swirl velocity. Usually, such physical troubles are ascribed to the absence of viscosity (both newtonian or turbulent) in the model equations, and indeed when this is taken into account, in numerical studies, singularities disappear and better agreement with experimental data is achieved (Davidson, 1988b; Hsieh and Rajamani, 1988, 1991; Malhotra et al., 1994). In the present work it is shown that even with an inviscid model, singularities can be eliminated and flow pattern strongly resembling the experimental data can be obtained. The analysis is restricted to the conical section of industrial cyclones without an air core and without underflow for simplicity. The fluid will be assumed inviscid and the flow will be represented in terms of a stream function as usual. Since for stationary inviscid flow with axisymmetry the total head and the azimuthal velocity circulation are functions of the stream function only, attention will be paid to the hypotheses to be made on these two quantities in order to eliminate singularities at the symmetry axis. These hypotheses make the partial differential equation for the stream function a non-linear one, in such a way that when the usual assumption of slow variation along the conical section is made, it reduces to an ordinary non-linear differential equation with two parameters.

#### MODEL EQUATIONS

Spherical coordinates  $r, \theta, \phi$  with the origin at the apex of the conical section will be used (see fig. 1) and the flow of an incompressible and inviscid fluid inside the cone will be considered. Assuming the flow stationary and axisymmetric around  $\theta = 0$ , it is possible to express the divergence free velocity of the fluid as:

$$\vec{v} = \frac{\nabla \Psi \times \hat{e}_\theta}{2\pi r \sin \theta} + \frac{\Gamma \hat{e}_\theta}{2\pi r \sin \theta} \quad (1)$$

where  $\Psi(r, \theta)$  is a stream function and  $\Gamma(r, \theta)$  is the azimuthal velocity circulation. In absence of viscosity the momentum balance equation implies  $\Gamma(r, \theta) = \Gamma(\Psi)$  and  $P/\rho + V^2/2 = H(\Psi)$  where  $P$  and  $\rho$  are the pressure and density of the fluid and  $H$  is the total head function. Then, the stationary equilibrium equations can be reduced to a single scalar partial differential equation for  $\Psi$ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = -4\pi^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{dH}{d\Psi} - \frac{d}{d\Psi} \frac{I^2}{2} \quad (2)$$

Since the angle of the conical wall is typically very small ( 5 to 7 degrees ) it follows  $\theta \ll 1$  and  $\sin \theta \approx \theta$ . Moreover, the small inclination of the conical wall suggests that  $\Psi$  should slowly vary along  $r$ , in such a way that  $\partial^2 \Psi / \partial r^2$  should be very small when compared with other terms in Eq (2) and it may be neglected (this last assumption will be better quantified a posteriori ) With these assumptions Eq (2) simplify to :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -4\pi^2 r^4 \theta^2 \frac{dH}{d\Psi} - r^2 \frac{d}{d\Psi} \frac{I^2}{2} \quad (3)$$

At this point some hypotheses on  $H$  and  $I$  are necessary. Previous hypotheses done in others works (Bloor and Ingham, 1973, 1984, 1987, Davidson, 1988a, Hwang et al, 1993) have resulted not appropriated since they gave singularities for the flow at the axis of simmetry. Since  $H(\Psi)$  and  $I(\Psi)$  must be physically acceptable even when  $\Psi$  vanishes, Taylor series expansions in  $\Psi$  should be acceptable. Moreover, since near the axis of simmetry  $\Psi$  should be proportional to  $\theta^2$  in order to maintain finite the radial velocity and  $\Gamma(r \sin \theta)^{-1}$  should vanish lineary with  $\theta$  in order to give the fluid rotating at most as a rigid body, the first term in the Taylor expansions of  $H$  should be a constant ( $\propto \Psi^0$ ). Here, it will be assumed  $H = \text{constant} = H_0$  and :

$$I^2 = \alpha^2 \Psi^2 \left( 1 + \frac{2\beta\Psi}{3} \right) \quad (4)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are also constants.

Introducing a new variable  $x = (\theta / \theta_{\max})^2$ , being  $\theta_{\max}$  the position of the conical wall, and defining  $\Psi = Q(r) F(x)$ , with  $Q(r)$  the maximum value of  $\Psi$  for a given radius, in such a way that  $F(x)$  is a positive function that vanishes at  $x = 0$  and  $x = 1$  and has the maximum value equal to unity, it is possible to obtain the following non-linear differential equation for  $F$  :

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = -\frac{a^2}{4x} F(1 + bF) \quad (5)$$

where according to the assumed hypotheses  $a^2 = \alpha^2 r^2 \theta_{\max}^2$ , and  $b = \beta Q(r)$ . In order  $F$  to have a maximum,  $b$  must be comprised between minus unity and infinity. The case  $b = 0$  has an analytical solution  $F_{b=0}(x) = 0.8 a x^{1/2} J_1(a x^{1/2})$  with  $a = 3.83$ , and  $J_1$  is the regular Bessel function of first order. In this last case  $F_{b=0}$  has it maximum at  $\theta = x^{1/2} = 0.63$  and  $b = 0$  has to be intended as  $Q = 0$ , which should correspond to absence of flow. For  $b > 0$  the maximum of  $F$  occurs for  $x > 0.63$  while for  $-1 \leq b < 0$  the maximum occurs for  $x < 0.63$ . Moreover, for  $b > 0$   $F$  becomes more peaked while for  $-1 \leq b < 0$  it becomes flatter at its maximum. Since in experiments the maximum of  $\Psi$  occurs at  $x \approx 0.6$  and the radial flow is concentrated near the axis of simmetry and the wall, in the following section equation (6) will be numerically integrated only for negative values of  $b$ .

## NUMERICAL RESULTS

The Eq (6) has been numerically integrated in the interval  $0 \leq x \leq 1$  with the following conditions :

- i) when  $x \rightarrow 0$ ,  $F \rightarrow \text{const. } x$ ;
- ii)  $F(1) = 0$ ;
- iii)  $F = 1$  is the only maximum of  $F$  in the interval.

This happens only when  $a$  and  $b$ , interpreted as parameters, take suitable values,  $a(b)$  is plotted in fig.(2) for negative  $b$

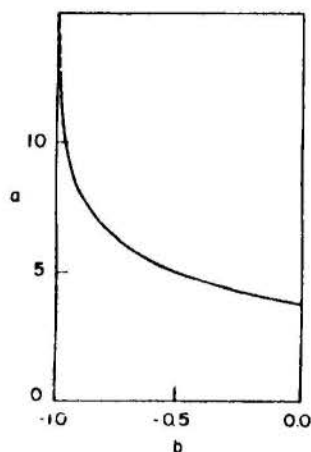


Fig 2 - Plot of the parameter  $a = \alpha r \theta_{\max}$  versus negative values of  $b = \beta Q(r)$ .

Since  $a = \alpha r \theta_{\max}$  and  $b = \beta Q(r)$  it is also possible to quantify at this point the slow radial variation assumption, it should be valid if

$$\frac{r^2 \theta_{\max}^2}{Q} \frac{d^2 Q}{dr^2} = \frac{a^2 \theta_{\max}^2}{b} \frac{d^2 b}{da^2} \ll 1 \quad (6)$$

From the results of fig. 2, the first term of eq. (6) has been numerically calculated as a function of  $b(r)$  for some typical values of  $\theta_{\max}$  and the curves are shown in fig. 3.

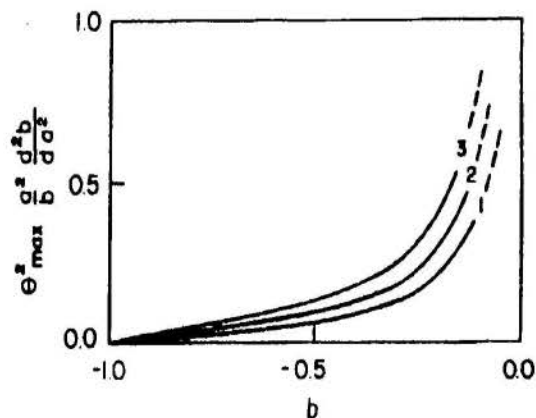


Fig 3 - Estimation of the accuracy of the slow radial variation approximation resulting from equation (7) as a function of parameter  $b$ . Curve 1 corresponds to  $\theta_{\max} = 5$  degrees, curve 2 to  $\theta_{\max} = 6$  degrees and curve 3 to  $\theta_{\max} = 7$  degrees.

As it can be seen, for typical values of  $\theta_{max}$ , the first term of the Eq (6) is lower than 10 % if  $b < -0.5$ , correspondingly  $a > 5$ . Therefore, in the following it will be assumed that the model is reasonably valid only in the region of the conical section for which  $a > 5$  and  $b < -0.5$ .

The larger allowed value of  $a$  should correspond to the finder level ( $r = r_f$ ), this may be estimated by relating the average azimuthal circulation at the inlet to the maximum value of  $\Gamma$  at  $r = r_f$ . For example, assuming  $S$  the effective area of the inlet tube,  $R$  its average distance from the axis of the conical section,  $Q_0$  the entry stream and that approximately half of the entering azimuthal circulation of the fluid is lost from the inlet to the finder level, it may be obtained:

$$\pi R Q_0 / S \cong \alpha Q_0 (1 + 2b/3)^2 \quad (7)$$

Since  $R \cong r_f \theta_{max}$ , it results:

$$a \cong \frac{\pi R^2}{S} \frac{1}{(1 + 2b/3)^2} \quad (8)$$

Typical cyclones have values of  $\pi R^2/S$  in the range of 7 to 12 in such a way that for negative  $b$  the larger value of  $a$  should be larger than 7 up to 20.8. According to fig 2, when  $b = -0.999$ ,  $a = 20.4$ , if such values are assumed to correspond to the finder level, according to the present model the flow should be well described up to  $b \cong -0.5$  and  $a \cong 5$ . This means that half of the input stream is maintained inside the conical section up to approximately one fourth of the height of the finder ( this arise from the relations  $a = \alpha r \theta_{max}$  and  $b = \beta Q(r)$ ). However, different results can be obtained if different  $a$  are assumed to correspond to the finder level; for example if  $a = 12.75$  it follows  $b = -0.99$  and half of the entry stream will again be recovered at  $a \cong 5$ ,  $b \cong -0.5$ , correspondingly  $r/r_f \cong 0.4$ . This is quite different from previous analytical models; for example in the model of Bloor and Ingham (1987)  $Q(r) = Q_0/2$  when  $r/r_f = 0.7$ .

In order to better illustrate this features, the function  $F(\theta/\theta_{max})$  is shown in figure 4 for different values of  $a$  and  $b$ .

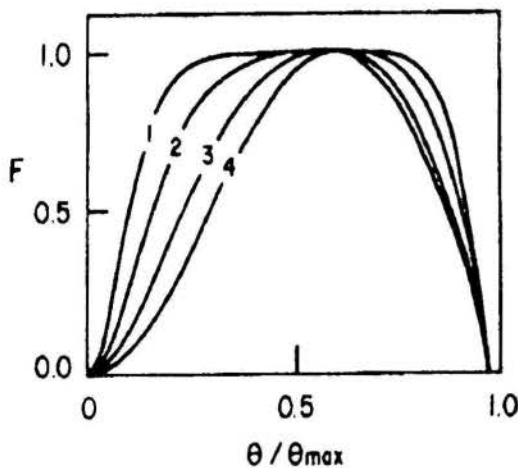


Fig. 4 - Plot of the function  $F$  versus  $\theta/\theta_{max}$  for several values of  $a$  and  $b$ . Curve 1 corresponds to  $a = 20.4$ ,  $b = -0.999$ , curve 2 to  $a = 12.75$ ,  $b = -0.99$ , curve 3 to  $a = 8.0$ ,  $b = -0.9$  and curve 4 to  $a = 5.0$  and  $b = -0.5$ .

In figure 5, equally spaced constant  $\Psi$  surfaces inside the cone are shown for the case in which at the finder level  $a = 12.75$ , for graphical reasons  $\theta_{max}$  has been expanded to 30 degrees.

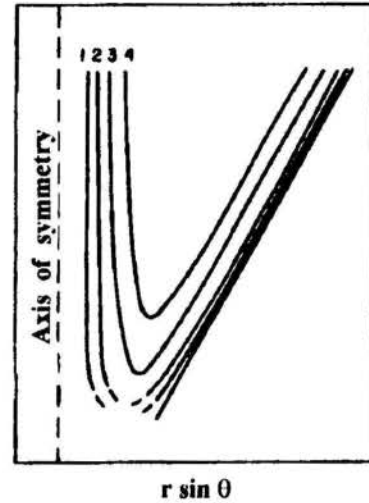


Fig. 5 - Plot of equally spaced constant  $\Psi$  curves in a  $(r, \theta)$  plane. The broken line represents the axis of symmetry and for illustration the conical wall angle has been chosen to be 30 degrees. The curves corresponds to  $a = 12.75$  at the finder level, curve 1 corresponds to a fifth of the maximum value of the stream at the finder level, curve 2 to 2/5 and so on.

As it can be seen, as  $b$  approaches minus unity the function becomes more and more flat at its top. As a comparison,  $F$  corresponding to the model by Bloor and Ingham (1987) for small angles is  $-2.718 \times \ln x$ , which is very close to the curve number 4 with small difference near  $x = 0$ .

From the present model the following velocity profiles can be obtained :

$$v_r = \frac{1}{2\pi r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \cong \frac{\alpha^2 b}{\beta} \frac{dF}{\pi a^2 dx} \quad (9)$$

and the azimuthal fluid velocity is:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r \sin \theta} \cong \frac{\alpha^2 b}{\beta} \frac{F}{2\pi a \sqrt{x}} (1 + 2bF/3)^{1/2} \quad (10)$$

The velocity profiles  $v_r$  and  $v_\theta$  are plotted in  $|\alpha^2/\beta|$  units in figure 6, for the same pairs of values for  $a$  and  $b$  of figure 4, the broken lines represent the corresponding free vortex profiles for  $v_\theta$  that take the same values that the present model at the inversion of  $v_r$ .

As it can be seen the profiles do not present any singularity, the azimuthal velocity near the axis of symmetry is like that of a rigid body, after its maximum, for values of  $b$  close to -1, it is like a free vortex and then it goes to zero at the conical wall. The radial velocity presents a maximum on the axis of symmetry, suffers an inversion close to  $\theta/\theta_{max} \cong 0.6$  and reaches a negative value at the conical wall

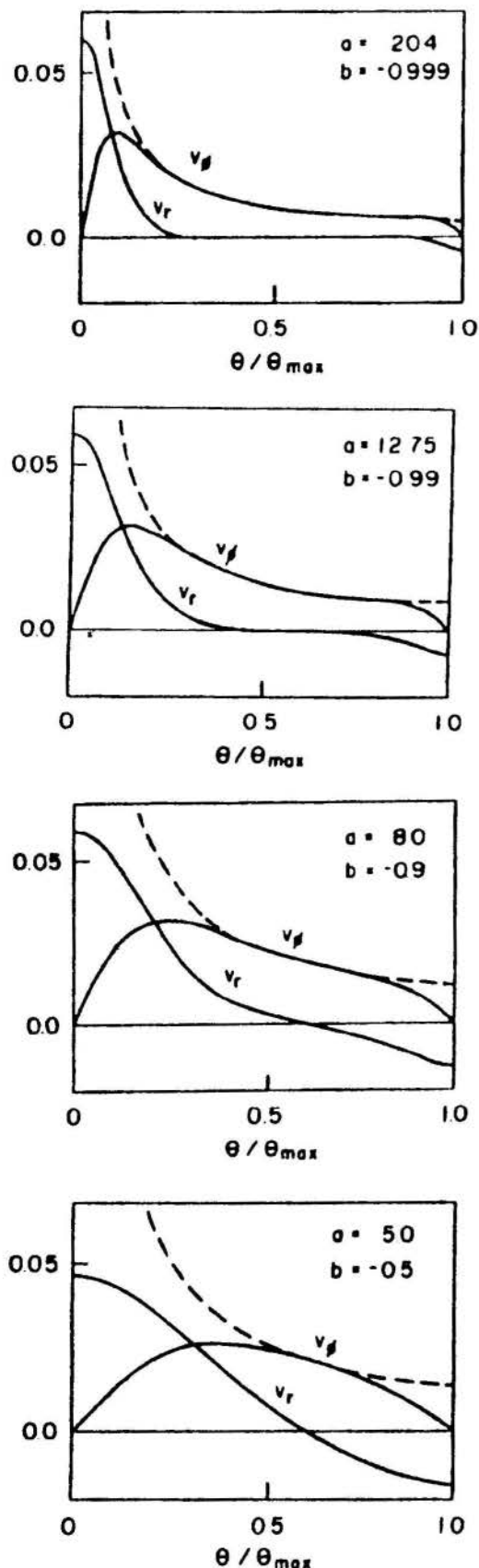


Fig. 6 - Radial and azimuthal velocity profiles corresponding to different values of the parameters  $a = \alpha r \theta_{max}$  and  $b = \beta Q(r)$  as indicated. The broken lines represent the azimuthal velocity corresponding to a free

vortex with the same azimuthal velocity at the inversion of the radial velocity. The profiles are plotted in  $[\alpha^2 \beta]$  units.

It is of interest to note that an almost fixed relation between the maximum radial velocity and the maximum azimuthal velocity of about two, exists at any radial level. This aspect seems not to be measured in experiments. However, it is worth to note that practically no reliable measurements of the radial velocity, at the axis of the conical section, in absence of underflow exist in the literature.

The  $v_\theta$  profile is not presented since in this model it is implicitly neglected, however, if one is interested, estimates for it could be obtained by integrating the continuity equation.

### CONCLUSIONS

A theoretical model for the flow of an inviscid and incompressible fluid inside a conical hydrocyclone has been presented. The results show that physically acceptable velocity profiles can be obtained thanks to appropriate assumptions on the functional dependence with the stream function, of the total head and the azimuthal velocity circulation. Singularities at the symmetry axis of the cyclone, typical of previous inviscid models, have been eliminated. As a result of the model, for fixed radial levels, an almost constant ratio of about two exists between the maximum radial velocity at the axis of symmetry and the maximum azimuthal velocity. Such result, absent in previous inviscid models, seems to be exaggerated in view of published measured velocities. However, it must be pointed out that almost all experiments were done with underflow and many of them with an air core, also the uncertainty in velocity measurements near the axis of symmetry are not negligible due to fluctuations and asymmetric effects. In order to better compare the model with experiments it will be necessary to extend it for allowing air cores, underflow and recirculation, in these cases the boundary condition for  $v_\theta$  at the conical wall will be modified substantially, while in the present model it must vanish, with these new conditions finite values are allowed and possibly better agreement with experiments will be reached. Anyway, this will be the subject of future work.

*Acknowledgments* - This work was partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq, Brazil).

### REFERENCES

- Bloor, M.I.G. and Ingham, D.B., 1973, "Theoretical investigations of the flow in a conical hydrocyclone", Trans. Instn. Chem. Engrs., Vol. 51, pp 36-41.
- Bloor, M.I.G. and Ingham, D.B., 1984, "A theoretical investigation of the fluid mechanics of the hydrocyclone". Proc. Filtration Soc., Vol. July, pp 266-269.
- Bloor, M.I.G. and Ingham, D.B., 1987, "The flow in industrial cyclones". J. Fluid Mech., Vol. 178, pp 507-519.
- Davidson, M.R., 1988a, "Similarity solutions for flow in hydrocyclones". Chem. Eng. Science, Vol. 43, pp 1499-1505.



Davidson, M.R., 1988b, "Numerical calculations of flow in a hydrocyclone operating without an air core". *Appl. Math. Modelling*, Vol 12, pp 119-128.

Hsieh, K.T. and Rajamani R.K., 1988, "Phenomenological model of the hydrocyclone. Model development and verification for single-phase flow". *Int. J. Min. Processing*, Vol 22, pp 223-237.

Hsieh, K.T. and Rajamani, R.K., 1991, "Mathematical model of the hydrocyclone based on physics of fluid flow". *AIChE J.*, Vol. 37, pp 735-746.

Hwang, C.C., Shen, H.Q., Zhu, G. and Khonsari, M.M., 1993, "On the main flow pattern in hydrocyclones". *J. Fluid Eng.*, Vol. 115, pp 21-25.

Malhotra, A., Branion, R.M. and Hauptmann, E.G., 1994, "Modelling the flow in a hydrocyclone". *Can. J. Chem. Eng.*, Vol. 72, pp 953-960.

# Improvement of a Sugarcane Separator Efficiency Using Numerical and Experimental Techniques

Roberto M. Girardi, Nide G.C. R Fico Jr.  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
São José dos Campos - SP- 12228-900

João L. F. de Azevedo  
Instituto de Aeronáutica e Espaço  
São José dos Campos - SP- 12228-904

## SUMMARY

*This work describes the authors's effort to improve the efficiency of a sugarcane separator. The work is part of COPERSURCAR's effort to improve the overall productivity of their members. Numerical techniques are combined with experimental analysis in order to save on both time and money. The flow is modeled by the 2-D Navier-Stokes equations on unstructured grids. Several configurations are analyzed numerically before the selection of the most promising one. The selected geometry is then studied at the laboratory where the final optimization occurs.*

## INTRODUCTION

The last decades have been witnessing an impressive decrease in computational costs due to both cheaper hardware and more efficient numerical algorithms. On the other hand, the costs of performing experiments have been steadily increasing in recent years. However, one should bear in mind that the experimental approach has the capability of producing the most realistic answers for many flow problems. Therefore, it should not be completely replaced by computational methods in engineering design. Rather, there should be an effort to use both methodologies in order to optimize the overall design costs.

Recently, the authors were contacted by COPERSUCAR to perform improvement of the efficiency of a dry sugar cane separator. This sort of equipment uses an air jet to separate sugar cane from straw and dirt. The short time available to do the job and the complex flow field indicated to the combination of numerical and experimental techniques.

This paper describes an approach where numerical techniques combine with experimental analysis in an actual engineering development project. The numerical part of the work indicated among many possible solutions the one that had a better chance to succeed. In this phase a finite volume Navier-Stokes solver was used on an unstructured mesh. This phase was very important in the sense that the computer solutions were quickly obtained and this enabled the authors to make changes in the geometry rapidly. An "optimum" geometry was selected; afterwards the work went on in the laboratory. During this stage all necessary measurements, including some video taping for visualization of important flow aspects, were undertaken on an acrylic model. This procedure proved to be very efficient in saving both time and money.

## STATEMENT OF THE PROBLEM

There are several different concepts for cleaning sugar cane. Some producers like to do it in the field; others concentrate the work on big separators away from the plantation field. The later has the potential to process cane of different sizes. The work done in the present paper is related to the second approach. A sketch of the separator original geometry appears in Fig. 1. The mixture of sugar cane, straw, and dirt is fed at the top of the first chamber -- as it falls it interacts with the air jet. The sugar cane should fall on the mat located at the bottom of the first chamber. The rest of the mixture should go into the second chamber mat. The inefficiency of the original configuration motivated the authors to spend some effort to improve it.

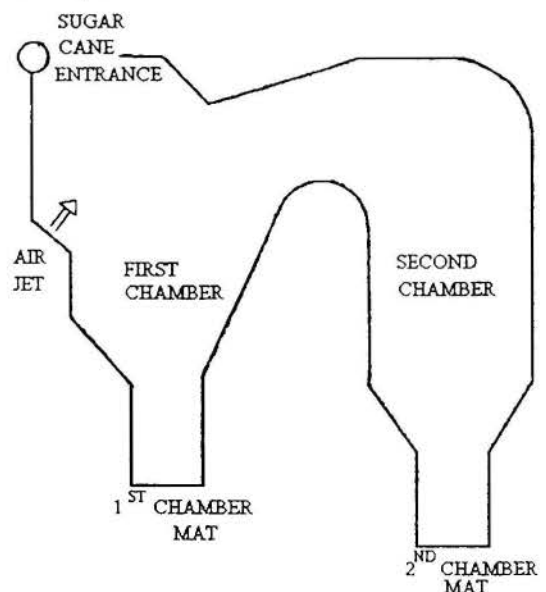


Figure 1 -- Sketch of the original sugar cane separator.

## NUMERICAL STUDY

This section describes the numerical study of the flow inside the sugar cane separator. The ultimate goal is to simulate the trajectory of each representative element of the mixture fed into the separator in order to improve the efficiency of the cleaning process. This is done in two steps. In the first one, the flow is modeled using a CFD code on an unstructured grid. The second step uses the calculated flow field as input to a program that determines the trajectory of representative components of the mixture. These are sugar cane, different kinds of straw (dry or humid), and dirt particles (small, medium or large).

Besides the low separation efficiency there was also an environmental problem because of the higher-than-atmosphere pressure inside the separator. A fog made up of dirt is continuously surrounding the separator, as a consequence of the high pressure inside it. As many people work in that area it is desirable that the atmosphere there remains as clean as possible. To satisfy the two basic requirements a great number of internal configurations were investigated. The total number of cases numerically contemplated was about ten. Clearly if the work was totally an experimental one the time needed for such a through study would be too long.

**Brief Description of the Numerical Code.** The CFD code models the flow using a 2-D Navier-Stokes laminar formulation in a finite volume context. The authors remark that, for a cell centered approach, the control volume used for the integration of governing equations is formed by each triangular cell itself. In present approach, fluxes at volumes' interfaces are computed by simple averages. A fully explicit, 2nd order accurate, 5-stage hybrid time-stepping scheme is used. For steady state problems the code has a local time stepping option. The objective in this case is to keep an approximately constant CFL number throughout the whole field. In order to keep the numerical solution stable numerical dissipation terms must be explicitly introduced in the scheme. In the present work, the artificial dissipation operator is formed as a blend of undivided Laplacian and Biharmonic operators (Azevedo, 1993). All boundary conditions were implemented with the use of "ghost" volumes.

**Grid Generation.** An advancing front grid generation scheme was implemented which is capable of automatic generation of 2-D unstructured meshes composed of triangles. The approach used here can be seen as an extension of the work developed by Lo(Azevedo, 1993). Typical meshes have around 3,000 elements.

**Trajectory Calculation.** As already mentioned, it is possible to calculate the trajectory of the mixture elements, after the flow field, for a given geometry, is obtained. The code written for this purpose reads from the CFD solution all necessary flow variables at each point. The trajectory is calculated based upon the frontal area and mass of each particular element and also upon the forces which act upon that element (gravity and drag).

**Numerical Results.** A "goose neck" configuration one is of the many the configurations tested -- see fig. 2. For better clean efficiency the jet position and angle were modified in respect to the original configuration. Further, the bump separating the two chambers was lowered to allow more particles to enter the second chamber. The "goose neck" is added to the second chamber and it is a concept that uses centrifugal force to separate dirt and straw from the air stream. The numerical solution shows that the air jet is

restricted to a small region of the first chamber. In other words, the jet decays along its center line very rapidly. It is also observed that the jet opens up quite a bit. This result was not in the authors' expectations. The same behavior appears in all other cases studied. Later on, in the laboratory, it was seen that the air jet is much more concentrated than it appears in numerical results (fig. 2). In fact, this behavior is related to mesh refinement in that region and to the imposed boundary conditions. It is important to bear in mind that the code is 2-D and the problem has some important 3-D aspects. However, the dominant qualitative flow aspects were predicted and thus the code effectively helped in the selection of the most promising geometry for the sugar cane separator. This particular configuration produced an undesirable high pressure inside the chambers. This is mainly because the air was discharged to the atmosphere at a considerable high velocity. This configuration is also geometrically complicated from the constructive point of view, thus all the above reasons led the authors to seek for another solution.

After many different trials, the authors came up with the fluid-wall concept. The main idea is to create a localized pressure loss that induces the jet to change direction abruptly. Due to their greater inertia the dust and straw particles follow by a different path when the flow changes direction abruptly crossing the "fluid wall". This mechanism allows clean air to be discharged to the atmosphere and the particles to be collected at the second chamber (see fig. 3). The numerical flow field obtained in this case is considerably more encouraging than the previous one. In the configuration shown in fig. 2, the mass flow passing through the "goose neck" is insufficient to promote separation using centrifugal effect. Moreover, a considerable amount of air (carrying straw and dust) leaves the separator by the sugar cane inlet (entrance). The improvements obtained by the "fluid wall" concept are shown in fig. 3. There is a great reduction in the mass flow leaving by the entrance due to low pressure loss in the upper channel where the air is conducted to the atmosphere. Additionally, the air exhausts the separator close to the ground, avoiding the spreading of contaminated air.

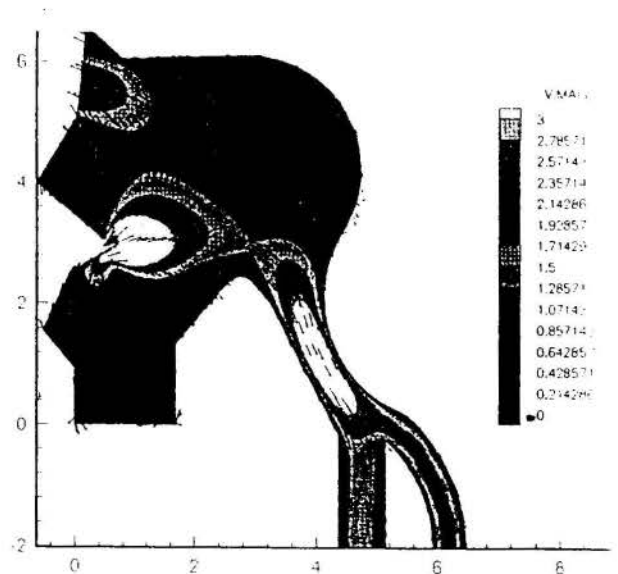


Figure 2: Numerical flow field for the "goose neck" concept.

Among all separation concepts tested by the numerical study, the "fluid wall" is the simplest to construct and is the most promising one for improving separation efficiency and for solving the environmental problems mentioned above.

The trajectory study showed in figure 4 indicates that the separator efficiency may be considerably increased by this new concept. It is seen that most of the particles are captured in the second chamber. The major problem is, of course, related to the heavier particles. The authors are also aware that in practice a much greater number of particles will be crossing the jet at the same time degrading the performance. There is still much work ahead in the laboratory to the final optimization of the new separator internal geometry. On the other hand, there is no doubt about the importance of the numerical work developed. Without it the work would have been unfeasible.

### DIMENSIONAL ANALYSIS

In the present work, a small model located in the laboratory is used to obtain experimental data for the solid particles' paths. These results are useful to develop the geometrical configuration in order to improve the separation process. The above analysis must be extrapolated to the large industrial configuration and the problem is to guarantee that the non-dimensional paths of the solid particles are the same. This procedure can be done if the non-dimensional numbers related to the phenomena under study are the same for the model and for the industrial plant. In order to apply the Buckingham (White, 1986) theorem, all parameters related to the phenomena under study must be considered. For the flow with solid particles, such parameters are: Solid particle density ( $\rho_p$ ), Fluid density ( $\rho$ ), Fluid viscosity ( $\mu$ ), Configuration characteristic dimension (H), Gravity acceleration (g), Drag force (D) acting on the solid particle, Characteristic velocity (V), Distance along X-axis (X), Distance along Y-axis (Y) and Time (t). The above variables were specified assuming that the solid particles are subjected to the gravity force as well as to the drag force (which appears due to the interaction of the solid particle with the fluid flow). Such drag force depends on the particle dimension, fluid flow velocity, fluid density and viscosity. Gravity acceleration, particle density and dimension completely define the weight force acting on the solid particle. Finally, the particle paths must be determined and, therefore, space and time have to be considered.

The 10 dimensional variables listed above are defined by 3 basic dimensions (mass, length and time). Considering Buckingham (White, 1986) theorem, 7 non-dimensional parameters ( $\pi$ 's) are involved in the present problem. In order to guarantee that the non-dimensional paths of the solid particles are the same in the model and in the industrial configuration, these 7  $\pi$ s must have the same value. The most significant non-dimensional equations are:

$$\frac{t_M V_M}{H_M} = \frac{t_P V_P}{H_P} \quad (1)$$

$$\frac{g_M H_M}{V_M^2} = \frac{g_P H_P}{V_P^2} \quad (2)$$

where subscripts "M" and "p" represent, respectively, parameters in the model and in the prototype (industrial configuration) and the scale factor "Fe" is defined by  $H_M/H_P$ . The other non-dimensional numbers are: drag coefficient (Cd), Reynolds number (Re), density ratio ( $\rho_p/\rho$ ) and non-dimensional coordinates (X/H and Y/H).

Equations (1) and (2) can be interpreted in two different ways. For the first interpretation, time (t) is considered the same for the model and for the prototype. This will lead to erroneous conclusions. Namely, that the experiments in the model must be conducted in a place with different gravity acceleration.

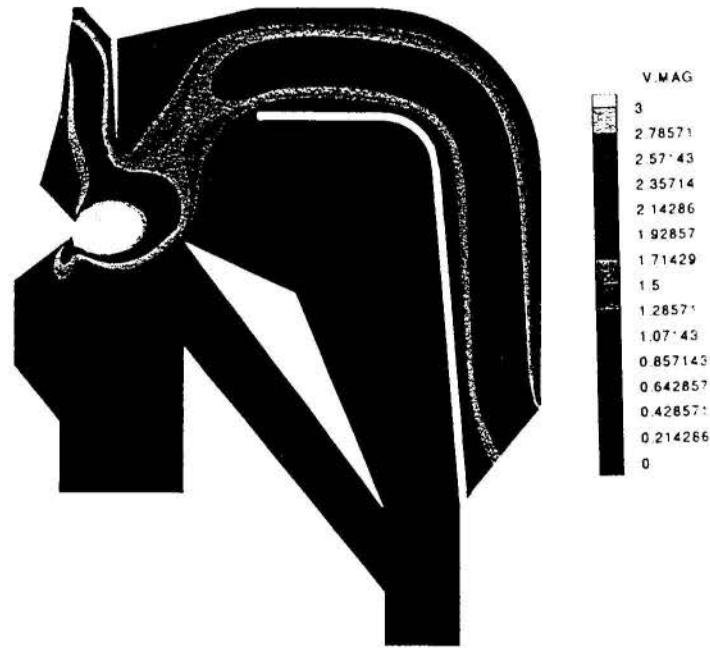


Figure 3: Numerical flow field for the fluid-wall concept

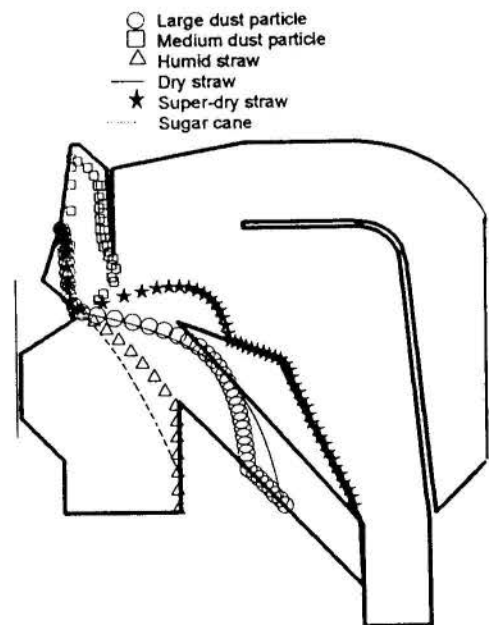


Figure 4: Particle paths for sugar cane, straw and dust obtained through the numerical simulation.

In the second interpretation, gravity accelerations in the model and in the prototype are the same. In this case, equation (2) leads to

$$V_M = V_P \sqrt{\frac{H_M}{H_P}} = V_P \sqrt{(Fe)} \quad (3)$$

Considering the above result in equation (1), one obtains

$$t_M = t_P \sqrt{\frac{H_M}{H_P}} = t_P \sqrt{(Fe)} \quad (4)$$

Equation (3) shows that the characteristic velocity in the model must be lower than in the prototype and this result must be applied for the flow and for the solid particles. With equation (4) one verifies that the time in the model is lower than in the industrial configuration. This result must be interpreted as the time necessary to a particle to move from the starting position (entrance) up to the end of its path. In this case, the above result is natural because the model is smaller than the prototype.

The other non-dimensional parameters, indicate that the drag coefficient (Cd) and the solid particle densities must have the same value in the model and in the industrial configuration. Reynolds number must also have the same value in both situations. Therefore, this can not be satisfied because the characteristic velocity in the model should be greater than the velocity in the prototype, and such situation is in opposition to the information obtained from eq. (3), as discussed above. This problem is common for several practical situations and in the present case, eq. (3) will be satisfied and the experiments will be conducted for different Reynolds numbers. For the present case, this non-dimensional parameter (Re) has little influence on some aspects of the flow, but the overall pattern is not changed. The drag coefficient of the solid particles could be affected by Re, but in the present situation, the particles are bluff bodies and then, Cd is practically insensitive to Re.

In order to validate the above similarity analysis, a numerical simulation was used to calculate the paths of particles subjected to gravity and drag forces. Such simulation was performed for the model and for the prototype (for each case, the correct dimensions are used and the scale factor is 1/10), considering the configuration presented in Fig. 5, which is representative of the device used to separate particles with different masses by using centrifugal effect. The numerical values used for each simulation is presented in table 1 and the non-dimensional paths for fine dust are also showed in Fig. 5, where perfect agreement can be observed.

In the above table, all numerical values are in SI units. The particle reference area in the model is 100 times lower than in the prototype due to the scale factor (1/10). On the other hand, as the particle density is the same, the particle mass in the model is 1000 times lower than in the prototype, because the volume ratio is 1/1000. Here, it is interesting to mention that the important parameter for the drag force calculation is the ratio between particle mass and reference area, which is not invariant as is the particle density. Particle and flow velocities are given for the initial position of the paths presented in Fig. 5. In the other points of the path, particle velocity is obtained from the Newton's second law and the flow velocity is calculated through a panel method (potential flow) appropriated for internal configurations. Clearly, potential flow is not an adequate model for calculating the flow inside the configuration considered, but, in this case, it was used only to compare the

non-dimensional paths, for the validation of the dimensional analysis.

TABLE 1: Values used to perform the numerical simulations in the model and in the prototype

Parameters	Prototype	Model
Characteristic length	10	1
Particle mass	$2.6 \times 10^{-3}$	$2.6 \times 10^{-6}$
Reference area	$7.5 \times 10^{-3}$	$7.5 \times 10^{-5}$
Drag Coefficient	1.4	1.4
Particle velocity	10	3.162
Flow velocity	10	3.162

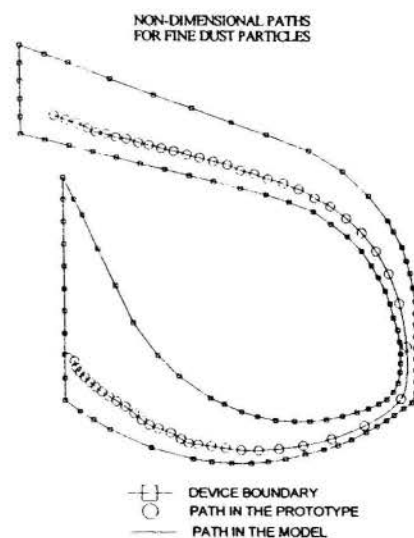


Figure 5: Numerical simulation of particle paths.

## EXPERIMENTAL APPARATUS

The model shown in the Fig. 6 was constructed 10 times smaller than the prototype and this scale factor was chosen because all geometrical aspects can be well defined in the model and due to limitations of the fan available in the laboratory, necessary to establish the flow inside the model. Such fan is of centrifugal type, with 5 Hp of power, capable to furnish  $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$  with a pressure difference of 400 mm  $\text{H}_2\text{O}$ .

In order to perform visualization of the flow and of the particle paths, most of the model was built with transparent material (acrylic). The air velocity inside the model was controlled by a cone placed at the entrance section of the centrifugal fan. The velocity of the air jet entering the model has to be measured with good accuracy, because the separation process and similarity between model and prototype depend on such parameter. For measuring this velocity, a Pitot tube was placed at the jet entrance section and a Betz manometer was used to obtain the dynamic pressure.



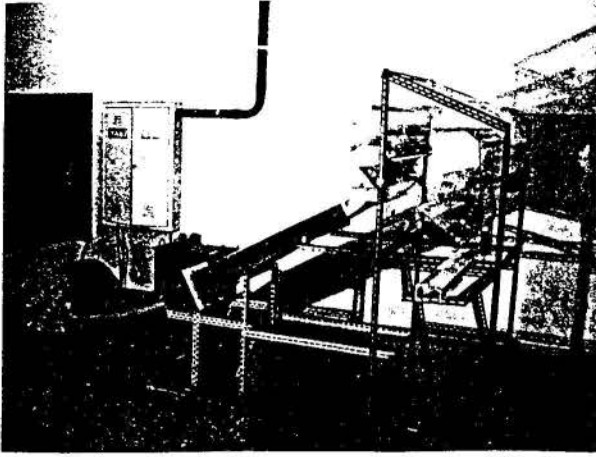


Figure 6: Experimental apparatus.

Flow visualization inside the model was made through wool tufts fixed on the walls, at one extremity of a rod. The later device was used for flow visualization far from the wall surfaces. This procedure was very useful in helping to understand the flow pattern; and therefore improving the separation process by making the necessary changes in the separator internal geometry.

In order to study the particle paths, all experiments were filmed with a video camera fixed on a tripod. Illumination is very important and it was made by a 600 W lamp placed on a support. This support, the filmed region of the model and the video camera have to form an angle of approximately  $45^\circ$  and this information was obtained through experiments. Finally, an important detail is the installation of a black surface behind the model, used to avoid light reflections and to improve the definition of the particle paths.

The first step of the experimental procedure of the present work is to establish a flow inside the model, with a velocity lower than that one used in the industrial installation. This velocity ratio is equal to the square root of the scale factor and it was defined by the similarity analysis presented in the preceding section.

The ratio between mass and surface area of the particles launched to the interior of the industrial installation are shown in the table 2. The particles used in the experiments with the model are presented in the table 3, where the ratio between mass and surface area has to be approximately 10 times lower than that one shown in the table 2 (see the preceding section). Comparing tables 2 and 3, it is observed that the crepe paper simulates a particle lighter than the super dry straw and that the bamboo simulates a particle heavier than the sugar cane. These two particles and the intermediate ones, presented in the table 3, simulate a set of particles, which can be found in the industrial installation.

Other important step is the flow visualization study. A flow mapping was obtained with a wool tuft fixed at a rod extremity. The flow pattern was obtained with such technique and, in particular, the flow directions were observed mainly along the particle paths. This study was very useful to explain some unexpected behavior observed in the particle paths.

Table 3: Mass (M) over frontal area (A) of the particles in the industrial plant.

Particle	Mass/Area ( $g/m^2$ )
sugar cane	20.600
green straw	5.570
dry straw	1.380
super dry straw	350

Table 4: Mass (M) over frontal area (A) of the particles used in the laboratory model.

Particle	Mass/Area ( $g/m^2$ )
crepe paper	26
common paper	75
Bristol paper	245
sand paper	340
cardboard	550
aluminum sheet	1.000
Bamboo	2.680

All the particles presented in the table 4 have 5 mm of width. For each type of particle two lengths (150 and 30 mm) were used to verify the influence of this parameters on the particle paths, because cut (in pieces of 30 cm) or full sugar cane (and, as a consequence, sugar straw) can be used to feed the industrial installation under study. For each particle type, 7 sets (with 10 particles each) were launched to the interior of the model. In this case, 70 particles (140 particles, considering the two lengths) were used to study the path envelope of each particle type. Therefore, considering that 7 types were used in this work, one can conclude that 980 particles were launched in the present experiment.

At the end of a set of experiments, where 980 particles were launched to the interior of the separation device, the film was watched several times (some times in slow motion) in order to observe the behavior of particle paths and problems involving interaction of the particles with the flow. This procedure was very useful because changes in the configurations were proposed to solve the problems mentioned above.

## RESULTS

The flow pattern is sketched in the Fig. 7. The air jet, coming from point A, is deflected upward and forms a "fluid wall", due to the high pressure loss in the intermediate channel. At the leading edge of the upper surface (US), the flow is divided: (i) One part flows below the US and near the vertical surface (VS-1), generating the great recirculating region inside the intermediate channel. (ii) The other part is directed to the external surface (ES) and is divided. One part forms the recirculating region near the vertical plate (VP). The other part flows through the upper channel and exits from the model. Above the upper surface there is a recirculating region, induced by the flow near the external surface.

When the flow near VS-1 reaches the model bottom region, there is another division due to the presence of the bottom surface (BS). One part forms the vortex near BS and the other part flows

inside the lower channel. This result is undesirable because, as will be seen ahead, some particles fall inside the lower channel and are dragged by the air flow to the cane chamber.

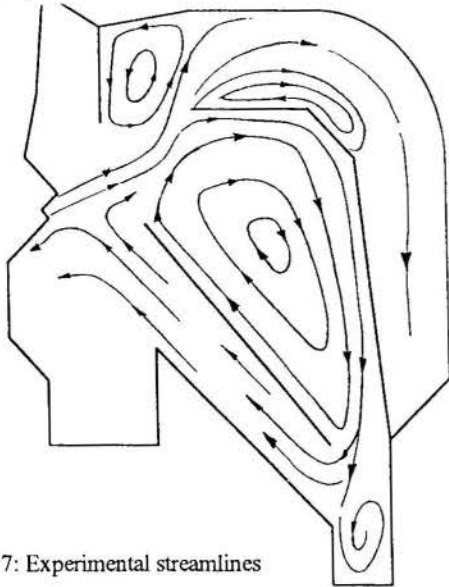


Figure 7: Experimental streamlines

The path envelopes for some particle types are shown in the Fig. 8. For the crepe paper, few particles go into the upper channel and leave the model (in some cases, particles fall on the upper surface and stay there due to the recirculating region). The great majority of particles travel very near US and VS-1 falling into the straw chamber. For the Bristol paper, a shock between the particles and the leading edge of the mid surface is observed. As a consequence, great part of the particles falls down in the cane chamber, dragged by the air flowing through the lower channel. For the cardboard, the particles fall on the lower surface and slid to the straw chamber, due to their weight. Some particles have their path deflected downward due to the fluid flow and fall directly (or after a shock with the leading edge of the lower surface) to the cane chamber. Bamboo is the particle that simulates the sugar cane. The great majority of such particle falls directly in the cane chamber. Nevertheless some particles go to the lower channel and slid to the straw chamber. Such behavior is not influenced by the flow, but it is due to manner the particles interact with a plate located just above the air jet exit. This interaction is stronger for the smaller particles, causing greater losses to the straw chamber. The other particles, shown in the table 3, have intermediate behavior and their paths are not shown due to space limitations.

**CONCLUDING REMARKS**

The procedure adopted in the present work was very useful because time and money were saved in the development of a new engineering product. With the numerical work some concepts for solving the problem were analyzed and the best configuration could be chosen. Some discrepancies were detected between the numerical and experimental solutions, because a 3D flow has to be calculated by a 2D code. In this case, the 2D boundary conditions have to simulate 3D flow, and such problem does not have a unique solution. Further, mesh refinement studies and a more accurate tuning of the artificial dissipation terms are highly desirable.

The particle path study was made through visualization of the flow and of the particle paths. With this procedure it was possible to detected some undesirable characteristics of the flow field inside the model and some problems with the particle paths, which decrease the separation process efficiency. After the first set of experiments related in the present paper, modifications were implemented in the model and the experimental procedure was repeated, and, at the end of the experimental work, the internal configuration was different from the model presented in Fig. 8. Such complementary work was not presented because it is out of the scope of this paper, whose main objective is to report a method to develop new products through a combination of numerical and experimental works.

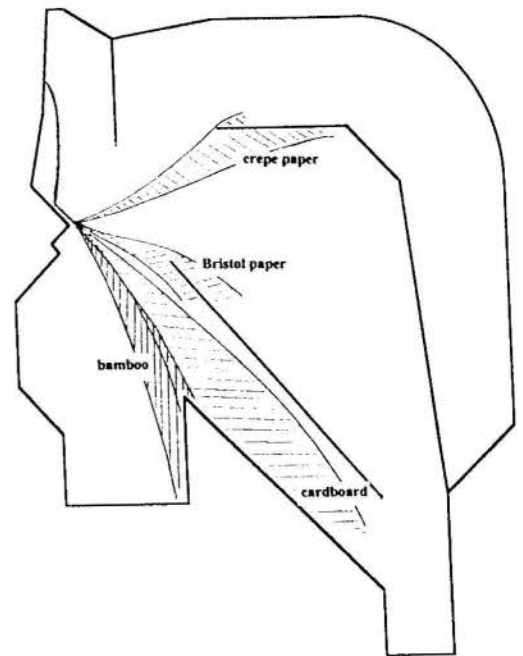


Figure 8: Experimental particle paths envelopes

**ACKNOWLEDGMENT**

The authors acknowledge the financial support of COPERSUCAR which owns all rights and patents related to the present work.

**REFERENCES**

Azevedo, J.L.F., "Relatorio Tecnico CTA/IAE", Sao Jose dos Campos, SP,1993 (in Portuguese)

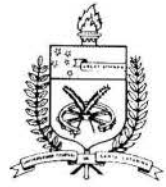
Clayton J. E., et al., "Air Velocities Required to Convey Sugarcane Stalk and Leaf Trash in a Vertical Air Stream," *Agricultural Engineering*, pp. 1155-1160, 1974.

Leon, N., "Aerodynamical Properties of Sugarcane," *Agricultural Engineering*, pp. 1136-1154, 1974.

Mavriplis, D. J., "Three Dimensional Multigrid for the Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol. 30, 1992, pp. 1753-1761.

Rae Jr., W. H. & Pope, A., *Low-speed Wind Tunnel Testing*, John Wiley & Sons, 2nd edition, 1984.

White, F. M., *Fluid Mechanics*, McGraw Hill, 2nd edition, 1986.



## MATHEMATICAL MODEL FOR THE TRANSPORT OF SOLIDS IN HORIZONTAL PIPES BY POLYMER SOLUTIONS

ABCN

N.E. Ramírez, J.B. Bello and A.E. Sáez

Departamento de Termodinámica y Fenómenos de Transferencia  
Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

### SUMMARY

*In this work we propose a mathematical model to represent the hydrodynamics of solid-liquid suspension flow in horizontal pipes. The model is based on the existence of a critical shear stress for the suspension of solids at the interface between the suspension and a stationary bed. We apply this model to the flow of suspensions of sand particles in carrier fluids that consist of aqueous solutions of a semi-rigid polymer. The model is capable of adequately representing the experimental data. The results show that the presence of polymer reduces the critical shear stress for solids suspension.*

### INTRODUCTION

The hydraulic transport of solids through horizontal pipes in turbulent flows has great practical importance. The main aspects of the design of such systems are the pressure drop for a given throughput of slurry, and the quantification of the ability of the carrier liquid to transport the solid.

The flow of slurries through horizontal pipes exhibits diverse flow regimes with respect to the state of suspension of the solid phase in the slurry. Although there are various classifications of flow regimes, the most common one distinguishes four different regimes (Bain and Bonnington, 1970): (1) flow with stationary bed, in which a stagnant bed of solid particles occupies the lower portion of the pipe and a suspension of particles flows over it; (2) flow with a sliding or moving bed, in which a compact mass of particles at the bottom of the pipe moves in the direction of flow; (3) heterogeneous suspension, in which the solid is completely fluidized but there is a vertical gradient of solids concentration; and (4) pseudo-homogeneous suspension, in which the solid particles are uniformly distributed in the cross section of the pipe. If an experiment to determine pressure drops is initiated at low enough slurry velocities, the system starts from the stationary bed regime and, as the slurry velocity is increased, it goes successively through the moving bed regime, the state of heterogeneous suspension and the state of pseudo-homogeneous suspension (figure 1). In the stationary bed regime, the pressure drop typically decreases as the slurry velocity increases since the velocity increase results in an enhancement of the suspension of solids and a consequent increase in cross section available for the flow of the slurry. In the heterogeneous flow regime, all the solids are suspended and a velocity increase leads to an increase in pressure drop. Therefore, the pressure drop vs. slurry velocity curve has a minimum somewhere in the range of the stationary or moving bed regimes. This minimum occurs at a superficial velocity commonly termed critical velocity. Some authors define the deposit velocity as the slurry superficial velocity at which the flow passes from the heterogeneous regime into the moving bed regime as the slurry velocity is decreased. This velocity is commonly measured by means of direct visual observation of regime change. Some investigators in the field claim that the deposit velocity is approximately equal to the critical velocity as defined above, although it is known that there is no exact matching between the two parameters (Parzonka et al., 1981). It is interesting to point out that the critical velocity is defined in terms of a mathematical criterion, whereas the deposit velocity has a precise physical definition. The critical velocity might be

susceptible to hysteresis effects with respect to the slurry velocity, a fact that has been reported in slurry flows, whereas the deposit velocity is defined in such a way that a direction of velocity setting is specified.

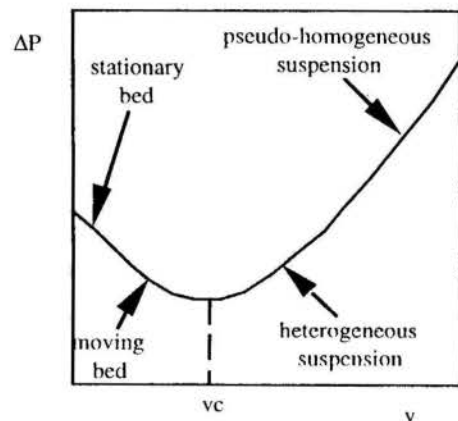


Figure 1 - Qualitative changes of pressure drops with superficial velocity for solid-liquid slurries

There is extensive information in the literature about the determination of pressure drops and critical velocities in slurry flows through horizontal pipes, when the liquid phase is Newtonian. The information available has been correlated either empirically or by means of mathematical models. Empirical correlations date back to Durand's equation (Durand, 1953) but other studies that consist of analyses of extensive amounts of experimental data have been available for some time (Turian and Yuan, 1977, Parzonka et al., 1981).

In some previous works, correlations for the transition of flow regimes and pressure drops in slurry flows through horizontal pipes have been based on mathematical models that consider vertical concentration gradients, including the existence of a moving bed. Wilson (1970), Wilson et al. (1972) and Wilson (1988) developed a model based upon macroscopic momentum balances that considered the force necessary to move the sliding bed, which included the effect of friction between the moving bed and the wall of the pipe. This model was modified and extended by Thomas (1979). Models based on the existence of a moving bed, such as those described above, are commonly



termed two-layer models. This type of model has been improved and used with success (Doron et al., 1987, Gillies et al., 1991). More recently, Doron and Barnea (1993, 1995) have developed a three-layer model that improves the ability of previous models to predict the transition between the stationary bed and moving bed regimes.

Most of the works mentioned above have dealt with slurries whose liquid phase is water. Slurries with polymer solutions have not been studied quite as extensively, even though their potential for application is relevant. It is well known that mixing small amounts of high molecular weight polymers with a liquid in turbulent flow through pipes leads to a decrease in the pressure drop. This effect is known as drag reduction (see, for example, Bird et al., 1987, and Kulicke et al., 1989, for reviews on the subject). On the other hand, it is also well known that an increase in the viscosity of the carrier liquid enhances the ability of a slurry to keep solids in suspension, owing to the increased drag exerted by the liquid on the particles. Polymer solutions would be ideal for hydraulic transport if both drag reduction and increased capacity for solids suspension were simultaneously present providing that this led to an economic advantage for the solids transport process.

Previous works in which polymer solutions have been used as carrier fluids include those of Poreh et al. (1970), Chashchin et al. (1975), Golda (1986), and Shah and Lord (1990, 1991).

In this work we will develop a two-layer model to simulate pressure drops vs. flow rate behavior in the transport of solids through horizontal pipes. We will apply this model to the analysis of experimental data, placing emphasis in the case in which the carrier liquid is a polymer solution.

## EXPERIMENTAL

The experiments were carried out in a set up designed for turbulent flow measurements. A batch of approximately 70 liters of the slurry was placed in a stainless steel feed tank provided with a stirrer that held the solids in suspension. Turbulent flow was established by means of a positive displacement pump through a horizontal pipe with an internal diameter of 3.5 cm and a total length of 4.7 m. The pipes transporting the slurry to and from the horizontal pipe had internal diameter of 5.3 cm and were made of stainless steel. The horizontal pipe was divided in two sections: an entrance section, made of stainless steel, with a length of 3.5 m, to ensure the development of the flow, and a test section, with a length of 1.2 m, between whose extremes the pressure drop was measured by means of a differential pressure transducer. The test section was made of plexiglas in order to allow visual observation of the flow regimes; this section behaves as a smooth pipe. The flow rate was controlled by means of a recycle to the feed tank with the purpose of diminishing restrictions to the flow in order to minimize polymer degradation and solids sedimentation. All the experiments were conducted at 25°C.

The polymer used in the experiments was a commercial sample of guar gum used in oil recovery operations, provided by Alliburton. The polymer solutions were prepared in a beaker by dispersing the powder on the surface of deionized water whilst stirring with a magnetic stirrer to produce a deep vortex. After dispersing the powder, gentle stirring followed for periods between 12 and 24 hours. Owing to the sensitivity of these polymers to biological degradation small amounts of sodium azide (2.5 mg of sodium azide/g of polymer) were added to the solutions. Once the polymer solution was prepared, it was placed in the feed tank and the appropriate amount of solid was added.

Borate ion was used as a cross-linking agent, provided by an aqueous solution of sodium tetraborate decahydrate (borax). Polymer solutions in the presence of cross-linking agent were prepared by the following procedure: first, the required amount of polymer to prepare the desired solution was dissolved in approximately 90% of the final solution volume by means of the

procedure described above. Second, a borax solution was prepared in 10% of the final solution volume, using the desired total amount of borax. Both solutions were mixed, and the pH of the final solution was adjusted to a value of 11 by adding small amounts of 1 M NaOH, in order to promote the existence of free borate ions in solution. In all cases, the amount of borax used was large enough to assure an excess of borate ions for the cross-linking process. In the range of polymer concentrations employed in this work, the cross linking agent produces intermolecular entanglements whose effect is to increase the apparent molecular weight of the polymer (it is important to mention that the basic structure of the macromolecule is also altered) without reaching enough interconnectivity to produce gels (for further discussion on this and other aspects of the cross linking process, see Tatham et al., 1995).

The solid used was a silicate sand with a density of 2650 kg/m<sup>3</sup>, and the particle size distribution presented in table 1. The solids concentration was varied from pure liquid up to 45% by weight.

Table 1 - Particle-Size Distribution of the Silicate Sand

Range (µm)	% by Weight
< 63	8
63-150	3
150-177	11
177-212	7
212-250	22
250-350	34
> 350	15

## MATHEMATICAL MODEL

In this section we develop a mathematical model to represent pressure drops in the flow of solid-liquid suspensions over a range of flow rates covering from the stationary bed to the heterogeneous flow regime. The model is based on a two-layer formulation similar to that used in previous works (Doron et al., 1987).

In a horizontal duct of arbitrary cross section, a macroscopic momentum balance yields the following relation between pressure drop ( $\Delta P$ ) and shear stress ( $\tau$ ),

$$\Delta P A_{tf} = \int_{A_{wf}} \tau dA \quad (1)$$

where  $A_{tf}$  is the cross-sectional surface area available for the flow, and  $A_{wf}$  is the surface area of the wall surrounding the fluid inside the control volume.

If the solid is completely suspended (heterogeneous and homogeneous flow regimes),  $A_{wf}$  is the surface area of the duct wall. For a cylindrical pipe if we assume that  $\tau$  remains uniform at the wall, equation (1) leads to the well-known relation

$$\tau_h = \frac{\Delta P_h R}{2L} \quad (2)$$

where  $R$  and  $L$  are the radius and length of pipe, respectively. The subscript  $h$  denotes complete solids suspension.

Based upon the analysis of our experimental data, we have found that the pressure drop in the suspended solids regime can be correlated in terms of the superficial velocity of the slurry ( $v$ ) as follows:

$$\Delta P_h = av + bv^2 \quad (3)$$

where  $a$  and  $b$  are adjustable parameters that depend on solids concentration and polymer concentration for the specific system studied in this work.

In the stationary bed regime, an increase in slurry superficial velocity results in a decrease of pressure drop since the cross sectional area available for the slurry increases due to the better suspension capabilities of the fluid at higher velocities (figure 1). We will assume that in this regime the shear stress exerted by the fluid on the particle bed remains approximately constant. This assumption essentially means that there is a constant critical shear stress ( $\tau_c$ ) at which solid particles will become suspended. Any attempt to increase it (by increasing the flow rate, for example) will result in the suspension of more particles and thus an increase in the cross sectional area available to the slurry. Even though this assumption might not be completely accurate for solids with polydisperse size distribution, its application will simplify the analysis when the model is applied to polymer solutions.

The value of  $\tau_c$  represents the shear stress exerted by the fluid at any superficial velocity as long as there is settled solid in the pipe. Precisely at the point at which the solid becomes completely suspended, the shear stress consists of friction with the wall and it is given by equation (2),

$$\tau_c = \frac{\Delta P_c R}{2L} \quad (4)$$

where  $\Delta P_c$  can be evaluated from equation (3) by using  $v=v_c$ .

The pressure drop for  $v \geq v_c$  is given by equation (3). When the solid phase is not completely suspended ( $v < v_c$ ) the pressure drop can be evaluated from equation (1) by using  $\tau = \tau_c$ . If the shear stress is assumed to be uniform in the cross section, equation (1) becomes

$$\Delta P = \frac{\tau_c A_{wf}}{A_{tf}} \quad (5)$$

For a given level of settled solids in the pipe, the surface areas in equation (5) can be expressed in terms of the angle  $\theta$ , figure 2, as follows,

$$A_{wf} = 2RL(\pi - \theta + \sin \theta) \quad (6)$$

$$A_{tf} = R^2(\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (7)$$

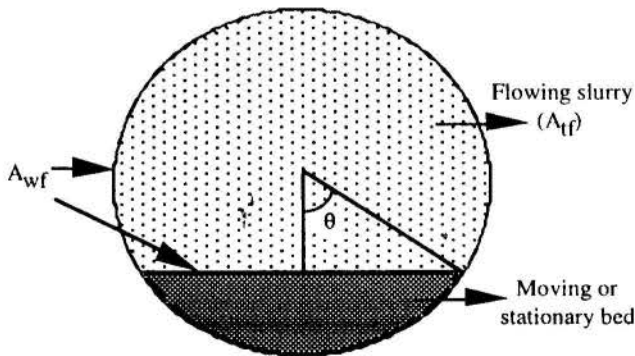


Figure 2 - Sketch showing cross sectional and friction areas for a given level of settled solids

According to the preceding analysis, the critical shear stress corresponds to the shear stress of the fluid acting on the walls

when there is no settled solids and the fluid is moving with the critical velocity. For a given value of  $\tau_c$ , the pressure drop  $\Delta P_c$  can be evaluated from equation (4) and then the critical velocity can be calculated from equation (3). At  $v < v_c$  the average velocity of the fluid over the available cross section  $A_{tf}$  is equal to  $v_c$  at all times, since the shear stress is always equal to  $\tau_c$ . Therefore, the value of the angle  $\theta$  can be determined by first determining  $A_{tf}$  from the following equation for a given value of superficial velocity  $v$ ,

$$\pi R^2 v = v_c A_{tf}$$

and then using equation (7). Once  $\theta$  is determined for a given  $v$ ,  $A_{wf}$  is evaluated from equation (6) and  $\Delta P$  is calculated from equation (5).

In other words, by using  $\tau_c$  as unique adjustable parameter, and starting from the fitted values of  $a$  and  $b$  (equation 3) for each solids concentration, the  $\Delta P$  vs.  $v$  curve for the suspension can be generated throughout the whole range of superficial velocities. In the next section we will apply this model to experimental data gathered in this work.

## RESULTS AND DISCUSSION

The pressure drop behavior of sand-water suspensions was determined as a function of solids concentration. For this purpose, we gathered 156 data points of pressure drop for various slurry superficial velocities ranging between 0.6 and 2.8 cm/s, and different solids concentrations between 0 and 45% by weight. All the data were in turbulent flow, and they spanned the regimes of stationary bed, moving bed, heterogeneous flow and pseudo-homogeneous flow. The data were interpolated to produce continuous curves of pressure drop vs. slurry superficial velocity. The results are presented in figure 3. It can be seen that the curves exhibit the expected trend: at very low solids concentration, the pressure drop increases monotonically with superficial velocity in the range studied. For solids concentration greater than 16%, a minimum in pressure drop falls within the range of figure 3, indicating the existence of stationary and moving beds at low velocities. This was confirmed by visual observation. Even though the interpolation in figure 3 is somewhat irregular, mostly due to experimental error in the data and interpolation error, it is evident that the critical velocity, represented by the minimum of the curves, increases as the solids concentration increases. This is consistent with trends reported in previous works.

The main emphasis of this work was to quantify the effect of the presence of polymer on solids suspension and slurry pressure drop. In the absence of solid phase, we have determined in a previous work that the guar gum solutions, in the range of concentrations employed in the present work with and without cross-linking agent, are drag reducing (Bello et al., 1996). Drag reduction capabilities are as high as 30% (in terms of decrease in pressure drops between the polymer solution and pure water), and they become more appreciable as cross-linking agent is added.

We have measured the pressure drop vs. flow rate behavior for various polymer concentrations with and without cross-linking agent. In what follows we will present the experimental results and the application of the model developed in this work to suspensions with a fixed total solids concentration of 40% by weight.

Figures 4 to 6 show representative comparisons between the mathematical model and experimental results. In spite of the simplicity of the model proposed, it is clear that it represents adequately the experimental data. It is interesting to point out that the model makes no distinction between moving bed and



stationary bed regimes. The inclusion in the model of frictional losses in the moving bed regime should improve comparisons at velocities below the critical velocity, although the comparisons in figures 4 to 6 indicate that quantitatively the model is adequate in its present form.

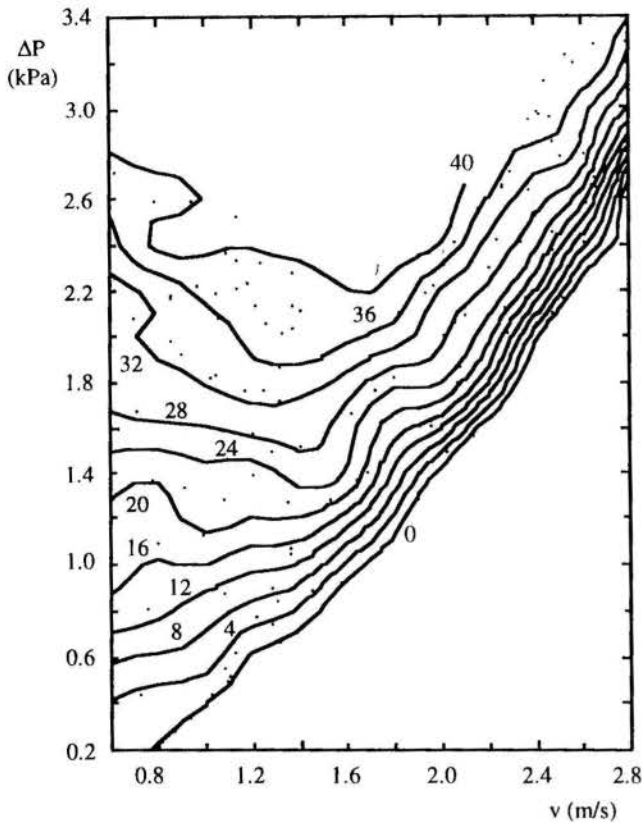


Figure 3 - Pressure drop as a function of slurry superficial velocity for sand-water slurries. Solids concentration are expressed in weight %. The dots correspond to actual data points. Continuous lines are spline contours interpolated from the data

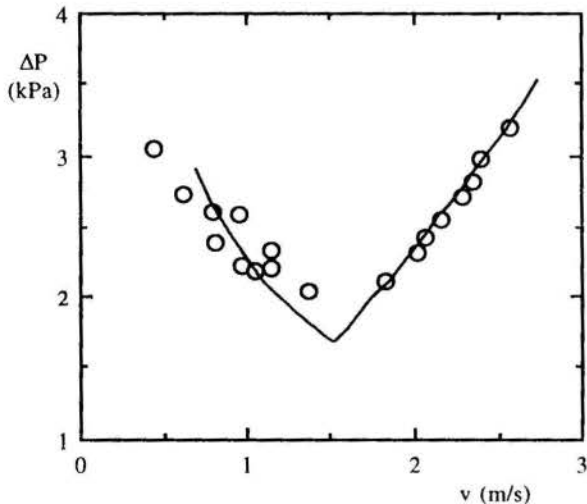


Figure 4 - Comparison between model (solid line) and experimental data. Sand-water, solids concentration: 40% by weight

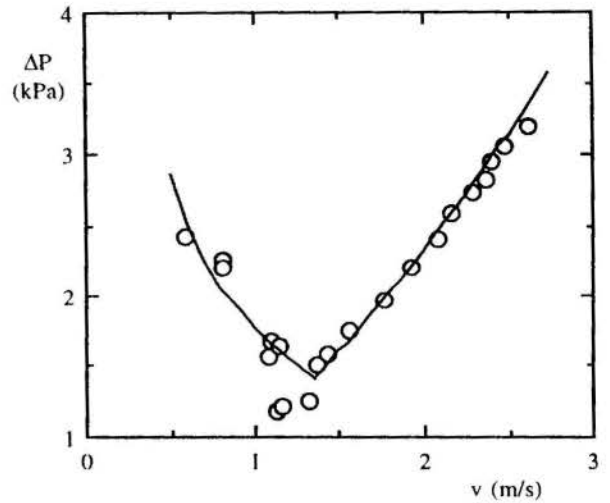


Figure 5 - Comparison between model (solid line) and experimental data. Sand-500 ppm guar solution, solids concentration: 40% by weight

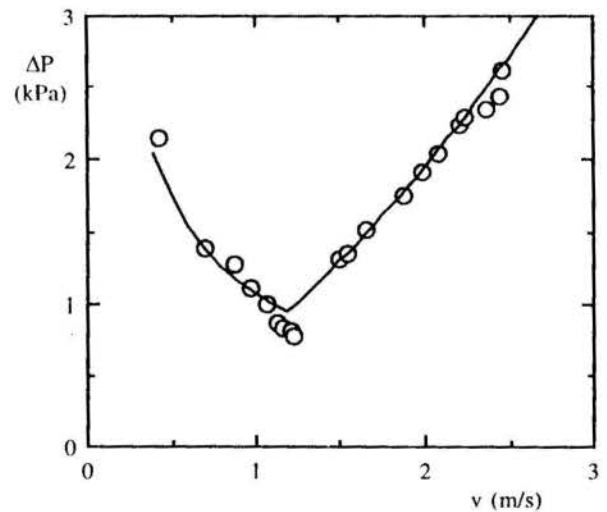


Figure 6 - Comparison between model (solid line) and experimental data. Sand-1000 ppm guar solution with cross linking agent, solids concentration: 40% by weight

The parameters obtained when the model is fitted to experimental data at various polymer concentrations are presented in table 2. Figure 7 shows how the critical shear stress varies with guar gum concentration ( $C$ ) with and without cross linking agent (borax). For water ( $C=0$ ) both curves coincide. The results show that the critical shear stress decreases with increases in polymer concentration. In principle, this trend is a consequence of the fact that an increase in polymer concentration leads to an increase in the shear viscosity of the solution, which makes the solution more effective in suspending solids and hence a lower stress is needed. The same argument explains why solutions with borax require a lower critical shear stress: when the polymer is cross linked in solution, it behaves as a polymer with a larger apparent molecular weight so that, at the same concentration level, its viscosification power is stronger which leads to an improved ability to suspend solids. Another factor that plays a role in these trends is the drag reduction capability of the polymer. It is interesting to notice that drag reduction increases as polymer concentration increases, except for guar

with borax at 1500 ppm, for which some drag reducing capability is lost due to the formation of gels in the cross-linking process (Bello et al., 1996). Note that under the same conditions the critical shear stress increases with concentration. These results seem to indicate that there is a relation between the drag reducing capabilities of the polymer and its ability to suspend solids.

Table 2 - Model parameters for a slurry solids concentration of 40%

C (ppm)	a (kPa s/m)	b (kPa s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> )	$\tau_c$ (kPa)	$v_c$ (m/s)
0	0.86	0.15	0.0110	1.53
500	0.77	0.19	0.0093	1.36
500*	0.81	0.16	0.0079	1.20
1000	1.07	0.04	0.0081	1.10
1000*	0.52	0.22	0.0062	1.19
1500	0.72	0.20	0.0072	1.14
1500*	0.72	0.17	0.0066	1.09

\* with cross-linking agent

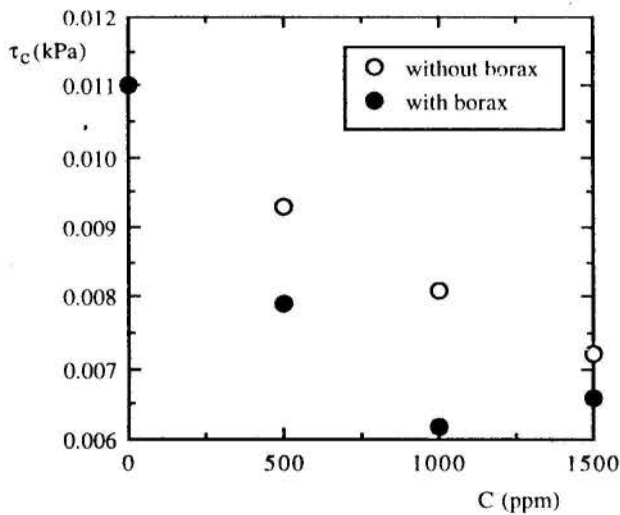


Figure 7 - Effect of polymer concentration on critical shear stress, solids concentration: 40% by weight.

The critical shear stresses obtained for all the conditions explored in this work (table 2) seem to be approximately a unique function of critical velocity, as shown in figure 8 where all the data points in table 2 have been used to build a curve. This result has interesting practical implications since it indicates that variations in polymer concentration or level of molecular interactions such as those present in the cross linking process all lead to the same trend in a  $\tau_c$  vs.  $v_c$  plot, i.e., a limited characterization of solids suspension capabilities might allow one to develop an empirical correlation to predict critical velocities.

## CONCLUSIONS

We have developed a simple mathematical model to represent the hydrodynamic behavior of solid-liquid suspensions. The model has proved to be adequate to describe the behavior of solids suspension by guar gum solutions. The model requires to use the critical shear stress required for suspending the solid phase as an adjustable parameter. The critical shear stress has been shown to decrease with polymer concentration, and to be

lower when the guar gum is cross linked in solution. The results indicate a link between the drag reducing abilities of the polymer and its efficiency in suspending solids.

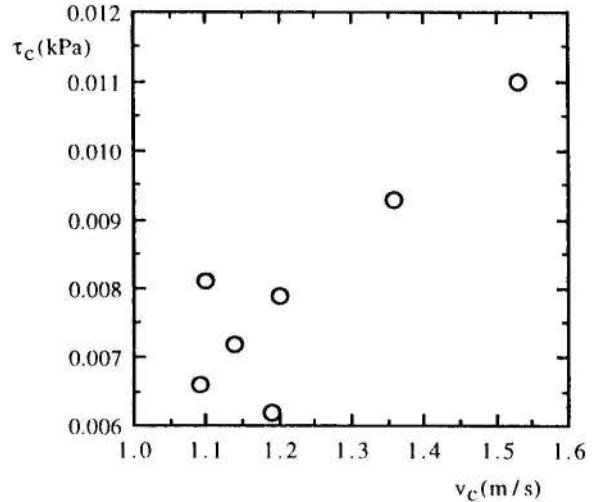


Figure 8 - Relation between critical shear stress and critical velocity for various polymer concentrations, with and without cross-linking agent, solids concentration: 40% by weight

## REFERENCES

- Bain, A.G. and Bonnington, S.T., 1970, "The Hydraulic Transport of Solids through Pipelines", Pergamon Press, Oxford.
- Bello, J.B., Müller, A.J. and Sáez, A.E., 1996, "Effect of Intermolecular Cross Links on Drag Reduction by Polymer Solutions", *Polymer Bulletin*, Vol. 36, pp. 111-118.
- Bird, R.B., Armstrong, R.C. and Hassager, O., 1987, "Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 1: Fluid Mechanics", 2nd edition, Wiley-Interscience, New York.
- Chashchin, I.P., Shalavin N.T. and Saenko, V.A., 1975, "The Effect of Polymeric Additives on Drag Reduction", *International Chemical Engineering*, Vol. 15, pp. 88-90.
- Doron, P., Granica, D. and Barnea, D., "Slurry Flow in Horizontal Pipes - Experimental and Modeling", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 13, pp. 535-547.
- Doron, P. and Barnea, D., 1993, "A Three-Layer Model for Solid-Liquid Flow in Horizontal Pipes", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 19, pp. 1029-1043.
- Doron, P. and Barnea, D., 1995, "Pressure Drop and Limit Deposit Velocity for Solid-Liquid Flow in Pipes", *Chemical Engineering Science*, Vol. 50, pp. 1595-1604.
- Durand, R., 1953, "Basic Relationships on the Transportation of Solids in Pipes - Experimental Research", *Proceedings of the 5th Minneapolis International Hydraulics Convention*, Minneapolis, pp. 89-103.
- Gillies, R.G., Shook, C.A. and Wilson, K.C., 1991, "An Improved Model for Horizontal Slurry Pipeline Flow", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 69, pp. 173-178.
- Golda, J., 1986, "Hydraulic Transport of Coal in Pipes with Drag Reducing Additives", *Chemical Engineering Communications*, Vol. 43, pp. 53-67.
- Kulicke, W.-M., Kötter, M. and Gräger, H., 1989, "Drag Reduction Phenomenon with Special Emphasis on Homogeneous Polymer Solutions", *Advances in Polymer Science*, Vol. 97, pp. 1-68.
- Parzonka, W., Kenchington, J.M. and Charles, M.E., 1981, "Hydrotransport of Solids in Horizontal Pipes: Effects of Solids

Concentration and Particle Size on the Deposit Velocity", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 59, pp. 291-296.

Poreh, M., Zakin, J.L., Brosh, A. and Warshavsky, M., 1970, "Drag Reduction in Hydraulic Transport of Solids", *Proceedings ASCE, Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 96, pp. 903-909, 1970.

Shah, S.N. and Lord, D.L., 1990, "Hydraulic Fracturing Slurry Transport in Horizontal Pipes", *SPE Drilling Engineering*, pp. 225-232, September.

Shah, S.N. and Lord, D.L., 1991, "Critical Velocity Correlations for Slurry Transport with Non-Newtonian Fluids", *AIChE Journal*, Vol. 37, pp. 863-870.

Tatham, J.P., Carrington, S., Odell, J.A., Gamboa, A.C., Müller, A.J. and Sáez, A.E., 1995, "Extensional Behavior of Hydroxypropyl Guar Solutions: Optical Rheometry in Opposed Jets and Flow through Porous Media", *Journal of Rheology*, Vol. 39, pp. 961-986.

Thomas, A.D., 1979, "The Role of Laminar/Turbulent Transition in Determining the Critical Deposit Velocity and the Operating Pressure Gradient for Long Distance Slurry Pipelines", *Proceedings of the 6th International Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes*, Canterbury, pp. 13-26.

Turian, R.M. and Yuan, T.-F., 1977, "Flow of Slurries in Pipelines", *AIChE Journal*, Vol. 23, pp. 232-243.

Wilson, K.C., 1970, "Slip Points of Beds in Solid-Liquid Pipeline Flow", *Proceedings ASCE, Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 96, pp. 1-12.

Wilson, K.C., Streat, M. and Bantin, R.A., 1972, "Slip-Model Correlation of Dense Two-Phase Flow", *Proceedings of the 2nd International Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes*, Coventry, pp. 1-10.

Wilson, K.C., 1988, "Evaluation of Interfacial Friction for Pipeline Transport Models", *Proceedings of the 11th International Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes*, Stratford-upon-Avon, pp. 107-116.



## SPATIAL DISTRIBUTION OF GAS AND SOLID PHASES IN CONICAL SLURRY BUBBLE COLUMNS

S. Siquier, A. Ronchetti, M. Calderón, P. Llaguno and A.E. Sáez  
Departamento de Termodinámica y Fenómenos de Transferencia  
Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela



### SUMMARY

*In this work we perform an experimental study of the spatial distribution of phases in slurry bubble columns with conical distributors with three different apex angles. The main emphasis is given to the characterization of phase distributions in the conical section. In continuous operation, an absolute maximum in solids concentration is obtained at a point located on the wall of the cone. The location of the maximum moves up as the solids content in the column increases and as the apex angle decreases. More gradual axial variations of the solid concentration in the cones are observed at low apex angles.*

### INTRODUCTION

The spatial distribution of phases in a slurry bubble column is of great relevance for the design of these systems as chemical reactors. The geometry of the distributor at the bottom of the column plays an important role in determining the hydrodynamics of the system. Conical distributors are commonly employed since they provide two important advantages. First, they allow a smooth transition between the entrance pipe and the main body of the column, which avoids the presence of "dead zones" in the entrance section. Second, when working with solids at relative large particle sizes and solids concentrations, the cone provides a distribution of phase velocities in the entrance region that can accomplish the fluidization of solids with a wide particle size range.

The use of tapered columns has been extensively studied in two-phase fluidization (Mathur and Epstein, 1974). One of the practical designs of such systems is the jet spouted bed in which the fluid is introduced through a relatively small entrance section at the bottom of a conical region (Markowski and Kaminski, 1983). The jet spouted bed is characterized by the existence of a core region in which the fluid moves upwards and an annular region with downward motion of the phases. In this regime, relatively high bed voidages and a strong degree of mixing of the solids are observed. In the conventional spouted bed, lateral mixing in the bed is poor and the solid tends to accumulate in the vicinity of the wall where strong downflow motion exists. Maruyama et al. (1984) determined that, in liquid-solid fluidization, relatively large cone apex angles (above 15%) led to lower voidages in the expanded bed region and strong mixing among particles of different sizes. Uemaki and Tsuji (1992) reported that lower solids contents were obtained close to the walls when the jet spouting regime was achieved, although it is generally considered that the solids distribution in this regime is approximately uniform (San José et al., 1993). Recently Olázar et al. (1993a, 1993b, 1994) and San José et al. (1994) have conducted an extensive study to quantify the hydrodynamics of tapered fluidized beds in the jet spouting regime. These investigators have shown how particle segregation can be effectively controlled in polydisperse solids, and have provided means for estimating hydrodynamic parameters for these systems.

In gas-liquid-solid systems, conical spouted beds have not been as extensively studied as in two-phase fluidization. Nishikawa et al. (1976) analyzed the hydrodynamics of three-phase spouted beds with columns and inlet nozzles of various diameters. They found that the ratio between inlet nozzle and

column diameter ( $d_T/D$ ) had an appreciable effect on the hydrodynamics: lower values of that parameter led to larger gas holdups and better gas phase distributions. Almost uniform gas holdups were obtained for  $d_T/D < 0.2$  in the conical region. Nishikawa et al. observed that larger gas holdups were obtained in the neighborhood of the inlet nozzle. In a later work, Nishikawa et al. (1977) measured gas-liquid mass transfer coefficients in three-phase spouted beds. They observed liquid flow patterns that resemble those obtained in fluid-solid jet spouted beds when the solid particles had sizes lower than 1 mm.

Kleijnjens et al. (1994) performed experiments in which they measured the solids distribution in the conical region of a three-phase spouted bed. They observed a circulating flow pattern similar to the jet spouted bed. The axial solids concentration profiles at the center of the column exhibited two different trends, according to the value of the total solids loading: at low solids content, these profiles resembled the exponential decay curve typical of the application of the sedimentation-dispersion model to a system with straight walls; on the other hand, at high solids loading, they observed s-shaped profiles in which a dense but homogenous zone was distinguished at the bottom of the column, near the gas inlet (in their experiments, there was no net flow of liquid phase). The solids concentration at a given axial position always decreased with distance to the center of the column, although close to the gas inlet, the solids concentration was essentially uniform in the lateral direction. Kleijnjens et al. describe their data by means of a mathematical model that combines the sedimentation-dispersion model with mechanistic considerations based upon the influence of local turbulence levels on particle distribution.

In this work we present experimental results on phase distributions in the conical section of slurry bubble columns. The main objective is to assess the effect of phase velocities, total solids loading, and cone apex angle on the distribution of the phases.

### EXPERIMENTAL

The experiments were performed in plexiglas bubble columns with conical entrance sections. The cylindrical section has an internal diameter of 29 cm and a total height of 60 cm. The height of the column was chosen as approximately twice the internal diameter since, as it will be shown, this length is enough to obtain at the top a radially uniform solids concentration. The entrance to the conical distributors was a pipe with an internal diameter of 3.7 cm through which air and solid-liquid suspension



were simultaneously fed to the conical section. Three different conical sections were employed with apex angles of 13°, 22° and 34°, and total lengths of 1.305, 0.770 and 0.414 m, respectively.

All the experiments were conducted at ambient temperature (23-25°C) and atmospheric pressure at the top of the column. The gas phase used was atmospheric air and the liquid was tap water. The solids used were siliceous sands with polydisperse particle size distributions: solid 1: 100-150 μm: 14.8 wt%, 150-200 μm: 35.2 wt%, 200-250 μm: 31.0 wt%, 250-300 μm: 19.0 wt%; solid 2: <63 μm: 8.4 wt%, 63-150 μm: 2.8 wt%, 150-177 μm: 10.4 wt%, 177-212 μm: 6.8 wt%, 212-250 μm: 22.2 wt%, 250-354 μm: 34.0 wt%, >350 μm: 15.4 wt%. The experiments were performed in semibatch and continuous modes of operation. In the semibatch mode only air flowed through the entrance pipe. In the continuous mode, the slurry was fed to the column by means of a progressive cavities pump, and the overflow from the column was recycled to the feed tank.

The global gas holdup ( $\langle \epsilon_g \rangle$ ) was determined by the bed expansion method as the ratio between the air volume in the column during operation, measured after complete disengagement of the gas phase at the end of the experiment, and the total volume of gas-slurry suspension. The columns were provided with sampling probes distributed axially which consist of tubes with an internal diameter of 0.64 cm through which slurry samples were withdrawn. The probes could be displaced radially. The solid concentration in the slurry was measured by determining the weight of solids after complete drying of the samples. The effect of local fluctuation in the solids concentration due to turbulence was minimized by taking three consecutive samples at each point once the steady state was achieved (Pino et al., 1992). The solids concentrations reported in this work correspond to the mean value of the three samples. Local gas holdups were measured by means of an electrical conductivity probe. The probes consisted in two stainless steel grids measuring 5 cm x 5 cm located at a distance of 5 cm apart, and mounted on a plexiglas structure that was introduced through the top of the column and located at the desired measuring point. The two screens were connected to a conductivity bridge that measured the conductance of the gas-liquid suspension between the screens. The specific conductance was averaged over 100 s for each measurement, and these values were calibrated in independent tests so that local liquid holdups were determined from them. This procedure was employed only in gas-liquid flows. Once a gas holdup profile is obtained, the global gas holdup was calculated by integration, and it was compared to the value determined by the bed expansion method. Both values were always within 15% of each other.

## RESULTS AND DISCUSSION

The gas holdup profiles obtained in gas-liquid flow experiments were qualitatively similar for all the operating conditions employed in this work. Figures 1 to 3 illustrate the behavior obtained for two different gas superficial velocities ( $V_g$ ) and two different cone apex angles ( $\theta$ ). These figures show contour lines between the centerline ( $r=0$ ) and the wall of the column ( $r=14.5$  cm). All the contour plots presented in this work were built by using bicubic spline interpolation over more than 500 nodes from the data taken at the sampling points. Note that the horizontal scale is the same for the three figures, but the vertical scale has been adjusted for a better visualization of the trends (the 13° column spans a vertical distance of 1.905 m whereas the 34° columns spans 1.014 m). In the cylindrical section of the column and the upper part of the cone, the gas holdup contours tend to be vertical, indicating more appreciable changes with radial position than with vertical position. In that region, the gas holdup decreases as the wall is approached. This trend has been previously reported for cylindrical bubble columns (see, for example, Hills, 1974). It is a consequence of

the liquid circulation patterns in the bubble column: gas and liquid phases tend to rise preferentially at the center of the column whereas near the wall the liquid moves downwards dragging a smaller amount of gas. In the conical region, the gas holdup increases as the inlet section is approached. The inlet pipe, in which gas velocities are high, has a gas holdup that is appreciably larger than the average gas holdup in the bubble column.

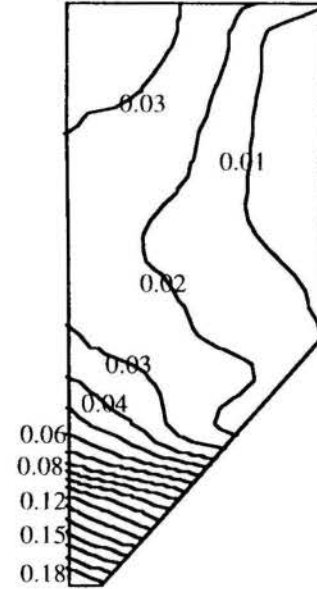


Figure 1 - Gas holdup contours in gas-liquid operation,  $V_l=0.4$  cm/s,  $\theta=34^\circ$ ,  $V_g=3$  cm/s,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.041$

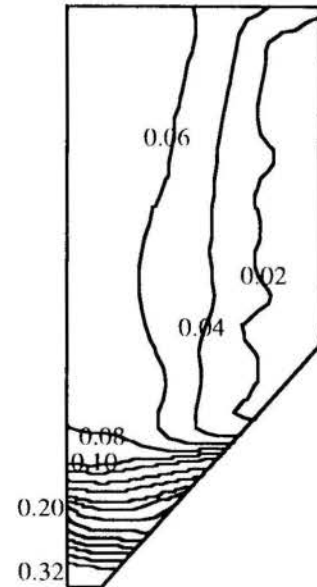


Figure 2 - Gas holdup contours in gas-liquid operation,  $V_l=0.4$  cm/s,  $\theta=34^\circ$ ,  $V_g=9$  cm/s,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.102$

The trends discussed above with regards to the spatial variation of the gas holdup are not affected by changes in the gas superficial velocity, as it can be gathered by comparing figures 1 and 2. A quantitative difference is observed when the apex angle is changed: in the column with the slower taper (figure 1), axial



variations of gas holdup in the cone are more gradual than in the cone with 34° apex angle (figure 2). The gas holdup in the cone increases towards the center. The 13° cone exhibits a behavior that is intermediate between the cylindrical section and the 34° cone.

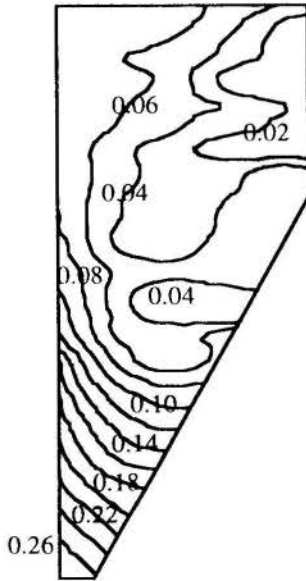


Figure 3 - Gas holdup contours in gas-liquid operation,  $V_g=0.4$  cm/s,  $\theta=13^\circ$ ,  $V_l=9$  cm/s,  $\langle \epsilon_g \rangle = 0.124$

The main objective of this work is to study solids concentration profiles in the bubble column, and how they are affected by operating conditions. In the following paragraphs we will analyze the effects of gas velocity, particle size distribution, total solids loading and cone apex angle on the solids distribution.

Figure 4 shows solids concentration profiles at the centerline for various average solids concentration ( $\langle C_s \rangle$ ). The dashed line represents the interface between the cone and the cylinder. Straight lines have been drawn between data points for a better visualization of the trends. Hydrodynamic parameters related to the experiments are reported in table I, where  $C_{sf}$  is the solids concentration in the feed slurry. The superficial gas velocity of  $V_g=1.4$  cm/s is close to the critical gas velocity for solids sedimentation which, for the conditions employed in figure 4, is around 1 cm/s. The concentration profiles presented in figure 4 have a shape that significantly differs from the typical exponential distributions obtained in cylindrical bubble columns. In the cylindrical section, the concentration decreases monotonically with axial position whereas in the conical section a maximum is present. The existence of the maxima is a consequence of a dilution effect at the bottom of the column, since the feed concentrations are significantly lower than the average concentrations in the system (table 1). It is interesting to note that the location of the maximum moves upwards in the conical section as the average solids concentration increases. This is also a consequence of the low levels of solids in the feed.

A better visualization of the solids distribution can be obtained by plotting contour lines of constant concentration. Figures 5 to 7 show this representation for three different gas velocities in continuous operation. The contour values represent solids concentration in  $\text{kg/m}^3$ . The solids distribution is qualitatively different in the conical and cylindrical sections. In the cylindrical section the solids concentration decreases with height but is uniform radially. In the cone, the concentration increases toward the wall and reaches a maximum with height. The results

presented in figures 5 to 7 show that the absolute maximum of solids concentration is achieved at an intermediate height on the wall of the cone. At low gas velocities (figure 5) the maximum concentration exceeds  $1000 \text{ kg/m}^3$ . As stated earlier, the gas velocity in figure 5 is close to the critical gas velocity so that solids sedimentation would occur from this point is the gas velocity is decreased. The solid distribution in figure 5 suggests that solids sedimentation would start at a point on the wall with intermediate height inside the cone. The region on the wall with high solids concentration would be an undesirable feature in the operation of a chemical reactor in which the solid phase acts as catalyst. The high levels of solid content in that region might significantly decrease local mass and heat transfer rates, leading to a hot spot or a dead zone.

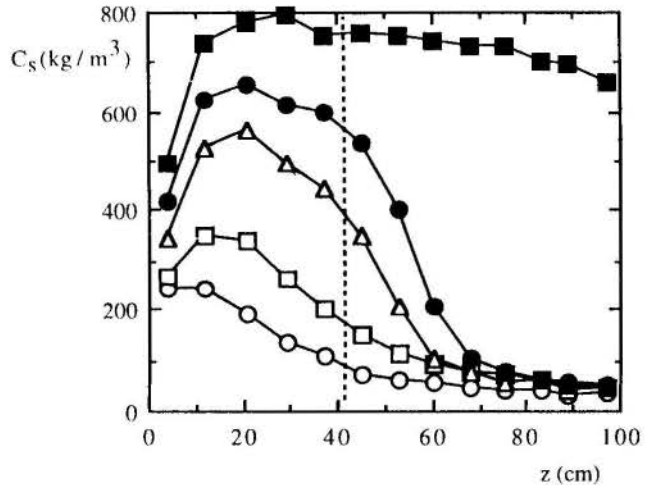


Figure 4 - Solid concentration profiles at the centerline ( $r=0$ ), solid I,  $V_g=1.4$  cm/s,  $V_l=0.4$  cm/s,  $\theta=34^\circ$ . Each curve corresponds to a different average solids concentration ( $\langle C_s \rangle$ ): E:  $70 \text{ kg/m}^3$ , G:  $120 \text{ kg/m}^3$ , C:  $200 \text{ kg/m}^3$ , J:  $300 \text{ kg/m}^3$ , B:  $750 \text{ kg/m}^3$

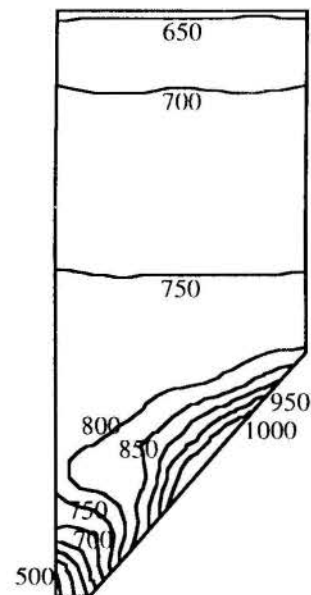


Figure 5 - Solid concentration contours, solid I,  $V_l=0.4$  cm/s,  $\theta=34^\circ$ ,  $V_g=1.4$  cm/s,  $C_{sf}=65 \text{ kg/m}^3$ ,  $\langle C_s \rangle = 750 \text{ kg/m}^3$ ,  $\langle \epsilon_g \rangle = 0.017$

Table 1 - Hydrodynamic parameters for the data in figures 1 to 3, solid 1,  $V_g=1.4$  cm/s,  $V_l=0.4$  cm/s,  $\theta=34^\circ$

$\langle C_s \rangle$ (kg/m <sup>3</sup> )	$C_{sf}$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\langle \epsilon_g \rangle$
70	12	0.017
120	37	0.019
200	36	0.020
300	41	0.020
750	65	0.017

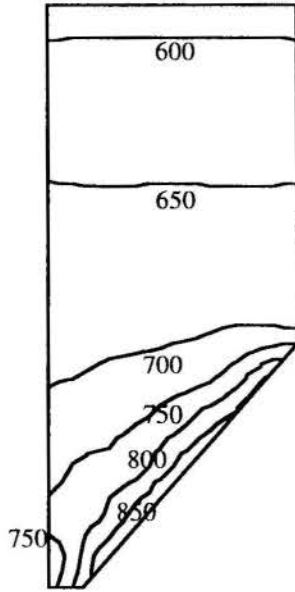


Figure 6 - Solid concentration contours, solid 1,  $V_l=0.4$  cm/s,  $\theta=34^\circ$ ,  $V_g=9.0$  cm/s,  $C_{sf}=326$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle C_s \rangle=670$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.082$

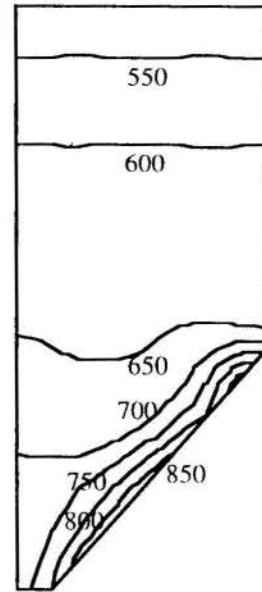


Figure 7 - Solid concentration contours, solid 1,  $V_l=0.4$  cm/s,  $\theta=34^\circ$ ,  $V_g=16.0$  cm/s,  $C_{sf}=290$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle C_s \rangle=630$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.109$

The presence of an absolute maximum in solids concentration at a point on the wall of the cone is consistent with the slurry circulation patterns observed: the slurry rises at the center of the column and moves downwards close to the wall. The downward motion favors solids settling, and the wall acts as an interceptor for the settling particles, accumulating solids. As the slurry progresses downward along the wall, it encounters a region of low concentration due to the entrance of more diluted slurry, and its concentration decreases. The region of low concentration at the bottom is also aided by the high drag exerted by the gas on the particles, due to the relatively large gas velocities present.

Figures 5 to 7 also illustrate the effect of superficial gas velocity on solids distribution. As the gas velocity is increased from 1.4 to 9 cm/s (figures 5 and 6), the solids concentration becomes more uniform inside the cone region although the trends in the spatial distribution are preserved. If the gas velocity is further increased to 16 cm/s (figure 7) no large quantitative changes are observed: notice the similarity between figures 6 and 7 (the small differences might be a consequence of the slightly lower solids loading in figure 7). The increase in gas velocity leads to a better mixing of the solids in the cone region. At high gas velocities, the maximum in solids concentration is still on the wall of the cone, but concentrations along the wall are more uniform than at the lower gas velocities.

The effect of cone apex angle on solids distribution is shown in figures 8 to 10. Notice that the vertical scales of the three plots are different. The global trends are similar for the three cones. In the cone with the lowest apex angle (figure 8) the dilution effect is much stronger but once concentration levels have reached

800 kg/m<sup>3</sup>, the axial variations of solids concentration are more gradual with absolute height than in the other cones. It is interesting to note that, at the point where cone and cylinder meet in the 13° cone, for which  $z=1.305$  m, the solids concentration level is much higher than at the top of the cylinder in the 34° cone, for which  $z=1.014$  m. This indicates that higher levels of solids concentration and a more uniform axial solids distribution can be achieved as the taper angle is decreased. This result has important practical implications for the design of conical distributors in systems with high solids content. In this case, it is convenient to use small taper angles if the objective sought is a better distribution of solid phase with high concentrations.

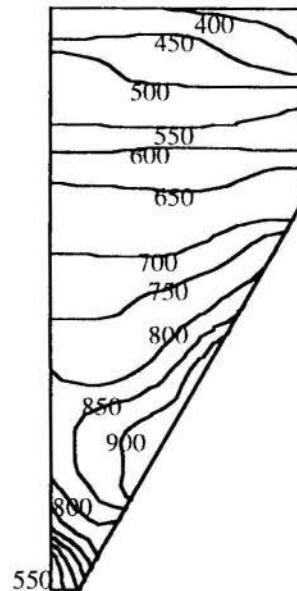


Figure 8 - Solid concentration contours, solid 2,  $V_l=0.5$  cm/s,  $\theta=13^\circ$ ,  $V_g=9.0$  cm/s,  $C_{sf}=295$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle C_s \rangle=600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.114$

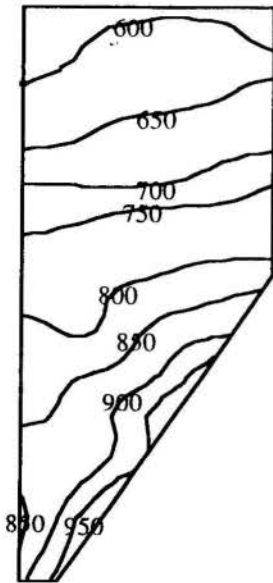


Figure 9 - Solid concentration contours, solid 2,  $V_I=0.5$  cm/s,  
 $\theta=22^\circ$ ,  $V_g=9.0$  cm/s,  $C_{sf}=517$  kg/m<sup>3</sup>,  
 $\langle C_s \rangle=600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.153$

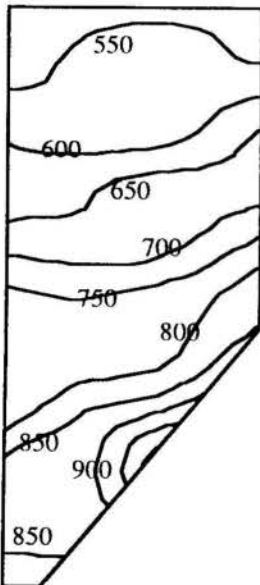


Figure 10 - Solid concentration contours, solid 2,  $V_I=0.5$  cm/s,  
 $\theta=34^\circ$ ,  $V_g=9.0$  cm/s,  $C_{sf}=504$  kg/m<sup>3</sup>,  
 $\langle C_s \rangle=600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.108$

The effect of particle size distribution on the solids concentration profiles can be assessed by comparing figures 6 and 10, which present results at approximately the same operating conditions for the two solids employed. Solid 2 has a slightly larger mean particle size than solid 1. This results in appreciably more vertical variations in solids concentrations (figure 10). It is interesting to note that the result presented for solid 2 exhibits a maximum level of concentration that is larger than that attained with solid 1 (figure 6) even though the former has a lower average solids concentration.

Figures 11 and 12 show results in continuous operation for a low total load of solids. The trends observed are qualitatively

similar to those obtained at higher concentrations (figures 8 to 10). For the 34° cone it is noticeable that a reduction in solids concentration leads to a lower location of the point of maximum concentration on the wall. This is not observed in the 13° cone where both maxima are at approximately the same location. The results suggest that the effect of total solids loading on the location of the point of maximum concentration might be less important as the cone apex angle decreases.

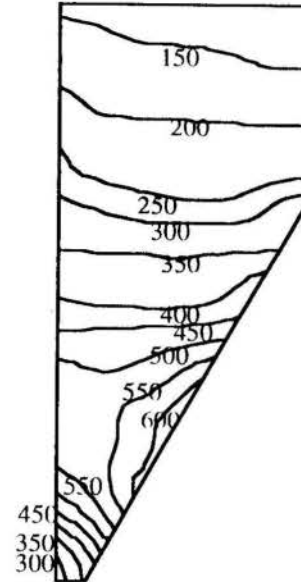


Figure 11 - Solid concentration contours, solid 2,  $V_I=0.5$  cm/s,  
 $\theta=13^\circ$ ,  $V_g=9.0$  cm/s,  $C_{sf}=100$  kg/m<sup>3</sup>,  
 $\langle C_s \rangle=300$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.148$

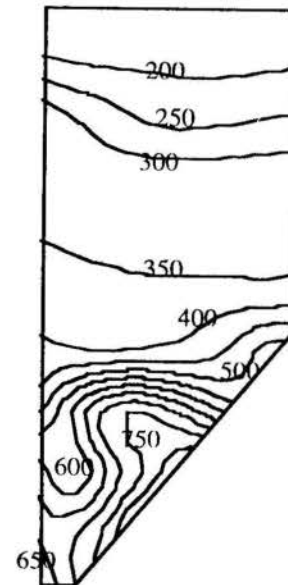


Figure 12 - Solid concentration contours, solid 2,  $V_I=0.4$  cm/s,  
 $\theta=34^\circ$ ,  $V_g=9.0$  cm/s,  $C_{sf}=180$  kg/m<sup>3</sup>,  
 $\langle C_s \rangle=300$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.144$

Finally, we report the effect of cone angle on solids distribution in the semibatch mode of operation. The results are presented in figures 13 and 14. In these cases, we can see that the

dilution effect of the feed is not present, as expected. The maximum level of solids concentration is attained at the bottom of the bubble column, even though there is a trend of the solids concentration to increase towards the wall. These maxima lead to higher concentrations than those obtained in continuous operation. Once again, the vertical solids distribution changes more gradually inside the cone as the cone apex angle decreases.

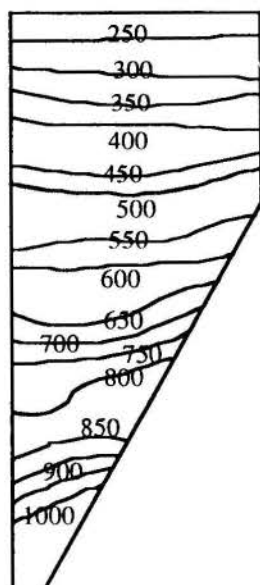


Figure 13 - Solid concentration contours, solid 2,  $V_1=0$ ,  $\theta=13^\circ$ ,  $V_g=9.0$  cm/s,  $\langle C_s \rangle=600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.099$

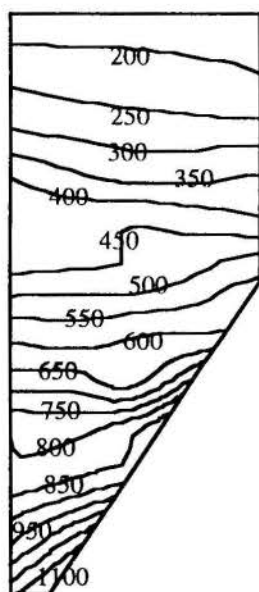


Figure 14 - Solid concentration contours, solid 2,  $V_1=0$ ,  $\theta=22^\circ$ ,  $V_g=9.0$  cm/s,  $\langle C_s \rangle=600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\langle \epsilon_g \rangle=0.089$

## CONCLUSIONS

The distribution of gas and solid phase in the conical distributor of a slurry bubble column is substantially different than that obtained in the cylindrical section. The gas holdup

tends to change preferentially in the radial direction in the cylindrical section, decreasing towards the wall, whereas the change in the conical section is more pronounced in the vertical direction, increasing towards the entrance. In continuous operation, the largest level of solids concentration is obtained at an intermediate position on the wall of the conical region. The location of this point moves upward as total solids load is increased. In semibatch operation, the solids distribution decreases monotonically towards the top of the column. One significant conclusion that can be gathered from the information presented is that lower apex angles lead to a more uniform distribution of the phases in the conical region of the bubble column.

## REFERENCES

- Hills, J.H., 1974, "Radial Non-Uniformity of Velocity and Voidage in a Bubble Column", *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, Vol. 52, pp. 1-9.
- Kleijntjens, R.H., van der Lans, R.G.J.M. and Luyben, K.Ch.A.M., 1994, "Particle Suspension Hydrodynamics in a Tapered Gas Agitated Reactor", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 72, pp. 392-404.
- Markowski, A. and Kaminski, W., 1983, "Hydrodynamic Characteristics of Jet Spouted Beds", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 61, pp. 377-381.
- Maruyama, T., Maeda, H. and Mizushima, T., 1984, "Liquid Fluidization in Tapered Vessels", *Journal of Chemical Engineering of Japan*, Vol. 17, pp. 132-139.
- Mathur, K.B. and Epstein, N., 1974, "Spouted Beds", Academic Press, New York.
- Nishikawa, M., Yonezawa, Y., Kayama, T., Koyama, K. and Nagata, S., 1976, "Studies on Gas Hold-Up in Gas-Liquid Spouted Vessel", *Journal of Chemical Engineering of Japan*, Vol. 9, pp. 214-219.
- Nishikawa, M., Kosaka, K. and Hashimoto, K., 1977, "Gas Absorption in Gas-Liquid or Solid-Gas-Liquid Spouted Vessel", *Theoretical Aspects of Fluidized Bed Reactors, Proceedings of the Second Pacific Chemical Engineering Congress*, Denver, pp. 1389-1396.
- Olázar, M., San José, M., Aguayo, A.T., Arandes, J.M. and Bilbao, J., 1993a, "Design Factors of Conical Spouted Beds and Jet Spouted Beds", *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 32, pp. 1245-1250.
- Olázar, M., San José, M., Peñas, F.J., Aguayo, A.T. and Bilbao, J., 1993b, "Stability and Hydrodynamics of Conical Spouted Beds with Binary Mixtures", *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 32, pp. 2826-2834.
- Olázar, M., San José, M., Peñas, F.J., Arandes, J.M. and Bilbao, J., 1994, "Gas Flow Dispersion in Jet-Spouted Beds. Effect of Geometric Factors and Operating Conditions", *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 33, pp. 3267-3273.
- Pino, L.Z., Solari, R.B., Siquier, S., Estévez, L.A., Yépez, M.M. and Sáez, A.E., 1992, "Effect of Operating Conditions on Gas Holdup in Slurry Bubble Columns with a Foaming Liquid", *Chemical Engineering Communications*, Vol. 117, pp. 367-382.
- San José, M.J., Olázar, M., Aguayo, A.T., Arandes, J.M. and Bilbao, J., 1993, "Expansion of Spouted Beds in Conical Contactors", *The Chemical Engineering Journal*, Vol. 51, pp. 45-52.
- San José, M.J., Olázar, M., Peñas, F.J. and Bilbao, J., 1994, "Segregation in Conical Spouted Beds with Binary and Ternary Mixtures of Equidensity Spherical Particles", *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 33, pp. 1838-1844.
- Uemaki, O. and Tsuji, T., 1992, "Particle Velocity and Solids Circulation Rate in a Jet-Spouted Bed", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 70, pp. 925-929.



SLUG MEASUREMENTS IN GAS-OIL PIPELINE

Marcelo de A. L. Gonçalves, Claudio B. C. e Silva and Marcos H. J. Pedras  
 Exploitation Division - DIPLOT  
 Petrobras Research Center - CENPES  
 21949-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brazil



SUMMARY

This paper presents a procedure for slug measurements in gas-oil horizontal flow and its results. The method allowed the measurement of bubble velocity and bubble and slug lengths. By using data analysis it was possible to set the boundaries for the region of slug flow occurrence. It was also verified that the data obtained agreed with OLGA two-phase flow simulator in a range of  $\pm 20\%$ . The statistical analysis of bubble and slug lengths showed that they have a log-normal distribution with a broad dispersion.

INTRODUCTION

Multiphase pumping is one of the most promising technologies to allow oil exploitation from deep water wells. To master this technology PETROBRAS built a site in Aracaju (Northeastern Brazil) for testing of multiphase production equipments. In order to provide actual field conditions a horizontal pipeline 6 in (0,15 m) diameter and 200 m long was installed before the multiphase pump inlet. This paper aims to describe the procedures and results of gas-oil flow monitoring through this pipeline. Working fluids are oil from Camorim Field and gas from Atalaia, with the following properties (at 10 bar and 30°C): oil density 860 Kg/m<sup>3</sup>, oil viscosity 15 cP and gas density 8.8 Kg/m<sup>3</sup>.

Horizontal two-phase flow patterns are bubble, slug, annular and stratified (smooth or wavy). The occurrence of each flow pattern depends on the fluid properties and pipeline geometry. Because of the characteristics of the plant and the allowed flow rates, only stratified and slug flows were expected, so the tests were performed for these patterns. Slug flow can be described as a sequence of large bubbles followed by liquid slugs. These slugs have dispersed bubbles in its body, and the bubbles are accompanied by a liquid film. A slug flow is represented schematically as in Figure 1. Slug flow may represent danger for the multiphase pump operation because its long bubbles can carry small amounts of liquid, less than the minimum necessary to lubricate the multiphase pump. In this case there was a possibility of damaging the pump gears. The obtained data was used also to verify the accuracy of a commercial two phase flow simulator. A statistical analysis of the dispersion of bubble and slug lengths was also performed.

EXPERIMENTAL PROCEDURES

The picture in Figure 2 shows the flow diagram for the experimental test site. A total of thirty-three sets of data of bubble velocity, main frequency and bubble and slug lengths was acquired at 11 different liquid and gas superficial velocities. Flow rates were measured in orifice plates, for the gas phase, and by a Coriolis meter, for the oil phase. The meters were located before the mixing section. The actual flow rates at test section were corrected considering the PVT properties of the two fluids. A couple of Valdyne differential pressure transducers enabled slug monitoring. A pair of taps in the top and bottom of the pipe allowed the measurement of differential hydrostatic level, which is proportional to wave height or liquid slug hold up. A second pair of taps located downstream provided the bubble velocity measurement. Because of the high pressure (30 Kgf/cm<sup>2</sup>) in test section, flow visualization was not performed.

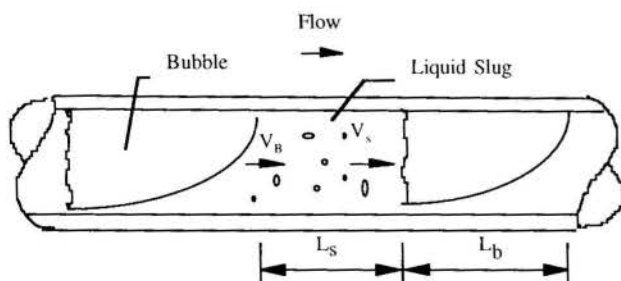


Figure 1- Slug flow representation.

PETROBRAS TEST SITE FOR MULTIPHASE EQUIPMENT ATALAIA

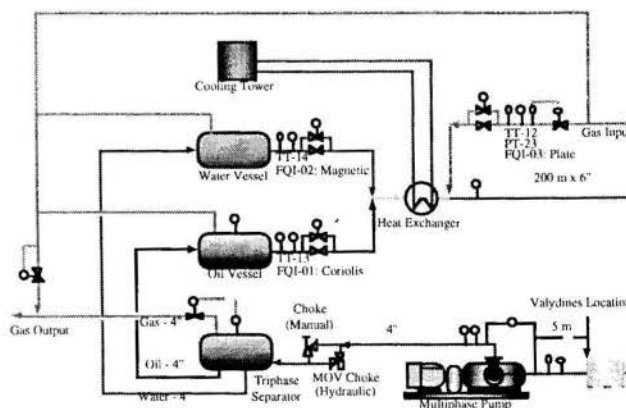


Figure 2- Flow diagram for the test site.

Figure 3 shows a typical plot from the obtained slug flow data with liquid superficial velocity ( $V_{sl}$ ) of 1.16 m/s and gas superficial velocity ( $V_{sg}$ ) of 0.33 m/s. In this figure the upper levels correspond to liquid slugs and the lower ones are the large bubbles. The half of the signal range was used as a criterion to distinguish bubbles and slugs. Data acquisition



and processing used the software LABVIEW running in a Macintosh Quadra 950 with a 16 bit A/D board. Each run was performed during 48 seconds with a frequency of 83 Hz (4000 samples per channel). The two-channel data processing used cross-correlation and power spectrum techniques to allow the calculation of bubble velocity, main frequency, and bubble and liquid slug lengths. Gas and liquid flow rates, pressure and temperature data were also acquired through the computer.

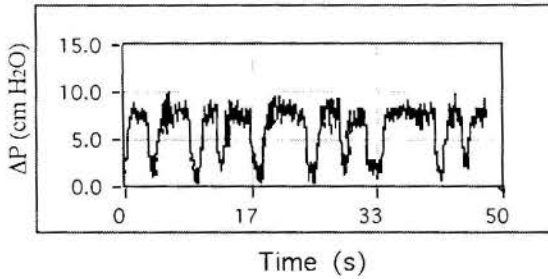


Figure 3- Typical data of differential pressure for slug flow.

Procedure to Calculate Slug Characteristics. The average velocity of bubbles ( $V_B$ ) could be calculated through the use of two similar transducers. They were located at a distance of 1.05 m. Provided that the distance is known, it is necessary to obtain the time delay between two sensors in order to calculate the bubble velocity. If there are two similar signals  $x(t)$  and  $y(t)$ , the time delay among them can be calculated as the maximum value for cross correlation function ( $R_{xy}(t)$ ), Eq. (1).

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) \cdot y(t) dt \quad (1)$$

The plot of a cross correlation result is on Figure 4 for  $V_{sg}=0.33$  m/s and  $V_{sl}=1.16$  m/s. From the graph we can estimate the time delay as 0.48 s. Since the distance is 1.05 m, then the bubble velocity is 2.19 m/s.

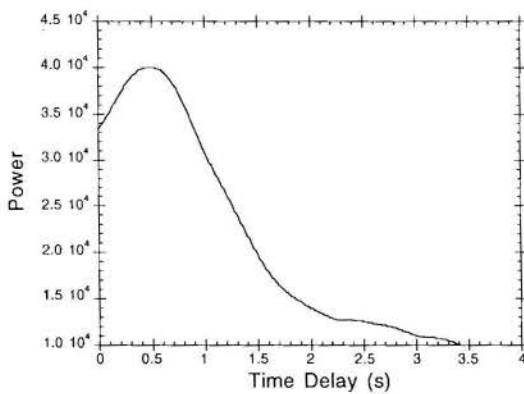


Figure 4- Cross correlation spectrum ( $V_{sg}$  0.33 m/s and  $V_{sl}$  1.16 m/s).

The average time length for an ensemble (bubble + slug) can be achieved by the main frequency of the signal. The frequency spectrum was obtained by Fourier Transform, Eq. (2).

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (2)$$

In Eq. (2), above,  $R_{xx}(\tau)$  is the cross correlation and it is given by Eq. (3), as

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) \cdot x(t) dt \quad (3)$$

Figure 5 shows a typical plot of frequency spectrum for the experimental data.

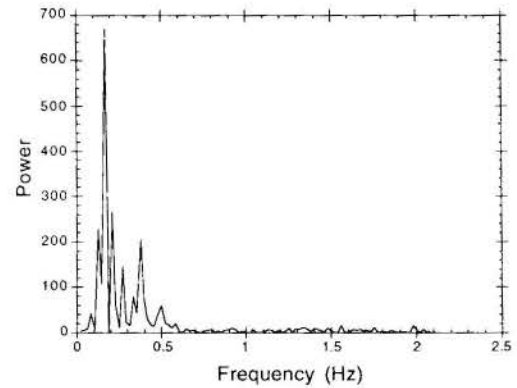


Figure 5- Frequency spectrum ( $V_{sg}=0.33$  m/s and  $V_{sl}=1.16$  m/s).

The inverse value of main frequency corresponds to the average time for an ensemble (bubble and slug). The product of period and bubble velocity equals the average total length ( $L_T$ ). Slug and bubble average lengths are computed from Eq.(4) and Eq.(5) as:

$$L_B = \beta L_T \quad (4)$$

$$L_S = (1 - \beta) L_T \quad (5)$$

In the equations above, the bubble relative length,  $\beta$ , is given by Eq.(6):

$$\beta = \frac{\sum t_B}{\sum t_B + \sum t_s} \quad (6)$$

Figure 3 shows that the differential pressure during slug occurrence is near 10 cm of water column and during the bubble is near zero. At first sight it can be stated that the range of fluctuations is almost 10 cm of water. As the liquid slug occupies the whole pipe section, then it can be inferred that the liquid height during the bubble should be 5 cm, since it is a 15 cm diameter pipeline. This would correspond to a bubble void fraction of 80%. However, this statement is not reliable because there is no way to assure which fluid (oil or gas) is inside the pressure taps.

## RESULTS

The results of processed data for bubble velocity, main frequency, and bubble and slug lengths are presented on Table 1 as function of liquid and gas superficial velocities.

Table 1- Acquired data

TEST		MEASURED VALUES				
V <sub>sg</sub>	V <sub>sl</sub>	V <sub>B</sub>	Freq.	β	L <sub>B</sub>	L <sub>S</sub>
m/s	m/s	m/s	Hz		m	m
0.33	1.16	2.19	0.140	0.197	2.83	11.57
0.33	1.16	2.30	0.107	0.252	2.79	8.27
0.33	1.16	1.99	0.130	0.259	3.48	9.94
0.33	1.16	2.13	0.114	0.218	2.57	9.18
0.44	0.99	2.02	0.146	0.235	3.26	10.59
0.44	0.99	2.19	0.083	0.300	7.88	18.41
0.44	0.99	1.98	0.146	0.295	4.01	9.57
0.44	0.99	1.98	0.083	0.294	6.99	16.78
0.44	0.99	2.43	0.104	0.406	9.48	13.85
0.58	0.86	2.03	0.083	0.364	8.85	15.49
0.58	0.86	2.03	0.125	0.433	7.02	9.20
0.58	0.86	1.88	0.125	0.481	7.25	7.82
0.58	0.86	2.11	0.125	0.505	8.52	8.36
0.70	0.72	1.88	0.083	0.509	11.51	11.10
0.70	0.72	2.03	0.125	0.563	9.13	7.09
0.70	0.72	1.88	0.083	0.528	11.94	10.68
0.70	0.72	2.65	0.083	0.625	19.89	11.94
0.80	0.50	1.91	0.063	0.699	15.44	6.64
0.80	0.50	2.11	0.042	0.691	34.96	15.64
0.80	0.50	2.19	0.063	0.696	24.39	10.65
0.90	0.40	1.59	0.042	0.728	27.07	10.10
0.90	0.40	1.90	0.042	0.809	25.59	6.06
0.90	0.40	2.11	0.063	0.726	24.51	9.25
0.99	0.25	3.24	0.021	0.813	126.67	29.14
0.99	0.25	3.24	0.042	0.937	72.82	4.90
0.76	0.33	3.98	0.042	0.781	74.49	20.89
0.76	0.33	3.50	0.063	0.781	43.74	12.26
0.76	0.33	2.13	0.042	0.781	39.97	11.21
0.72	0.30	3.02	0.021	0.781	113.29	31.77
0.64	0.28	3.50	0.063	0.625	35.00	21.00
0.50	0.22	3.37	0.031	0.812	87.59	20.28
0.50	0.22	3.37	0.063	0.844	45.45	8.40
0.50	0.22	4.61	0.083	0.844	46.66	8.62

Two adopted criteria were used to set the boundary between slug and stratified flow: the analysis of 1) slug velocities and 2) lengths. It was admitted that if the actual velocity was 20% greater than the calculated according to Bendiksen (1984), given by Eq. (7), there was no longer slug flow. The procedure is illustrated in Fig 6. These points correspond to the excessive bubble and slug lengths in Table 1. In addition it was also verified that the analysis fits with Taitel and Dukler (1976) flow pattern map (Figure 7).

$$V_B = 1.05 \cdot (V_{msl} + V_{sg}) + 0.54 \sqrt{\frac{(\rho_l - \rho_g)gd}{\rho_l}} \quad (7)$$

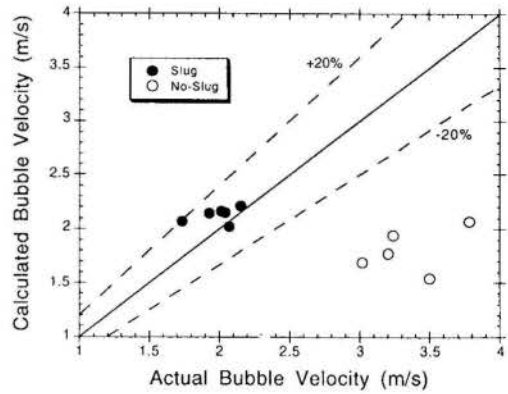


Figure 6- Comparison among calculated and actual bubble velocities.

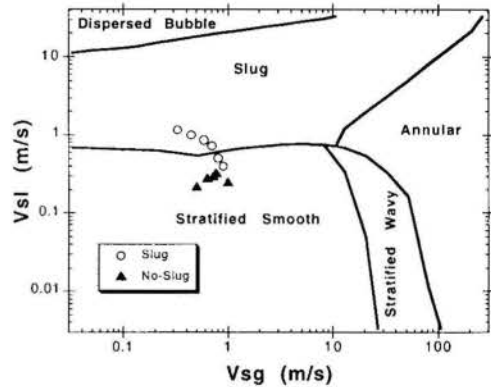


Figure 7 - Obtained data plotted in Taitel and Dukler (1976) flow pattern map.

Comparison Between Experimental Data and OLGA Simulator. Two-phase flow in pipes is a subject with a large background of research. Although there are many experimental and theoretical studies of horizontal slug flow (Dukler and Hubbard (1975), Nicholson et al. (1978)) almost all of them were performed with air and water as working fluids. Some works were performed with light oil and air like Gregory et al. (1978) but there are only a few data available for natural gas and oil as Brill et al. (1981). In real pipeline projects the equations developed for air-water flows are usually adopted.

Gas-oil flows are different from air-water flows mainly because of mass transfer between phases that can not be neglected. The dynamic two-phase flow simulator OLGA uses some hypothesis already published for slug flow and includes some approaches obtained in an experimental research in gas-oil flows (Bendiksen et al. (1991)). Experimental data were compared with OLGA results of slug tracking option. OLGA uses a PVT simulator (PVTOL) to calculate a table of fluid properties in flow conditions, given oil and gas compositions.

A comparison between obtained data and the results of the dynamic two-phase flow simulator OLGA showed good agreement if the slug frequency is known in advance. Using measured slug frequency as input data, OLGA results agreed with measured values into a range of ±10% for bubble velocity

and  $\pm 20\%$  for bubble and liquid length. This shows that although the slug flow models are well developed, there are still some uncertainties related to the mechanism of slug generation. The comparison is shown on Figures 8 and 9 comprising over average data for each oil and gas superficial velocity couple.

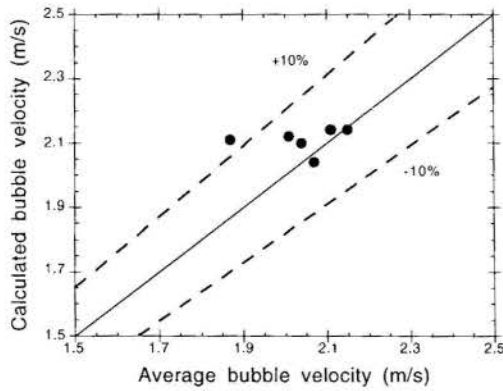


Figure 8 - Comparison of measured and calculated (OLGA) bubble velocities.

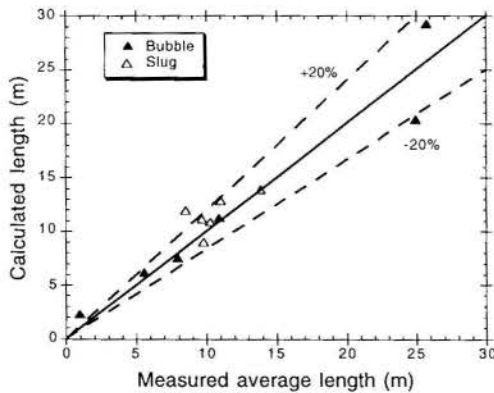


Figure 9 - Comparison of measured and calculated (OLGA) lengths.

**Statistical Analysis of Length Distribution.** The measured values are considered in terms of average, which have uncertainties that must be quantified. The analysis of the data histogram can provide information related to the data uncertainty. The histograms of bubble and slug lengths for  $V_{sl}=0.99$  m/s and  $V_{sg}=0.44$  m/s are presented in Figures 10 and 11.

According to the Figures 10 and 11 the two distributions are asymmetric. Brill et al. (1981) found a log-normal distribution for slug lengths. The log normal distribution means that the logarithms of the values of data ensemble have a normal distribution. The Komogorov-Smirnov test corroborated the correctness of this assumption for a significance level of 5%. This hypothesis can also be verified through the plot on Figure 12. In this figure, logarithms of bubble and slug lengths (for  $V_{sl}=0.99$  m/s and  $V_{sg}=0.44$  m/s) are plotted against the inverse of normal distribution of data occurrence ( $\eta^{-1}$ ). The straight line fit shows that the

assumption of normal distribution for logarithm of lengths is reasonable. It is important to note that the frequency spectrum (as shown in Figure 4) also reveals the shape of a log-normal distribution.

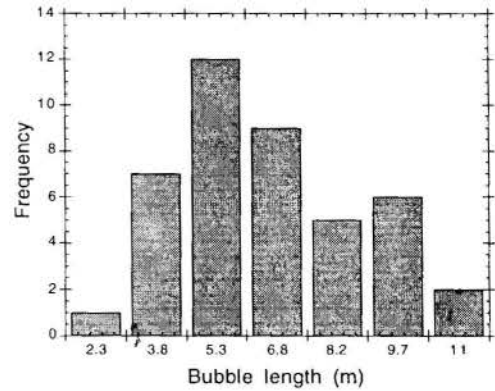


Figure 10 - Bubble length histogram

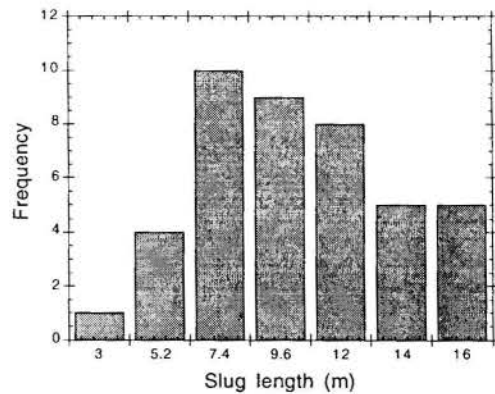


Figure 11 - Slug length histogram

Admitting the log-normal distribution, the maximum and minimum expected bubble and slug lengths for 95% of confidence are presented on Table 2. This table shows that regardless the periodic nature of slug flow, a broad range of individual bubble and slug lengths can be expected. One interesting fact is the similarity of values for maximum, minimum and average slug lengths at different flow rates. This fact is in agreement with the observations of stable slug lengths, "relatively insensitive to the gas and liquid flow rates," as stated by Dukler et al. (1985).

Table 2- Length limits for 95% confidence

$V_{sg}$ m/s	$V_{sl}$ m/s	Slug			Bubble		
		Lower m	Average m	Upper m	Lower m	Average m	Upper m
0.33	1.16	3.38	9.02	17.85	1.69	2.90	4.68
0.44	0.99	3.61	13.93	19.04	2.47	5.54	12.23
0.58	0.86	3.78	10.89	15.90	2.59	7.91	16.73
0.70	0.72	3.57	11.15	13.72	3.02	10.86	25.12
0.80	0.50	5.01	12.85	24.20	20.58	24.93	32.62
0.90	0.40	1.75	11.95	19.35	4.21	25.72	73.08

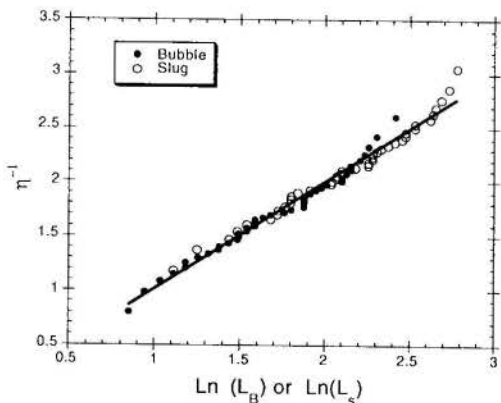


Figure 12- Normal distribution for natural logarithms of bubble and slug lengths

## CONCLUSIONS

A simple and reliable method for measurement of bubble and slug lengths was applied and tested. This method allowed the data acquisition in actual pipeline flow conditions. Obtained data were compared with the results of the two-phase flow simulator OLGA. The result shows good agreement with OLGA when using measured values of frequency as input data. Otherwise the calculated values are different from the obtained data.

Two criteria were adopted to distinguish between slug and stratified flows. The two criteria presented good agreement with the Taitel and Dukler (1976) flow pattern map.

The range of fluctuation of differential pressure signal provides information about bubble void fraction. However, this data must be taken with reservations because of its low accuracy.

The statistical analysis of data showed that bubble and slug lengths have log-normal distribution. This is in agreement with Brill et al. (1981), who found a log-normal distribution for slug lengths. Admitting the log-normal distribution it was possible to establish the maximum and minimum expected values for bubble and slug lengths. It was verified that although slug flow is doubtless periodic, individual bubble and slugs smaller and greater than the average values can be expected.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank João Francisco Vieira and Antônio Carlos Camaz for this valuable data acquisition. We also thank Dr. Elísio Caetano Filho for his help and suggestions, and Reinaldo Guerreiro for the assistance in the experimental facilities. Finally, we thank Dr. Geraldo Spinelli Ribeiro for his careful review.

## REFERENCES

- Bendiksen, K. H., 1984, "An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes", *International Journal of Multiphase Flow*, vol.10, n.4, pp 467-483.
- Bendiksen, K. H., Malnes, D., Moe, R. and Nuland, S., 1991, "The Dynamic Two-Fluid Model OLGA: Theory and

Application", *SPE Production Engineering*, may, pp 171-180.

Brill, J.P., et al., 1981, "Analysis of Two-Phase Tests in Large Diameter Flow Line in Prudhoe Bay field", *Society Petroleum Engineering Journal*, v.21, n.3, pp 363-378.

Dukler, A. E., 1975, "A Model for Gas-Liquid Slug Flow in Horizontal and Near Horizontal Tubes", *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, vol 14, n° 4, pp. 337-346

Dukler, A. E., Maron, D. M. and Brauner, N., 1985, "A Physical Model for Predicting the Minimum Stable Slug Length", *Chemical Engineering Science*, v. 40, n. 8, pp 1379-1385.

Gregory, G. A., Nicholson, M. K. and Aziz, K., 1978, "Correlation of the liquid volume fraction in the slug for horizontal gas-liquid slug flow", *International Journal of Multiphase Flow*, v.4, n.1 pp 33-39.

Nicholson, M.K, Aziz, K., and Gregory, G. A., 1978, "Intermittent Two Phase Flow in Horizontal Pipes: Predictive Models", *The Canadian Journal of chemical Engineering*, v.56, n.6, pp 653-663.

Taitel, Y. and Dukler, A. E., 1976, "A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow", *AIChE Journal*, vol. 22, N.1, pp 47-55.



## STUDY OF PIG MOTION IN PIPELINES

L.F.A. Azevedo, A.M.B. Braga and M.G.F.M. Gomes\*

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio  
22453-900, Rio de Janeiro RJ Brasil\*Petrobras/CENPES  
21910-000, Rio de Janeiro RJ BrasilSUMMARY

*The present paper reports on results of an ongoing research program aimed at developing simple models to simulate the motion of pigs in pipelines. Pigs are devices largely employed by the oil and gas industries to clean, dry or inspect pipelines. The models developed are based on simple fluid mechanics principles that are able to capture the relationship among the parameters that control pig motion. These parameters are the pig velocity, driving pressure, positive and negative bypass flow. The results were able to qualitatively predict the pig behavior. Preliminary field tests indicate that good quantitative results can also be achieved.*

INTRODUCTION

Pigs are devices frequently employed in the oil and gas industry to clean, dry or inspect pipelines. In general terms, a pig is a solid plug that is introduced in the pipeline to be serviced. Fluid is pumped upstream of the pig to provide the necessary force to set the device in motion, and to perform the desired task, i.e., removing deposits on the pipe wall, remove water from the pipeline or driving an inspection tool. The use of pigs has become a standard industry procedure. This expanding demand has driven manufacturers to produce a great variety of pig models. Yet, a difficulty often faced by the engineer when designing a pigging operation is the lack of reliable tools for the prediction of the many variables related to the motion of the pig through the pipeline. Most of the available knowledge is based on field experience. Hence, selecting the best pig, estimating its speed, required driving pressure and the amount of back and forward bypass of fluid, often involves some guesswork and, consequently, a high degree of uncertainty.

Figure 1 was prepared to aid the description of the main characteristics of a pig in operation. In the particular case shown in the figure, a pig formed by two piston-type cups attached to a cylindrical body is performing a cleaning operation. Fluid pumped upstream of the pig provides the necessary pressure difference to overcome the contact force at the wall, to remove the deposits and to accelerate the pig. In order to produce efficient cleaning and sealing, pigs have normally nominal diameters larger than the pipe diameter. Some pigs present passages in the cup or in the body to allow some fluid flow through the pig. This bypass flow is used to control the pig velocity and to avoid that the deposits removed in a cleaning operation accumulate downstream of the pig, forcing it to stall.

The accurate prediction of the pig dynamics is nearly an impossible task. Although the geometry of the pig and its material properties are fairly well known, the same is not true for the pipeline. Normally, pigs run through pipelines which are several kilometers long, with unknown distribution of imperfections such as weld penetrations, ovalities, joints, surface roughness, etc. Even with these uncertainties, there is certainly a need for more fundamental knowledge on pipeline pigging.

Results of research on the motion of pigs in pipelines are scarcely found in the literature. One may refer to related work

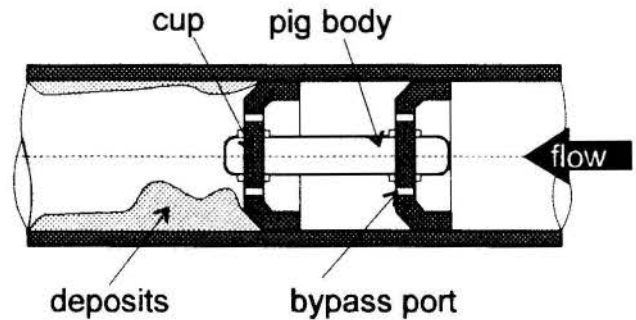


Figure 1 - Schematic View of a Cleaning Pig.

conducted by Ellis in the 1960s on the pipeline flow of capsules (e.g. Kruyer et al., 1967). Although some of their results can be extended to pigs, it does not consider important variables such as contact forces or bypass through holes. Sullivan (1981) and Haun (1986) treat the dynamics of pigs in gas lines. More recently, an experimental research program, which addresses some fundamental problems related to pipeline pigging, has been conducted by Caltec in the UK (Short, 1994). Among other topics, this study focus on the relationship of flow variables with cleaning efficiency and cup wear.

The objective of the present paper is to report preliminary results of an ongoing research project aimed at developing simple models capable of predicting the dynamics of pig motion in pipelines. The simple models are backed by computational fluid dynamics and finite-element stress analysis, as well as by experimental results and field data. Besides the understanding of pig dynamics, the end product of this project is a software incorporating the simple models developed which will help field engineers to design pigging operations.

In the present paper only the hydrodynamic models will be explored. Readers interested in the modeling of the contact forces may refer to Gomes, 1994.



## MODELING OF PIG MOTION

The pig motion is controlled by a balance of the hydrodynamic and contact forces. The hydrodynamic forces depend on the pressure gradient established across the pig. In the case of sealing pigs, which do not possess bypass ports, experimental evidence shows that fluid upstream of the pig is able to pass the pig. Also, fluid downstream of the pig is able to move upstream. The existence of this forward and backward bypass flow is due to the imperfections on the pipe wall already mentioned. A model for the pig motion has, therefore, to account for both, the bypass flow through the pig/wall interface and, when they are present, for the bypass flow through the ports.

**A Model for Bypass flow Through Ports.** The simplest model to relate flow rate and pressure drop across a bypass port such as those presented in Fig. 1, is to consider them as pipes. In this case, the pressure drop is due to localized losses at the entrance and exit sections, and due to friction losses in the fully developed flow, in case the length of the port is sufficiently long. Thus,

$$Q_{bpp} = n A_f \left[ \frac{\Delta p}{\left( \frac{f L}{2d} + \frac{K}{2} \right) \rho} \right]^{1/2} \quad (1)$$

where,

- $Q_{bpp}$  : bypass flow rate through the port ( $m^3/s$ )
- $\Delta p$  : pressure drop across the port (Pa)
- $\rho$  : fluid density ( $kg/m^3$ )
- $f$  : friction factor for fully developed pipe flow (dimensionless)
- $K$  : local pressure drop coefficient (dimensionless)
- $d$  : port diameter (m)
- $n$  : number of bypass ports
- $A_f$  : cross sectional area of the port ( $m^2$ )

Equation (1) is valid for both laminar and turbulent flow, once the appropriate value of the friction factor is chosen among the many correlations or charts available in the literature. In most cases, however, the bypass port can be considered as a short duct and the local pressure drop coefficient  $K$ , controls the flow. This coefficient can be evaluated from laboratory experiments or, in the lack of more accurate results, can be taken from data in the literature for round or sharp edge pipe entrances and outlets.

**A Model for the Bypass Flow Through the Pig/Pipe Interface.** Even when operating with large nominal oversizes, pig cups do not completely prevent bypass flow. As already mentioned, imperfections along the pipe wall are responsible for this bypass flow, which makes virtually impossible to devise a mathematical model that takes all localized effects into account.

An effective-gap model was devised to construct a simple mathematical model which still preserves some of the qualitative features of the actual problem. This model considers a single geometrical parameter,  $\delta$ , which represents the thickness of an idealized uniform gap between the pig surface and the pipe wall, as shown schematically in Fig. 2. It is further assumed that  $\delta$  is much smaller than the pipe diameter. In this case, one may neglect curvature, modeling the leakage across the idealized gap as the fully developed flow between two parallel plates. An estimate for the net bypass flow rate through the effective gap,

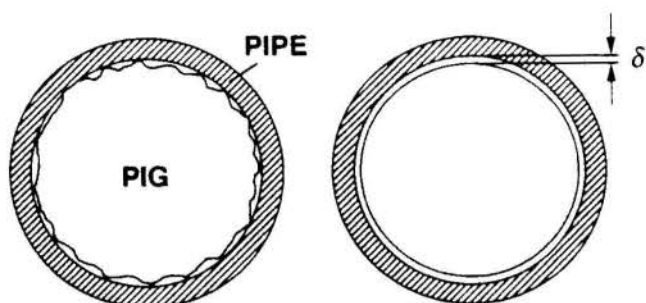


Figure 2 - The Effective Gap Model.

$Q_{bpg}$ , for a laminar flow of an incompressible, Newtonian fluid, is given by:

$$Q_{bpg} = \pi D \left[ \frac{\delta^3 \Delta p}{12 \mu L} - \frac{V_p \delta}{2} \right] \quad (2)$$

where  $V_p$  is the pig velocity,  $D$  its diameter,  $\mu$  the fluid dynamic viscosity, and  $L$  the length of the cup in contact with the wall.

The effective-gap model allows the calculation of an estimate of the tangential stress developed at the pig surface,  $\tau_w$ :

$$\tau_w = -\frac{\mu V_p}{\delta} + \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} \delta \quad (3)$$

**Force Balance on the pig.** For a pig moving in steady motion, the forces due to the pressure difference across the pig and to the tangential viscous stresses must balance the pig/wall contact force. Thus, for a single-cup pig,

$$\Delta p A_p + \tau_w A_L = |F_c| \quad (4)$$

where,  $A_p$  is the pig cross sectional area and  $A_L$  the pig cup lateral area in contact with the pipe wall, and  $|F_c|$  the absolute value of the contact force.

**Mass Balance Across the Pig.** The total flow rate across the pipe,  $Q$ , is normally a known quantity which is related to the total bypass flow rate,  $Q_{bp}$ , by the mass conservation equation. For a control volume moving with the constant pig velocity, and for an incompressible fluid, one can write:

$$Q - V_p A_p = Q_{bp} \quad (5)$$

The total bypass flow rate is the sum of the bypass flow rates through the effective gap and ports, i.e.,

$$Q_{bp} = Q_{bpg} + Q_{bpp} \quad (6)$$

The set of six equations formed by equations (1) - (6) can be solved for bypass flow rate, pig velocity, and driving pressure

difference, once the geometrical characteristics of the pig, the total flow rate, the fluid properties, and the pig/wall contact force are known.

**Influence of the Cup-to-Cup Distance.** The model just described can be readily extended to multi-cup pigs as long as each cup does not hydrodynamically interfere with its neighboring cup. It is conceivable that, for instance, the flow through a bypass port can be directed to another port positioned straight ahead in the neighboring cup, producing a different localized pressure drop coefficient and, as a consequence, a different driving pressure. Two questions in this regard need to be answered: 1) What is the minimum cup-to-cup distance that allows cups with aligned ports to be considered as hydrodynamically independent? 2) What is the effect on the pressure drop caused by misaligning the ports in neighboring cups?

To help answer these questions, an experimental investigation was set forth, as described next.

### EXPERIMENTS

The objective of the experiments conducted was to investigate the details of the flow in the neighborhood of ports in pig cups.

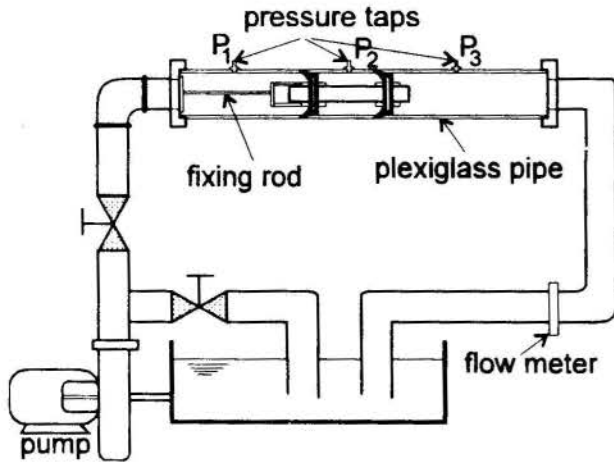


Figure 3 - Test Section for Pressure Drop Measurements.

**Pressure Drop Experiments.** Figure 3 presents a schematic view of the test section constructed for the experiments. A pig formed by two conical cups mounted on a brass cylindrical body was positioned in the interior a 106-mm-diameter, Plexiglas tube. The pig to be tested was fixed to test section by means of a brass rod attached to the rear face of the pig body. Water was pumped by a centrifugal pump from a large reservoir, through the test section and back to the reservoir. An orifice plate, built according to the ASME standards (ASME, 1971), measured the flow rate. The estimated experimental uncertainty levels in the flow measurements were of the order of  $\pm 3\%$ . The flow rate in the test section was controlled by two valves. The pressure drop across each cup was measured using pressure taps installed at pipe wall, and employing a U-tube mercury manometer. The uncertainty in the pressure measurements was estimated to be equal to  $\pm 1$  mm of mercury.

The pig tested had three 7-mm-diameter holes in each cup. The holes were uniformly distributed along the circumference of each cup. The body of the pig was specially designed to allow

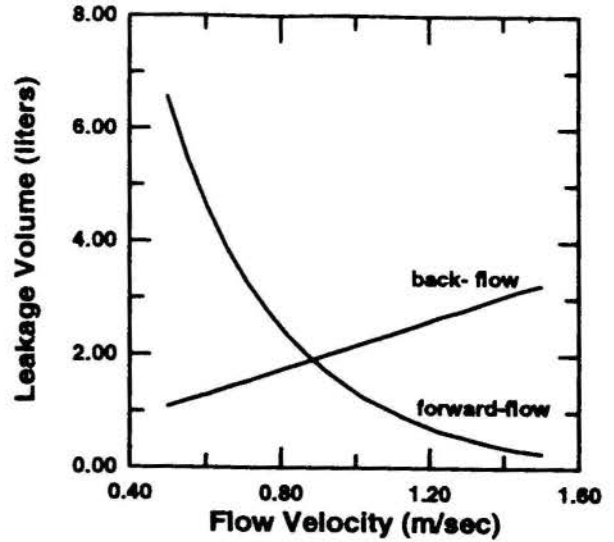


Figure 4 - Back and Forward Bypass Flow Along Pipeline.

the cups to be easily positioned at different spacings. Also, the cups could be rotated to allow the investigation of different configurations, namely, aligned bypass holes or misaligned bypass holes.

Once the desired inter-cup spacing and bypass hole alignment configuration were set, the cups were firmly secured to the pig body by means of four nuts. The pig was then introduced into the Plexiglas tube and fixed in position by the brass rod. The circuit was sealed, and water pumped into it. Vents positioned at special locations in the circuit were used to eliminate all the air trapped in the circuit.

Each run was characterized by a inter-cup spacing and a relative position of the bypass holes in each cup. For each set of these geometric pig parameters, a series of water flow rate values was investigated. For each flow rate the pressure drop across the cups was recorded.

The pressure drop coefficient for each cup was calculated from the measured data by,

$$K = 2 \Delta p / (\rho V^2) \quad (7)$$

where  $V$  is the average fluid velocity at each bypass hole.

### RESULTS AND DISCUSSION

The results to be presented here do not allow a definitive assessment of all the models developed, since several of the laboratory and field tests are presently being conducted. Nevertheless, as will be seen shortly, the results presented give qualitative indication of the good capability of the models to predict pig motion.

**Results from the Effective-Gap Model.** The effective gap model described in the present paper was employed to model the motion of a pig without bypass ports. Results from simulations of leakage across the effective gap are presented in Fig. 4. These results were obtained for a pig in a 100-mm-diameter and 1300-mm-long pipeline, with a driving pressure of  $2.5 \text{ kgf/cm}^2$  and an effective gap,  $\delta$ , equal to 0.1 mm. The fluid viscosity was taken

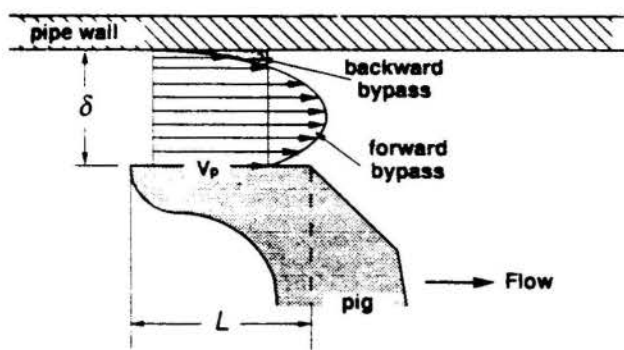


Figure 5 - Fluid Velocity Distribution Across the Effective Gap.

as  $2.10^{-3}$  kg/m.s. In the figure, the total volume of flow leaking during the motion of the pig along the pipeline length is plotted as a function of the average flow velocity. For a pig without bypass ports and displaying a small amount of leakage, the average fluid velocity is a good indication of the pig velocity.

The curve labeled as forward flow represents the flow of fluid that passes the pig, coming from upstream. This flow is seen to decrease sharply as the pig velocity increases. The flow of fluid that is left behind by the passage of the pig, however, displays a different dependence on the pig velocity. It can be seen in the curve labeled back-flow in Fig. 4, that this back leakage increases with pig velocity.

It should be pointed out that the results presented in Fig. 4 are in perfect qualitative agreement with results obtained by Hara, Hayashi and Tsuchiya, reported by Cordell (1986). In their experiments a sealing pig was used to separate two different fluids in the pipeline. Analysis of the concentration of the fluids after the run allowed the calculation of back and forward leakage components. Unfortunately, detailed data were not published which precluded a quantitative comparison with the predictions of the effective-gap model proposed here.

The behavior of the leakage curves presented in Fig. 4 can be better understood by examining equation (2). In this equation

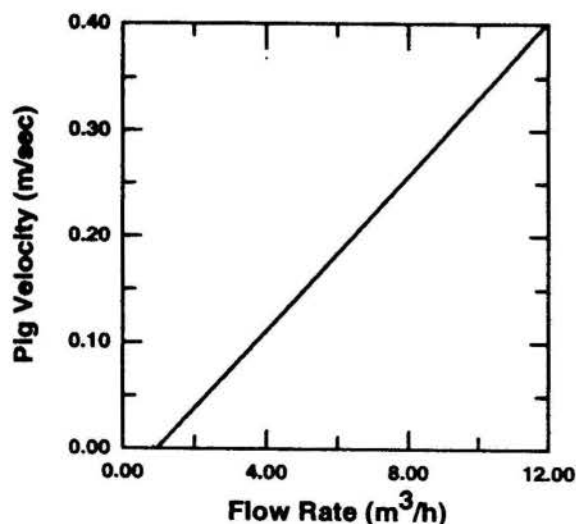


Figure 6 - Velocity of a Single Piston-Type-Cup Pig.

it is seen that the bypass flow rate across the gap has a forward (positive) component driven by the pressure gradient across the pig, as well as a backward (negative) contribution. The latter is due to the no-slip condition for the fluid at the pipe wall, which produces a region of fluid moving slower than the pig being, therefore, left behind. This can be better understood with the aid of Figure 5. The figure shows an enlarged view of the effective gap for a pig moving with velocity  $V_p$ . The regions corresponding to forward and backward bypass flow rate are marked in the figure.

The results obtained with this simple effective-gap model can give important indications for field operations. It is demonstrated that if one wishes to minimize the backward bypass flow, the pig should be operated at the lowest velocity possible, and employing a high pressure gradient. For instance, in dewatering operations, gas is used to drive a sealing pig with the objective of removing liquid from a pipeline. In this case, the best results (i.e., the least amount of liquid left in the pipe) will be obtained by operating the pig at low velocities and high gas pressures. This can be done by using a pig which produces a high contact force against the wall.

**Results for Pigs with Bypass Through Ports.** A typical result obtained with the model that incorporates bypass flow through ports in the pig cup is now presented. In this case, bypass flow through the pig/pipe interface is also considered, i.e., the effective-gap model is also being used.

Figure 6 presents a plot of the pig velocity versus total pipe flow rate. This result was obtained for a single piston-type cup pig with four 5-mm-diameter bypass holes. The contact force estimated for this pig was of the order of 185 kgf. The pig starts the motion only when the flow rate reaches the value of  $4.7$   $m^3/h$ , and its velocity increases linearly with the flow rate. This is valuable information for the field engineer designing a pigging operation. For instance, it is possible to estimate whether a particular pig will move for a given flow rate, without actually running the pig through the pipe, avoiding the risk of pig stall.

Figure 7 presents the backward bypass flow results for the pig studied. It can be verified in the figure that the fluid begins to leak backwards as the pig starts its motion at the flow rate of  $4.7$   $m^3/h$ , increasing monotonically from there on.

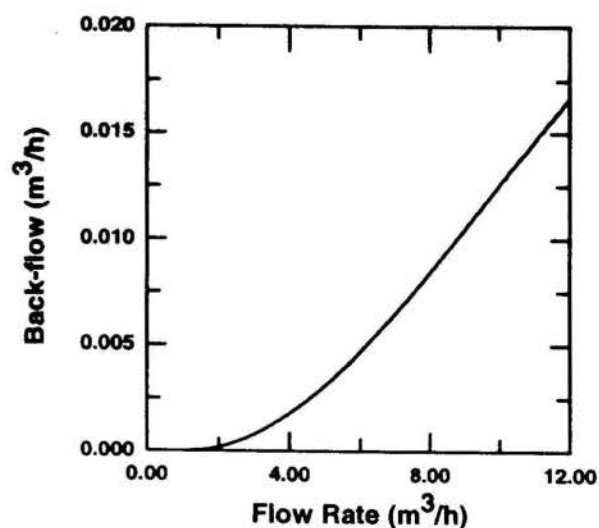


Figure 7 - Backward Bypass Flow for a Single Piston-Type-Cup Pig.

**Experimental Results for Cup Interference.** Pigging operations are normally conducted utilizing pigs with multiple cups. As described before in this paper, experiments were conducted to assess the hydrodynamic interference in neighboring cups with bypass ports. The results obtained are presented in Tables 1 - 4.

The results reported in Table 1 correspond to the pig with the cups mounted 165 mm apart, having its three bypass holes perfectly aligned in the two cups. The table shows the pressure drop across each cup, for each volume flow rate investigated. Also

Table 1 - Pig with Bypass Ports in the Cups:  
Inter-cup spacing = 165 mm, aligned holes

Q m <sup>3</sup> /s	P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> kgf/cm <sup>2</sup>	P <sub>2</sub> -P <sub>3</sub> kgf/cm <sup>2</sup>	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>
2.59	0.303	0.303	1.53	1.53
2.32	0.236	0.238	1.49	1.50
1.89	0.167	0.163	1.58	1.55
1.62	0.124	0.126	1.60	1.63
1.32	0.084	0.078	1.63	1.52
1.01	0.046	0.049	1.53	1.63

Table 2 - Pig with Bypass Ports in the Cups:  
Inter-cup spacing = 22 mm, aligned holes

Q m <sup>3</sup> /s	P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> kgf/cm <sup>2</sup>	P <sub>2</sub> -P <sub>3</sub> kgf/cm <sup>2</sup>	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>
3.14	0.420	0.212	1.44	0.73
2.70	0.309	0.158	1.44	0.73
2.20	0.217	0.099	1.52	0.69
1.50	0.092	0.045	1.39	0.68
1.13	0.051	0.023	1.35	0.61
0.95	0.034	0.017	1.28	0.64

Table 3 - Pig with Bypass Ports in the Cups:  
Inter-cup spacing = 80 mm, aligned holes

Q m <sup>3</sup> /s	P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> kgf/cm <sup>2</sup>	P <sub>2</sub> -P <sub>3</sub> kgf/cm <sup>2</sup>	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>
2.59	0.259	0.254	1.31	1.28
2.41	0.233	0.217	1.36	1.27
2.12	0.200	0.176	1.51	1.33
1.82	0.154	0.118	1.58	1.21
1.49	0.101	0.083	1.54	1.27

in the table, are the localized pressure drop coefficients for each cup, calculated according to equation (7).

An analysis of the results of Table 1 shows that, for the range of flow rates investigated, the pressure drop in the cups is virtually identical. This fact demonstrates that, although the bypass holes are perfectly aligned, the separation between cups is sufficient to allow the flow to expand in the inter-cup space before entering in the holes of the second cup. In other words, the cups can be considered as hydrodynamically independent, and multi-cup pigs can be modeled as a combination of independent cups.

By mounting the cups at only 22 mm apart, a distinct flow behavior is observed, as shown in Table 2. The pressure drop across the second cup is now nearly half of that developed across the upstream cup. The fluid coming from the bypass hole penetrates the bypass hole of the second cup without having

enough space to expand. The result is a smaller pressure drop. If a pig were to be used with a configuration such as the one described, the second cup would develop half of hydrodynamic force developed by the upstream cup. At an inter-cup distance of 80-mm, an intermediate result is obtained, as shown in Table 3. This points to the need for an engineering criteria for considering the cups as independent.

Table 4 - Pig with Bypass Ports in the Cups:  
Inter-cup spacing = 22 mm, misaligned holes

Q m <sup>3</sup> /s	P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> kgf/cm <sup>2</sup>	P <sub>2</sub> -P <sub>3</sub> kgf/cm <sup>2</sup>	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>
2.40	0.253	0.247	1.49	1.45
2.33	0.233	0.234	1.45	1.46
2.11	0.191	0.191	1.45	1.45
1.84	0.145	0.142	1.45	1.42
1.66	0.120	0.110	1.48	1.35
0.83	0.032	0.030	1.57	1.48

Table 4 presents the results of experiments conducted with a pig with misaligned bypass ports. It is clearly seen that, even for the small inter-cup spacing, the pressure drop across each pig is approximately the same. The misaligned cups are, therefore, hydrodynamically independent.

As a final remark, it should be pointed out that an experimental program is presently being conducted at the test facilities of the Petrobras R&D Center. These studies will provide a definitive assessment of the accuracy of the models proposed. However, the models developed are already being employed to aid the design of field operations. Some of the results reported are encouraging. For instance, in a recent cleaning operation in the Rio de Janeiro-Belo Horizonte pipeline (ORBEL-1), operated by Petrobras, a four disc-pig was employed to clean the 18-in, 71-km-long section between the cities of Belo Vale and Belo Horizonte. The pig had four 12-mm-diameter bypass holes and was driven by water at 230 m<sup>3</sup>/h. An estimate of the pig velocity using the models present here in conjunction with the contact forces models (not described here), yielded a run time for the pig that differed by only 11 minutes from the actual time of 48 hours measured in the field.

## CONCLUSION

The present paper reported preliminary results of a research program aimed at developing simple hydrodynamic models for the simulation of pig motion in pipelines. Although a number of simplifying hypotheses were considered, it is believed that such models can be of valuable help for both pig design and operation. Besides yielding quantitative information concerning bypass flow, speed, and other hydrodynamic variables, these models also provide a better understanding of the complex behavior of pig motion, which, so far, has been mainly based on field experience.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors gratefully acknowledge the support awarded to this research by CENPES, the Petrobras Research and Development Center. The first two authors also thank the Brazilian Research Council, CNPq, and the Brazilian Ministry of Science and Technology, MCT, for the continuing support.



## REFERENCES

ASME Research Committee on Fluid Meters - Their Theory and Application, 6<sup>th</sup> ed., 1971.

Azevedo, L.F.A., 1994, "Prediction of Pig Motion in Pipelines", Research Report, Department of Mechanical Engineering, PUC-Rio (in Portuguese).

Cordell, J.L., 1986, "Design of Pigs for Subsea Systems", *Proceedings of the 1986 Conference on Subsea pigging*, Haugesund, Norway, Pipes & Pipelines International.

Gomes, M.G.F.M., 1994, "Finite Element Analysis of Pig Cups for Pipeline Cleaning", Msc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Federal University of Rio de Janeiro (in Portuguese).

Haun, R., 1986, Analysis and Modeling of Pipeline Dewatering and Startup, Part 1", *Pipeline Industry*, February, pp.37-41.

Kruyer, J., Redberger, P.J., and Ellis, H.S., 1967, "The Pipeline Flow of Capsules - Part 9", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 30, part 3, pp. 513-531.

Short, G.C., 1994, "The Pigging Technology Project: The First Three Years", *Pipes & Pipelines International*, Vol. 39-4, pp.23-27.

Sullivan, J.M., 1981, An Analysis of the Motion of Pigs Through Natural Gas Pipelines", Msc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Rice University.





## DEVELOPMENT OF SEMI-EMPIRICAL MODELS TO PREDICT THE CRITICAL CONDITIONS OF DRILLED CUTTINGS TRANSPORT IN DEVIATED WELLS



**Moacyr B. Laruccia**

Department of Petroleum Engineering  
State University of Campinas  
13083-970 - Campinas - SP - Brazil

**Erghu Gao**

Anchor Drilling Fluids Ltd.  
AB1 4AR - Aberdeen - Scotland - U.K.

**John T. Ford**

**Babs Oyenehin**

**James M. Peden**

Department of Petroleum Engineering  
Heriot-Watt University  
EH14 4AS - Edinburgh - Scotland - U.K.

### SUMMARY

*The methodology described here represents a new approach to interpret an extensive experimental work carried out in a simulated testing column in the Department of Petroleum Engineering at Heriot-Watt University (Edinburgh, Scotland) by an industry sponsored project to observe the minimum transport velocity (MTV) of the drilling fluid required to ensure efficient hole cleaning during drilling operations. Analytical and numerical one-phase fluid models (Laruccia, 1995) describing the creeping helical flow of inelastic fluids in concentric and eccentric annuli are incorporated to the development of two distinct semi-empirical correlations to predict the critical conditions of cuttings transport by the mechanisms of rolling and suspension, in deviated wellbore. In the present analysis the MTV predictions are based on a dimensional analysis that includes the resistance forces correspondent to the two distinct mechanisms of transport experimentally observed by Gao (1994).*

### INTRODUCTION

One of the primary functions of the drilling mud is the transport of drilled cuttings out of the hole. The factors affecting this transport have been recently studied by many authors: Sifferman & Becker (1990), Fraser (1990), Chin (1990), Becker et al. (1991) and Luo et al. (1992). Yet, a comprehensive study was given earlier by Iyoho (1980), followed by Luo (1988) and, more recently, by an extensive experimental work carried out in a simulated testing column at Heriot-Watt University since 1990 (Gao, 1994). The industry sponsored project entitled "Drilled Cuttings Transport in Deviated Wells" used numerical models of one phase flow proposed by Laruccia (1995) to analyse experimental data obtained by Gao (1994). The experimental work provided data, of the circulation rate required at the critical conditions of transport of drilled cuttings, in simulated situations that covers directional transport in various angles, at different sets of operational conditions. As a result, a semi-empirical correlation was produced based on a force balance (Gao et al., 1993). The force balance was applied to a cutting, resting on the low-side wall of an inclined annulus, at the point of being transported by one of the mechanisms of transport experimentally observed. In the present analysis MTV is predicted by a semi-empirical correlation which is not based on a force balance alone. It is rather based on a dimensional analysis that includes the resistance forces correspondent to the two distinct mechanisms of transport experimentally observed by Gao (1994): rolling and suspension. The advantage of such change is easily demonstrated by the fact that in this case the number of variables to be considered in the analysis is only dependent on the range of study experimentally covered. When the force balance is alone considered to build the correlation, only the variables present in

the definition of the involved forces are explicitly included in the correlation. In other words, geometric parameters like eccentricity and annular size can only be properly considered when dimensional analysis is applied. As verified here, these variables are essential to quantify the existence of wall effect that otherwise would masquerade the results.

### EXPERIMENTAL DATA

The minimum rate of fluid circulation required for the transport of cuttings was observed and measured in a simulated column fully described by Gao (1994). The experimental data used in the present analysis covered the following set of operational conditions:

- Annular Size (diameter in cm): (13.7 x 6.10) and (13.7 x 3.34);
- Eccentricity<sup>i</sup> (%): 0; 30; 50 and -50;
- Drillpipe Rotation (rpm): 0; 60 and 120;
- Angle of Transport (vertical: 0° and horizontal: 90°): 0; 15; 30; 40; 50; 60 and 90°;
- Simulated Drilled Cuttings: gravel sand. Two main size distributions were used: (1.7 to 2.0) mm and (2.8 to 3.35) mm in diameter. Density: 2.63 g/cm<sup>3</sup>;

<sup>i</sup> Negative eccentricity means that in an inclined eccentric annulus the lowest section (where the transport of cuttings at critical conditions normally occurs) is the biggest section, or the section with the biggest rate of circulation. Positive eccentricity means that the lowest section of the annulus is the smallest section, or the section with the smallest rate of circulation.

- Concentration of Cuttings (% in volume): 1; 2; 3 and 4;
- Simulated Drilling Fluids: different compositions of water, CMC (Carboxymethyl Cellulose) and XC;
- Laminar Flow.

## FLUID FLOW MODELS

The experimental data of the minimum conditions of transport used in the present analysis included the following annular flows: (i) axial flow in concentric and eccentric annuli and (ii) helical (axial-rotary) flow in concentric annuli. A semi-analytical model (Laruccia, 1995 - chapter II) was used to simulate axial and helical flows in concentric annuli while the axial flow in eccentric annuli was simulated by a numerical approach based on finite differences and bipolar co-ordinates (Laruccia, 1995 - chapter III). Firstly, these two fluid flow models were used to estimate the point velocity,  $v_p$ , acting on a particle which is at the point to be transported and is located on the lower side of the annular wall (see assumptions adopted next). The average flow velocity observed at critical conditions of transport (M.T.V.), for given operational conditions, is used as input in the fluid flow models to calculate the velocity field, and consequently  $v_p$ , which is assumed to be the point velocity at one cutting radius distant from the wellbore surface, on the lower side of an inclined annulus. The computation was repeated for 625 different flow conditions experimentally investigated. Secondly, these computed values of  $v_p$  were used to correlate drag and lift coefficients as function of the local Reynolds number. At last, the final correlations for rolling, Eq. (8), and suspension, Eq. (9), can be used to predict  $v_p$ , in many different operational conditions. The fluid flow models with the predicted value of  $v_p$  as input are then used for each case to calculate the flow rate at critical conditions of transport. The velocity profiles are recalculated until the velocity of the fluid, at one cutting radius distant from the outer wall at the lowest section of the inclined annulus, matches the predicted point velocity obtained by Eq. (8) and Eq. (9).

## ASSUMPTIONS

The main assumptions adopted to build the correlation representing the critical conditions of transport are described next:

**Hypothesis no. 1.** Power-Law was adopted in this analysis in order to simplify our first attempt to use the methodology proposed here. However further analysis should consider the model of Herschel Bulkley as a more accurate representation of the mud rheology.

**Hypothesis no. 2.** All cuttings are spherical. Because of the difficulty and impracticability of determining the surface area of the irregularly shaped cuttings, no attempt was made by Gao (1994), main author of the experimental data used here, to analyse the shape of the cuttings. Consistent analysis of the effect of shape and size on the transport of simulated cuttings in vertical wells has been earlier investigated by Hall, Thompson & Nuss (1950), Williams & Bruce (1951), more recent by Peden & Luo (1987) and Laruccia et al. (1990a).

**Hypothesis no. 3.** The presence of cuttings in the range of concentration: 1 to 4 % in vol. does not affect the fluid rheology or the rate of circulation in the annular region. This hypothesis

has predominantly been adopted in many previous works based on experimental observations (Sifferman et al., 1974; Luo, 1988; Ford et al., 1993; Gao et al., 1993 and Gao, 1994). Nevertheless, a rigorous study of the effect of cuttings concentration on the settling velocity of variously shaped particles in non-Newtonian fluids has proved to be useful for a better understanding of the effect of cuttings concentration on hole cleaning efficiency (see Laruccia, 1990 and Laruccia et al., 1990b).

**Hypothesis no. 4.** There is only one layer of cuttings resting on the low-side wall of the annulus, a single-layer cuttings-bed.

**Hypothesis no. 5.** There is no interaction between the cuttings in this single-layer cuttings-bed, the bed is formed loosely.

**Hypothesis no. 6.** There is no interaction between cuttings and the wellbore walls. The presence of mud filter cake at the walls of the wellbore is not considered;

**Hypothesis no. 7.** There is no appearance of Taylor Vortices. It was verified that most of the experimental conditions investigated here for axial-rotary flows are aside from the region characterised by the presence of toroidal vortices (Laruccia, 1995).

## THE PHYSICAL MODEL

The forces acting on a cutting lying on the low-side wall of an inclined annulus, subjected to dynamic conditions of an upward axial (or helical) flow of a non-Newtonian fluid, include a lift force, a drag force, gravity force and a friction force between the cutting and the annular wall.

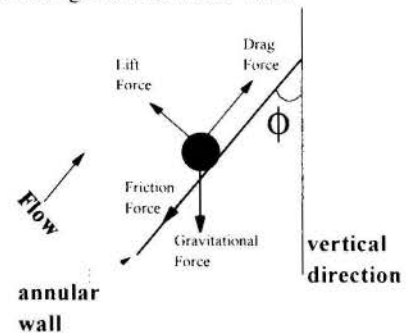


Figure 1 - Forces acting on a cutting resting on the low-side wall of an inclined annulus

**Rolling or Sliding.** Let us consider a cutting lying on the low-side wall of an inclined annulus as represented in Figure 1. A force balance applied at the instant before the start of rolling (or sliding) in the direction of the flow, gives:

$$F_D - F_g \cos \phi - F_f \geq 0.$$

**Lift-off.** Let us consider a cutting lying on the low-side wall of an inclined annulus or under rolling (or sliding) movement. The forces responsible for promoting (or for opposing) a lift-off on this cutting are located in the normal direction to the fluid flow. Thus, a force balance in this direction gives:

$$F_L - F_g \sin \phi \geq 0.$$

The variables involved during the critical conditions for cuttings rolling (or sliding) and lift-off movements are respectively given by the functions  $f_{RS}$  and  $f_L$ . When studying these two distinct mechanisms of transport an important variable

to be considered is the resistance force to the movement of the cutting, which is identified by the force balance. In this analysis we consider the shear-stress at the vicinity of the cutting,  $\tau_{sl}$ , as being the only material function relevant to the fluid. The dimension of the cutting is characterised by  $d_s$ , the diameter of a sphere with the same volume of the cutting. Finally, the geometry of the annular space is described by  $w_{ca}$ , the width of the lowest section of an inclined eccentric annulus, where the start of cuttings transport occurs.

$$f_{RS} \left\{ \left[ \frac{\text{resistance force}}{\text{volume of cutting}} \right]; \rho; \tau_{sl}; \rho_s; d_s; v_p; w_{ca} \right\} = 0 \quad (1)$$

The resistance to cuttings rolling is represented by:

$$\frac{\text{resistance force}}{\text{volume of cutting}} = \frac{4}{3}(\rho_s - \rho)g(\cos\phi + C_f \sin\phi)$$

where  $C_f$  is the friction coefficient experimentally determined. An approximated value suggested by Gao (1994) was used here. It was obtained by observations of the angle of inclination in which a single layer of sand stones, lying on the low-side wall of an inclined annulus (a testing column filled with simulated drilling fluid), starts to move under static conditions.

$$f_L \left\{ \left[ \frac{\text{resistance force}}{\text{volume of cutting}} \right]; \rho; \tau_{sl}; \rho_s; d_s; v_p; w_{ca} \right\} = 0 \quad (2)$$

The resistance to cuttings lift-off is represented by:

$$\frac{\text{resistance force}}{\text{volume of cutting}} = \frac{4}{3}(\rho_s - \rho)g \sin\phi$$

$w_{ca}$  is defined by the following expressions:

- for positive eccentricity:  $w_{ca} = r_{out} - r_m - \delta$

- for negative eccentricity:  $w_{ca} = r_{out} - r_m + \delta$

where  $\delta$  is the distance between the centre of the circles that form the eccentric annulus.

The Buckingham Pi theorem applied to the functions  $f_{RS}$  and  $f_L$  resulted in two series of four dimensionless groups of the following form:  $f_{RS}(\pi_1^{RS}; \pi_2^{RS}; \pi_3^{RS}; \pi_4^{RS}) = 0$  and

$f_L(\pi_1^L; \pi_2^L; \pi_3^L; \pi_4^L) = 0$ , described next.

$$\pi_1^{RS} = C_D = \frac{\left[ \frac{4}{3}(\rho_s - \rho)g(\cos\phi + C_f \sin\phi) \right]}{\left[ \frac{\rho v_p^2}{d_s} \right]} \quad (3)$$

$$\pi_1^L = C_L = \frac{\left[ \frac{4}{3}(\rho_s - \rho)g \sin\phi \right]}{\left[ \frac{\rho v_p^2}{d_s} \right]} \quad (4)$$

$$\pi_2^{RS} = \pi_2^L = \frac{\rho v_p^2}{\tau_{sl}} = Re_{gen} \quad (5)$$

$$\pi_3^{RS} = \pi_3^L = \frac{d_s}{w_{ca}} \quad (6)$$

$$\pi_4^{RS} = \pi_4^L = \frac{\rho}{\rho_s} \quad (7)$$

Because the initiation of cuttings movement is relevant only to the fluid dynamic condition near the wellbore surface in the low-side of the annulus, the velocity of the fluid at one radius distant from the wall ( $v_p$ ) is used to describe the local dynamic condition of the creeping annular flow. Being the shear rate,  $\dot{\gamma}$ , a kinematic variable, we can suppose a dependence only on the geometry (dimension and form of the particle) and the relative velocity between the fluid and the particle (Laruccia et al., 1990b; Freire & Gubulin, 1986 and Massarani & Telles, 1977). Thus,  $\dot{\gamma} = \Gamma(d_s, \Phi, \|v-u\|)$ , where  $\Phi$  is the particle sphericity. The dimensionless group  $\pi_4$  was not considered in the present analysis since its value was kept constant during all the experiments.

According to the Rayleigh method for dimensional analysis there is a linear relation in logarithmic scale between the dimensionless groups  $\pi_i$  of a function  $f(\pi_1; \pi_2 \dots) = 0$ . Thus we may write:  $C_D = \alpha_1 \cdot (Re_{gen})^{\alpha_2} \cdot (\pi_3)^{\alpha_3}$ , which is then written for power-law fluids and rearranged to isolate  $v_p$ :

$$v_p^{[2+(2-n)\alpha_2]} = \frac{4}{3} \frac{(\rho_s - \rho)gd_s}{\left[ \rho \alpha_1 \left( \frac{\rho d_s^n}{k} \right)^{\alpha_2} \left( \frac{d_s}{r_{out} - r_m \pm \delta} \right)^{\alpha_3} \right]} (\cos\phi + C_f \sin\phi) \quad (8)$$

where the coefficients:  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  and  $\alpha_3$  are determined by experimental analysis.

Analogously  $C_L = \beta_1 \cdot (Re_{gen})^{\beta_2} \cdot (\pi_3)^{\beta_3}$ , which is written for power-law fluids and rearranged to isolate  $v_p$ :

$$v_p^{[2+(2-n)\beta_2]} = \frac{4}{3} \frac{(\rho_s - \rho)gd_s}{\left[ \rho \beta_1 \left( \frac{\rho d_s^n}{k} \right)^{\beta_2} \left( \frac{d_s}{r_{out} - r_m \pm \delta} \right)^{\beta_3} \right]} \sin\phi \quad (9)$$

where the coefficients:  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  and  $\beta_3$  are determined by experimental analysis. Eq. (9) is the final form of the correlation to predict the point velocity at the start of cuttings lift-off. In other words, it is assumed here that the above semi-empirical formula predicts the critical conditions for the suspension of cuttings.

By knowing the values of  $v_p$ , Eq. (8) and Eq. (9), the rate of circulation of the drilling fluid at critical conditions of transport by rolling and suspension may be calculated by one of the fluid flow models proposed by Laruccia (1995).

## ANALYSIS OF THE EXPERIMENTAL DATA

In this section the two mechanisms of transport experimentally observed are separately examined minutely by two series of plots.

**Transport by Rolling.** Figure 2 shows the effect of  $\pi_3$ . It shows how the presence of "wall effect" makes difficult the transport of cuttings by increasing the Reynolds number necessary to start the transport. Figure 3 shows the final correlation for the drag coefficient using one half of the data available, and taking account of the "wall effect". Figure 4 verifies the final correlation for the prediction of the drag coefficient using the other half (not used yet) of the experimental data. Finally, Figure 5 shows a comparison between the present correlation to predict the drag coefficient of drilled cuttings at critical conditions of transport by rolling in inclined annuli and published results of the drag coefficient of spherical particles falling under the influence of gravity in a quiescent inelastic non-Newtonian fluid. The results show that at correspondent dynamic condition around the particle, characterised by  $Re_{gen}^*$ , the drag force necessary to start the particle transportation by the mechanism of rolling on an inclined annular wall, under the action of an upward creeping fluid motion, is considerably smaller than the one acting on the same particle at terminal fall velocity in an unbounded quiescent fluid. One may perceive that at creeping flow regime the two drag coefficients differ by an approximately constant factor which is distinct for each value of  $\pi_3$ .

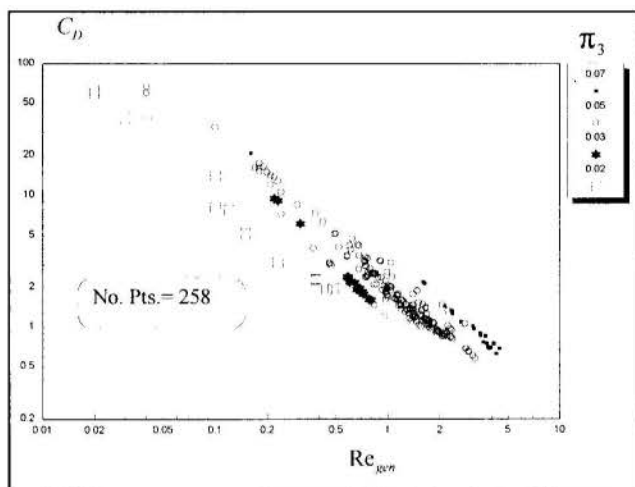


Figure 2 - Drag Coefficient Vs Generalised Particle Reynolds Number.  $\pi_3$  for each situation, experimentally observed, of the critical conditions of cuttings transport by rolling.

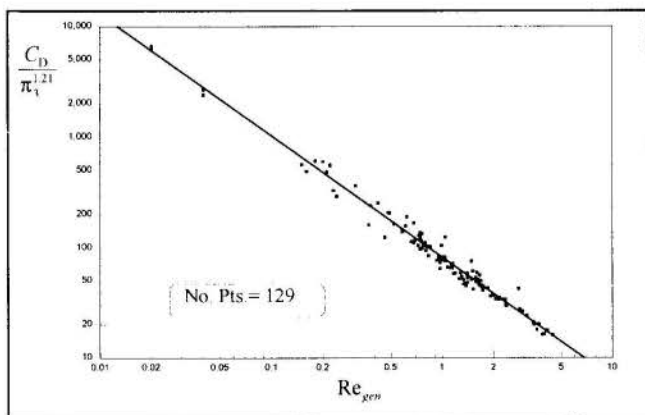


Figure 3 - Semi-empirical correlation to predict the critical conditions of cuttings transport by rolling.

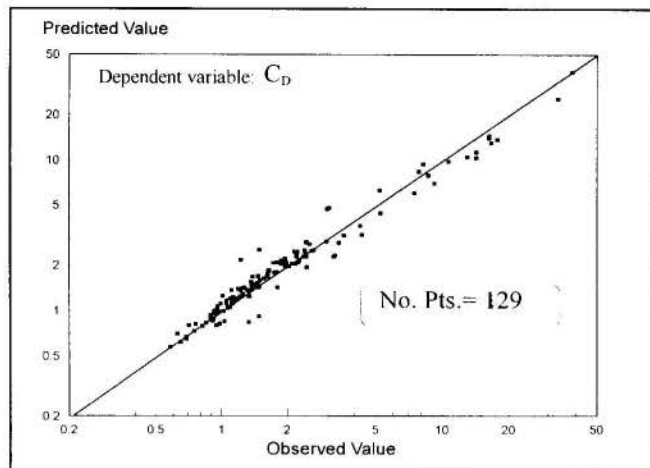


Figure 4 - Verification of the correlation to predict Drag Coefficient at critical conditions of cuttings' rolling. Predicted Drag Coefficient is compared with experimental data.

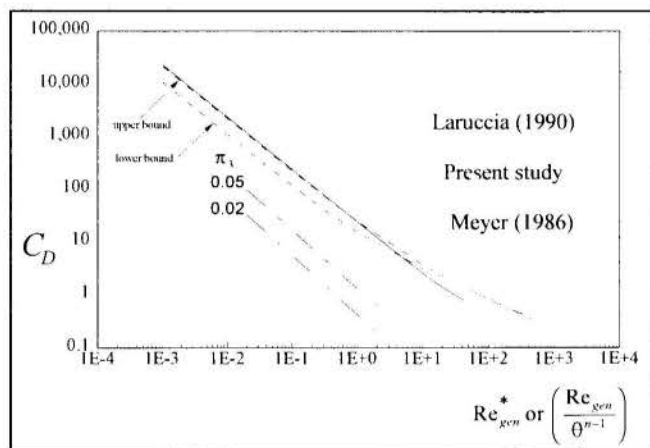


Figure 5 - Comparison between the Present Correlation for Cuttings Transport by Rolling and Correlations from the Literature based on Settling Velocity of Spherical Particles in Power Law Fluids (for  $n=0.5$ ).

**Transport by Suspension.** Figure 6 shows the range of  $Re_{gen}$  covered by four different cuttings concentrations. Only the data at this central region (a total of 186), where the four different cuttings concentrations were tested, was used to produce the final correlation. Figure 7 shows the effect of the angle of transport,  $\phi$ , on the lift coefficient (selected data). Substituting the definition of the lift coefficient, Eq. 4, into the correlation produced in Figure 8, the terms " $\sin\phi$ " can be cancelled. In other words, for the conditions simulated in the experiments, the angle of transport did not sensibly affect the transport of drilled cuttings by suspension. The only plausible explanation for these results is that the experimental data used in this analysis was not sensible enough to account for the effect of the angle of transport. Figure 8 shows the final correlation which is independent of the angle of transport and covers four different cutting concentrations, using one half of the data available. Figure 9 verifies the correlation for the prediction of the lift coefficient using the other half (not used yet) of the experimental data.

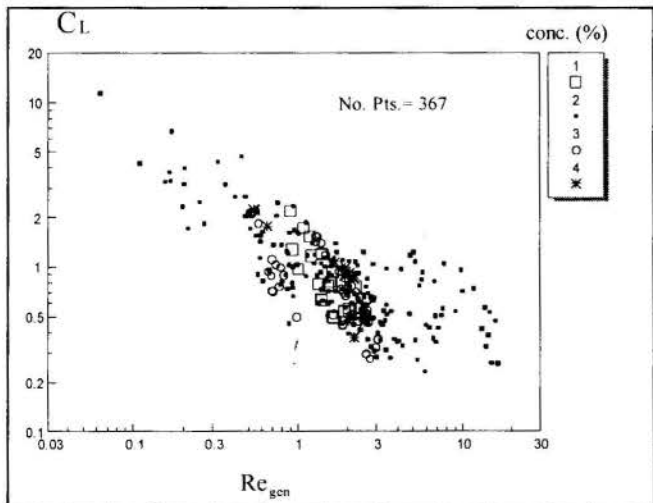


Figure 6 - Lift Coefficient Vs Generalised Particle Reynolds Number. Cuttings concentration (% in volume) for each situation, experimentally observed, of the critical conditions of cuttings transport by suspension.

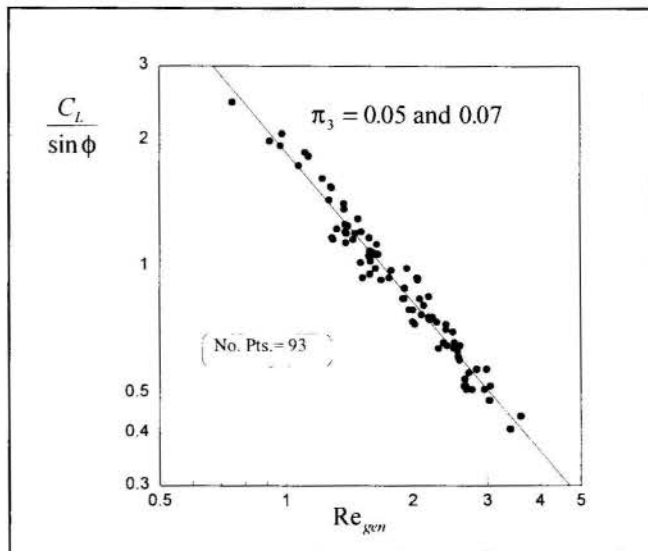


Figure 8 - Semi-empirical correlation to predict the critical conditions of cuttings transport by suspension (selected range of data).

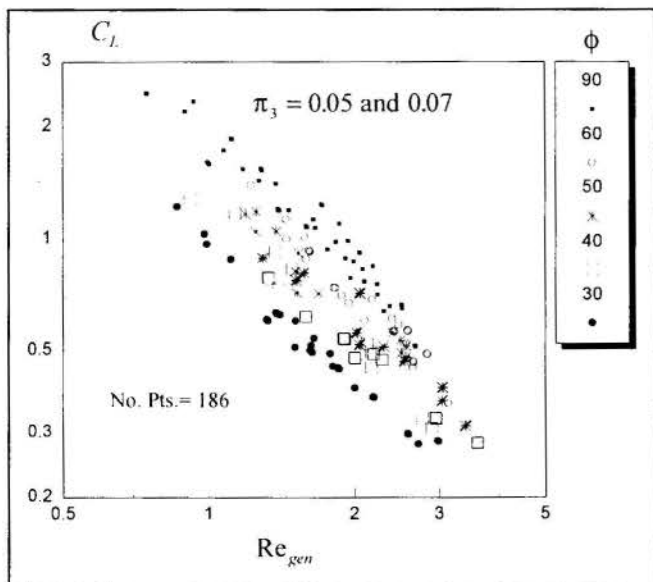


Figure 7 - Effect of the angle of transport on the Lift Coefficient at the critical conditions of cuttings transport by suspension. Analysis made for a selected range of data.

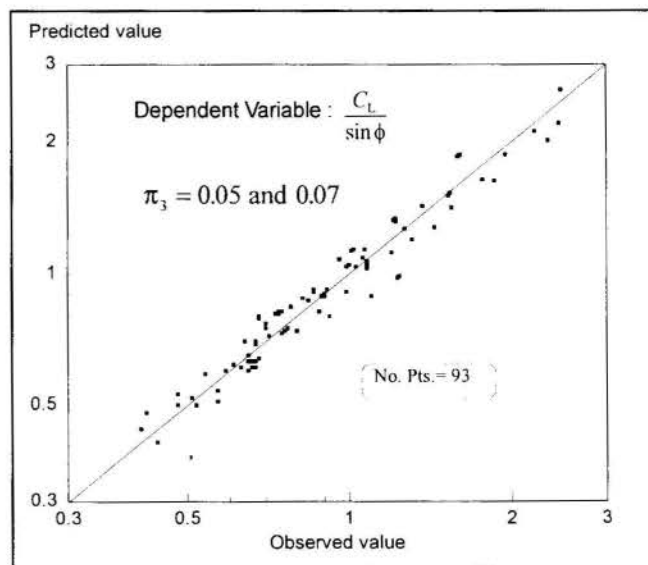


Figure 9 - Verification of the correlation to predict Lift Coefficient at critical conditions of cuttings transport by suspension. Predicted Lift Coefficient is compared with experimental data.

## CONCLUSIONS

A new technique to interpret experimental data of the critical conditions of transport of cuttings in deviated wells was proposed. As a result, two new semi-empirical correlations to predict the minimum conditions of transport of cuttings in deviated wells were produced. The two distinct mechanisms of transport experimentally observed were reviewed and analysed separately by two series of plots including a total of 625 experimental data.

The correlations to predict the minimum conditions for the transport of cuttings by rolling/sliding and suspension can be improved by the following recommendations:

- Variables like eccentricity, size and concentration of cuttings, annular size, angle of inclination and inner pipe rotation should be equally studied for each fluid rheology in the range of interest;



- A device called "Particle Image Velocimetry"<sup>ii</sup> could be used to measure the velocity of the fluid at the vicinity of the cutting, during the experimental observation of the critical conditions of transport, in the simulated column. These results can then be used to correct the predictions made by the one-phase flow fluid models.

Wall effect acts to increase the minimum fluid velocity required to initiate the transport of drilled cuttings by the mechanism of rolling in deviated wells.

In conclusion, the semi-empirical correlations can be used as general criteria for evaluating and correlating the effects of various parameters on cuttings transport, and as a guideline for cuttings transport programme design during directional drilling.

#### ACKNOWLEDGEMENT

One of the authors, Moacyr B. Laruccia, wishes to acknowledge CAPES for providing financial support during his studies, and the members of the project entitled "Drilled Cuttings Transport in Deviated Wells" for their assistance and moral support while carrying on Ph.D. studies at Heriot-Watt University, which led to the thesis from which this paper was extracted. Likewise, M. B. Laruccia wishes to acknowledge the project sponsors for allowing the experimental data to be used in the present analysis. The sponsors are: Heriot-Watt University, E.F. Caledonian Ltd, Enterprise Oil PLC, Mobil North Sea Ltd, Saga Petroleum, Bow Valley Petroleum(UK) Ltd, Esso Exploration and Production UK Ltd, and Hamilton Brothers Oil and Gas Ltd.

#### REFERENCES

- Becker, T.E., Azar, J.J. and Okrajni, S.S., 1991, "Correlations of Mud Rheological Properties with Cuttings-Transport Performance in Directional Drilling", *SPE Drilling Engineering*, pp. 16-24.
- Chin, C., 1990, "Exact Cuttings Transport Correlations Developed for High angle wells", *Offshore*, pp. 67-80.
- Ford, J.T., Gao, E., Oyenyin, M.B. and Peden, J.M., 1993, "The Development of Mathematical Models which Describe Cuttings Transport in Inclined Boreholes", Paper No. 93-1102, Presented at the CADE/CAODC *Spring Drilling Conference*, Calgary Convention Centre, Calgary, Alberta Canada, April 14-16.
- Fraser, L., 1990, "Effective Ways to Clean and Stabilize High-Angle Holes", *Petroleum Engineer International*, pp. 30-35.
- Freire, J.T. & Gubulin, J.C., 1986, "Tópicos Especiais de Sistemas Particulados", Vol. 2, Chapter I: "Alguns Aspectos da Separação Sólido Fluido", by Massarani, G.
- Gao, E., 1994, "Annular Flow of Herschel-Bulkley Non-Newtonian Fluids and Mathematical Modelling of Efficient Hole Cleaning at Various Hole Angles", Ph.D. Thesis, Heriot-Watt University, Edinburgh.
- Gao, E., Ford, J., Oyenyin, M.B., Laruccia, M.B., Peden, J.M. and Parker, D., 1993, "A New MTV Computer Package for Hole Cleaning Design and Analysis", SPE 26217, paper presented at the SPE *Petroleum Computer Conference* held in New Orleans, Louisiana, July 11-14.
- Hall, H.N., Thompson, H. and Nuss, F., 1950, "Ability of Drilling Mud to Lift Bit Cuttings", *Petroleum Transactions, AIME*, Vol. 189, pp. 35-46.
- Iyoho, A.W., 1980, "Drilled-Cuttings Transport by Non-Newtonian Drilling Fluids Through Inclined, Eccentric Annuli", Ph.D. Thesis, The University of Tulsa.
- Laruccia, M.B., 1995, "Numerical Modelling of Non-Newtonian Fluids in Annular Space and Its Application to Drilling Operations", Ph.D. Thesis, Heriot-Watt University, Department of Petroleum Engineering, Edinburgh.
- Laruccia, M. B., 1990, "Velocidade de Sedimentação em Fluidos Não-Newtonianos: Efeito da Forma e da Concentração de Partículas", Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Faculdade de Engenharia Química, Brasil.
- Laruccia, M.B., Santana, C.C. and Maidla, E.E., 1990a, "Velocity of Various Shaped Particles Settling in non-Newtonian Fluids", *Advances in Fine Particles Processing*, Editors: John Hanna & Yosry A. Attia, Elsevier, pp. 103-119. Presented during the *International Symposium on Advances in Fine Particles Processing*, Boston, Massachusetts, August 22-26, 1989.
- Laruccia, M.B., Santana, C.C. and Maidla, E.E., 1990b, "The Role of Solids Concentrations on the Carrying Capacity of Drilling Fluids in Vertical Annulus", Paper presented in the *American Filtration Society, National Fall Meeting: Environmental and Productivity Merits of Separation in Petroleum Engineering*, Baton Rouge, Louisiana, October 29-30.
- Luo, Y., 1988, "Non-Newtonian Annular Flow and Cuttings Transport Through Drilling Annuli at Various Angles", Ph.D. Thesis in Petroleum Engineering, Heriot-Watt University, Edinburgh.
- Luo, Y., Bern, P.A. and Chambers, B.D., 1992, "Flow-Rate Predictions for Cleaning Deviated Wells", paper IADC/SPE 23884 presented at the IADC/SPE conference.
- Massarani, G. and Telles, A.C.S., 1977, "Flow of Non-Newtonian Fluids in the Vicinity of Solid Particles", *Proc. 3rd Brazilian Symposium of Fluid Mechanics and Heat Transfer*.
- Peden, J.M. and Luo, Y., 1987, "Settling Velocity of Various Shaped Particles in Drilling and Fracturing Fluids", *SPE Drilling Engineering*, pp. 337-343.
- Sifferman, T.R. and Becker, T.E., 1990, "Hole Cleaning in Full-Scale Inclined Wellbores", SPE 20422, Presented at the *65th Annual Technical and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers* held in New Orleans, LA, Sept. 23-26, pp. 207-221.
- Sifferman, T.R., Myers, G.M., Haden, E.L. and Wahl, H.A., 1974, "Drill-Cutting Transport in Full-Scale Vertical Annuli", *Journal of Petroleum Technology*, pp. 1295-1302.
- Williams, C.E. and Bruce, G.H., 1951, "Carrying Capacity of Drilling Muds", *Trans. AIME*, Vol. 192, pp. 111-120.

<sup>ii</sup> The technique was reviewed by C.A.Greathed, D.J.Skyner and T.Bruce in the Coastal Engineering Laboratory of Edinburgh University. The basis of "Particle Image Velocimetry" is to stroboscopically illuminate a two-dimensional plane of a flow containing small seeding particles. A double (or multiple) exposure photograph of this plane is taken. The spacing between the images of each particle on the film gives the local velocity. This photograph is then analysed to obtain the local flow velocities over a grid of points covering the whole field.



## REDUÇÃO DE ARRASTE EM ESCOAMENTOS DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO

J. C. Queiroz Neto, A. L. Martins e C. H. M Sá

CENPES - Centro de Pesquisas da PETROBRAS - 21949-900 - Rio de Janeiro-RJ - Brasil

e

Sandra Cristina dos Santos Rocha

Departamento de Termofluidodinâmica - F.E.Q. - UNICAMP



### RESUMO

*Este trabalho é o resultado de um estudo experimental sobre o escoamento laminar e turbulento de suspensões argilosas contendo diversas concentrações de poliácridamida hidrolisada. A análise dos dados de perda de carga indicam a ocorrência de redução de arraste na região de baixa turbulência, onde são propostas correlações para previsão do fator de fricção. Para a região de alta turbulência, observou-se que o aumento da concentração do polímero não levou à redução do arraste, indicando provável degradação do mesmo devido ao cisalhamento.*

### INTRODUÇÃO

Durante a perfuração de um poço de petróleo, uma suspensão argilosa, o fluido de perfuração, de comportamento reológico não-Newtoniano, é bombeada para dentro do poço, através da coluna de perfuração, passando por várias restrições e pelos jatos da broca, retornando à superfície através do espaço anular existente entre a parede do poço e a da coluna de perfuração. Sá e Martins (1993) apresentam uma descrição detalhada deste processo em que parte da energia de bombeio é utilizada nos jatos da broca, para melhorar a taxa de penetração, e parte é dissipada pelo atrito ao longo do percurso. O projeto de perfuração de um poço inclui o projeto hidráulico, cuja finalidade é maximizar a potência disponível na broca. Outras funções importantes do fluido de perfuração são o resfriamento da broca, a sustentação e transporte dos cascalhos e a estabilidade da parede do poço.

Novas gerações de fluidos, principalmente à base de polímeros, vêm sendo desenvolvidas nas duas últimas décadas, visando melhorar a qualidade do poço e a custos atrativos. Os fluidos salgados, contendo poliácridamida hidrolisada (PHPA), devido ao seu bom desempenho e adequada razão custo-benefício, têm tido grande utilização na perfuração de poços nas principais bacias produtoras nacionais.

Por outro lado, à medida em que se intensifica o uso destes fluidos de última geração, constata-se o aparecimento de algumas anormalidades durante as operações de perfuração. Apesar de os sistemas de circulação não acusarem qualquer anormalidade, os medidores de pressão acusam reduções bastante significativas de perda de carga em relação ao previsto pelo programa hidráulico do poço. Devido a este fato, chegou-se, em algumas ocasiões, ao ponto de interromper a perfuração para verificar a existência de eventuais problemas, tal como furo na coluna. Este fenômeno, apesar de ter despertado uma série de dúvidas nas equipes de perfuração, é bastante estudado e referenciado na literatura com o nome de *redução de arraste*.

O fenômeno de redução de arraste foi inicialmente demonstrado por Tom (citado por White e Hemmings, 1976) em escoamentos tubulares de soluções poliméricas contendo aditivos redutores de fricção e em regime turbulento. Ele mostrou que era requerida bem menos energia por unidade de vazão para bombear estes fluidos do que a requerida para bombear apenas o solvente. O fenômeno de Tom em regime turbulento tem sido amplamente confirmado. Polímeros que

apresentam boa performance de redução de arraste são aqueles cujas moléculas não apresentem ramificações, ou seja, apresentem uma forma molecular linear, ou bem próxima desta forma e pesos moleculares maiores que 500000 (Sellin et al., 1982), como por exemplo, a poliácridamida e o carboximetil celulose. Muito embora a maioria desses redutores de fricção sejam sintéticos, existem os naturais que preenchem as condições acima, tais como goma guar e goma xantana. Os redutores naturais, entretanto, requerem maiores concentrações que os sintéticos para se obter valores similares de redução de arraste (Sellin et al., 1982). A redução de arraste produzida por polímeros solúveis de alto peso molecular depende do tipo de polímero, da concentração deste, do diâmetro do tubo e do número de Reynolds.

Virk (1975) encontrou experimentalmente que a redução do arraste e, para um dado número de Reynolds, alcança um valor limite máximo para cada conjunto de condições, tais como tipo e concentração do polímero e o diâmetro do tubo. Além disso, este valor limite de redução de arraste é em média 80% da que se poderia alcançar (teoricamente) se o escoamento fosse completamente laminar. Devido ao grande número de variáveis governando o fenômeno torna-se difícil prever a redução de arraste em uma situação específica. Uma maneira de fazê-lo é através do uso de comparações com dados obtidos a partir de tubos de diferentes diâmetros e idênticas soluções poliméricas.

Muito embora a literatura sobre redução de arraste seja vasta, atualmente são poucas as publicações enfocando o fluido de perfuração. Savins (1994) apresenta um estudo experimental com tubos e escoamento de fluido de perfuração contendo goma xantana, cuja metodologia é a mesma usada por Queiroz Neto (1993). Entretanto, Savins apresenta uma metodologia analítica para interrelacionar resultados experimentais de diâmetros diferentes, utilizando o conceito de velocidade de fricção.

O objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento para identificar e quantificar a redução de arraste no escoamento de suspensões argilosas salgadas contendo PHPA. O estudo foi dividido em duas etapas distintas: a coleta e análise de dados de campo e o estudo experimental do fenômeno em simulador físico de grande porte.

## OBTENÇÃO E ANÁLISE DE DADOS DE CAMPO

Para confirmar a tese da ocorrência do fenômeno de redução de arraste na perfuração com fluidos salgados contendo 1,28 g/cm<sup>3</sup> de PHPA, foram coletados dados de diferencial de pressão versus vazão durante a perfuração de dois poços distintos. No poço 1, os dados foram coletados durante a perfuração da fase de 8 1/2 pol. (21,59 cm) enquanto que no poço 2, durante a perfuração da fase de 12 1/4 pol. (31,12 cm). Os resultados de perdas de carga medidos e previstos pelo programa hidráulico da PETROBRAS (Sá e Martins, 1993) para diversas vazões de bombeio são apresentados nas tabelas 1 e 2, respectivamente. A porcentagem de redução de arraste, definida pela equação abaixo, também é apresentada, nestas tabelas.

$$\% RA = 100(1 - \Delta P_p / \Delta P_o) \quad (1)$$

onde:

$\Delta P_o$  = diferencial de pressão do fluido base,

$\Delta P_p$  = diferencial de pressão do fluido base, contendo PHPA e

$\% RA$  = porcentagem de redução de arraste.

TABELA 1 - Poço 1 ( D= 12,25 pol. )

Prof (m)	Nº Reynolds	Nº Reynolds crítico	$\Delta P$ lido (psi)	$\Delta P$ previsto (psi)	% RA
1806	12831	2928	1020	1045	2,39
1806	15072	2928	1250	1332	6,15
1806	17397	2928	1480	1537	3,71
1806	19780	2928	1750	1823	4,01
1806	22258	2928	2050	2151	4,70
1806	25014	2928	2350	2500	6,00

TABELA 2 - Poço 2 ( D = 8,5 pol. )

Prof (m)	No Reynolds	No Reynolds crítico	$\Delta P$ lido (psi)	$\Delta P$ previsto (psi)	% RA
2939	13901	2928	2322	2340	0,77
3005	13901	2928	2303	2341	1,62
3158	13443	2928	2104	2250	6,49
3173	13443	2928	2134	2250	5,15
3211	13443	2928	2127	2250	5,47
3260	13443	2928	1771	1900	6,79
3294	13443	2928	2147	2300	6,65

As tabelas 1 e 2 mostram claramente que as pressões registradas são significativamente inferiores às previstas pelo programa hidráulico. Diante desse resultado, o grupo de fluidos do Cenpes/Diplot optou por realizar um estudo mais apurado em laboratório a cerca da ocorrência desse fenômeno em tubos e anulares, nos casos do escoamento de fluidos de perfuração salgados contendo poliacrilamida hidrolisada.

## ESTUDO EXPERIMENTAL:

Para o desenvolvimento do estudo de laboratório foi utilizado o Simulador Hidráulico de Superfície construído no Centro de Pesquisas da PETROBRAS (Silva, 1987). Este equipamento permite a medição de perdas de carga em seções de teste de 7 m de comprimento, anulares ou tubulares, dinamicamente compatível com o poço em perfuração. Vazões e temperatura podem ser variadas e controladas durante um teste.

Numa primeira fase, foram realizados testes a partir de um fluido fabricado no campo e já contendo PHPA. Cada teste consistiu na medição de perdas de carga no escoamento por um espaço anular, cujo diâmetro interno era 6,0858 cm e cujo diâmetro externo era 7,7522 cm, para diversas vazões de bombeio e temperatura constante (40 ou 60° C). As vazões utilizadas varreram desde o regime laminar até a baixa turbulência, típicos das operações de perfuração. Os parâmetros reológicos do fluido foram monitorados antes e após cada teste através de um reômetro de cilindros concêntricos.

Foram realizados testes para o fluido base e para os fluidos obtidos através de adições sucessivas de PHPA (incrementos de 713 ppm) ao fluido base. Os valores obtidos para os testes foram a 40 e 60° C, estando registrados na tabela 3 os resultados dos testes a 40° C.

TABELA 3 - Resultados dos testes a 40° C

Vazão (m <sup>3</sup> /h)	Diferenciais de Pressão (psi)									
	Adições de PHPA ao fluido base (ppm)									
	0,00	713	1569	1854	2140	2282	2853	4280	4993	5706
3,75	0,8	0,9	1,0	1,3	1,2	2,0	1,0	0,8	1,0	1,6
5,62	1,3	1,5	1,5	1,8	1,8	1,7	1,4	1,4	1,8	2,0
7,83	1,6	1,8	2,0	2,2	2,3	2,0	1,9	2,0	2,3	2,7
9,15	2,3	2,3	2,7	2,9	2,7	2,4	2,2	2,3	2,3	3,0
11,45	3,1	2,8	3,1	3,4	3,3	2,8	2,8	2,8	3,0	3,8
12,97	4,5	4,0	4,1	4,2	4,1	3,7	3,7	3,5	3,6	4,5
13,98	5,8	5,2	4,8	4,9	4,8	4,5	4,4	4,2	4,5	5,1
15,88	7,0	6,5	5,9	5,9	5,7	5,2	5,1	4,9	5,1	5,6
18,31	8,1	7,9	7,1	6,8	6,7	6,1	5,9	5,6	5,9	6,0
19,12	9,7	9,0	8,1	7,6	7,6	7,1	6,7	6,5	6,4	6,8
20,29	11,0	10,0	9,0	8,8	8,6	7,6	7,7	7,2	6,9	7,1
Leituras no reômetro rotativo ( lbf / 100 pé <sup>2</sup> )										
RPM	0,00	713	1569	1854	2140	2282	2853	4280	4993	5706
600	30	29	31	35	34	32	32	32	40	43
300	19	18	20	23	22	21	21	21	27	28
200	15	14	16	18	18	17	16	16	21	22
100	10	9	10	12	12	11	11	11	14	15
6	2	2	2	3	3	2	2	3	3	3
2	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2

A análise dos resultados mostra que os efeitos de redução do arraste são significativos em vazões superiores a 13m<sup>3</sup>/s, em que o regime turbulento já foi atingido. Já nas vazões inferiores, em regime laminar, não ocorre tal efeito e eventuais variações nas perdas de carga (especialmente para vazões mais baixas) são decorrentes de flutuações da bomba. Nos pontos em regime

turbulento, em que ocorre aumento do arraste com o aumento da concentração de PHPA, ocorreram aumento das propriedades reológicas do fluido.

A figura 1 apresenta os resultados experimentais para 40°C, em coordenadas adimensionais, do escoamento de um fluido em uma seção anular ou tubular: o fator de fricção de Fanning e o número de Reynolds generalizado. Pode-se observar que, para números de Reynolds superiores a 2200, apenas estes dois grupamentos não caracterizam o problema de forma universal. Comportamento semelhante foi verificado para os testes a 60°C.

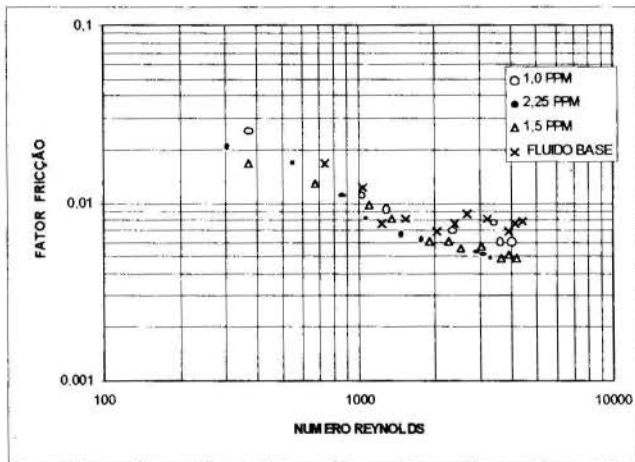


Figura 1 - Gráfico de Moody com resultados dos testes a 40°C

Numa segunda etapa, foram realizados testes a partir de fluidos fabricados em laboratório com concentrações de PHPA conhecidas. Os testes foram realizados tanto na geometria tubular (diâmetros de 2,54 e 3,18 cm, respectivamente) quanto na anular (excentricidade entre os tubos de 7,62 e 5,08 cm). Foram fabricados fluidos com 18 diferentes valores de concentração selecionadas de PHPA, os quais foram testados nas diversas geometrias e em 10 vazões diferentes, num total de 190 registros de pressão. O objetivo dessa etapa foi identificar, quantificar e avaliar as condições de ocorrência deste fenômeno em fluidos de perfuração salgado com PHPA. Além disso, buscou-se obter expressões analíticas relacionando o fenômeno com as condições de escoamentos.

Iniciou-se o processo de tratamento dos dados pela caracterização reológica do fluido. Os parâmetros reológicos, obtidos durante o processo de caracterização são necessários para obtenção dos números de Reynolds generalizados.

As curvas reológicas foram obtidas utilizando a metodologia proposta por Yang e Krieger (1978) onde os dados fornecidos pelo viscosímetro foram transformados em taxas e tensões de cisalhamento.

Através dos parâmetros estatísticos e da interpretação física dos dados, o modelo reológico que melhor correlacionou a maioria das amostras de fluidos estudados foi o de Robertson-Stiff, definido pela equação abaixo:

$$\tau = A(\gamma + C)^B \quad (2)$$

A adoção do modelo reológico de Robertson-Stiff possibilitou também a escolha da metodologia de cálculo tanto, para a

geometria tubular quanto para a anular. Para isso foram escolhidas as expressões do número de Reynolds generalizado, desenvolvidas por Paixão (1990), específicas para escoamentos de suspensões argilosas e que são apresentadas a seguir:

Número de Reynolds generalizado:

em tubos:

$$Re = \frac{2^{(3-B)} \rho \bar{V}^{(2-B)} D^B}{\left(\frac{3B+1}{B}\right)^B A} \quad (3)$$

em anulares:

$$Re = \frac{12^{(1-B)} \rho \bar{V}^{(2-B)} D_{eq}^B}{\left(\frac{2B+1}{3B}\right)^B A} \quad (4)$$

Número de Hedstrom modificado:

em tubos:

$$He = \frac{\rho D^2}{A} C^{(2-B)} \quad (5)$$

em anulares:

$$He = \frac{\rho D_{eq}^2}{\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{A}\right)^{2/B} \quad (6)$$

E número de Reynolds generalizado crítico:

$$Re_{Crítico} = 2365,4(He)^{0,014} \quad (7)$$

onde A, B e C são parâmetros reológicos do modelo Robertson-Stiff, D é o diâmetro do tubo e  $D_{eq}$  é o diâmetro equivalente do anular.

As tabelas 4 e 5 mostram os dados de redução de arraste para os escoamentos tubulares e a tabela 6 para o anular. Para a análise dos resultados, classifica-se a concentração de PHPA presente nas soluções como baixa (entre 713 e 1569 ppm), média (entre 1854 e 2853 ppm) e alta (acima de 2853 ppm).

TABELA 4 - % de Redução de arraste- D= 2,54 cm, a 0°C

RE	CONCENTRAÇÃO (PPM)									
	713	1141	1284	1569	2140	2282	2853	4280	4993	7132
36969	1,04	46,87	45,83	39,58	45,83	37,50	39,58	26,04	22,92	17,71
56056	17,28	51,23	37,65	37,65	42,59	37,04	36,42	17,28	17,28	8,02
74916	23,54	44,40	38,31	34,84	42,22	38,31	30,93	17,46	13,12	10,95
95953	29,77	45,82	38,13	36,45	46,49	37,12	34,11	11,71	9,36	—
103012	24,02	42,64	30,93	31,23	35,74	31,23	28,83	—	—	—
126021	27,44	39,49	29,74	31,79	35,90	31,79	28,21	—	—	—
135407	26,83	34,86	30,28	28,90	32,57	31,51	27,52	—	—	—
140689	30,80	33,47	28,95	26,49	30,80	30,18	30,60	—	—	—
169029	35,85	31,32	26,39	23,02	29,06	27,92	16,98	—	—	—



TABELA 5- % de Redução de Arraste- D= 3,18 cm, a 30°C

RE	CONCENTRAÇÃO (PPM)									
	713	1141	1284	1569	2140	2282	2853	4280	4993	7132
15558	74,29	82,86	54,29	65,71	77,14	85,71	65,71	54,29	77,14	80,00
23590	58,14	65,12	37,21	60,47	67,44	53,49	30,23	69,77	62,79	62,79
31526	34,55	60,00	40,00	56,36	47,27	45,45	38,18	63,64	60,00	63,64
40379	25,71	58,57	42,86	51,43	44,29	42,46	38,57	62,00	57,17	65,71
43350	29,76	55,95	34,52	53,57	47,62	21,43	35,71	63,10	57,14	55,95
53033	27,00	51,00	26,00	55,00	44,00	29,00	38,00	62,00	52,00	58,00
56982	27,93	48,65	27,03	53,15	33,33	23,42	29,73	54,05	46,85	54,95
71132	21,60	48,80	24,00	56,00	28,00	16,80	24,48	52,00	52,80	49,60
169029	36,42	56,29	21,19	59,60	34,44	19,21	28,48	49,67	49,67	54,97

TABELA 6- % de Redução de Arraste- Anular, a 30°C

RE	CONCENTRAÇÃO (PPM)									
	713	1141	1284	1569	1854	2282	2853	4993	5706	7132
6169	0,00	69,05	57,14	52,38	57,14	54,76	9,52	—	2,38	—
8244	0,00	56,00	62,00	60,00	56,00	46,00	8,00	0,00	6,00	6,00
10560	1,72	36,21	43,00	27,59	41,38	34,48	1,72	1,72	6,90	5,17
11336	4,41	35,29	30,88	32,35	52,94	42,65	1,29	14,71	11,76	—
13869	10,98	37,80	36,59	30,49	46,34	48,78	6,10	20,73	—	19,51
14901	19,15	36,17	31,91	29,79	53,19	36,17	22,34	30,85	12,77	22,34
15483	8,74	33,98	28,16	26,21	50,49	34,95	33,98	36,83	12,62	9,71
18602	6,54	25,23	25,23	14,02	42,06	23,36	34,58	39,25	9,35	6,54

Efeito do Número de Reynolds:

Para as três geometrias e para as diversas concentrações de PHPA testadas, o percentual de redução de arraste caiu com o aumento do Número de Reynolds. Uma vez que todos os testes foram realizados em regime turbulento, este fato pode ser justificado pela provável degradação do polímero com o aumento das taxas de cisalhamento.

Efeito do Diâmetro da Tubulação:

Comparando-se os resultados de percentual de redução de arraste das tabelas 4 e 5, observa-se que esta foi maior para os tubos de maior diâmetro. A figura 2 ilustra o mesmo fato para fluidos à mesmas concentrações de PHPA. Este fato é amplamente verificado na literatura e é justificado pelas menores taxas de cisalhamento impostas ao polímero nos tubos de maior diâmetro.

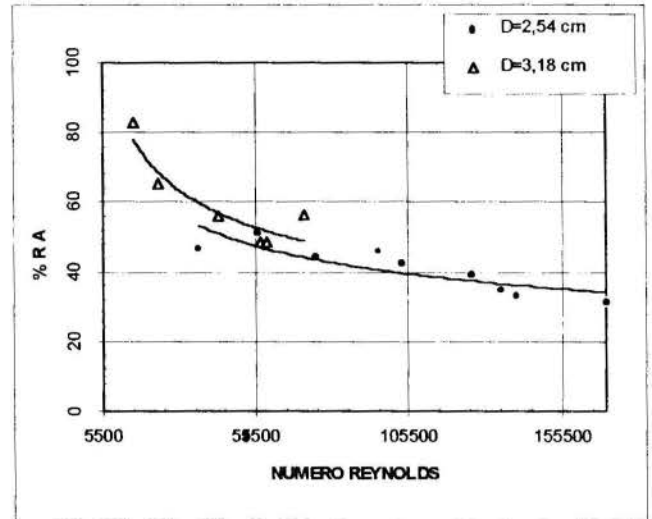


Figura 2- Efeito do Diâmetro

Efeito da Concentração de Polímero :

De acordo com as tabelas 4 e 5, os maiores percentuais de redução de arraste ocorreram para as concentrações de 1141 e 1284 ppm. Na tabela 6, observa-se redução de arraste significativa para maiores concentrações de PHPA. Este comportamento, aparentemente anômalo, pode ser justificado pela interação solvente-soluto que tende a formar colóides estáveis, tendendo a diminuir o rendimento do polímero (Azar et al., 1986).

Correlações Propostas:

Numa tentativa inicial de quantificar o fenômeno foram propostas correlações entre o fator de fricção de Fanning e o Número de Reynolds definido pelas equações 3 e 4 para cada diâmetro testado. Deve-se ressaltar que estas correlações são válidas para o escoamento de suspensões argilosas contendo PHPA e cloreto de sódio. As expressões propostas são as seguintes:

- tubo de 2,54 cm e Números de Reynolds entre 19000 e 170000:

$$f = \frac{0,005061}{(Re)^{0,050539}} \tag{8}$$

- tubo de 3,18 cm e Números de Reynolds entre 15000 e 72000:

$$f = \frac{0,006543}{(Re)^{0,001}} \tag{9}$$

- anular (7,62 X 5,08 cm) e Números de Reynolds entre 8000 e 18500

$$f = \frac{1,16842}{(Re)^{0,540145}} \tag{10}$$



As figuras 3, 4 e 5 ilustram a adequação das correlações 8, 9 e 10 aos dados experimentais.

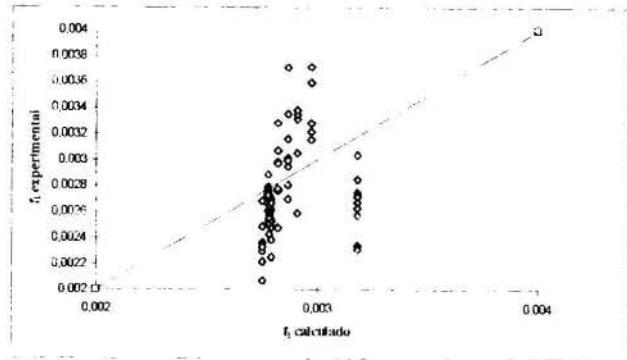


Figura 3- Ajuste dos dados experimentais com a correlação proposta para D=2,54 cm

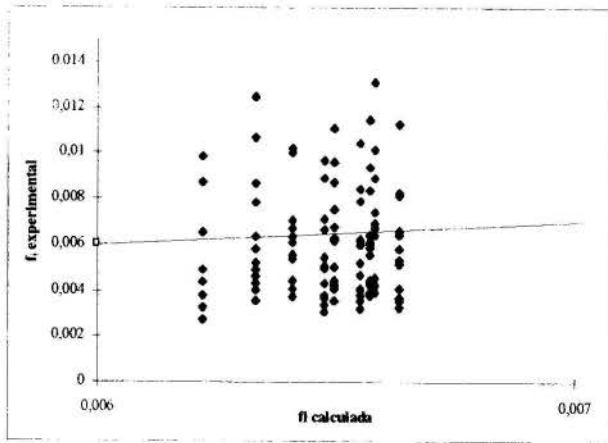


Figura 4- Ajuste dos dados experimentais com a correlação proposta para D=3,18 cm.

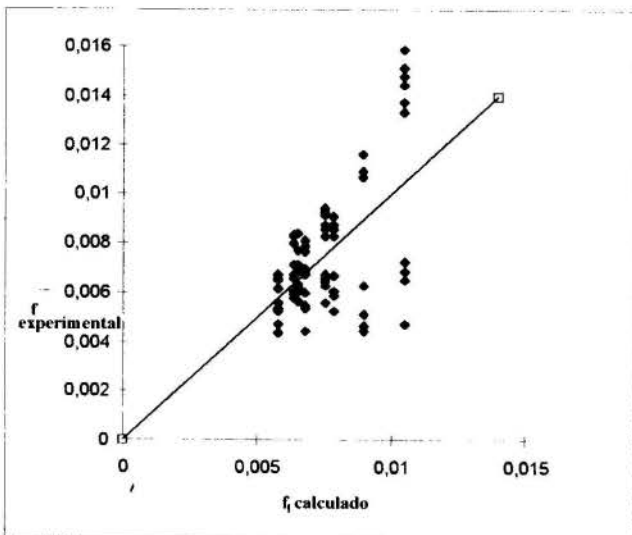


Figura 5- Ajuste dos dados experimentais com a correlação proposta para o anular.

A dispersão observada nos gráficos anteriores, torna clara a necessidade de prosseguir a investigação visando a quantificação do fator de fricção em função de outros parâmetros relevantes, além do número de Reynolds. Os dados expostos não permitiram quantificar a influência da concentração de polímeros na redução de arraste. As correlações propostas permitem prever o comportamento de fluidos poliméricos com mais precisão que as correlações convencionalmente usadas nos programas hidráulicos

## CONCLUSÕES

Foram realizados ensaios de campo e de laboratório visando quantificar as perdas de carga em fluidos de perfuração à base de PHPA que seguem o modelo de Robertson-Stiff. Ensaios iniciais em simulador de grande porte, onde as concentrações de PHPA não eram conhecidas, indicaram a ocorrência do fenômeno de redução de arraste no escoamento turbulento.

- Os testes realizados em simulador de grande porte com fluidos com concentração de PHPA conhecida permitiram o levantamento de correlações que predigam a perda de carga durante o escoamento tubular e anular destes fluidos.

- Nos testes realizados em geometria tubular observou-se cisalhamento do polímero, o que dificultou a identificação do efeito do número de Reynolds na perda de carga. Nestes testes, o polímero foi submetido a taxas de cisalhamento elevadas para contornar a dificuldade de medir valores pequenos de perdas de carga. Já no escoamento anular, observou-se menor degradação do polímero devido aos menores números de Reynolds experimentados.

- O valor da concentração de polímero capaz de minimizar a fricção precisa ser melhor investigado. Um enfoque promissor é a correlação dos fatores de fricção com o número de Weissenberg, conforme proposto por Kwack (1983,1987). Um trabalho sobre a caracterização viscoelástica das suspensões de PHPA está em curso no Centro de Pesquisas da PETROBRAS.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Azar, J. J. e Lummus, J. L., 1986, "Drilling Fluids Optimization - A practical Field Approach", PennWell Books.

Kwack, E. Y., 1983, "Effect of Weissenberg Number on Turbulent Heat Transfer and Friction of Viscoelastic Fluids", University of Illinois at Chicago, Tese de Doutorado, Chicago, EUA.

Kwack, E. Y. e Hartnett, J. P., 1987, "Empirical Correlations of Turbulent Friction Factors and Heat Transfer Coefficients of Aqueous Polyacrylamide Solutions", *Heat Transfer Science and Technology*, Hemisphere, Washington, EUA, 210-217.

Paixão, A. E. A., 1990, "Escoamento Anular de Fluidos Não-Newtonianos Utilizando Modelo Reológico a Três parâmetros", Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Queiroz Neto, J. C.; 1993, "Escoamento Tubular e Anular de Fluido de Perfuração com Adição de Poliacrilamida: Efeito da redução de arraste", Tese de Mestrado, Universidade Estadual Campinas, Campinas.

Sá, C. H. M. e Martins, A. L., 1993, "The Importance of Fluid Rheological Characterization in Oilwell Drilling Hydraulics Optimization", *Anais, 12º Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Brasília, Dezembro.

Savins, J. G., 1994, "Drag Reduction Characteristics of Solutions of Macromolecules in Turbulent Pipe Flow", *Oil & Gas Journal*, pags. 203-214.

Sellin, R. H., Hoyt, e Scrivener, J.W., 1982, "Fluid Flows And Their Industrial Applications, Part 1: Basic Aspects", *Journal of Hydraulic Research*, vol. 20, Nº 1, pags. 29-68.

Silva, M. G. P., 1987, "Simulador de Fluxo Vertical, Horizontal e Inclinado", *Ciência Técnica Petróleo - Secção Perfuração 1*; pags. 79-93, Rio de Janeiro.

Virk, P. S., 1975, "Drag Reduction Fundamentals", *A. I. Ch. E. Journal*, 21(4), pags. 625-656, July.

White, A. e Hemmings, J. A., 1976 "Drag Reduction by Additives: A Review and Bibliography", *Bhra Fluid Engineering*.

Yang, T. M. T. e Krieger, I. M., 1978, "Comparison of Methods for Calculating Shear Rates in Coaxial Viscometers", *Journal of Rheology*, 22(4), pags. 413-421.



## SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO TÉRMICO DE PETRÓLEO EM LINHAS SUBMARINAS SENDO AQUECIDO POR ABSORÇÃO DE RÁDIO-FREQÜÊNCIA

C.V.M. Braga, S.L. Braga e D. Kircher

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio  
22453-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

E.J. Coelho

Petrobrás-CENPES - Ilha do Fundão, Q7  
Rio de Janeiro - RJ - 22949-900 - Brasil



### RESUMO

*O petróleo ao escoar em dutos submersos, em águas profundas e frias, sofre um resfriamento que dificulta seu bombeamento. Isto é devido tanto pelo aumento da viscosidade, quanto pelo surgimento de uma camada de depósitos nas paredes internas dos dutos, o que reduz gradualmente a área de escoamento. O aquecimento deste fluido em escoamento, através de injeção localizada de rádio-freqüência (RF), é analisado, de modo simplificado, com o objetivo de se avaliar a potência necessária ao reaquecimento, o posicionamento das fontes e a distribuição da temperatura com e sem injeção de potência. Dois casos reais são investigados onde se apresentam diferentes formas de distribuição das fontes de rádio-freqüência.*

### Introdução

A produção de petróleo em águas profundas enfrenta uma série de problemas, os quais crescem à medida que aumenta a lâmina d'água sobre o poço em exploração. Um dos fenômenos que complica este processo é a obstrução gradual que ocorre na linha de produção, ocasionada pela deposição de parafinas nas paredes do duto. Inicialmente solubilizada no óleo, a parafina precipita da solução à medida que caem a pressão e a temperatura. O surgimento dos primeiros cristais de parafina é pois função destas variáveis e conhecido como ponto de névoa ou TIAC (Temperatura Inicial de Aparecimento de Cristais). Toda vez que o petróleo em escoamento tem sua temperatura resfriada abaixo deste ponto, a parafina sai da solução e o processo de entupimento é desencadeado.

Com o intuito de evitar a parafinação, e conseqüentemente a redução da produção, vários métodos estão sendo investigados. Um melhor isolamento dificultaria o abaixamento excessivo da temperatura, a adição de elementos químicos específicos também pode minimizar o problema e, finalmente, o reaquecimento durante o escoamento eliminaria a deposição, caso a TIAC não fosse atingida. Todos os métodos, contudo, apresentam vantagens e desvantagens. Não existe ainda um processo muito melhor do que os outros e por isto os estudos continuam em várias frentes.

Como uma das diversas opções de aquecimento do petróleo em linhas submarinas, de modo a manter sua temperatura acima da TIAC, foi realizado o presente estudo, que apresenta a análise térmica do aquecimento do óleo por absorção de rádio-freqüência (RF, microondas). Este é um estudo preliminar que visa obter o comportamento da temperatura do petróleo, quando sujeito a influência de fontes de RF distribuídas ao longo da linha. Por simplicidade foi assumido escoamento monofásico, o que não condiz com a realidade, uma vez

que nos casos reais tem-se, quase sempre, gás e líquido escoando simultaneamente.

O aquecimento industrial por RF é bem historiado por Kachmar (1992a e b). São apresentadas aplicações usuais nas indústrias de alimento, cerâmicas e outras pouco convencionais, como na reciclagem de asfalto e na área médica. Adicionalmente, o mesmo autor especifica que as freqüências preferenciais de operação são 915 MHz e 2,45 GHz. Na mesma linha do trabalho anterior, Osepchuk (1984) apresenta a "História de Aplicações de Aquecimento através de Microondas".

Não foram encontradas referências específicas sobre a utilização de microondas para o aquecimento de petróleo. Deste modo estudo experimentais paralelos foram desenvolvidos para quantificar a absorção de RF pelo petróleo, os quais não são aqui apresentados. A absorção é, neste trabalho, apenas um dado de entrada.

Para tal análise foi desenvolvido um programa computacional que simula o comportamento térmico do fluido escoando em uma linha submarina, sujeito à injeção de RF em pontos específicos.

O modelo físico proposto para realizar a simulação divide a linha em volumes de controle (VC) e assume a temperatura externa (água do mar) variável, discretamente, ao longo da linha. São considerados os seguintes modos de transferência de calor em cada VC: condução axial através do óleo, condução radial através da parede da linha, convécção entre a superfície externa da linha e a água do mar e, finalmente, a energia absorvida pelo petróleo devido à injeção de RF.

O regime é permanente e os resultados são apresentados na forma da temperatura média de mistura do óleo, como função da posição axial. Diversos parâmetros são investigados nas simulações efetuadas: coeficiente de absorção de RF pelo petróleo, vazão de óleo,

comprimento de linha, número e potência das fontes de RF.

### Modelo Físico

A Figura 1, apresentada abaixo, mostra, de forma esquemática, o modelo físico adotado no equacionamento térmico do problema.

São conhecidas a vazão mássica ( $m$ ) e a temperatura do petróleo junto à cabeça do poço, ( $T_0$ ), ou em outro ponto qualquer desejado. A linha é dividida em volumes de controle, sendo que toda fonte de RF deve estar localizada na interface entre dois volumes contíguos.

Pelo lado externo da linha, assume-se, por volume de controle, temperatura uniforme da água do mar, mas que pode variar de um volume a outro.

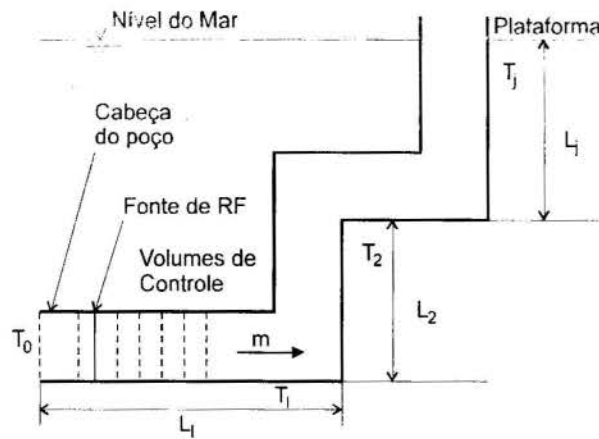


Figura 1 - Modelo Físico

A Figura 2 apresenta o detalhamento esquemático do  $i$ -ésimo volume de controle.



Figura 2 - Detalhamento dos Volumes de Controle

A nomenclatura utilizada nesta figura é a seguinte:

$i$  - contador dos volumes de controle a partir da cabeça do poço;

$T$  - temperaturas;

$Qa_i$  - taxa de calor absorvido (RF) no  $i$ -ésimo volume de controle (V.C.);

$Qk_{i-1}$  - taxa de calor por condução do V.C. " $i-1$ " para o de número " $i$ ";

$Qk_i$  - taxa de calor por condução do V.C. " $i$ " para o de número " $i+1$ ";

$Qp_i$  - taxa de calor perdida pelo  $i$ -ésimo V.C. para a água do mar;

$H_{i-1}$  - taxa de entalpia transportada do V.C. " $i-1$ " para o de número " $i$ ";

$H_i$  - taxa de entalpia transportada do V.C. " $i$ " para o de número " $i+1$ ".

$\Delta X$  - comprimento de cada V.C. dado em metros;

$d$  - diâmetro interno da linha;

$D$  - diâmetro externo da linha.

### Modelo Teórico

O modelo teórico utiliza fundamentalmente a equação de conservação de energia aplicada a cada um dos volumes de controle, considerando-se regime permanente. Assim, para o  $i$ -ésimo V.C., tem-se:

$$Qk_{i-1} + Qa_i + H_{i-1} = Qk_i + Qp_i + H_i, \quad (1)$$

Através da Lei de Fourier, para a condução de calor, pode-se explicitar os termos  $Qk_{i-1}$  e  $Qk_i$ . Assim, já na forma discretizada :

$$Qk_{i-1} = -KA_i \left( \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta X} \right), \quad (2)$$

$$Qk_i = -KA_i \left( \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta X} \right), \quad (3)$$

onde:  $K$  - condutividade térmica do óleo;

$A_t$  - área transversal do duto ( $A_t = \pi d^2/4$ ).

Uma análise, em termos de ordem de grandeza, mostra que as parcelas fornecidas pelas equações (2) e (3) são desprezíveis quando comparadas às demais da equação (1). Deste modo, as mesmas não foram incluídas no modelo computacional desenvolvido. Em outras palavras, o número de Peclet ( $Pe = Vd/K$ ) deste escoamento é elevado, uma vez que a condutividade do fluido é pequena. A advecção predomina sobre a condução axial.

O termo da energia absorvida em cada volume de controle,  $Qa_i$ , é dado por

$$Qa_i = \frac{Q_f}{2} (1-a)^{\Delta X(k-1)} [1 - (1-a)^{\Delta X}], \quad (4)$$

onde:  $Q_f$  - potência da fonte de RF;

$a$  - coeficiente de absorção de RF pelo óleo em um comprimento de 1 metro;

$k$  - contador de V.C. a partir de cada fonte de RF.

O fator 1/2 que aparece na equação (4) é devido à hipótese que metade da potência de RF injetada por cada fonte é absorvida a montante da mesma, enquanto a outra metade a jusante, de forma simétrica. Deste modo, o contador "k" é utilizado em ambos os sentidos a partir da interface que contém uma fonte de RF.

Deve-se ressaltar que, no caso de um V.C. absorver RF proveniente de duas ou mais fontes, a parcela  $Qa_i$  na equação (1) é dada pela soma das diversas  $Qa_i$  obtidas através da equação (4).

O penúltimo termo do lado esquerdo da equação (1), ou seja, a taxa de calor perdida pelo  $i$ -ésimo V.C. para a água do mar,  $Qp_i$ , é dado por

$$Qp_i = A U (T_i - T_j), \quad (5)$$

onde:  $A$  - área lateral externa de um V.C.;

$U$  - coeficiente global de transferência de calor.

A área lateral  $A$  e o coeficiente  $U$  são calculados através das seguintes equações:

$$A = \pi D \Delta X, \quad (6)$$

e

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_{ex}} + \frac{A \ell \ln(D/d)}{2\pi K_{ef} \Delta X} + \frac{D}{d} \frac{1}{h_{in}}} \quad (7)$$

onde:  $h_{ex}$  - coeficiente de filme (convecção) Externo;

$K_{ef}$  - condutividade térmica efetiva da parede da linha;

$h_{in}$  - coeficiente de filme (convecção) interno.

Em lugar de fornecer  $K_{ef}$ , pode-se alternativamente optar pela "Condutância Térmica da Linha",  $Kt$ , como dado de entrada. Este termo é definido através da equação (8):

$$Kt = \frac{2\pi K_{ef}}{\ln(D/d)} \quad (8)$$

O coeficiente de filme externo ( $h_{ex}$ ) pode ser assumido constante ou pode-se optar pelo fornecimento da velocidade média do escoamento externo da água do mar

(u). Nesta opção, a determinação do referido coeficiente é feita através da seguinte formulação (Holman, 1983):

$$h_{ex} = \frac{k_f}{D} C Re_{ex}^n Pr_f^{1/3}, \quad (9)$$

onde:  $C = 0,0266$  (constante);

$n = 0,805$  (constante);

$Pr_f = 9,4$  (Número de Prandtl estimado para a água do mar).

O número de Reynolds associado ao escoamento externo ( $Re_{ex}$ ) é definido por

$$Re_{ex} = \frac{u D}{\nu_f}, \quad (10)$$

com  $\nu_f = 1,3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (viscosidade cinemática da água do mar).

Quanto ao coeficiente de filme interno ( $h_{in}$ ), este é determinado para cada V.C. considerando-se dois casos distintos: escoamento laminar ou turbulento.

#### 1º caso: escoamento laminar

Este regime é admitido sempre que o número de Reynolds para o escoamento interno,  $Re$ , for menor do que 2300, ou seja,

$$Re = \frac{4m}{\pi d \mu} \leq 2300 \quad (11)$$

onde:  $\mu$  - viscosidade dinâmica do petróleo.

Neste caso assume-se o valor constante para o número de Nusselt para escoamentos com fluxo de calor constante,

$$Nu = 4,364 \quad (12)$$

Na realidade o escoamento não chega nunca ao desenvolvimento pois, a medida que a temperatura varia a viscosidade é afetada e, conseqüentemente, o perfil de velocidade. A hipótese de fluxo de calor constante é uma simplificação conservadora, e por isto adotada neste estudo simplificado.

Assim, calcula-se o coeficiente de filme,  $h_{in}$ , por

$$h_{in} = \frac{K Nu}{d} \quad (13)$$

#### 2º caso: escoamento turbulento

Naturalmente, assume-se este caso quando o número de Reynolds for maior do que 2300. A tradicional



equação de Dittus-Boelter é empregada na determinação do Número de Nusselt.

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,3} \quad (14)$$

onde: Pr - número de Prandtl do petróleo, dado por

$$Pr = \frac{\mu c_p}{K} \quad (15)$$

com  $c_p$  sendo o calor específico do petróleo.

O coeficiente  $h_{in}$  é, então, obtido pela mesma equação (13) utilizada no 1º caso.

Deve-se ainda ressaltar que o modelo admite um "fator de intensificação de turbulência" (empírico) que, quando assumido maior do que a unidade, acarreta em um acréscimo de  $h_{in}$ , uma vez que tal fator multiplica este coeficiente. A razão de prever-se este fator no modelo é que o escoamento, seja laminar, seja turbulento, é pulsante e multifásico. Tais efeitos afetam a troca de calor entre o escoamento interno e a parede da linha. Outras correlações mais precisas poderiam ter sido utilizadas na previsão do coeficiente de troca de calor interno. A correlação de Dittus-Boelter, mais uma vez, foi escolhida no intuito de se simplificar o procedimento de cálculos.

Em relação aos termos da equação (1), falta ainda explicitar os dois últimos, ou seja,  $H_{i-1}$  e  $H_i$ . Assim,

$$H_{i-1} = m c_p T_{i-1} \quad (16)$$

$$H_i = m c_p T_i \quad (17)$$

Deve-se observar que a principal incógnita que aparece, substituindo-se as equações (4), (5), (16) e (17) em (1), é a temperatura  $T_i$ . Como a viscosidade é uma função forte da temperatura, não pode ser admitida constante, o que tornou o simulador iterativo. Deste modo, na primeira iteração, na análise térmica de cada V.C., assume-se a temperatura deste, para efeito do cálculo inicial de propriedades, como sendo igual a do imediatamente anterior. A partir daí obtém-se a nova temperatura e o balanço é recalculado. A convergência é extremamente rápida.

## Resultados e Comentários

Com base nos "modelos físico e teórico" apresentados nos itens anteriores, desenvolveu-se o software de Simulação de Linhas Submarinas de Petróleo, sendo aquecido por fonte(s) localizada(s) de RF.

Este desenvolvimento foi realizado utilizando-se o Turbo Pascal for Windows, na realização dos cálculos propriamente ditos, e o Visual Basic for Windows, para a montagem de uma interface gráfica padrão Windows.

Diversos casos reais, onde a temperatura do petróleo atinge valores abaixo da TIAC foram analisados. Dentre estes, dois foram escolhidos para a simulação térmica com inclusão de fontes de RF. O fator de intensificação de turbulência foi assumido unitário em todas as simulações. Para diferenciar os estudos, os mesmos serão classificados como *caso a* e *caso b*.

A Figura 3 apresenta o comportamento da temperatura do petróleo escoando sob as condições dadas pelo *caso a*. Observa-se que a partir de uma temperatura de 58°C junto à cabeça do poço, a mesma atinge a TIAC (23°C) a cerca de 4,8 km deste ponto, com a temperatura externa igual a 10°C. A linha tracejada mostra comportamento térmico deste mesmo *caso a*, com uma fonte de RF, de 10 KW, localizada à 4,8 km da cabeça do poço, onde o problema de deposição se iniciaria. Pode-se observar que a inclusão desta fonte aquece localmente o óleo que estaria a uma temperatura abaixo da TIAC, e que só na parte final da linha, esta temperatura é novamente atingida.

Como o petróleo possui uma alta capacidade de absorção de rádio-freqüência, a quase totalidade da potência injetada por uma fonte é absorvida no próprio volume de controle onde a mesma se encontra. Por este motivo surge, localmente um pico de temperatura, dando a forma de um dente de serra ao perfil térmico.

Alternativamente à solução adotada com a instalação de uma única fonte de RF (10 KW), a Figura 4 apresenta o perfil térmico do petróleo, posicionando-se duas fontes de RF de 5 KW cada, a 4,8 e 5,0 km da cabeça do poço, respectivamente. Constatam-se dois picos de temperatura nas respectivas posições das fontes, obviamente menores do que o pico observado com uma única fonte. A inclusão de várias fontes tem por objetivo elevar pouco a pouco a temperatura do óleo, minimizando as perdas para o exterior, uma vez que a diferença acionadora da troca de calor é mantida em níveis baixos. Obviamente este tipo de solução apresenta uma série de inconvenientes técnicos de instalações e custos que não são abordados neste trabalho.

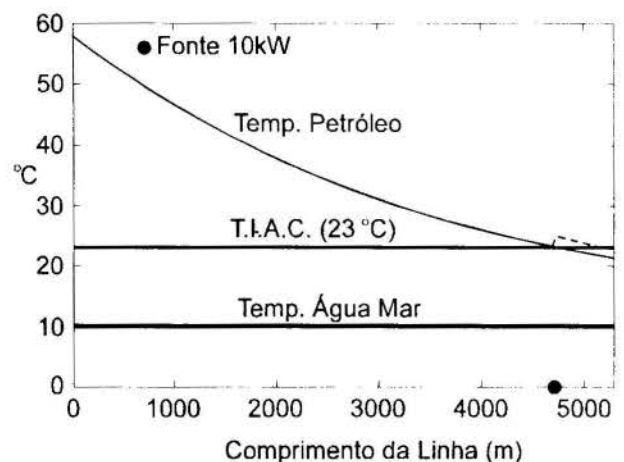


Figura 3 - Distribuição das Temperaturas - Caso a

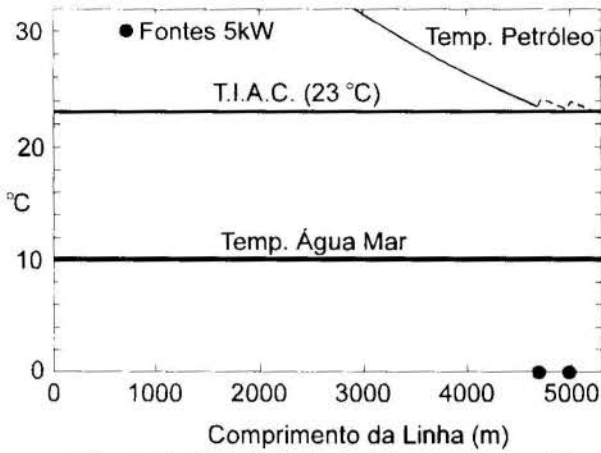


Figura 4 - Distribuição das Temperaturas - Caso a - Detalhe com 2 fontes

A Figura 5 apresenta a distribuição de temperatura do petróleo escoando sob as condições do *caso b*. Comparativamente ao *caso a*, mostrado anteriormente, verifica-se um gradiente de temperatura bem maior na região próxima da cabeça do poço. Isto devido à menor vazão mássica de petróleo nesta linha. Observa-se também que a aproximadamente a 3,5 km do início da linha, o petróleo entra em equilíbrio térmico com a água do mar, a 10°C. Mais uma vez, a linha tracejada mostra o comportamento da temperatura após a inclusão das fontes de RF. Neste caso, quatro fontes de 50 KW de potência individual, situadas a 1,5, 2,1, 2,7 e 3,3 km da cabeça do poço. Observa-se que são necessários 50 KW, para cada trecho de 600 metros da linha, a partir do primeiro ponto em que a temperatura do petróleo aproxima-se da TIAC que no caso é 16°C. Obviamente, mantidas as condições externas constantes, tem-se um escoamento periódico após a inclusão de fontes idênticas com espaçamento constante ao longo da linha.

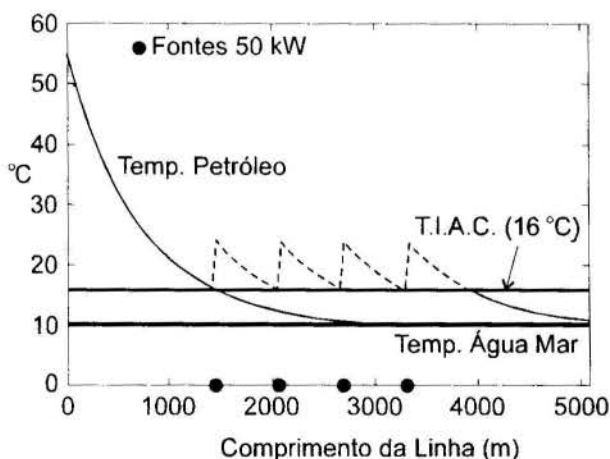


Figura 5 - Distribuição das Temperaturas - Caso b

### Conclusões

O aquecimento de petróleo através de rádio frequência foi analisado de modo simplificado, mostrando-se ser uma opção quando comparado a outros métodos de

aquecimento. Tendo o petróleo se comportado como uma substância altamente absorvedora de RF, o posicionamento destas fontes distribuídas ao longo da linha gera picos bem localizados de temperatura, formando um perfil de temperatura longitudinal do tipo dente de serra. A grande vantagem do método, quando comparado ao processo resistivo, está no fato da energia ser injetada diretamente no óleo, sem a necessidade de obstruir o escoamento. Isto é particularmente interessante pois este tipo de linha está sujeito a processos de limpeza através da passagem de sólidos (*pigs*) impulsionados pelo próprio óleo. O aquecimento via resistência elétrica é pois feito via parede, ao elevar-se sua temperatura. Como esta está muito próxima da água externa, boa parte do calor é perdido diretamente para meio externo, sem sequer ser absorvido pelo óleo. O outro fator onde a rádio-frequência apresenta vantagem é na distribuição da temperatura no interior do óleo, que neste caso tende a ser mais uniforme. Uma forma de evitar tal perda seria a utilização de resistências elétricas no interior do óleo. Isto evitaria boa parte da perda mas obstruiria parcialmente o escoamento, impedindo a passagem de *pigs*. Estudos subseqüentes são agora necessários, onde devem ser incluídos os efeitos da fase gasosa nos processos de troca de calor e absorção de RF. Na prática a formulação incluindo o escoamento bifásico deve incluir a variação da fração de vazio, uma vez que, ao escoar, a relação líquido-gás varia com decréscimo da pressão. Finalmente deve ser avaliada a viabilidade técnica de construção que passa por problemas de elevadas potências e marinização do equipamento.

### Referências

- Holman, J. P., 1983, "Transferência de Calor", McGraw-Hill do Brasil
- Kachmar, 1992, M., "Industrial Heating", *Microwaves & RF*, Part I.
- Kachmar, 1992, M., "Industrial Heating", *Microwaves & RF*, Part II.
- Osepchuk, J.M., 1984, "A History of Microwave Heating Applications", *IEE Trans. on Microw. Th. and Techn.* Vol. MTT-32, nº 9, pp. 1200 - 1224.

### Abstract

When crude oil is cooled as it flows through a tube surrounded by cold water, heavy hydrocarbons tend to precipitate off the solution increasing the viscosity and the pressure drop. These precipitated hydrocarbons adheres to the wall and gradually obstructs the conduit, affecting the pressure and temperature fields and the flow rate. The heating of the flowing fluid through spaced micro waves fonts along the line is analyzed in order to evaluate the power requirements and the font positions to avoid deposition problems. Two real cases are investigated and compared with the expected temperature distributions for different micro wave arrangements.



## AVALIAÇÃO COMPARATIVA DE DIFERENTES TÉCNICAS ANALÍTICAS PARA A DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA INICIAL DE APARECIMENTO DE CRISTAIS NO PETRÓLEO



L. C. do Carmo Marques, A. L. de Castro Machado, L. C. Vieira e J. R. Filho  
 PETROBRAS, Centro de Pesquisas e Desenvolvimento L. A. M. de Mello  
 Divisão de Engenharia e Geologia de Reservatórios  
 29949-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

### RESUMO

*Apresenta-se uma análise estatística dos resultados de determinação da temperatura inicial de aparecimento de cristais (TIAC) de amostras de petróleo, obtidos por duas diferentes técnicas analíticas: a calorimetria de varredura diferencial (CVD) e a reometria. Discute-se sobre a importância da determinação desta propriedade do petróleo e sobre as diferenças de valor da TIAC obtidas com diferentes técnicas analíticas, incluindo a microscopia ótica com luz polarizada.*

### INTRODUÇÃO

A mistura complexa de hidrocarbonetos (HC's) gasosos, líquidos e sólidos que compõe o petróleo encontra-se em equilíbrio que foi alcançado durante o tempo geológico. No reservatório de petróleo, os HC's mais leves, i.e. metano, etano, propano, etc... comportam-se como solventes supercríticos para os HC's mais pesados (Carnahan, 1989). Durante o seu escoamento, desde o reservatório até as facilidades de produção existentes na superfície, o petróleo é submetido a gradientes de temperatura e pressão que inicialmente provocam o surgimento de uma fase gasosa composta por seus HC's leves. A passagem desses HC's da condição de solventes supercríticos para a fase gasosa promove dois efeitos simultâneos:

- o incremento relativo da concentração dos HC's alifáticos pesados no petróleo e;
- a redução no parâmetro de solubilidade médio do petróleo, por conta que os HC's apresentam valores de parâmetro de solubilidade maiores no estado supercrítico do que no estado gasoso.

Reflexo da conjunção desses dois efeitos, é posteriormente estabelecido um equilíbrio entre as fases do petróleo e inicia-se a formação de uma fase sólida ("parafinação" ou "deposição de parafinas"), composta por uma mistura de HC's alifáticos de elevado peso molecular, com números de átomos de carbono tipicamente entre 18 e 60. Morfologicamente há dois tipos de depósitos de parafinas (Smith e Arnold, 1991):

- os macrocristalinos, compostos principalmente de parafinas lineares (C<sub>18</sub> a C<sub>50</sub>) e;
- os microcristalinos, que contêm uma maior proporção de isoalcanos e naftênicos (C<sub>30</sub> a C<sub>60</sub>).

Problemas de parafinação de equipamentos de superfície, linhas e do meio poroso (reservatório) são amplamente conhecidos pela indústria de produção de petróleo.

### A TEMPERATURA INICIAL DE APARECIMENTO DE CRISTAIS

Há uma temperatura na qual inicia-se o fenômeno de cristalização de parafinas do petróleo. Esta temperatura é denominada temperatura inicial de aparecimento de cristais

(TIAC) (Marques e Cotrin, 1991). Ela representa um valor limite acima do qual não ocorrem problemas de deposição de parafinas. Portanto, a TIAC é um parâmetro fundamental para a modelagem do fenômeno de deposição orgânica e o dimensionamento dos sistemas de escoamento de produção de petróleo, principalmente os situados em águas (offshore) profundas. Igualmente a TIAC é usada para estabelecer a temperatura mínima para o processo de separação óleo/água.

A determinação do valor exato da TIAC do petróleo reveste-se de certo grau de dificuldade analítica por conta da:

- inexistência de uma metodologia analítica padronizada que seja aplicável a amostras escuras<sup>1</sup>;
- instabilidade físico-química da amostra;
- existência de uma memória térmica (Wardough & Boger, 1987) e;
- influência da quantidade de gás natural dissolvido na amostra.

A literatura faz referência a diferentes métodos analíticos adequados para a determinação da TIAC, dentre os quais: reometria, calorimetria de varredura diferencial (CVD), microscopia ótica com luz polarizada, espectroscopia de infravermelho com transformada de Fourier, filtração com temperatura controlada (Ferworm et al., 1995). No presente estudo a TIAC de uma centena de amostras de petróleo estabilizado, de diferentes campos produtores do Brasil, foi determinada por CVD e por reometria. Os resultados obtidos com as duas técnicas analíticas mostraram-se bem correlacionados. Além disso, tendo como base o trabalho experimental que foi conduzido em nosso laboratório, pôde-se observar que a CVD apresenta as seguintes vantagens sobre a reometria: é mais rápida e requer menor quantidade de amostra.

Há que se ressaltar que amostras de petróleo vivo (com a composição original do petróleo em condições de reservatório) não foram empregadas neste estudo experimental. No entanto, tem sido demonstrado experimentalmente que há uma grande influência dos gases dissolvidos no petróleo sobre o valor de sua TIAC (Fokeev, 1958, Marques & Branco, 1992, Campagnolo et al., 1995). No entanto, as dificuldades para

<sup>1</sup> - Os métodos ASTM D-2500 e D-3117 não são adequados para amostras de petróleo com coloração escura.



consecução e manuseio limitam a aplicação freqüente de amostras de petróleo vivo em ensaios laboratório

## CONSIDERAÇÕES DE NATUREZA TEÓRICA

### A Formação de Cristais de Parafinas a Partir do Petróleo

Nas condições originais de reservatório as moléculas de parafinas - n-alcenos alifáticos de elevado peso molecular - possuem energia térmica para perpetuar seu movimento no líquido, i.e. manterem-se solubilizadas no petróleo. Na medida que a depressurização do petróleo torna-o mais pobre de hidrocarbonetos leves, fato este acompanhado por uma redução de temperatura, as moléculas de parafinas de alto peso molecular iniciam um processo de atração intermolecular. Estas forças intermoleculares levam ao alinhamento das moléculas ao longo do seu eixo principal. Quando estas forças são superiores a interação entre as moléculas de parafinas e o meio solvente, inicia-se a formação de uma fase sólida no sistema (Addison, 1977).

É importante ressaltar que não é possível explicar os fenômenos de nucleação e cristalização de uma fase sólida em um líquido usando o enfoque termodinâmico clássico, onde reinam absolutos os conceitos de propriedades macroscópicas de sistemas estatisticamente uniformes. Não obstante, usando uma abordagem microscópica para o líquido, verifica-se que flutuações térmicas localizadas geram fluxo de massa e energia (movimento browniano), cujas magnitudes são superiores a energia livre de nucleação. Desse modo é que se explica como um líquido superresfriado é capaz de formar núcleos e, por intermédio desses núcleos, manifestar-se o processo de cristalização (Knight, 1969). Há, portanto, um raio crítico (mínimo) de cristalização (RCR), que uma vez excedido, torna o processo de cristalização termodinamicamente favorável.

### O Conceito de Raio Crítico de Cristalização

A energia livre total (F) de um sistema mantido sob condições isotérmicas, formado por um líquido superresfriado, contendo um cristal esférico de raio original  $r_0$ , é dada pela soma de energias livres (f) de todos seus componentes.

$$F = f_l(V - 4/3\pi r_0^3) + f_c(4/3\pi r_0^3) + \sigma(4\pi r_0^2) \quad (1)$$

onde:

V = volume do sistema;

s = energia livre da interface líquido - cristal e;

os subíndices l e c significam líquido e cristal, respectivamente.

A um incremento  $\Delta r$  do raio do cristal corresponderá a uma variação de energia livre do sistema ( $\Delta F$ ) dada por:

$$F + \Delta F = f_l [V - 4/3\pi (r_0 + \Delta r)^3] + f_c [4/3\pi (r_0 + \Delta r)^3] + \sigma (4\pi (r_0 + \Delta r)^2) \quad (2)$$

A variação de energia livre do sistema,  $\Delta F$ , pode ser deduzida subtraindo-se a primeira expressão da segunda:

$$\Delta F = 4/3\pi (f_c - f_l) (3r_0^2 \Delta r + 3r_0 \Delta r^2 + \Delta r^3) + 4\pi\sigma (2r_0 \Delta r + \Delta r^2) \quad (3)$$

Como no início da cristalização o raio inicial  $r_0 = 0$ , tem-se que:

$$\Delta F = 4/3\pi (f_c - f_l) \Delta r^3 + 4\pi\sigma \Delta r \quad (4)$$

Para que o processo de cristalização seja espontâneo, é necessário que a energia livre do sistema,  $\Delta F$ , seja uma função decrescente do raio do cristal. Isto é:

$$\frac{d\Delta F}{d\Delta r} < 0 \quad (5)$$

porém,

$$\frac{d\Delta F}{d\Delta r} = 4\pi\Delta r^2(f_c - f_l) + 8\pi\sigma \Delta r \quad (6)$$

Substituindo a expressão (6) na inequação (5) e resolvendo-a para  $\Delta r$ , tem-se:

$$\Delta r > \frac{2\sigma}{f_l - f_c} \quad (7)$$

Como  $r_0 = 0$ , então:

$$r > \frac{2\sigma}{f_l - f_c} \quad (8)$$

O raio  $r$  definido na equação (8) é o raio crítico de cristalização (RCR). O crescimento do cristal somente é um processo espontâneo a partir de um raio maior que o RCR, isto é,  $r > 2\sigma/(f_l - f_c)$ . Isto posto implica em assumir que o processo de cristalização se deve a pequenas flutuações de propriedades que ocorrem no líquido. Dados de literatura informam que o RCR das parafinas no petróleo é da ordem de 50 nanômetros. (Petinelli, 1979)

### O Conceito de Parâmetro de Solubilidade de Hildebrand

O parâmetro de solubilidade de Hildebrand é uma propriedade termodinâmica útil para explicar o fenômeno de solubilidade das parafinas no petróleo. Segundo este conceito, duas substâncias com mesmos valores de parâmetro de solubilidade são completamente miscíveis em qualquer proporção. Na medida que os parâmetros de solubilidade de duas diferentes substâncias se diferenciam, menor é a miscibilidade entre elas (Brandup e Immergut, 1989). O parâmetro de solubilidade do petróleo tem valores típicos próximos de  $5,0 \text{ (cal/cm}^3)^{1/2}$ , (Chang & Fogler, 1984). Por sua vez, os hidrocarbonetos mais leves do petróleo tem parâmetro de solubilidade crescente com seu peso molecular. Assim sendo, no início de um processo (hipotético) de depressurização do petróleo vivo, o metano, por ser o hidrocarboneto de maior pressão de vapor e de menor parâmetro de solubilidade, é o primeiro componente a sair de solução. Contudo, sua influência sobre a TIAC é praticamente nula. Dando continuidade a este processo de depressurização, outros hidrocarbonetos mais pesados que o metano, i.e.: etano, propano, etc... que apresentam valores crescentes de parâmetro de solubilidade, também saem de solução e, de modo crescente, influenciam o valor da TIAC do petróleo. Isso explica por que não há uma relação linear entre a TIAC e a variação de pressão experimentado pelo petróleo. Campagnolo et al, 1994). Em geral, a TIAC de petróleo vivo é inferior a do petróleo estabilizado.

## DESCRIÇÃO DAS TÉCNICAS ANALÍTICAS PARA DETERMINAÇÃO DA TIAC DE PETRÓLEO ESTABILIZADO

### Reometria

A detecção da TIAC por reometria é baseada no fato que a grande maioria dos petróleo se comporta como um fluido newtoniano (viscosidade independente da taxa ou do tempo de cisalhamento) em temperatura superior a TIAC e como fluido não-newtoniano abaixo dessa temperatura (sistema bifásico sólido - líquido). O seguinte procedimento analítico é empregado: Uma vez destruída a memória térmica do petróleo (Wardough e Boger, 1987), fazendo decrescer a temperatura, determina-se a viscosidade da amostra e traça-se um reograma. A temperatura na qual ocorre a transição de comportamento newtoniano para não-newtoniano, que equivale a TIAC, é observada como uma mudança de inclinação na curva de viscosidade do reograma. A TIAC de petróleo parafínicos é facilmente identificada por este método. Sua precisão é proporcional a concentração de parafinas e inversamente proporcional a concentração de asfaltenos no petróleo. Oliveira et al. (1994) implementaram aprimoramentos na técnica para aumentar a sua eficiência, contudo, petróleo extra-pesados ou com elevado grau de biodegradação, por não apresentarem região de comportamento newtoniano, não apresentam uma TIAC bem definida. Na verdade estes petróleo perdem a fluidez sem apresentarem uma transição de comportamento reológico.

Estudos conduzidos com ressonância magnética nuclear (Pedersen et al, 1991) mostraram que é necessário que exista 1% de parafinas precipitada para que detecte um desvio do comportamento reológico do petróleo.

Um reograma típico de petróleo, orientado para a determinação da TIAC, é apresentado na Figura 2. As duas regiões de comportamento reológico estão assinaladas na Figura.

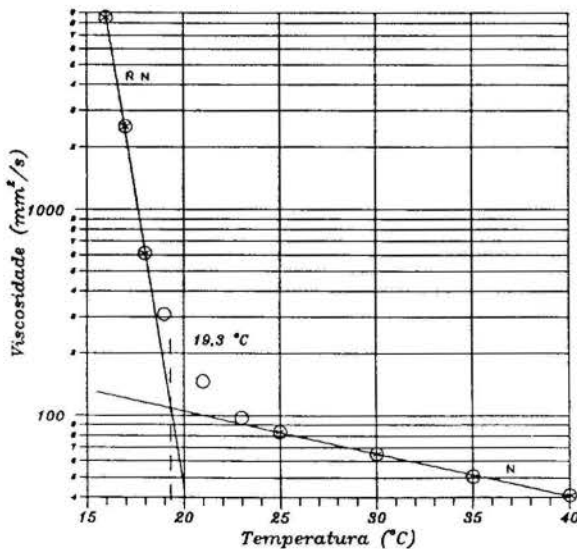


Figura 1. Reograma típico de petróleo estabilizado orientado para determinação da TIAC

### Calorimetria de Varredura Diferencial

O calorímetro de varredura diferencial é um equipamento de extrema utilidade para determinação de temperaturas de transição de fases assim como do calor envolvido na mesma. O princípio de funcionamento do equipamento DSC-7 da Perkin

Elmer utilizado neste trabalho experimental é o seguinte: o equipamento possui dois compartimentos de amostras (painéis) sendo que uma das painéis fica ocupada pela amostra e a outra é ocupada por ar (referência). O operador estabelece uma taxa de variação de temperatura (rampa de temperatura) que será positiva para o caso de aquecimento e negativa para o resfriamento dependendo do tipo de fenômeno que se deseja analisar. Durante todo ensaio as painéis da amostra e da referência são mantidas numa mesma temperatura de modo que o equipamento fornece a diferença de calor devido a diferença de capacidades caloríficas entre a amostra e a referência. Esta energia cedida pelo equipamento é registrada sob a forma de uma linha base. Neste ponto abre-se um parêntese para ressaltar que uma linha base deve ter sido previamente estabelecida usando-se para isso ar nas duas painéis. Considerando-se que a amostra das duas painéis são iguais (ar) e as painéis também são iguais entre si era de se esperar que o fluxo de calor cedido pelo equipamento fosse igual a zero, porém devido a existência de ruídos eletrônicos a linha base localiza-se em outra posição, porém muito próxima do zero. A medida que a análise evolui, o equipamento prossegue fornecendo a energia necessária para manter as painéis contendo a amostra e o padrão (ar) na mesma temperatura. No ponto que acontece a transição de fases o calor latente da transformação é cedido (no caso da fusão) ou retirado (no caso da cristalização) da amostra para que esta se mantenha na mesma temperatura da referência. Este calor aparece no termograma sob a forma de um pico cuja largura e altura dependerão do tipo da amostra. A temperatura que ocorre a transição de fase é registrada pelo aparelho ("onset") assim como o calor envolvido na mesma, que é registrado sob a forma de energia por massa da amostra. Ao final do evento, o fluxo de calor retorna para a posição de linha base que não precisa obrigatoriamente ser igual àquela anterior ao "onset". Vale ressaltar que o calor registrado pelo equipamento está relacionado a toda quantidade da amostra e nos casos em que apenas uma parte da amostra está envolvida na transição de fase o uso do resultado pode levar a conclusões equivocadas. Os trabalhos conduzidos por Noel (1971), com frações de óleo combustível, contribuíram para consagrar o uso da CVD para determinação da TIAC.

A precisão da CVD também é fortemente afetada pelo teor de parafinas da amostra. Em linhas gerais, quanto mais elevado o teor de parafinas na amostra mais convergentes são os resultados obtidos pelos dois métodos em questão. Kruka et al. (1995) apontam como fatores significativos para imprecisão da CVD a necessidade de existir um certo grau de sub-resfriamento, antes que se inicie o processo de cristalização e, ainda, a taxa de resfriamento utilizada durante o ensaio.

Um termograma típico de petróleo, orientado para a determinação da TIAC é apresentado na Figura 2. A TIAC é equivalente a temperatura de "onset" assinalada no termograma.

### CONSIDERAÇÕES SOBRE O USO DA MICROSCOPIA ÓTICA COM LUZ POLARIZADA PARA DETERMINAÇÃO DA TIAC

O princípio de detecção da TIAC por microscopia ótica com luz polarizada se baseia no fato que os cristais que apresentam estrutura cristalina não-cúbica são anisotrópicos e, portanto, desviam o plano da luz polarizada. Assim sendo, no resfriamento da amostra de petróleo, os cristais de parafinas aparecem como pontos luminosos que se destacam do fundo negro. A grande vantagem da técnica é a habilidade de detectar cristais diminutos, portanto, sendo recomendável para petróleo



com baixos teores de parafinas. A técnica igualmente tem se mostrado útil para verificar a influência:

- do pré-tratamento térmico e;
- dos asfaltenos e de inibidores químicos de cristalização de parafinas sobre a morfologia dos cristais de parafinas.

Apesar da elevação de temperatura da lâmina portadora da amostra, quando atravessada pelo feixe luminoso do microscópio durante a análise, ser uma fonte de imprecisão, a microscopia ótica com luz polarizada. É considerada como técnica mais sensível do que a CVD ou reometria ( Pedersen et al., 1991, Ferworm et al., 1995).

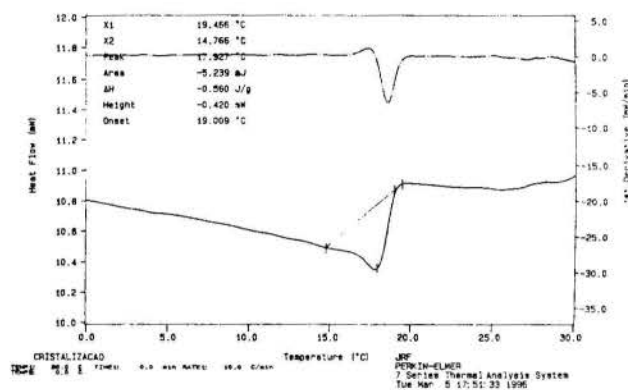


Figura 2. Termograma típico de petróleo estabilizado orientado para determinação da TIAC

É oportuno ressaltar que esta técnica está em fase de implantação no CENPES (Divisão de Geologia e Engenharia de Reservatórios).

#### APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os valores de TIAC de uma centena de amostras de petróleo, com diferentes teores de parafinas, oriundos de diferentes bacias sedimentares brasileiras, foi determinado por CVD (Perkin Elmer, Modelo DSC-7) e por reometria (Brookfield Modelos DV-II e DV-III). Estes resultados são apresentados na Tabela 1 (Anexo).

#### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

##### Avaliação Estatística dos Resultados de TIAC

Os dados da Tabela 1 foram convertidos na Figura 3 onde também é mostrada a reta de melhor ajuste obtida por ajuste polinomial (1<sup>o</sup> grau):

$$TIAC_{(CVD)} = 0,89968C_{(REO)} + 0,731684 \quad (9)$$

O coeficiente de correlação entre as variáveis TIAC<sub>(CVD)</sub> e TIAC<sub>(REO)</sub> também foi calculado e é apresentado em seguida:

$$r_{xy} = 0,8541 \quad (10)$$

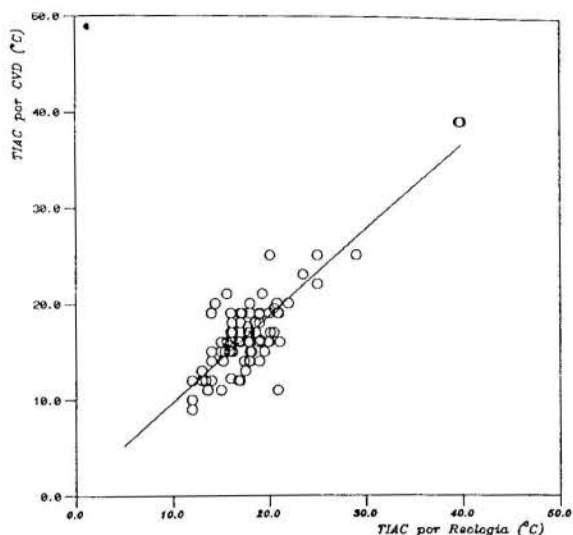


Figura 3. Valores de TIAC de amostra de petróleo determinadas por Reometria e por CVD

#### CONCLUSÕES

Com base nos resultados da Tabela 1, depreende-se que os valores de TIAC obtidos por CVD foram, em média, inferiores aos obtidos por reometria.

O baixo valor de coeficiente de correlação entre as variáveis pode ser creditado à presença de petróleo com baixos teores de parafinas no universo amostral. Isso sugere que amostras com estas características não respondem igualmente aos dois métodos. Em trabalhos futuros, há necessidade de determinar a influência deste parâmetro sobre a convergência dos resultados.

O menor tempo de análise e o uso de menor quantidade de amostra são vantagens inerentes da CVD sobre a reometria.

O valor absoluto de TIAC somente pode ser determinado se amostras de petróleo com seu conteúdo e composição de gás originais (amostras vivas ou recombinadas) forem utilizadas nos ensaios. Portanto, as devidas precauções devem ser tomadas para utilizar o valor de TIAC de amostras de petróleo estabilizado em condições reais de campo.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a PETROBRAS pela autorização para publicação deste artigo técnico e também ao Eng. Guilherme B. Neves por seus comentários e sugestões.

#### REFERÊNCIAS

- Addison, G. E, 1984, "Paraffin Control More Cost-Effective", SPE paper # 13391.
- Carnahan, N. F., 1989(10), "Paraffin Deposition in Petroleum Production"; SPE Journal of Petroleum Technology, pp. 1024-1025.
- Campagnolo, E. et al., 1994, "Fenômeno de Cristalização de Parafinas: Investigação Experimental sobre o Comportamento Óleos Parafínicos", Rel. Interno PETROBRAS/CENPES.
- Chang, C. C. e Fogler H. S., 1994, "Stabilization of Asphaltene in Aliphatic Solvents Using Alky-Benzene-Derived Amphiphiles. Part.1", Langmuir, Vol. 10, pp.1749-1757.

Ferworn, K et al., 1995, "Review of Experimental Techniques for the Measurement of Petroleum Solid Deposition", *Proceedings, First Symposium on Colloid Chemistry in Oil Production: Asphaltenes and Wax Deposition*, Rio de Janeiro Vol. 1, pp. 45-50.

Fokeev, M., 1958, "Dependência Funcional entre a Temperatura Inicial da Cristalização de Parafina e a Saturação de Gás da Solução", Tradução # 908 PETROBRAS/CENPES do original em russo (Gostoitekhizdat, Vol I, 1958).

Brandrup, J e Immergut, E. H, 1989 "Polymer Handbook", New York, John Wiley and Sons.

Knight, C., 1969, "Cristalizacion de Líquidos Sobreenfriados", Barcelona: Van Nostrand.

Kruka, V. R. et al, 1995, "Cloud Point Determination for Crude Oils", *SPE Journal of Petroleum Technology*, Vol. 8, pp 681-686.

Marques, L. C. C. e Cotrim, M. L., 1991, "Metodologia para Detecção da Temperatura Inicial de Aparecimento de Cristais", *Proceedings, V Seminário de Produção de Petróleo da Petrobras*, Cabo Frio, Vol. 1, pp. 54-58.

Marques, L. C. C. e Branco, W., 1993, "Determinação da TIAC do Petróleo sob Influência da RGO", Rel. Interno PETROBRAS/CENPES, MCT 6506-15028.

Noel, F., 1971, "The Characterization of Cloud Point for Petroleum Middle Distillates by Differential Scanning Calorimeter", *Thermochimica Acta*, Vol. 114, pp. 125-130.

Oliveira, R. C. G. et al. , 1994, "Aprimoramento da Metodologia para a Determinação da TIAC em Petróleo Pesados por Reologia", *Proceedings, II Congresso Latino Americano de Hidrocarbonetos*, Rio de Janeiro.

Pedersen, W.B. et al., 1991, "Wax Precipitation from North Sea Crude Oils, Part 2, Solid-Phase Content as Function of Temperature Determined by Pulsed NMR", *Energy and Fuels*, Vol. 5, pp. 908-913.

Pettinelli, C. , 1979 "Action des Copolimères Éthylène-Acétate de Vinyle sur la Cinétique de Nucleation et the Croissance des n-Paraffines en Milieu Hydrocarbure", *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, Vol. 35 (5), pp. 771-790

Smith, H. V. e Arnold, K.E., 1991, "Petroleum Engineering Handbook", Houston, SPE.

Wardaugh, L. T. e Boger, D. V., 1987, "Measurement of the Unique Flow Properties of Waxy Crude Oils, *Chem. Eng. R. Dev.* Vol 65, pp. 74-83.

## Anexo

Tabela 1 - Valores de TIAC ( $^{\circ}$ C) de Diferentes Petróleo Determinados por Reometria e por Calorimetria de Varredura Diferencial

Amos- tra	DSC	Reo	Amos- tra	DSC	Reo	Amos- tra	DSC	Reo
1	16,0	19,0	35	17,0	12,0	69	16,0	12,2
2	18,0	19,0	36	12,0	9,0	70	13,0	12,0
3	20,0	19,0	37	12,0	10,0	71	13,4	12,0
4	14,0	19,0	38	19,0	16,0	72	18,0	17,0
5	23,5	23,0	39	17,9	17,0	73	14,0	12,0
6	14,4	20,0	40	17,8	17,0	74	17,0	17,0
7	19,0	18,9	41	20,8	20,0	75	15,0	15,0
8	20,9	11,0	42	20,9	19,0	76	16,2	15,0
9	25,0	22,0	43	20,5	19,5	77	18,5	18,0
10	15,6	21,0	44	19,0	19,0	78	20,5	17,0
11	14,0	15,0	45	17,2	19,0	79	15,0	16,0
12	17,4	14,0	46	18,0	15,0	80	17,0	17,0
13	19,1	16,2	47	16,2	17,0	81	19,0	16,0
14	18,0	14,0	48	16,0	16,0	82	17,0	16,0
15	20,1	25,0	49	16,0	16,0	83	17,8	17,6
16	25,0	25,0	50	19,0	19,0	84	20,0	16,0
17	17,8	16,0	51	18,5	18,0	85	18,0	17,0
18	15,6	16,0	52	16,0	17,0	86	19,0	18,0
19	12,0	12,0	53	16,1	18,0	87	19,9	16,0
20	39,6	39,0	54	18,5	18,0	88	14,0	14,0
21	39,8	39,0	55	17,0	19,0	89	16,2	16,0
22	29,0	25,0	56	16,0	15,0	90	18,6	17,0
23	17,9	14,0	57	12,0	12,0	91	16,0	15,0
24	21,1	16,0	58	13,0	13,0	92	22,0	20,0
25	17,0	16,0	59	13,6	11,0	93	16,8	16,0
26	21,0	19,0	60	17,9	14,0	94	15,2	14,0
27	16,0	17,0	61	15,0	15,0	95	15,8	15,0
28	19,5	15,0	62	17,5	13,0	96	17,0	17,0
29	19,0	16,0	63	18,2	15,0	97	16,9	16,1
30	20,1	17,0	64	15,4	15,0	98	15,8	15,6
31	17,0	18,0	65	18,0	20,0	99	17,0	16,1
32	15,0	11,0	66	19,0	14,0	100	17,0	16,0
33	16,8	12,0	67	19,3	21,0			
34	18,0	16,0	68	25,0	25,0			

## SUMMARY

The wax appearance temperature (WAT) of 100 crude oil samples were determined using two different analytical methods: Differential Scanning Calorimeter (DSC) and Rheometry. A statistical treatment of data revealed that WAT determined by Rheometry were statistically higher than those determined by DSC. A correlation factor between the WAT determined by the two methods was also calculated.



## ANÁLISE DO PROCESSO DE AQUECIMENTO ELETROMAGNÉTICO DE RESERVATÓRIOS PORTADORES DE ÓLEO DE ALTA VISCOSIDADE

Sylvia T. Cambra<sup>(1)</sup>, Cirus M. Hackenberg<sup>(2)</sup>, Paulo L. Lage<sup>(2)</sup>, Carlos M. Portela<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> PETROBRAS/E&P/GERER/GETEC

<sup>(2)</sup> Programa de Engenharia Química, COPPE/UFRJ

<sup>(3)</sup> Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ  
21945-970 - CP68502 - Rio de Janeiro - RJ - Brazil



### RESUMO

Neste trabalho, um modelo termo-fluidodinâmico para a previsão da produção de óleos viscosos em reservatórios de petróleo submetidos a aquecimento eletromagnético é utilizado para analisar a aplicabilidade deste método de recuperação suplementar de hidrocarbonetos. São apresentados os resultados do comportamento dos perfis de temperatura do reservatório e da produção de óleo para a faixa de frequência de 60 Hz a 1 MHz, e para os valores de potência de 20, 40 e 60 kW, além de uma análise econômica simplificada do método. Como conclusões temos que o aquecimento eletromagnético mostrou-se um processo de estimulação térmica, apresentando um período ótimo de aplicação.

### INTRODUÇÃO

O Método Térmico que será analisado no nosso trabalho considera uma forma não convencional de aquecimento de reservatórios de petróleo, que é o Eletromagnetismo. Existem atualmente duas formas distintas de utilização de energia eletromagnética para aquecimento de reservatórios. A primeira, denominada *Aquecimento Elétrico*, trabalha com baixas frequências de onda, até cerca de 300 Hz, e fornece calor ao reservatório pela passagem de uma corrente elétrica entre dois eletrodos adequadamente posicionados no meio poroso, submetidos a uma diferença de potencial elétrico. Nesse caso, o campo eletromagnético é tratado como estacionário em um meio puramente resistivo. A segunda, denominada *Aquecimento através de Radiofrequência*, trabalha com frequências de onda da ordem de megahertz, e fornece calor ao reservatório pela absorção da energia eletromagnética entregue por uma antena posicionada em frente à zona produtora. Nessa abordagem, o fenômeno é considerado como puramente radiante.

Como exemplo de aplicação do *Aquecimento Elétrico* temos um projeto piloto implantado em um campo de óleo pesado da PETROBRAS, o Campo de Estreito/Rio Panon, localizado no Rio Grande do Norte. Nesse projeto, a frequência utilizada é a de rede, isto é, 60 Hz. O método de *Aquecimento através de Radiofrequência* encontra-se também em fase de projeto piloto, em um campo de óleo da TEXACO, localizado em Bakersfield, Califórnia, EUA. Nesse caso, a frequência aplicada é de 13,56 MHz.

Ambas as linhas de utilização de energia eletromagnética para aquecimento de reservatórios de petróleo possuem as seguintes vantagens:

- o calor fornecido ao reservatório não depende da injeção de nenhum fluido, e por isso não há restrições quanto à permeabilidade do meio poroso, pressão de injeção ou presença de argilas que inchem com água ou vapor
- o método de aquecimento é um processo limpo ambientalmente
- o poço aquecido é um poço produtor

Como desvantagens temos:

- consumo de um tipo de energia nobre

O modelo termo-fluidodinâmico apresentado por Cambra (1996) em sua tese de mestrado e considerado neste trabalho possui uma abordagem abrangente do aquecimento

eletromagnético de reservatórios de petróleo, válida para qualquer frequência de onda na faixa de 60 Hz a 1 MHz.

### MODELAGEM MATEMÁTICA

O modelo físico proposto, representado na Figura 1, considera um reservatório cilíndrico drenado por um único poço vertical, localizado no centro da área de drenagem. Esse reservatório, que consiste de uma rocha permeável portadora de óleo de alta viscosidade e água, a uma determinada pressão e temperatura, é submetido à ação de energia eletromagnética, com consequente geração de calor e aquecimento.

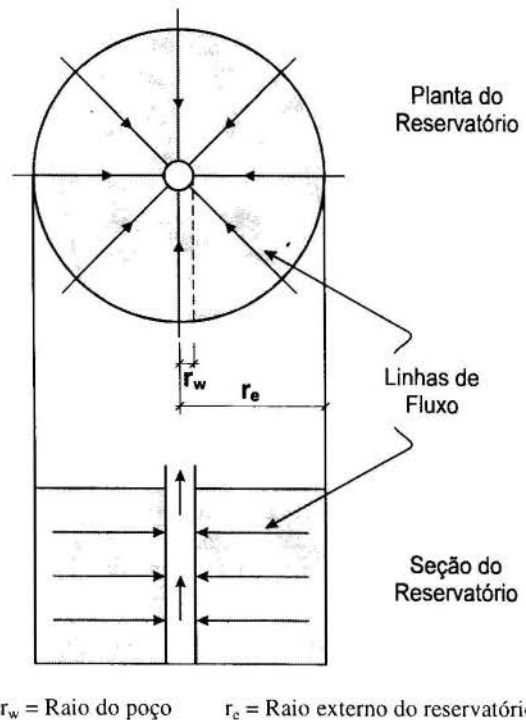


Figura 1 - Representação esquemática do modelo de escoamento

Na modelagem matemática do processo de aquecimento e produção do reservatório foram utilizadas as seguintes equações termofluidodinâmicas:

- equação da continuidade para a fase óleo
- equação da continuidade para a fase água
- equação do movimento para a fase óleo
- equação do movimento para a fase água
- equação da conservação da energia

**Hipóteses e Simplificações.** De modo a facilitar o tratamento matemático a ser dado ao nosso problema, foram consideradas as seguintes hipóteses e simplificações: (1) reservatório horizontal e com espessura constante; (2) meio isotrópico e homogêneo; (3) reservatório portador somente de óleo e água; (4) escoamento lento e uniforme; (5) efeito gravitacional desprezado; (6) não ocorre vaporização no reservatório durante a produção do poço; (7) os fluidos se comportam como fluidos newtonianos; (8) não há efeito de capilaridade no reservatório; (9) as variações de pressão e temperatura são funções do tempo e da posição radial; (10) não há presença de componentes magnéticos no meio poroso; (11) o campo eletromagnético nas camadas adjacentes é desprezado, não ocorrendo dissipação de energia eletromagnética nessas camadas, nem havendo influência dessas camadas no campo eletromagnético ao qual o reservatório encontra-se submetido; (12) permeabilidade absoluta do reservatório considerada constante; (13) condutividades térmicas da rocha, óleo e água consideradas constantes; (14) calor específico da rocha, óleo e água considerados constantes; (15) densidade da rocha considerada constante; (16) condutividade elétrica, permissividade elétrica e permeabilidade magnética da formação consideradas constantes para cada frequência de onda utilizada; e (17) condutividade elétrica, permissividade elétrica e permeabilidade magnética do revestimento (tubulação metálica que reveste o poço) consideradas constantes para cada frequência de onda utilizada.

**Equações da Continuidade e do Movimento.** As equações da continuidade e do movimento para cada fluido, considerando escoamento bifásico de óleo e água em um meio poroso isotrópico, assumem a seguinte forma (Silva, 1993):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\rho_o k k_o}{\mu_o} \frac{\partial P}{\partial r} \right\} = \frac{\partial(\phi \rho_o S_o)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\rho_a k k_a}{\mu_a} \frac{\partial P}{\partial r} \right\} = \frac{\partial(\phi \rho_a S_a)}{\partial t} \quad (2)$$

sendo utilizadas as seguintes condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_c} = 0$$

que significa que não há fluxo de fluidos no raio externo do reservatório, e

$$P|_{r=r_w} = P_w$$

que representa que a pressão é mantida constante no poço.

Nas equações acima  $r$  é a coordenada radial,  $\rho_i$  é a densidade do fluido  $i$  na pressão e temperatura do reservatório,  $k$  é a permeabilidade do meio poroso,  $k_i$  é a permeabilidade relativa ao fluido  $i$ ,  $\mu_i$  é a viscosidade do fluido  $i$  na pressão e temperatura de reservatório,  $P$  é a pressão do reservatório,  $\phi$  é a

porosidade da rocha na pressão de reservatório,  $S_i$  é a saturação do fluido  $i$ ,  $t$  é o tempo,  $r_c$  é o raio externo do reservatório,  $r_w$  é o raio do poço e  $P_w$  é a pressão no fundo do poço.

Como equações complementares temos:

$$P_o = P_a = P \quad (3)$$

$$S_o + S_a = 1 \quad (4)$$

onde,  $P_i$  é a pressão do fluido  $i$  ( $i \equiv o$ , óleo;  $i \equiv a$ , água).

A equação da energia e as suas condições de contorno apresentam-se respectivamente como (Silva, 1993):

$$\left\{ \rho_r (1 - \phi) C_{pr} + \rho_o \phi S_o C_{po} + \rho_a \phi S_a C_{pa} \right\} \frac{\partial T}{\partial t} +$$

$$\rho_o C_{po} v_o \frac{\partial T}{\partial r} + \rho_a C_{pa} v_a \frac{\partial T}{\partial r} = k_T \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P_d - G \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_w} = 0$$

o que significa que não ocorre fluxo térmico em  $r = r_w$ , e

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_c} = 0$$

o que implica em fluxo térmico nulo no limite externo do reservatório.

Nas expressões acima  $\rho_r$  é a densidade da rocha,  $C_{pr}$  é o calor específico da rocha,  $C_{pi}$  é o calor específico do fluido  $i$ ,  $v_i$  é a velocidade radial do fluido  $i$ ,  $k_T$  é a condutividade térmica de meio,  $P_d$  é a dissipação de energia eletromagnética em calor por volume de reservatório e  $G$  é a perda de calor para as camadas adjacentes por volume de reservatório.

O nosso interesse principal é a determinação da energia eletromagnética dissipada em calor no reservatório. Essa geração de calor é função do campo elétrico  $\mathbf{E}$  ao qual a formação está submetida, da condutividade elétrica efetiva do meio,  $\sigma_{ef}$ , e da frequência de onda utilizada. O termo de dissipação pode ser obtido a partir de expressão abaixo, com  $\mathbf{E}$  tendo seu valor de pico (2):

$$P_d = \frac{\sigma_{ef}}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{\sigma_{ef}}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \quad (6)$$

onde,  $\mathbf{E}^*$  = conjugado do vetor campo elétrico complexo.

A determinação do campo elétrico é realizada a partir da solução das equações de Maxwell, apresentadas a seguir (Stratton, 1941; Harrington, 1961):

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10)$$



Nas equações de Maxwell acima fornecidas,  $\mathbf{B}$  é o vetor indução magnética,  $\mathbf{H}$  é o vetor campo magnético,  $\mathbf{J}$  é o vetor densidade de corrente elétrica de condução,  $\mathbf{D}$  é o vetor deslocamento elétrico e  $\rho_c$  é a densidade volumétrica de cargas.

Considerando que os componentes realmente relevantes dos campos elétrico e magnético no nosso problema específico correspondem às ondas magnéticas transversais (modo TM), representadas por  $E_r$ ,  $E_z$  e  $H_\theta$ , a solução do campo eletromagnético resulta em (Stratton, 1941; Portela, 1994):

$$E_r = iha_{02}\sqrt{k_{c2}^2 - h^2} H_1^{(1)}\left(\sqrt{k_{c2}^2 - h^2} r\right) \cdot \left\{ \exp(ihz - i\omega t) + \exp(-ihz - i\omega t) \right\} \quad (11)$$

$$E_z = \left(k_{c2}^2 - h^2\right) a_{02} H_0^{(1)}\left(\sqrt{k_{c2}^2 - h^2} r\right) \cdot \left\{ \exp(ihz - i\omega t) - \exp(-ihz - i\omega t) \right\} \quad (12)$$

$$H_\theta = \frac{-ik_{c2}^2}{\mu_{m2}\omega} a_{02}\sqrt{k_{c2}^2 - h^2} H_1^{(1)}\left(\sqrt{k_{c2}^2 - h^2} r\right) \cdot \left\{ \exp(ihz - i\omega t) - \exp(-ihz - i\omega t) \right\} \quad (13)$$

Nas expressões acima,  $h$  é uma constante de propagação da onda,  $a_{02}$  é uma constante arbitrária da solução da equação da onda, ambas obtidas pela aplicação das condições de contorno para o campo eletromagnético,  $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$  é a função de Hankel de 1ª Espécie de Ordem  $n$ ,  $z$  é a coordenada axial,  $k_{c2}^2 = \mu_{m2}\epsilon_2\omega^2 + i\mu_{m2}\sigma_2\omega$ , onde  $\mu_{m2}$  é a permeabilidade magnética do meio poroso,  $\epsilon_2$  é a permissividade elétrica do meio poroso,  $\omega$  é a pulsação da onda eletromagnética e  $\sigma_2$  é a condutividade elétrica do meio poroso.

**Modelo Numérico.** O modelo numérico considerado utiliza as equações que representam o processo de aquecimento no reservatório discretizadas pelo Método das Diferenças Finitas, com formulação de volume de controle, conforme apresentado por Patankar (1980). Para a resolução do sistema de equações foi utilizada uma formulação totalmente implícita. A solução do sistema não linear de equações discretizadas, composto por  $3N$  equações e  $3N$  incógnitas, onde  $N$  é o número de células, foi obtida iterativamente a partir da aplicação do Método de Newton-Raphson. Todos os resultados que serão apresentados a seguir estão convergidos em termos das discretizações espacial e temporal.

## ANÁLISE DE RESULTADOS

**Parâmetros Utilizados na Simulação.** A solução numérica do modelo termofluidodinâmico desenvolvido foi obtida utilizando-se parâmetros físicos característicos dos campos de óleo pesado do Nordeste do Brasil, tendo o campo de Fazenda Belém, situado na Ceará, servido como base para o levantamento dos dados necessários à simulação.

Como não existem medições de propriedades térmicas dos reservatórios brasileiros, os valores dos parâmetros condutividade térmica do meio poroso e calor específico da rocha e dos fluidos presentes, óleo e água, foram obtidos em literatura especializada (Prats, 1986) e em manual técnico do simulador térmico comercial STARS 95.00 (CMG, 1995).

A obtenção dos parâmetros elétricos mostrou-se uma tarefa difícil, pois somente a condutividade elétrica das formações possui medição em todo poço perfurado e encontra-se disponível em registros denominados perfis elétricos. No Brasil não são realizadas medidas em laboratório de permissividade elétrica em testemunhos saturados com fluidos do reservatório, e devido à inexistência desses dados, os valores utilizados na simulação foram obtidos de um manual técnico da AOSTRA (Vermeulen e Chute, 1989). No manual citado são fornecidas curvas de permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r$  ( $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ , onde  $\epsilon_0 =$  permissividade elétrica no vácuo) e condutividade elétrica efetiva  $\sigma_{ef}$  para valores de frequência de onda eletromagnética desde 60 Hz até 1 GHz, de três amostras constituídas de areia compactada artificialmente e saturadas com óleo e água. Os valores medidos apresentam um alto grau de dispersão, o que prejudica a escolha de valores representativos. Uma informação importante que pode ser obtida dos gráficos de  $\sigma_{ef}$  em função da frequência da onda eletromagnética é que a condutividade elétrica efetiva mantém-se praticamente constante na faixa de 60 Hz até cerca de 1 MHz. Tal fato viabiliza a utilização dos dados dos perfis elétricos, cujo registro é realizado com uma frequência de trabalho de 20 kHz.

Outra dificuldade encontrada residiu na determinação da permeabilidade magnética do revestimento, que por não ter sido ainda investigada, foi considerada constante para toda frequência de onda eletromagnética e igual ao valor reportado em artigo sobre aquecimento de poço com energia eletromagnética de alta frequência (Sayakhov et al., 1970). Cabe lembrar que essa dificuldade seria superada por medições experimentais.

Os parâmetros utilizados na simulação encontram-se listados na Tabela 1 apresentada a seguir.

### Campo Eletromagnético Gerado em Função da Frequência.

Os valores de frequência de onda utilizados nas simulações, conforme apresentado na Tabela 1, variaram de 60 Hz a 1 MHz. A determinação da potência total dissipada em calor no reservatório, para cada nível de frequência, está vinculada à corrente a ser fornecida. Para obtenção do par corrente-potência total dissipada a 60 Hz e 1 kHz, foi necessária a investigação com o modelo eletromagnético da potência total dissipada até um raio de reservatório de 20 quilômetros, com um número de 99 células. Nos casos de maiores frequências de onda, de 100 kHz a 1 MHz, entretanto, a investigação restringiu-se a um raio de reservatório de 6 quilômetros, com um número total de 30 células. A utilização, nesse caso, de um modelo analítico, mostrou-se mais matemática, pois a versão disponível do programa de computação algébrica *Mathematica (Standard Version 2.2 For Microsoft Windows)*, apresentou erro nas funções de Hankel  $H_0^{(1)}$  e  $H_1^{(1)}$  para valores de raio superiores a 60 metros.

Na Figura 2 encontram-se as curvas de distribuição radial da potência total dissipada para as diferentes frequências de onda utilizadas. De acordo com o gráfico, a penetração radial do efeito da dissipação térmica da energia eletromagnética aumenta com a redução da frequência da onda.

Tendo sido obtidos os vários pares corrente-potência dissipada, partiu-se para a simulação termofluidodinâmica do reservatório, considerando um raio de investigação de 225 metros. De acordo com os valores calculados dos componentes axial e radial do campo elétrico, o componente realmente relevante é o radial, sendo muito pequena a influência do componente axial no aquecimento do reservatório.

De acordo com a Figura 3, que apresenta a distribuição radial da potência dissipada por volume de reservatório para as várias frequências de onda analisadas, a penetração radial efetiva da dissipação térmica é muito reduzida, restringindo-se às cercanias do poço.



Tabela 1 - Parâmetros utilizados na simulação

Parâmetro	Valor
Raio do reservatório (m)	225
Raio do poço (m)	0,0889
Espessura da formação (m)	10
Porosidade (fração)	0,30
Saturação de água (fração)	0,25
Permeabilidade absoluta (D)	5
Pressão inicial (MPa)	4
Pressão de fluxo (MPa)	0,4
Temperatura inicial (K)	313
Viscosidade do óleo (cP)	
a 313 K	4.000
a 350 K	1.000
Massa específica (kg/m <sup>3</sup> )	
do óleo	970
da água	1.000
da rocha	2.650
Compressibilidade (1/MPa)	
do óleo	0,00029
da água	0,00029
da rocha	0
Calor específico (J/(kg K))	
do óleo	2.000
da água	4.182
da rocha	800
Coeficiente de expansão térmica (1/K)	
do óleo	0,00003
da água	0,00003
Condutividade térmica do reservatório (W/(m K))	1,8
Condutividade elétrica efetiva (S/m)	
do revestimento	3,4x10 <sup>6</sup>
do reservatório	0,05
Permissividade elétrica no vácuo (F/m)	8,8419x10 <sup>-12</sup>
Permissividade elétrica relativa (adimensional)	
do revestimento	1
do reservatório a 60 Hz	40.000
1 kHz	3.000
10 kHz	200
100 kHz	40
1 MHz	15,7775
Permeabilidade magnética no vácuo (H/m)	1,2566x10 <sup>-6</sup>
Permeabilidade magnética relativa (adimensional)	
do revestimento	2,72
do reservatório	1
Corrente (A):	
Potência de 20 kW a 60 Hz	105,645
1 kHz	110,200
10 kHz	112,493
100 kHz	101,624
1 MHz	57,262
Potência de 40 kW a 60 Hz	149,403
1 kHz	155,847
10 kHz	159,090
100 kHz	143,718
1 MHz	80,980
Potência de 60 kW a 60 Hz	182,980
1 kHz	190,872
10 kHz	194,844
100 kHz	176,018
1 MHz	99,180

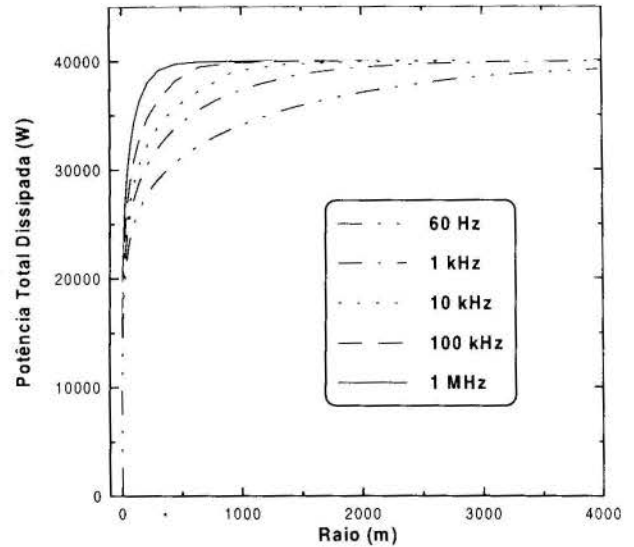


Figura 2 - Distribuição radial da potência total dissipada para frequências na faixa de 60 Hz a 1 MHz ( $P_{dr} = 40 \text{ kW}$ )

Cumpramos ressaltar nesse ponto que para 60 Hz os pares corrente - potência dissipada, isto é, 105,645 A - 20 kW e 149,403 A - 40 kW, são valores típicos dos dados de campo constatados no projeto piloto de aquecimento eletromagnético no Campo de Estreito/Rio Panon, Rio Grande do Norte, Brasil. A comparação entre os resultados da simulação para o campo de Fazenda Belém e os resultados do projeto piloto de Estreito/Rio Panon pode ser feita devido à similaridade das características dos dois reservatórios.

Análise da Antecipação de Produção. O aquecimento do reservatório tem como objetivo principal reduzir a viscosidade do óleo presente no meio poroso e facilitar assim o deslocamento desse fluido em direção ao poço de produção. Como consequência do processo, ocorre uma antecipação da produção de óleo em relação à produção primária prevista, considerada

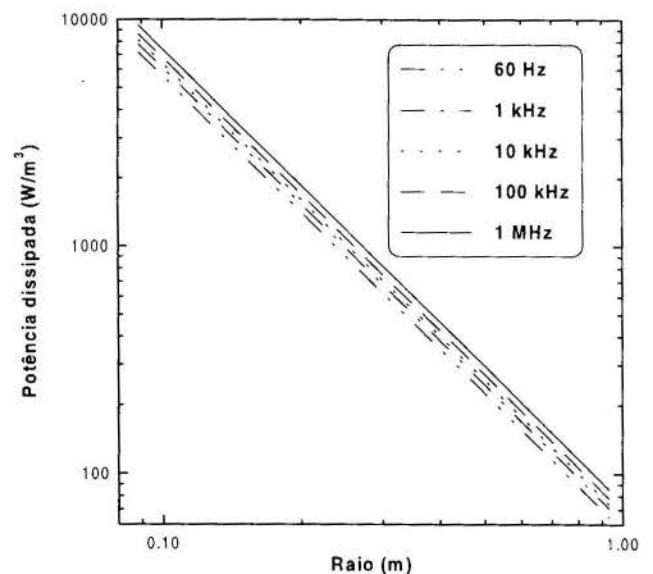


Figura 3 - Distribuição radial da potência dissipada por volume de reservatório, para a faixa de 60 Hz a 1 MHz ( $P_{dr} = 40 \text{ kW}$ )

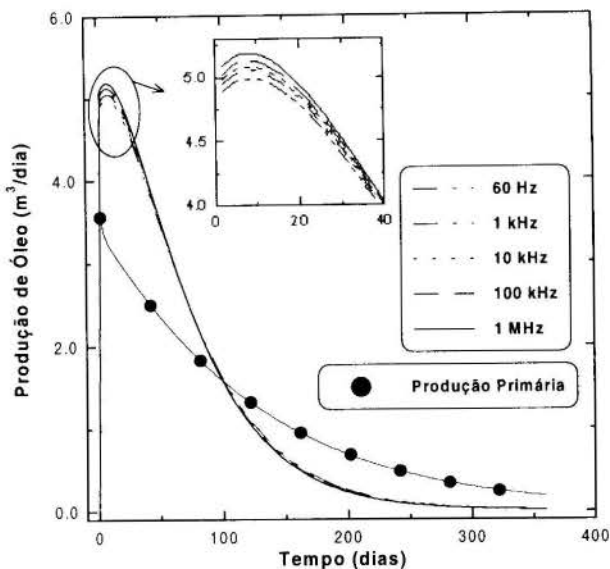


Figura 4 - Produção de óleo para as várias frequências de onda analisadas ( $P_{aj} = 40 \text{ kW}$ )

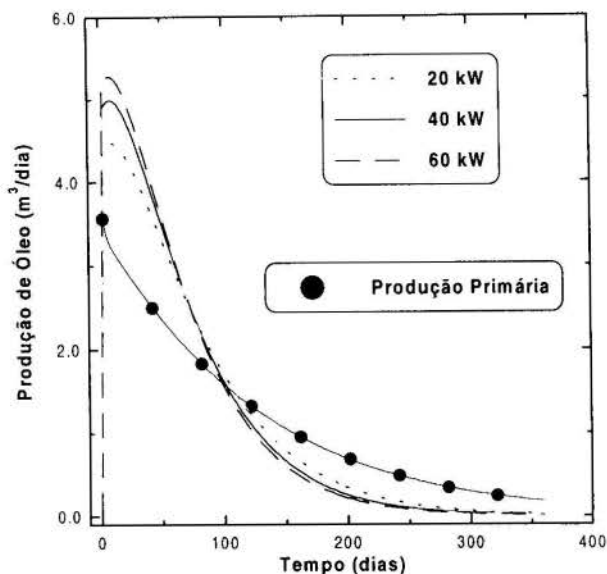


Figura 5 - Produção de óleo para 20, 40 e 60 kW ( $f = 60 \text{ Hz}$ )

neste trabalho como referência. As curvas de produção de óleo obtidas com as potências de 20 kW, 40 kW e 60 kW e frequências de onda na faixa de 60 Hz a 1 MHz, assim como a curva de produção primária do reservatório, encontram-se nas Figuras 4 e 5. Em todos os casos analisados a produção de óleo com aquecimento apresenta valores superiores à produção primária até cerca de 100 dias de produção. A partir desse ponto, entretanto, a produção primária supera a produção com aquecimento.

De acordo com os gráficos constantes na Figura 4, o acréscimo de produção de óleo em função do aumento da frequência de onda é modesto. Contudo, a nossa hipótese de não considerar o campo eletromagnético, nem a ocorrência de dissipação de energia eletromagnética nas camadas adjacentes, nem tão pouco a influência dessas camadas no campo eletromagnético ao qual o reservatório encontra-se submetido, mascarou a influência da frequência de onda nos resultados de produção de óleo. As premissas adotadas com respeito às camadas adjacentes, que via de regra apresentam condutividade elétrica superior à do reservatório, são mais verdadeiras quanto maior for a frequência da onda. Isto porque a transmissão da onda para as camadas adjacentes diminui com o aumento da frequência, devido ao aumento do fenômeno de reflexão das ondas eletromagnéticas.

O aumento da potência total dissipada, e consequente aumento da corrente elétrica injetada, acarreta, conforme o esperado, o acréscimo da produção de óleo, o que pode ser observado na Figura 5.

O perfil de temperatura obtido, para uma potência total dissipada de 40 kW e para as várias frequências de onda consideradas, com 360 dias de fornecimento de energia, é apresentado na Figura 6. De acordo com as curvas de temperatura calculadas, para qualquer nível de frequência de onda, o aquecimento do reservatório restringe-se às cercanias do poço, caracterizando um processo de estimulação térmica. Um outro ponto a ser ressaltado é que as temperaturas das células próximas ao poço superam a temperatura de vaporização da água em condições de reservatório ( $P = \text{Pressão de fluxo} = 0,04 \text{ MPa}$ ), valor esse em torno de 416,78 K. O simulador desenvolvido não considera vaporização de fluidos, contudo possui uma opção para desligamento do sistema de energização quando a temperatura na célula do poço atingir a temperatura de vaporização fornecida como dado de entrada. Entretanto, nesse caso, não foi utilizada

essa opção, pois o objetivo era verificar os níveis de temperatura atingidos sem restrições.

#### ANÁLISE ECONÔMICA SIMPLIFICADA

Uma abordagem muito simplificada da economicidade do processo, sem levar em conta os investimentos relativos à implantação do projeto nem o custo de manutenção do sistema, resume-se em calcular os valores da receita líquida atualizada acumulada para os vários esquemas de aquecimento e compará-los com os valores obtidos na produção primária. Para tal, é necessário definir um período de produção do reservatório. Entretanto, o modelo matemático desenvolvido considera a presença somente de óleo e água no meio poroso, o que é extremamente desfavorável à economicidade de qualquer projeto

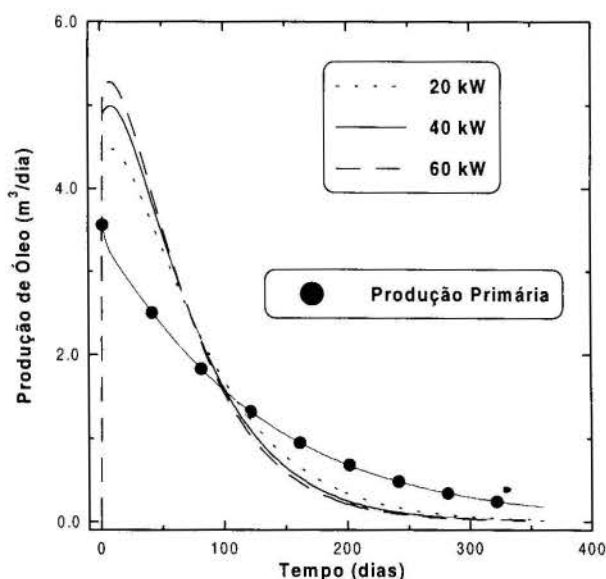


Figura 6 - Perfis de temperatura obtidos para as várias frequências de onda analisadas, considerando 360 dias de aquecimento ( $P_{aj} = 40 \text{ kW}$ )

de exploração, pois a presença de gás favorece a manutenção de pressão no reservatório. As curvas de produção obtidas, para todos os casos analisados, são bastante conservadoras, e indicam a necessidade de algum tipo de intervenção na exploração do reservatório, como por exemplo a injeção de fluido no intervalo de interesse para a manutenção de pressão. Levando em conta esse fato, foi estabelecido como período de produção o período correspondente a uma queda de pressão de 50% da pressão original na célula mais externa do reservatório, cujo baricentro encontra-se a 189,72 metros do poço.

Para o cálculo dos valores de receita líquida atualizada foram utilizadas as seguintes premissas:

- custo da energia elétrica: US\$0,059 por kWh (valor levantado na área do projeto piloto de aquecimento eletromagnético no Campo de Estreito/Rio Panon - dez/95)
- preço do barril de petróleo: US\$17,92 (dez/95)
- taxa de atratividade: 15% ao ano

A Tabela 2 apresentada a seguir fornece os resultados obtidos da análise econômica simplificada, para 30, 60, 90, 120 e 136 dias de aquecimento contínuo, considerando uma compressibilidade de óleo de  $0,00080 \text{ MPa}^{-1}$ , uma frequência de onda de 60 Hz e uma potência total dissipada de 40 kW. Na tabela mencionada a coluna 1 apresenta o período de aquecimento contínuo considerado. A coluna 2 fornece o período de produção relativo ao período de aquecimento contínuo, e correspondente a uma queda de pressão de 50% da pressão original na célula mais externa do reservatório. A coluna 3 apresenta a receita líquida atualizada com o aquecimento eletromagnético. A coluna 4 fornece a receita líquida atualizada da produção primária (sem aquecimento) relativa ao período de produção da coluna 2. A coluna 5 apresenta a receita líquida adicional correspondente à diferença entre as colunas 3 e 4.

De acordo com os valores apresentados na Tabela 2 acima, verifica-se que há ocorrência de um valor máximo de receita líquida adicional em torno de 90 dias de aquecimento.

## CONCLUSÕES

O aquecimento eletromagnético resultante da utilização de frequências de onda na faixa de 60 Hz a 1 MHz, mostrou-se um processo de estimulação térmica, restrito às cercanias do poço injetor de energia.

O aumento da frequência da onda eletromagnética acarretou um melhor aproveitamento da energia utilizada para o aquecimento efetivo da região próxima ao poço.

As premissas adotadas de não considerar o campo eletromagnético nas camadas adjacentes, nem a ocorrência de dissipação de energia eletromagnética nessas camadas, nem tão pouco a influência dessas camadas no campo eletromagnético ao qual o reservatório encontra-se submetido, prejudicaram uma análise confiável da influência da frequência de onda nos resultados de antecipação de produção de óleo.

De acordo com uma análise econômica simplificada, existe um período *ótimo* de aquecimento, a partir do qual a receita líquida adicional apresenta valores decrescentes. Esse período *ótimo* de aquecimento situa-se em torno de 90 dias para o caso analisado.

Os valores do par *corrente-potência* calculados pelo modelo eletromagnético desenvolvido, para uma frequência de onda de 60 Hz, encontram-se plenamente compatíveis com os valores verificados na área do projeto piloto de aquecimento eletromagnético do Campo de Estreito/Rio Panon.

Agradecimentos. Dois dos autores (P. L. C. Lage e C. M. Hackenberg) gostariam de agradecer o apoio obtido junto ao CNPq, processo nº 523777/94-9.

Tabela 2 - Valores de receita líquida adicional obtidos para 30, 60, 90, 120 e 136 dias de aquecimento contínuo ( $C_o = 0,00080 \text{ MPa}^{-1}$ ,  $f = 60 \text{ Hz}$  e  $P_{IT} = 40 \text{ kW}$ )

Período de Aquec. Contínuo (dias)	Período de Produção (dias)	Rec. Líq. Atualiz. Acum. c/ Aquec. (US\$)	Rec. Líq. Atualiz. Acum. da Prod. Prim. (US\$)	Receita Líquida Adicional (US\$)
30	186	65.816,32	52.883,77	12.932,55
60	152	64.840,46	45.712,86	19.127,60
90	140	64.148,32	42.953,16	21.195,16
120	136	62.976,17	42.007,62	20.968,55
136	136	62.354,73	42.007,62	20.347,11

## REFERÊNCIAS

- Cambra, S. T. B. O., 1996, "Aquecimento Eletromagnético de Reservatórios de Petróleo: Simulação Termofluidodinâmica." Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Química da Coordenação de Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- CMG - Computer Modelling Group, 1995, "STARS 95.00, User's Guide: Steam and Additive Reservoir Simulator, Gas, Solvent and Aqueous Additives", Calgary, Canada.
- Harrington, R. F., 1961, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields", New York: McGraw-Hill Book Company.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". New York: McGraw-Hill Book Company.
- Portela, C. M. J. C. M., 1994, Comunicação pessoal.
- Prats, M., 1986, "Thermal Recovery", 2nd edition, New York: Society of Petroleum Engineers & Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME.
- Saykov et al., 1970, "High Frequency Heating of Zones around the Wellbore." *Neft Khoz.*, 10. Outubro, p.40-52.
- Silva, S. B. P., 1993, "Análise da Aplicação de Radiofrequência como Processo Térmico de Recuperação de Petróleo." Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Química da Coordenação de Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Stratton, J. A., 1941, "Electromagnetic Theory", New York: McGraw-Hill Book Company.
- Vermeulen, F. E. e Chute, F. S., 1989, "Electrical Heating of Reservoirs" em AOSTRA Technical Handbook on Oil Sands, Bitumens and Heavy Oils, AOSTRA Technical Publication Series #6.

## SUMMARY

In this work a thermofluiddynamic model is developed to predict the production of viscous oils from reservoirs submitted to electromagnetic heating. The model is used to analyze the feasibility of this enhanced oil recovery method. The behavior of the reservoir temperature and of the oil production is presented for the wave frequencies in the range of 60 Hz to 1 MHz and for 20, 40 and 60 kW, together with a simplified economic analysis. It has been verified that the electromagnetic heating of oil reservoirs is a well stimulation process, and that there is an *optimum* period of economical heating.



## EFEITOS DA CORRENTE ALTERNADA NA PERMEABILIDADE RELATIVA



Rosângela Z. Moreno, Euclides J. Bonet e Osvaldo V. Trevisan  
Departamento de Engenharia de Petróleo  
Universidade Estadual de Campinas

### SUMÁRIO

*No presente trabalho são investigados os efeitos da corrente alternada no escoamento de óleo e água em rochas, refletidos nas curvas de permeabilidade relativa. O procedimento consistiu em aplicar corrente alternada (60 Hz) simultaneamente à aplicação de um gradiente de pressão. Os resultados obtidos para os ensaios básicos (0 V/cm) foram comparados com os resultados dos ensaios completos (2.8 V/cm, 3.3 V/cm e 4.0 V/cm). O aparato e procedimentos experimentais foram projetados para minimizar os efeitos térmicos ( $\Delta T = \pm 2^\circ C$ ) e isolar os efeitos eletroquímicos indesejados.*

### INTRODUÇÃO

A aplicação de corrente elétrica pode provocar, além dos fenômenos de eletrólise junto à superfície dos eletrodos, outros efeitos no corpo do meio poroso, como os efeitos eletrocinéticos, eletroquímicos, eletro-hidrodinâmicos e de aquecimento.

Efeitos eletrocinéticos são aqueles que envolvem campos elétricos existentes na superfície das fases e deslocamentos relativos entre as fases. Estes efeitos podem ser oriundos de quatro fenômenos: eletrosmose, eletroforese, potencial de corrente e potencial de sedimentação. Eletrosmose refere-se ao movimento de um eletrólito devido a uma diferença de potencial elétrico aplicada através do meio contendo o eletrólito. Eletroforese corresponde à migração de partículas de uma solução coloidal sob a influência de um campo elétrico. Potencial de corrente é um fenômeno inverso à eletrosmose e potencial de sedimentação é um fenômeno inverso à eletroforese.

Efeitos eletro-hidrodinâmicos são aqueles devidos às diferenças existentes entre as propriedades elétricas de fluidos coexistindo em um sistema. A aplicação de corrente elétrica pode provocar alterações nas tensões agindo sobre as interfaces, induzindo a deformações.

As alterações químicas no sistema em análise, devido à aplicação de corrente elétrica, são atribuídas aos efeitos eletroquímicos, enquanto que as mudanças nas propriedades do sistema, decorrentes do aumento de temperatura, são atribuídas aos efeitos de aquecimento.

A importância de cada um dos efeitos citados depende, entre outros fatores, das características do sistema em análise e das características do campo elétrico aplicado.

### LITERATURA

A aplicação de campos elétricos e eletromagnéticos em reservatórios de petróleo vem sendo sugerida e pesquisada por um número cada vez maior de pesquisadores e empresas de serviços que se dedicam à exploração e produção de óleo.

Segundo Pizarro (1989), na indústria de petróleo, a idéia de utilizar energia elétrica para levar calor até o reservatório data de 1865, quando Perry e Warner registraram a patente de um aquecedor de fundo de poço. Apesar disso, estudos experimentais, modelos teóricos ou relatórios de testes de campo, diretamente

relacionados ao aquecimento de reservatórios de petróleo por fluxo de corrente elétrica, começaram a ser publicados somente a partir da década de 70.

Em 1972, Gill registrou uma patente tratando da aplicação de potencial elétrico em poços de petróleo para melhorar a recuperação. O método consiste basicamente na aplicação de corrente alternada associada a aplicação de corrente contínua unidirecional na configuração catodo-poço produtor.

Albernethy (1976) desenvolveu um modelo matemático para avaliar as distribuições de temperatura e outros efeitos físicos resultantes da radiação da energia eletromagnética dentro de um reservatório de óleo.

A possibilidade de utilizar corrente elétrica alternada para aquecer regiões de um reservatório de óleo que normalmente não são penetradas por fluidos injetados foi investigada por Harvey & Arnold (1980). O método consiste em aplicar gradiente elétrico AC acompanhado de injeção de água. Eles estudaram, com algumas hipóteses simplificadoras, a distribuição de aquecimento resistivo perto do eletrodos e os resultados mostraram que grande parte de calor é dissipado perto do poço. Segundo os autores, a análise indicou que esta dissipação pode ser muito reduzida por injeção de água com salinidade substancialmente maior do que a da formação, enquanto o aquecimento está sendo executado.

O trabalho de Bennett & Bherer (1988) trata da aplicação de potencial elétrico em várias frequências através do revestimento e/ou tubulação do poço, para aquecer os fluidos do reservatório pela combinação dos mecanismos "ôhmico" e dielétrico. No trabalho, os autores apresentam resultados da aplicação do método em campos do Canadá, Estados Unidos e Brasil.

Pizarro & Trevisan (1990) apresentaram o desenvolvimento de um modelo numérico, projetado para simular a recuperação suplementar de óleo por aquecimento elétrico "in situ". O trabalho inclui, além de comparações de produção de óleo e consumo de energia para diferentes esquemas de eletrodo, resultados de simulação do projeto piloto em Rio Panon.

Além dos trabalhos citados, existem muitas publicações relacionadas ao aquecimento de óleo por aplicação de corrente elétrica alternada.

A ocorrência de outros efeitos acoplados, decorrentes da aplicação de campo elétrico em rocha reservatório, tem sido bastante estudada para o caso de corrente contínua, dando-se ênfase ao fenômeno de eletrosmose.



Amba et al. (1964) estudaram os efeitos da aplicação de corrente contínua em amostras inconsolidadas, compactadas, contendo diferentes porcentagens e tipos de argila. O gradiente de tensão aplicado ficou na faixa de 0 a 7 V/cm. A célula de testes utilizada proporcionava um completo isolamento hidráulico entre a amostra e os compartimentos contendo os eletrodos, impedindo que os produtos das reações de eletrólise entrassem em contato com o corpo da amostra. Segundo eles, foram observados: aumento da permeabilidade hidráulica decorrente do tratamento eletroquímico, redução da tendência de as argilas absorverem água e incharem, variação da resistência da amostra com o tempo e aumento de vazão devido aos efeitos de eletromose e alteração na estrutura de poros.

Tikhomolova (1964) comparou a expulsão capilar (embebição vertical) com a expulsão eletrosmótica provocada pela superposição de um campo elétrico contínuo ao sistema.

Dando prosseguimento à mesma linha de pesquisa, em 1965, Grigorov e Tikhomolova publicaram resultados de testes realizados comparando-se embebição horizontal e eletromose.

Em 1970, Chilingar et al. apresentaram um estudo sobre os efeitos da aplicação de corrente contínua na permeabilidade de arenitos. Eles utilizaram amostras inconsolidadas compactadas sob duas condições de saturação: totalmente saturadas com solução aquosa e contendo solução e querosene. Os efeitos eletroquímicos, decorrente da eletrólise, foram suprimidos isolando-se hidráulicamente, do corpo da amostra, o compartimento contendo os eletrodos. Os resultados indicaram um aumento na permeabilidade efetiva à água e ao querosene, após o tratamento elétrico. A aplicação de corrente contínua, durante o deslocamento à pressão e vazão constantes, promoveu um aumento na permeabilidade relativa ao querosene.

Fleureau (1979) estudou a influência de um campo térmico ou elétrico nos fenômenos de interação sólido-líquido dentro do meio poroso. Seu trabalho inclui investigações sobre a influência de um campo elétrico no escoamento simultâneo de dois líquidos imiscíveis através do meio poroso.

Aggour & Muhammadain (1992) realizaram um estudo experimental para investigar os efeitos do campo elétrico contínuo na recuperação de óleo, produção de água e razão água/óleo durante a injeção de água. Eles utilizaram amostras de areia 30-40 mesh compactadas, óleo (28.7 API) e solução NaCl 30.000 ppm. Os gradientes foram aplicados na configuração catodo-injeção e anodo-produção e ficaram na faixa de 0.5 a 7.5 V/cm. Segundo os autores, a aplicação de gradiente elétrico DC resulta em um aumento na produção de óleo e redução de produção de água e razão água/óleo. Além disso, estes efeitos foram diretamente proporcionais ao aumento do gradiente elétrico aplicado e foram observáveis somente após a erupção de água. Em seus experimentos foram utilizados eletrodos encostados, de maneira que os resultados apresentados podem ser provenientes da ação conjunta da eletromose e alterações químicas decorrentes das reações de eletrólise. Segundo os autores, para os níveis de gradiente elétrico mais elevados, estavam presentes também efeitos térmicos.

Em uma publicação mais recente (1994), Aggour et al. investigaram os efeitos da eletromose na permeabilidade relativa de arenitos. Foram utilizados óleo árabe leve cru e solução NaCl 20.000 ppm. O gradiente aplicado foi inferior a 3V/cm e o catodo foi posicionado na extremidade de injeção. Segundo os autores, a aplicação de corrente elétrica contínua aumentou a permeabilidade relativa ao óleo e diminuiu a permeabilidade relativa à água, retardou a erupção de água e aumentou o período de fluxo bifásico, resultando em um aumento de recuperação final. Além disso, estas mudanças aumentaram com o aumento do gradiente elétrico aplicado.

Mota (1994) estudou os efeitos da corrente elétrica contínua na recuperação de petróleo, dando ênfase à ocorrência de eletromose e/ou alteração na estrutura das argilas devido ao tratamento elétrico. Ela realizou uma série de experimentos de laboratório em amostras lineares inconsolidadas compactadas saturadas com solução salina de 1.000 ppm e óleo (querosene, nujol ou óleo cru desidratado do Campo de D. João). A célula de testes utilizada era baseada naquela utilizada previamente por Amba et al. (1964). Dois tipos de configuração para aplicação de potencial elétrico foram testadas, a saber: catodo-produtor e catodo-injetor. Testes de medida de coeficiente eletrosmótico foram realizados para diversas condições de saturação (amostra totalmente saturada com água, amostra na saturação residual de água e amostra na saturação residual de óleo), além de testes de deslocamento para levantamento das curvas de permeabilidade relativa e recuperação de óleo. Segundo Mota, a passagem de corrente elétrica DC para o sistema solução salina-óleo de D. João resultou em um aumento de recuperação de cerca de 15% do volume de óleo original em ambas as configurações testadas, bem como retardamento da erupção de água e redução dos volumes de água produzidos, efeito este bem mais acentuado na configuração catodo-injetor.

Em outro trabalho recente, Bezerra et al. (1995) examinaram, a nível microscópico, gotas de óleo imersas em água em contacto com vidro e lâminas de rocha. Eles observaram nucleação e crescimento de bolhas na fase água quando o sistema era submetido a aplicação de corrente contínua ou alternada. O movimento de tais bolhas promoveu um novo padrão de fluxo no movimento de fluidos e também induziu emulsificações das gotas de óleo, mudando completamente a mobilidade relativa dos fluidos.

No presente trabalho são investigados os efeitos da aplicação de corrente alternada no escoamento de óleo e água em rochas reservatório, minimizados os efeitos térmicos. A investigação limitou-se à aplicação de corrente alternada de baixa frequência (60Hz), enfatizando as possíveis alterações do sistema fluido-meio poroso refletidas nas curvas de permeabilidade relativa.

## CONCEITOS BÁSICOS

Os valores de permeabilidade efetiva, à água ( $S_w=100\%$ ) e ao óleo (na saturação residual de água,  $S_{wi}$ ), apresentados neste trabalho foram determinados pela equação de Darcy, expressa por:

$$k = \frac{u \cdot \mu \cdot L}{\Delta P} \quad (1)$$

onde,

$k$  : permeabilidade [ $\mu\text{m}^2$ ]

$L$  : comprimento [m]

$u$  : velocidade média de fluxo na seção [m/s]

$\Delta P$  : gradiente de pressão [Pa/m]

$\mu$  : viscosidade [Pa.s]

As curvas de permeabilidade relativa à água e ao óleo foram determinadas a partir de dados coletados no efluente durante o teste de deslocamento. Os cálculos foram feitos através da técnica transiente desenvolvida por Johnson et al. (1959), cujas equações derivadas são:

$$k_{ro} = \frac{f_{o_2}}{d \left( \frac{1}{W} \cdot L_r \right) / d \left( \frac{1}{W} \right)} \quad (2)$$

$$k_{rw} = \frac{(1-f_{o_2})}{f_{o_2}} \frac{\mu_w}{\mu_o} k_{ro} \quad (3)$$



$$S_{w_2} = \bar{S}_w - f_{o_2} \cdot W \quad (4)$$

onde

$$\bar{S}_w = S_{w_2} + N_p \quad (5)$$

$$I_r = \frac{\left( \frac{u_w}{\Delta P} \right)}{\left( \frac{u_w}{\Delta P} \right)_{inicial}} \quad (6)$$

$$f_{o_2} = \frac{d\bar{S}_w}{dW} \quad (7)$$

$f_{o_2}$  : fração de óleo deslocada na extremidade de saída

$I_r$  : injetividade relativa

$k_{ro}$  : permeabilidade relativa ao óleo [ $\mu\text{m}^2$ ]

$k_{rw}$  : permeabilidade relativa à água [ $\mu\text{m}^2$ ]

$N_p$  : volume de óleo produzido acumulado, em volumes porosos

$S_{w_2}$  : saturação de água na face de saída

$S_{w_1}$  : saturação de água inicial

$\bar{S}_w$  : saturação média de água

$W$  : volume injetado acumulado, em volumes porosos

$u_w$  : velocidade média de fluxo de água na seção [m/s]

$\mu_o$  : viscosidade do óleo [Pa.s]

$\mu_w$  : viscosidade da água [Pa.s]

## PROCEDIMENTOS

**Aparato.** Para realizar os experimentos, foi projetada e construída a célula de testes apresentada na Figura 1. O projeto da célula é baseado naquele utilizado por Amba et al. (1964). Os eletrodos são isolados hidraulicamente da amostra, evitando a interferência dos produtos resultantes das reações de eletrólise no corpo da mesma. Este isolamento é proporcionado por discos de esferas de vidro saturados com "agar", os quais proporcionam contato elétrico entre as câmaras contendo os eletrodos e a amostra. Os discos de esfera de vidro com agar também tem a função de difusor, ou seja, em vez de câmaras<sup>1</sup>, a injeção e produção de fluidos é feita através de capilares dispostos no centro destes discos.

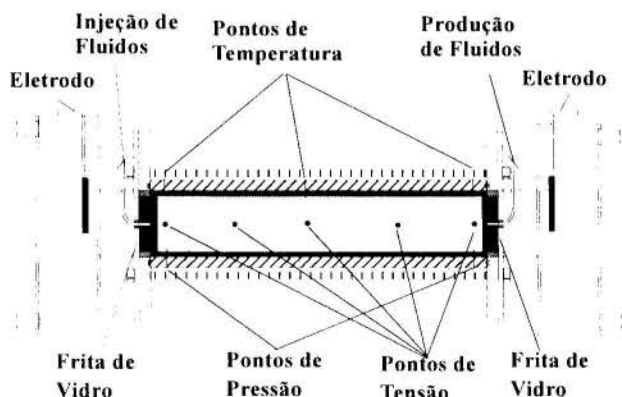


Figura 1 - Célula de Medição com Eletrodos Isolados

Na montagem do aparato, a célula de testes é conectada à garrafas de água e óleo pressurizadas e o conjunto é mantido em um banho termostatizado como apresentado na Figura 2.

<sup>1</sup> como projetado por Amba (1964).

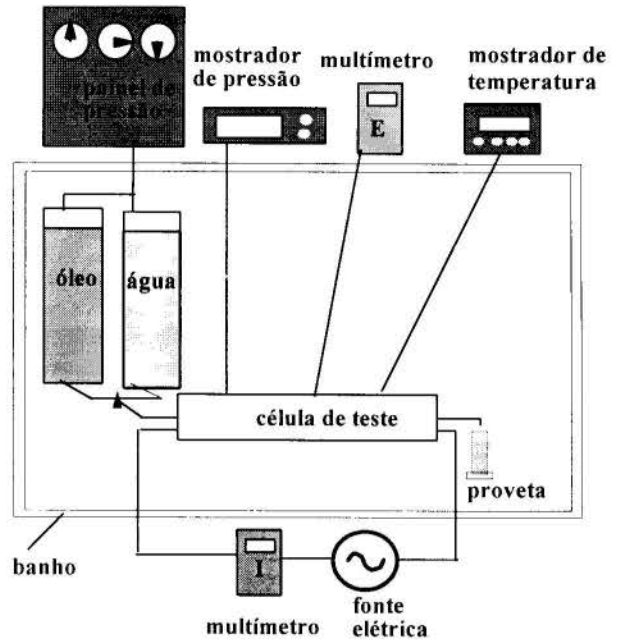


Figura 2 - Desenho Esquemático do Aparato Experimental

Um painel indicador-regulador de pressão da CORE LABORATORIES, modelo 5120-062 foi utilizado para manter e controlar a pressão de injeção nas garrafas. Como fonte de tensão, utilizou-se energia elétrica da rede comum (60 HZ, 127 V) ou energia fornecida por um variac (60 HZ, 0 a 240 V). Para medir corrente e tensão aplicadas foram utilizados multímetros Minipa ET-2001 e ATP HI-TEK 3500. A diferença de pressão no corpo da amostra foi registrada por um transdutor Validyne com placa de  $0.84 \times 10^5$  Pa (12.5 psi) conectado a um registrador linear modelo RB e as medidas de temperatura foram feitas através de termopares tipo J conectados a um mostrador digital marca COEL, modelo URI-8. As cabeças dos termopares foram pintadas com resina para isolá-los do campo elétrico aplicado, sendo registradas apenas tensões elétricas provenientes da variação de temperatura.

**Preparação das amostras.** As amostras foram fabricadas com areia 35-140 mesh e 10% de argila. O procedimento de preparação das amostras consta das seguintes etapas: a mistura de areia é colocada em um tubo de polietileno, de 38.1 mm de diâmetro e cerca de 31.0 cm de comprimento (L), previamente preparado para medidas de pressão, tensão e temperatura. Discos de meio poroso consolidado são posicionados nas extremidades deste tubo para conter a mistura de areia. Após a colocação da mistura no tubo de polietileno e posicionamento de apoios centralizadores e discos de contenção, a amostra é colocada em um tubo de latão confeccionado com folhas calibre 30 e untado com vaselina. Duas rolhas de borracha engraxadas são colocadas nas extremidades do tubo de polietileno e o espaço anular do tubo de latão é preenchido com resina "epoxy". Todo o sistema é colocado em uma garrafa sob pressão até a cura da resina. O tubo de latão e as rolhas de borracha são retirados. Em seguida, medidas de permeabilidade ao gás ( $k_g$ ) são executadas, a amostra é saturada e, após a determinação da porosidade ( $\phi$ ), são posicionados os transdutores de pressão, termopares e fios de extensão para os eletrodos.

O processo de compactação utilizado é o mesmo adotado por Amba et al. (1964) e Chilingar et al. (1970), sendo utilizada neste trabalho uma pressão de confinamento de cerca de 800 psi (5.5 MPa). Os discos de contenção utilizados foram confeccionados com testemunhos da formação São Carlos, cuja permeabilidade ao nitrogênio ficou na faixa de 150 a 300 mD.

**Fluidos.** Foram utilizados solução de água salina diluída e óleo cru do campo de D. João.

**Procedimentos.** Inicialmente, a amostra foi saturada com solução salina concentrada e em seguida submetida à injeção de cerca de três volumes porosos ( $V_p$ ) de solução salina diluída. Somente depois deste procedimento realizavam-se as etapas de medida de permeabilidade à água ( $k_w$ ) e etapas posteriores, prosseguindo-se sempre com solução diluída. A saturação com solução concentrada foi adotada para evitar choque salino nas amostras confeccionadas com argila (Mota, 1994). A execução dos testes com solução diluída foi necessária para minimizar os efeitos de aquecimento decorrentes da passagem de corrente elétrica. Cada amostra foi submetida a seguinte sequência de operações.

- 1) determinação da permeabilidade ao gás ( $k_g$ ).
- 2) saturação da amostra com água.
- 3) determinação da porosidade ( $\phi$ ).
- 4) posicionamento de transdutores de pressão, termopares e fios de extensão.
- 5) injeção de cerca de três volumes porosos para substituição da solução concentrada por diluída.
- 6) determinação da permeabilidade efetiva a água ( $k_w$ ).
- 7) deslocamento com óleo até a saturação irreduzível de água ( $S_{wi}$ ).
- 8) determinação da permeabilidade efetiva a óleo na  $S_{wi}$ .
- 9) deslocamento de óleo por água e determinação das curvas de permeabilidade relativa ( $k_{ro}$  e  $k_{rw}$ ).
- 10) determinação de óleo residual ( $S_{or}$ ) após recuperação.
- 11) injeção de água e aplicação de campo elétrico para recuperação suplementar após atingir  $S_{or}$ .

A permeabilidade ao gás foi medida com um permeabilímetro da CORE-LAB, utilizando-se gás nitrogênio. Uma vez que a permeabilidade determinada para a amostra diferia muito daquela medida para os discos de contenção, a permeabilidade específica para o leito poroso compactado foi determinada utilizando-se o conceito de equivalência em série.

Uma vez saturada, posicionava-se a amostra na célula de medição e iniciava-se o experimento.

Os valores de permeabilidade efetiva foram medidos somente depois de atingido regime de escoamento estabilizado, e os valores foram determinados através da equação (1). Os testes de deslocamento foram executados observando-se as recomendações e os procedimentos de cálculo apresentados por Johnson et al. (1959), bem como a determinação das curvas de permeabilidade relativa, efetuada através das equações (2) a (7).

Os testes foram realizados em ambiente de temperatura controlada (na faixa de 40 °C a 50 °C) por meio de uma estufa termostatizada.

## RESULTADOS

As propriedades dos fluidos necessárias para a determinação dos resultados aqui apresentados foram medidas para a faixa de temperatura utilizada nos testes e são dadas abaixo:

- Densidade x temperatura

$$\rho_o = 0,0069 T + 0,5188 \quad \text{óleo}$$

$$\rho_w = 0,0016 T + 0,9125 \quad \text{solução salina (1000 ppm)}$$

-Viscosidade x temperatura da solução salina (1000 ppm)

$$\mu_w = 0,0002 T^2 - 0,0318 T + 1,5399$$

-Viscosidade x temperatura do óleo (obtidas em laboratório)- veja Figura 3.

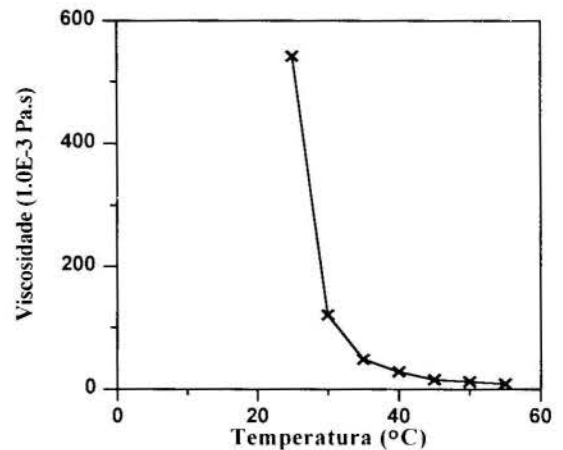


Figura 3 - Dados de Viscosidade x Temperatura do Óleo

As características permo-porosas das amostras e características dos testes são apresentadas na Tabela 1.

Os principais resultados obtidos nos experimentos executados com as amostras A2, A3 e A4, submetidas a aplicação de corrente alternada simultaneamente à injeção de água (ensaios completos) e com as amostras A1 e A5, sem aplicação de campo elétrico (ensaios básicos), são apresentados nas Figuras 4, 5 e 6.

Note-se que em todos os testes, a temperatura permaneceu aproximadamente constante, apresentando variação máxima de 2 °C.

Tabela 1 - Características Permo-porosas das Amostras e Características dos Testes.

Amostra	$L$ ( $10^{-2}$ m)	$V_p$ ( $10^{-6}$ m <sup>3</sup> )	$\phi$ (%)	$k_g$ ( $\mu\text{m}^2$ )	$k_w$ ( $\mu\text{m}^2$ )	$S_{wi}$ (%)	$k_o$ ( $\mu\text{m}^2$ )	$S_{or}$ (%)	Ensaio	$\Delta E$ ( $10^{-2}$ V/cm)	$I/A$ (A/m <sup>2</sup> )	$T \pm \Delta T$ (°C)
A1	26.4	89.7	29.8	1148	620	27.8	740	27.8	Básico	-	-	49±2
A2	27.4	92.7	29.7	993	993	38.0	1266	16.5	Completo	2.8	8.0	48±1
A3	27.1	89.7	29.1	999	897	30.1	1441	21.8	Completo	4.0	10.0	48±2
A4	26.3	91.6	30.5	864	799	32.4	1330	22.7	Completo	3.3	10.0	48±2
A5	26.9	94.4	30.7	936	1312	24.7	2138	28.0	Básico	-	-	46±2

No gráfico da Figura 4, pode-se observar que as amostras A2, A3 e A4, (ensaios completos), apresentaram maior permeabilidade ao óleo do que as amostras A1 e A5 (ensaios básicos). Entretanto, a aplicação de corrente elétrica alternada não afetou fortemente o comportamento das curvas de permeabilidade relativa à água das amostras testadas, resultando uma pequena redução nos experimentos tipo “ensaio completo”.

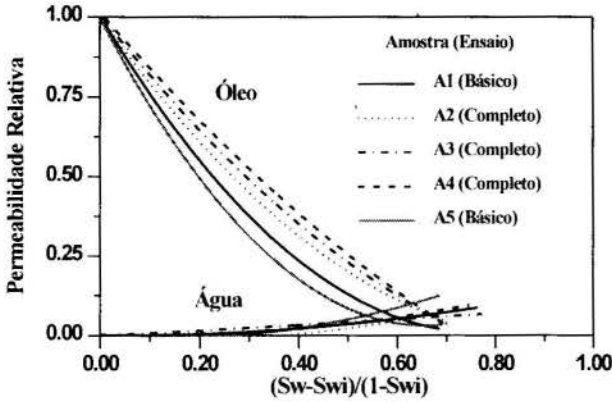


Figura 4 - Permeabilidades Relativas

Dados de recuperação adimensional de óleo em função do volume adimensional de água injetada são apresentados, de forma comparativa, no gráfico da Figura 5. Os testes completos (A2, A3 e A4) apresentaram maior recuperação do que os testes básicos (A1 e A5), com acréscimo de produção de aproximadamente 15%, 8% e 7% do volume original de óleo, respectivamente. Embora os gradientes elétricos aplicados às amostras A3 e A4 tenham sido mais elevados do que aquele aplicado à amostra A2, não foi observada melhoria proporcional na recuperação de óleo, sendo obtida recuperação ligeiramente maior no teste com gradiente elétrico aplicado menor.

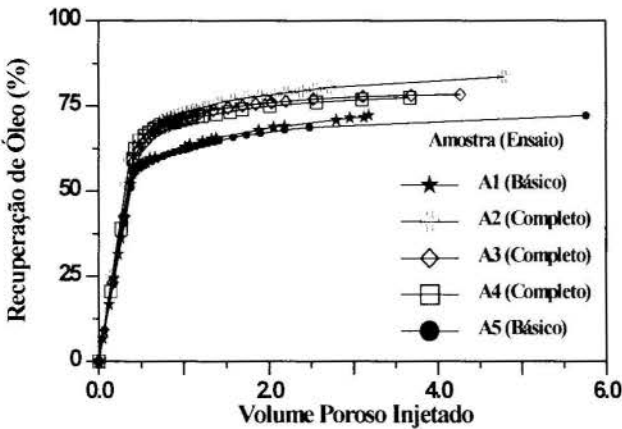


Figura 5 - Recuperação de Óleo

No gráfico da Figura 6, são apresentadas as curvas de razão água/óleo acumulada. Opostamente ao comportamento reportado para o caso de corrente contínua, a aplicação de corrente alternada não afetou o tempo de erupção de água no escoamento bi-fásico de água e óleo. Este resultado dá indicações da ausência de eletrosnose nas condições testadas.

Após atingida a saturação residual de óleo nos experimentos tipo “ensaio básico” (amostras A1 e A5), como uma extensão do teste, foi aplicada corrente elétrica alternada, simultaneamente à injeção de água, durante cerca de vinte horas consecutivas, não sendo observada produção adicional de óleo (veja Figura 7).

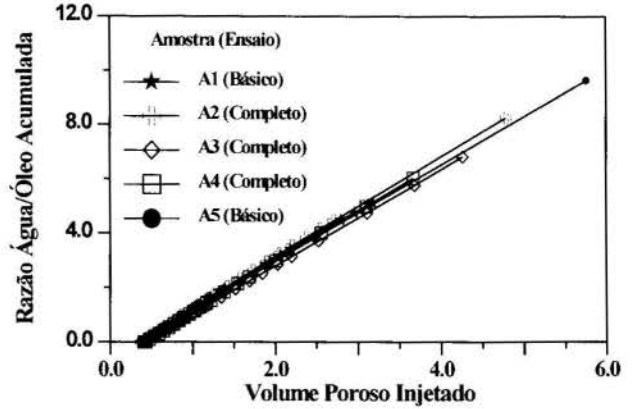


Figura 6 - Razão Água/Óleo Acumulada

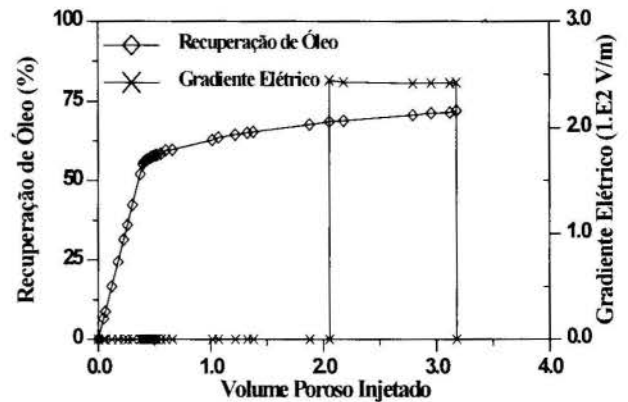


Figura 7 - Aplicação Tardia de Corrente Elétrica na Amostra A1

## CONCLUSÕES

A aplicação de corrente alternada 60 Hz simultânea à injeção de água produziu os seguintes resultados:

- Aumento significativo na permeabilidade relativa ao óleo e uma pequena redução na permeabilidade relativa à água.
- Aumento na produção final acumulada de óleo, em média de 10 % do volume de óleo original, em comparação à recuperação obtida apenas por deslocamento hidráulico.
- Nenhuma recuperação adicional foi observada quando a corrente elétrica foi superposta à injeção de água, após atingida a saturação residual de óleo.
- Não foi observada qualquer alteração no tempo de erupção de água decorrente da aplicação de corrente alternada, como relatado nos trabalhos com corrente contínua.
- A melhoria na permeabilidade relativa ao óleo e o aumento de recuperação observados não foram diretamente proporcionais à intensidade do campo elétrico aplicado.
- Os resultados obtidos apontam para a ausência de eletrosnose nas condições testadas, tanto pelo comportamento da produção de água, quando pela ausência de proporcionalidade entre a recuperação de óleo e o gradiente aplicado.
- O aumento na recuperação de óleo pode ser devido a fenômenos localizados provocados pela passagem de corrente alternada como aqueles reportados por Bezerra et al (1995).

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à PETROBRÁS (Petróleo Brasileiro S. A.) pelo suporte financeiro através de um contrato de pesquisa com a UNICAMP e pela permissão de publicar este trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Abernethy, E. R., 1976, "Production Increase of Heavy Oils by Electromagnetic Heating", *Tecnology*, pp. 91-97.
- Aggour, M.A & Muhammadain, A. M., 1992, "Investigation of Waterflooding under the Effect of Electrical Potential Gradient", *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 11, pp. 91-102.
- Aggour, M.A.; Tchelepi, H. A. & Al-Yousef, H. Y., 1994, "Effect of Electroosmosis on Relative Permeabilities of Sandstones", *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 7, pp. 319-322.
- Amba, S.A. & Chillingar, G.V. & Beeson, C.M., 1964, "Use of Direct Electrical Current for Increasing the Flow Rate of Reservoir Fluids During Petroleum Recovery", *Journal of Canadian Petroleum Technology*, Vol. 3 (1), pp. 8-14.
- Bennett, K. & Bherer, J., 1988, "Electrothermal Applications for Enhanced Oil Recovery and Producing Operations", Relatório.
- Bezerra, C.C., Cavagis, A.D.M. and Gallemebeck, F., 1995, "A Microscopic Study on the Effect of Electric Field on the Oil/Water/Rock interface. The Case Study of the D. Joao Field", First International Symposium on Colloid Chemistry in Oil Production: Asphaltenes and Wax Deposition, Rio de Janeiro, Nov. , pp. 26-29.
- Chilingar, G. V.; El-Nassir, A. & Stevens, R. G., 1970, "Effect of Direct Electrical Current on Permeability of Sandstone Cores", *Journal of Petroleum Technology*, pp 830-836.
- Fleureau, J., 1979, "Influence d'un Champ Thermique ou Électrique sur les Phénomènes d'Interaction Solide-Liquide dans les Milieux Poreux", Thèse présentée à L'École Centrale des Arts et Manufactures pour obtenir le titre de Docteur-Ingénieur.
- Gill, W. G., 1972, "Electrical method and apparatus for the recovery oil", U. S. Patent No. 3642066.
- Grigorov, O.N. & Tikhomolova, K.P., 1965, "Effect of Electro-osmosis on the Displacement of Kerosene and Petroleum Oil from a Porous Medium by Water", *Kolloidnyy Zhurnal*, Vol. 27 (3), pp. 334-337.
- Harvey, A. H. & Arnold, M. D., 1980, "Estimation of Heat Distribution in Selective Electric Reservoir Heating", *SPE*, pp. 965-968.
- Johnson, E. F., Bössler, D. P., & Naumann, V. O., 1959, "Calculation of Relative Permeability from Displacement Experiments", *Trans. AIME*, Vol. 216, pp. 370-372.
- Mota, R. O, 1994, "Efeitos da Corrente Continua na Recuperação de Petróleo", Tese de Mestrado, UNICAMP.
- Pizarro, J. O. S., 1989, "Simulação Numérica do Método de Recuperação de Petróleo por Aquecimento Elétrico", Tese de Mestrado, UNICAMP.
- Pizarro, J. O. S. & Trevisan, O. V., 1990, "Electrical Heating of Oil Reservoirs: Numerical Simulation and Field Teste Results", *Journal of Petroleum Engineering*, pp. 1320-1326.
- Tikhomolova, K.P, 1964, "Influência da Eletrose sobre o Processo de Deslocamento do Querosene pel Água em Meio Poroso", *Kholloydnyy Zhurnal*, Vol. 28 (4), pp. 513-517.

## ABSTRACT

This work addresses possible electric-alternating-current effects over two-phase flows, oil and water, in porous rocks. Results are analysed by the changes provoked in the relative permeability curves. The experimental procedure consisted in running displacement test with electrical fields (60 Hz) and pressure gradients applied simultaneously. The results of the basic runs, with no electric field (0 V/cm), were compared against the results of similar tests performed under active fields (2.8 V/cm, 3.3 V/cm e 4.0 V/cm). The apparatus and experimental procedure were designed to minimize thermal influences ( $\Delta T = \pm 2^\circ\text{C}$ ) and isolate undesired electrochemical effects.





**DESIGNING FLUID VELOCITY PROFILES FOR OPTIMAL PRIMARY OILWELL CEMENTING**



**Maria G. P. Silva & André L. Martins**  
 Setor de Tecnologia de Engenharia de Poço  
 Centro de Pesquisas Leopoldo Miguez de Mello (CENPES)/PETROBRAS  
 21949-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

**SUMMARY**

*Based on experimental data obtained on a large scale physical simulator, this paper presents a discussion on how fluid velocity profiles should be designed in order to achieve maximum success on an oilwell cementing operation. Accurate rheological characterization of the cement slurry as well as theoretical models for the description of non Newtonian flows in eccentric annuli were used as tools for the establishment of optimum dynamic operational parameters.*

**INTRODUCTION**

Activities in the Brazilian petroleum industry have lead to drilling under ever-more-challenging conditions, characterized by locations in remote areas, depleted reservoirs, high temperature and pressure fields and water depths as great as 2000 m.

For the exploitation of these fields to be viable, it became necessary not only to significantly reduce the costs of the wells, but to refine the conventional drilling and completion procedures and to introduce of new techniques whenever necessary. This refinement aims at minimizing the operational risks which could prevent the continuation of the well or reduce its productive life. Following a worldwide trend, one of the strategies adopted to reduce the risks inherent in oil exploration in hostile conditions has been that of drilling more highly deviated and horizontal wells.

Among the steps involved on drilling a well, the casing cementing after the end of each phase requires special attention (Silva and Martins, 1993). This operation consists on the proper displacement of a cement slurry through the annular region formed between the wellbore and the casing string. The main objectives of cementing are isolating different producing zones and supporting the well walls.

One big obstacle for the success of the cementing operation, is the solids cake formed at the well walls, resultant from the radial flow of the drilling fluid (generally a non Newtonian suspension) due to the pressure gradient existent between the wellbore and the rock formation. This cake, together with the drilled cuttings not properly removed from the well will make more difficult the contact between cement slurry and rock formation.

Other important aspect is the gelification of the drilling fluid when its circulation is interrupted. This fact may provoke the occurrence of stagnant regions in the annulus, specially in highly inclined wells where casing has the tendency to decentralization.

As can be seen, the optimization of the hydraulic design of the fluids used in the cementing operations is imperative to the obtention of high-quality sealing of well annuli, especially those which are highly deviated, where there are many other competing factors. Generally, when insufficient attention is given at this stage, the results shown by the acoustic logs are poor and successive corrections are required across the productive intervals.

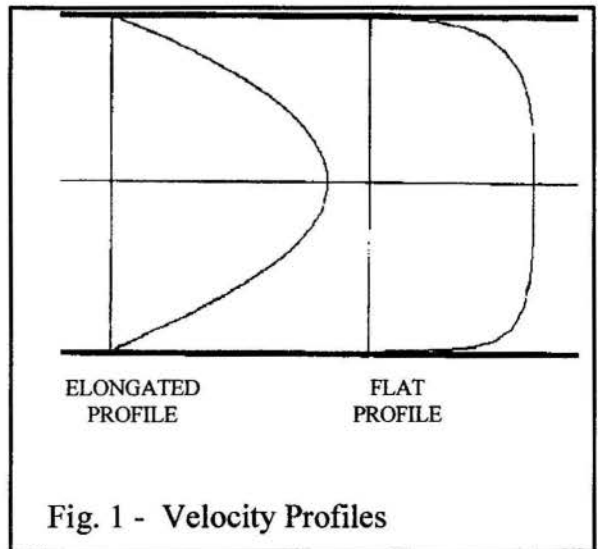
This paper was written with the aim of maximizing the chances of getting successful cementing operations of highly deviated and horizontal wells, using as a basis the success factors obtained by Silva and Barbosa (1994) from an analysis of the data from successful and unsuccessful cementing operations in the Campos

Basin. This analysis indicates that the aspects related to cementing hydraulics governs the chances of success, which is completely in accordance with many papers published on the subject (Keller et. al, 1983, Haut and Crook, 1986, Sauer, 1985).

**CEMENTING HYDRAULICS**

As shown previously by Silva and Barbosa (1994), the yield point of the drilling fluid, the annular velocity, which defines the displacement energy, and the centralization of the casing, are the variables which, when correctly adjusted between themselves and between the other variables of the program, greatly increase the chances of achieving success in a cementing operation. These variables, depending on how they are adjusted, facilitate or make more difficult, the substitution of the drilling fluid by the cement during the filling of the annulus. For the substitution of one fluid by the other to be complete, it is necessary for the slurry to be displaced with as homogeneous as possible a velocity profile and for it to be capable of overcoming the yield point of the drilling fluid which is in the annulus.

Fig. 1 shows 2 distinct forms of velocity profile for a fluid flowing in a circular pipe. The first is an "elongated" profile, which shows large velocity differences between the center and the walls. The



**Fig. 1 - Velocity Profiles**



second is a "flattened" profile and shows much more uniform velocities along the straight section, with little difference between the average and the maximum velocities. Naturally, the flattened profile is more adequate for a cementing operation, because it causes the fluid to flow at higher velocities near the hole walls. This favors the removal of the gelled portions of the drilling fluid and increases the bond between cement and formation and between cement and casing. (Nelson,1990).

The form of the velocity profile is influenced by the following factors:

- Flow regime: Whenever possible, turbulent flow is preferred because it creates flattened profiles and higher energy levels for removal of stagnant drilling fluid pockets.
- Rheology of the drilling fluid and of the cement slurry: The drilling fluid should not have a high yield point, as this makes its removal by the cement difficult. However, cement slurries, with pseudoplastic properties, tend to offer flattened profiles, as in the Power Law model slurries.

As the slurry rheology question is of fundamental importance and is related to other slurry properties (Silva and Miranda, 1993), it is very important that the rheological data be carefully analyzed. Hemphill et al. (1993) discusses the advantages of using more accurate rheological models, such as the Yield Power Law, defined by the following equation:

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n \dots\dots\dots (1)$$

- Flow geometry: Fig. 2, (Bourgoyne et al.,1986), shows typical profiles of fluid flowing in an annular duct. In this case, the opposite of the circular duct occurs, the point of maximum velocity is not in the center, but closer to the internal wall, which is the casing. This is a complicating factor, because it induces lower velocities at the formation, reducing the chance of good fluid removal and of a good bond. In this case, the velocity profile is a function exclusively of the radial coordinate, which is the distance from a given point to the annular walls:

$$V_z = V_z(r) \dots\dots\dots (2)$$

Additionally, the annulus is often eccentric. In these cases there will be a tendency for the fluids to flow preferentially on the wider side of the annulus and, depending on its rheological properties, there may be some regions with no flow (Azouz et al., 1992 and Lomba, 1994). Here, the velocity profile will be a function of the radial and angular coordinates:

$$V_z = V_z(r, \theta) \dots\dots\dots (3)$$

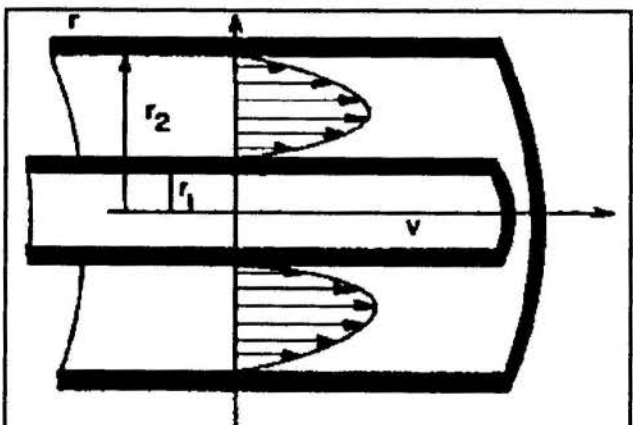


Fig. 2 - Velocity Profiles for laminar annular flow

Thus, the hydraulic optimization of a well cementing operation should combine all these factors in order to ensure the complete filling of the annular space by the cement slurry. The experiments here described are aimed at mapping ranges for the operational variables which will guarantee adequate flow profiles and, consequently, a cementing operation which has a high chance of success.

There is very little published on the application of the study of velocity profiles in eccentric annuli during the cementing of oil wells. Chin (1992) and Barton et al. (1994) developed theoretical models and presented them as tools for the optimization of cementing operations. However, none of the models has been validated experimentally.

**REDUCED-SCALE EXPERIMENTS**

**Experimental Apparatus.** The experimental part of this project was conducted in a large-scale laboratory, specifically in the LSF - Physical Simulation Laboratory - which presently occupies an area of 600 m<sup>2</sup> at the Petrobras Research Center. This laboratory consists of 6 physical simulators designed to reproduce a large number of physical phenomena which occur during the drilling and completion of wells. This project was conducted in the SFP - Down-Hole Simulator.

This is a qualitative simulator whose principal function is to perform primary cementing operations under downhole temperatures and pressures, displacing the slurry to an annulus formed between the outside of a pipe which simulates the casing and the formation, which can be real or artificial. This simulator has a similar slurry-mixing system to that found on commercial cementing units and also has a recirculating system to adjust the slurry weight. The drilling and completion fluids, washes, acid solutions and other fluids, are prepared in the LSF itself, and are displaced to the simulated well according to the test program.

The interior of the simulated annulus is a tube, connected to the cementing head, which is called the filtration jacket. This tube contains the artificial formation, the cemented annulus and the casing. A hoist allows the test section to be elevated to any angle between horizontal and vertical.

Some characteristics of the SFP simulator are:

External pipe diameter:	4.5in (0.1143 m)
Internal pipe diameter:	3.5in (0.0889 m)
Circulating temperature:	20 - 90° C
Curing temperature:	20 - 700° C
Pressure limit:	3000 psi (20665 Kpa)
Maximum pump rate:	200 gpm (0.126 m <sup>3</sup> /s)
Length of filtration jacket:	4 ft (1.2192 m)
Length of simulated well:	12 ft (3.66 m)
Combined tank volume:	3000 l (3 m <sup>3</sup> )

**Experimental Procedures for Tests in the SFP Simulator.**

A complete simulation consists of the following stages:

- i. Selection of the tube which will simulate the casing in order to preserve the same relationship between the diameters of the well and the casing as exist in the well being simulated;
- ii. Preparation of the artificial formation and placing it inside the filtration jacket;
- iii. Joining of the jacket to the casing, to the cementing head and to the bottom of the well;
- iv. Preparation of the drilling fluid;
- v. Setting the simulated well at the correct angle;
- vi. Circulation of drilling fluid under pressure, across the formation, simulating the drilling stage;
- vii. Addition of cuttings to the annulus;
- viii. Adjusting of the rheological properties and the circulation rate of the drilling fluid to simulate the hole conditioning stage;
- ix. Preparation of sufficient quantities of spacer and chemical wash to give the same contact time as in the field operation;
- x. Preparation of sufficient cement slurry to give the same contact time as in the field operation;

- xi. Displacement of the spacers and slurry at the same annular velocity as that in the real well;
- xii. Pressurization and heating of the cemented annulus;
- xiii. Setting of cement;
- xiv. Removal of the filtration jacket containing the formation, the cemented annulus and the casing to be cut into slices for visual examination of the quality of zonal isolation obtained;

**Physical Simulation Program.** Once the most influential success factors in obtaining good zone isolations had been determined from the data-base, the experimental program for the SFP - Bottom-Hole Simulator - was developed. This program aimed at documenting the changes which the following parameters caused on the result of cementing operations in vertical, highly deviated and horizontal wells: rheological parameters of the drilling fluid and the cement slurry; casing centralization; annular flow energy; shape of the velocity profile; and the magnitude of the maximum velocities developed in the narrowest and widest parts of the annulus. Casing centralization is quantified by a variable called stand-off (STO). Zero stand-off means that the annulus is fully eccentric while 100% indicates the concentric case.

This program consisted of 14 physical simulations, which were planned to reproduce some of the most relevant phenomena which occur in the cementing operation of vertical, highly deviated and horizontal wells, in annuli with greater or lesser amounts of solids which have not been removed by the drilling fluid. Table 1 summarizes the operational details and the properties of the fluids used in these simulations.

**Data Analysis Methodology.** The rheological data for the drilling fluids and cement slurries were characterized by the Yield Power Law, as defined in eq 1. Iterative methods were used to calculate the real shear rates of the fluids, in order to obtain maximum accuracy in the calculations. (Martins et al. 1994).

From these rheological parameters and from the other relevant hydraulic variables (pump rate, geometry and eccentricity), velocity profiles were generated for the slurry to be used in each of the simulations using the computer program developed by Azouz et al. (1992). This program gives the numeric solution for laminar flow of a Yield Power Law fluid in an eccentric or concentric annulus. From these profiles, the following quantitative data were obtained and summarized in table 1:

- Maximum velocities in the narrowest and widest parts of the annulus: As the velocity profile is not uniform in the angular coordinate, it is necessary to perform a separate analysis of the flow in the narrow and wide sections.
- Degree of flattening of the profile in the narrow section: This is defined as the ratio between the flattened top of the profile and the length of the profile base, as illustrated in Fig. 3:

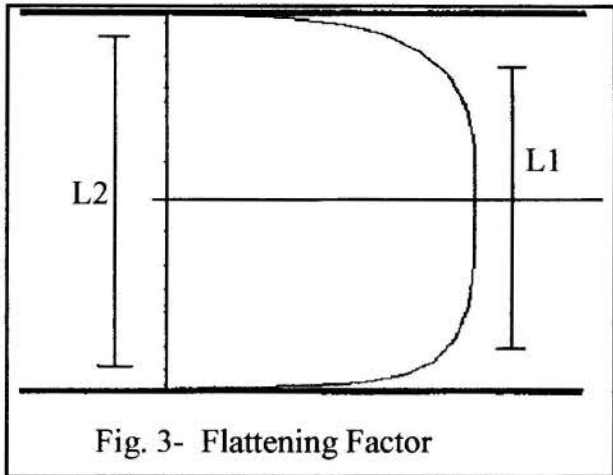


Fig. 3- Flattening Factor

$$\text{Flattening Factor (\%)} = \frac{L_1}{L_2} \times 100 \dots \dots \dots (4)$$

Thus, a degree of flattening of 100% means that all the points on the straight section have the same velocity, so the average velocity is equal to the maximum velocity. A value of 0%, however, refers to a profile where only one point has the maximum velocity, which is the case of newtonian fluids. Thus, the greater the degree of flattening, the greater the average velocity will be in the section.

The two factors previously described give an idea of the potential usefulness of velocity profiles in the interpretation of the phenomenon of the substitution of the drilling fluid by cement slurry in an eccentric annulus.

**DISCUSSION OF REPRESENTATIVE TEST RESULTS**

**Simulation 1.** In this simulation, performed in the vertical position, the drilling fluid in the well had low yield point and gel, which theoretically facilitates the obtention of satisfactory zone isolations. The slurry was displaced with a theoretical annular velocity of 0.41 m/s. However, due to the high degree of decentralization of the casing (STO = 55%), the maximum velocity on the narrowest side of the annulus was only 0.09 m/s, clearly insufficient to drag clear the stagnant drilling fluid accumulated there. Fig. 4 shows the significant differences between the velocities developed in the annulus. The experimental validation of the theoretical velocity profiles is shown in the same figure, where channeling can be observed in the narrower part of the annulus.

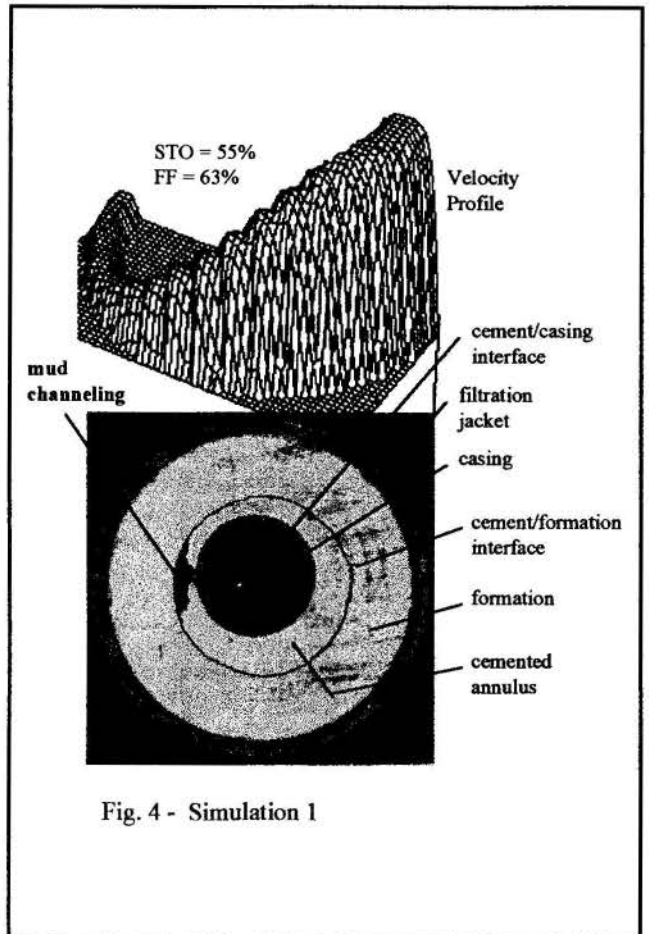


Fig. 4 - Simulation 1

TABLE 1 - VARIABLES SIMULATED IN THE TESTS IN THE SFP SIMULATOR

Variables	Sim 1V	Sim 2V	Sim 3V	Sim 4V	Sim 5V	Sim 6V	Sim 7I	Sim 8I	Sim 9I	Sim 10I	Sim 11H	Sim 12H	Sim 13H	Sim 14H
GS <sub>DF</sub>	1.9	2.4	16.3	15.3	15.3	15.8	7.7	15.3	9.6	13.4	5.7	4.8	4.8	18.2
YP <sub>CS</sub> - YP <sub>DF</sub>	5.7	1.9	-1.4	-3.8	3.8	12.4	3.8	-29.7	-8.1	-20.1	1.0	6.7	25.4	7.2
Va <sub>theoretical</sub>	0.41	0.41	0.41	1.78	1.78	1.78	1.73	1.68	1.68	1.68	1.27	2.54	4.01	2.03
Va <sub>narrow</sub>	0.09	0.33	0.13	1.54	0.52	0.06	0.98	0.54	34.8	15.2	171.2	180.2	668	78
FF	63	19	74	40	40	70	23	24	20	37	0	27	48	10
STO	55	80	70	80	90	46	70	50	40	30	84	60	50	43
Bond Quality	Mud Channel	Good Bond	No Bond	Good Bond	Good Bond	Good Bond	Good Bond	Mud Channel	Mud Channel	Mud Channel	Bottom Channel	Bottom Channel	Good Bond	Bottom Channel

**Simulation 2.** The rheological parameters of the drilling fluid and the slurry were practically the same as in the previous test. The major difference between the two tests is the standoff, which in this case was 80%. The better centralization caused a better velocity distribution between the narrowest and widest parts of the annulus. This led to satisfactory bonding at the interfaces, in spite of the elongated form of the velocity profile (FF = 19%).

**Simulation 3.** In this simulation, the drilling fluid in the well had a yield point greater than the "optimum" value suggested by the analysis of the data-base, and was gelled. The difference between the yield points of the slurry and the drilling fluid was negative. A further unfavorable factor which added to the previous two was the low velocity developed by the slurry in the narrow part of the annulus, insufficient to drag a fluid with a higher yield point than its own. Complete lack of bond was seen at the interfaces, even in the wider part of the hole.

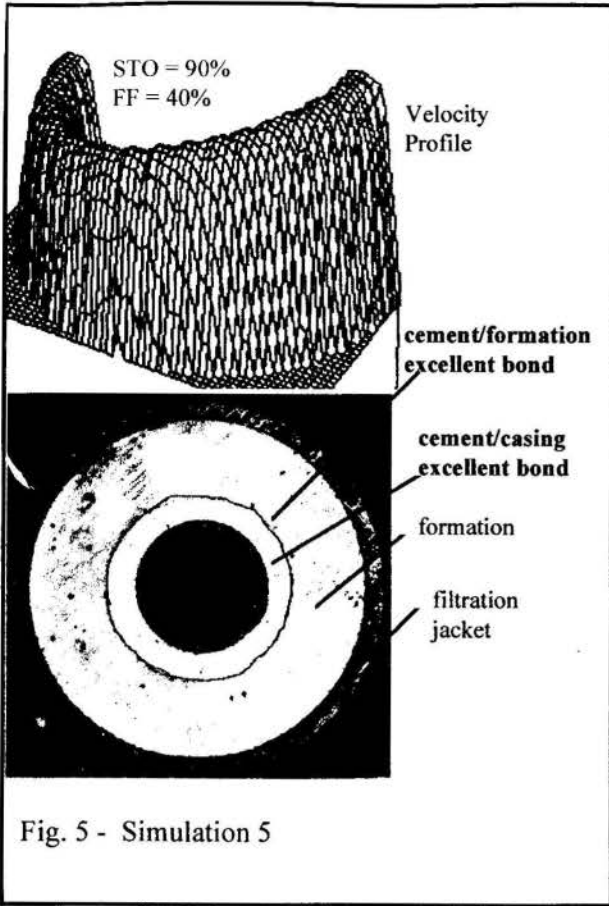
**Simulation 4.** The rheological properties of the drilling fluid were essentially the same as in the previous simulation. However, the better centralization of the casing (STO = 80%) and the increase of the theoretical velocity from 0.41 m/s in simulation 3 to 1.78 m/s in this case, meant the development of high annular velocities of 1.53 and 3.62 m/s in the two regions of the annulus. As a result, the negative difference in the yield points was not sufficient to lead to the failure of the cementing operation.

**Simulation 5.** Better casing centralization, given by a STO of 90%, led to an almost perfect distribution of annular velocities, as shown in Fig. 5. The difference of 3.8 Pa.s between the yield points of the slurry and the drilling fluid was another positive

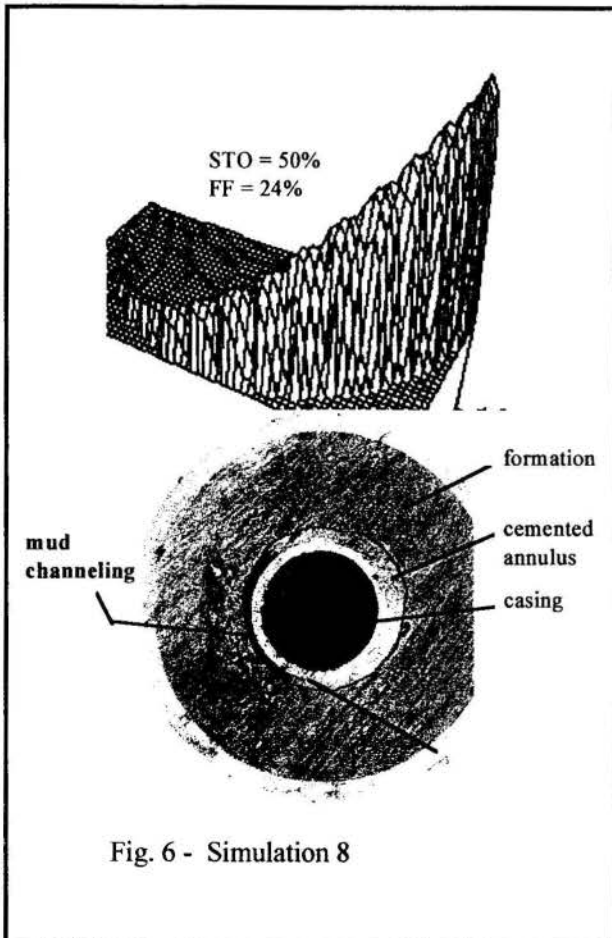
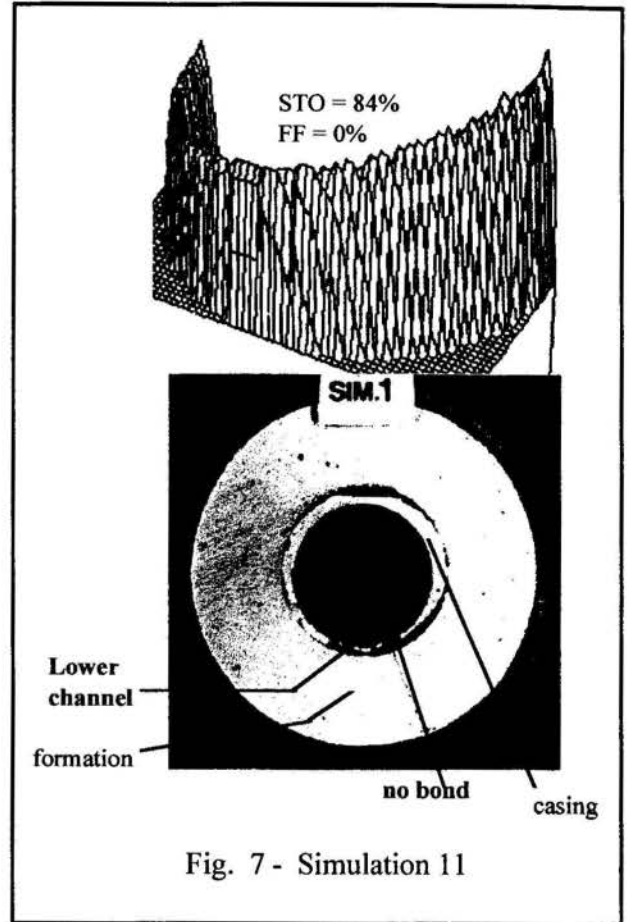
factor in the obtention of perfect bonding between the casing and the cement and between the cement and the formation. Fig. 5 shows the excellent annular sealing.

**Simulation 8.** The principal characteristic of this simulation was the incidence of several factors which negatively affected the result of the cementing operation: high values for the yield point (28.7 Pa.s) and gel (15.3 Pa.s) of the drilling fluid; a difference of -29.7 Pa.s between the yield points of the slurry and the drilling fluid; high degree of decentralization of the casing (STO = 50%); an elongated velocity profile (flattening = 24%). In spite of the velocity at the narrower side of the annulus having reached 0.53 m/s, this energy was not sufficient to allow the cement slurry used to push the stagnant drilling fluid. At the wider part of the annulus, the maximum velocity reached was 4.65 m/s, resulting in complete bonding between the interfaces, as might be expected. Fig. 6 shows the theoretical prevision and the validation of the inadequacy of the shape of the velocity profile to the planned cementing operation, respectively.

**Simulation 11.** This simulation was performed with the well placed horizontally. A bed of cuttings, which had been inadequately removed during the drilling and conditioning stages, was left between the casing and the well wall. In this case, the yield points of the slurry and of the drilling fluid were, respectively, 3.8 and 2.9 Pa.s. This generated a positive difference between them, which in itself would be beneficial to the cementing operation. In spite of the good centralization of the casing and the reasonably high annular velocities obtained both in the narrow and in the wide parts of the annulus, there was not complete removal of the solids mixed with gelled mud from the lower part of the annulus. The velocity profile,



extremely elongated in this case (FF= 0%), was seen in this case to not have a suitable form for pushing out the drilling fluid mixed with solids. The channel seen in the upper part was caused by the segregation of the solids from the slurry, resulting in the formation of water pockets, as shown in Fig. 7.



**Simulation 12.** The main difference between this simulation and the previous one was that the design velocity was doubled from 1.3 to 2.6 m/s. This generated actual velocities of up to 6.4 m/s in the widest part of the annulus. However, in the narrower part, where the casing was close to the walls of the hole (STO = 60%), the velocities were not high enough to drag free the solids deposited there, even though the slurry had a yield point twice that of the drilling fluid. The result was again unsatisfactory.

**Simulation 13.** This simulation had several advantages over the previous one. The first of these was the significant increase in the theoretical annular velocity, from 2.5 to 3.6 m/s. In spite of the standoff of 50%, velocities of up to 3.9 m/s were obtained in the narrowest part of the annulus. The flatter velocity profile, along with the difference of 26.3 Pa.s between the yield points of the slurry and of the drilling fluid, were positive aids in the obtention of satisfactory zone isolations.

**Simulation 14.** Due to the impossibility of obtaining the high displacement rates of the previous simulation, this simulation used a velocity of 2 m/s. The lack of success was due, largely, to the difficulty in centralizing the horizontal well used in this simulation. Consequently, the 50% standoff led to low velocities in the narrow part of the hole. Even with the yield point of the slurry greater than that of the drilling fluid, the solids remained in the annulus, mixed with the mud-cake. As could be expected, a poor cementing operation resulted.



## CONCLUSIONS

- The physical simulations performed in the SFP - Bottom Hole Simulator - confirmed the success factors deduced from analysis of the data base of cementing operations performed in the Campos Basin. These were: standoff; rheological properties of the drilling fluid and of the cement slurry; gelification of the drilling fluid and displacement velocity. Additionally, during the simulations, the velocity profile distribution and shape were shown to strongly influence the isolation quality.
- The velocity profiles generated by the computer program developed by Azouz et al. (1992) were validated experimentally, thus showing the effect of the velocity distribution in eccentric annuli on the result of the cementing operations.
- The results obtained in the physical simulator while varying the parameters shown in Table 1 showed that cement jobs should be designed in a way that optimizes the maximum number of variables possible, in an integrated manner, as the success of an operation does not depend on any one isolated variable.
- The planning of cementing operations should be done on a case-by-case method, because the optimum values of the variables should be integrated to the technical and operational requirements of each specific situation.

## RECOMMENDATIONS

- Yield point of the drilling fluid: this should be as low as possible without losing the solids carrying ability of the fluid; at least 4.8 Pa.s less than that of the cement slurry, whenever possible.
- Gel strength of the drilling fluid: as low as possible, to facilitate the substitution of the drilling fluid by the cement slurry. Values above 12 Pa.s should be avoided.
- Yield point of the cement slurry: lower values help the slurry to percolate behind highly decentralized casing. However, it is important to maintain the positive differential between the yield points of the slurry and the drilling fluid in the well.
- Casing centralization: a standoff greater than 70% should be used whenever possible, as the simulations showed significantly less successful cementing operations when the standoff dropped below 60%.
- Flattening factor: when this factor exceeds 40%, the chances of successfully sealing the annulus are greater; in the case of highly deviated and horizontal wells, attempts to increase this factor should be made, to help the slurry remove the solids left on the low side of the hole during the stages of drilling and hole conditioning.
- Theoretical annular velocity: endeavor to displace the slurry at the highest permissible annular velocity, principally when the well is highly deviated or horizontal, poorly centralized or drilled with muds which have a higher yield point than the slurry. Whenever possible, avoid using a maximum velocity on the low side of the hole below 0.76 m/s in wells of up to 60° inclination. For horizontal wells, this value should be increased significantly.
- Casing movement: although this was not considered during the program of physical simulations, rotation and / or reciprocation of the casing are recourses which should be used whenever the technical and operational conditions allow. This will increase the effectiveness of the adjustment of the success factors and consequently will significantly increase the chances of efficiently sealing the well annulus.

## NOMENCLATURE

- FF = flattening factor, %  
GS<sub>DF</sub> = drilling fluid gel strength, M/(L.T<sup>2</sup>), Pa.s.  
K = consistency index, M.T<sup>n-2</sup>/L, Pa.s.

- n = flow behavior index  
r = radial coordinate  
STO = standoff, %  
V<sub>a</sub> = annular velocity, L/T, m/s  
V<sub>z</sub> = axial velocity, L/T, m/s  
YP<sub>CS</sub> = cement slurry yield point, M/(L.T<sup>2</sup>), Pa.s  
YP<sub>DF</sub> = drilling fluid yield point, M/(L.T<sup>2</sup>), Pa.s  
γ = shear rate, T<sup>-1</sup>, s<sup>-1</sup>  
θ = angular coordinate  
τ = shear stress, M/(L.T<sup>2</sup>), Pa.s.  
τ<sub>0</sub> = yield point, M/(L.T<sup>2</sup>), Pa.s.

- Subscripts  
theoretical = theoretical  
narrow = narrow part of the eccentric annulus  
wide = wide part of the eccentric annulus

## REFERENCES

- Azouz, I., Shirazi, S. A., Pilehvari, A and Azar, J.J., 1992, "Numerical Simulation of Laminar Flow of Newtonian and Non-Newtonian Fluids in conduits of Arbitrary Cross Section", paper SPE 24406,  
Barton, N.A., Archer, G.L. and Seymour, D.A., 1994, "Computational Fluid Dynamics Improves Liner Cementing Operation", *Oil & Gas Journal*,  
Bourgoyne Jr., A.T., Chenevert, M.E., Milheim, K.K. and Young, J.J., 1986, *Applied Drilling Engineering*, SPE Print, Richardson, USA.  
Chin, W., 1992, *Borehole Flow Modeling in Horizontal, Deviated and Vertical Wells*, Gulf Publishing Co., Houston, USA.  
Haut, R.C. and Crook, R.J., 1986, "Primary Cementing: The Mud Optimizing for Maximum Displacement", *World Oil*.  
Hemphill, T., Campos, W. and Pilehvari, A., 1993, "Yield Power Law Model More Accurately Predicts Mud Rheology", *Oil & Gas Journal*, Aug. 23.  
Keller, S.R., Crook, R.J., Haut, R.C. and Kulakofsky, D.S., 1983, "Problems Associated with Deviated-Well Bore Cementing", *Proceedings, 58th Annual SPE Technical Conference, San Francisco, USA*.  
Lomba, R.F.T., 1994, "Turbulent Flow of Non-Newtonian Fluids Through Narrow Eccentric Annuli", Msc Thesis, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, (In Portuguese).  
Martins, A. L., Sá, C.H.M. and Amaral, M.S., 1994, "A Computer Program for Drilling Hydraulics Optimization Considering Realistic Rheological Models", *Proceedings, SPE European Petroleum Computer Conference, Aberdeen, UK*.  
Nelson, E. B., 1990, *Well Cementing*, Schlumberger Educational Services, Houston, USA.  
Sauer, C.W., 1985, "Mud Displacement and Cement Operations", paper SPE 18617.  
Siva, M.G.P. and Martins, A.L., 1993, "Physical Simulation of Vertical and Horizontal Well Cementing", *Proceedings, 12 Mechanical Engineering Brazilian Congress - COBEM, ABCM, Brasilia, Brazil* (In Portuguese).  
Silva, M.G.P., and Barbosa, C.B., 1994, "Identification and Quantification of Factors Influencing Oil Well Cementing Quality", *Technical Science and Petroleum - Drilling, 5, Petrobras* (In Portuguese).  
Silva, M.G.P. and Miranda, C.R., 1993, "Interdependence between Consistency, Apparent Viscosity and Pumpability for Oil-Field Cement Slurries", *Proceedings, III International Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Honolulu, USA*.





## POROUS MEDIA FLOW MODELING FOR PETROLEUM RESERVOIR SIMULATION

Marcos Heinzelmann Junqueira Pedras  
Marcelo J.S. de Lemos

Dept. De Energia, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA  
Centro Técnico Aeroespacial - CTA, 12228-900 - São José dos Campos  
São Paulo - Brazil, Tel:+55-12-341.2211, FAX:+55-12-341.7069



### SUMMARY

*This paper presents an overview of important mathematical methods applied to flow modeling in porous media. The main focus of this article is to present a review on the most important mathematical frameworks used in analyzing the flow of miscible components and different phases through a porous rock embedded with oil.*

### INTRODUCTION

The recovery and better use of existing oil fields is being considered lately by many countries due to its impact on internal economies. With exploration of new fields becoming prohibitively expensive and considering further that full experimentation in laboratories is an extremely difficult task, the subject of **Enhanced Oil Recovery** (EOR) has stimulated many research efforts towards the development of mathematical and numerical tools able to analyze existing oil reserves. Simulation of movement of a different phase (*such as water*) or of a different component (*such as a miscible tracer*) introduced through an **injection well** can provide important technical information to oil companies aiding their decision making process to pursue any further extraction on existing fields (see Figure 1 taken from Maliska, 1995).

With the above motivation, this article reviews important concepts and governing equations modeling flow through a porous material. Particular emphasis is devoted to the modeling approaches applicable to the simulation of petroleum reservoirs. Below, a short review of basic equations governing fluid flow is followed by a summary of some of the classical models for analyzing transport phenomena in porous media. Models applied to oil transport in reservoirs are discussed afterwards.

### FUNDAMENTAL CONSERVATION EQUATIONS

The basic conservation equations describing the flow of a fluid through an infinitesimal volume can be written in a compact form as,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho u_i \varphi - \Lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] = S_\varphi, \quad (1)$$

where  $\varphi$  is the general variable (not to confuse with the porosity  $\phi$  to be introduced later),  $u_i$  is the  $j$ -th velocity component,  $\rho$  is the fluid density, and  $\Lambda_\varphi$  and  $S_\varphi$  are the diffusion coefficient and source terms, respectively. The value of  $\varphi$  and its corresponding parameters ( $\Lambda_\varphi, S_\varphi$ ) take different forms according to the conserved quantity (mass, momentum, energy, chemical specie, turbulent kinetic energy, etc.). The

conservation laws recast into the form of Eq. (1) appear commonly in many texts documenting the use of the control-volume approach (e.g. Patankar, 1980). It is a convenient way to represent flow transport phenomena since all physical mechanisms not included in the total flux components can be treated by the source term  $S_\varphi$ .

When Eq. (1) is written for the case of mass conservation ( $\varphi = 1, \Lambda_\varphi = S_\varphi = 0$ ), one has:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

For flow of multiple fluid phases Eq. (2) can be rewritten for each phase in the form (Ishii, 1984),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_\gamma \rho_\gamma) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_\gamma \rho_\gamma u_{\gamma i}) = \Gamma_\gamma, \quad (3)$$

where  $\alpha_\gamma$  is the local residence fraction of phase  $\gamma$  and  $\Gamma_\gamma$  is the mass transfer rate at the interface per unit volume.

### BASIC MODELS FOR FLOW IN POROUS MEDIA

During the past few decades a number of text books have been written on the subject of porous media, including those referred to in Bear and Bachmat (1990), Collins (1961), DeWiest (1969), Dullien (1979), Kaviany (1991), Nield and Bejan (1991) and Scheidegger (1974). Advanced models documented in recent literature try to simulate additional effects such as variable porosity, anisotropy of medium permeability, non-conventional boundary conditions, flow multi-dimensionality, geometry complexity, non-linear effects and turbulence. All these flow complexities cannot be analyzed with the early uni-dimensional Darcy flow model. A complete review of all these works would be outside the scope of the present text and for a recent overview on the subject the work of Lemos (1996) is here mentioned for further study. Basic flow equations for single and multi phase systems are presented next.

**Continuity Equation.** When the balance equations compacted in Eq. (1) are written for flow through porous media, the

medium porosity has to be accounted for. In rock reservoirs there are three types of porous configurations, namely: a) **interconnected** or effective porous, through which the fluid can flow, b) **isolated** porous not contributing to flow neither to oil storage, c) **dead-end** porous interconnected only by one side, not contributing for flow but to fluid storage.

The porosity  $\phi$  is then defined as the ratio of interconnected porous volume  $dV_\phi$  to total volume  $dV_t$  (fluid + solid) as,

$$\phi = \frac{dV_\phi}{dV_t} \quad (4)$$

For a general porous material saturated with an homogeneous fluid one has,

$$\rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s \quad (5)$$

$$\rho u_i = \phi\rho_f u_{fi} + (1-\phi)\rho_s u_{si} \quad (6)$$

where  $\rho_f$ ,  $\rho_s$ ,  $u_{fi}$  and  $u_{si}$  are the fluid and solid densities and velocities, respectively. Introducing Eqs. (5) and (6) into (2) one has further,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi\rho_f u_{fi} + (1-\phi)\rho_s u_{si}] = 0 \quad (7)$$

Considering no interaction between solid and fluid and considering further a stationary porous matrix ( $u_{si} = 0$ ), Eq. (7) can be simplified and expressed in vector form as:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}_D), \quad (8)$$

where  $\phi$  is given by Eq. (4), the subscript  $f$  has been dropped for simplicity and  $\vec{u}_D$  is the superficial velocity, defined as the volumetric flow rate divided by unit of total cross-sectional area. The superficial velocity, also known as the Darcy velocity, is equal to the medium porosity times the fluid velocity ( $\vec{u}_D = \phi \vec{u}$ ).

**Superficial Velocity.** The well-known Darcy law (Darcy, 1856) of motion can be further given as,

$$\vec{u}_D = -\frac{K}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}), \quad (9)$$

where  $P$  is the pressure base on total area. The quantity  $K$  is referred to as the medium permeability, the unit of which is the *darcy*, defined as the permeability of a porous medium to viscous flow of 1 ml/(s.cm<sup>2</sup>) with 1 centipoise liquid viscosity under a pressure gradient of 1 atm/cm. A generalization of Eq. (9) to anisotropic flows requires that the permeability  $K$  be given a second-order tensor character.

The empirical modification own to Brinkman (1947) replaces Eq. (9) with,

$$\vec{u}_D = -\frac{K}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) + K \nabla^2 \vec{u}_D, \quad (10)$$

where the extra term is intended to account for distortion of the velocity profiles near containing walls.

The flow of fluids through consolidated porous media and through beds of granular solids are similar, both having the general function of pressure drop, vs. flow rate alike in form, i.e., transition from laminar flow to turbulent flow is gradual (Perry, 1973). For this reason, this function must include a viscous term and an inertial term. Therefore, an extension to Eq. (10) in order to account for the inertial effects was proposed by Forchheimer

(1901) in the form,

$$\vec{u}_D = -\frac{K}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) + K \nabla^2 \vec{u}_D - \frac{F' \vec{u}_D |\vec{u}_D|}{\nu}, \quad (11)$$

where  $F'$  is known as the inertia coefficient. The non-linear character of equation has direct implications on its numerical solution. For purely viscous flow, away from any containing walls, the last two terms on the right-hand side of Eq. (11) become negligible and the resulting equation is again Darcy's equation (Eq. 9).

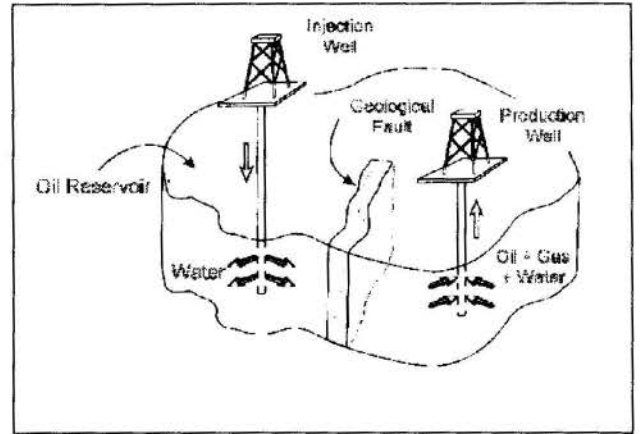


Figure 1 - Example of Enhanced Oil Recovery system.

**Homogeneous Fluid.** The consideration of single phase models for oil reservoir analysis has an important application on the simulation of reservoirs behavior. If one considers homogeneous fluid and the injection into the soil of a single phase flow of two miscible fluids, let's say water and a tracer, Eq. (8) for the overall mass conservation equation can be rewritten as,

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}_D) + q, \quad (12)$$

where  $\phi$  is again the porosity of the medium defined in Eq. (4),  $\vec{u}_D$  is the Darcy velocity given by Eq. (9) and  $q$  is the source term referent to the mass injection at the point in question, i.e., the total mass flow rate of the mixture of component  $\kappa$  and water per unity of reservoir volume.

Eq. (12) can be written in terms of density, for isothermal flow, assuming that  $\rho$  and  $\phi$  are functions only of pressure. Using the compressibility coefficients defined as,

$$\beta_\rho = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right), \quad (13)$$

$$\beta_\phi = \frac{1}{\phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial P} \right), \quad (14)$$

the l.h.s. of Eq. (12) can then be expanded as,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi\rho) = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (15)$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi\rho) = \phi \left( 1 + \frac{\beta_\phi}{\beta_\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (16)$$

In addition, the right hand side of Eq. (12) can be rewritten as,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho \frac{K_{ij}}{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} - \rho g_j \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{K_{ij}}{\mu} \left( \rho \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \rho^2 g_j \right) \right], \quad (17)$$

where, in tensor notation, the permeability in Eq (9) is identified by the two indexes  $ij$ . Also, for ease of notation, the mass injection rate  $q$  in Eq. (12) has been dropped. Eq. (17) can be further manipulated to give,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho \frac{K_{ij}}{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} - \rho g_j \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{K_{ij}}{\mu} \left( \frac{1}{\beta_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \rho^2 g_j \right) \right]. \quad (18)$$

Combining then Eq. (16) and (18) one gets,

$$\phi \left( 1 + \frac{\beta_\rho}{\beta_\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{K_{ij}}{\mu} \left( \frac{1}{\beta_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \rho^2 g_j \right) \right]. \quad (19)$$

For an isotropic and homogeneous medium with constant viscosity and  $\beta_\rho$ , one gets finally,

$$\frac{\mu}{K} \phi \beta \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^2 g_i), \quad (20)$$

where  $\beta$  is the total compressibility coefficient obtained by adding up  $\beta_\phi$  and  $\beta_\rho$ .

Eq. (12) can also be put in terms of pressure with the consideration of negligible fluid weight. Using Eqs. (13) and (14), the l.h.s. of Eq. (12) can be expanded as,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{P}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{P}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}, \quad (21)$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) = \phi \rho (\beta_\phi + \beta_\rho) \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \phi \rho \beta \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}. \quad (22)$$

Further, the r.h.s of Eq. (12) for a weightless fluid gives,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} \right), \quad (23)$$

or

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} \right) = \rho \beta_\rho \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} \right). \quad (24)$$

Using now Eqs. (22) and (24) one has,

$$\phi \beta \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \beta_\rho \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} \right). \quad (25)$$

For fluids having a small  $\beta_\rho$  or subjected to a mild pressure gradient, Eq. (25) gives finally,

$$\phi \beta \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} \right). \quad (26)$$

After reconsidering the term  $q$  in Eq. (12), assuming an isotropic and homogeneous medium with constant properties, an equation for the pressure field is obtained of the form,

$$\nabla^2 \mathcal{P} = \frac{\mu \phi \beta}{K} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \frac{\mu}{K \rho} q. \quad (27)$$

Eq. (27), once solved with the appropriate boundary conditions,

gives the distribution of pressure which, when applied in the Darcy's equation (Eq. 9), will in turn give the velocity field.

To obtain the mass concentration distribution for the component  $\kappa$ , one needs to perform the mass conservation analysis for the tracer, and the governing equation is,

$$\frac{\partial (\phi C)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \vec{u}_D C) = \frac{C_\kappa}{\rho} q, \quad (28)$$

where  $C$  is the concentration (mass of component  $\kappa$  over total mass),  $C_\kappa$  is the particular concentration value at the injection well and  $\vec{J}$  is the diffusion flux given by,

$$\vec{J} = -\phi D \nabla C; \quad D = \lambda |\vec{u}_D|, \quad (29)$$

where  $D$  and  $\lambda$  are the diffusion and dispersion coefficients, respectively. Once the velocity field is determinate by means of Eqs. (9) and (27), Eqs. (28) and (29) give the distribution of the tracer throughout the field.

**Multi-Phase Flow Systems.** For a three-phase flow of oil, water and gas through a fixed porous matrix, Eq. (3) can be written for each phase as,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_\gamma \rho_\gamma) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi S_\gamma \rho_\gamma u_{\gamma i}) = \Gamma_\gamma, \quad (30)$$

where  $S_\gamma$  is the volume fraction or saturation of phase  $\gamma$  (gas, water or oil), subjected to the condition,

$$\sum_\gamma S_\gamma = 1. \quad (31)$$

In the above equation set it is assumed that both liquid phases (oil and water) can only exchange mass with the gas. That is an appropriate assumption for considering the gas dissolved in either liquid. With that, the mass transfer rates for the water and oil are related to the gas by,

$$\Gamma_g = -(\Gamma_w + \Gamma_o), \quad (32)$$

where the subscripts  $g$ ,  $w$  and  $o$  refers to gas, water and oil, respectively.

Neglecting capillary pressure the Darcy velocity for each phase is,

$$u_{D\gamma i} = -\frac{K_{r\gamma i}}{\mu_\gamma} \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} - \rho_\gamma g_j \right). \quad (33)$$

In Eq. (33),  $K_{r\gamma i}$  represents the permeability of phase  $\gamma$  within the porous media. That can be written as a linear function of the medium permeability  $K_{ij}$  with the help of the relative permeability of phase  $\gamma$ ,  $K_{r\gamma}$ , defined in such a way that,

$$K_{r\gamma i} = K_{r\gamma} K_{ij}. \quad (34)$$

The relative permeability takes into account interfacial forces and is a function of the phase saturation  $S_\gamma$ .

The local phase velocity  $u_{\gamma i}$  is related to the Darcy velocity for each phase  $u_{D\gamma i}$  as,

$$u_{\gamma i} = \frac{u_{D\gamma i}}{\phi S_\gamma}. \quad (35)$$

Introducing Eqs (33) and (34) into (30) one gets the flow equation for phase  $\gamma$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_r \rho_r) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho_r \frac{K_{ry}}{\mu_r} \left( \frac{\partial P}{\partial x_j} - \rho_r g_j \right) \right] + \Gamma_r \quad (36)$$

The solution of Eq. (36), subjected to the Eqs. (31) and (32), requires the knowledge of the fluid behavior according to pressure, volume and temperature variation, or say, the PVT properties. Depending upon the complexity of the properties information, different models can be used. Two advanced models to solve the equation above are discussed below.

#### ADVANCED MODELS

The two important classes of models, namely the *Black-Oil Model* (restricted to a family of oils) and the more complex *Compositional Models* are here briefly commented upon. For the sake of clarity, a few words on the physical behavior of different mixtures seem timely.

Figure 2 presents the phase regions for two different oils showing the positions C1 and C2 for the critical points. Both oils can be treated by the so-called *Compositional Model*. The simpler *Black-Oil Model* should be employed only with oils presenting no back condensation, that is, for fluid having the greatest temperature in the phase change line corresponding to the critical temperature. In the Figure, oil number 2 does not present back condensation, or say, any isothermal expansion process occurring at temperatures above the critical point does not give rise to any condensation. On the other hand, oil number 1 can only be treated as Black Oil for temperatures below the critical point C1. With these ideas in mind, the two most used frameworks for oil analysis can be presented.

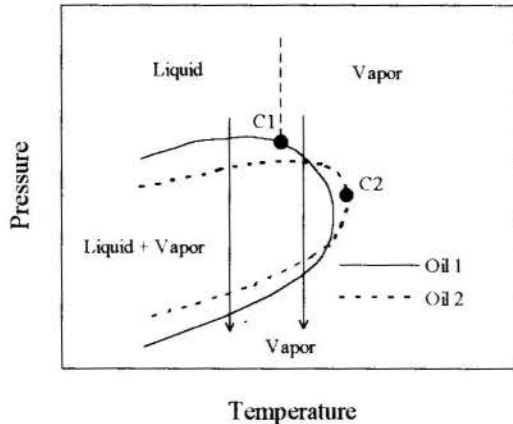


Figure 2 - Phase envelop for different oils.

**Compositional Models.** These models are based on equations of state (van der Waals, Redlich-Kwong, Peng-Robinson, etc.) and are applicable to all mixtures gas-water-oil (Muskat, 1949). They need data for the oil composition, such as contents of methane, ethane, propane, carbon dioxide, water, etc., for calculating the Pressure-Volume-Temperature relationships. Knowledge of the mass fraction of each phase composing the oil is also necessary. Due to these difficulties, Compositional Models are employed only when simpler analyses, such as the Black Oil Model, cannot be used.

In the compositional models the mass transfer rate for phase  $\gamma$  appearing in Eq. (36) is given by,

$$\Gamma_r = \phi \rho \left[ \frac{\partial \chi_r}{\partial t} + u_i \frac{\partial \chi_r}{\partial x_i} \right] \quad (37)$$

where the fluid density  $\rho$ , the fluid velocity  $u_i$  and the mass fraction  $\chi_r$  are define as,

$$\rho = \sum_r S_r \rho_r, \quad (38)$$

$$\rho u_i = \sum_r S_r \rho_r u_{ri}, \quad (39)$$

$$\chi_r = \frac{dm_r}{\sum_r dm_r} = \frac{\rho_r S_r}{\sum_r \rho_r S_r} \quad (40)$$

where  $m_r$  is the mass of phase  $\gamma$ . Substituting Eqs. (38), (39) and (40) into (37), and using further the superficial velocity given by Eq. (35), one has,

$$\Gamma_r = \phi \left( \sum_r S_r \rho_r \right) \frac{\partial \chi_r}{\partial t} + \left( \sum_r \rho_r u_{ri} \right) \frac{\partial \chi_r}{\partial x_i} \quad (41)$$

The mass fractions are functions of pressure and temperature. Their derivatives can be expressed as,

$$\frac{\partial \chi_r}{\partial t} = \frac{\partial \chi_r}{\partial P} \bigg|_T \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \chi_r}{\partial T} \bigg|_P \frac{\partial T}{\partial t} \quad (42)$$

and

$$\frac{\partial \chi_r}{\partial x_i} = \frac{\partial \chi_r}{\partial P} \bigg|_T \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi_r}{\partial T} \bigg|_P \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (43)$$

Substituting now Eqs. (33), (42) and (43) into (41), for isothermal flow one gets,

$$\Gamma_r = \frac{\partial \chi_r}{\partial P} \bigg|_T \left\{ \phi \left( \sum_r S_r \rho_r \right) \frac{\partial P}{\partial t} - \left[ \sum_r \rho_r \frac{K_{ry}}{\mu_r} \left( \frac{\partial P}{\partial x_j} - \rho_r g_j \right) \right] \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\} \quad (44)$$

Defining now M as,

$$M = \phi \left( \sum_r S_r \rho_r \right) \frac{\partial P}{\partial t} - \left[ \sum_r \rho_r \frac{K_{ry}}{\mu_r} \left( \frac{\partial P}{\partial x_j} - \rho_r g_j \right) \right] \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (45)$$

and recalling that,

$$\chi_g = 1 - (\chi_w + \chi_o) \Rightarrow \frac{\partial \chi_g}{\partial P} = - \frac{\partial (\chi_w + \chi_o)}{\partial P} \quad (46)$$

Eq. (30), together with Eqs. (44), (45) and (46), gives finally,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_r \rho_r) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho_r \frac{K_{ry}}{\mu_r} \left( \frac{\partial P}{\partial x_j} - \rho_r g_j \right) \right] = \frac{\partial \chi_r}{\partial P} \bigg|_T M \quad (47)$$

In Eq. (47) the variables  $\rho_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\phi$  and  $\chi_r$  are known functions of pressure obtained by the equation of state (isothermal flow).  $K_{ry}$  is a known function of  $S_r$  and media permeability. Therefore, the dependent variables in Eq. (47) are the saturation  $S_r$ , the pressure  $P$  and factor  $M$ , or say, there are five equations (Eqs. 31, 45 and 47) and five unknowns.

**Black-Oil Model.** This model is based on the assumption that an element of liquid (oil or water) carries a dissolved and volatile mass of gas (Aziz and Settari, 1980; Sharpe and



Anderson, 1991; Sharpe, 1993). For the liquid phases the volume formation factor  $B_\gamma$  and gas solubility ratio  $R_{s\gamma}$  are defined as,

$$B_\gamma = \frac{V_\gamma}{V_{\gamma std}}, \quad (48)$$

$$R_{s\gamma} = \frac{V_{g std}}{V_{\gamma std}}, \quad (49)$$

where  $V_\gamma$  is the liquid volume at flow conditions and the subscripts  $\gamma g$  and  $std$  refers to gas dissolved in  $\gamma$  and standard conditions, respectively. With Eqs. (48) and (49), the liquid density can be redefined as,

$$\rho_\gamma = \frac{\rho_{\gamma std} + \rho_{g std} R_{s\gamma}}{B_\gamma}, \quad (50)$$

The oil and water transport equations (Eq. 36) make use now of the density given by Eq. (50). The mass transfer rates  $\Gamma_\gamma$  represent the exchange of gas mass (volatile) in both liquid phases. With these assumptions, the gas equation can be written as,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \left( \frac{S_g \rho_g}{\rho_{g std}} + \sum_{\gamma=w,o} \frac{S_\gamma R_{s\gamma}}{B_\gamma} \right) \right] = \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\rho_g}{\rho_{g std}} \frac{K_{gij}}{\mu_g} \left( \frac{\partial P}{\partial x_j} - \rho_g g_j \right) \right] \\ + \sum_{\gamma=w,o} \frac{R_{s\gamma}}{B_\gamma} \frac{K_{\gamma ij}}{\mu_\gamma} \left( \frac{\partial P}{\partial x_j} - \rho_\gamma g_j \right) \end{aligned} \quad (51)$$

A further simplification in the model assumes no gas phase. Then, once again not considering capillarity effects, the unknowns in this case are the water and oil saturations (in addition to pressure). Calling  $q_\gamma$  the source term for the phase  $\gamma$ , the governing equations becomes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_\gamma}{B_\gamma} \right) = \nabla \cdot \left[ \lambda_\gamma (\nabla P - \rho_\gamma \hat{g}) \right] + \frac{q_\gamma}{\rho_{\gamma std}}, \quad (52)$$

where  $\lambda_\gamma$  is the mobility of the phase  $\gamma$  given by,

$$\lambda_\gamma = \frac{K K_{r\gamma}}{B_\gamma \mu_\gamma}. \quad (53)$$

In Eq. (53),  $K_{r\gamma}$  is the relative permeability of phase  $\gamma$  defined in Eq. (34). Equation (52) in addition to Eq. (31) form a closed system whose solution is usually done by resolving for pressure in an implicit fashion and then updating the saturation until final convergence is achieved.

## CONCLUDING REMARKS

This article reviewed the most common mathematical frameworks used to analyze the flow of a mixture through a porous soil embedded with oil. The subject of Petroleum Reservoir Simulation is stimulated by the increasing prices of exploration of new fields. Fundamental governing equations for continuous and porous media were presented, for single and two phase systems. For the particular case of petroleum flow, the

Compositional and Black Oil Models were discussed upon.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to Prof. Maliska for allowing the use of drawings from his recent work. They are also thankful to CNPq, Brazil, for financial support during the preparation of this work.

## REFERENCES

- Aziz, K. and Settari, A., 1980, "Petroleum Reservoir Simulation", Applied Sci. Publisher.
- Bear, J. and Bachmat, Y., 1990, "Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media", Kluwer.
- Brinkman, H.C., 1947, "A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles", *Appl. Sci. Research*, A1, pp 27-34.
- Collins, R.E., 1961, "Flow of Fluids Through Porous Materials", Reinhold, New York.
- Darcy, H., 1856, "Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon", *Victor Dalmond*.
- DeWiest, R.J.M., 1969, "Flow Through Porous Media", Academic Press, New York.
- Dullien, F.A.L., 1979, "Porous Media Fluid Transport and Porous Structure", Academic Press, New York.
- Forchheimer, 1901, "Wasserbewegung durch Boden", *Z. Ver. Dtsch. Zucker-Ind*, 45, 1782-1788.
- Ishii, M., 1984, "Two-Fluid Model and Hydrodynamic Constitutive Relations". *Nuclear Engineering and Design*, vol. 82, pp. 107-126.
- Kaviany, M., 1991, "Principles of Heat Transfer in Porous Media", Springer, New York.
- Lemos, M.J.S.de, 1996, "Recent Advances in Numerical Techniques Applied to Flow, Heat and Mass Transfer in Porous Media", *Proc. Intern. Conf. Porous Media Appli. Sci. Ind.*, Kona, Hawaii, June 16-21, USA.
- Maliska, C.R., 1995, "Computational Heat Transfer and Fluid Mechanics - Fundamentals and Generalized Coordinates" (in portuguese), Livro Técnico, Rio de Janeiro, Brazil.
- Muskat, M. 1949, "Physical Principles of Oil Production", McGraw-Hill, New York.
- Nield, D. and Bejan, 1991, "Convection in Porous Media", Sringler, New York, pp. 191-275.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Mc-Graw Hill.
- Perry, R.H., Chilton, C.H. (eds), 1973, "Chemical Engineers' Handbook", 5th Edition, McGraw Hill, New York.
- Scheidegger, A.E., 1974, "The Physics of Flow Through Porous Media", Univ. of Toronto Press, Toronto.
- Sharpe, H.N. and Anderson, D.A., 1991, "Orthogonal Curvilinear Grid Generation With Preset Internal Boundaries for Reservoir Simulation", *11th SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Anaheim, California, February.
- Sharpe, H.N., 1993, "Validation of an Adaptive, Orthogonal, Curvilinear Gridding" Procedure for Reservoir Simulation, SPE 25262, *12th SPE Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, February 28 - March 3.



## SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO: COMPARAÇÃO ENTRE AS METODOLOGIAS, TI, IMPES E AIM



**Francisco Marcondes**<sup>(1)</sup>, **Clovis R. Maliska**<sup>(2)</sup> e **Mário C. Zambaldi**<sup>(3)</sup>  
Departamento de Engenharia Mecânica Universidade Federal da Paraíba<sup>(1)</sup>  
58109-970 - Campina Grande - PB - Brasil  
Departamento de Engenharia Mecânica<sup>(2)</sup> Departamento de Matemática<sup>(3)</sup>  
Universidade Federal de Sta. Catarina 8040-900 - Florianópolis - SC - Brasil

### SUMÁRIO

*O presente trabalho apresenta uma comparação entre três metodologias de linearização das equações de simulação de reservatórios, a saber: IMPES - Implicit Pressure Explicit Saturation, TI - Totalmente Implícita e AIM - Adaptive Implicit Method. Discute-se também o critério de chaveamento de IMPES para TI e vice-versa. Emprega-se o modelo black-oil, bifásico (óleo-água). As equações são discretizadas empregando-se o método dos volumes finitos e utiliza-se malhas de Voronoi não-estruturadas para discretização do domínio físico.*

### INTRODUÇÃO

As equações de conservação de massa dos componentes óleo, água ou gás podem ser consideradas hiperbólicas para a saturação (ou quase hiperbólicas, quando a pressão capilar é considerada e os fluidos são compressíveis) e a equação da pressão elíptica, ou quase elíptica (quando os efeitos de compressibilidade das fases ou rocha são considerados), conforme Peaceman (1977). Este fato sugere que na avaliação do fluxo de massa, num determinado instante de tempo, os termos que dependem da saturação podem ser avaliados com a saturação do instante de tempo anterior, e os termos que dependem da pressão sejam avaliados no mesmo instante de tempo em que o fluxo está sendo calculado, originando o esquema IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*). Este fato desacopla a equação da pressão das equações de saturação. Tal esquema requer pequeno esforço computacional por intervalo de tempo, uma vez que a pressão é a única incógnita do sistema de equações. Outra vantagem do IMPES é que o procedimento de avanço das incógnitas explícitas é facilmente vetorizável. A principal desvantagem do IMPES é que se deve empregar o CFL (número de Courant-Friedrichs-Lewy) menor que a unidade a fim de se evitar oscilações espúrias na solução.

Uma metodologia que trabalha com o CFL maior que um, sem que ocorra oscilações na solução, é a solução totalmente implícita (TI). Na metodologia TI a equação da pressão não é desacoplada das equações das saturações e ambas são calculadas simultaneamente. Todavia, o esforço computacional por passo de tempo aumenta quando comparado com o IMPES, uma vez que todas as incógnitas fazem parte do sistema de equações. O método IMPES consegue trabalhar com razoáveis intervalos de tempo ( $\Delta t$ ) exceto em algumas regiões localizadas do reservatório, como por exemplo, nas proximidades de poços. Partindo desta observação, Thomas e Thurnau (1983) propuseram o uso de esquemas implícitos adaptativos (AIM - Adaptive Implicit Method), cujo conceito foi posteriormente melhorado por Forsyth Jr. e Sammon (1986). A idéia do método implícito adaptativo é avançar todas as incógnitas implicitamente nas regiões onde o CFL é maior que um ou onde ocorram grandes variações nas saturações, e no restante do reservatório somente a pressão é tratada implicitamente. Um dos grandes problemas da implementação do AIM é o critério lógico para trocar uma variável de IMPES para TI ou vice-versa.

Thomas e Thurnau (1983), Forsyth Jr. e Sammon (1986),

utilizaram como critério de troca as variações máximas nas saturações. Se uma célula IMPES tiver uma variação em saturação maior que um valor predeterminado, esta célula é calculada como sendo TI na próxima iteração de Newton ou no próximo intervalo de tempo. Forsyth Jr. e Sammon (1986) argumentam que este critério não permite que uma célula volte a ser IMPES após ter sido trocada para TI, porque uma célula TI pode ter grandes fluxos de massa e as variações nas saturações serem pequenas. Caso esta célula seja trocada para IMPES é possível que ocorram instabilidades.

Russel (1989) propõe um critério baseado no CFL para determinar se uma célula deve passar de TI para IMPES e vice-versa. Russel (1989) fornece várias justificativas para trabalhar com o critério baseado no CFL e várias formas de calculá-lo aproximadamente. Entretanto, não apresenta nenhum resultado para escoamento bi ou trifásico. Young e Russel (1993) propuseram uma nova expressão para o cálculo do CFL e sugerem que este seja aplicado juntamente com o cálculo de máxima variação nas saturações. Entretanto, com a expressão de cálculo do CFL proposta por Young e Russel (1993) foram obtidas soluções com o método IMPES com CFL maiores que um, sem que ocorressem oscilações na solução.

Fung *et al.* (1989) propuseram um critério baseado na análise local das equações aproximadas. Em cada célula são calculados os autovalores. É exigido que o módulo do menor autovalor não seja superior a unidade, para que a célula possa ser tratada pelo método IMPES. Caso contrário, a célula deve ser tratada pelo método TI.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma comparação destas metodologias empregando-se malhas não-estruturadas de Voronoi. Os resultados serão apresentados em termos de tempo de CPU, número de iterações de Newton, número de iterações no tempo e percentagem de implícitude. Como critério de chaveamento de implícitude foram utilizados os critérios de estabilidade de Fung *et al.* (1989) e variação na saturação. Empregou-se o modelo *black-oil* e o estudo será dedicado a análise de casos bifásicos (óleo-água) e bidimensional. Para geração das malhas utilizou-se o gerador desenvolvido por Maliska Jr. (1993).

### MODELO FÍSICO

O modelo físico empregado representa o escoamento bifásico (óleo-água) em reservatórios de petróleo. Apresenta-se agora uma breve descrição do modelo. Maiores detalhes podem ser

encontrados em Palagi (1992) e Marcondes *et al.* (1994). Assumindo que existe somente duas fases imiscíveis no reservatório (óleo (o) e água (w)) e desprezando os efeitos de pressão capilar e gravitacional, pode-se escrever a equação de conservação volumétrica para a fase *p* como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_p}{B_p} \right) = \nabla \cdot \left[ \lambda_p \nabla P \right] + q_p \quad (1)$$

onde  $\phi$  é a porosidade e  $B_p$  é o fator de formação volumétrica da fase *p*.  $S_p$  é a saturação da fase *p*,  $P$  é a pressão dos fluidos presentes no reservatório,  $q_p$  é a vazão nas condições de armazenamento da fase *p* por unidade de volume do reservatório e  $\lambda_p$  é a mobilidade da fase *p*, definida por

$$\lambda_p = K \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \quad (2)$$

onde  $K$  é a permeabilidade absoluta do meio,  $K_{rp}$  a permeabilidade relativa e  $\mu_p$  a viscosidade, respectivamente, da fase *p*.

Escrevendo a Eq. (1) para as fases óleo e água constata-se que existem três incógnitas ( $S_o$ ,  $S_w$  e  $P$ ) e apenas duas equações. A equação para o fechamento do problema vem da conservação da massa global, dada por

$$S_w + S_o = 1 \quad (3)$$

### INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

A Fig. 1 apresenta um volume de controle de Voronoi. O ponto *i* é o ponto gerador e os pontos *j*'s seus vizinhos. Para cada ponto *j* é possível alinhar um sistema cartesiano local  $x'$ - $y'$  de tal forma que o eixo  $x'$  (linha que une o ponto *i* ao ponto *j*) seja perpendicular a face do volume de controle e o eixo  $y'$  paralelo a esta face.

Integrando a Eq. (1) no espaço e no tempo, tem-se

$$\left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \lambda_{ij}^{n+\theta} (P_j^{n+1} - P_i^{n+1}) + \bar{q}_p^{n+\theta} \quad (4)$$

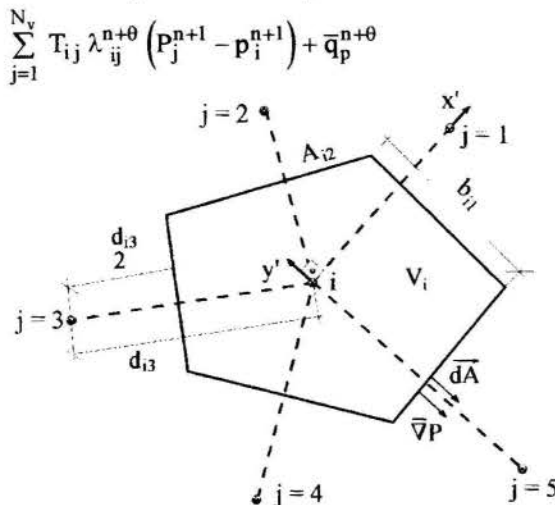


Fig. 1 - Volume de controle de Voronoi

O índice  $\theta$  na Eq. (4) irá determinar o tipo de metodologia empregada, se for mantido igual a 1 em todo o reservatório a metodologia será TI, se for igual a zero a metodologia será IMPES. Caso  $\theta$  assuma em algumas regiões, valor igual a zero e

em outras igual a 1, a metodologia será AIM.  $\bar{q}_p$  é a vazão volumétrica da fase *p* nas condições de superfície e  $N_v$  o número de vizinhos do volume *i*. O termo  $T_{ij}$  na Eq. (4) é o fator de transmissibilidade, dado por

$$T_{ij} = \left( \frac{bhk}{d} \right)_{ij} \quad (5)$$

onde  $h$  e  $b$  são a altura e largura da face *ij*, respectivamente.

### METODOLOGIAS TI, IMPES E AIM

#### Metodologia TI

As incógnitas que devem ser calculadas implicitamente para cada volume são a pressão ( $P$ ) e a saturação da água ( $S_w$ ). Para o cálculo de  $\left( \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{ij}$  adotar-se-á o seguinte procedimento:

$K_{rp,ij}$  será calculado pelo esquema UDS (upstream weighting scheme) e  $(\mu_p B_p)_{ij}$  será calculado pela média aritmética dos correspondentes valores nos pontos *ij*.

O sistema de equações é resolvido iterativamente usando o método de Newton. Fazendo-se  $\theta = 1$  na Eq. (4), e escrevendo-se a mesma na forma residual, tem-se

$$R_{p,i} = \sum_{j=1}^{N_v} T_{i,j} \left( \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{ij}^{n+1} (P_j^{n+1} - P_i^{n+1}) + \bar{q}_{p,i}^{n+1} - \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} + \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n ; p = o, w \quad (6)$$

Expandindo o resíduo em série de Taylor, tem-se

$$R_{p,i}^{v+1} = R_{p,i}^v + \sum_{\forall x} \left( \frac{\partial R_{p,i}}{\partial X} \right)^v \Delta X \quad (7)$$

onde  $v$  é o nível iterativo e  $X$  representa as incógnitas ( $P$  e  $S_w$ ). Assumindo-se que o resíduo na iteração  $v + 1$  é zero, tem-se

$$\sum_{\forall x} \left( \frac{\partial R_{p,i}}{\partial X} \right)^v \Delta X^{v+1} = -R_{p,i}^v ; p = o, w \quad (8)$$

As incógnitas ( $P$  e  $S_w$ ) são calculados após cada iteração newtoniana, como

$$X^{v+1} = X^v + \Delta X^{v+1} \quad (9)$$

e a solução é aceita quando todas as tolerâncias são satisfeitas, de acordo com

$$\begin{aligned} \Delta P_{\max}^{v+1} &\leq \Delta P_{\max}^* \\ \Delta S_{w,\max}^{v+1} &\leq \Delta S_{w,\max}^* \end{aligned} \quad (10)$$

#### Metodologia IMPES

Neste método a avaliação, em um determinado instante de tempo, dos termos de fluxo que carregam a informação da mobilidade do fluido e dos termos de produção ou injeção, é feita baseando-se nas saturações e pressões do instante anterior.

Fazendo-se  $\theta = 0$  na Eq. (4) e escrevendo-se a mesma na forma residual para o componente  $p$ , obtém-se uma equação similar à Eq. (6), onde o único termo que depende da saturação no instante  $n+1$  é o termo de acumulação. Desta forma, quando da linearização de Newton, em cada linha de blocos do Jacobiano, o único bloco cheio é aquele da diagonal, ver Fig. 2a. Para obter a equação implícita da pressão cada linha de blocos do Jacobiano é multiplicada pelo inverso da diagonal, resultando na linha de bloco da Fig. 2b. Após esta operação a equação da pressão é desacoplada da equação da saturação originando a linha de blocos da Fig. 2c. Este procedimento é repetido para todas as células e a equação da pressão é obtida tomando-se a primeira linha de cada linha de blocos da Fig. 2c, originando o sistema dado pela Eq. (11).

$$[J]^v \Delta X^{v+1} = -R^{*v} \quad (11)$$

onde,  $R^{*v}$  é o vetor residuo multiplicado pela inversa da matriz do bloco diagonal de cada volume de controle. Resolvido o sistema dado pela Eq. (11),  $P$  é obtido via Eq. (12) e  $S_w$  através da Eq. (13), onde  $J_{ij}$  representa os coeficientes da segunda linha de  $i$  após a multiplicação pela matriz inversa da diagonal.

$$P^{v+1} = P^v + \Delta X^{v+1} \quad (12)$$

$$S_{w,i}^{n+1} = \sum_{j=1, j \neq i}^{N_v} \Delta X_j^{v+1} J_{ij} + R_{w,i}^{*v} \quad (13)$$

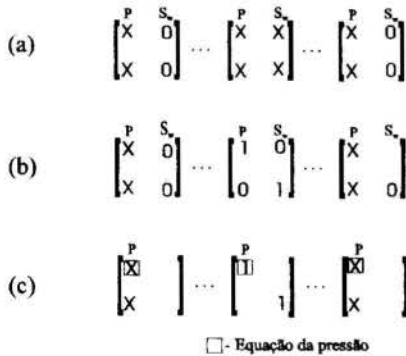


Fig. 2 - Sequência de passos para obtenção da equação da pressão para o IMPES

### Metodologia AIM

A metodologia IMPES requer menor esforço computacional por intervalo de tempo que a metodologia TI. Entretanto, exige pequenos intervalos de tempo por motivo de instabilidades. Este efeito geralmente é localizado em algumas áreas do reservatório onde as velocidades ou os gradientes de saturação são elevados. Por outro lado, a metodologia TI permite trabalhar com maiores intervalos de tempo, uma vez que não sofre as limitações de instabilidade numérica do IMPES. O objetivo do AIM é tratar as regiões onde o IMPES tem problemas de instabilidades, utilizando a metodologia TI e o restante do reservatório via IMPES. Num dado intervalo de tempo a pressão irá ser calculada implicitamente em todo o reservatório e a saturação irá ser calculada implicitamente somente em algumas regiões do reservatório e explicitamente no restante.

Avaliando-se os termos de produção/injeção implicitamente e considerando que as mobilidades das fases podem ser implícitas ou explícitas, obtém-se uma equação similar a Eq. (6). Aplicando-se o mesmo processo que foi realizado para a obtenção da matriz Jacobiana do IMPES, obtém-se uma equação análoga a

Eq. (11), onde a única diferença é que os elementos do Jacobiano podem ser blocos  $1 \times 2$ ,  $2 \times 1$ ,  $2 \times 2$  ou  $1 \times 1$ .

### Critério de mudança de um volume de IMPES para TI e vice-versa

Adotar-se-á o critério de estabilidade local da matriz Jacobiana proposta por Fung *et al.* (1989)

Se  $R_i^{n+1}$  e  $X_i^{n+1}$  denotam o residuo das equações de conservação e variáveis primárias ( $P^{n+1}$  e  $S_w^{n+1}$ ), respectivamente, a iteração de Newton pode ser escrita na notação indicial, como

$$X_i^{n+1, v+1} = X_i^{n+1, v} - \left( \frac{\partial R_i^{n+1, v}}{\partial X_j^{n+1, v}} \right)^{-1} R_i^{n+1, v}; i, j = 1, \dots, N_q \quad (14)$$

onde  $N_q$  é o número de espécies químicas ou componentes. Na Eq. (14),  $X_i^{n+1, v+1}$  é a  $(v+1)$ -ésima iteração de  $X_i$  no tempo  $(n+1)$ , e  $R_j^{n+1, v}$  é a  $v$ -ésima iteração da equação  $j$ .  $X_i^{n+1, v+1}$  convergirá quando a norma infinita de  $X$  for pequena, ou seja,  $\|X_i^{n+1, v+1} - X_i^{n+1, v}\|_{\infty} \leq \epsilon$ . Escrevendo  $dR_j^{n+1, v}$ , como

$$dR_j^{n+1, v+1} = \left( \frac{\partial R_j^{n+1, v+1}}{\partial X_i^{n, m}} \right) dX_i^{n, m} + \left( \frac{\partial R_j^{n+1, v+1}}{\partial X_i^{n+1, v+1}} \right) dX_i^{n+1, v+1} \cong 0 \quad (15)$$

onde,  $m$  refere-se à última iteração do instante de tempo  $n$ .

Se os erros no instante  $n$  e  $n+1$  são  $\epsilon_i^n$  e  $\epsilon_i^{n+1}$ , respectivamente, pode-se escrever a Eq. (15) como

$$\left( \frac{\partial R_j^{n+1, v+1}}{\partial X_i^{n+1, v+1}} \right) \epsilon_i^{n+1} = \left( \frac{\partial R_j^{n+1, v+1}}{\partial X_i^{n, m}} \right) \epsilon_i^n; i, j = 1, \dots, N_q \quad (16)$$

onde os sinais de  $\epsilon$  não foram considerados, porque se está interessado nas normas de  $\epsilon$ . Fazendo-se,

$$T = \left( \frac{\partial R_j^{n+1, v+1}}{\partial X_i^{n+1, v+1}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial R_j^{n+1, v+1}}{\partial X_i^{n, m}} \right) \quad (17)$$

pode-se escrever a Eq. (16), como

$$\epsilon_i^{n+1} = T \epsilon_i^n \quad (18)$$

onde  $T$  é a matriz transformação. Segundo Fung *et al.* (1989), a condição de estabilidade do intervalo de tempo  $(\Delta t)$  é

$$\|\epsilon_i^{n+1}\| \leq \|\epsilon_i^n\| \quad (19)$$

a qual garante que os erros introduzidos em um intervalo de tempo não serão amplificados nos intervalos seguintes. Esta condição é satisfeita se  $T$  é normal, requerendo que

$$\rho(T) = \max \|\alpha_i(T)\| \leq 1; 1 \leq i \leq N_q \quad (20)$$

onde  $\rho$  é o raio espectral e  $\alpha_i$  os autovalores de  $T$ . A análise anterior proposta por Fung *et al.* (1989) determina se o sistema como um todo é estável. Entretanto, o objetivo é determinar quais células são instáveis com o  $\Delta t$  escolhido. Fung *et al.* (1989) sugerem que a Eq. (21) seja escrita para cada célula e seja calculado o máximo autovalor de  $T$ . Caso se verifique a



condição dada pela Eq. (23) o volume será tratado via IMPES, caso contrário via TI. Maiores detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de Fung *et al.* (1989) e Marcondes (1996).

Fung *et al.* (1989) argumentaram que se deve excluir de  $R_i$  os termos de acumulação no instante  $n$  para que este critério funcione adequadamente. Para o cálculo das derivadas admitiu-se que o escoamento é incompressível. Isto de certa forma facilita o cálculo dos autovalores. Numa etapa posterior desprezou-se esta hipótese e o comportamento do método foi idêntico. Portanto, todos os resultados que serão expostos a seguir empregando a análise de estabilidade, foram obtidos considerando-se que os fluidos presentes no reservatório são incompressíveis.

## RESULTADOS

Todos os casos analisados nesta seção foram obtidos com os seguintes critérios:  $\Delta P^*_{max}$  igual a 68,95 kPa e  $\Delta S^*_{w,max}$  igual a  $5 \times 10^{-3}$ . Foram realizados alguns testes com  $\Delta S^*_{w,max}$  igual a  $10^{-3}$  e o mesmo  $\Delta P^*_{max}$  e as razões de tempo do AIM em relação a metodologia TI foram semelhantes. Para as metodologias AIM e TI, uma nova iteração newtoniana foi requerida quando em algum volume as variações na saturação e pressão ultrapassaram valores predeterminados, independentemente da saturação ser explícita ou implícita. Para o IMPES isto aumentou consideravelmente o número de iterações de Newton por intervalo de tempo. O solver empregado foi o GMRES (Saad e Schultz, 1986) e foi utilizado preconditionamento à direita com uma ILU(1) (Marcondes *et al.*, 1995). O critério de parada no solver foi  $\|r\|/\|r_0\| \leq 10^{-3}$ , onde  $\|r\|$  é a norma do resíduo após um determinado número de iterações e  $\|r_0\|$  o resíduo inicial.

Para a metodologia AIM, se for utilizado valores apertados de  $\Delta P^*_{max}$  e  $\Delta S^*_{w,max}$  para a convergência do ciclo de Newton, a convergência do método adaptativo ficará sensivelmente prejudicada quando comparada com a metodologia TI, devido ao número excessivo de iterações newtonianas do AIM. Conforme Coutinho (1995) o método adaptativo pode ser considerado como um método de Newton Inexato, onde uma parcela do Jacobiano foi desprezada. Desta forma, o número de iterações das metodologias AIM e TI não necessariamente coincidem.

Antes de apresentar as comparações das metodologias, explicar-se-á como foi aplicado o critério de estabilidade proposto por Fung *et al.* (1989). No trabalho destes autores foi aplicado a metodologia AIM para problemas trifásicos (óleo, gás e água). Desta forma, o critério de estabilidade requer o cálculo de três autovalores em cada volume. Para evitar o cálculo dos autovalores em todos os volumes, Fung *et al.* (1989) propuseram que só fossem calculados os autovalores na fronteira entre regiões implícitas e explícitas. Onde existisse uma troca nas células testadas nesta região, todos os vizinhos explícitos deveriam ser testados se a troca é de explícito para implícito (troca à frente) ou nos vizinhos implícitos se a troca é de implícito para explícito (troca para trás), repetindo-se este procedimento até que nenhum volume devesse ser trocado. Este foi o primeiro procedimento implementado neste trabalho. Entretanto, não se conseguiu captar a frente de implicitude conforme comentado por Fung *et al.* (1989). Resolveu-se então calcular os autovalores para todos os volumes. Observe-se que com a hipótese de incompressibilidade dos fluidos é necessário calcular somente um autovalor por volume. Mesmo calculando-se os autovalores para todas as células observou-se somente uma pequena parcela de célula implícitas. Desprezando-se a hipótese de incompressibilidade os resultados foram idênticos. Para os resultados que serão expostos, foram testados o critério de estabilidade juntamente com critério de mudança na saturação.

Outro ponto que deve ser enfatizado nos resultados apresentados a seguir é que foram construídos programas distintos para as metodologias AIM, IMPES e TI. Desta forma o cálculo adicional associado à montagem do Jacobiano e do solver para as metodologias IMPES e TI foi evitado.

Nas tabelas a seguir,  $\lambda_1$  é o limite para troca à frente,  $\lambda_2$  o limite para troca para trás e  $\Delta S_w$  é a variação na saturação da água empregada para troca de implicitude. Utilizando o critério na saturação, sempre que uma célula foi trocada todos os seus vizinhos foram checados. Para troca para trás foram realizados alguns testes para descobrir a frequência com que a mesma deveria ser realizada. A troca a cada 20 iterações no tempo forneceu bons resultados. Foram testados as seguintes frequências: 10, 20, 30 e 50. Todos os testes foram realizados numa estação de trabalho SUN SPARC Station 10 com 2 CPU's P61 com 128 Mbytes de RAM. Os tempos de CPU apresentados foram normalizados dividindo-se o tempo de computação pelo tempo de computação mínimo entre os métodos. Os mesmos referem-se a montagem do Jacobiano, lado direito (função resíduo) e tempo no solver.

O primeiro caso analisado é para o escoamento cujas curvas de permeabilidade relativa são funções quadráticas da saturação. Os dados físicos e geométricos encontram-se na Tab. 1 e as curvas de permeabilidade relativa e razão de viscosidade são fornecidas pela Eq. (21). A Fig. 3 apresenta a malha hexagonal-híbrida empregada.

$$K_{rw} = \frac{S_w^2}{M(1-S_w^2) + S_w^2}; K_{ro} = 1 - K_{rw}; M = \frac{\mu_o}{\mu_w} \quad (21)$$

Tab. 1 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 1

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$k = 12,5 \times 10^{-15} \text{ m}^2$	$S_{wi} = 0$	$B_o = B_w = 1 \text{ a } 0 \text{ Pa}$
$h = 6,09 \text{ m}$	$P_i = 6,893 \times 10^5 \text{ Pa}$	$P_c = 0$
$A = 1,6 \times 10^5 \text{ m}^2$	$S_{wi} = 0$	$\mu_o = 10^{-3} \text{ Pa.s}$
$\phi = 0,08$		$\mu_w = 1/M \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$
$r_w = 0,0914 \text{ m}$		$c_o = c_w = 1,45 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
		$ \bar{q}_{il}  =  \bar{q}_{wi}  = 1,10 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

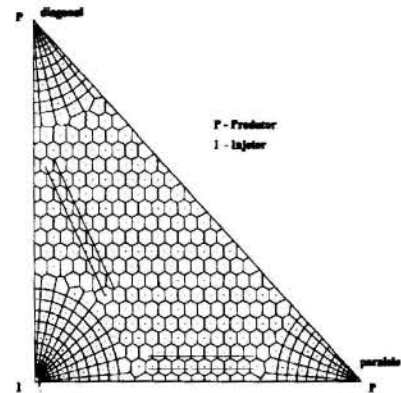


Fig. 3 - Malha hexagonal híbrida com 445 volumes

O cálculo do erro de volume global de cada componente (EBC<sub>p</sub>) foi obtido via Eq. (22). O numerador da Eq. (22), a cada instante da simulação, representa o erro no volume da fase  $p$  medido desde o instante inicial da simulação e o denominador o volume de água injetada.

$$EBC_p = (V_{i,p} + \sum \bar{q}_{wi} \Delta t - \sum \bar{q}_{pp} \Delta t - V_{f,p}) / \sum \bar{q}_{wi} \Delta t \quad (22)$$

onde,  $V_{i,p}$  é o volume inicial da fase  $p$ ,  $V_{f,p}$  o volume final da

fase  $p$  avaliada em um determinado instante de tempo,  $\bar{q}_{wi}$  o volume total de água injetada em cada intervalo de tempo e  $\bar{q}_{pp}$  o volume total de água produzida em cada intervalo de tempo.

Da Tab. 2 observa-se que o critério baseado na análise de estabilidade requereu somente uma pequena parcela dos volumes a serem implícitos. Praticamente não existiu muito efeito nos limites dos autovalores testados para as trocas à frente e para trás. Para este caso um valor de  $\Delta S_w = 0,01$  aliado ao critério de estabilidade forneceu o melhor resultado. Observa-se que, utilizando somente o critério de troca baseado na variação da saturação, uma grande parcela dos volumes é implícita no final da simulação, principalmente para pequenos valores de  $\Delta S_w$ . Nota-se também que existiu um caso onde o AIM requereu mais tempo de CPU que a metodologia TI. Observe-se que neste caso existiu uma diferença acentuada no número de iterações de Newton, significando então, que o critério utilizado para chaveamento da metodologia AIM não detectou adequadamente as regiões de surgimento de instabilidades. Pode-se observar também que os erros de balanço do IMPES são superiores aos do AIM e TI. Este fato pode ser explicado considerando que apenas uma iteração do ciclo de Newton foi realizada e de se ter empregado o mesmo critério de convergência no *solver* para as três metodologias. Para o processo de integração foi empregado o esquema de passo de tempo variável (Aziz e Settari, 1979).

Tab. 2- Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes -  $M=10$ , 1,82 VPI-menor tempo de CPU=236,6seg

Método	Critério	TCPU	NIT	NIN	PI (%)	EBCp (%)	
						óleo	água
AIM	autovalor $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8$	1,04	381	541	4,93	$3,81 \times 10^{-4}$	$1,91 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor $\lambda_1=1; \lambda_2=0,9$	1,04	381	541	4,60	$3,86 \times 10^{-4}$	$2,10 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor $\lambda_1=0,8; \lambda_2=0,6$	1,04	380	529	6,79	$3,46 \times 10^{-4}$	$1,39 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor+variação $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,01$	1,00	359	509	12,96	$3,12 \times 10^{-4}$	$1,37 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor+variação $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,02$	1,01	360	515	10,22	$4,10 \times 10^{-4}$	$2,30 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor+variação $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,05$	1,06	372	550	6,35	$3,76 \times 10^{-4}$	$2,34 \times 10^{-4}$
AIM	variação $\Delta S_w=0,01$	1,20	359	514	64,45	$3,11 \times 10^{-4}$	$1,18 \times 10^{-4}$
AIM	variação $\Delta S_w=0,02$	1,18	359	517	56,59	$4,21 \times 10^{-4}$	$1,98 \times 10^{-4}$
AIM	variação $\Delta S_w=0,05$	1,35	374	630	31,08	$4,17 \times 10^{-3}$	$1,78 \times 10^{-3}$
TI	-	1,26	358	504	100	$2,62 \times 10^{-6}$	$1,76 \times 10^{-3}$
IMPES	$\Delta t_{max} = 2$ dias	11,00	7564	7564	0	$1,22 \times 10^{-2}$	$1,23 \times 10^{-2}$

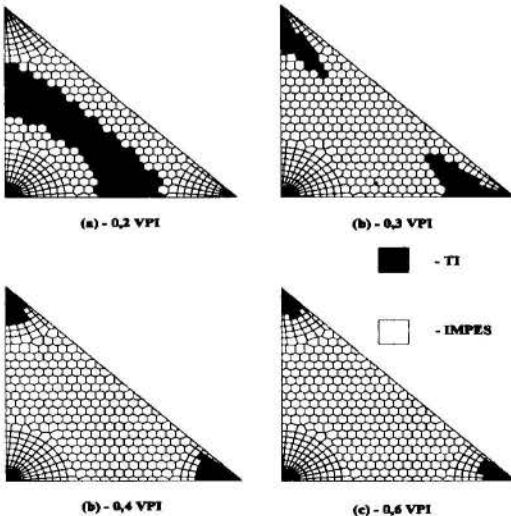


Fig. 4 - Campos de implícitude para quatro valores de VPI -  $\lambda_1=1,0, \lambda_2=0,8$  e  $\Delta S_w=0,01$

A Fig. 4 apresenta as frentes de implícitude para quatro va-

lores de VPI. Esta figura foi obtida para  $\lambda_1=1,0, \lambda_2=0,8$  e  $\Delta S_w=0,01$ . Verifica-se que para valores elevados de VPI somente um pequeno número de volumes foram mantidos implícitos. Observe que ocorreu uma queda substancial no número de células implícitas de 0,2 para 0,6 VPI. Este fato ocorreu devido a 0,6 VPI a frente de água já ter atingido os poços produtores. Após a chegada da frente no poço produtor o número de células implícitas vai diminuindo proporcionalmente à queda da saturação no poço. Para este caso a chegada da frente ocorre aproximadamente a 0,3 VPI, ver Fig. 5.

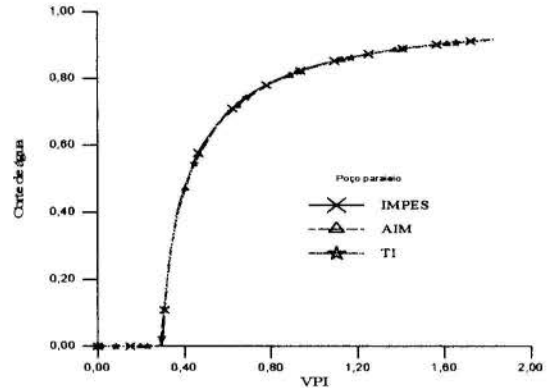


Fig. 5 - Comparação de metodologia corte de água

A Fig. 5 mostra as curvas de corte de água para as metodologias AIM, TI e IMPES para o poço paralelo. O corte de água é definido como a razão do volume de água produzido e o volume total de líquido produzido (óleo + água). Observa-se uma boa concordância dos resultados.

Tab. 3 - Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes -  $M=50$  - 1,82 VPI - menor tempo de CPU = 234,04 seg

Método	Critério	TCPU	NIT	NIN	PI (%)	EBCp (%)	
						óleo	água
AIM	autovalor $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8$	1,30	362	592	7,74	$6,75 \times 10^{-4}$	$2,09 \times 10^{-3}$
AIM	autovalor $\lambda_1=0,8; \lambda_2=0,6$	1,40	361	617	11,21	$6,96 \times 10^{-4}$	$1,85 \times 10^{-3}$
AIM	autovalor + variação $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,01$	1,00	346	442	13,64	$7,21 \times 10^{-4}$	$1,81 \times 10^{-3}$
AIM	autovalor + variação $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,02$	1,24	348	563	13,40	$7,65 \times 10^{-4}$	$1,74 \times 10^{-3}$
AIM	autovalor + variação $\lambda_1=0,8; \lambda_2=0,6; \Delta S_w=0,01$	1,00	346	441	15,58	$6,96 \times 10^{-4}$	$1,81 \times 10^{-3}$
AIM	variação $\Delta S_w=0,01$	1,18	344	445	67,06	$7,64 \times 10^{-4}$	$1,93 \times 10^{-3}$
AIM	variação $\Delta S_w=0,02$	1,64	347	639	59,92	$7,51 \times 10^{-4}$	$1,98 \times 10^{-3}$
TI	-	1,28	343	436	100	$5,25 \times 10^{-4}$	$2,21 \times 10^{-4}$
IMPES	$\Delta t_{max} = 1$ dia	26,5	15088	15088	0	$6,19 \times 10^{-3}$	$6,22 \times 10^{-3}$

Na Tab. 3 observa-se que o critério de estabilidade não conseguiu captar adequadamente o surgimento de instabilidades, tornando os resultados do AIM inferiores aos da metodologia TI. Nota-se que este escoamento é mais instável que aquele analisado na Tab. 2, devido a maior razão de viscosidade. Observe-se que as percentagens de implícitude foram superiores à aquelas da Tab. 2 e, mesmo assim, não foram obtidos bons resultados somente com o critério de instabilidade. Verifica-se que o critério não foi capaz de detectar adequadamente o surgimento das instabilidades a fim de assegurar robustez na solução de Newton e desta forma, um número excessivo de iterações de Newton foram realizadas. Observe-se também, que mesmo trabalhando-se com os critérios de instabilidade e variação na saturação, não foi detectado o surgimento de instabilidades para  $\Delta S_w = 0,02$  durante algum período da simulação, o que resultou num número excessivo de iterações de Newton quando comparado com o mesmo caso com  $\Delta S_w = 0,01$ .

A Fig. 6 apresenta uma malha hexagonal com 410 volumes. Os dados do reservatório estão listados nas Tabs. 4 e 5. As curvas de viscosidade são dadas pela Eq. (23). A Tab. 6 apresenta os resultados obtidos para esta configuração. Para este caso nota-se que foi requerida uma pequena quantidade de implicitude, mesmos para os casos onde somente o critério de variação na saturação foi utilizado. Com exceção do método IMPES, o número de intervalos de tempo para todas as simulações coincidiram. Neste caso, o método que forneceu melhores resultados em termos de tempo de CPU foi o AIM com o critério de troca baseado na variação de saturação ( $\Delta S_w=0,02$ ).

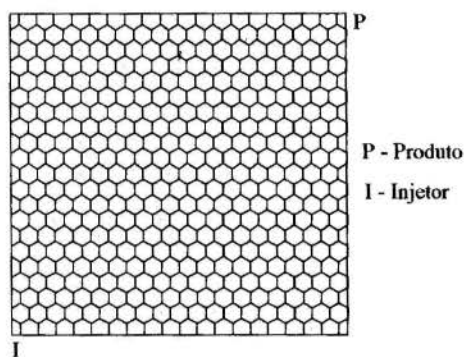


Fig. 6 - Malha hexagonal com 410 volume

Tab. 4 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 2

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$k = 3,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2$	$S_w = 0,22$	$B_o = B_w = 1 \text{ a } 2,068427 \times 10^7 \text{ Pa}$
$h = 15 \text{ m}$	$P_i = 2,068427 \times 10^7 \text{ Pa}$	$P_c = 0$
$A = 2,14048 \times 10^6 \text{ m}^2$	$S_w = 0,20$	$c_o = c_w = 7,25 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
$\phi = 0,30$		$ \bar{q}_{11}  =  \bar{q}_{w1}  = 2,76 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$
$r_w = 0,122 \text{ m}$		

Tab. 5 - Permeabilidades relativas

$S_w$	0,220	0,300	0,400	0,500	0,600	0,800	0,900	1,00
$K_{ro}$	1,000	0,400	0,125	0,0649	0,0048	0,0	0,0	0,0
$K_{rw}$	0,0	0,070	0,150	0,240	0,330	0,650	0,830	1,00

$$\mu_w = 10^{-3} \left[ 1 + 1,45 \times 10^{-12} (P - 1,37 \times 10^7) \right] \text{ (Pa.s)} \quad (23)$$

$$\mu_o = 1,163 \times 10^{-2} \left[ 1 + 1,45 \times 10^{-12} (P - 1,37 \times 10^7) \right] \text{ (Pa.s)}$$

Tab. 6 - Malha hexagonal com 410 volumes - 1,82 VPI menor tempo de CPU = 171,29 seg

Método	Critério	TCPU	NIT	NIN	PI (%)	EBCp(%)	
						óleo	água
AIM	autovalor $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8$	1,05	882	953	1,26	$3,45 \times 10^{-4}$	$6,81 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor $\lambda_1=0,8; \lambda_2=0,6$	1,06	882	957	1,87	$3,22 \times 10^{-4}$	$6,48 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,01$	1,03	882	936	1,46	$3,24 \times 10^{-4}$	$6,50 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação $\lambda_1=1; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,02$	1,05	882	953	1,26	$3,45 \times 10^{-4}$	$6,81 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação $\lambda_1=0,8; \lambda_2=0,6; \Delta S_w=0,01$	1,04	882	940	2,06	$3,01 \times 10^{-4}$	$6,18 \times 10^{-4}$
AIM	variação $\Delta S_w=0,01$	1,14	882	941	13,23	$4,02 \times 10^{-4}$	$5,27 \times 10^{-4}$
AIM	variação $\Delta S_w=0,02$	1,00	882	949	3,26	$3,67 \times 10^{-4}$	$5,41 \times 10^{-4}$
TI	-	1,38	882	9,34	100	$3,60 \times 10^{-4}$	$2,55 \times 10^{-4}$
IMPES	$\Delta t_{max} = 4 \text{ dias}$	7,25	10676	10676	0	$8,63 \times 10^{-3}$	$8,61 \times 10^{-3}$

## CONCLUSÕES

Para todos os testes realizados a metodologia IMPES requereu maior tempo de CPU. Por exemplo, para a malha hexagonal-híbrida empregada o IMPES requereu 11 vezes mais tempo de CPU que o AIM com o critério de estabilidade aliado a variação de saturação para  $M=10$ . Para  $M=50$  está relação

aumentou para 26,2. Observe-se que a única diferença nestes dois casos foi a razão de viscosidade e por conseguinte a curva de fluxo fracionário. Nos testes realizados, conseguiu-se uma razoável redução de tempo de execução aliando-se ao critério de estabilidade o critério de variação na saturação. No trabalho de Fung *et al.* (1989) não foi necessário a utilização do critério de estabilidade juntamente com o critério de variação na saturação. O critério de estabilidade mostrou-se robusto para detectar as regiões onde a maior implicitude era necessária. Uma possível causa para a não ocorrência deste fato no presente trabalho, foi ter-se trabalhado apenas com escoamento bifásico (óleo-água), no qual as instabilidades físicas são bem menores.

## REFERÊNCIAS

- Aziz, K. e Settari, A.: "Petroleum Reservoir Simulation", Applied Science Publishers, 1979.
- Coutinho, A. L. G. A.: "Comunicação pessoal", 1995.
- Forsyth Jr., P. A. e Sammon, P. H.: "Practical Considerations for Adaptive Implicit Methods in Reservoir Simulation", Journal of Comput. Physics, 62, 1986, pp. 265-281.
- Fung, L. S. K., Collins, D. A., Nghiem, L. X.: "An Adaptive-Implicit Switching Criterion Based on Numerical Stability Analysis", SPE Reservoir engineering, 1989.
- Maliska Jr., C. R.: "Um Robusto Gerador de Diagramas de Voronoi para Discretização de Domínios Irregulares", XIV CILAMCE, São Paulo, SP, Dezembro, 1993.
- Marcondes, F.: "Solução Numérica usando métodos adaptativos - implícitos e malha de Voronoi de problemas de Reservatórios de Petróleo", Tese de doutorado, UFSC Florianópolis - SC, 1996.
- Marcondes, F., Zambaldi, M. C. e Maliska, C. R.: "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas de Voronoi", VENCIT, São Paulo, SP, Dez, 1994.
- : "Comparação de Métodos Iterativos não Estacionários em Malhas não Estruturadas de Voronoi na Solução de Problemas de Petróleo", XIII COBEM, Belo Horizonte, MG, 1995.
- Palagi, C.: "Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs", PhD dissertation, Stanford University, Stanford, 1992.
- Peaceman, D. W.: "Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1977.
- Russell, T. F.: "Stability Analysis and Switching Criteria for Adaptive Implicit Methods Based on the CFL Condition", artigo SPE 18416, Tenth Symposium on Reservoir Simulation, Houston, 1989.
- Saad, Y. e Schultz, M. H.: "GMRES: A General Minimal residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7, 1986, pp. 856-869.
- Thomas, G. W. e Thurnau, D. H.: "Reservoir Simulating Using an Adaptive Implicit Method", Soc. Pet. Eng. J., 1983, pp. 759-768.
- Young, L. C. e Russel, T. F.: "Implementation of an Adaptive Implicit Method", artigo SPE 25245, Twelfth Symposium on Reservoir Simulation, New Orleans, 1993.

## ABSTRACT

This work presents one comparison among three methodologies of linearization for petroleum\* reservoir simulation: IMPES -Implicit Pressure Explicit Saturation, TI - Totally Implicit and AIM - Adaptive Implicit Method. Attention is given to the criteria employed for switching from IMPES to TI and vice-versa. The two phase (oil and water) black-oil model is employed. The equations are discretized using the finite-volume method with a Voronoi's non-structured mesh for discretization of physical domain.





## ANÁLISE DO ERRO DAS APROXIMAÇÕES UTILIZADAS NA MODELAGEM DE ESCOAMENTOS DE ANULARES EXCÊNTRICOS

Mário B. Villas-Boas & André L. Martins

Setor de Tecnologia de Engenharia de Poço  
Centro de Pesquisas Leopoldo Miguez de Mello (CENPES)/PETROBRAS  
21949-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil



### RESUMO

*O escoamento no espaço entre dois tubos cilíndricos, um externo ao outro, cujos centros não coincidem (anulares excêntricos) é importante em alguns processos industriais. Devido à grande complexidade da geometria deste escoamento, ele tem sido descrito, nos processos industriais em que ocorre, mediante o uso de algumas aproximações. Este trabalho faz uma estimativa dos erros introduzidos pelas aproximações mais usuais, estabelecendo os limites de sua aplicabilidade.*

### INTRODUÇÃO

A perfuração direcional e horizontal tem sido utilizada com frequência crescente na indústria do petróleo. Sempre que ela ocorre, a coluna de perfuração, nos trechos inclinados e horizontais daqueles poços, apoia-se na parte inferior do poço, deixando um espaço livre para o escoamento do fluido de perfuração na forma de um anular excêntrico (figura 1). Determinar o perfil de velocidades e outros parâmetros a ele relacionados num escoamento no interior de um duto que tem a forma mostrada na figura 1 exige uma matemática muito complexa, sobretudo quando o fluido que escoar nele é não-newtoniano, como os que são usados nas perfurações. Contudo, para que se possa estudar a remoção dos cascalhos que lá se depositam durante o processo de perfuração, é preciso conhecer este perfil de velocidade.

A não linearidade das equações que governam o problema não-newtoniano (Slattery, 1981) e, conseqüentemente a necessidade do emprego de soluções numéricas, fez com que a maioria dos pesquisadores que estudaram o assunto inicialmente procurasse caminhos mais simples e menos precisos. Uma série de autores (Vaughn, 1965, Iyoho e Azar, 1981, Uner et al., 1989) usa, para estimar o perfil de velocidade, o modelo da fenda de altura variável. Segundo este modelo, cada seção do anular tem um perfil de velocidade equivalente ao de um escoamento no interior de uma fenda entre duas placas planas, paralelas e infinitas cuja distância entre as placas é igual à distância entre os dois tubos naquela seção. Esta aproximação conduz a uma modelagem matemática extremamente simples e, por isso mesmo, de grande aceitação. Contudo, ela apresenta algumas deficiências. Além da óbvia diferença das geometrias das duas situações, este modelo despreza o fato de que num anular excêntrico existe um gradiente (e, portanto, uma transferência de quantidade de movimento) bi-direcional de velocidades. Ele simplesmente ignora a fricção viscosa na direção tangencial. Este aspecto é discutido com detalhe por Hacıislamoglu e Langlinais (1990, a). Luo e Peden (1987) apresentam uma aproximação do anular excêntrico por uma série de anulares concêntricos, com raios externos variáveis. Essa modelagem apresenta a vantagem, em relação à anterior, de não fornecer um perfil simétrico em relação à posição central do espaço anular entre as superfícies cilíndricas.

Significativo avanço em termos de modelagem foi introduzido por Guckes (1974) e por Hacıislamoglu e Langlinais

(1990, b) que excluíram a aproximação da fenda através da reformulação, em coordenadas bipolares, das equações que governam o problema. Estes trabalhos sugerem soluções numéricas baseadas no método das diferenças finitas. Mais recentemente, esforços vem sendo dispendidos em modelar outros aspectos relevantes no problema do transporte de cascalhos em anulares excêntricos inclinados, tais como a turbulência (Lomba, 1994), a rotação da coluna interna (Villas Boas, 1989 e Chin, 1992) e a presença de uma camada de sólidos depositada na parte inferior do anular (Campos et al., 1994 e Chin, 1992).

O objetivo deste trabalho é quantificar o erro introduzido pelas aproximações do modelo da fenda de altura variável, a fim de verificar se elas podem ser usadas dentro de uma margem aceitável de erro. Para tal foram formulados e solucionados os problemas do escoamento de fluidos Newtonianos e de Ostwald-de Waele para a fenda de altura variável e para o anular excêntrico. O modelo da fenda de altura variável permite solução analítica para ambos os fluidos enquanto que o modelo do anular excêntrico permite solução analítica apenas para o fluido Newtoniano.

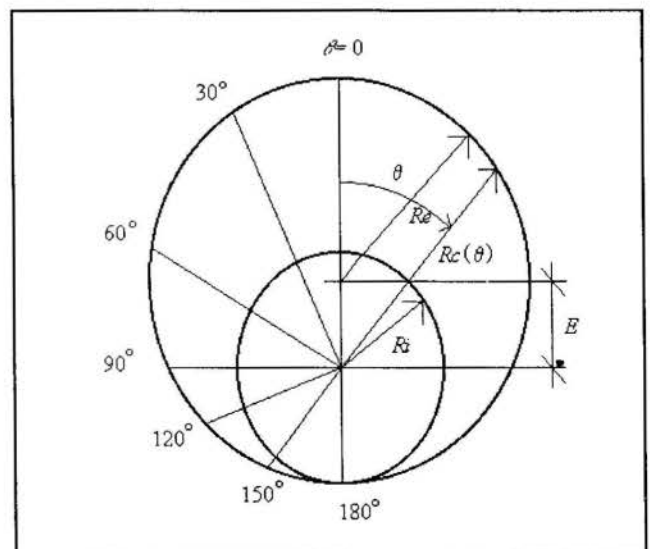


Figura 1 - Anular excêntrico



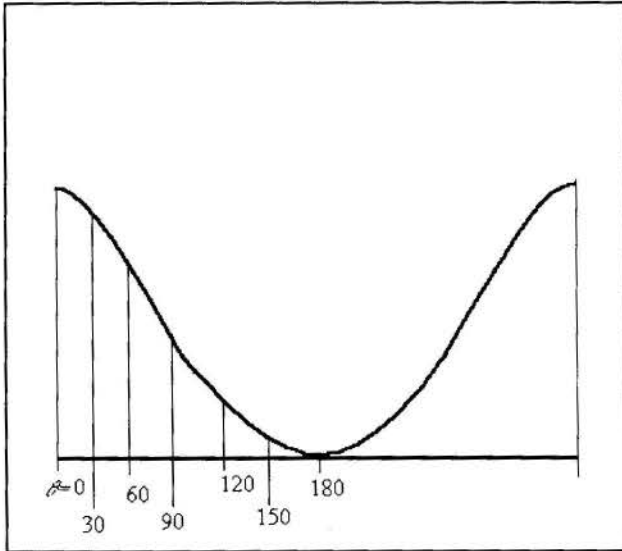


Figura 2 - Fenda de altura variável

### O MODELO DA FENDA DE ALTURA VARIÁVEL

A figura 1 mostra um anular excêntrico. Este anular é formado por um tubo interno cujo raio externo é  $R_i$  e um tubo externo cujo raio interno é  $R_e$ . Os eixos dos dois tubos situam-se a uma distância  $E$  um do outro. O sistema é descrito por um sistema de coordenadas cilíndricas, cuja origem coincide com o centro do tubo interno. O contorno externo do sistema é dado pela função  $R_e(\theta)$ , que descreve, no sistema de coordenadas cilíndricas centrada no eixo do tubo interno, a posição do tubo externo, ou seja, a função de um círculo cujo centro não coincide com o centro do sistema de coordenadas. A figura 2 ilustra a hipotética fenda de altura variável que, pelo modelo utilizado pelos pesquisadores representa a mesma situação. A equação que representa a altura da fenda variável é a mesma que representa o raio do tubo externo num sistema de coordenadas cilíndricas centrado no tubo interno, que é:

$$r_e(\theta) = \epsilon \cos(\theta) + \sqrt{\epsilon^2 \cos^2(\theta) + r_e^2 - \epsilon^2} \quad (1)$$

onde os parâmetros aparecem na forma adimensional, dada por:

$$r_e(\theta) = R_e(\theta)/R_i; \quad r_e = R_e/R_i; \quad \epsilon = E/R_i$$

Os fluidos usados na perfuração quase sempre se comportam de modo muito semelhante a um fluido de Ostwald, ou seja, apresentam um reograma do tipo:

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad (2)$$

Um fluido deste tipo escoando na hipotética fenda de altura variável, desprezando-se a transferência de quantidade de movimento devido ao atrito viscoso na direção  $\theta$ , tal como é tradicionalmente considerado neste modelo, gera um perfil de velocidades dado por:

$$v(r, \theta) = \frac{n\beta}{n+1} \times \left[ \left( \frac{r_e(\theta) - 1}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} - \left| r - \frac{r_e(\theta) + 1}{2} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (3)$$

onde  $r_e(\theta)$  é dado pela equação (1) e  $r$  é o raio adimensional dado por:  $r = R/R_i$ ,  $\beta$  é o fator de forma do anular ( $\beta = R_e/R_i = 1/r_e$ ) e  $v$  é a velocidade adimensional, dada por:

$$v(r, \theta) = \frac{V(r, \theta)}{\left( \frac{dP}{dz} \times \frac{R_e}{K} \right)^{\frac{1}{n}} R_e} \quad (4)$$

A equação (3) parece um pouco complicada à primeira vista, mas se considerarmos que ela se propõe a ser a solução de uma equação diferencial parcial não linear, ela até que parece bem simples. No caso especial de se tratar de um fluido newtoniano ( $n=1$ ) ela fica ainda mais simples:

$$v(r, \theta) = \frac{\beta^2}{2} \times \left[ r_e(\theta)r_i + r \left( \frac{r_e(\theta) + r_i}{2} \right) - r^2 \right] \quad (5)$$

Em virtude da simplicidade destas equações, elas vêm sendo largamente utilizadas na modelagem deste tipo de escoamento. Vejamos agora como proceder a solução exata deste mesmo escoamento

### SOLUÇÃO EXATA

A solução exata do escoamento nesta geometria é dada pela equação de Navier-Stokes, simplificada pelo fato de a velocidade ter componentes em apenas uma direção e não haver os termos inerciais. A equação diferencial fica, portanto:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \mu(\dot{\gamma}) R \frac{\partial V}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \mu(\dot{\gamma}) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \quad (6)$$

sendo  $\mu(\dot{\gamma})$  a viscosidade efetiva do fluido à taxa de deformação  $\dot{\gamma}$ . Esta taxa de deformação, em se tratando de um escoamento bi-dimensional como o aqui tratado, é o gradiente de velocidade na direção em que este for máximo, o que varia de um ponto para outro. Pode ser demonstrado que o valor absoluto deste gradiente máximo, independentemente de sua direção é dado por:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2} \quad (7)$$

Vejamos o caso mais simples de um fluido newtoniano. Neste caso, a viscosidade efetiva é independente da taxa de deformação. Assim, a equação (6), em sua forma adimensional, reduz-se a:

$$-\beta^2 = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \quad (8)$$

A solução da equação diferencial (8) é dada por:

$$v(r, \theta) = \frac{\beta^2}{4} \left[ 1 - r^2 + C_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left( r^k - \frac{1}{r^k} \right) \cos(k\theta) \right] \quad (9)$$

A equação (9) satisfaz às seguintes condições de contorno do problema:

1. A velocidade do fluido adjacente à parede do tubo interno é zero, ou seja:  $v(r_i, \theta) = 0$
2. O perfil de velocidades é simétrico em relação a  $\theta$ , ou seja:  $v(r, \theta) = v(r, -\theta)$ . Distó decorre que:
  - 2.1  $\frac{\partial v}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0$
  - 2.2  $\frac{\partial v}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = 0$

A última condição de contorno é a relativa à parede externa. Ela estabelece que quando  $r=r_e(\theta)$ , sendo  $r_e(\theta)$  dado pela equação (1), a velocidade deve também ser nula. Esta condição é satisfeita por aproximação ajustando-se as constantes  $C_0, C_1, C_2, \dots$  até que o erro desta condição torne-se pequeno o bastante para poder ser desprezado. O ajuste destas constantes pode ser feito por exemplo, pelo método dos mínimos quadrados.

Em se tratando de fluidos não-newtonianos, a solução exata só é possível de ser obtida por métodos numéricos. Num fluido de potência (modelo de Ostwald-de Waele), a viscosidade efetiva é função da taxa de deformação. Esta função é dada por:

$$\mu(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (10)$$

sendo  $k$  o índice de consistência,  $n$  o índice de fluxo e  $\dot{\gamma}$  o módulo do gradiente de velocidade na direção em que ele for máximo (dado pela equação (7)).

Usando-se este conceito de viscosidade efetiva na equação (6), obtemos a seguinte equação diferencial para a distribuição adimensional de velocidades num anular excêntrico:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (n-1) \frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + (n-1) \frac{1}{r^2 \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\beta^{n-1}}{\dot{\gamma}^{n-1}} = 0 \quad (11)$$

As condições de contorno desta equação diferencial são as mesmas da que descreve o fluido newtoniano.

Há um detalhe a respeito destas equações para o qual deve-se prestar especial atenção. Na adimensionalização feita, usou-se o raio interno como comprimento característico na adimensionalização do raio, mas usou-se o raio externo para adimensionalizar vazões e velocidades. A adimensionalização do raio usando o raio interno é decorrência da utilização do sistema de

coordenadas centrado no tubo interno. Mas a adimensionalização de vazões e velocidades é tradicionalmente feita pela maioria dos autores usando-se o raio externo como comprimento característico. A fim de se obterem resultados fáceis de serem comparados com os obtidos por outros autores, a adimensionalização das vazões e velocidades foi feita da maneira tradicional. Isto obriga a inclusão de um fator de correção na equação diferencial, que é o numerador do último termo da equação (11).

## COMPARAÇÃO DOS MODELOS

A figura 3 mostra as vazões decorrentes de cada um dos modelos de perfil de velocidades, para 3 razões de diâmetro ( $\beta = D_i/D_o$ ) com excentricidades variando de 0 a 100%. Para melhor comparação das tendências das curvas, o gráfico mostra a vazão dividida pela vazão de um anular concêntrico com a mesma razão de diâmetros, cuja solução analítica é amplamente conhecida. Vemos que para  $\beta=0,6$ , as curvas aproximada e exata são muito próximas, estando a curva aproximada ligeiramente acima para valores altos de excentricidade e ligeiramente abaixo para anular concêntrico. Diminuindo-se a relação de diâmetros para 0,4 e 0,2, vemos que a curva da solução exata gera valores menores para a mesma excentricidade, no caso de anulares excêntricos. A curva da solução aproximada, ao contrário, movimentou-se para valores mais altos, no caso de altas excentricidades e para valores mais baixos em anulares próximos de concêntricos.

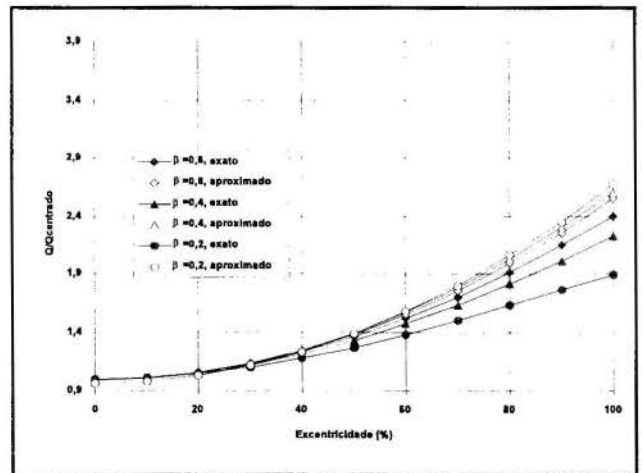


Figura 3 - Razão entre a vazão de um anular excêntrico e de um anular centrado com a mesma razão de diâmetros ( $n=1,0$ ).

É interessante observar que, para excentricidades menores que 50%, a solução aproximada gera valores muito próximos da solução exata, mesmo para a razão de diâmetros de 0,2.

As figuras 4 e 5 mostram gráficos do mesmo tipo, mas para fluidos de potência com índices de comportamento de 0,8 e 0,6, respectivamente.

As figuras 3, 4 e 5 mostram claramente a tendência de aumento do desvio entre as soluções exata e aproximada à medida que aumenta o desvio do comportamento newtoniano do fluido.

O caso do anular com 100% de excentricidade é o mais freqüente no que diz respeito à limpeza de poços inclinados ou horizontais. Este caso será, portanto, estudado em maior detalhe. A tabela 1, mostrada a seguir, mostra o erro decorrente da avaliação

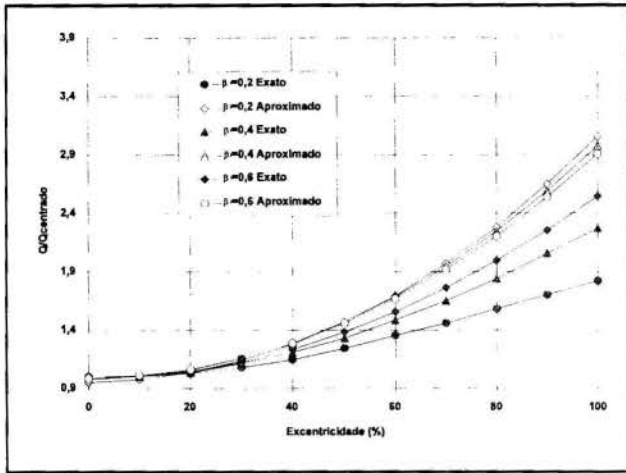


Figura 4 - Razão entre a vazão de um anular excêntrico e de um anular centrado com a mesma razão de diâmetros ( $n=0.8$ ).

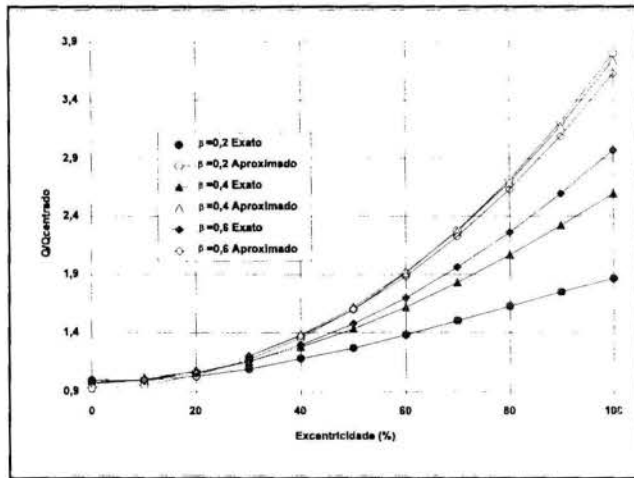


Figura 5 - Razão entre a vazão de um anular excêntrico e de um anular centrado com a mesma razão de diâmetros ( $n=0.6$ ).

da vazão adimensional de anulares com 100% de excentricidade, para várias razões de diâmetro e vários índices de fluxo ( $n$ 's). Podemos ver, na tabela, a grande dependência que o erro tem do índice de comportamento. Para  $\beta=0,6$ , um anular relativamente estreito, o modelo aproximado comete um erro de apenas 6,3% no caso de um fluido newtoniano, o que é um erro bastante aceitável. Já um para fluido de potência com  $n=0,4$ , o erro do modelo aproximado salta para 53%.

**Tabela 1:** Erro cometido no cálculo da vazão pelo uso do perfil de velocidades do método da fenda de altura variável para anulares 100% excêntricos (%).

$n \setminus \beta$	0,2	0,4	0,6
0,4	329,7	134,3	53,0
0,6	103,5	44,6	22,3
0,8	67,7	31,1	14,1
1,0	41,1	17,5	6,3

Cabe, por fim, um comentário a respeito do perfil de velocidade propriamente dito. No cálculo dos parâmetros de otimização da limpeza de poços inclinados, a perda de carga não se

constituiu um elemento de importância. A citação deste elemento aqui serve como uma estimativa de o quão bem o modelo aproximado pode descrever o caso real. Mas para a modelagem do transporte de partículas, é necessário conhecer realmente o perfil de velocidades, de taxa de deformação e de viscosidade efetiva, no caso dos fluidos de viscosidade variável. A figura 6 nos mostra os perfis de velocidade, de taxa de deformação e de viscosidade efetiva previstos pelos modelos aproximado e numérico, ao longo de um raio a  $90^\circ$  da direção onde há o maior afastamento entre os dois tubos. Trata-se de um anular 100% excêntrico com razão de diâmetros de 0,6 e um fluido de potência com índice de comportamento de 0,4. É interessante notar que, pelo modelo aproximado, a taxa de deformação é dada tão somente pelo gradiente de velocidade na direção do raio, enquanto que pelo modelo numérico, a taxa de deformação é bi-direcional, havendo uma componente não mostrada de direção perpendicular ao plano da figura. Por este motivo, no modelo numérico a taxa de deformação não chega a atingir zero em nenhum ponto, embora a curva de velocidades passe por um máximo. Podemos ver que o erro nas velocidades, nas taxas de deformação e, sobretudo nas viscosidades efetivas supera bastante os 53% de erro na perda de carga, mostrados na tabela 1.

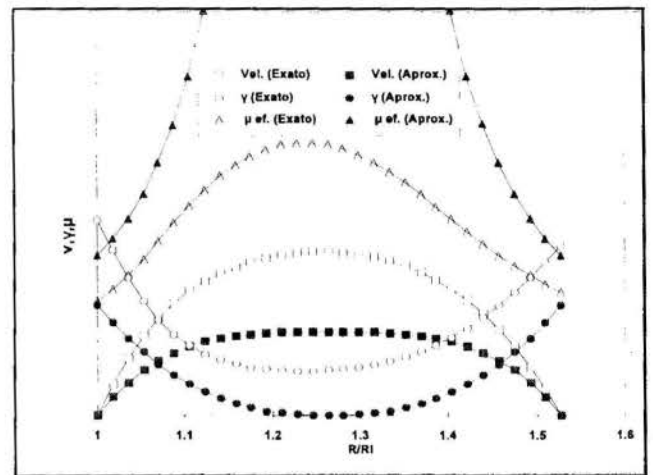


Figura 6 - Perfis de velocidade, taxa de deformação e viscosidade efetiva previstos pelos modelos da fenda de altura variável e numérico exato, ao longo do raio a  $90^\circ$  da direção onde há o maior afastamento entre os tubos, num anular 100% excêntrico com razão de diâmetros de 0,6 e um fluido de potência com  $n=0,4$ .

## CONCLUSÕES

1. Para pequenas excentricidades (até cerca de 40%), o modelo da fenda de altura variável permite o cálculo da vazão mesmo em anulares largos (razão de diâmetros de 0,2) e fluidos fortemente pseudo-plásticos com erros da ordem de 10%.
2. Em anulares fortemente excêntricos o erro introduzido pela aproximação da fenda de altura variável é extremamente dependente da razão de diâmetros e do comportamento reológico do fluido. Para fluidos newtonianos, o modelo pode ser usado em excentricidades de 100% com razão de diâmetros até 0,5, dentro de uma margem de erro de 10%. Por outro lado, fluidos pseudoplásticos em anulares fortemente excêntricos apresentam grande desvio do modelo aproximado, mesmo em razões de diâmetro de 0,6.

3. O erro no cálculo da vazão guarda pouca relação com o erro no perfil de velocidades e, sobretudo, com o perfil de taxas de deformação e de viscosidade efetiva. Estes dois últimos chegariam mais próximo dos reais caso fosse considerado em seu cálculo o gradiente tangencial de velocidade.

#### BIBLIOGRAFIA

Campos, W., Shirazi, S.A., Azar, J.J. e Pilehvari, A.A., 1994, "Mechanistic Modeling of Cuttings Transport in Highly Inclined Wells" (Modelamento Mecânico do Transporte de Cascalhos em Poços Inclinados), *Anais, ASME Fluid Engineering Summer Meeting*, Lake Tahoe, EUA. [Em Inglês]

Chin, W., 1992, *Borehole Flow Modeling in Horizontal, Deviated and Vertical Wells* (Modelamento de Escoamento em Poços Horizontais, Desviados e Verticais), Gulf Publishing Co., Houston, EUA. [Em Inglês]

Guckes, T.L., 1974, "Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in an Eccentric Annulus" (Escoamento Laminar de Fluido Não-Newtoniano em Anulares Excêntricos), *Anais, 57 ASME Petroleum Mech. Eng. Conf.*, paper 74. [Em Inglês]

Haciislamoglu, M. e Langlinais, J., 1990a, "Discussion of Flow of a Power Law Fluid in an Eccentric Annulus" (Discussão sobre Escoamento de um Fluido de Potência num Anular Excêntrico), *SPE Drilling Engineering*, março, pag. 95. [Em Inglês]

Haciislamoglu, M. e Langlinais, J., 1990b, "Non-Newtonian Fluid Flow in Eccentric Annuli" (Escoamento de Fluidos Não-Newtonianos em Anulares Excêntricos), *Anais, ASME Energy Resources Conference*, New Orleans, EUA. [Em Inglês]

Iyoho, A.W. e Azar, J.J., 1981, "An Accurate Slot-Flow Model for Non-Newtonian Fluid Flow Through Eccentric Annuli", *SPE Journal*, outubro, pag 565. [Em Inglês]

Lomba, R.F.T., 1994, *Escoamento Turbulento de Fluidos Newtonianos em Anulares Excêntricos*. Tese de mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Luo, Y. e Peden, J.M., 1987, "Flow of Drilling Fluids Through Eccentric Annuli" (Escoamento de Fluidos de Perfuração através de Anulares Excêntricos), *Anais, SPE Annual Technical Conf*, Dallas, EUA. [Em Inglês]

Slattery, J.C., 1981, *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua* (Transferência de Momento, Energia e Massa em Meios Contínuos), R. E. Krieger Publishing Co., New York, EUA. [Em Inglês]

Uner, D., Ozgen, C. e Tosun, I., 1989, "Flow of a Power law Fluid in an Eccentric Annulus" (Escoamento de um Fluido de Potência num Anular Excêntrico), *SPE Drilling Engineering*, setembro, pag. 269. [Em Inglês]

Vaughn, R.D., 1965, "Axial Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in Narrow Eccentric Annuli" (Escoamento Laminar Axial de Fluidos Não-Newtonianos em Anulares Excêntricos Estreitos), *SPE Journal*, dezembro, pag. 277. [Em

Inglês]

Villas-Boas, M.B., 1989, "Escoamento Helicoidal: Influência da Rotação sobre a Perda de Carga" *Anais, X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Rio de Janeiro RJ.

#### SUMMARY

The flow within the space between two pipes, one inside the other whose centers do not coincide is important in a number of industrial processes. Due to the great complexity of the this flow's geometry, it has been described by means of a number of approximations. This work estimates the deviations introduced by the most used approximations and establishes the limits for their applicability.





## EXPERIMENTAL STUDY OF NOZZLES EROSION DUE TO THE ACTION OF COMBUSTION GASES



José Gobbo Ferreira  
Laboratório de Combustão e Propulsão  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
12630-000 Cachoeira Paulista, SP, Brazil

### SUMMARY

*This paper presents the results of a study aimed to evaluate the recession behaviour of solid rocket motor graphite nozzles during operation. The experimental results are shown and its behaviour is explained and compared with those resulting from theoretical developments available in the literature. The effects of main parameters that influence nozzle recession are also discussed. The work refers to ATJ graphite nozzles when used in connection with a double base propellant. It is intended also to investigate if in this case, not usually studied in literature, recession behaviour is dominated by kinetic or diffusion processes.*

### INTRODUCTION

Nozzle geometry is very important in the design of a rocket motor. Its uncontrolled variation is detrimental to motor performance and introduces uncertainty about thrust output behaviour during motor operation. Nozzle erosion is responsible for changes in nozzle shape and surface roughness conditions. This is a serious problem that, unfortunately, seldom can be completely avoided, and deserves more and more concerns as solid propellants technology progresses, leading to more aggressive operation conditions. The purpose of studies like this one is to improve knowledge about the phenomena involved, aiming at to approximately predict the evolution of main nozzle dimensions along burning time.

Common nozzle materials can be metallic or carbonaceous. The former are constituted by metals or alloys and usually possess good mechanical properties but their temperature resistance is limited by its melting point value. Carbonaceous materials include polycrystalline graphite (extruded or molded), pyrolytic graphite and carbon-carbon materials (carbon fibers in a carbon matrix). Their mechanical behaviour is not comparable to that of metallic materials but they present a remarkable resistance to elevated temperatures (ablatives materials will not be dealt with in this work).

Some factors are generally agreed to strongly contribute for nozzle erosion. They are combustion gases temperature and composition, operation pressure, nozzle surface roughness, bulk density of carbonaceous nozzle materials and total burning time.

The temperature of gas products is closely associated to the combustion chamber one and, like gas composition, depends mainly on the nature of the propellant used. Operation pressure is a project parameter linked to motor efficiency and burning rate behaviour. Nozzle surface roughness is a manufacture process and finishing procedures characteristic. Bulk density of carbonaceous materials depends on the production process. Total burning time is determined by range considerations.

The efforts in this work were directed to the experimental observation of ATJ molded graphite behaviour when used in a double base solid propellant evaluation motor.

### EFFECT OF COMBUSTION PRODUCTS TEMPERATURE

The first and prominent factor in metallic nozzle structural resistance to motor operation is combustion gases temperature. It is obvious that this temperature must be kept below nozzle material melting point. As far as operation temperature is concerned, structural materials for nozzles are usually divided in four main classes:

- For  $T_g < 260^\circ\text{C}$ : Aluminum alloys, fiberglass composites, epoxy resins and high resistance steels.
- For  $260^\circ\text{C} < T_g < 1000^\circ\text{C}$ : High temperature super-alloys: iron-based, iron-nickel, nickel-based, cobalt-based and iron-nickel-cobalt-chrome.
- For  $1000^\circ\text{C} < T_g < 2500^\circ\text{C}$ : Refractory metal alloys, tungsten and some carbides, polycrystalline graphite and pyrolytic graphite.
- For  $T_g > 2500^\circ\text{C}$ : Polycrystalline graphite, pyrolytic graphite and carbon-carbon materials.

Refractory metal alloys are preferable over graphites until  $2500^\circ\text{C}$  owing to their better mechanical properties, but, beyond that value, only graphites and carbon-carbon materials are resistant enough to withstand the elevated temperature, often at the price of a worse mechanical behaviour.

Heat transfer to nozzle walls occurs mainly by convection and radiation. Radiation heat transfer is important at nozzle entrance due to the presence of particulates and radiative molecules as  $\text{H}_2\text{O}$  and  $\text{CO}_2$  in the gas flow. As pressure decreases and velocity increases in the convergent, convection becomes more and more important. In throat section, where area is a minimum, heat flux attains a maximum and convection largely predominates. In this region, an insert of a very heat-resistant material is usually employed.

Heat, coming from the gases and absorbed by the metallic nozzle, must be dissipated with a rate high enough to not allow the temperature inside the material to reach values capable to jeopardize mechanical integrity, usually those close to the melting point. The phenomenon is an all time transient one with constantly rising temperatures and this sets a practical limit to burning time.

Products temperature has no significant effect over carbonaceous materials global recession rate.

It is recognized that chemical attack is the main cause of the recession in carbonaceous nozzle materials (Klager (1977), Klager (1984), Keswani et al. (1983), Keswani and Kuo (1983), Kuo and Keswani (1985)).

The gaseous products flow through the nozzle establishes a turbulent boundary layer over its surface. As temperature rises at the surface, the carbonaceous material reactivity increases. Active species like those mentioned above diffuse to the surface and react with carbon causing erosion. Carbon concentration is not altered by these reactions, but oxidant species are depleted so creating a concentration gradient which promotes further diffusion and the continuation of the reactions.

The rate of nozzle recession depends both on chemical kinetics rates and on reactive species diffusion rates to the surface. The effect of both these phenomena over global recession rate can be represented by the expression:

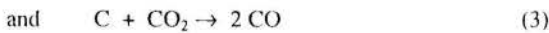
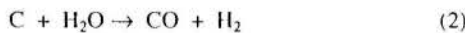
$$r = \left( \frac{1}{\Gamma_d} + \frac{1}{\Gamma_{ch}} \right)^{-1} \quad (1)$$

where  $\Gamma$  is the global recession rate,  $\Gamma_d$  is the recession rate produced only by diffusion rate of oxidizing species

and  $\Gamma_{ch}$  is the recession rate produced if only chemical kinetics were involved.

It can be seen that when one of the two second member recession rates is too large by comparison with the other, it is the least one that controls the global recession rate. This does happen during propellant combustion. In the beginning of motor operation, nozzle surface temperature is low and so are chemical kinetics rates. Chemical kinetics predominates then, until surface temperature reaches higher values increasing exponentially kinetic rates. From this moment ahead, diffusion rates become the controlling parameter. As temperature rises very rapidly, in about 1 second, the most part of motor operation happens under diffusion controlled regime, relatively insensible to temperature. This is why temperature does not affect carbonaceous materials bulk recession rate

The main heterogeneous reactions able to occur in the surface were fully discussed in the excellent work from Klager (1977) and also informed by Klager (1984). They are:



The effect of products composition over metallic nozzles erosion depends on the nature of particular nozzle material which can be made more or less resistant to oxidizing species attack, according to propellant formulation. Usually, high-energy propellants exhibits a very elevated flame temperature and metallic nozzles are not adequated in this case. In the other hand, as graphite is normally used only in high-temperature propellants, data about its behaviour at low-temperature products flux are

not easily found in literature. This work is a contribution to the filling of this gap.

EFFECT OF OTHER PARAMETERS

It has been seen that diffusion processes control recession rate during the whole burning time, except for a very short period when nozzle surface temperature did not yet attain the elevated values characteristic of motor operation. An increase in pressure increases gas phase density and in doing so, it increases the mass transfer rate across the boundary layer, obviously increasing reactions rates in the surface and largely enhancing recession rate.

The nature of turbulent boundary layers over the surface is also of importance in the process. Some factors have influence over it: its length and thickness over nozzle surface and turbulence kinetic energy and dissipation rate.

Boundary layer length and thickness are mostly determined by nozzle geometry. It has been observed experimentally that different nozzle shapes present different recession rates. Nozzle geometry and its fitting with the rest of motor are responsible for the establishment of boundary layer attachment point and, in consequence, for its thickness in throat section. Unfortunately, this leads to the conclusion arrived to by Keswani and Kuo (1983): graphite recession behaviour changes from a motor geometry to another and it seems not to be possible to arrive to a generalized recession rate empirical expression.

Turbulence kinetic energy and dissipation rate are determined by Reynolds number and by surface roughness. So, surface roughness has an effect over recession rate due to its influence over turbulence.

It seems clear that the greater the graphite bulk density, the more resistant it is to erosion. Indeed this is observed in experiments.

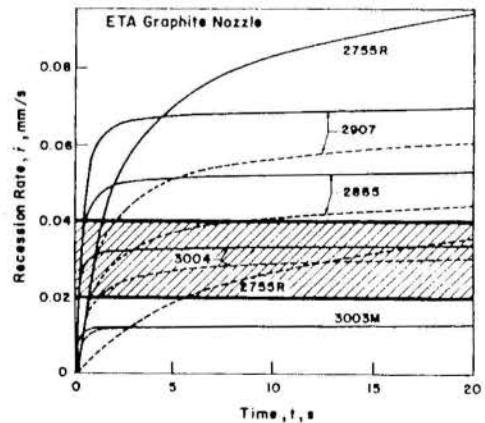


Fig. 1: Recession rate evolution along time, for several propellants and two kinetic set of parameters.(This work results fall inside the shaded area)

In short, as shown in figure 1, from Keswani et al (1983), the time history of nozzle erosion is as follows: in the beginning of motor operation recession rate rises abruptly with the initial increase in temperature, due to the influence of chemical kinetics. Soon, diffusion rates take the lead and recession rate assumes a constant value during the rest of burning time. Obviously, total recession is the

result of the integration of recession rate along time. Total burning time is determined by project expected final size. In metallic nozzles, as discussed above, heat transfer considerations determine the allowable total burning time

**THEORETICAL MODEL**

A very comprehensive theoretical model for recession rates is due to Kuo and Keswani (1985). It was developed for carbon-carbon materials and consists in a set of seven partial differential equations, one ordinary one and two algebraic ones. It describes the conservation equations of mass, momentum, species, enthalpy, turbulence kinetic energy, turbulent dissipation rate and equation of state for the turbulent boundary layer region and mass and energy conservation equations for the inviscid core flow region. Closure of turbulent flow problem is obtained by the use of a second-order k-ε turbulence model.

Transient heat conduction in condensed phase is calculated by the use of the classical equation and boundary and initial conditions are specified at the solid-gas interface and in the free stream.

The problem is solved by numerical techniques, with special emphasis in the modification of damping coefficient in such a way that a k-ε turbulence model could be used in the near wall region, where Reynolds numbers are low (Chambers and Wilcox (1977), Cebeci and Chang (1978), Arora and Kuo (1982)).

The results of the model, for two different sets of kinetic parameters for the reaction between H<sub>2</sub>O and CO<sub>2</sub> with carbon have been shown in figure 1.

**EXPERIMENTAL SET**

The experimental set is composed of a test motor (figure 2) and a solid propellant grain (figure 3). The propellant composition is shown in Table 1.

COMPONENT	MASS PER CENT
Nitrocellulose	60.97
Nitroglycerin	25.74
Triacetin	6.93
Di-methylphthalate	2.68
Additives	3.68

Table 1: Propellant mass composition

The nozzles had their throat surface area varied, to change pressure levels in combustion chamber. Figure 4 shows a typical nozzle configuration

The nozzle set was fixed in a Zeiss profile projector, which is able to amplify the projected profiles up to ten times. Nozzle throat profile projection was recorded before and after tests by using the same amplifying level, and initial (before test) and final areas (after test) were measured by using an Arquimedes planimeter, with an accuracy of ± 2%. Area measurement is a critical part of the process due to human factors, but precision of the results can be improved with the help of a skilled operator. (Note that the same accuracy and precision levels apply to initial and final measurements). The adopted value is usually the mean of five measurements. Again, maximum deviation of each measurement from mean is less than 2%. Due to the small number of measurements it is not advisable to use standard deviation. Test duration is

measured in a Visicorder type recorder during static test. This recorder can be calibrated to measure down to 100 ms. The least test time measured was 7.25s which means that uncertainty in time measurement is less than 1,38%. So, it can be considered that the experimental results have an uncertainty of less than 2%.

As erosion is not regular, a mean diameter was determined after each test based on final throat area and average recession rate was calculated by dividing half the difference between final and initial diameters by the measured burning time. No effort was made to measure instantaneous recession rates

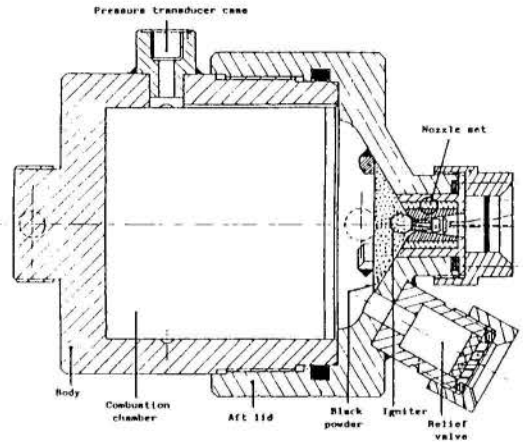


Fig. 2: The test motor

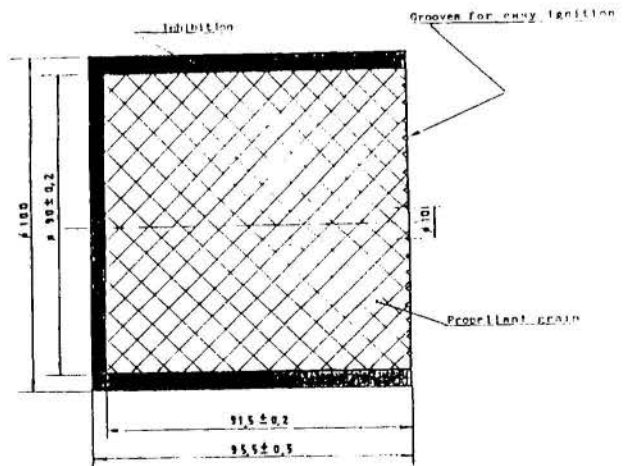


Fig. 3: The solid propellant grain

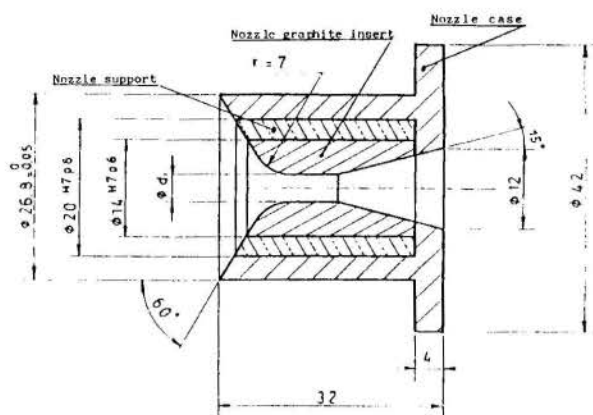


Fig. 4: The nozzle set

## RESULTS AND DISCUSSION

Even with the use of a relatively low flame temperature double base propellant (2074 K in the throat section), the results obtained still showed a marked influence of diffusion in the sense that pressure demonstrated a very strong influence over recession rates, not justifiable by kinetic considerations only. The observed dependence of recession rate on pressure obeys an exponential law with exponent approximately twice the one theoretically deduced by Kuo and Keswani (1983):

$$\text{Kuo and Keswani: } \Gamma \propto p_c^{0.876} \quad (4)$$

$$\text{This study: } \Gamma \propto p_c^{1.54} \quad (5)$$

where  $p_c$  is combustion chamber pressure.

This can be explained taking in account material porosity and bulk density. In this study, graphite has a low bulk density, around 1.9 g/cm<sup>3</sup>, and its porosity probably offers much more active sites for reaction to occur than Keswani's one. As discussed above, an increase in pressure favours diffusion processes which bring a greater amount of reactant species to contact with carbon. The values measured are well inside the range of the ones found by Keswani et al. (1983) as can be seen in figure 1, where the results of this work fall into the shaded area.

Recession rate was found to be negligible until a pressure of 40 atm. Beyond that value, it can be expressed by

$$\Gamma = 1,55 \cdot 10^{-4} Y_{H_2O} p_c^{1.54} \quad (6)$$

where  $Y_{H_2O}$  is the molar fraction of water vapour in the throat section.

This form was adopted to make comparisons with the correlation proposed by Geisler (1981), who, as quoted by Keswani et al. (1983), suggested the expression:

$$\Gamma = 0.58 Y_{H_2O} (p_c/1000)^{0.8} \quad (7)$$

where  $p_c$  is in psi.

Strangely enough, the values calculated using it do not fall into the range of figure 1.

Table 2 shows propellant decomposition products molar concentrations at throat section as calculated by Gordon and McBride (1971) program.

COMPONENTS	MOLE FRACTIONS
H <sub>2</sub>	0.1537
H <sub>2</sub> O	0.1993
CO	0.4212
CO <sub>2</sub>	0.1141
N <sub>2</sub>	0.1094
Others	0.0023

Table 2: Products equilibrium composition at throat section

Figure 5 plots experimental values measured in this study and the ones represented by equation (6). Each experimental point represents the average of five measurements.

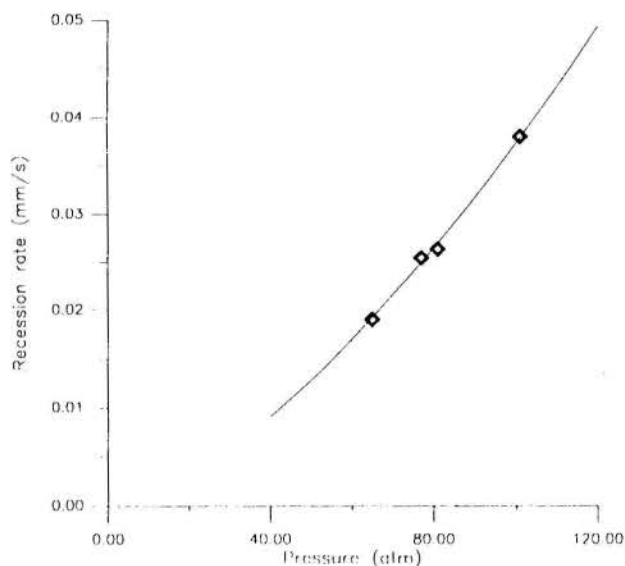


Fig. 5: Comparison between experimental data and eq. (6)

## CONCLUSIONS

The results of a set of experimental measurements of nozzle materials recession rates, when submitted to the efflux of solid propellant combustion processes, have been presented. Throughout the work, efforts were made to introduce the principles and theoretical background behind the phenomena involved.

These results are well inside the expected range, but differ from some previous theoretical ones in pressure dependence. In the case of present study, pressure exponent was found to be greater than the previously predicted. This has been attributed to graphite quality and to absence of metal powder, usually aluminum, in propellant formulation. The material here analysed is supposed to be less dense and more porous than the one studied abroad and its pores remained totally exposed to diffusion gases due to the absence of aluminum fuel, which often deposits on the surface in the form of alumina so somewhat protecting it.

A common double base propellant was used and this allowed the observation of the phenomena in a



temperature range usually not found in general literature about the subject. Nevertheless, established theory explained very well the observed facts.

An empirical expression for regression rates was deduced, and it traduces very well the results found under the conditions of the described experiments.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The author is indebted to Eng. R.A. Roux, M.S., of IMBEL (Brazilian Ordnance Industry) and to Mr.W. Carvalho, Senior Technician, (Brazilian Army Research and Development Institute) for their friendly help during the preparation of this work.

#### REFERENCES

Arora, R. and Kuo, K.K., 1982, "Near-wall Treatment for Turbulent Boundary Layer Computations", *AIAA Journal*, Vol 20, n° 11, pp 1481-1482.

Cebeci, T. and Chang, K.C., 1978, "Calculation of Incompressible Rough-Wall Boundary Layer Flows", *AIAA Journal*, Vol.16, n° 7, pp 730-735.

Chambers, T.L. and Wilcox, D.C., 1977, "Critical Examination of Two-Equation Turbulence Closure Models for Boundary Layers", *AIAA Journal*, Vol. 15, n° 6, pp 821-828.

Geisler, R.L., 1981, "The Prediction of Graphite Nozzles Recession Rates", JANNAP Propulsion Meeting, *CPIA Publication n° 340*, Vol. 5, pp 51-68.

Gordon, S. and McBride, B.J., 1971, "Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks and Chapman-Jouguet Detonations", NASA SP 273.

Keswani, S.T.; Andiroglu, E.; Campbell, J.D. and Kuo, K.K., 1983, "Recession Behaviour of Graphitic Nozzles in Simulated Rocket Motors", *AIAA 83-1317, AIAA/SAE/ASME 19th Joint Propulsion Conference*.

Keswani, S.T. and Kuo, K.K., 1983, "An Aerothermochemical Model of Carbon-Carbon Composite Nozzle Recession", *AIAA-83-0910-CP, AIAA/ASME/ASCE/AHS 24th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*.

Klager, K., 1977, "The Interaction of the Efflux of Solid Propellants with Nozzle Materials", *Propellants and Explosives*, Vol. 2, pp 55-63.

Klager, K., 1984, Personal Communication.

Kuo, K.K. and Keswani, S.T., 1985, "A Comprehensive Theoretical Model for Carbon-Carbon Composite Nozzle Recession", *Combustion Sci., and Tech.*, Vol. 42 pp 145-164.

## EXPERIMENTAL PROGRESSES IN THE RESEARCH OF SOLID FUEL RAMJET PROPULSION



José Gobbo Ferreira  
Laboratório de Combustão e Propulsão  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
12630-000 Cachoeira Paulista, SP, Brazil

### SUMMARY

*This paper presents a brief description of the efforts developed in Brazil in the field of Solid Fuel Ramjet (SFR) researches and relates relevant results arrived to during the works.*

### INTRODUCTION

Solid fuel ramjets (SFR's) constitute an important subject in the current stage of propulsion research. These systems can incorporate the high performance achieved by conventional liquid fuel ramjets to the simplicity of solid fuel motors, leading to significant advantages related to fabrication and operation costs.

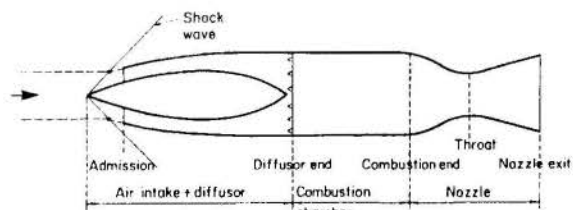


Figure 1: Schematic of a ramjet

A ramjet is an air-breathing propulsion apparatus, showed schematically in figure 1. As it flies at a certain speed and altitude, the air captured from the atmosphere is heated and compressed as it passes through the shock wave established in the air intake edge section. Air pressure is additionally increased as it traverses the diffuser section of the engine and, in the combustion section, this hot, high-pressure air stream is put in contact with some fuel, that can be liquid, as in figure 1, or solid, as in the case in study. The resulting gases are then expanded in a nozzle, to produce thrust.

The extreme simplicity and easy of operation of ramjets is fundamentally based in the fact that it needs no movable parts to perform properly. On the other hand, it has not a starting capability: it has to be led to an initial speed, when the incoming air reaches the expected values of pressure and temperature downstream the shock wave.

There are some particular problems usually associated with this propulsion device. Among them we consider the followings as being the most important ones:

- A convenient installation to simulate real flight conditions,
- the selection of a fuel material,
- flame holding requirements,

- determination of fuel regression rate as a function of flight speed and altitude and
- definition of mixing sections able to take maximum profit of diffusion controlled combustion processes.

The interest for ramjet propulsion in Brazil arised from an Army project aiming at to use it as a way to improve small artillery grenades range. This initial goal determined the dimensions of the experimental installation. In this connection, a first graduate work was developed, arising in the development of an experimental test set for the simulation of real flight conditions. Then other similar studies were undertaken focusing the fuel and the burning processes inside the engine.

### THE EXPERIMENTAL SET

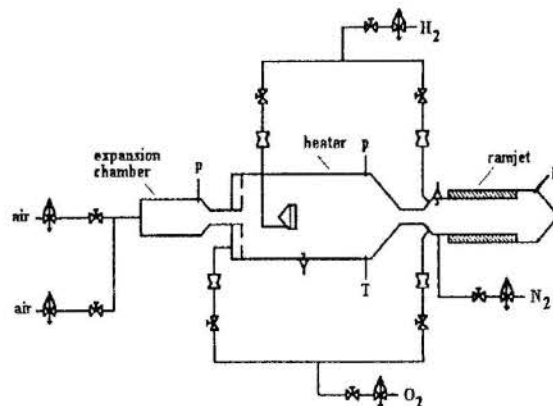


Figure 2: Schematic of the test stand

Figure 2 shows the schematic of the test stand. This arrangement was initially set up by Migueis (1986) (also Migueis et al. (1986)). Its modular structure allowed investigation of different chamber conditions by simply changing the nozzles.

Cold air, coming from commercial cylinders, arrives to the expansion chamber which is aimed at to decrease the cold air velocity and provide conditions to attach the stream lines to the internal wall, making the flow virtually axial.

The heater simulates the stagnation conditions observed during normal flight regime. This component heats up the air mass flow rate at variable pressures by making it to pass through

an oxygen-hydrogen flame. The ignition of the gaseous mixture of air, oxygen and hydrogen is produced by a spark plug. The amount of oxygen introduced is calculated in such a way that the outgoing air stream have the same oxygen concentration as in normal atmosphere. Nonetheless, some water vapor and  $\text{CO}_x$ , coming from combustion, is present in it. This is the reason why this apparatus is called "sue heater". In this arrangement, all gas streams come from commercial cylinders containing initially  $7,5 \text{ m}^3$  at 150 atm for hydrogen and  $10 \text{ m}^3$  at 200 atm for oxygen, nitrogen and compressed air. Two cylinders of air are used in parallel.

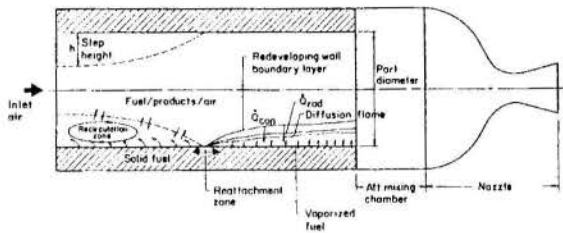


Figure 3: Combustion processes in a solid fuel ramjet

Figure 3 shows the processes taking place in the experimental ramjet, as described by Gobbo Ferreira et al. (1996). The air is dumped in ramjet combustion chamber through a perforated plate and establishes a recirculation zone whose length is proportional to the height of the entrance step. This zone is characterized by high turbulence, elevated heat transfer rates and a very effective mixing between air and gaseous fuel coming from polymer pyrolysis which leads to a relatively high reaction rate and to the formation of gaseous oxidant combustion products. Besides, the recirculation zone serves as a flame holder, providing stability for the resultant flame. The zone ends in a reattachment region where a turbulent boundary layer starts to develop. Convective,  $\dot{Q}_{\text{conv}}$ , and radiative,  $\dot{Q}_{\text{rad}}$ , heat transfer from the flame assure the pursuit of polymer decomposition. Downstream this region the high temperature of the gas flow allows for the establishment of a turbulent diffusion flame between the species contained in the core gas and the ones coming from the polymer pyrolysis. This flame spreads throughout the polymer bore and the total gases produced in the whole grain plus the excess air at the exit of the bore are supposed to still contain oxidant and fuel species, so they are introduced in an afterburning chamber whose task is to improve the turbulence of the stream, to allow the reactions to proceed, improving the combustion efficiency of the apparatus. After this chamber the resultant gases are expanded in a nozzle to produce thrust.

A detailed schematic of the experimental ramjet is shown in figure 4. Its combustion chamber can be divided in the three main regions described above: the recirculation region, the chemically active turbulent boundary layer and the post mixing chamber.

The whole set, ramjet plus heater, expansion chamber, ignition devices, etc. are being successively improved at each new research project. This happened, for instance, to the ignition system, allowing a quicker response of the apparatus to the initial signal, and to the quenching system, allowing cold gaseous

nitrogen to abruptly interrupt combustion, for the sake of precision in burning time measurements.

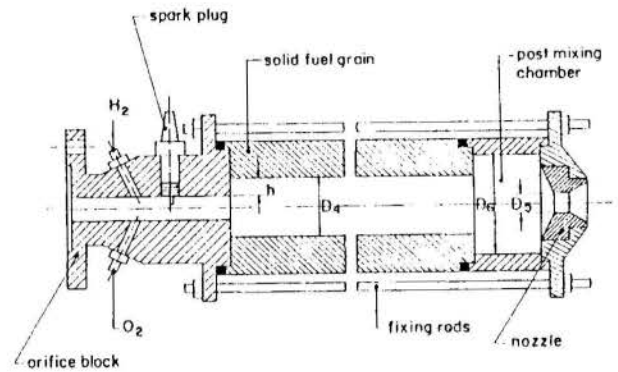


Figure 4: Schematic of the experimental solid fuel ramjet

#### SELECTION OF FUEL MATERIAL

The important characteristics for a material to be chosen as a fuel in a ramjet are the gravimetric or the volumetric heat release, the combustion properties (ease of ignition, stability, etc), the ease of processing, the cost and the availability.

Migueis (1986) used polyester as fuel, sometimes enriched with up to 25% of ammonium perchlorate to increase the energy of the set and provide stability of combustion. He used also to paint externally the grain with a concentrated solution of double-base propellant in acetone, to make ignition easier.

Veras (1991) and Silva (1995) choosed polyethylene for fuel. The grain was used bare, that is, without ignition aid and never contained any additive. The advantage of polyethylene over polyester, as far as scientific observation is concerned, is that it is translucent, so it allows visual monitoring of the bulk combustion.

Both of these materials allowed interesting observations to be gathered and served very well for research purposes. They were chosen because they are inexpensive and easy to manipulate. But they are energetically poor and do not seem worthwhile for a real use. According to literature results, a blend of polybutadiene and polystyrene is a very good-performing fuel and is to be investigated in future works.

#### FLAME HOLDING PHENOMENA

As mentioned before, the chamber entrance step is responsible for the formation of a recirculation region which, besides improving turbulence and increasing combustion reaction rates, plays the role of a flame holder. Experimental evidence, often cited in literature, was also observed by Migueis (1986) and Veras (1991). They confirmed that there is a critical height for this step, below which the flame cannot be hold and blows away from the chamber.

The determination of this critical value is related to two main geometrical ratios. The first is the one between nozzle throat and internal bore diameters, which is responsible for the set of combustion chamber internal pressure (it is the inverse of

the square root of the well known ratio usually called "initial K", or "Klemmung" in solid propellant rocket theory). The second is the ratio between entrance step and the internal bore diameter. Figure 5 shows the limits within which the flame is stable, for polyethylene combustion in the present experimental set, as determined by Veras (1991), for two incoming air temperatures, 780 K and 588 K.

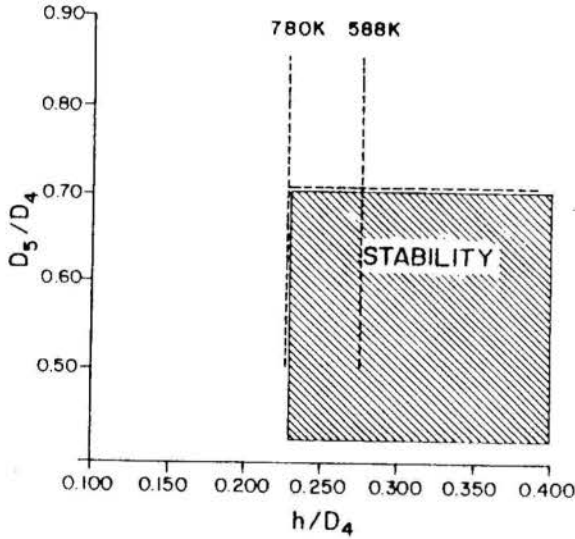


Figure 5: Envelope of flame stability

#### FUEL REGRESSION RATE

The fuel regression rate is one of the most important parameters needed for SFR design. It is agreed that it depends on the combustion chamber pressure, the air mass flux through the chamber bore and the chamber temperature. As a matter of fact, this relationship comes from the fact that heat transfer to the burning surface depends itself on these same parameters. In the experimental set, the values for pressure and temperature reproduce the ones when the engine flies at a certain speed and altitude.

As in almost every heterogeneous chemical reaction, heat transfer plays a fundamental role in regression rate. In this case, the competition between convective and radiative heat transfer to the surface results in a very interesting behaviour of the evolution of regression rate with chamber pressure. Regression rate is almost insensitive to pressure increase below approximately 7 atm and above 12 atm and increases steadily between these limits. Silva (1995) arrived to the following expression for the regression rate:

$$\dot{r} = 9.675 \times 10^{-4} P_c^{0.8} G_{air}^{0.35} T_{air}^{0.38}$$

Gobbo Ferreira et al. (1966) improved it's accuracy by putting:

$$\dot{r} = 2.78 \times 10^{-3} P_c^{0.8} G_{air}^{0.35} T_{air}^{0.36}$$

This last formula proved to represent with good accuracy the regression rate in the intervals  $6.0 \text{ atm} < p_c < 11 \text{ atm}$ ,  $G_{air} < 16.5 \text{ g/cm}^2 \cdot \text{s}$  and  $300\text{K} < T_{air} < 787 \text{ K}$ . Figure 6 shows the variation of regression rate with low values of mass flux, for chamber pressures of 7.5 and 9 atm and an incoming air temperature of 300 K.

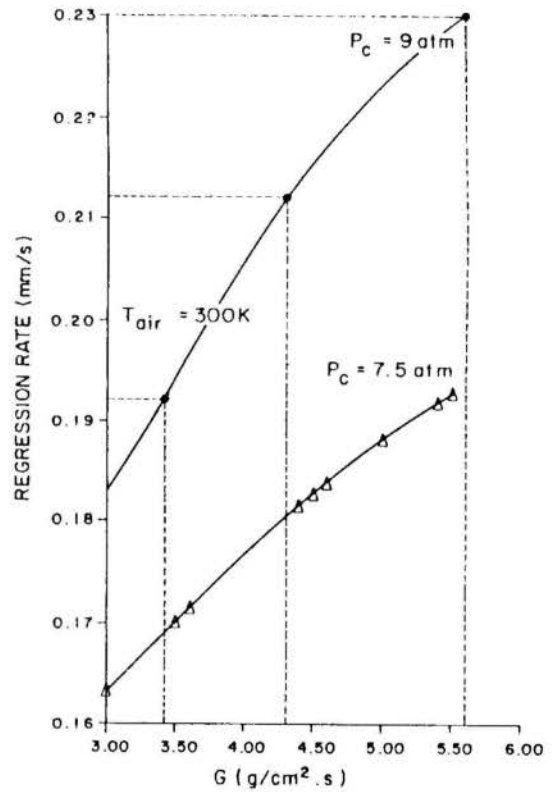


Figure 6: Dependence of fuel regression rate on mass flux

#### INFLUENCE OF MIXING SECTIONS

It is apparent that the gas flow issuing from the internal bore at the end of combustion chamber contains enough fuel and oxidant species to allow the pursuit of the reactions, so increasing engine efficiency. To attain this goal, an aft mixing chamber is attached to the combustion chamber, upstream nozzle entrance. The experiments of Veras (1991) showed that reactions do occur in this section, and more, that the length of post mixing chamber has an important influence in efficiency, that results in an increase of about 6% in thrust when the aft mixing chamber length is augmented from 43 mm to 86 mm. As far as combustion is concerned, this is a very interesting result, but it is always necessary to evaluate if the increased length, volume and mass penalties are worthwhile in the final mission budget.

Another important conclusion arrived to by Silva (1995), is that the introduction of an intermediate mixing chamber, by cutting the grain just after the estimated end of recirculation zone and inserting it there, greatly improved the regression rate in the remaining part of the grain. Conclusions about the effect of this chamber upon thrust are yet to be clarified, but the results are very promising.



## CONCLUSION

A brief report of the development of solid fuel ramjet researches in Brazil was presented, where some of the main aspects of SFR operation and test procedures were treated. The techniques necessary to accomplish these and further studies are already set up and have been progressively improved at each new work. The results obtained until now are in very good agreement with the ones found in the literature and some original features were disclosed.

Further work is being envisaged which is supposed to shed more light over the phenomena lying behind SFR combustion processes.

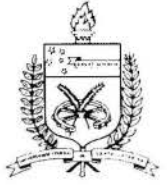
## REFERENCES

- Gobbo Ferreira, J.; Carvalho Jr., J.A. and Silva, M.G., 1996, "Experimental Investigation of Polyethylene Combustion in a Solid Fuel Ramjet", 32nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Lake Buena Vista, FL, U.S.A.
- Migueis, C.E.S., 1986, "Test Stand for Ramjets Employed in Secondary Propulsion of Artillery Grenades", M.Sc. Dissertation, (in portuguese), Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ.
- Migueis, C.E.S., Bastos Netto, D., Amarante, J.C.A. and Gobbo Ferreira, J., 1986, "Combustion, Simulation and Static Tests in Solid Fuel Ramjets, 1<sup>o</sup> ENCIT, Rio de Janeiro, RJ.
- Silva, M.G., 1995, "Experimental Determination of Polyethylene Regression Rate when used in Solid Fuel Ramjets", M.Sc. Dissertation (in portuguese), Escola de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, SP.
- Veras, C.A.G., 1991, "Experimental Analysis of the Combustion Chamber of a Solid Fuel Ramjet", M.Sc. Dissertation (in portuguese), Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ.



## MODELAGEM E PESQUISA DOS ESCOAMENTOS REAGENTES EM TUBEIRAS

Ângela P. Spilimbergo, Raísa L. Iskhakova  
Departamento de Física, Estatística e Matemática  
Universidade de Ijuí  
Caixa Postal 560 - 98.700-000 - Ijuí - Rs - Brasil



### RESUMO

O trabalho destina-se ao estudo de escoamentos quimicamente equilibrados em tubeiras convergente-divergente que são utilizadas em turbomotores, em propulsores, etc. Aplica-se o modelo (Alemassov et al., 1980) que é invariante em relação as substâncias individuais e tipos de bipropelentes. O modelo foi completado com o método do "meio local reagente" para avaliar a combustão incompleta. Foram realizados cálculos para produtos de combustão de vários bipropelentes em intervalo amplo do coeficiente de excesso do oxidante, da pressão na câmara e da taxa de expansão do fluxo na tubeira.

### INTRODUÇÃO

Tubeiras possuem amplas aplicações em instalações energéticas (turbomotores, turbinas, propulsores, etc.). A modelagem e a pesquisa dos processos de expansão do gás reagente de trabalho apresenta considerável interesse para a ciência e prática.

Esta pesquisa dedica-se as investigações dos escoamentos quimicamente equilibrados em tubeiras nas condições correspondentes as de propulsores líquidos, ou seja  $P_{oc} \approx 100 \text{ atm}$ ;  $T_{oc} \approx 3000 \text{ K}$ ;  $w_s \approx 3000 \text{ m/s}$  onde  $P_{oc}, T_{oc}$  são parâmetros na entrada da tubeira. A figura 1 mostra a distribuição típica das principais características ao longo da tubeira.

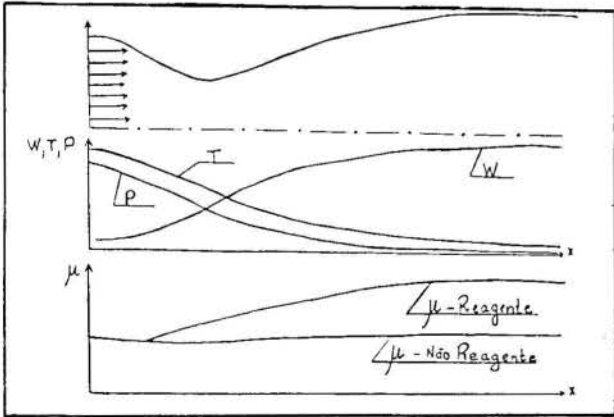


Figura 1 - Variação de parâmetros ao longo da tubeira

Observamos que durante o processo ocorre alteração na composição do gás de trabalho (devido a recombinação) e pode surgir alguma fase condensada. Por esta razão não se utiliza as equações gasodinâmicas habituais (com  $k, R = \text{const.}$ ) (Sisson e Pitts, 1988) e é necessário aplicar outras equações.

### DESCRIÇÃO DO MODELO

Existem alguns modelos matemáticos (Alemassov et al.,

1980; Gordon e McBride, 1971) para prognosticar propriedades de fluxos quimicamente equilibrados em tubeiras. Um deles foi aplicado no presente trabalho (Alemassov et al., 1980) com algumas modificações, que serão indicadas mais adiante.

O modelo baseia-se nas seguintes suposições:

- o meio reagente inclui  $m$ -tipos de moléculas e radicais ( $j=1...m$ );  $n$ -tipos de átomos ( $i = 1...n$ ) que ficam em equilíbrio químico entre si, com a temperatura ( $T$ ) e a pressão ( $P$ ) em cada seção da tubeira.
- O fluxo é unidimensional, sem atrito e sem transmissão de calor nas paredes.

O modelo de Alemassov et al. (1980) está apresentado mais detalhadamente, na língua portuguesa, em Spilimbergo et al. (1995a) e Spilimbergo et al. (1995b).

O modelo utiliza os seguintes conceitos:

- Fórmula condicional do bipropelente  $[b_{1p}...b_{np}]$  que é formada na base das fórmulas condicionais do combustível  $[b_{1c}...b_{nc}]$ , do oxidante  $[b_{1ox}...b_{nox}]$  que estão ligados pela fórmula:

$$b_{ip} = b_{ic} + \alpha_{ox} \cdot \kappa_o \cdot b_{iox} \quad (1)$$

onde  $\kappa_o$  é o coeficiente estequiométrico molar e  $\alpha_{ox}$  é o coeficiente de excesso do oxidante calculado pela expressão:

$$\alpha_{ox} = \frac{k_m}{k_m^o} \quad (2)$$

sendo  $k_m$  o coeficiente mássico real e  $k_m^o$  o coeficiente estequiométrico mássico.

- Entalpias do combustível ( $I_c$ ), do oxidante ( $I_{ox}$ ) e do bipropelente ( $I_p$ ) que estão ligadas pela fórmula:

$$I_p = \frac{I_c + I_{ox} \cdot \alpha_{ox} \cdot k_m^o}{1 + \alpha_{ox} \cdot k_m^o} \quad (3)$$

- Constantes de dissociação das moléculas nos átomos ( $K_j$ ) que são funções da temperatura.

São utilizados também conceitos como seção mínima,  $P^*$ ,  $T^*$ ,  $P_j$ ,  $P_j$ ,  $I_{es}$  que já são conhecidos.

O modelo contém as equações:

a) da dissociação das moléculas (e radicais) nos átomos:

$$\ln P_j - \sum a_{ij} \cdot \ln P_i + \ln K_j = 0 \quad (4)$$

onde  $P_i$  e  $P_j$  são as pressões parciais das substâncias moleculares-'j' e substância átomos-'i' e  $a_{ij}$  é a quantidade de átomos tipo-'i' em uma molécula-'j'.

b) da conservação dos átomos:

$$\ln \left( \sum_j a_{ij} \cdot P_j + P_i \right) - \ln M_p - \ln b_{ip} = 0 \quad (5)$$

onde  $M_p$  é uma grandeza incógnita auxiliar.

c) de Dalton:

$$\ln \left( \sum_q P_q \right) - \ln P = 0 \quad (6)$$

onde:  $q = 1, \dots, k$  sendo  $k = m + n$ .

Se são conhecidos os valores "T e P" é possível determinar as grandezas  $P_i$ ,  $P_j$  e  $M_p$ . Mas para o estado inicial a temperatura  $T_{oc}$  é incógnita e neste caso junto com (4) - (6) é necessário utilizar a equação da energia:

$$I_p - I_{pc} = 0 \quad (7)$$

onde  $I_{pc}$  é a entalpia dos produtos de combustão.

Habitualmente para determinar as propriedades nas várias seções da tubeira (incluindo a saída) é conhecida a pressão  $P_s$  em cada seção. Neste caso junto com as equações (4)-(6) utiliza-se a equação da expansão isentrópica:

$$S(P, T) - S_{oc} = 0 \quad (8)$$

sendo  $S(P, T)$  a entropia dos produtos de combustão em cada seção e  $S_{oc}$  a entropia na câmara de combustão.

Para calcular as propriedades na seção mínima, além de (4)-(6) é necessário aplicar as equações:

$$a) S(P^*, T^*) - S_{oc} = 0 \quad (9)$$

$$b) \left[ \sqrt{2(I_{oc} - I^*)/a_e} \right] - 1 = 0 \quad (10)$$

( $I_{oc}$  é a entalpia na câmara de combustão,  $I^*$  a entalpia na seção mínima da tubeira e  $a_e$  a velocidade equilibrada do som) pois as grandezas  $P^*$ ,  $T^*$  são incógnitas.

Nos resultados dos cálculos obtemos:

- na entrada:  $P_i$ ,  $P_j$ ,  $M_p$  e  $T_{oc}$ ;

- na seção mínima:  $P_i$ ,  $P_j$ ,  $P^*$ ,  $T^*$  e  $M_p$ ;

- em qualquer seção:  $P_i$ ,  $P_j$ ,  $M_p$  e  $T$

logo após pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \ln P_j}{\partial \ln T} \right)_P - \sum_i a_{ij} \left( \frac{\partial \ln P_i}{\partial \ln T} \right)_P = - \left( \frac{\partial \ln K_j}{\partial \ln T} \right) \\ \sum_j a_{ij} P_j \left( \frac{\partial \ln P_j}{\partial \ln T} \right)_P + P_i \left( \frac{\partial \ln P_i}{\partial \ln T} \right)_P - B_i \left( \frac{\partial \ln M_p}{\partial \ln T} \right)_P = 0 \\ \sum_q P_q \left( \frac{\partial \ln P_q}{\partial \ln T} \right)_P = 0 \end{cases} \quad (11)$$

onde  $B_i = \sum_j a_{ij} \cdot P_j + P_i$

pode-se determinar as derivadas parciais (em cada seção):  $\frac{\partial \ln P_q}{\partial \ln T}$ ;  $\frac{\partial \ln P_q}{\partial \ln P}$ ;  $\frac{\partial \ln M_p}{\partial \ln T}$ ;  $\frac{\partial \ln M_p}{\partial \ln P}$ ; as várias propriedades termodinâmicas e termofísicas (em cada seção) e os parâmetros do fluxo:  $C_{pe}$ ,  $C_{pf}$ ,  $\mu$ ,  $r_i$ ,  $a_e$ ,  $a_f$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $w$ ,  $I_{es}$ ,  $I$ ,  $\beta$ ,  $n$  - que são dados por:

$$\text{- Fração molar de cada substância: } r_q = P_q / P \quad (12)$$

$$\text{- Massa molecular média: } \mu = \frac{\sum r_q \cdot \mu_q}{q} \quad (13)$$

- Entalpia:

$$I = \frac{\sum (I_q \cdot r_q)}{q} \quad (14)$$

onde  $I_q$  é a entalpia de cada substância.

- Calor específico "congelado":

$$C_{pf} = \frac{\sum (P_q \cdot C_{pq})}{P} \quad (15)$$

onde  $C_{pq}$  é o calor específico de cada substância.

- Calor específico equilibrado:

$$C_{pe} = C_{pf} + \frac{1}{M_p \cdot T} \left[ \sum_q P_q \cdot I_q \cdot \left( \frac{\partial \ln P_q}{\partial \ln T} \right)_P \right] - \frac{1}{T} \left( \frac{\partial \ln M_p}{\partial \ln T} \right)_P \quad (16)$$

- Velocidade equilibrada do som em cada seção:

$$a_e = \sqrt{\frac{k_e \cdot R_o \cdot T}{\mu \cdot [1 + (\partial \ln \mu / \partial \ln P)_T]}} \quad (17)$$

sendo  $k_e$  índice do processo adiabático equilibrado.

$$\text{- Velocidade "congelada" do som: } a_f = \sqrt{k_f \cdot (R_o / \mu) \cdot T} \quad (18)$$

onde  $k_f$  é o índice do processo adiabático "congelado":

$$\text{- Velocidade do escoamento: } w = \sqrt{2 \cdot (I_{oc} - I)} \quad (19)$$

- Impulso específico no vácuo em cada seção:

$$I_{es} = w + P / (\rho \cdot w) \quad (20)$$

- Velocidade característica:

$$\beta = (P_{oc} \cdot R_o \cdot T^*) / P^* \cdot w^* \cdot \mu^* \quad (21)$$

- Coeficiente adiabático médio:

$$n = \ln \left( \frac{P_{oc}}{P_s} \right) / \ln \left( \frac{P_{oc} \cdot R_s \cdot T_s}{P_s \cdot R_{oc} \cdot T_{oc}} \right) \quad (22)$$

Este modelo permite calcular características termofísicas, mesmo que elas não sejam utilizadas nele. Estas características são necessárias para determinação (em outros modelos) de perdas do impulso específico por atrito ( $n, \lambda, \mu, \eta$ ) e por não-

paralelismo ( $n, \mu$ ); para a determinação da transferência de calor nas paredes ( $w, \mu, r_i, \lambda, \eta$ ): etc. Estas características calcula-se pelas expressões:

$$\text{- Viscosidade } \eta = \sum_q \frac{\eta_q \cdot r_q}{\sum_i \varphi_{q_i} \cdot r_i} \quad (23)$$

sendo

$$\eta_q = 26.7 \cdot 10^{-7} \cdot \left( \sqrt{\mu_q \cdot T} / \sigma_q^2 \cdot \Omega^{2.2} \right) \quad (24)$$

$$\text{e} \quad \varphi_{q_i} = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\eta_q}{\eta_i} \right)^{0.5} \left( \frac{\mu_i}{\mu_q} \right)^{0.25} \right]^2}{2\sqrt{2} \left( 1 + \frac{\mu_q}{\mu_i} \right)^{0.5}} \quad (25)$$

$$\text{- Condutibilidade térmica: } \lambda = \lambda_f + \lambda_e \quad (26)$$

onde as condutibilidades "congelada" ( $\lambda_f$ ) e "equilibrada" ( $\lambda_e$ ) são dadas por:

$$\lambda_e = \left( \left( C_{pe} / C_{pf} \right) - 1 \right) \cdot \lambda_f \quad (27)$$

$$\text{e} \quad \lambda_f = \lambda' + \lambda'' \quad (28)$$

$$\text{onde: } \lambda' = \frac{\sum \lambda'_q \cdot r_q}{\sum_i \psi_{q_i} \cdot r_i} \quad (29)$$

$$\text{com} \quad \psi_{q_i} = \varphi_{q_i} \cdot \left[ 1 + \frac{2.41 \cdot (\mu_q - \mu_i) \cdot (\mu_q - 0.142\mu_i)}{(\mu_q + \mu_i)^2} \right] \quad (30)$$

$$\text{e} \quad \lambda'' = \sum_q \frac{(\lambda_q - \lambda'_q) \cdot r_q}{\sum_i r_i \cdot (D_{ii} / D_{iq})} \quad (31)$$

onde D é o coeficiente de difusão dado por

$$D_{ij} = 0.02666 \cdot \frac{T \cdot \sqrt{T \cdot (\mu_i + \mu_j) / (2\mu_i \mu_j)}}{P \cdot \sigma_{ij}^2 \cdot \Omega_{ij}^{1.1}} \quad (32)$$

com  $\Omega^{1.1}$  e  $\Omega^{2.2}$  - integrais de colisões e  $\sigma$  - parâmetro da função potencial de interação das moléculas ou átomos

O modelo (Alemassov et al., 1980) é invariante em relação as substâncias reagentes e entre elas podem surgir fases condensadas. Este modelo foi melhorado introduzindo nele o conceito de "meio local reagente". Frequentemente em câmaras de combustão e (como consequência) em tubearias o processo de combustão e de recombinação não se realiza completamente devido a mistura não ser uniforme. Como regra, no fluxo reagente quase-regular existem os jatos finos (até 10% do consumo total) os quais contêm oxidante e combustível em diferentes proporções, mas (devido aos jatos serem finos) as temperaturas dos produtos de decomposição equilibrada do componente (meio local reagente) é quase igual a temperatura

do fluxo principal. Neste caso surge o problema da avaliação da alteração das várias características do fluxo ( $r, C_p, \lambda, T, w, I_{es}$ , etc.).

Habitualmente para determinar o conteúdo da fase de condensação nos produtos de combustão é utilizado o método "clássico". De acordo com o esquema físico deste método a fase condensada surge se a pressão parcial da substância é maior que a pressão do vapor saturado ( $P_q > P_s^V$ ). Aqui  $P_q = P_s^V$  e o resto da substância forma a fase condensada. Este método apresenta algumas limitações (regra de fase e convergência limitada). Para combustíveis com composição complexa a utilização deste método pode encontrar algumas dificuldades porque os produtos de combustão podem incluir algumas fases condensadas, por isso foi utilizado o método das "grandes moléculas" (GM).

Tradicionalmente a avaliação da alteração das características do fluxo realiza-se pela diminuição da entalpia do bipropelente (por exemplo 5%), admitindo que parte da energia desaparece. Este procedimento representa suficientemente bem a alteração da  $T_{oc}$  ou  $I_{es}$ ; mas não pode "explicar" o surgimento do carbono condensado quando  $\alpha_{ox} \approx 1$  na saída da câmara (para bipropelente do tipo "Oxigênio + Querosene"), porque não se apoia em qualquer esquema físico. O método do "meio local reagente" não apresenta esta falha.

Vamos analisar o método do "meio local reagente" no exemplo do bipropelente: " $O_2 + H_2$ ". Admitamos que, além do meio reagente principal (H, O,  $H_2$ ,  $O_2$ , OH,  $H_2O$ ), existe na câmara uma pequena zona de escoamento que contém somente o combustível ( $H_2$ ) e que possui temperatura igual a do meio principal. Admitimos que 90% do  $H_2$  fica no meio principal e 10% no meio local. É evidente que o meio local inclui só os átomos (H) e moléculas ( $H_2$ ) do hidrogênio. Para distingui-los das mesmas substâncias no meio principal são utilizados novos símbolos: Hx e Hx<sub>2</sub>. A entalpia do combustível não se altera mas sua fórmula condicional deverá se apresentar na forma:  $H_{1.8}Hx_0$  e o meio reagente total (principal + local) fica sendo: H, O,  $H_2$ ,  $O_2$ , OH,  $H_2O$ , Hx e Hx<sub>2</sub>.

Na base de dados sobre as substâncias que caracterizam as propriedades I, S e contém os coeficientes  $A_1, A_S, a_1 \dots a_7$  (Alemassov et al., 1980) é necessário incluir as informações sobre Hx e Hx<sub>2</sub>. Além dos símbolos elas não se distinguem de H e  $H_2$ , por isso é necessário somente duplicar os coeficientes  $A_1, A_S, a_1 \dots a_7$ .

O modelo, o algoritmo e também o software são invariantes em relação ao conjunto de substâncias formadas nos produtos de combustão e por isso automaticamente no sistema de equações (4)-(6) serão incluídas:

a) a equação da dissociação Hx<sub>2</sub>:

$$\ln P_{Hx_2} - 2 \ln P_{Hx} + \ln K_{Hx_2} = 0 \quad (33)$$

b) a equação da conservação dos átomos Hx:

$$\ln (2P_{Hx_2} + P_{Hx}) - \ln M_p - \ln b_{Hx} = 0 \quad (34)$$

onde  $b_{Hx} = 0,2$

e a equação de Dalton será alterada para:

$$P_{H_2} + P_H + P_{O_2} + P_O + P_{H_2O} + P_{Hx} + P_{Hx_2} = P \quad (35)$$

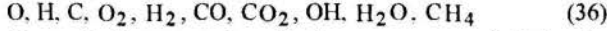
Resolvendo o sistema suplementar obtemos a composição, a temperatura e as propriedades termodinâmicas e termodinâmicas do meio reagente total (principal + local).

Mais real de que a variante do jato do combustível limpo é a variante do jato que contém tanto combustível como oxidante.

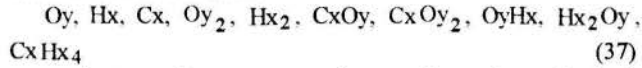


Mas o coeficiente  $\alpha_{ox}^{\ell}$  no jato é muito diferente do coeficiente  $\alpha_{ox}^p$  para o meio principal.

Por exemplo admitamos que temos um escoamento dos produtos de combustão do bipropelente  $O_2 + CH_2$  (querosene) no qual  $\alpha_{ox}^{\Sigma} = 1$ ,  $\alpha_{ox}^{\ell} \approx 0,2$  e a distribuição do combustível entre o meio principal e o meio local reagente é 0,9:0,1. Admitamos que o meio principal contém as substâncias:



Por analogia com o acima citado escrevemos os símbolos das substâncias do meio local:

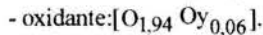
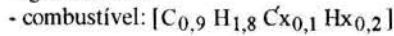


o qual necessita ser complementado pela substância caracterizada para o regime onde  $\alpha_{ox} \approx 0,2$ :



Na base de dados das substâncias é necessário incluir as informações sobre as substâncias (37) e (38) repetindo os coeficientes  $A_1, A_5, a_1, \dots, a_7$  das substâncias correspondentes no meio reagente principal (36).

As entalpias do combustível e do oxidante não se alteram, mas as fórmulas condicionais sofrem alterações, ficando da seguinte forma:



No sistema de equações (4)-(6), por analogia com a) e b) aparecem 8 equações de dissociação para as substâncias:  $Oy_2, Hx_2, CxOy, CxOy_2, OyHx, Hx_2Oy, CxHx_4, Cx^*$ ; e 3 equações de conservação dos átomos:  $Oy, Hx, Cx$ . Resolvendo o sistema total de equações, que deve conter 22 equações, pode-se obter, por exemplo, que para  $\alpha_{ox}^{\Sigma} \approx 1$ , nos produtos de combustão surja o carbono condensado. Isto corresponde a dados experimentais quando a mistura dos componentes na câmara não é perfeita.

O método do "meio local reagente" ocasiona um erro insignificante em comparação com o procedimento usual, que é mais complexo por exigir:

- cálculo do meio reagente principal (separadamente);
- cálculo do meio reagente local (separadamente);
- repetição várias vezes dos cálculos a) e b) para conseguir a igualdade de temperatura de ambos os meios, mudando as entalpias dos produtos de combustão nesses meios.

A origem do erro do método do "meio local reagente" está no fenômeno da influência da pressão na dissociação, mas esta influência não é considerável. Se for necessário, este erro pode ser determinado e diminuído essencialmente usando as

derivadas parciais termodinâmicas  $\left( \frac{\partial \ln P_i}{\partial \ln P} \right)_T$

### ALGORITMO E SOFTWARE

O fundamento do algoritmo é o esquema de resolução das equações (4)-(6), baseado no método de Newton.

Para assegurar a estabilidade do cálculo e vencer as dificuldades com a escolha das aproximações iniciais, o método de cálculo foi modificado consideravelmente. Em particular foi elaborado um procedimento para determinar o passo das iterações e foram introduzidas limitações na mudança das variáveis incógnitas. Foi realizado também um procedimento para a "sondagem" do aparecimento de fase condensada.

O software correspondente conserva todo o nível da universalidade do modelo e algoritmo. Ele possui uma boa apresentação dos resultados e verificação dos dados iniciais. Possui uma base de substâncias individuais (gasosas e

condensadas) e arquivos de acumulação de resultados, que simplifica a sua ligação com outros produtos de programação.

### PESQUISA NUMÉRICA

De acordo com o software foi realizado um considerável volume de pesquisas numéricas, entre elas:

1. Bipropelente  $H_2(\text{liq}) + O_2(\text{liq})$  com as seguintes entalpias:

$$I_{ox} = -398 \text{ KJ/Kg}; I_c = -4354 \text{ KJ/Kg}.$$

Este bipropelente, que possui o maior  $I_{es}$ , é utilizado amplamente na técnica de foguetes para estágios secundários de lançadores. Para os primeiros estágios este bipropelente raramente é utilizado devido a pequena densidade do  $H_2$ .

Nas figuras de 2 a 5 estão apresentadas algumas propriedades termodinâmicas e energéticas dos produtos de combustão deste bipropelente.

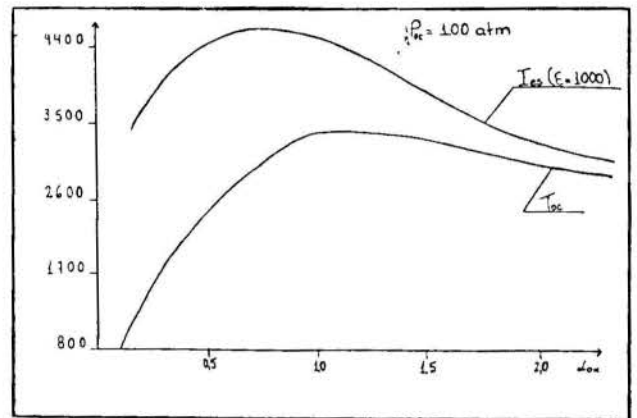


Figura 2 - Variação da  $T_{ox}$  e do  $I_{es} (\epsilon = 1000)$

A alta temperatura condiciona o alto nível de dissociação em particular na câmara de combustão. Por exemplo quando  $\alpha_{ox} = 1$ , se não fosse a dissociação, os produtos de combustão conteriam somente  $H_2O$ . Mas de acordo com a figura 3 o conteúdo da água nos produtos de combustão fica no nível de 80% e o das demais substâncias, resultantes da dissociação, em 20%.

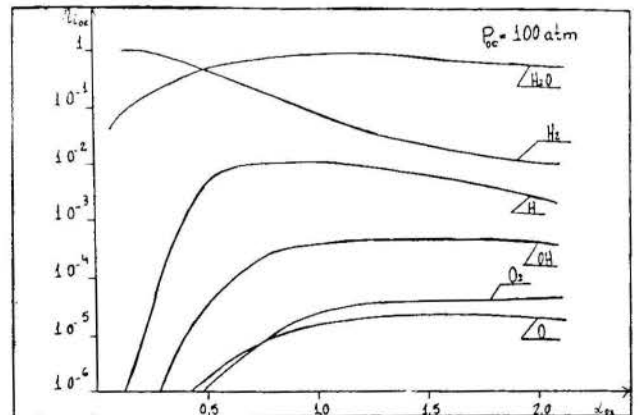


Figura 3 - Frações molares dos produtos de combustão na entrada da tubeira

Ao longo da tubeira a temperatura do escoamento diminui e começa o processo de recombinação, ou seja, a composição dos produtos de combustão sofre alterações ao longo do comprimento da tubeira (figura 4). Devido a dissociação na área

de  $\alpha_{ox} \approx 0.6 \dots 1$  os valores  $C_{pe}$  são consideravelmente maiores que  $C_{pf}$  e o ponto onde  $\alpha_{ox}(T_{max})$  fica longe de  $\alpha_{ox} = 1$  ( $\alpha_{ox}(T_{max}) \approx 0.7$ ).

De acordo com o princípio de Le Chatelier a queda de pressão faz aumentar o nível de dissociação que está mostrando a figura 5, onde são apresentadas as temperaturas dos produtos de combustão para várias pressões. Quanto menor a pressão, maior é o nível de dissociação, maiores são os gastos de energia para dividir as moléculas e portanto menor é a temperatura do gás.

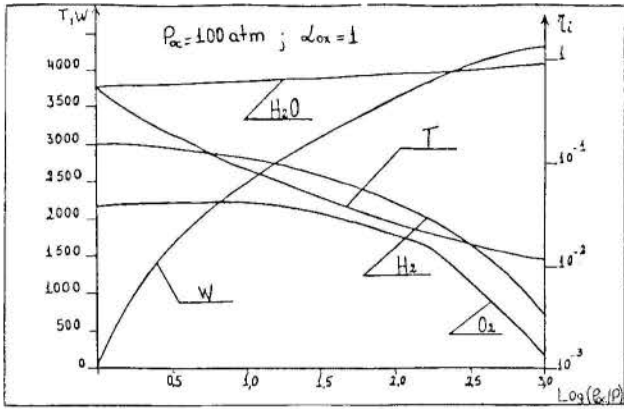


Figura 4 - Alteração de  $r_i$ ,  $W$  e  $T$  ao longo da tubeira

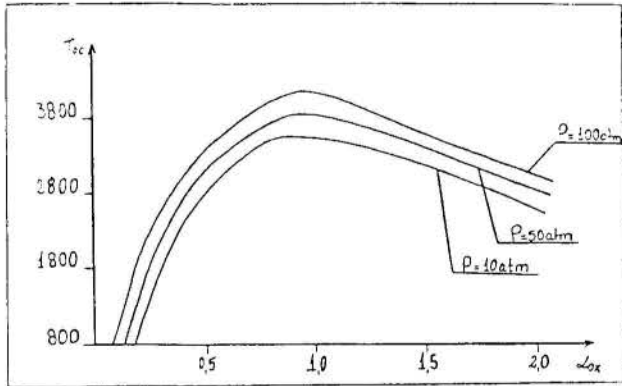


Figura 5 - Influência da pressão na câmara em  $T_{0c}$

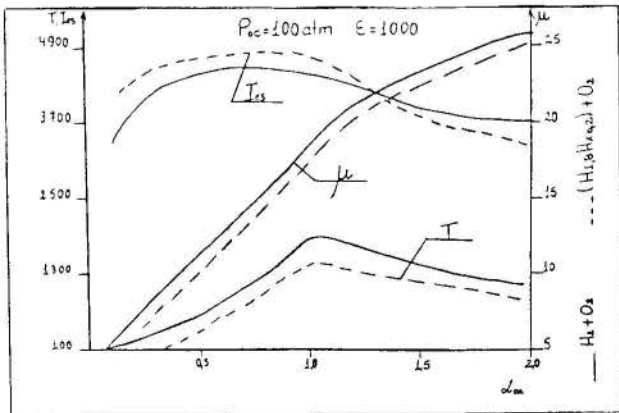


Figura 6 - Influência da combustão incompleta nos principais parâmetros da tubeira

Na figura 6 estão mostrados alguns resultados obtidos (utilizando o método do "meio local reagente") para as condições:

Combustível: 90%  $H_2$  + 10%  $Hx_2$ ; Oxidante:  $O_2$

A mistura não uniforme influi consideravelmente em  $T_{0c}$  e praticamente não influi no  $I_{es}$ , porque  $I_{es} \sim \sqrt{(R_0 \cdot T_{0c})/\mu_{0c}}$  e a massa molecular média diminui quase proporcionalmente a  $T_{0c}$ .

2. Bipropelente  $O_2 + C_{7,2}H_{13,29}$  (Querosene) com as seguintes entalpias:  $I_c = -1948 \text{ KJ/Kg}$  e  $I_{ox} = -398 \text{ KJ/Kg}$ .

Este bipropelente é amplamente difundido para os primeiros estágios dos lançadores. Em câmaras de combustão  $\alpha_{ox} \approx 1$ :  $P_{0c} = 10 \dots 100 \text{ atm}$  ou mais e existe um considerável nível de dissociação que diminui no processo de expansão na tubeira. Por isso a utilização dos métodos "sem dissociação" pode provocar um erro considerável.

Utilizando o software elaborado foram obtidos resultados numéricos para as condições:  $P_{0c} = 10 \dots 100 \text{ atm}$ ;  $\alpha_{ox} \approx 0.1 \dots 2$  e  $\epsilon = 100 \dots 1000$  ( $\epsilon = \text{taxa de expansão do fluxo}$ ) sendo que alguns deles estão mostrados nas figuras 7 e 8.

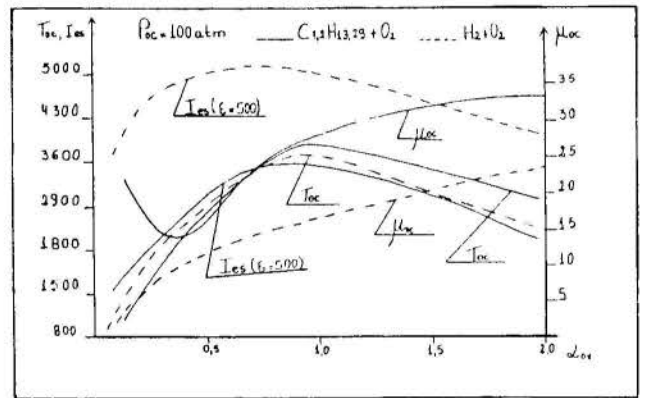


Figura 7 - Comparação das características dos produtos de combustão para os bipropelentes " $H_2 + O_2$ " e " $\text{Querosene} + O_2$ "

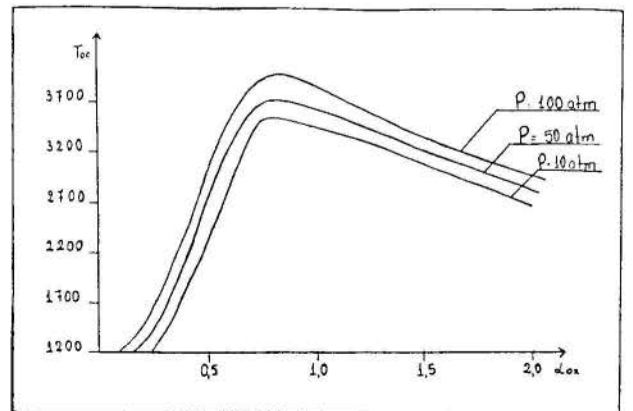


Figura 8 - Influência da pressão na câmara em  $T_{0c}$

Apesar da temperatura dos produtos de combustão serem aproximadas para os bipropelentes " $H_2 + O_2$ " e " $\text{Querosene} + O_2$ ", o último apresenta maior massa molecular e por isso um menor  $I_{es}$ .

Se não fosse a dissociação, no regime  $\alpha_{ox} = 1$  os produtos de combustão conteriam apenas  $H_2O$  e  $CO_2$ , mas devido a dissociação aparecem também as substâncias  $OH$ ,  $O_2$ ,  $H_2$ , etc.

Para  $\alpha_{ox} \leq 0.4$  (nestas condições forma-se uma camada de defesa sobre a parede) a mistura reagente inclui a fase condensada  $C^*$ . Observamos um fenômeno interessante (figura 9), quando na câmara não surge  $C^*$ , mas no processo de escoamento esta fase aparece (linha Z).

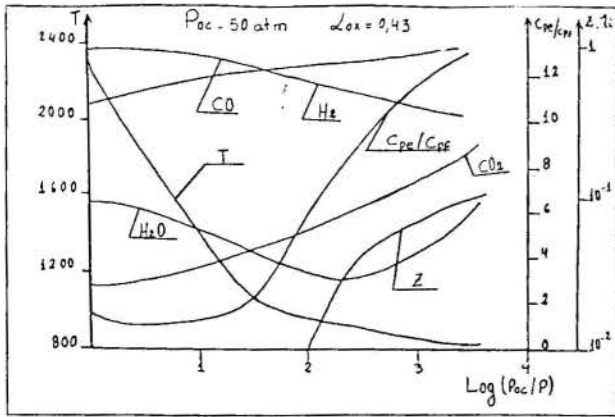


Figura 9 - Alteração dos parâmetros no escoamento no caso do aparecimento de fase condensada na parte supersônica da tubeira

Neste regime existe um aumento do  $C_{pe}$  e uma "resistência" no diminuir da temperatura. A explicação deste fenômeno está no fato de que na formação da fase condensada desprende-se um calor que é absorvido pelo gás, contribuindo para a demora da queda da temperatura.

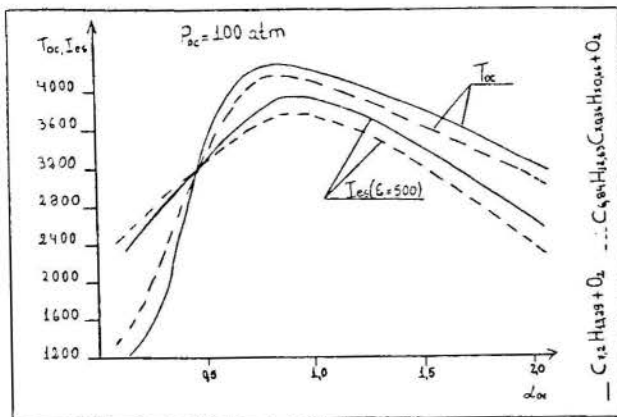


Figura 10 - Influência da combustão incompleta nos principais parâmetros da tubeira

Para este bipropelente também foi realizado uma série de cálculos para avaliar, na mistura não uniforme, uma parte do combustível nas características importantes dos produtos de combustão. Admitindo que 5% do combustível não encontra o oxidante (mas pode decompor-se porque possui temperatura igual a do meio reagente principal) pode-se escrever sua fórmula condicional como:  $C_{6,84}H_{12,63}Cx_{0,36}Hx_{0,66}$  e supor que as substâncias para o "meio local reagente" são:  $Cx$ ,  $Hx$ ,  $CxHx_4$ ,  $Hx_2$ ,  $Cx^*$ . Alguns resultados dos cálculos estão mostrados na figura 10.

## CONCLUSÃO

1. O modelo (Alemassov et al., 1980) para o cálculo das características dos escoamentos quimicamente equilibrados em tuberias foi complementado com o método do "meio local reagente". Ele é mais correto (do que o método da diminuição da entalpia) para avaliar a influência da mistura não completa de oxidante e de combustível nas características termodinâmicas e energéticas.

2. Foram realizados cálculos para determinar as propriedades dos produtos de combustão de alguns bipropelentes:  $H_2 + O_2$ ,  $C_{7,2}H_{13,29} + O_2$ ,  $N_2H_4 + HNO_3$  e  $C_2H_8N_2 + N_2O_4$  (os resultados para os dois últimos bipropelentes não são referidos neste artigo). Foram observados alguns fenômenos anormais como o surgimento de  $C^*$  na parte supersônica da tubeira (nos regimes de  $\alpha_{ox} < 0,5$ ) para o bipropelente "Querosene +  $O_2$ ".

3. Os cálculos foram realizados com a utilização do conceito de "meio local reagente", este mostrando a possibilidade do aparecimento, nos produtos de combustão, de substâncias que não são peculiares ao "meio principal".

## REFERÊNCIAS

- Alemassov, V. E., Dregalin, A. F. e Tishin, A. P., 1980, "Teoria de Propulsores", Mashinostroenie, Moscou. 240 p.
- Alemassov, V. E., et al., 1973, "Propriedades Termodinâmicas e Termofísicas dos Produtos de combustão", Guia, Vol 3, VINITI, Moscou.
- Gordon, S. e McBride, B. J., 1971, "NASA SP273 - Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks, and Chapman-Jouguet Detonations", NASA, Washington, 1971. 245 p.
- Sisson, L. E. e Pitts, D. R., 1988, "Fenômenos de Transporte", Guanabara, Rio de Janeiro, RJ. 765 p.
- Spilimbergo, A. P., Auth, C. J. e Ischakova, R. L., 1995a, "Modelagem Matemática das Características Termodinâmicas e Termofísicas dos Produtos de Combustão de Combustíveis Vegetais", Anais do XVIII CNMAC 95, Curitiba, PR, pp. 610-614.
- Spilimbergo, A. P., Auth, C. J. e Ischakova, R. L., 1995b, "Propriedades dos Produtos de Combustão dos Combustíveis vegetais". Anais do XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica, Belo Horizonte, MG.

## ABSTRACT

This paper aims at backing studies about the chemically balanced flowing in converging-diverging nozzle which are used in turbo-engines, turbo propellers and the like. The model proposed by Alemassov et al. (1980) was used for it is not variant to the individual substances and to some kinds of bipropellers. The model was completed with the "reacting local medium" method in order to evaluate the incomplete combustion. A number of calculations of combustion byproducts of several bipropellers was carried out, in long intervals of oxidating excess coefficients, of pressure in the chamber and the flow expansion rate in the nozzle.



## LIMITES DE OPERAÇÃO DE UMA TURBINA A GÁS

Luís Henrique Getino  
 João Roberto Barbosa  
 Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
 Departamento de Energia  
 12.228-900 São José dos Campos - SP - Brasil



### SUMÁRIO

Neste trabalho descrevem-se metodologias de análise das condições de operação de uma turbina a gás para aplicação em aeronaves não tripuladas, com a finalidade de dimensionamento de seu sistema de controle de combustível, obedecendo certos critérios de simplicidade e de tempo de resposta de aceleração da turbina, desde sua partida até a condição de tração máxima; uma aplicação é feita para dimensionamento de um sistema de controle de combustível de uma turbina de 1000 N de tração.

### INTRODUÇÃO

A capacitação de recursos humanos em sistemas de propulsão, especialmente em turbinas a gás, tem sido objetivo do CTA desde a década de 70. Diversos projetos foram desenvolvidos, iniciando-se com aplicações estacionárias, adaptadas para queima de álcool etílico, culminando com projeto de uma turbina completa, de 1000 N de tração, passando-se pelo projeto, fabricação e ensaios de um turbojato de 300 N, utilizando alguns componentes fabricados pela indústria automobilística (Barbosa et al., 1990). Diversos cursos, tanto no ITA como no exterior, o desenvolvimento de diversos projetos, a realização de dezenas de trabalhos de graduação, de iniciação científica, de mestrado e de doutorado, tem sido meios através dos quais a aquisição da tecnologia de projeto, fabricação, ensaios e desenvolvimento de turbinas a gás tem sido adquirida.

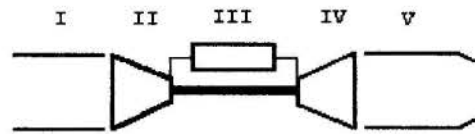
Este trabalho apresenta resultados de um desses trabalhos, no qual um sistema de controle de um turbojato de 1000 N de empuxo é concebido e dimensionado, à vista do comportamento dinâmico do motor, desde sua partida até a condição de tração (rotação) máxima, passando pela condição de auto-sustentação e de cruzeiro, com ressalvas de tempo de aceleração e de temperatura máxima na turbina.

### TURBINA A GÁS

A turbina a gás referida neste artigo, esquematizada na Figura 1, é um turbojato simples, de eixo único, constituída de um bocal de admissão, um compressor radial, uma câmara de combustão anular, uma turbina axial e um bocal propulsor (convergente). Foi projetada para servir como grupo propulsor de uma aeronave não tripulada, para vôo à velocidade correspondente a um número de Mach de 0,8 a 10.000 m de altitude. Algumas de suas características são: temperatura máxima 1123 K, rotação nominal 45.000 rpm, taxa de compressão 4:1, vazão de massa de ar 1,947 kg/s e peso total de 400 N.

Na Tabela 1 são apresentados dados mais específicos sobre a turbina a gás referida, tais como eficiências isentrópicas do compressor e da turbina, momento polar de inércia do rotor, eficiência de combustão, volumes da câmara de combustão e do

duto de exaustão (bocal propulsor, convergente) e perdas de pressão na câmara de combustão e no duto de exaustão.



- I - Bocal de admissão
- II - Compressor radial
- III - Câmara de combustão
- IV - Turbina axial
- V - Bocal propulsor

Figura 1 - Esquema do motor (turbojato).

### SISTEMA DE CONTROLE

As características fixadas para o sistema de controle de combustível foram de simplicidade e de capacidade de controlar a rotação do motor em 40%, 60%, 90% e 100% da rotação nominal (no caso 45.000 rpm), e acelerá-la até a rotação nominal em, no máximo, 10 segundos, partindo da rotação de auto-sustentação (40%). Adotou-se, ainda, o limite de 5 segundos para o atingimento de 60% da rotação nominal e de 5 segundos para aceleração dessa condição até a de tração máxima; o limite de tempo de 5 segundos também foi adotado para a desaceleração da rotação nominal até a de cruzeiro (90%) e para a aceleração até a rotação nominal partindo da condição de cruzeiro.

A simplicidade do sistema de controle foi conseguida com a especificação de um sistema de controle discreto, constituído de 4 orifícios calibrados em paralelo, cujos fluxos são controlados por válvulas ON/OFF. A Figura 2 apresenta o esquema, onde se indicam os orifícios calibrados e suas válvulas ON/OFF, bem como os atomizadores de combustível, localizados na câmara de combustão.

Através do seqüenciamento adequado dessas válvulas (de acordo a lógica apresentada na Tabela 3) obtém-se as rotações desejadas, bem como a aceleração e desaceleração de uma



velocidade à outra; as dimensões (diâmetros) dos orifícios calibrados encontram-se na Tabela 4.

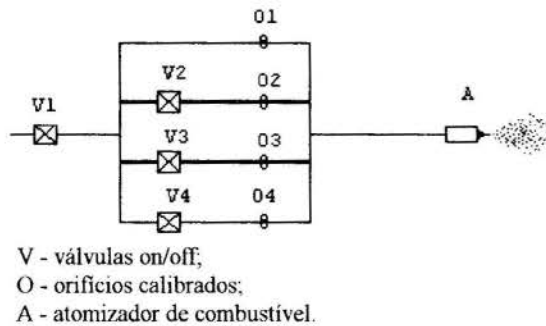


Figura 2 - Sistema de controle de combustível.

### REGIME TRANSITÓRIO

Evidentemente, a análise de operação da turbina, para as finalidades deste trabalho, é em regime transitório. Nesse regime, a determinação das condições de operação de uma turbina a gás requer o conhecimento pormenorizado do desempenho de cada um de seus componentes, bem como do balanço (torque líquido) da energia produzida pela turbina e a absorvida pelo compressor, mancais e equipamentos auxiliares, acionados pelo eixo da turbina. A análise em regime permanente também é requerida, para a obtenção da curva de adaptação do motor e dos parâmetros de funcionamento sobre essa curva. Os procedimentos de cálculo são os indicados em literatura (Cohen et al., 1992, Palmer et al., 1976 e Pilidis, 1995), tanto para regime permanente como para transitório.

Neste trabalho apenas o regime transitório controlado foi analisado. O regime não controlado, que é aquele em que perturbações que o motor sofre devido, por exemplo, a mudanças bruscas das condições ambientes, não foi levado em conta. Preocupou-se essencialmente com a determinação das quantidades de combustível a serem injetadas na câmara de combustão, em função do tempo, para que a aceleração especificada fosse obtida, tendo como limitantes apenas a temperatura máxima à saída da câmara de combustão e o limite de bombeamento (surge) do compressor. Não foram levadas em conta, neste trabalho, as tensões térmicas, pressão máxima e tensões no compressor, aspectos esses a serem analisados sob o ponto de vista estrutural do motor.

Admitiu-se não haver inércia no sistema de alimentação de combustível e na câmara de combustão. A experiência mostra que essa aproximação é bastante razoável nesta fase de projeto.

Há dois métodos principais de modelação do funcionamento em regime transitório (Pilidis, 1995). O primeiro, conhecido como método da continuidade da vazão, admite que não há acúmulo de massa de ar e de gases de combustão nos componentes da turbina. É bastante simples de ser implementado e rápido em termos computacionais, sendo indicado para grandes variações de rotações, como é o caso em tela. O segundo utiliza a variação de massa nos componentes e a consequente variação de temperaturas e pressões. Exige intervalos de tempo bastante pequenos para cálculo. É aplicável tanto a pequenas como a grandes variações de rotações. Ambos os métodos se baseiam nas características de operação, em regime permanente, dos componentes da turbina, utilizando a integração do torque líquido, no tempo, para o cálculo da variação de rotação. O projetista deve ter às mãos as curvas

(mapas) de desempenho dos componentes principais do motor (compressor, câmara de combustão, turbina e bocal propulsor).

A metodologia adotada compreende os seguintes passos:

- obtenção das condições totais à entrada do compressor, em função das condições ambientes e do número de Mach de vôo;
- escolha de um ponto de operação sobre o diagrama do compressor e, daí, as condições de saída do compressor;
- escolha de uma vazão de combustível a ser injetada e cálculo das condições de saída da câmara de combustão para a quantidade de ar bombeada pelo compressor;
- obtenção do ponto de operação sobre o mapa da turbina e cálculo das condições à saída da mesma;
- obtenção do ponto de operação sobre o mapa do bocal propulsor e cálculo da pressão estática à sua saída. Se essa pressão for igual à pressão ambiente, o ponto escolhido sobre o mapa do compressor estava correto. Caso contrário, escolher um novo ponto sobre o diagrama do compressor e repetir os cálculos a partir de b). Caso estiver entupido o bocal propulsor ou a turbina, deve-se fazer uma iteração adicional para a obtenção dos pontos nos seus diagramas;
- após obtida a compatibilidade em e), cálculo do torque livre;
- para um incremento de tempo  $\Delta t$ , cálculo da aceleração do conjunto rotativo, da variação de rotação nesse intervalo e da nova rotação da turbina;
- repetição dos passos a partir de b), até se chegar à rotação estabilizada, isto é, a variação da rotação calculada em g) é praticamente nula.

Para o segundo método, após os cálculos no bocal são realizados os cálculos das variações de vazão, pressões e temperaturas em cada volume de massa de ar (em cada componente) e,

- para um incremento de tempo  $\Delta t$  e para os volumes de cada componente, cálculo das variações de vazão, pressões e temperaturas a serem utilizados no intervalo de cálculo seguinte.

Valores adequados para  $\Delta t$  são os que, em geral, dão variação de vazão de massa de, no máximo, 5% da massa do volume respectivo. A experiência mostra que o valor desse volume é crítico em termos de convergência. No caso da turbina em análise, os volumes dos componentes são bastante pequenos e não têm influência significativa nos resultados. A experiência também mostra que ambos os métodos dão resultados bem parecidos, exceto nos primeiros instantes do transitório e que as trajetórias (local dos pontos de operação do motor sobre o diagrama do compressor) também são quase idênticas.

### SIMULAÇÃO NUMÉRICA

O método da continuidade de massa foi implementado em um programa de computador, escrito em linguagem FORTRAN. Os dados da turbina TJ10, em desenvolvimento no CTA, indicados na Tabela 1, foram utilizados para as simulações. Cada componente da turbina foi modelado conforme as equações e gráficos apresentados em literatura (Rogers et al., 1992 e Palmer, 1975). O programa foi utilizado para: a) calcular a curva de operação em regime permanente (Figura 3), a partir da qual foram obtidas as condições de operação a 40%, 60%, 90% e 100% da rotação nominal; b) calcular as vazões de combustível adequadas às acelerações de 40% a 60% da rotação máxima; c) idem 60% a 100%; d) idem 90% a 100% e e) desaceleração de 100% para 90%; (as curvas de operação em regime transitório

(aceleração e desaceleração) podem ser vistas na Figura 4, plotadas sobre o mapa do compressor). Para tanto, as diversas possibilidades de combinação de abertura e fechamento das válvulas do sistema de combustível mostradas na Tabela 3 foram testadas.

Tabela 1 - Dados da turbina TJ-10 (valores referentes ao ponto de projeto)

Parâmetros	valores
Taxa de compressão	4
Eficiência isentrópica do compressor	0.80
Rotação	45000 rpm
Momento polar de inércia do rotor	0.01735 N.m.s
Eficiência isentrópica da turbina	0.85
Perda de pressão na câmara de combustão	5 %
Eficiência de combustão	0.96
Volume da câmara de combustão	0.009546 m <sup>3</sup>
Perda de pressão no duto de exaustão	3 %
Volume do duto de exaustão	0.0123 m <sup>3</sup>
Temperatura à entrada da turbina	1123 K

Tabela 2 - Válvulas do sistema de controle de combustível e vazões de estado estacionário correspondentes.

Rotação (%)	Vazão (kg/s)	Válvulas abertas
40	0.0111	V1
60	0.0132	V1,V2
90	0.0262	V1,V2,V3
100	0.0354	V1,V2,V3,V4

O procedimento adotado foi, em geral:

- I. conhecer a quantidade de combustível exigida para a tração máxima (rotação nominal), 90%, 60%, 40% de rpm e a rpm mínima a partir da qual uma das válvulas poderia ser aberta para que a turbina partisse e atingisse 40% de rpm, sem ultrapassar a temperatura máxima, fixada em 1250 K;
- II. utilizando orifícios calibrados em paralelo, determinar as suas dimensões para que, combinados adequadamente, pudessem dar as vazões para funcionamento em regime permanente (40%, 60%, 90% e 100% de rpm);
- III. determinar a lógica de abertura/fechamento das válvulas (e consequentemente dos orifícios) para que a aceleração/desaceleração de uma velocidade à outra fosse obtida nos tempos especificados: 5 segundos de 40% a 60% e 5 segundos de 60% a 100% de rpm.

Para determinação da lógica de abertura/fechamento das válvulas procede-se, para cada caso de aceleração ou desaceleração, como o descrito a seguir:

- A) a vazão de combustível como função do tempo pode ser arbitrada através das possíveis combinações dos estados (on/off) das válvula e do tempo de abertura/fechamento destas (Tabela 3);
- B) as vazões iniciais e finais para cada caso de aceleração ou desaceleração são as calculadas em I, para estado estacionário (Tabela 2);
- C) o fluxo de combustível deve ser tal que o tempo de estabilização da rotação não exceda 5s nos casos 40% a 60% e 60% a 100% de rpm. Outro fator limitante é a temperatura total na saída da câmara de combustão: a temperatura máxima de operação da turbina é de 1250 K, mas um pico de temperatura de até 1300 K é tolerado, desde que breve (máxima duração de meio segundo);

- D) para os casos de aceleração de 90% a 100% e desaceleração de 100% a 90% também o tempo de estabilização da rotação foi fixado em 5s.

Na Tabela 3 a lógica de abertura/fechamento obtida é apresentada, considerando a identificação das válvulas consistente com a Tabela 2; o tempo zero corresponde ao instante inicial do transitório.

Tabela 3 - Lógica de abertura / fechamento das válvulas para obtenção das acelerações desejadas.

Aceleração	Tempo de abertura/fechamento (s)							
	V1		V2		V3		V4	
	on	off	on	off	on	off	on	off
40 a 60%	-∞	+∞	0.0	+∞	+∞	+∞	4.0	5.0
60 a 100%	-∞	+∞	-∞	+∞	0.0	+∞	1.5	+∞
100 a 90%	-∞	+∞	-∞	+∞	-∞	+∞	-∞	0.0
90 a 100%	-∞	+∞	-∞	+∞	-∞	+∞	0.0	+∞

Para o entendimento da Tabela 3, deve-se observar que:

1. tempo de abertura (on) de válvula indicado como -∞ significa que a válvula em questão já estava aberta no instante inicial do transitório e +∞ significa que a válvula não se irá abrir durante o transitório. Analogamente, para o tempo de fechamento (off) de válvula +∞ significa que a válvula não mais se fechará durante o transitório;
2. na aceleração de 0 a 40% da rotação (partida do motor) é utilizada uma fonte auxiliar de potência (ar comprimido injetado no compressor) que acelera o rotor até a mínima rotação em que a válvula V1 pode ser aberta sem que haja problema de superaquecimento; o motor então irá atingir a rotação de auto-sustentação (40%) e a fonte auxiliar de potência pode ser retirada. A mínima rotação em que V1 pode ser aberta foi determinada e vale 30% da rotação nominal.

Os diâmetros dos orifícios calibrados (Tabela 4) foram calculados de acordo com (Crane Co., 1957):

$$d^2 = \frac{4.m_f}{\pi.\rho.C.V_2} \quad e \quad V_2^2 = \frac{2.\Delta P}{\rho} + \left( \frac{4.m_f}{\pi.\rho.D^2} \right)^2, \quad \text{onde:}$$

- d é o diâmetro do orifício calibrado, em m;
- D é o diâmetro do tubo, em m;
- V<sub>2</sub> é a velocidade do fluido no orifício, em m/s;
- m<sub>f</sub> é a vazão de combustível, em kg/s;
- ρ é a densidade do combustível (querosene), em kg/m<sup>3</sup>;
- C é o coeficiente de descarga;
- ΔP é a diferença de pressão do fluido antes e depois do orifício, em Pa.

O diâmetro dos dutos onde se encontram os orifícios calibrados é de 6,35 mm (1/4"); a diferença de pressão do fluido nos orifícios calibrados deve ser mantida constante em 45 kPa, por uso de uma válvula reguladora de pressão.

Tabela 4 - Dimensões dos orifícios calibrados.

Orifício	Diâmetro (mm)	Vazão (kg/s)
O1	1.6	0.0111
O2	0.7	0.0021
O3	1.8	0.0130
O4	1.5	0.0092

As Figuras 3 e 4 se referem ao mapa do compressor (onde se vêem as curvas de rotações corrigidas constantes).

Na Figura 3 foi traçada a curva de operação em regime permanente do motor, fixada para um limite de bombeamento de 15%. O termo 'vazão corrigida' se refere ao valor calculado por (1); o termo 'razão de pressão' se refere ao quociente de pressões totais à saída e à entrada do compressor, calculado por (2); o termo 'rotação corrigida' se refere ao valor calculado em (3).

Considerando  $m_a$  a vazão de ar,  $T_{t1}$  a temperatura total à entrada do compressor,  $N$  a rotação;  $P_{t1}$  e  $P_{t2}$  as pressões totais à entrada e saída do compressor, respectivamente, tem-se:

- vazão corrigida =  $\frac{m_a \cdot \sqrt{T_{t1}}}{P_{t1}} \times 10^6$  (1)

- razão de pressão =  $\frac{P_{t2}}{P_{t1}}$  (2)

- rotação corrigida =  $\frac{N}{\sqrt{T_{t1}}}$  (3)

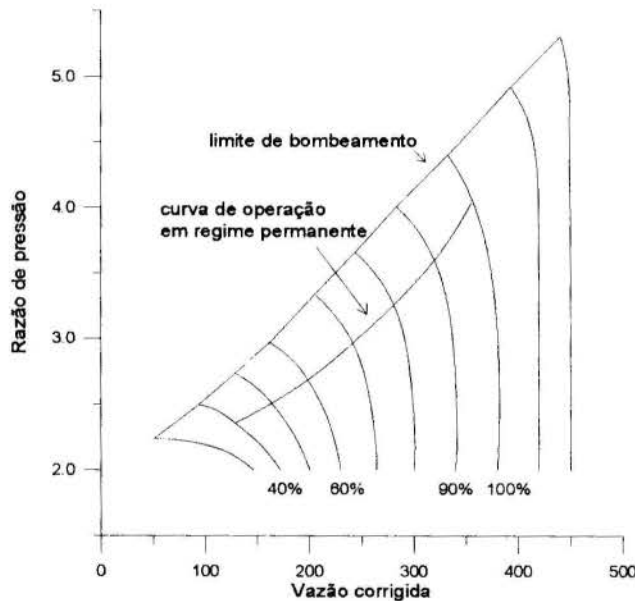


Figura 3 - Curva de operação em regime permanente.

A Figura 4 exibe, traçadas sobre o mapa do compressor, a curva de operação em regime permanente (running line) e as curvas correspondentes aos transitórios de aceleração e desaceleração. A curva P é a de funcionamento em regime permanente; as curvas A, B, C e D indicam, respectivamente, as trajetórias de aceleração de 40 a 60% e 60 a 100%; desaceleração de 100 a 90% e aceleração de 90 a 100% da rotação nominal. Para todos esses regimes de operação, o limite de bombeamento não foi atingido e os picos de temperatura ficaram abaixo dos valores limitados em C).

Na figura 4, observa-se que, ao invés de se obter a estabilização em 90%, obteve-se a mesma a 92%, quando a tração ficou ao redor de 75% da nominal. Na prática, em função das características de operação da aeronave, esse valor de rpm poderá ser alterado, a fim de se obter o valor de tração de cruzeiro requerido. Com isto, a simplicidade do sistema de controle de combustível foi mantida, sendo necessários apenas os quatro orifícios calibrados.

As Figuras 5, 6, 7 e 8 mostram, para as acelerações de 40 a 60%, 60 a 100% e 90 a 100% e para a desaceleração de 100 a 90%, o comportamento, em função do tempo, das principais

variáveis de interesse: vazão de combustível, rotação, tração e temperatura na saída da câmara de combustão.

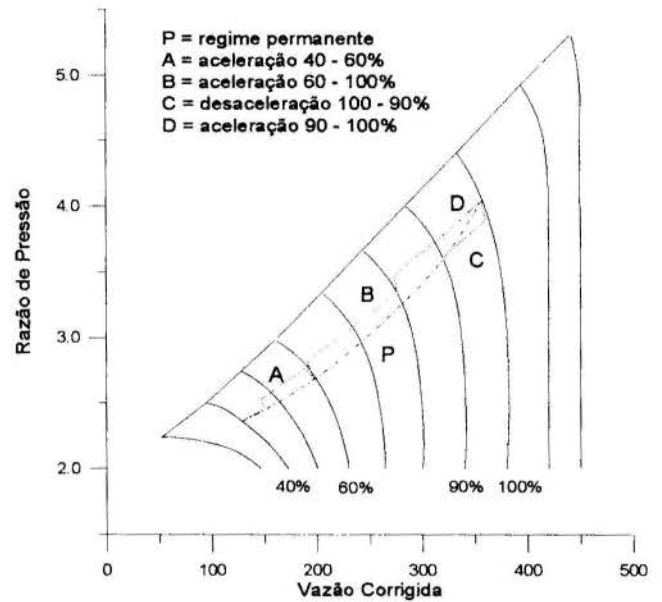


Figura 4 - Curvas de operação do motor.

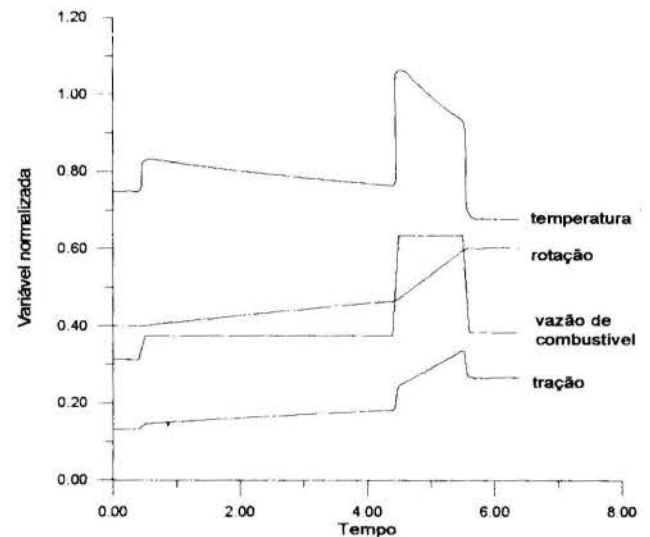


Figura 5 - Aceleração de 40 a 60% da rotação nominal.

Nas Figuras 5, 6, 7 e 8, todas as variáveis encontram-se normalizadas. A normalização foi obtida dividindo-se os valores reais de cada variável, em cada instante, pelo seu valor de referência, a saber:

- vazão de combustível : 0.0354 kg/s;
- rotação : 45000 rpm;
- tração : 1043 N;
- temperatura : 1250 K.

Os valores de referência de vazão de combustível, rotação e tração são os valores de projeto. Os valores limites de temperatura foram estabelecidos em 1123 K para operação contínua (projeto), 1250 K para transitórios de até 5 segundos e 1300 K para picos de até 0.5 segundo. O valor de referência adotado para a temperatura foi de 1250 K.

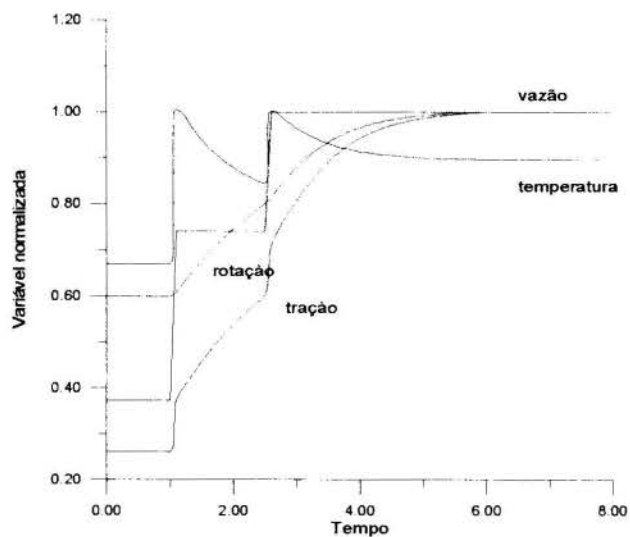


Figura 6 - Aceleração de 60 a 100% da rotação nominal.

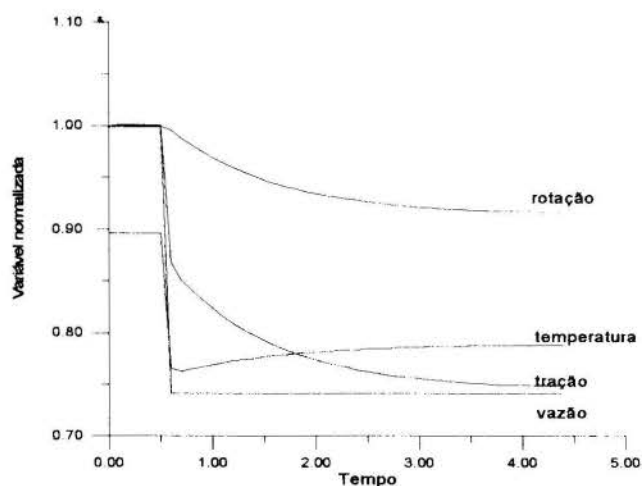


Figura 7 - Desaceleração de 100 a 90% da rotação nominal.

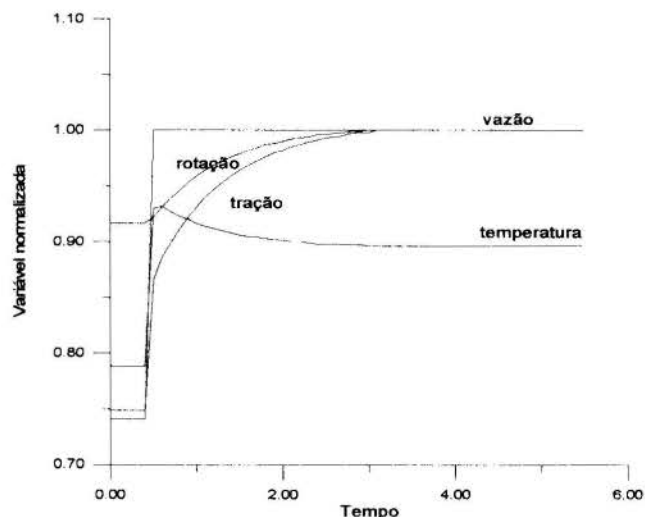


Figura 8 - Aceleração de 90 a 100% da rotação nominal.

## CONCLUSÃO

A partir de um modelamento razoavelmente simples de uma turbina a gás é possível conhecer os valores dos parâmetros de funcionamento, tanto em regime permanente como transitório. Em consequência, pode-se utilizar essa metodologia para simular a influência da variação do fornecimento de combustível à câmara de combustão na conseqüente variação de rotação, pressão e temperatura à saída da câmara de combustão. Com isto é possível verificar se uma dada quantidade de combustível não acarretará aumento excessivo de temperatura durante a fase de aceleração da turbina, nem o tempo máximo fixado para a aceleração seja ultrapassado, obtendo-se as informações necessárias para o projeto do sistema de controle de combustível.

## AGRADECIMENTOS

Os autores desejam registrar seus agradecimentos à FAPESP, que tornou a realização deste trabalho possível através da concessão de bolsa de estudos e, em especial, ao Grupo de Turbinas da Subdivisão de Propulsão (ASA-P) do CTA-IAE, pelo apoio à realização deste trabalho, consubstanciado em conselhos e colocação de dados da turbina TJ 10 à disposição dos autores.

## REFERÊNCIAS

- Barbosa, J. R. et al., 1990, "A small gas turbine for drone aircraft - design philosophy", ASME paper 90-GT-196.
- Cohen, H. et al., 1992, "Gas turbine theory", 3ª edição, Longman.
- Pilidis, P., 1995, "Desempenho de turbinas a gás em regime transitório", notas de curso apresentado ao PROPESA, CTA.
- Palmer, J. R. et al., 1976, "Cranfield off-design point computer program user's handbook", Cranfield handouts.
- Crane Co., 1957, "Flow through valves, pipes and orifices", Crane Company.

## ABSTRACT

Off-design and transient operation of a simple turbojet engine is analyzed using the flow continuity methodology available in the open literature, aiming at designing a fuel control system which is simple and able to accelerate the turbine within specified time constraints.





## GASDYNAMIC FLOW OVER A FLAME DEFLECTOR

Paulo Moraes Jr., Algacyr Morgenstern Jr.  
 Divisão de Sistemas Espaciais  
 CTA/Instituto de Aeronáutica e Espaço  
 12228-904 - São José dos Campos - SP - Brazil



### SUMMARY

*During lift-off of a launch vehicle, it is necessary to attenuate the effects of the exhaust gases from the rocket motor on their impact with the launch pad which is supporting the vehicle, to avoid the recirculation of the hot gases on the base region of the vehicle, and to reduce the effects of the acoustic field surrounding the vehicle on the payload. For small and middle size launch vehicles, plane or curved surfaces, called deflectors, are generally used to conduct the gases away from the vehicle and launch pad, protecting the entire system. The present work shows and discusses the considerations made in the design of the exhaust gases deflector for the launch pad of the Brazilian satellite launch vehicle (VLS). Furthermore results of a two-dimensional numerical simulation are presented which allow the verification of the flow field around the launch pad to determine if a recirculation of the hot gases occurs.*

### INTRODUCTION

During lift-off of a launch vehicle, some consideration has to be given to the hot gases exhausting from the rocket motor. It is of importance to attenuate the effects of their impact with the launch pad which is supporting the vehicle, avoid the recirculation of the hot gases to the base region of the vehicle, and do not promote an increase of the acoustic field level surrounding the vehicle.

For heavy launchers the exhaust gases are generally conducted through a tunnel, protecting the vehicle. For small and middle size launch vehicles, plane or curved surfaces, called deflectors, are generally used. To design a convenient shaped deflector surface, a complex gasdynamic problem has to be solved, with high temperature gases exhausting at high velocities, i.e., real gas, viscous, turbulent and separated two-phase flow, high temperatures and high variation of the physical properties. Mathematical modeling is difficult due to the complex mathematical equations which describe the complete problem. On the other hand, experimental investigation of the problem is extremely costly and complex. For all these reasons, the designer has to start with a simplified model, simulate approximate conditions and validate the results using published data.

The present work deals with the considerations made in the design of a flame deflector for the launch pad of the Brazilian satellite launch vehicle (VLS). The paper reports on the design features of a flame (jet) deflector, when the flame (jet) is overexpanded,  $p_e/p_a = 0.6$ , and supersonic,  $M = 3.45$ . Furthermore first results of numerical simulations are presented which allow the verification of the existence of a recirculation region of the hot gases.

In both cases no attempt has been made to model the high temperature gases effects.

### LIFT-OFF CONFIGURATION

The first Brazilian satellite launch vehicle, VLS, is a four stage launcher with four strap-on boosters building the first stage, (Moraes, P., Jr., and Augusto, A., Neto, 1990). The lift-off configuration of VLS is composed by the flight configuration of the vehicle, placed on the launch pad with four separated flame

deflectors and service tower, Fig. 1. At lift-off, the four strap-on boosters are ignited simultaneously, producing a very complex flowfield due to the exhaust of the hot gases at high velocities.

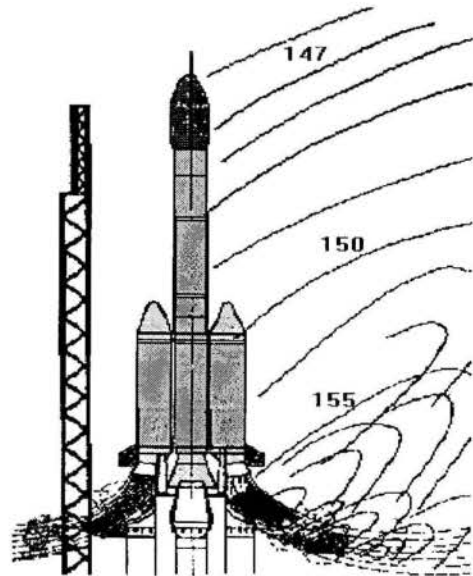


Figure 1 - VLS - Lift-off configuration

### FLOWFIELD CONSIDERATIONS

The gases from the rocket motor exhaust with supersonic speed,  $M = 3.45$ , and are overexpanded,  $p_e/p_a = 0.6$ , due to the high expansion which occurs in the rocket nozzle. A flame or jet deflector become necessary to protect the launch pad and to conduct the gases away from that region.

Differently from jet impingement on a double wedge deflector (Prasad, J.K., Mehta, R.C., and Sreskant, A.K., 1989), used for single motor launcher configurations, where the flowfield is characterized by a detached shock wave in the apex of the wedge, in the present case, the supersonic jet exhaust is initially disturbed only by the external compression due to atmospheric pressure, Fig. 2. From the nozzle lip, a shock wave will appear,

which undergoes a reflection at the jet center line, building the first jet element. Later, the supersonic jet impinges on the deflector surface and produces at this point, due to the deflector curvature, a strong shock wave which separates the boundary layer. Downstream of that point the jet continues to be supersonic or in some cases, if the deflector curvature is small, becomes subsonic. In any case, the flowfield of the jet interacting with the deflector surface is very complex and characterized by shock waves, shock wave-boundary layer interaction, and flow



Figure 2 - Jet impingement on deflector (Prasad, J. K., 1995) Schlieren photograph

separation.

It is now evident, that the interaction of the motor exhaust gas jet with the launch pad as well as with the base region of the vehicle itself, constitutes an important and complex fluid dynamic problem during the lift-off of the satellite launch vehicle, and the main aspects to be considered here deal with:

- a) the deviation of the jet away from the launch pad using a jet deflector,
- b) the estimation of pressure and thermal loads on the jet deflector surface, and
- c) acoustic loading effects on the vehicle due to deflection from the launch pad.

**FLAME DEFLECTOR DESIGN**

The flame deflector of the VLS launch pad was then designed to attend the following requirements:

- protection of launching table from pressure and thermal loads, originated from the motor exhaust hot gases;
- conduction of the exhaust gases away from the launch pad in order to avoid their recirculation to the base region of the vehicle.

Initially no attempt has been made to take into consideration the propagation or attenuation of acoustic waves originated from the gases exhausting at very high velocities.

To attend the aforementioned requirements, the following parameters and variables were carefully considered in the design of the flame deflector:

- curvature of the flame deflector,
- length and width,
- distance of the apex of the deflector, in relation to the nozzle exit plane.

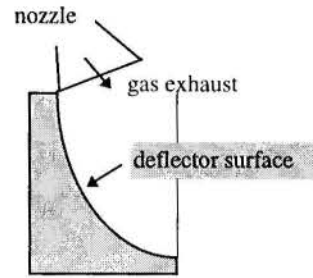


Figure 3 - Schematic view of an ideal flame deflector.

The main criterion adopted in designing the deflector was that the supersonic flow becomes subsonic before it leaves the deflector surface. Subsonic flows are mostly convenient to prevent a strong recirculation and so to maintain the hot gases far from the vehicle's base region. Fig. 3 shows a schematic view of the ideal design geometry. However, due to manufacture costs, the flame deflector considered in the present study is simplified in its geometry, and built of three flat segments as shown in Fig. 4.

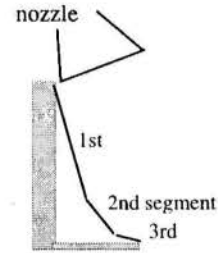


Figure 4 - Schematic view of a simplified geometry flame deflector.

**MATHEMATICAL FORMULATION**

With the aim of analyzing local aspects of the jet flowing over the jet deflector, the problem was modeled.

The two-dimensional, compressible, exhaust flow from the first stage boosters of the VLS impinging on a deflecting table, is governed, as a first approximation, by the non-reacting Navier-Stokes equations. In conservation law form and in a generalized curvilinear coordinate system (ξ,η), they may be written as

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \eta} = 0 \tag{1}$$

where  $\hat{Q}$  is the unknown vector, and  $\hat{F}$  and  $\hat{F}_v$  the inviscid and viscous fluxes in the ξ direction, and  $\hat{G}$  and  $\hat{G}_v$  the similar fluxes in the η direction.

**Numerical Algorithm**

The present time-accurate numerical method is based on the observation that a δ-form of the governing unsteady equations may be constructed with various combinations of the flux formulae and their Jacobians. Furthermore a suitable choice of the factorization procedure yields a scheme with fast convergence and low computational time per iteration.

Eq. (1) can be written in difference form as

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{3}{2} I + \Delta t (D_{\xi} \hat{A} \bullet + D_{\eta} \hat{B} \bullet) \right] \delta \hat{Q}^n \\ & = \frac{1}{2} \delta \hat{Q}^{n-1} - \Delta t [D_{\xi} (\hat{F}^n - \hat{F}_v^n) + D_{\eta} (\hat{G}^n - \hat{G}_v^n)] \quad (2) \end{aligned}$$

where a second order accurate Euler three-point backward time discretization is used. The inviscid and viscous fluxes are linearized by:

$$\hat{F}^{n+1} = \hat{F}^n + \hat{A} \Delta \hat{Q}^n, \quad \hat{F}_v^{n+1} = \hat{F}_v^n$$

and the inviscid flux Jacobian matrix defined as

$$\hat{A} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}}$$

similarly for  $\hat{G}$ ,  $\hat{G}_v$ , and  $\hat{B}$ .

A finite volume approach is used in the treatment of the spatial discretization of the fluxes. Second order central differences are used in the left hand side. A fourth order artificial dissipation is added to the right hand side to control the undesired effect of odd and even point decoupling characteristic of central differences.

In the present two-dimensional algorithm, the lower-upper symmetric-Gauss-Seidel factorization scheme proposed by (Yoon, S. and Kwak, D., 1992) is used. The advantage of this factorization is that the construction of the diagonal of the L and U matrices permits a scalar inversion, leading to a very efficient and vectorizable algorithm. The Jacobian matrix  $\hat{A} = \hat{A}^+ + \hat{A}^-$  is approximated by

$$\hat{A}^{\pm} = \frac{1}{2} [ \hat{A} \pm \rho(\hat{A}) ]$$

where

$$\rho(\hat{A}) = \max[ |\lambda(\hat{A})| ]$$

and  $\lambda(\hat{A})$  is the eigenvalue of the Jacobian matrix  $\hat{A}$ . A similar procedure is applied to the Jacobian matrix  $\hat{B}$ .

With these approximations the factorization matrices are given by

$$L = \left( \frac{3}{2} + \Delta t \rho \right) I - \Delta t (\hat{A}_{i-1,j}^+ + \hat{B}_{i,j-1}^+)$$

$$D = \left( \frac{3}{2} + \Delta t \rho \right) I$$

$$U = \left( \frac{3}{2} + \Delta t \rho \right) I + \Delta t (\hat{A}_{i+1,j}^- + \hat{B}_{i,j+1}^-)$$

where

$$\rho = \rho(\hat{A}) + \rho(\hat{B})$$

Equation (2) can thus be written as

$$L D^{-1} U \delta \hat{Q}^n = \text{RHS}[\text{Eq.}(2)] \quad (3)$$

The solution is then obtained in three steps as follows

$$\delta \hat{Q}^* = L^{-1} \text{RHS}$$

$$\delta \hat{Q}^{**} = D \delta \hat{Q}^* \quad (4)$$

$$\delta \hat{Q}^n = U^{-1} \delta \hat{Q}^{**}$$

The effects of fine scale turbulence are taken into account by the use of the algebraic model of Baldwin and Lomax. A detailed discussion of its implementation can be found in Morgenstern, A., Jr., (1994).

## RESULTS

In order to better understand the features of the complex flowfield, the results of a numerical two-dimensional flow simulation past the simplified geometry of the flame deflector were visualized and discussed in the following.

As mentioned before, one of the desirable features of a flame deflector is to reduce the flow speeds to a subsonic regime as fast as possible in order to reduce the effects of flow recirculation. As can be seen in Fig. 5, where subsonic Mach number contours delimiting the region of supersonic Mach numbers are presented, the simplified geometry does not comply with this requirement. The exhaust gases leave the deflection surface with supersonic speeds and this region of supersonic Mach numbers extend for a long distance from the launch pad.

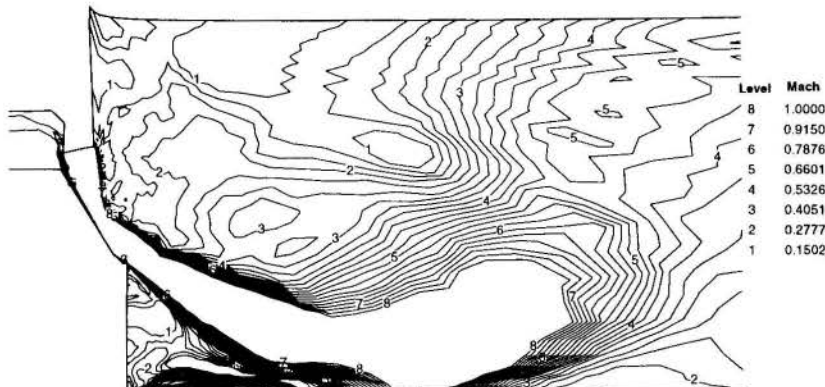


Figure 5 - Flow over a flame deflector.  
Flowfield around the launch pad.



Figure 6 - Flow over a flame deflector.  
Pressure contour plots.

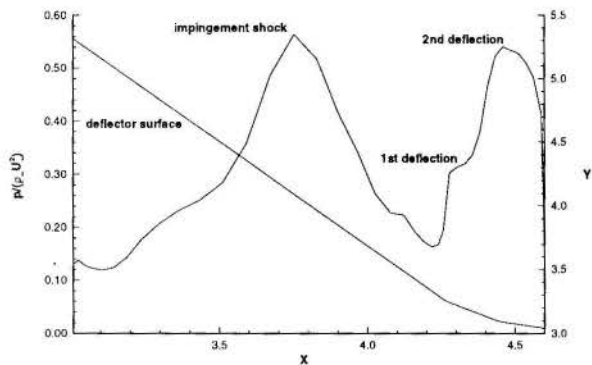


Figure 7 - Flow over a flame deflector.  
Pressure distribution

The shock wave structure on the deflector surface is shown in Fig. 6 It can be observed a strong shock formed as the exhaust gases impinges on the surface. Following this strong shock there are two weaker shocks formed in the two discontinuous points of the simplified geometry. This can be better observed in the blown-up inset where the first shock wave appears due to the contraction of the deflector surface, and a second shock wave occurs immediately downstream by a second surface modification.

The pressure distribution on the deflector surface can be seen in Fig. 7. In this figure, where nondimensional pressure is plotted against distance in the x direction, the position of the impinging shock wave as well as the two shock waves due to the geometric discontinuities can be clearly seen. It can also be observed the magnitude of the pressure peaks, indicating a fairly strong pressure peak on the last geometric discontinuity.

Fig. 8 shows the streamline pattern of the exhaust gases. This picture shows that although a recirculation of the exhaust gases occurs, it takes place far away from the launch pad.

The velocity vectors of the flow field can be seen in Fig. 9. The general flow trends are observed and in the blown-up inset a separation region with reverse flow can be seen that starts from the impingement region and travels upstream toward the inside region of the launch pad, eventually interacting with the first stage boosters.

### CONCLUSIONS

The paper reports on the design features of a flame (jet) deflector, when the flame (jet) is overexpanded,  $p_e/p_a = 0.6$ , and supersonic,  $M = 3.45$ . Also first results of a numerical simulation are presented. In both cases no attempt has been made to model the high temperature gases effects.

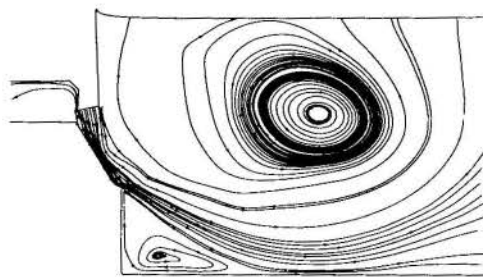


Figure 8 - Flow over a flame deflector.  
Streamlines



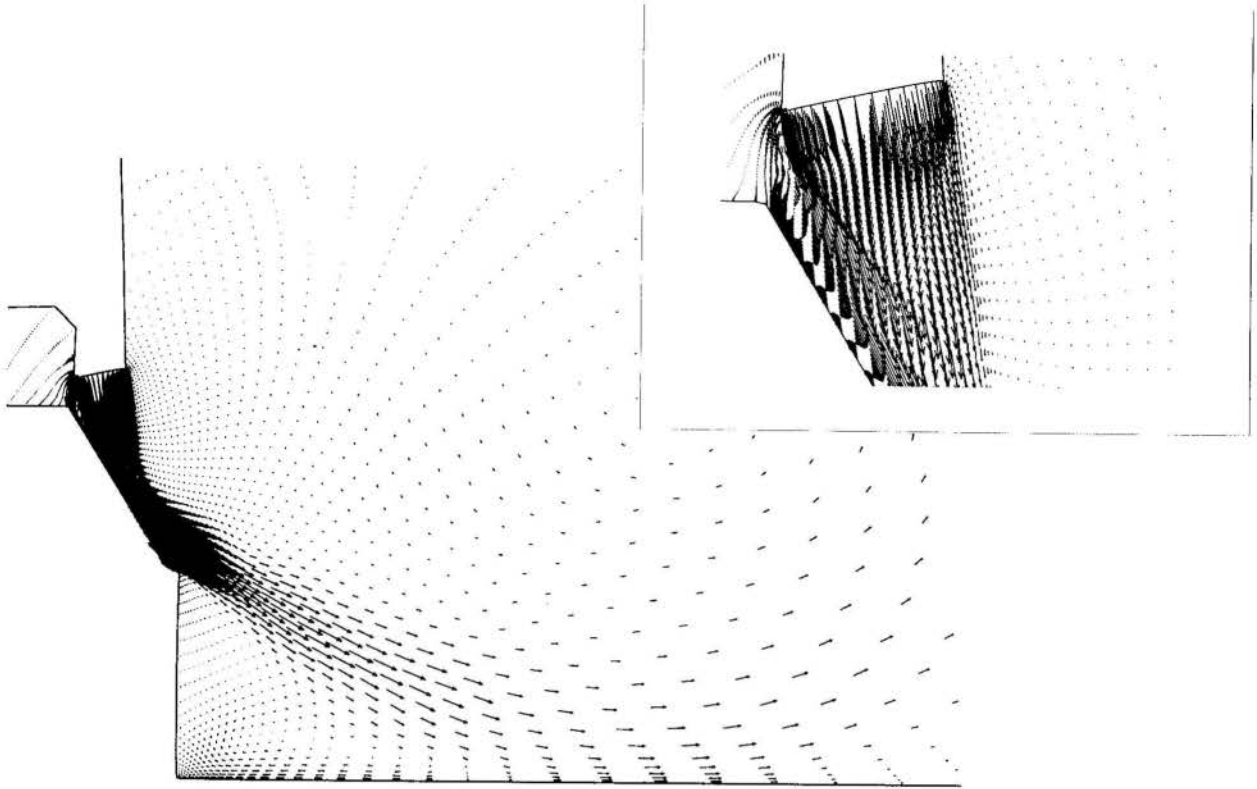


Figure 9 - Flow over a flame deflector.  
Velocity vectors

For the design of launch pad deflectors of satellite launch vehicles, some thought has to be given concerning the effects of the hot gases exhausting from the rocket motor at high velocities and temperatures, in order to avoid their impact with the launch pad which is supporting the vehicle, the recirculation of the hot gases to vehicle's base region, and the increase of the acoustic field level surrounding the vehicle.

In the present study a conventional jet deflector was taken under analysis and the flow was mathematically modeled. The results of the numerical analysis showed the main features of the complex flowfield around the launch pad and deflector surface, and allowed to identify in more detail a secondary recirculation of the hot gases in the apex of the deflector.

Due to the difficulty in performing experimental investigation of such a problem, the launch of the VLS will allow a validation of the results now obtained with the present numerical simulation.

#### **REFERENCES**

Moraes, P., Jr., and Augusto, A., Neto, 1990, "Aerodynamic experimental investigation of the Brazilian satellite launch vehicle (VLS)", Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas - ENCIT 90, Itapema-SC.

Prasad, J.K., Mehta, R.C., and Sreskant, A.K., 1989, "Overexpanded supersonic jet impingement on double wedge deflector", Proceedings of the Sixth International Conference, Swansea, UK, 11-15 July

Prasad, J.K., 1995, private communication.

Yoon, S. and Kwak, D., 1992, "Implicit Navier-Stokes Solver For Three-Dimensional Compressible Flow," *AIAA J.*, Vol. 30, pp. 2653-2659.

Morgenstern, A., Jr., 1994, "Numerical Investigation of Unsteady Hypersonic Flows Past Cavities", Ph. D. Thesis, North Carolina State University, Raleigh, NC.

## THERMAL DESIGN AND RESULTS ANALYSIS OF THE THERMAL BALANCE TEST OF THE CBERS BATTERY COMPARTMENT

Rosângela Meireles Gomes Leite, Issamu Muraoka  
Divisão de Mecânica Espacial e Controle  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
12201-970 - São José dos Campos - SP - Brasil

### SUMMARY

The present work reports on the thermal control design solutions and the results analysis of the thermal balance test of the CBERS Battery Compartment development model. The passive thermal control meets the requirements applying flight proven design methods such as paint, tape, mli, thermal interface material. Active thermal control, employing electrical heaters, is also used for preventing the battery cooling down. An analysis of the test results allows to adjust the mathematical model and validate the thermal design.

### INTRODUCTION

China Brazil Earth Resources Satellite (CBERS), jointly developed by the People's Republic of China and Brazil, will be used for remote of sensing of the natural resources and monitoring of the environment. CAST (Chinese Academy of Space Technology) is responsible for the thermal control design of this satellite. However, INPE was subcontracted to execute the thermal design of the battery compartment.

The operational parameters of a battery, such as voltage, capacity, efficiency and lifetime are very dependent on the thermal environment and internal thermal gradients. A rigid thermal specification is imposed to the battery to attend its operational requirement. So, two batteries, divided in four packs, are installed inside a compartment in the service module. No other equipment belongs to this compartment. The battery packs are fixed on the internal face of the shadow panel of the satellite (see Figures 1 and 2).

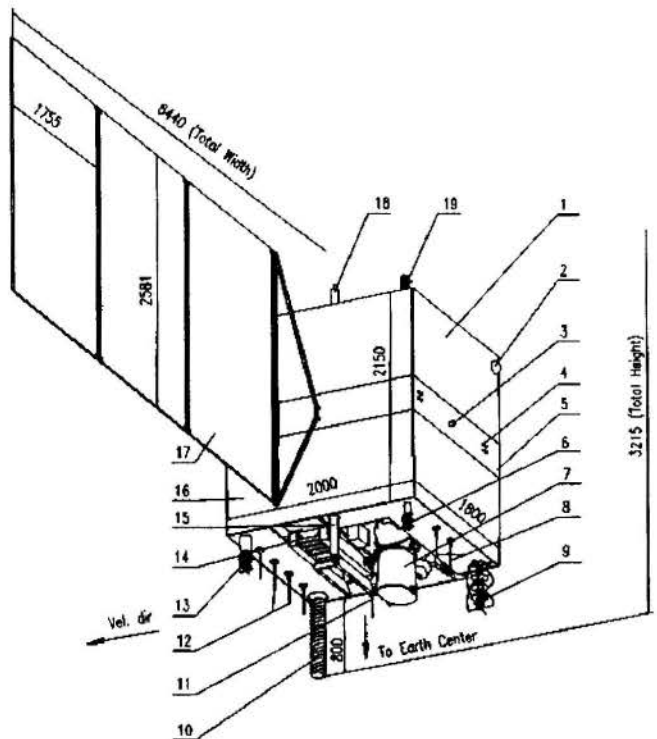
The thermal control chosen is easily adaptable for multimission purposes required for this kind of modular satellite where Payload Module and Service Module are functionally and thermally decoupled. Consequently, the batteries, the battery mounting panel and the internal surfaces of the compartment are isolated thermally from the other panels of the Service Module. This way, the influence of the Service Module temperature variation on the battery temperature is minimized. The battery radiator size and the heating power are determined in function of the temperature limits and heat dissipation values specified for the batteries.

### DESIGN REQUIREMENTS AND CONSTRAINTS

The temperatures of the batteries must be within the specified range for any operation mode and any orbital condition along the satellite 2 years lifetime. The main requirements and constraints imposed to thermal control are the orbit and attitude configuration, the operating temperature limits, heat dissipation and the power and mass limits (Bueno et al. 1989).

**Orbit and Attitude Configuration.** The satellite orbital parameters such as circular heliosynchronous orbit, inclination of 98.5 degrees, altitude of 778km, period of 100.3 in and descending node local time of 10:30h characterize the space environment. Moreover, during the operational phase, one of the satellite faces is always pointed towards the Earth what guarantees that the

batteries installed in the shadow face never receives the direct solar radiation, only the albedo and Earth radiation.



1- service module; 2- infrared Earth sensor; 3- 20N thruster; 4- 1N thruster; 5- middle wall; 6- UHF receiver antenna; 7- infrared scanner; 8- IR transmit antenna; 9- VHF transmit antenna; 10- UHF Rx/Tx antenna; 11- S-band antenna (DCS); 12- CCD transmit antenna; 13- UHF transmit antenna; 14- CCD camera; 15- S-band antenna (TT&C); 16- payload module; 17- solar array; 19- UHF receiver antenna.

Figure 1 - Satellite configuration.

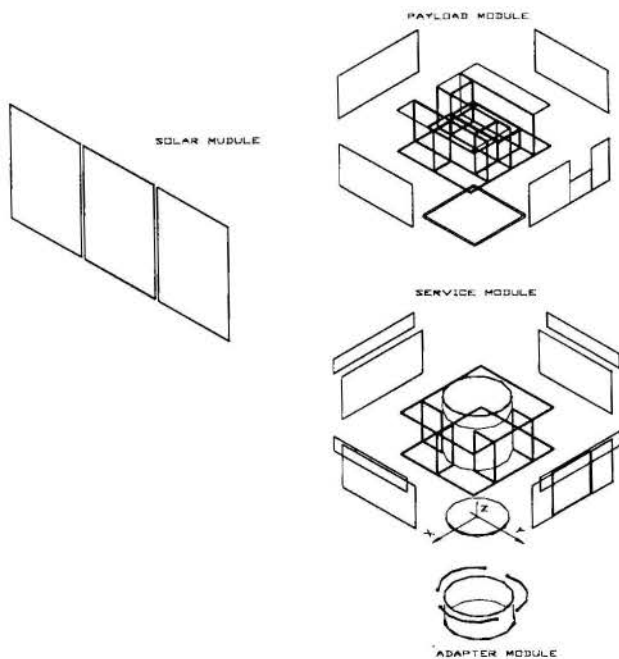


Figure 2 - CBERS structure.

**Temperature Limits.** The operating temperature range specified for the batteries varies from  $-5^{\circ}\text{C}$  to  $15^{\circ}\text{C}$ . The thermal design margin specified for the battery upper limit is of  $5^{\circ}\text{C}$ , for the lower temperature is not specified a temperature margin, but a power margin of 25%.

The temperature gradient between battery packs must be lower than  $5^{\circ}\text{C}$ .

The temperature range of the compartment panels is specified from  $-10^{\circ}\text{C}$  to  $45^{\circ}\text{C}$ , respectively for cold and hot cases.

**Battery Heat Dissipation.** The average heat dissipations during an orbit of each battery pack for BOL (beginning of life) and EOL (end of life) are 9.9W and 27.5W, respectively. The heat dissipation profile of batteries is related to their mode operation, the batteries dissipate heat when they are discharging.

**Power and Mass Limits.** The power to heat each battery pack during the BOL must not exceed 25W, resulting in 100W for two batteries. The mass limit for the thermal control of the compartment is 2kg.

### BATTERY COMPARTMENT THERMAL DESIGN

The necessary radiative area for keeping the battery temperature below  $10^{\circ}\text{C}$  is determined using the EOL heat dissipation. The necessary heat consumption for keeping the battery temperature above  $0^{\circ}\text{C}$  is determined using the BOL conditions.

The thermal control design of the battery compartment is based on the following concepts:

- all internal surfaces of the compartment are coated with Al tape and the battery external surfaces are covered with MLI to decouple them radiatively;
- the battery mounting panel must be insulated conductively from the other compartment panels so that the influence of the Service Module on the battery thermal behaviour is minimized;
- each battery pack must be conductively coupled to the mounting panel using a thermal interface material;

- heaters must be used for heating the batteries, that have a narrow temperature specification and a large variation of heat dissipation.

### THERMAL MODELLING

The thermal control solutions are met using the nodal method mathematical modelization. The temperature distribution is predicted by thermal analyser, PCTER developed at INPE, based on finite differences. The battery compartment is divided into finite number of nodes considered isothermal. These nodes are connected to each other by conductive and radiative couplings.

The conductive couplings are calculated between nodes on the same panel and between the battery panel and other compartment panels. The radiative couplings are calculated by Gebhart method, with the shape factors between surfaces calculated by contour integration or double discretization method depending on if there are or not blocking surfaces.

The external nodes and equipment nodes receive thermal loads from external radiations and internal heat dissipations.

The temperatures of nodes are calculated numerically considering all thermal couplings and loads, and the boundary conditions (space at 4K).

In these analyses the compartment mathematical model was subdivided into 253 nodes as shown in Figures 3, 4 and 5.

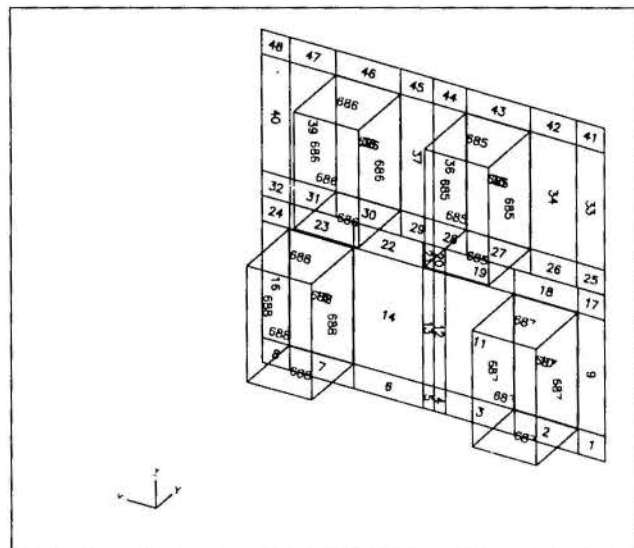


Figure 3 - Nodal breakdown of the bat. panel internal surface.

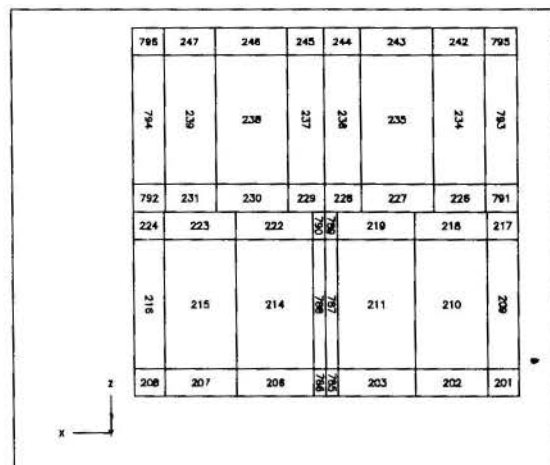


Figure 4 - Nodal breakdown of the bat. panel external surface.

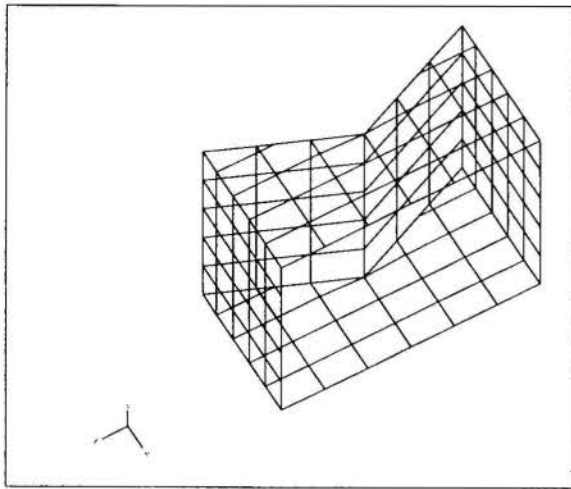


Figure 5 - Nodal breakdown of the compartment panels.

**Critical Cases.** The thermal analysis approach is to simulate just the critical cases. If the thermal design satisfies these cases, then all other intermediary conditions are covered. Critical cases are determined in function of the external loads and internal heat dissipations. Then, the battery maximum temperatures occur for the hot case where are considered:

- battery maximum heat dissipation (at EOL);
- maximum solar incidence area (sun aspect angle = 66.04 degrees);
- eclipse time 33.5 in;
- solar constant = 1399 W/m<sup>2</sup> K;
- coating performance degeneracy = 100% for white paint and 30% for MLI;

Analogously, the battery minimum temperatures occur for the cold case where are considered:

- battery minimum heat dissipation (at BOL);
- minimum solar incidence area (sun aspect angle = 73.3 degrees);
- eclipse time = 34.4 in;
- solar constant = 1309 W/m<sup>2</sup> K.

#### THERMAL BALANCE TEST (TBT)

The TBT purposes are to verify and to adjust the thermal design and the mathematical model (Leite and Almeida, 1995).

**Test Description.** The test was accomplished in 4 phases. Two phases, cold and hot, in steady-state conditions, imposing an average value for the external heat flux absorbed by the battery panel and an average value for the battery heat dissipated. The main objective of these two phases was to adjust the mathematical model. Two more phases in transitory conditions, cold and hot, were considered to allow the verification the thermal inertias and the amplitude of temperature variation along an orbit.

The test philosophy adopted for the compartment was very simple. The space was simulated using the vacuum chamber with internal surfaces coated by black paint ( $\epsilon = 0.9$ ) and refrigerated by gaseous nitrogen at -180°C.

During the tests the compartment panels and the cylinder section were heated by skin heaters bonded to their external surfaces to keep their temperatures at -10°C and 45°C, in order to simulate the thermal environment of the Service Model. Skin heaters were also used to simulate the external heat loads incident on the battery panel outside surface.

**Development Model.** A full scale model was built to perform the TBT. Its structure was the same of the flight model, except for the carbon fiber cylinder section that was replaced by a stainless steel cylinder section and for the titanium screws that were replaced by stainless steel. Four real battery packs were used in the test.

At EOL conditions the batteries must be degraded and consequently, their internal dissipation will be almost triplicated. In the test the batteries were new, thus the heat dissipation profile of the batteries to the EOL conditions was complemented by additional powers dissipated in the skin heaters installed inside the batteries.

The battery compartment thermal control should be implemented according to the specification, however, the measured value for the alodine emissivity (0.025) that covered the compartment panels was lower than the measured emissivity for the chinese Al film. Therefore, there was no more reason to apply one layer of Al film to insulate radiatively the internal surfaces of the compartment. Thus, the Al tape was applied only on the cylinder surface.

The temperature distribution was monitored by 66 Cu-Co thermocouples distributed on the batteries, compartment surfaces, and vacuum chambers surfaces, and 12 thermistors already installed inside the battery packs.

Figures 6 and 7 present the compartment development model utilized in the test.

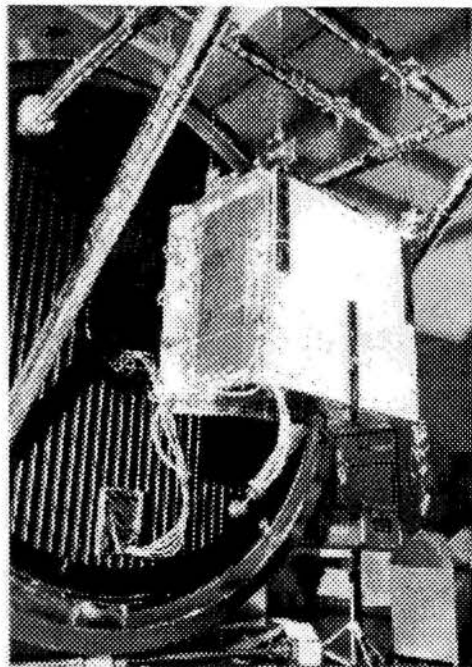


Figure 6 - View of the compartment development model.





Table 2- Comparison between measured and predicted temperatures for hot case

nodes	tc	tc localization	pred. temp Tp (C)	meas. temp. Tm (C)	temp. diff. DT (C)
61	1,3	Fw. blank ext. surf.	48.1	47	1.1
63	2,55	Fw. blank ext. surf.	38.2	34.2	4
98	4	Bw. blank int. surf.	38	34	4
88	5,56	Bw. blank int. surf.	38.6	34.9	3.7
78	6	Bw. blank int. surf.	38.6	34.3	4.3
99	7	Roof section int. surf.	37	32.3	4.7
107	8	Roof section int. surf.	41.8	38.6	3.2
108	57	Roof section int. surf.	41.8	37.2	4.6
130	10	Floor section int. surf.	43.9	36.7	7.2
135	58	Floor section ext. sur.	41.7	31.7	10
132	12	Floor section int. surf.	39.7	35.7	4
163	14	Cylinder int. surf.	43.8	40.3	3.5
156	15	Cylinder int. surf.	34.7	32.6	2.1
170	60	Cylinder ext. surf.	45.7	40.9	4.8
240	16	Bat. Panel ext. surf.	-9.6	-11.8	2.2
236	17	Bat. Panel ext. surf.	-10.8	-16.1	5.3
235	18	Bat. Panel ext. surf.	-8.4	-9.7	1.3
233	19	Bat. Panel ext. surf.	-9.6	-12.7	3.1
793	20	Bat. Panel ext. surf.	-96.3	-91.6	-4.7
215	21	Bat. Panel ext. surf.	-7.9	-12	4.1
209	24	Bat. Panel ext. surf.	-8.8	-8.5	-0.3
46	25	Bat. Panel int. surf.	-3.6	0.8	-4.4
43	26	Bat. Panel int. surf.	-3.6	-0.5	-3.1
39	27	Bat. Panel int. surf.	-6.4	-3.6	-2.8
36	28	Bat. Panel int. surf.	-1.7	0.5	-2.2
16	29	Bat. Panel int. surf.	-2.1	3.5	-5.6
7	30	Bat. Panel int. surf.	-2.3	-0.7	-1.6
14	31	Bat. Panel int. surf.	-10	-7	-3
2	32	Bat. Panel int. surf.	-2.4	-2.8	0.4
9	33	Bat. Panel int. surf.	-2.1	-0.7	-1.4
685	34	ext. MLI on pack 2	27.8	22.9	4.9
688	35	ext. MLI on pack 3	28.2	23.6	4.6
186	39	Bat. pack # 1 foot	2.5	3	-0.5
37	40	Next Bat. pack # 1	-1.7	-0.6	-1.1
187	50	Bat. pack # 4 foot	3.3	1.1	2.2
10		Bat. P. int. sur. (bat 4)	2.6	*	*
15		Bat. P. int. sur. (bat 3)	2.6	*	*
35		Bat. P. int. sur. (bat 2)	1.9	*	*
38		Bat. P. int. sur. (bat 1)	1.9	*	*
--		Bat.pack 1 cells top	*	10.3	*
--		Bat.pack 2 cells top	*	9.3	*
--		Bat.pack 3 cells top	*	8.8	*
--		Bat.pack 4 cells top	*	7.7	*
		<b>temp. diff. average</b>			2.4
		<b>diff. standard dev.</b>			3.2

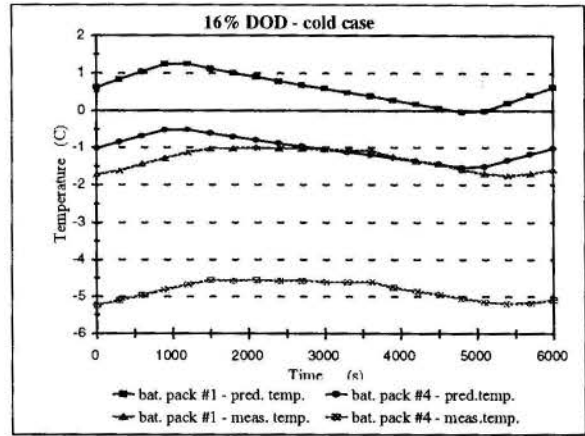


Figure 8 - Measured and predicted temperatures along orbit for the cold case.

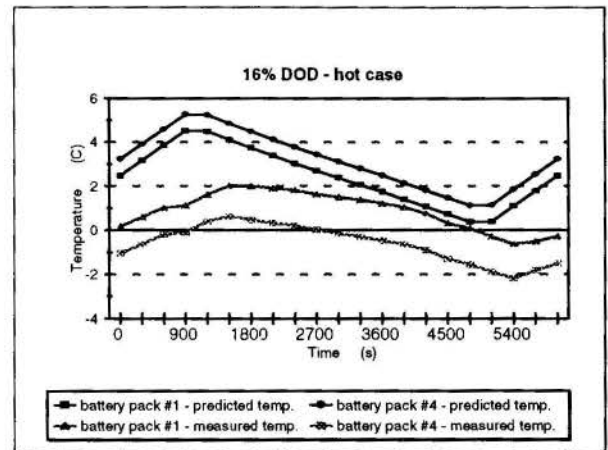


Figure 9 - Measured and predicted temperatures along orbit for the hot case.

Leite, R. M. G., M.C.P. Almeida, 1995. "Verification and Test Plan for the Battery Compartment" - Technical Report - CBB-IHVP-003. INPE - São José dos Campos.

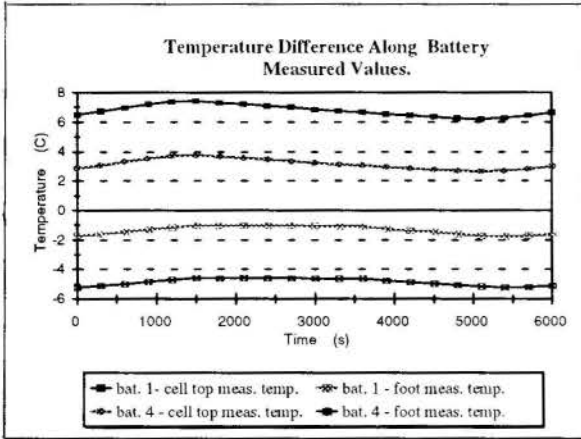


Figure 10- Temperature differences measured along the battery for cold case.

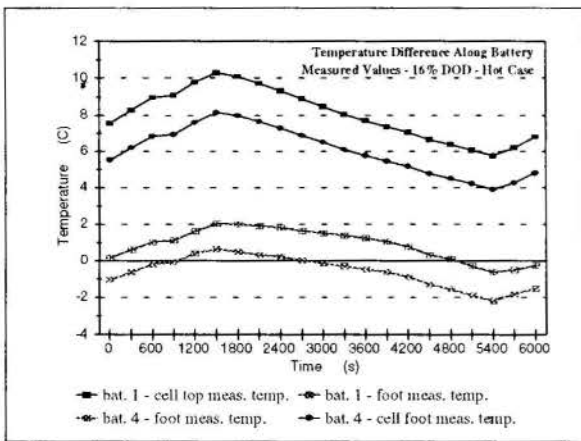


Figure 11 - Temperature differences measured along the battery body for hot case.

## CONCLUSION

The thermal mathematical model developed for the battery compartment simulates very well the thermal behavior of the compartment. Moreover, tests and analyses demonstrated that the thermal control design proposed for the battery compartment satisfies the specified requirements.

## REFERENCE

Bueno, L. A. R. Et al., 1989. "Environmental Specification" - Technical Report - CB-EVS-001. INPE - São José dos Campos.

Leite, R. M. G., Pan Zengfu, 1989. "Specification of the Thermal Control for the Battery Compartment" - Technical Report - CBB-CHDS-006. INPE - São José dos Campos.

Leite, R. M. G., I. Muraoka, 1993. "Controle Térmico de Satélites" - Apostila do curso Propesa/CTA - São José dos Campos.

Leite, R. M. G., M. C. P. Almeida, 1992. "Thermal Control of the Battery Compartment PDR Data Package" - Technical Report - CBB-IREV-004.



## MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE REFRIGERADORES DOMÉSTICOS: INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA AMBIENTE EM SEU DESEMPENHO



**Carlos Almir Monteiro de Holanda**  
Departamento de Engenharia Química  
Universidade Federal do Ceará - UFC  
60455-760 - Fortaleza - CE - Brasil

### RESUMO

*O presente trabalho tem como objetivo a implementação de uma rotina computacional, capaz de simular um sistema de refrigeração básico, mostrando a influência da temperatura ambiente e seus efeitos no desempenho do ciclo termodinâmico. O referido sistema é dividido em componentes, através de volumes de controle, e modelados individualmente, obtendo-se assim uma série de  $N$  equações com  $N$  incógnitas. A resolução é feita para regime permanente, e os resultados simulados são analisados e discutidos, tendo como parâmetros ensaios experimentais realizados de acordo com o teste de Pull-Down.*

### INTRODUÇÃO

A perspectiva de escassez da energia elétrica em todo o país já no começo do próximo milênio, vem trazendo em seu bojo uma crescente preocupação com a conservação de energia em todos os setores industriais. No ramo da refrigeração, vemos uma guerra silenciosa no sentido de produzir refrigeradores cada vez mais eficientes.

Porém esse salto de qualidade está umbilicalmente ligado às pesquisas de novos produtos, bem como no estudo do impacto que cada componente causa no sistema. Neste campo a simulação numérica é a responsável por este avanço, uma vez que com custos bastante reduzidos, pode-se combinar uma infinidade de opções, criando os mais variados sistemas, que levariam anos e com custos exorbitantes, para serem experimentados em laboratórios.

Este trabalho tem como objetivo a simulação de um refrigerador doméstico, a partir das características individuais dos componentes que constituem o sistema. Com a modelagem desses componentes teremos uma série de equações algébricas que combinadas comporão o ciclo de refrigeração por completo. Estas equações serão deduzidas para regime permanente tendo como base os dados fornecidos pelos fabricantes (curvas características), balanços de energia e de massa, bem como o processo físico da transferência de calor.

O método utilizado na resolução desse sistema, foi proposto por Stoecker (1971) e consiste na resolução simultânea de uma série de equações, utilizando a técnica de Newton-Raphson. Os resultados serão comparados com os ensaios experimentais, onde ainda analisaremos a influência da variação da temperatura ambiente no desempenho do ciclo.

### DESCRIÇÃO E MODELAÇÃO DO SISTEMA

O sistema analisado foi o de um refrigerador de uma porta, onde está a maior demanda do mercado nacional. Este sistema é composto de um compressor hermético do tipo recíproco modelo PW- 4,5 K-9 fabricado pela EMBRACO, de um condensador tipo arame sobre tubo, de um dispositivo de expansão do tipo tubo capilar com 3m de comprimento e com 0,73mm de diâmetro

interno, de um evaporador *roll-bond* do tipo "C" e um trocador de calor contracorrente entre a linha de sucção e o tubo capilar.

O compressor desloca uma certa quantidade de fluido refrigerante no estado de vapor superaquecido, recebendo energia necessária para a compressão e rejeitando calor para o ambiente. Estando a uma temperatura acima da temperatura ambiente, o vapor rejeita calor ao passar tanto na tubulação de descarga quanto no condensador, onde muda de estado. O líquido condensado sai do condensador levemente subresfriado e entra no tubo capilar, onde uma parte está inserido na tubulação de sucção, fazendo com que além da expansão, ocorra uma transferência de calor do líquido em expansão para o vapor superaquecido. Saindo do tubo capilar o fluido (líquido + vapor) entra no evaporador, absorvendo calor do ambiente refrigerado, onde se evapora e superaquece. Ao sair do evaporador o vapor superaquece ainda mais com o calor que recebe do tubo capilar, onde por fim retorna ao compressor completando o ciclo.

Com o objetivo de simplificar a modelação, os processos de expansão e transferência de calor foram analisados em separado. Desta forma o refrigerante sofre uma expansão isoentalpica ao passar pelo dispositivo de expansão e o trocador de calor está localizado entre a linha de líquido e a de sucção, conforme figuras 1 e 2. Note que no ciclo real este processo combinado está representado pela linha pontilhada do diagrama pressão-entalpia.

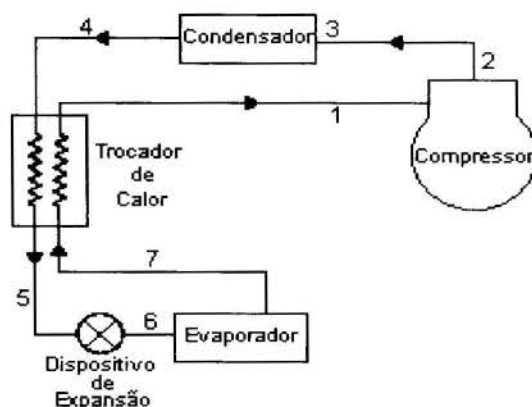


Fig. 1 - Esquema do ciclo de refrigeração



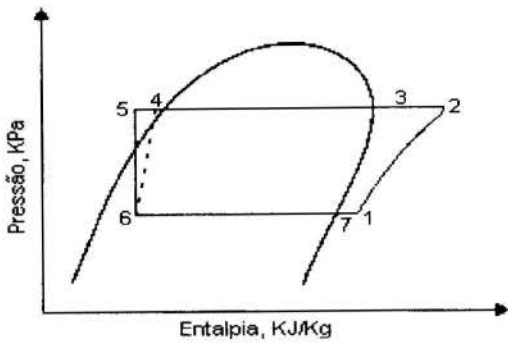


Fig. 2 - Diagrama pressão-entalpia do sistema

Dividindo este ciclo em componentes individuais e, fazendo um volume de controle em cada um, podemos analisar o estado de entrada e saída do fluido em cada ponto:

### Compressor

O esquema do compressor é mostrado na figura 3. Através de ensaios calorimétricos realizados pelo fabricante, obtivemos valores da potência e do fluxo de massa para várias temperaturas de condensação e evaporação. Para transformar esses valores pontuais em funções, foram feitos ajustes de equações usando o método de mínimos quadrados. Devido os ensaios terem sido feitos para uma temperatura ambiente de 32 °C, tivemos ainda que levar em consideração a influência da variação do volume específico junto ao fluxo de massa.

O calor liberado pelo compressor é calculado a partir das correlações da convecção natural e radiação térmica, sugeridas por Incropera e De Witt (1990). Para isto admitimos o compressor como uma esfera de 15cm de diâmetro e com temperatura superficial uniforme. Assim podemos escrever as equações da seguintes forma:

$$\dot{W} = f(T_e; T_c) \quad (1)$$

$$\dot{m} = f(T_e; T_c; T_{amb}) \quad (2)$$

$$\dot{Q}_{cp} = UA \cdot (T_{corpo} - T_{amb}) \quad (3)$$

$$\dot{W} - \dot{Q}_{cp} = \dot{m}_1 \cdot (h_2 - h_1) \quad (4)$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad (5)$$

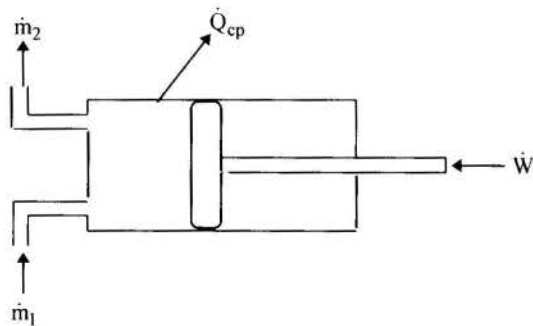


Fig. 3 - Esquema do compressor

### Tubulação de descarga

A tubulação de descarga vai da saída do compressor até a entrada do condensador. É constituído por um tubo de 47,6mm

de diâmetro por 900mm de comprimento. Fazendo um volume de controle nesta tubulação, vemos que calor é dissipado para o ambiente, conforme a figura 4. A importância de levarmos em consideração esta dissipação de calor é que caso contrário iremos superdimensionar o condensador.

Para o cálculo da taxa de transferência de calor foram adotadas as seguintes hipóteses:

(a) As propriedades físicas do ar são constantes ao longo da tubulação;

(b) O tubo está inteiramente na vertical;

Desta forma obtemos as seguintes equações:

$$\dot{Q}_{tub} = UA \cdot (DMLT)_{tub} \quad (6)$$

$$\dot{Q}_{tub} = \dot{m}_2 \cdot (h_3 - h_2) \quad (7)$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_3 \quad (8)$$

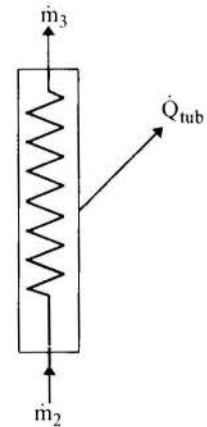


Fig. 4 - Esquema da tubulação de descarga

### Condensador

O subsistema de condensação é esquematizado conforme a figura 5. Devido a sua estrutura complexa (tubos e arames), Cyphers et al. (1958) consideraram cada elemento em separado e estabeleceram a taxa de transferência de calor como a soma de cada componente. Desta forma modelamos os tubos como cilindros horizontais e os arames como cilindros verticais para a convecção natural. Já no que se refere a radiação térmica, Collicott et al. (1963) propuseram um gráfico para determinação do fator de forma para esta geometria.

Salientamos que para tratar o problema físico da transferência de calor, o trocador de calor foi dividido em três partes distintas: a região de desuperaquecimento, a região de saturação e a região de subresfriamento. No entanto, uma vez que o líquido ao deixar o condensador está praticamente saturado (levemente subresfriado), foi desprezado a taxa de transferência de calor da região de líquido subresfriado.

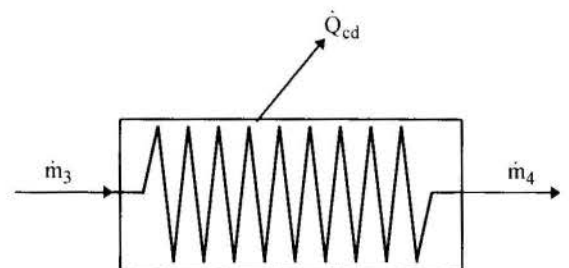


Fig. 5 - Esquema do condensador

Assim as equações que norteiam o condensador podem ser escritas de acordo com o que segue:

$$\dot{Q}_{cd} = UA \cdot (DMLT)_{desuper} + UA \cdot (T_{cond} - T_{amb}) \quad (9)$$

$$\dot{Q}_{cd} = \dot{m}_3 \cdot (h_3 - h_4) \quad (10)$$

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_4 \quad (11)$$

#### Trocador de calor intermediário

O trocador de calor mostrado na figura 6 é do tipo contracorrente e de tubos coaxiais, onde a linha de líquido é inserida na tubulação de sucção. Sua função é melhorar o desempenho do ciclo, além de garantir que somente vapor superaquecido chegue ao compressor. Como a troca de calor com o meio é pequena, estamos considerando-o adiabático. As equações apropriadas são da forma:

$$h_4 + h_7 = h_1 + h_5 \quad (12)$$

$$T_1 - T_7 = \varepsilon \cdot (T_4 - T_7) \quad (13)$$

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_5 \quad (14)$$

$$\dot{m}_7 = \dot{m}_1 \quad (15)$$

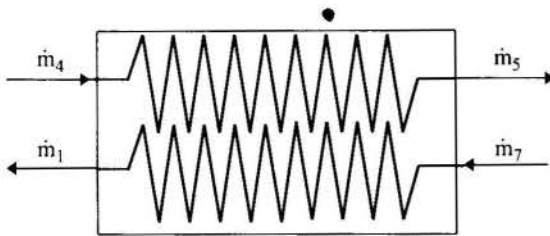


Fig. 6 - Esquema do trocador de calor

#### Tubo capilar

O objetivo do tubo capilar é proporcionar uma queda de pressão a medida em que o refrigerante escoar por ele, fazendo com que parte dele se evapore, proporcionando um abaixamento de temperatura. Este componente não realiza trabalho, além de podermos desprezar as variações da energia cinética e potencial e considerá-lo adiabático. Desta forma aplicando a lei de conservação de energia, temos que a expansão ocorre isoentalpicamente. Assim podemos exprimir as equações desse dispositivo como:

$$h_5 = h_6 \quad (16)$$

$$\dot{m}_5 = \dot{m}_6 \quad (17)$$

#### Evaporador

O evaporador utilizado neste sistema é de grande dificuldade para modelação. Seu esquema está mostrado na figura 7, e o cálculo do coeficiente UA não foi modelado matematicamente, mas sim usado valores sugeridos pelo fabricante, em função do volume do refrigerador. Mais uma vez dividimos o trocador de calor em duas regiões distintas: a de saturação e a de superaquecimento. Desta forma as equações para o subsistema ficam:

$$\dot{Q}_{ev} = UA \cdot (T_{ref} - T_{evap}) + UA \cdot (DMLT)_{super} \quad (18)$$

$$\dot{Q}_{ev} = \dot{m}_6 \cdot (h_6 - h_7) \quad (19)$$

$$\dot{m}_6 = \dot{m}_7 \quad (20)$$

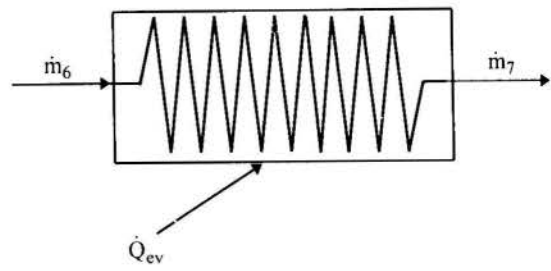


Fig. 7 - Esquema do evaporador

### SIMULAÇÃO DO SISTEMA

Obtida a partir da modelação, uma série de equações que descrevem o ciclo de refrigeração por completo, o passo seguinte é resolver este sistema de N equações a N incógnitas. Vários métodos podem ser utilizados, porém Stoecker (1989) analisou os métodos de substituição sucessiva e o de Newton-Raphson.

Neste trabalho utilizamos o segundo método, que é o de solução simultânea, cujas vantagens destacam-se a perfeita adaptação com o programa generalizado de simulação, resolvendo inclusive sistemas bastante complexos; a independência da seqüência das equações, sem prejudicar a convergência da solução; e o menor tempo de processamento.

Para este método temos que reescrever todas as equações na forma residual, isto é, colocar todos os termos de um lado do sinal de igualdade, e admitir valores iniciais para cada variável. Assim o programa vai calcular os resíduos a partir destas variáveis. Como estes resíduos não devem ser iguais a zero (solução do sistema!), as derivadas parciais de todas as equações na forma residual são calculadas para formar um novo sistema de equações onde são resolvidas pelo método de eliminação de GAUSS. Estes novos valores formam a solução provisória, onde vão ser usados para calcular os novos resíduos e comparados através do critério de convergência imposto. Se ela não for obtida, o processo se repete com os valores das variáveis mais atuais, até que o critério de convergência seja atingido.

### ANÁLISE DOS RESULTADOS

Após a validação da rotina computacional, tomando como base os ensaios experimentais realizados em câmaras com temperaturas controladas e de acordo com a normatização vigente, fizemos a temperatura ambiente variar para analisar as alterações ocorridas nas simulações do sistema. Para o nosso contexto, tomamos dois parâmetros, essenciais para o desempenho do refrigerador, que são a capacidade de refrigeração e o coeficiente de eficácia.

A figura 8 mostra que a capacidade de refrigeração aumenta com o aumento da temperatura ambiente. Embora a curva se mostre de maneira inversa ao que mostrou Hamilton e Miller (1990), entendemos que com o aumento da temperatura ambiente, a temperatura de condensação sobe, fazendo realmente com que a capacidade de refrigeração tenha uma queda. Entretanto a temperatura de evaporação também sobe, provocando um ligeiro aumento na capacidade de refrigeração. Além disso, podemos observar a variação do volume específico na sucção do compressor, que tem grande influência no fluxo de massa descarregado pelo mesmo. Gosney (1982) mostrou que o

efeito refrigerante volumico cresce rapidamente com o aumento da temperatura de evaporação.

No que tange ao coeficiente de eficácia, a figura 9 mostra que existe um pequeno decréscimo quando aumentamos a temperatura ambiente. Isto acontece porque, mesmo tendo um acréscimo da capacidade de refrigeração, ocorre um aumento da potência de compressão. Esse aumento ocorre tanto em função do acréscimo da temperatura de condensação quanto da temperatura de evaporação. No que se refere a temperatura de condensação sempre que a aumentamos, a potência também aumenta. Já em relação a temperatura de evaporação pode ocorrer um acréscimo ou um decréscimo na potência. Para o refrigerante R-12 e na faixa de operação do nosso sistema ( $40\text{ }^\circ\text{C} < T_c < 60\text{ }^\circ\text{C}$  e  $-30\text{ }^\circ\text{C} < T_e < -20\text{ }^\circ\text{C}$ ) temos um aumento da potência com o aumento da temperatura de evaporação

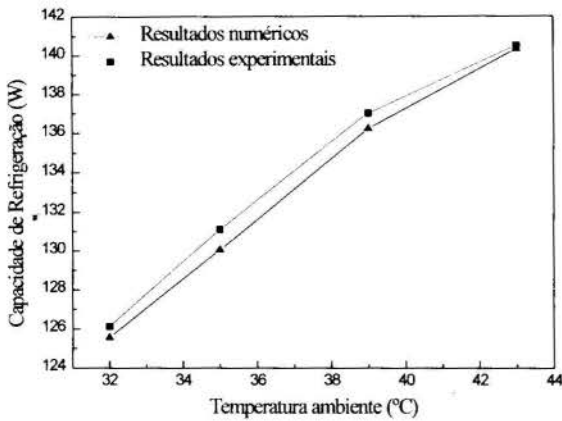


Fig. 8 - Capacidade de refrigeração x Temperatura ambiente

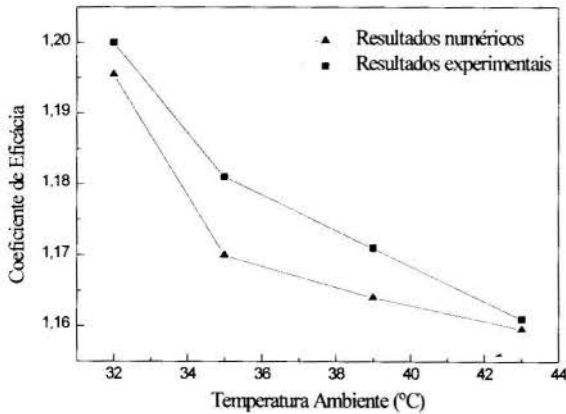


Fig. 9 - Coeficiente de eficácia x Temperatura ambiente

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento de novos produtos é uma tarefa árdua, que requer tempo e dinheiro, uma vez que existem infinitas combinações para a construção de protótipos, bastando para isso variar cada um dos componentes do ciclo.

Este programa, juntamente com um banco de dados onde diversos equipamentos estejam modelados, se constitui numa ferramenta valiosa, uma vez que o mesmo selecionará com bastante rapidez, as melhores combinações de sistemas de acordo

com a necessidade de projeto. Após esta seleção é que se irá construir o(s) protótipo(s) para ser(em) ensaiados em laboratório.

Finalmente este trabalho pode (e deve!) ser expandido para refrigeradores que operem com tetrafluoreto (R-134a). O Brasil como país signatário do Protocolo de Montreal começará a reduzir sua produção de diclorodifluoreto (R-12) a partir de 1997, e eliminará por completo sua produção em 2001.

## AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer a TECNOMECÂNICA ESMALTEC LTDA pela colaboração prestada nos ensaios de Pull-Down do refrigerador.

## REFERÊNCIAS

- Collicott, H. E., Fontaine, W. E. e Witzell, O. W., 1963, "Radiation and Free Convection Heat Transfer from Wire and Tube Heat Exchangers", ASHRAE Journal, December, pp. 79-83.
- Cyphers, J. A., Cess, R. D. e Somers, E. V., 1958, "Heat Transfer Character of Wire and Tube Heat Exchangers", ASHRAE Journal, May, pp. 86-90.
- Gosney, W. B., 1982, "Principles of Refrigeration", Cambridge University Press.
- Hamilton, J. F. e Miller, J. L., 1990, "A Simulation Program for Modeling an Air Conditioning System", ASHRAE Transactions, Part 1, vol. 96, pp. 213-221.
- Incropera, F. P. e De Witt, D. P., 1990, "Introduction to Heat Transfer", 2nd ed., John Wiley & Sons.
- Jung, D. S. e Radermacher, R., 1991, "Performance Simulation of Single-Evaporator Domestic Refrigerators Charged With Pure and Mixed Refrigerants", International Journal of Refrigeration, vol. 14, pp. 223-232.
- Smith, T. E., Nelson, R. M. e Pate, M. B., 1987, "An Interactive Computer Program for Analyzing Refrigeration Cycles in HVAC Courses", ASHRAE Transactions, Part 1, pp. 870-882.
- Stoecker, W. F., 1971, "A Generalized Program for Steady-State System Simulation", ASHRAE Transactions, Part 1, vol. 77, pp. 140-148.
- Stoecker, W. F., 1989, "Design of Thermal Systems", 3th ed., McGraw Hill.
- Stoecker, W.F. e Jones, J.W., 1985, "Refrigeração e Ar Condicionado", McGraw Hill do Brasil.
- Witzell, O. W. e Fontaine, W. E., 1957, "What Are the Heat Transfer Characteristics of Wire and Tube Condensers?", ASHRAE Journal, March, pp. 33-37/127.
- Witzell, O.W., Fontaine, W. E. e Papanek W. J., 1959, "Convective Films Evaluated for Wire and Tube Heat Exchangers", ASHRAE Journal, June, pp.35-37.

## ABSTRACT

This work intends to develop a computer routine for simulation of a basic refrigeration system. The effects of room temperature on the performance of the thermodynamic cycle are shown. The system is divided into components, through control volumes, which are modelled individually, thus obtaining a series of N equations with N unknowns. The system is solved for steady state conditions and the simulation results are analysed and discussed according to parameters obtained from "pull-down" experimental data.



## ESTUDO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DO DESEMPENHO DE TUBOS CAPILARES ADIABÁTICOS E NÃO ADIABÁTICOS COM CFC 12 E HFC 134a

Marco Antonio S. de Paiva (1,2), Flávio Augusto S. Fiorelli (2), Roberto de A. Peixoto,  
Alberto Hernandez Neto(2), Otávio de Mattos Silveiras (2), Paulo Vodianskaia (3)

(1) Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo  
(2) Escola Politécnica da USP (3) Multibrás S.A. Eletrodomésticos



### SUMÁRIO

*Este trabalho apresenta um modelo matemático e as principais características de um simulador numérico desenvolvidos para analisar o escoamento em tubos capilares adiabáticos e não adiabáticos. Resultados numéricos são comparados com resultados experimentais obtidos em bancada de ensaios própria. É também mostrada a evolução da temperatura de entrada no tubo capilar bem como da vazão mássica medidas durante um ensaio típico. Por fim é realizada uma breve análise de sensibilidade.*

### INTRODUÇÃO

A quantidade de artigos publicados tratando do escoamento de fluidos refrigerantes através de tubos capilares tem aumentado nos últimos anos. São vários os motivos que contribuem para isso, podendo-se aqui destacar três deles: difusão de recursos computacionais e numéricos nos meios industrial e de pesquisa, necessidade de substituição dos CFCs por fluidos que não agridam a camada de ozônio e, por último, a importância que o tubo capilar tem no desempenho dos sistemas de refrigeração onde se encontram instalados.

O tubo capilar nada mais é do que um tubo de cobre, de pequeno diâmetro interno e grande comprimento, sendo o elemento de expansão utilizado no controle de vazão de sistemas de refrigeração por compressão de vapor de pequeno porte, tais como refrigeradores, congeladores e condicionadores de ar domésticos. É interessante analisar o papel do tubo capilar no sistema de refrigeração, comparativamente ao do compressor. Enquanto este último é o elemento ativo responsável pela circulação de fluido no sistema, o tubo capilar é o elemento passivo a oferecer resistência a esta circulação, resultando dessa operação combinada a vazão de equilíbrio do sistema. Assim, embora seja um elemento de construção muito mais simples, e muito menos dispendioso do que o compressor, o papel a ele reservado no desempenho do ciclo de refrigeração é fundamental. Ao se fazer referência ao desempenho, deve-se considerar a obtenção tanto de condições adequadas de temperatura e carga de refrigeração, quanto de níveis apropriados de consumo energético. Nesse sentido, é inequívoca a importância do correto dimensionamento desse componente, bem como da avaliação de seu comportamento sob diferentes condições operacionais.

Durante muito tempo o dimensionamento de tubos capilares foi realizado por métodos caracterizados essencialmente pelo empirismo. A metodologia proposta pela ASHRAE (1988), baseada nos trabalhos de Whitesel (1957a, 1957b) e Hopkins (1950) representa um avanço, mas é relativamente deficiente para tubos capilares adiabáticos (Melo & Negrão, 1988) e inconveniente para tubos capilares não adiabáticos (justamente o tipo utilizado em refrigeradores e congeladores domésticos), porque admite a existência apenas de líquido na região do trocador de calor, uma situação pouco comum nos casos reais. São vários os trabalhos publicados tratando de tubos capilares adiabáticos, podendo-se citar, entre outros, Erth (1969), Mikol (1963), Wijaya (1992), além de Whitesel (1957a, 1957b), Melo & Negrão (1988) e Hopkins (1950), citados anteriormente. Em relação aos tubos capilares

não adiabáticos, a quantidade de trabalhos é limitada, podendo-se citar os trabalhos de Christensen e Jorgensen (1967), Pate (1982), Peixoto e Bullard (1994), Paiva et al. (1995) e Dirik et al. (1994).

No caso de tubos capilares não adiabáticos, um aspecto importante a ser considerado é o tipo de trocador de calor constituído pelo tubo capilar e a linha de sucção, que conduz o fluido refrigerante vaporizado de volta ao compressor. No Brasil, o tipo de trocador de calor usualmente utilizado é o de tubos concêntricos (vide figura 1), ao contrário do que acontece, por exemplo, nos E.U.A., onde o mais usual é o trocador de calor de tubos laterais, no qual o tubo capilar é soldado na superfície externa da linha de sucção. A quantidade de trabalhos publicados considerando tubos capilares com trocador de calor de tubos concêntricos é ainda mais limitada.

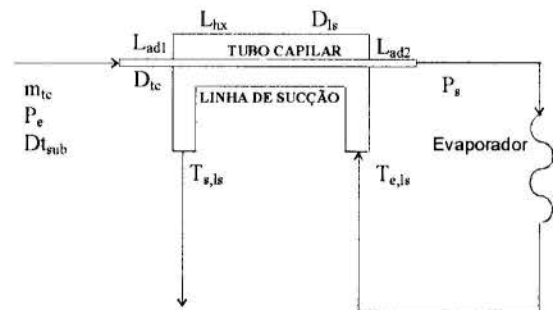


Figura 1: Desenho esquemático de um tubo capilar com trocador de calor de tubos concêntricos, com a indicação das principais variáveis do problema.

Os fatos anteriormente mencionados e a necessidade de substituição do CFC 12 por fluidos alternativos que não agridam a camada de ozônio, além do considerável porte da área de refrigeração doméstica no Brasil, criaram em nosso país um ambiente propício ao desenvolvimento de trabalhos de pesquisa no assunto.

O presente artigo relata os principais aspectos de um desses trabalhos. São apresentados sucintamente o modelo matemático para simulação numérica do escoamento, o aparato experimental utilizado para realização de testes de validação do modelo e os principais resultados obtidos. Resultados numéricos e experimentais para tubos capilares adiabáticos e não adiabáticos, usando CFC 12 ou HFC 134a, são apresentados. Muito embora o simulador numérico desenvolvido tenha versões tanto para trocadores de calor de tubos concêntricos, quanto para



trocadores de calor de tubos laterais, o artigo contempla apenas os do primeiro tipo, por serem eles os mais utilizados no Brasil.

### MODELO MATEMÁTICO

Apesar de o tubo capilar ser um elemento construtivamente simples, são relativamente complexos os fenômenos físicos que ocorrem no escoamento que se desenvolve em seu interior. Existe escoamento monofásico, bifásico, com ou sem transferência de calor, podendo ainda ocorrer que condições críticas de escoamento sejam atingidas na seção de saída desse componente. Um fenômeno que também condiciona o desempenho de tubos capilares é a possibilidade de haver atraso de vaporização (“delay of vaporization”), ou seja, o início de vaporização do fluido ocorrendo à jusante do ponto teoricamente previsto quando o equilíbrio estável líquido-vapor para interface plana é admitido.

Ao se desenvolver um modelo matemático para o escoamento no interior de tubos capilares, os principais aspectos a serem considerados são:

- tipo de escoamento bifásico (homogêneo, fases separadas, etc);
- fator de atrito para o escoamento de líquido;
- perda de carga no escoamento bifásico;
- transferência de calor entre a linha de sucção e o tubo capilar;
- escoamento crítico na região bifásica;
- atraso de vaporização.

As principais hipóteses adotadas no desenvolvimento do modelo matemático proposto são as seguintes: regime permanente, escoamento bifásico homogêneo, equilíbrio termodinâmico estável entre as fases, escoamento horizontal, refrigerante puro (isento de óleo), inexistência de condução axial de calor através das paredes dos tubos, existência de troca de calor com o ambiente.

O tubo capilar não adiabático é constituído normalmente por um trecho inicial e outro final adiabáticos (em que, na realidade, existe uma pequena troca de calor com o ambiente), além de um trecho intermediário em que há troca de calor com a linha de sucção, conforme anteriormente mostrado na figura 1. As equações do modelo são apresentadas a seguir de forma genérica, tanto para o trecho adiabático como para o trecho do trocador de calor, fazendo-se a distinção apenas quando necessário.

**Equações de Conservação - Trecho com Escoamento de Líquido.** Nas equações a seguir apresentadas utiliza-se  $z$ , para a posição ao longo do tubo capilar,  $G$ , para fluxo mássico,  $P$ , para pressão,  $T$ , para temperatura,  $f$ , para fator de atrito de Darcy,  $v$ , para volume específico,  $D$ , para diâmetro,  $h$ , para coeficiente de transferência de calor por convecção,  $\dot{m}$ , para vazão mássica,  $UA'$ , para o produto entre o coeficiente global de troca de calor com o ambiente e a área de troca de calor por unidade de comprimento,  $H$ , para entalpia específica e  $C_p$ , para o calor específico à pressão constante. Para os índices, a simbologia utilizada é  $tc$ , para fluido escoando no tubo capilar,  $ls$ , para fluido escoando na linha de sucção,  $i$ , para interno,  $o$ , para externo,  $e$ , para entrada,  $s$ , para saída,  $amb$ , para ambiente e  $w$ , para parede.

As equações a seguir representam, pela ordem, a conservação de massa, a conservação de quantidade de movimento e a conservação de energia para o escoamento através do tubo capilar:

$$G_{tc} = \text{constante} \quad (1)$$

$$\frac{dP_{tc}}{dz} = - \frac{\int_{tc} G_{tc}^2 v_{tc}}{2D_{tc,i}} \quad (2)$$

$$\frac{dT_{tc}}{dz} = - \frac{h_{tc} \pi D_{tc,i} (T_{tc} - T_{w,tc})}{\dot{m}_{tc} C_{p_{tc}}} \quad (3)$$

A equação do balanço de energia para a parede do tubo capilar na região “adiabática” (observar que não existe troca de calor do tubo capilar com a linha de sucção, mas ela pode ocorrer entre a parede do tubo e o ambiente) é:

$$T_{w,tc} = \frac{h_{tc} \pi D_{tc,i} T_{tc} + UA'_{tc} T_{amb}}{h_{tc} \pi D_{tc,i} + UA'_{tc}} \quad (4)$$

Na região com trocador de calor, a equação de conservação de energia para o escoamento na linha de sucção e para as paredes dos tubos é:

$$\frac{dT_{ls}}{dz} = \frac{h_{ls,o} \pi D_{ls,i} (T_{ls} - T_{w,ls})}{\dot{m}_{ls} C_{p_{ls}}} + \frac{h_{ls,i} \pi D_{tc,e} (T_{w,tc} - T_{ls})}{\dot{m}_{ls} C_{p_{ls}}} \quad (5)$$

$$T_{w,tc} = \frac{h_{tc} D_{tc,i} T_{tc} + h_{ls,i} D_{tc,e} T_{ls}}{h_{tc} D_{tc,i} + h_{ls,i} D_{tc,e}} \quad (6)$$

$$T_{w,ls} = \frac{h_{ls,o} \pi D_{ls,i} T_{ls} + UA'_{ls} T_{amb}}{h_{ls,o} \pi D_{ls,i} + UA'_{ls}} \quad (7)$$

Como o escoamento na linha de sucção ocorre através de uma passagem anular, os termos  $h_{ls,i}$  e  $h_{ls,o}$  se referem à troca de calor junto, respectivamente, à parede do tubo capilar e à parede da linha de sucção.

**Equações de Conservação - Trecho com Escoamento Bifásico.** São equações análogas às apresentadas anteriormente. Equações de conservação para o fluido no tubo capilar:

$$G_{tc} = \text{constante} \quad (8)$$

$$\frac{dP_{tc}}{dz} = - \frac{\int_{tc} G_{tc}^2 v_{tc}}{2D_{tc,i}} - G_{tc}^2 \frac{dv_{tc}}{dz} \quad (9)$$

$$\frac{dH_{tc}}{dz} = - \frac{h_{tc} \pi D_{tc,i} (T_{tc} - T_{w,tc})}{\dot{m}_{tc}} - v_{tc} G_{tc}^2 \frac{dv_{tc}}{dz} \quad (10)$$

Para as paredes dos tubos e para o escoamento na linha de sucção as equações são idênticas às apresentadas para o trecho com escoamento de líquido no tubo capilar.

**Equações Constitutivas.** As demais equações que compõem o modelo matemático são apenas citadas a seguir:

- Equações de Martin-Hou, para o cálculo das propriedades termodinâmicas dos fluidos refrigerantes.
- Para as propriedades de transporte, foram utilizadas equações interpolantes dos valores tabelados no Manual da ASHRAE (1989).
- Equação de Serghides (Apud Kakaç et al., 1987), para cálculo do fator de atrito no escoamento turbulento monofásico. Esta equação é explícita e aproxima com grande precisão a equação de Colebrook.

- Para o fator de atrito no escoamento bifásico, a equação de Serghides é também utilizada, mas no cálculo do número de Reynolds é considerada a viscosidade média bifásica, calculada pela equação de Dukler.
- A transferência de calor entre a linha de sucção e o tubo capilar é amplamente dominada pela resistência térmica do lado da linha de sucção, sendo utilizados os dados de Kays e Leung (Apud Kays & Crawford, 1980) no cálculo do coeficiente de transferência de calor por convecção. Para o lado do tubo capilar, a equação de Dittus-Boelter, convenientemente adaptada para o escoamento bifásico, é utilizada.
- No cálculo da velocidade crítica da mistura bifásica, o modelo de equilíbrio homogêneo é utilizado, em consonância com o modelo de escoamento bifásico adotado.

**Resolução do Sistema de Equações Diferenciais.** Como as equações diferenciais ordinárias que constituem o problema são de primeira ordem, é necessário o conhecimento apenas das condições iniciais. Nesse sentido, inicialmente foi utilizado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem na integração dessas equações. A fim de acelerar o processo de cálculo, o método de Adams-Brashforth foi considerado posteriormente, mas a tradicional fórmula para passo constante de integração teve que ser alterada para permitir a utilização de passo variável. Isto é necessário, em virtude do grande aumento observado na taxa de variação espacial das variáveis dependentes do problema à medida que a abscissa (variável  $z$ ) cresce. De fato, para escoamento crítico, tais taxas de variação tendem a infinito na seção de saída.

#### ALGORITMO DE CÁLCULO

A metodologia básica de cálculo consiste em fixar a vazão e integrar as equações diferenciais desde a seção de entrada no tubo capilar até o ponto em que a pressão no escoamento se iguala à pressão do reservatório de jusante, ou quando condições críticas de escoamento são atingidas. A abscissa onde uma dessas duas condições é atingida determina o comprimento do tubo capilar necessário à obtenção das condições fixadas. Esse é o tipo de cálculo usado para dimensionamento do tubo capilar.

Uma das dificuldades do processo de cálculo decorre do fato de que as condições iniciais do tubo capilar e da linha de sucção ocorrem em extremos opostos, visto que o trocador de calor é em contracorrente. Nesse sentido, deve ser utilizado um método iterativo de busca da solução.

Quando o comprimento do tubo capilar é conhecido e se deseja calcular a vazão (simulação de desempenho), deve haver um reciclo adicional de cálculo. A figura 2 apresenta o fluxograma simplificado do algoritmo de cálculo utilizado para esse caso.

#### UNIDADE LABORATORIAL

A unidade experimental construída para a realização de ensaios em tubos capilares é do tipo "blow-down", ou seja, o fluido refrigerante é armazenado em um reservatório a alta pressão e, escoando através do tubo capilar, é descarregado para um reservatório a baixa pressão. O processo é em batelada, e a duração do ensaio pode ser de até 4 h, dependendo da vazão de refrigerante. A figura 3 apresenta o fluxograma de processo simplificado da unidade.

O vapor de fluido refrigerante na linha de sucção foi substituído por ar, para facilitar a medição do perfil de temperaturas. Para que a similaridade fosse mantida, o diâmetro da linha de sucção e a vazão na linha de sucção tiveram que ser alterados.

As temperaturas foram medidas com termopares do tipo T, com incerteza global de 0,3 °C. As medidas de pressão foram

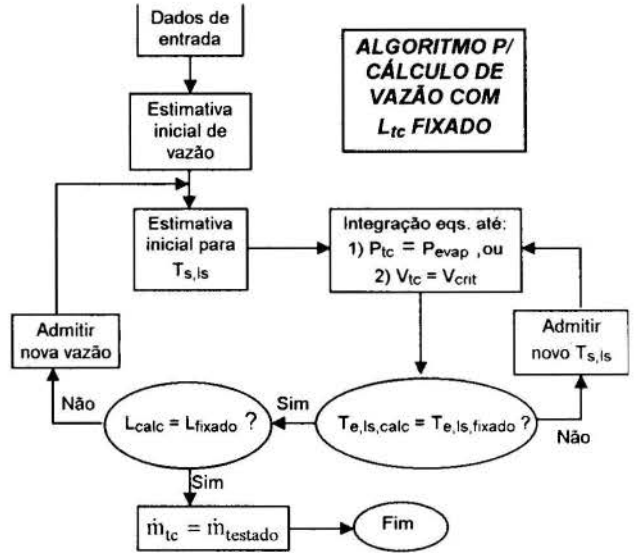


Figura 2: Fluxograma simplificado do algoritmo de cálculo utilizado na simulação, na versão de cálculo de vazão através do tubo capilar.

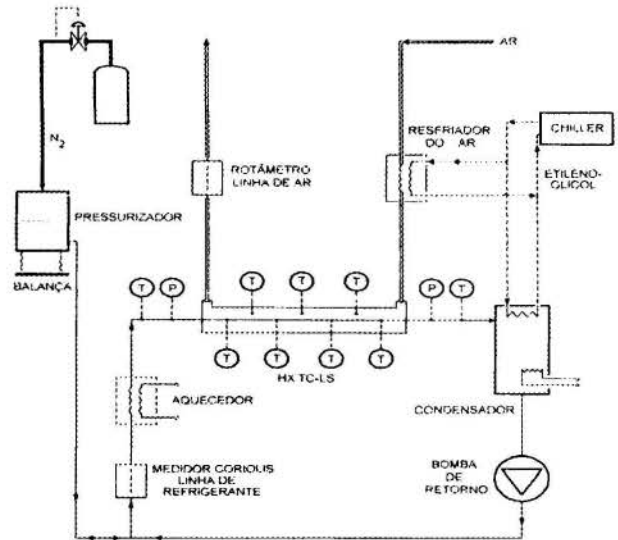


Figura 3: Fluxograma de processo simplificado da unidade experimental implementada.

feitas com transdutores, com incerteza global de 2 kPa. A vazão de fluido refrigerante foi medida com medidor do tipo Coriolis, com incerteza global de 0,05 kg/h. O diâmetro médio do tubo capilar foi medido fazendo-se o seu enchimento com mercúrio metálico, seguido da medição da massa introduzida, processo esse que permite obter uma precisão de 1%.

Previamente à realização dos testes principais, foram realizados alguns ensaios preliminares para avaliação da rugosidade relativa do tubo capilar e do coeficiente de transferência de calor na passagem anular (linha de sucção). Esses ensaios permitiram validar as equações adotadas no modelo matemático proposto.

A unidade laboratorial possui duas linhas para teste de tubos capilares. Na principal, o tubo capilar é completamente instrumentado, conforme mostrado na figura 3. Na linha auxiliar, foram colocados instrumentos apenas na entrada e saída do tubo capilar, permitindo a rápida substituição de um tubo capilar por outro. Foram realizados ensaios para vários níveis de subresfriamento, pressões de entrada correspondentes a temperaturas de condensação de 40, 45, 50 e 55 °C e pressão de

descarga correspondendo a uma temperatura de evaporação de  $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Para o ar na entrada da linha de sucção, foram utilizados dois níveis de temperatura,  $-20$  e  $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Quando da realização de testes com tubo capilar adiabático, a circulação de ar era interrompida.

## RESULTADOS

Neste item serão apresentados os principais resultados experimentais obtidos em ensaios com tubo capilar adiabático com HFC 134a e em ensaios de tubo capilar não adiabático com CFC 12 e HFC 134a.

Tubo capilar adiabático com HFC 134a. Nos ensaios experimentais realizados, o procedimento consistia na fixação dos níveis requeridos de pressão na entrada do tubo capilar e no reservatório de descarga, e na variação do grau de subresfriamento de  $12$  a  $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ . A figura 4 apresenta a evolução da temperatura na entrada do tubo capilar e, a figura 5, a correspondente evolução da vazão de refrigerante.

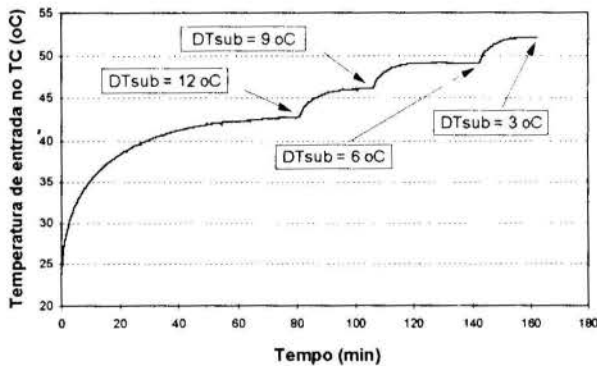


Figura 4: Evolução ao longo do ensaio da temperatura do refrigerante na entrada do tubo capilar.

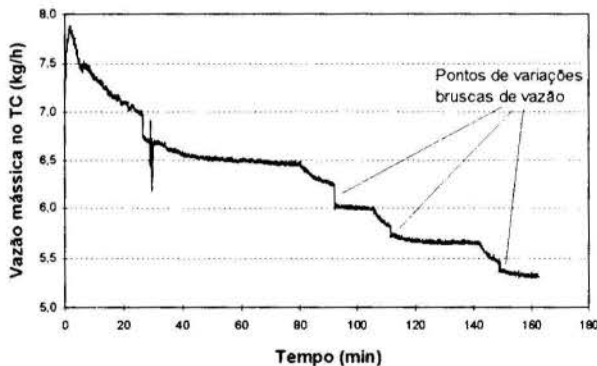


Figura 5: Evolução ao longo do ensaio da vazão mássica de fluido refrigerante através do tubo capilar com escoamento adiabático.

Na figura 5 notam-se instantes em que a vazão sofre variações bruscas, nos quais o ponto de início de vaporização sofre deslocamentos grandes e praticamente instantâneos em direção à entrada do tubo capilar. Não obstante, observa-se que a vazão tende a um valor estável para cada nível de subresfriamento fixado.

A figura 6 apresenta o perfil medido de temperaturas do fluido refrigerante ao longo do tubo capilar para um ensaio particular. A curva de temperatura de saturação indicada é determinada a partir da pressão medida na entrada do tubo capilar e da perda de carga calculada com a rugosidade e a vazão de refrigerante medidas. O atraso de vaporização é evidente porque o ponto onde o "flashing" se inicia (queda abrupta de

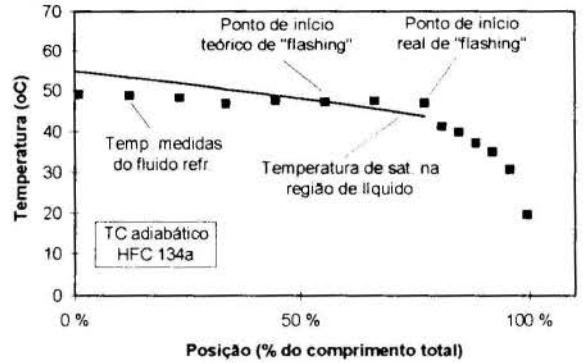


Figura 6: Perfis medidos de temperatura em teste realizado com tubo capilar adiabático, destacando-se o atraso de vaporização observado.

temperatura do refrigerante) ocorre à jusante do ponto onde a temperatura do refrigerante se iguala à temperatura de saturação. Esse fenômeno foi constatado em quase todos os ensaios com tubo capilar adiabático.

Para cada condição operacional foram realizados entre 3 e 4 ensaios. No atraso de vaporização, foi observado, de maneira geral, que a magnitude do superaquecimento do líquido para cada condição operacional segue um comportamento aleatório, concordando nesse aspecto com os resultados obtidos por Melo (1995). Nesse sentido, não parece muito conveniente incorporar ao modelo matemático uma expressão para cálculo do superaquecimento do líquido. Uma alternativa pode ser a adoção de valores empíricos médios.

A figura 7 mostra a comparação entre valores medidos e calculados de vazão sem considerar o efeito do atraso de vaporização nos cálculos. O desvio dos resultados numéricos em relação aos experimentais é, em média, de  $-1,1\%$  e, em  $90\%$  dos casos, situa-se na faixa entre  $-8,1$  e  $6\%$ . Quando se considera nos cálculos o grau de superaquecimento medido do líquido, o desvio médio aumenta para  $6,5\%$ , mas a dispersão diminui, caracterizando que o atraso de vaporização é um fator de incerteza do modelo

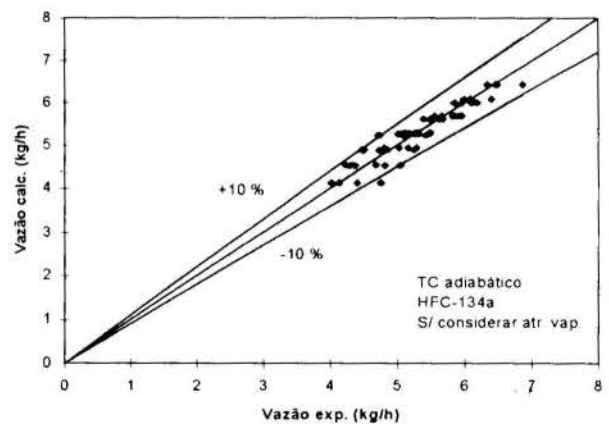


Figura 7: Comparação entre valores medidos e valores calculados para o caso tubo capilar adiabático com HFC 134a.

Tubo capilar não adiabático com CFC 12. Nesses ensaios foi observada uma mudança profunda de comportamento do tubo capilar em relação ao caso anterior, principalmente no que diz respeito à estabilidade de operação. Na figura 8 apresenta-se, para um ensaio típico, a curva de vazão durante um período do ensaio.

Ao contrário do que ocorre no caso de tubo capilar adiabático, a vazão não decresce continuamente, mas aos saltos, havendo instantes com diminuição e instantes com aumento de vazão, caracterizando a instabilidade. Existem situações em que



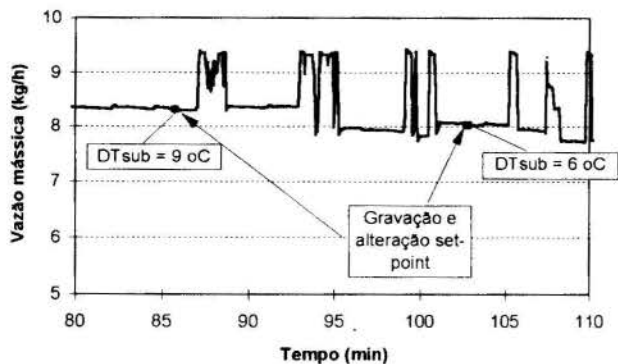


Figura 8: Evolução ao longo do ensaio da vazão mássica de fluido refrigerante através do tubo capilar com escoamento não adiabático.

essa instabilidade não cessa, mesmo após ser atingido o subresfriamento requerido. O motivo dessa instabilidade pode ser creditado ao atraso de vaporização, e à relativa proximidade entre as inclinações das curvas de temperatura do refrigerante e de temperatura de saturação.

A figura 9 apresenta os perfis medidos de temperatura ao longo do tubo capilar e da linha de sucção para o caso mostrado anteriormente. A linha de temperatura de saturação calculada para a região de líquido se prolonga até o final do tubo capilar porque não é possível determinar o ponto de início de vaporização. Quando não existe atraso de vaporização, essa linha apenas tangencia a linha do perfil de temperaturas do tubo capilar. Na figura apresentada fica evidente que o atraso de vaporização existe, sendo esse o principal motivo para o desvio observado do resultado numérico em relação ao experimental.

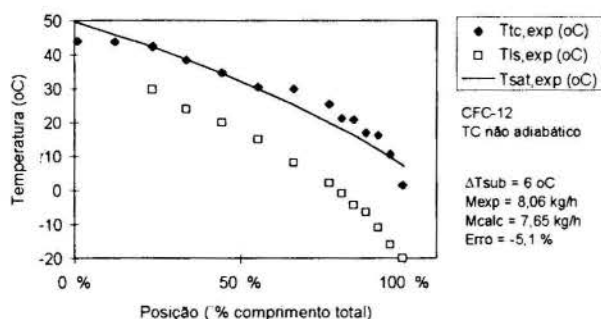


Figura 9: Perfis medidos de temperatura em teste realizado com tubo capilar não adiabático, destacando-se o atraso de vaporização observado.

A figura 10 apresenta a comparação entre os perfis calculados e experimentais de temperatura para um caso em que não ocorre atraso de vaporização. Nesse caso, o desvio do valor calculado de vazão é pequeno em relação ao valor medido.

Na figura 11 é apresentada a comparação entre os valores calculados e os valores medidos de vazão para um conjunto de cerca de 100 ensaios com CFC 12. O desvio médio dos valores calculados é de -5,1 % e tem módulo inferior a 10 % em 90 % dos casos (desvios negativos em sua maioria). Esses números indicam uma concordância muito boa entre resultados numéricos e experimentais.

No tocante ao atraso de vaporização, é importante observar que ele foi várias vezes verificado, mesmo quando o início teórico de vaporização se encontrava na região com troca de calor, ao contrário do observado por Pate (1982).

Tubo capilar não adiabático com HFC 134a. Os resultados para esse caso se assemelham bastante aos observados para o caso de tubo capilar não adiabático com escoamento de CFC 12.

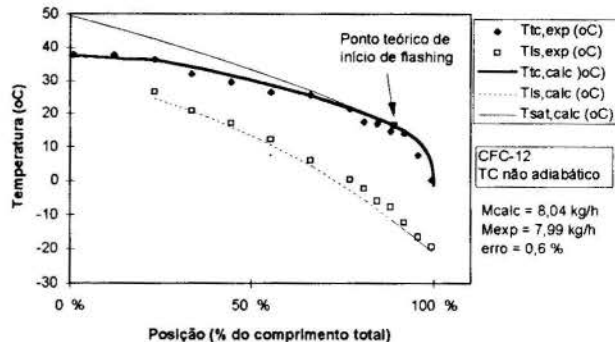


Figura 10: Comparação entre perfis medidos e calculados em um ensaio realizado com tubo capilar adiabático.

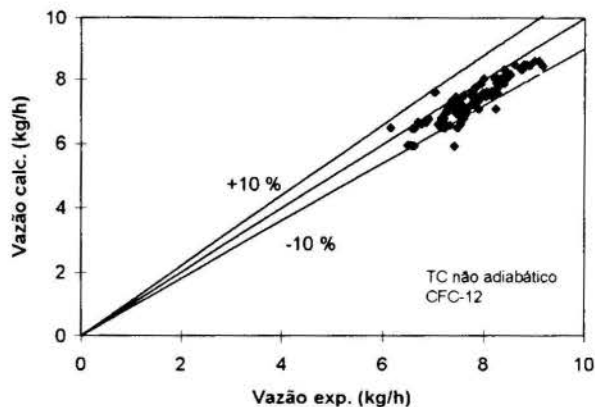


Figura 11: Comparação entre valores medidos e valores calculados para o caso de tubo capilar não adiabático com CFC 12.

A principal diferença é que a instabilidade é, na maioria das vezes, mais intensa. Como a influência da troca de calor com a linha de sucção é um pouco maior quando se utiliza o HFC 134a, é possível que essa seja uma das causas.

Para tubo capilar não adiabático com HFC 134a, o desvio dos resultados numéricos em relação aos experimentais foi, em média, de 8 %. Em 80 % dos casos, o desvio ficou abaixo de 13 %.

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Usando o programa de simulação numérica desenvolvido, é possível analisar a influência de todas as variáveis e parâmetros geométricos e de processo sobre o desempenho do tubo capilar não adiabático. É possível verificar que, para comprimento total do tubo capilar fixado, o diâmetro, a existência e comprimento do trocador de calor e a existência de mistura bifásica na entrada do tubo capilar são as variáveis em relação às quais a vazão mássica é mais sensível.

A título de exemplo, podem ser citados aqui alguns resultados numéricos que evidenciam a influência dessas variáveis. Em relação ao diâmetro, o aumento médio de vazão é de cerca de 2,2 % para cada 1 % de aumento de  $D_{ic}$ . Quanto ao trocador de calor, sua existência pode provocar aumentos de vazão de até 40 %, dependendo do valor de seu comprimento. Finalmente, tratando do caso em que há mistura bifásica na entrada do tubo capilar, o que se verifica é uma redução de vazão de cerca de 2,7 % para cada 1 % de incremento do título. A resposta do tubo capilar à existência de mistura bifásica na entrada é, à propósito, aquilo que lhe confere uma certa característica de auto-ajuste. Considere-se, por exemplo, uma situação em que haja elevação de temperatura ambiente, provocando perda de capacidade do condensador. Existe, nesse



caso, a tendência ao aparecimento de mistura bifásica na saída desse componente, a qual fica, entretanto, bastante limitada devido à diminuição de vazão imposta pelo tubo capilar.

Outras variáveis, como a temperatura de condensação, o grau de subresfriamento do refrigerante, a rugosidade relativa e o encurvamento do tubo capilar, têm influência, em geral, moderada. No caso do encurvamento (embobinamento) do tubo capilar, a influência pode ser acentuada devido à diminuição da seção de passagem do fluido (estrangulamento) durante o processo de conformação mecânica.

A mudança de fluido de trabalho de CFC 12 para HFC 134a provoca em geral pequena alteração de vazão em tubos capilares não adiabáticos. A figura 12 apresenta os perfis de temperatura obtidos numericamente para um caso específico quando se utiliza respectivamente CFC 12 e HFC 134a. As variáveis de processo e o diâmetro são os mesmos nos dois casos, permitindo-se alterar apenas o comprimento, de forma a manter a vazão inalterada. Para o caso específico estudado, existe algum aumento de comprimento requerido com o HFC 134a. O principal motivo disso é que, quando o refrigerante é CFC 12, o início de vaporização ocorre mais próximo à entrada, por causa da queda mais acentuada da temperatura de saturação e do elevado subresfriamento adotado. Quando o grau de subresfriamento é diminuído, os inícios de "flashing" ocorrem em posições mais próximas e, uma vez que os volumes específicos e as viscosidades são semelhantes para ambos os fluidos, seja na fase líquida, assim como na fase vapor, a variação de comprimento é menos acentuada.

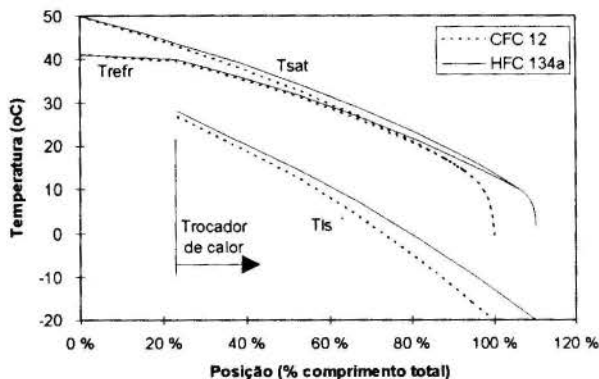


Figura 12: Influência do fluido refrigerante sobre os perfis calculados de temperatura do tubo capilar não adiabático.

## CONCLUSÕES

Os resultados numéricos de vazão obtidos com o programa de simulação matemática desenvolvido concordam muito bem com os resultados experimentais obtidos na bancada de ensaios. A concordância é boa tanto para tubos capilares adiabáticos quanto não adiabáticos.

Foi constatado que o atraso de vaporização ocorre frequentemente para o escoamento através de tubos capilares adiabáticos, não ocasionando, contudo, instabilidade operacional. No caso de tubos capilares não adiabáticos o atraso de vaporização também ocorre, embora com menor frequência, provocando geralmente instabilidade de operação.

O estudo numérico de sensibilidade mostra que a vazão através do tubo capilar é muito sensível a variações de diâmetro, existência e comprimento do trocador de calor e existência de mistura bifásica na entrada. A temperatura de condensação, o grau de subresfriamento do refrigerante e a rugosidade relativa têm, em geral, influência moderada. A mudança de fluido refrigerante de CFC 12 para HFC 134a provoca usualmente pequenas alterações de desempenho.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Multibrás S.A. Eletrodomésticos o suporte financeiro concedido à pesquisa realizada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASHRAE, 1988, "ASHRAE Equipment Handbook".  
 ASHRAE, 1989, "ASHRAE Fundamentals Handbook".  
 Christensen, L. B. & Jorgensen, H. P., 1967, "Flow Resistance of CT HX", *Proc. XII Int. Congr. Refr.*, pp. 1069-1077.  
 Dirik, E. et al., 1994, "Numerical and Experimental Studies on Adiabatic and Nonadiabatic CT with HFC 134a", *Proc. of 1994 Int. Refr. Conf. at Purdue*, pp. 365-370.  
 Erth, R. A., 1969, "Two-phase Flow in Refrigeration CT: Analysis and Prediction", Ph.D. Thesis, Purdue University.  
 Hopkins, N. E., 1950, "Rating the Restrictor Tube - Method of Determining Flow Capacities for Freon-12 and Freon-22", *Refrig. Eng.*, vol. 58, no. 11, pp. 1087-1095.  
 Kakaç, S. et al. *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, J.Wiley, 1987.  
 Kays, W.M. & Crawford, M.E., *Convective Heat and Mass Transfer*, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, 1980.  
 Melo, C. & Negrão, C. O. R., 1988, "Simulação Numérica de Tubos Capilares Utilizados como Dispositivos de Expansão em Sistemas de Refrigeração", *Anais do II ENCIT*, pp. 221-224.  
 Melo, C. et al., 1995, "Measuring Pressure and Temperature Profiles Along Capillary Tubes", *Proc. 19<sup>th</sup> Int. Cong. of Refr.*, vol. IIIa, pp. 143-156, The Hague, The Netherlands.  
 Mikol, E. P., 1963, "Adiabatic Single and Two-phase Flow in Small Bore Tubes", *ASHRAE J.*, vol. 5, no. 11.  
 Paiva, M. A. S. et al., 1995, "Experimental and Numerical Study of the Flow Through Non Adiabatic Capillary Tubes with Lateral and Concentric Capillary Tube-Suction Line Heat Exchanger Configuration", *Proc. 19<sup>th</sup> Int. Congr. Refr.*, vol. IIIa, pp. 429-436, The Hague, The Netherlands.  
 Pate, M. B., 1982, "A Theoretical and Experimental Analysis of CT-SL HX", Ph.D. Thesis, Purdue University.  
 Peixoto, R. A., Bullard, C. W., 1994, "A Simulation and Design Model for CT-SL HX", *Proc. 1994 Int. Refr. Conf. at Purdue*, pp. 335-340.  
 Whitesel, H. A., 1957a, "Capillary Two-phase Flow", *Refrig. Eng.*, vol. 65, no. 4, pp. 42-44 and 98-99.  
 Whitesel, H. A., 1957b, "Capillary Two-phase Flow - Part II", *Refrig. Eng.*, vol. 65, no. 9, pp. 35-40.  
 Wijaya, H., 1992, "Adiabatic CT Test Data for HFC 134a", *Proc. of 1992 Int. Refr. Conf. Purdue*, vol. 1, pp. 347-352.

## ABSTRACT

The importance of simulating the flow through capillary tubes is highlighted. The main aspects of a mathematical model and a simulation program developed for both adiabatic and non adiabatic capillary tubes are presented. Numerical and experimental results are compared. Mass flow rate and capillary tube inlet temperature data acquired throughout an experimental test are also shown. A sensitivity analysis is briefly performed.



## ESTUDOS SOBRE O DESEMPENHO DE SISTEMAS DE REFRIGERAÇÃO DE PEQUENO PORTE

Flávio Augusto Sanzogo Fiorelli, Otávio de Mattos Silveiras  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Prof. Mello Moraes, 2231 - São Paulo (SP) - CEP 05508-900



### RESUMO

*Este trabalho apresenta um estudo numérico sobre o efeito no desempenho de sistemas de refrigeração de pequeno porte dos seguintes parâmetros: temperatura do ar externo e interno ao gabinete, carga de refrigerante, e algumas dimensões do tubo capilar. Analisou-se o efeito na vazão mássica, consumo de energia, capacidade de refrigeração e coeficiente de eficácia. Estudou-se também a substituição do CFC 12 pelo HFC 134a. Os resultados mostram uma forte dependência entre a eficácia e a carga de refrigerante, bem como as dimensões do capilar. A eficácia do ciclo com HFC 134a é cerca de 6% menor que com CFC 12.*

### INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, devido às sucessivas crises energéticas e uma maior consciência quanto à conservação e racionalização dos recursos ambientais, tem ganhado relevância a questão da otimização energética de equipamentos e processos. Estão sendo tomadas medidas de incentivo à redução e de penalização do consumo excessivo de energia. No Brasil, o programa de etiquetagem de refrigeradores e "freezers" do PROCEL, apesar de algumas dúvidas sobre a metodologia aplicada (Paiva et al., 1992), foi um primeiro passo neste sentido.

Um outro desafio que tem se apresentado ao setor de refrigeração é a necessidade de substituição dos CFCs (clorofluorcarbonos) devido a possíveis danos que eles podem causar à camada de ozônio atmosférica (Molina e Rowland, 1974). Estas substâncias, dentre elas o CFC 12, utilizado nos sistemas de refrigeração, foram banidas no final de 1995 nos países do 1º mundo, devido ao Protocolo de Montreal, e serão banidas no Brasil dentro de poucos anos.

Este trabalho apresenta um estudo numérico sobre o efeito de alguns parâmetros operacionais e geométricos sobre o desempenho de sistemas de refrigeração de pequeno porte (refrigeradores e freezers). A partir de um simulador matemático do ciclo (Fiorelli, 1995), foi estudado o efeito dos seguintes parâmetros: temperatura do ar externo e interno ao gabinete, carga de refrigerante do sistema, e dimensões do tubo capilar. No caso do tubo capilar, estudou-se, para uma configuração de refrigerador com tubo capilar não adiabático, o efeito da mudança do diâmetro do tubo capilar e dos comprimentos do trecho adiabático inicial e do trecho com trocador de calor. Analisou-se o efeito sobre a vazão mássica, o consumo de energia, a capacidade de refrigeração e o coeficiente de eficácia do ciclo. Foi estudado também o efeito da substituição do CFC 12 pelo HFC 134a, um dos fluidos refrigerantes alternativos ao CFC 12.

Pretende-se com este trabalho fornecer à indústria de refrigeração doméstica indicações sobre as variáveis que mais influenciam o desempenho do sistema.

### MODELO MATEMÁTICO UTILIZADO

O modelo matemático utilizado neste estudo, desenvolvido por Fiorelli (1995), é apresentado no fluxograma da Fig. 1. As hipóteses gerais do modelo são: regime permanente, fluido refrigerantes puros e temperaturas do ar externo e interno constantes.

As variáveis independentes do problema são as temperaturas externa e interna do gabinete, e as variáveis calculadas são: estado termodinâmico de todos os pontos do ciclo de refrigeração, vazão de fluido refrigerante, potência elétrica consumida no compressor, taxas de troca de calor no condensador e evaporador, e coeficiente de eficácia do ciclo. Existem dois modos de simulação. No primeiro, o grau de superaquecimento na saída do evaporador é fixado e a carga de refrigerante é uma variável calculada. No outro modo, ocorre o inverso.

O algoritmo de cálculo tem quatro "loops". No mais interno, ajusta-se, por substituições sucessivas, os estados de entrada e saída do tubo capilar utilizados na rotina da linha de sucção. No segundo "loop" ajusta-se, pelo método das secantes, a pressão de descarga do compressor, a fim de que a vazão do compressor seja igual à do tubo capilar. Já no terceiro "loop" ajusta-se, também pelo método das secantes, a pressão de sucção do compressor, de modo que a entalpia na entrada do evaporador seja igual à da saída do tubo capilar. Por fim, efetua-se o inventário de massa ou ajusta-se grau de subresfriamento até que a carga de refrigerante seja igual à nominal.

**Modelo do Compressor Hermético.** O modelo é desenvolvido a partir de um balanço global, baseado nos rendimentos volumétrico e isoentrópico e em alguns parâmetros definidos a partir de dados experimentais ou de catálogo.

**Modelo do Condensador.** Para o condensador estático, o equipamento é dividido em trechos onde há fluido superaquecido, saturado e subresfriado, aplicando-se separadamente para cada uma delas as equações de conservação de massa, energia e quantidade de movimento, além da equação de troca de calor.

**Modelo do Evaporador.** O modelo é semelhante ao do condensador (balanços globais, regime permanente,  $\Delta p_z$  desprezível). Neste caso, contudo, o coeficiente de troca de calor é admitido constante e, diversamente do que é feito para o condensador, o estado de entrada é determinado a partir do estado de saída do equipamento.

**Modelo do Tubo Capilar Não Adiabático e da Linha de Sucção.** O modelo desenvolvido para tubos capilares não adiabáticos é composto de curvas de vazão mássica ( $\dot{m}$ ) no tubo capilar e a variação de temperatura ( $\Delta T$ ) na linha de sucção em função dos parâmetros operacionais para uma dada geometria "característica" do trocador de calor tubo capilar-linha de sucção. Este  $\dot{m}$  e  $\Delta T$  "característicos" são posteriormente corrigidos para outras geometrias. Esta metodologia é a adotada pela ASHRAE para seleção de tubos capilares adiabáticos (ASHRAE, 1988).

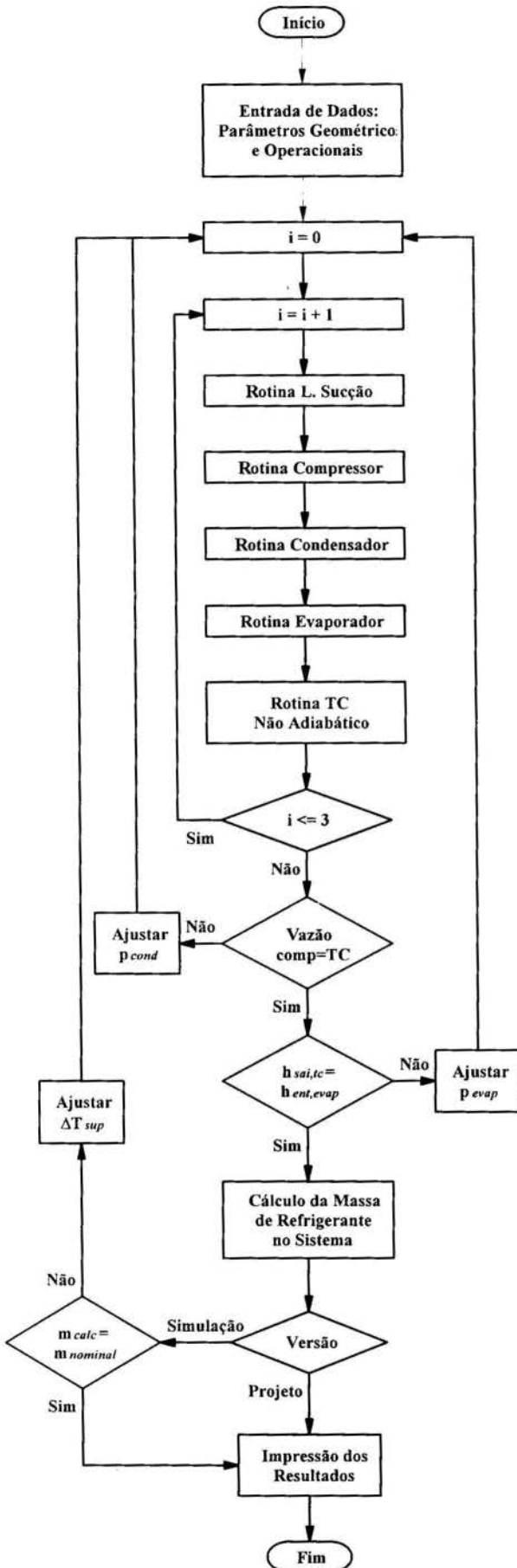


Figura 1. Fluxograma do modelo para simulação do ciclo.

As hipóteses do modelo são: variação de energia cinética e potencial do escoamento desprezível em relação aos demais componentes do ciclo, trocador de calor tubo capilar-linha de sucção isolado, e que o fluido entra na linha de sucção como vapor saturado seco. Esta última hipótese significa que, no de balanço de energia, o superaquecimento apenas "desloca" a temperatura de saída, sem afetar o balanço global. Como exemplo, as Eqs. (01) a (03) apresentam as curvas para determinação da vazão. As constantes  $a_1$  a  $a_7$ ,  $b_1$  a  $b_7$ , e  $c_1$  a  $c_6$  são obtidas por regressão linear a partir dos dados de Paiva et al. (1994, 1995).

$$\dot{m} = k_{c,vazão} \cdot \dot{m}_c \quad (01)$$

onde

$$\dot{m}_c = a_1 + a_2 p_e + a_3 p_e^2 + a_4 p_s + a_5 p_s^2 + a_6 \Delta T_{sub} + a_7 \Delta T_{sub}^2 \quad (02)$$

ou

$$\dot{m}_c = b_1 + b_2 p_e + b_3 p_e^2 + b_4 p_s + b_5 p_s^2 + b_6 x_e + b_7 x_e^2 \quad (02a)$$

e

$$k_{c,vazão} = c_1 \left( \frac{L_1}{L_{c,1}} \right)^{c_2} \left( \frac{L_2}{L_{c,2}} \right)^{c_3} \left( \frac{L_3}{L_{c,3}} \right)^{c_4} \cdot \left( \frac{D_{tc}}{D_{c,tc}} \right)^{c_5} \left( \frac{D_{ls}}{D_{c,ls}} \right)^{c_6} \quad (03)$$

onde:

- $\dot{m}$ ,  $\dot{m}_c$ : vazão mássica real/característica;
- $k_{c,vazão}$ : fator de correção da vazão característica;
- $p_e$ ,  $p_s$ : pressões na entrada e na saída do tubo capilar;
- $\Delta T_{sub}$ ,  $x_e$ : subresfriamento/título na entrada do tubo capilar;
- $L_1$ ,  $L_{c,1}$ : comprimento real/característico do 1º. trecho adiabático do tubo capilar;
- $L_2$ ,  $L_{c,2}$ : comprimento real/característico do trocador de calor;
- $L_3$ ,  $L_{c,3}$ : comprimento real/característico do trecho adiabático final do tubo capilar;
- $D_{tc}$ ,  $D_{c,tc}$ : diâmetro real/característico do tubo capilar;
- $D_{ls}$ ,  $D_{c,ls}$ : diâmetro real/característico da linha de sucção;

O balanço de energia no trocador de calor tubo capilar-linha de sucção é dado por:

$$h_{e,tc} - h_{s,tc} = h_{s,ls} - h_{e,ls} = \bar{c}_p (T_{s,ls} - T_{e,ls}) = \bar{c}_p \Delta T_{ls} \quad (04)$$

onde  $h$  é a entalpia nos pontos de interesse (entradas e saídas do tubo capilar e da linha de sucção).

Para a linha de sucção, é necessário determinar a temperatura de saída e a variação de pressão. Esta última é determinada de forma análoga à do condensador, admitindo-se escoamento monofásico de vapor de fluido refrigerante. Já a temperatura de saída da linha de sucção é dada por:

$$T_{s,ls} = T_{e,ls} + \Delta T_{ls} \quad (05)$$

onde  $T_{e,ls}$  (temperatura de entrada na linha de sucção) é igual a  $T_{s,evap}$  (temperatura de saída do evaporador). Se na saída do evaporador houver mistura bifásica, admite-se  $T_{e,ls} = T_{sat,s,evap}$  dado que há um acumulador de líquido na saída do evaporador.

**Modelo para a Carga de Refrigerante.** Na avaliação da carga de refrigerante, a parcela dissolvida no óleo lubrificante utiliza o modelo de Grebner e Crawford (1994). Nos trechos monofásicos a massa é calculada de acordo com a equação proposta por Rice (1987), e nos trechos bifásicos esta equação é modificada pela fração de vazio, determinada através do modelo de Hughmark (apud Rice, 1987) admitindo-se fluxo de calor constante.

**Validação do Modelo.** O modelo foi validado a partir de dados de um ensaio de "Pull-down" para um refrigerador de uma porta sem congelador de um fabricante nacional. O programa computacional gerado foi executado na versão de projeto, admitindo-se um superaquecimento de 7,5°C, e na versão de simulação com a carga nominal de 90 gramas. As temperaturas do gabinete e externa utilizadas foram de 3°C e 43°C respectivamente. Os resultados preliminares indicaram uma superestimativa da vazão calculada pela rotina do tubo capilar, ligada às suas hipóteses limitadoras (retilidade, ausência de óleo, etc.). Assim, foi necessário introduzir um fator de correção nesta rotina, após o que foram obtidos os resultados da Tab. 1. Os erros obtidos foram menores que 5%, com exceção da temperatura de entrada do compressor e da temperatura de saída do evaporador. Para a primeira, isto pode ser explicado pelo fato de a medição desta temperatura ser feita na parede da linha de sucção junto ao ponto de união com o compressor. Como a temperatura da carcaça do compressor é da ordem de 95°C, existe um efeito de condução através da parede da linha de sucção, que tende a aumentar a temperatura do fluido, bem como a introduzir um erro de medição. Já para a segunda, apesar do erro relativo alto, o erro absoluto é pequeno (cerca de 2°C).

Analisando-se os demais resultados obtidos pelo programa de simulação, verifica-se que estes são consistentes com os encontrados na literatura. Por exemplo, o coeficiente de eficácia (COP) ficou na faixa de 0,7 a 0,85 para uma temperatura do meio na faixa de 43°C a 32°C, enquanto que a ASHRAE (1988) apresenta para este tipo de equipamento um valor típico da ordem de 1,0 a 1,1 para uma temperatura do meio de 32°C, resultado que pode ser considerado satisfatório dadas as limitações do modelo.

**Tabela 1.** Resultados do Programa de Simulação e Comparação com Dados Experimentais

Grandeza Medida	Resultado do Ensaio	Resultados do Programa	
		Versão de Projeto - Erro*	Versão de Simulação - Erro*
Potência Elétrica Consumida	90,0 W	1,8%	1,4%
Temp. Condensação	58,4 °C	1,4%	1,2%
Temp. Entrada do Evaporador	-22,7 °C	0,0%	0,4%
Temp. Saída do Evaporador	-16,4 °C	-2,4%	14,0%
Temp. Entrada Linha de Sucção	58,2 °C	-45,5%	-50,3%
massa de refrigerante no ciclo	90,0 g	0,7%	-0,2%

\* Erro = (programa - ensaio)/ensaio

## ANÁLISE DO EFEITO DOS PARÂMETROS OPERACIONAIS E GEOMÉTRICOS

De posse do simulador descrito, foi realizado um estudo sobre o efeito dos parâmetros operacionais e geométricos no desempenho de refrigeradores e freezers. A análise foi realizada para um modelo de refrigerador de uma porta sem compartimento congelador, com as seguintes características: carga nominal de refrigerante de 0,09 kg, compressor hermético com rotação de 3500 rpm, volume de deslocamento de  $3,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$  e volume morto de 1,5%, condensador estático com área total de  $0,54 \text{ m}^2$ , evaporador "roll-bond" com área total de  $0,288 \text{ m}^2$  e tubo capilar não adiabático com diâmetro interno de 0,73 mm, diâmetro externo de 2,0 mm, comprimento do 1o. trecho adiabático de 1,435 m, comprimento do trocador de calor tubo capilar-linha de sucção de 1,5 m e comprimento do trecho final adiabático de 0,065 m, e linha de sucção com diâmetro interno de 6 mm. Do ensaio de "pull-down" foram obtidos os seguintes dados operacionais: temperatura média do ar no interior do gabinete do refrigerador de 3°C, temperatura do ar externo de 43°C. O coeficiente de eficácia do ciclo, utilizado nas análises, é definido por:

$$\text{COP} = \frac{\text{capacidade de refrigeração}}{\text{potência elétrica consumida}} \quad (06)$$

**Temperatura do Ar no Interior do Gabinete.** Na condição normal de operação, a temperatura no interior do gabinete é da ordem de 3°C. Variou-se esta temperatura na faixa de 1,0 a 5,0°C, mantidas a temperatura do ar externo em 43°C, e com uma carga de refrigerante nominal de 0,09 kg, obtendo-se os resultados apresentados na Fig. 2, e na Tab. 2. Pode-se verificar um aumento do coeficiente de eficácia do ciclo à medida que aumenta-se a temperatura do gabinete. Isto se deve a um aumento da capacidade de refrigeração maior que o aumento de potência elétrica consumida. A capacidade de refrigeração aumenta devido à maior vazão e à maior variação de entalpia no evaporador, provocadas, respectivamente, pela diminuição da relação de pressões e pelo aumento da temperatura de evaporação.

**Varição da Temperatura do Ar Externo.** O efeito desta variável operacional é mostrado na Fig. 3 e na Tab. 3, para uma variação entre 32,0 e 45,0°C, mantidas a temperatura no interior do gabinete de 3°C e a carga de refrigerante de 0,09 kg. A temperatura do ar externo tem um efeito contrário ao da temperatura interna do gabinete sobre a eficácia do ciclo. O aumento desta temperatura provoca uma diminuição da eficácia. Os motivos disto são os mesmos que aqueles apresentados para a temperatura no interior do gabinete: um aumento da temperatura externa aumenta a relação de pressões, diminuindo a vazão e a variação de entalpia no evaporador.

**Tabela 2.** Efeito da Mudança da Temperatura do Gabinete em Algumas Variáveis de Interesse

Temperatura no Gabinete (°C)	Vazão Mássica (kg/h)	Potência Elétrica Consumida (W)	Capacidade de Refrigeração (W)
1,0	2,05	90,0	60,1
2,0	2,09	91,2	61,4
3,0	2,09	91,3	63,7
4,0	2,12	92,5	65,0
5,0	2,15	93,6	66,3



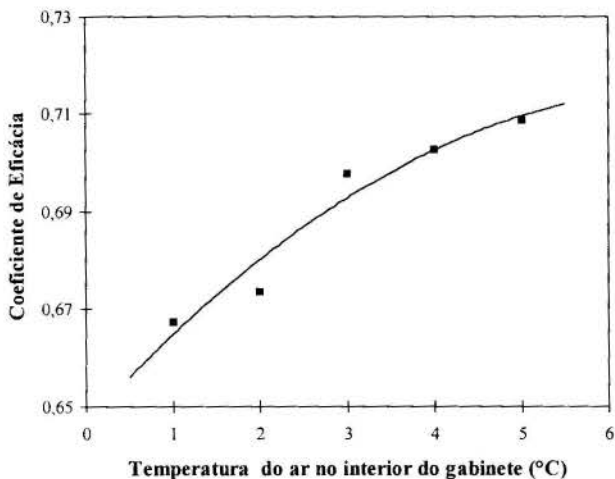


Figura 2. Efeito da temperatura média do ar no interior do gabinete sobre a eficácia do ciclo.

Tabela 3. Efeito da Mudança da Temperatura do Ar Externo em Algumas Variáveis de Interesse

Temperatura externa (°C)	Vazão Mássica (kg/h)	Potência Elétrica Consumida (W)	Capacidade de Refrigeração (W)
32,0	1,99	80,9	68,0
35,0	2,02	83,3	66,4
40,0	2,07	88,5	64,8
43,0	2,09	91,3	63,7
45,0	2,14	94,4	61,9

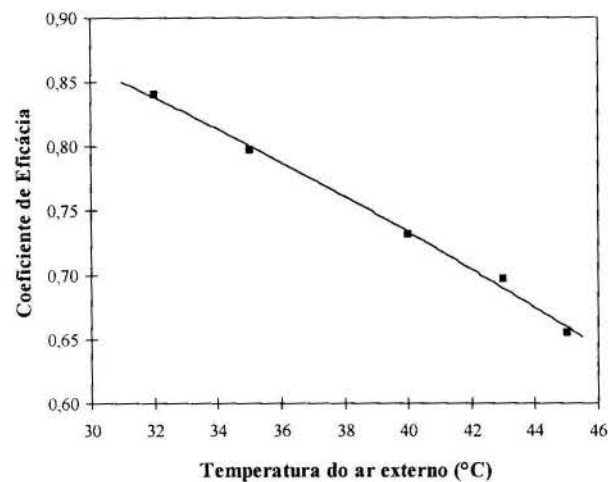


Figura 3. Efeito da temperatura do ar externo sobre a eficácia do ciclo

**Carga de Refrigerante no Sistema.** Outro parâmetro operacional analisado é a carga de refrigerante no sistema. O valor nominal da carga é de 0,09 kg. Variou-se este valor na faixa de 0,080 a 0,095 kg, mantidas as temperaturas interna e externa em 3°C e 45°C, respectivamente, e admitindo um superaquecimento na saída do evaporador de 7,5°C. Obteve-se como resultado a Fig. 4 e a Tab. 4 a seguir.

Nota-se na figura a existência de um ponto de máximo, o que indica a carga ótima do sistema. Este máximo pode ser explicado pelo fato de que, quando a carga de refrigerante é pequena, a pressão de sucção e a vazão são baixas e o grau de superaquecimento é alto, o que resulta numa capacidade de refrigeração baixa, reduzindo a eficácia. Aumentando-se a carga, diminui-se o grau de superaquecimento e aumenta-se a vazão e a pressão de sucção. Como estes fatores tem efeitos contrários, existe um ponto em que os efeitos se anulam, resultando no ponto de máximo mostrado na Fig. 4.

Tabela 4. Efeito da Carga de Refrigerante no Sistema em Algumas Variáveis de Interesse

Carga de Refrigerante (kg)	Vazão Mássica (kg/h)	Potência Elétrica Consumida (W)	Capacidade de Refrigeração (W)
0,080	1,99	89,7	61,9
0,085	2,04	90,8	63,5
0,090	2,09	91,3	63,7
0,095	2,17	92,9	63,2

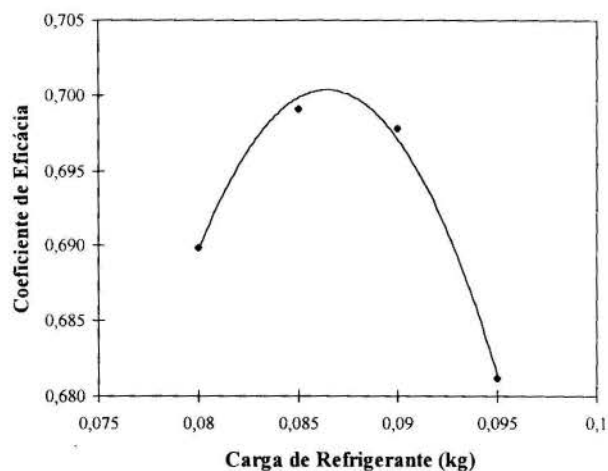


Figura 4. Efeito da carga de refrigerante sobre a eficácia do ciclo

**Geometria do Tubo Capilar.** As Figs. 5 a 7 e as Tabs. 5 a 7 mostram o efeito do diâmetro do capilar e dos comprimentos do 1.º trecho adiabático do tubo capilar e do trocador de calor tubo capilar-linha de sucção sobre a eficácia do ciclo.

Nota-se que, para o diâmetro da ordem de 0,73mm, a eficácia do ciclo apresenta um máximo. Isto se deve a efeitos semelhantes aos descritos anteriormente. Um diâmetro menor, ao restringir a vazão, diminui a pressão de sucção e aumenta o superaquecimento, que têm efeitos contrários na capacidade de refrigeração. À medida que o diâmetro aumenta, aumenta a pressão de sucção e diminui o grau de superaquecimento, levando ao surgimento do ponto de máximo. O efeito do comprimento do primeiro trecho adiabático do capilar (Fig. 6) é semelhante ao do diâmetro, apresentando um ponto de máximo. Já para o comprimento do trocador de calor (Fig. 7), o aumento do comprimento tem o efeito de aumentar a eficácia do ciclo.

Tabela 5. Efeito do Diâmetro do Capilar em Algumas Variáveis de Interesse

Diâmetro do Tubo Capilar (mm)	Vazão Mássica (kg/h)	Potência Elétrica Consumida(W)	Capacidade de Refrigeração (W)
0,70	2,00	90,7	63,2
0,73	2,09	91,3	63,7
0,80	2,44	99,4	57,5
0,85	2,69	104,3	53,4

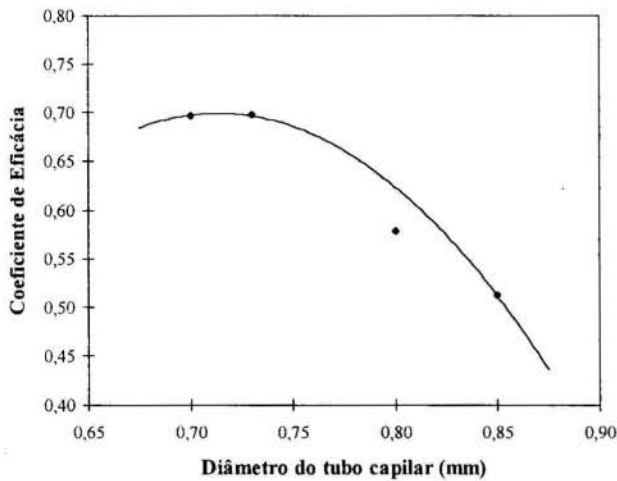


Figura 5. Efeito do diâmetro do tubo capilar sobre a eficácia do ciclo

Tabela 6. Efeito da Mudança do Comprimento do 1º Trecho Adiabático do Capilar em Algumas Variáveis de Interesse

Comprimento do Trecho Adiabático(m)	Vazão Mássica (kg/h)	Potência Elétrica Consumida(W)	Capacidade de Refrigeração (W)
0,735	2,19	93,1	62,9
1,085	2,14	91,9	63,2
1,435	2,09	91,3	63,7
1,535	2,10	91,3	63,4

Tabela 7. Efeito da Mudança do Comprimento do Trocador de Calor TC/LS em Algumas Variáveis de Interesse

Comprimento do Trocador (m)	Vazão Mássica (kg/h)	Potência Elétrica Consumida(W)	Capacidade de Refrigeração (W)
1,00	2,21	93,2	62,2
1,25	2,16	92,2	63,0
1,50	2,09	91,3	63,7
1,75	2,04	90,8	64,0
2,00	2,00	90,2	64,5

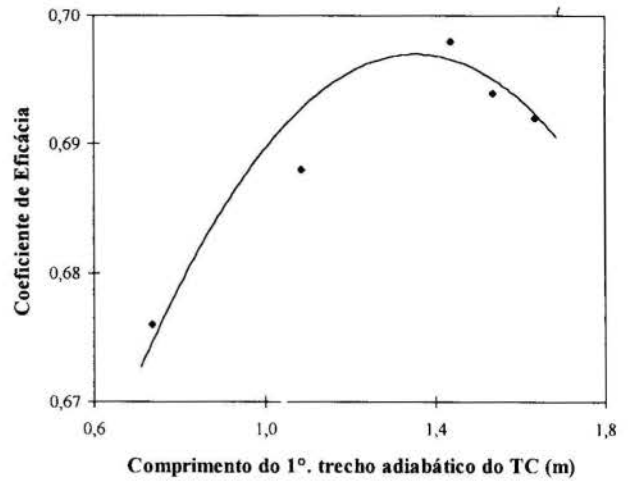


Figura 6. Efeito do comprimento do 1º trecho adiabático do tubo capilar sobre a eficácia do ciclo

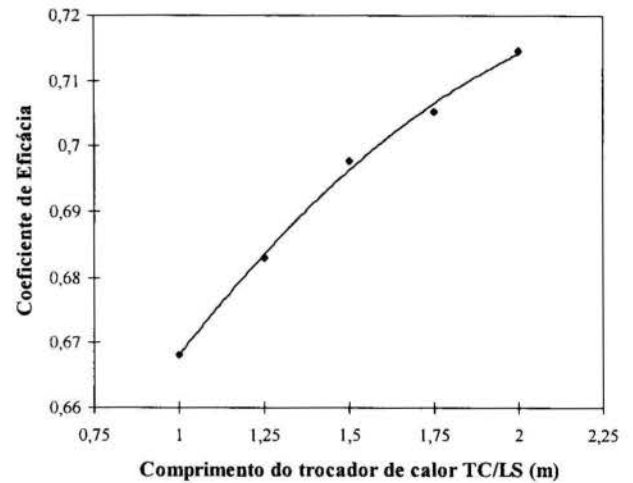


Figura 7. Efeito do comprimento do trocador de calor tubo capilar-linha de sucção sobre a eficácia do ciclo

**Mudança do Fluido Refrigerante.** A seguir, foi estudado o efeito da substituição do CFC 12 pelo HFC 134a para o presente caso. Para efeitos de análise, admitiu-se que os rendimentos isoentrópico e volumétrico do compressor são função apenas da relação de pressões, não sendo afetados pela mudança de fluido (cf. Goodson e Bullard, 1994). A única modificação feita, em termos de simulação do ciclo, foi alterar o tipo de óleo lubrificante para efeitos de determinação da massa de refrigerante dissolvida.

O programa de simulação foi utilizado impondo-se um grau de superaquecimento na saída do evaporador de 7,5°C, e com temperaturas do ar externo e no gabinete de 32,0 e 3,0°C respectivamente. Os resultados obtidos encontram-se na Tab. 8.

Os resultados mostram que a substituição do CFC 12 pelo HFC 134a provoca uma diminuição tanto na potência consumida quanto na capacidade de refrigeração. A primeira é devida basicamente à diferença de volumes específicos entre o CFC 12 e o HFC 134a. A capacidade de refrigeração diminui devido às diferentes pressões de saturação, pois nesta faixa de temperaturas

o HFC 134a evapora numa pressão mais alta que o CFC 12 para uma dada temperatura. O resultado global é uma redução na eficácia do ciclo da ordem de 6% para este caso. Este resultado é semelhante aos encontrados na literatura, por exemplo Kruger e Driessen (1992), Vineyard (1989) e Sand et al.(1990), que no entanto mostra que ajustando-se o volume deslocado pelo compressor obtêm-se desempenhos da mesma ordem para os dois fluidos.

Tabela 8. Efeito da mudança de fluido refrigerante em algumas variáveis de interesse.

Grandeza	CFC 12	HFC 134a	Variação em relação ao CFC 12
Potência Elétrica Consumida (W)	81,2	78,4	-3,4%
Capacidade de Refrigeração (W)	68,7	62,6	-8,9%
Vazão Mássica (kg/h)	2,09	1,59	-23,9%
Coefficiente de Eficácia	0,846	0,798	-5,7%
massa de refrigerante no ciclo (kg)	0,112	0,071	-36,8%

## CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou resultados de um estudo sobre a sensibilidade de um ciclo de refrigeração às variações de alguns parâmetros operacionais e geométricos relevantes, bem como o efeito da substituição do CFC 12 pelo HFC 134a.

As curvas que mostram a dependência do coeficiente de eficácia com a carga de refrigerante, o diâmetro do tubo capilar e o comprimento dos trechos adiabáticos apresentam pontos de máximo local. Em função disto, estas variáveis devem ser analisadas com muito cuidado durante o projeto do refrigerador ou "freezer". As demais grandezas deverão ser determinadas de forma adequada, a fim de atenderem tanto às condições operacionais desejadas para o ciclo de refrigeração quanto às condições econômicas.

O desempenho do ciclo com o HFC 134a é cerca de 6% menor, porém é possível atingir-se o mesmo desempenho do CFC 12 através da adequação de parâmetros geométricos, como por exemplo o deslocamento do compressor. Os resultados, qualitativamente, concordam com a literatura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASHRAE, 1988, *Handbook of Equipment*. Atlanta, EUA.
- Fiorelli, F.A.S., 1995, "Modelagem e Simulação de Sistemas de Refrigeração de Pequeno Porte com Dispositivo de Expansão Constituído por Tubo Capilar". Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP, São Paulo, Brasil.
- Fiorelli, F.A.S.; Silveiras, O.M., 1995, "Modelagem e Simulação de Sistemas de Refrigeração de Pequeno Porte com Dispositivo de Expansão Constituído por Tubo Capilar". *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Belo Horizonte, Brasil, 1995.

Goodson, M.P.; Bullard, C.W., 1994, "Refrigerator/Freezer System Modeling". *Relatório Técnico ACRC TR-61*, Univ. Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, EUA. .

Grebner, J.J.; Crawford, R.R., 1992, "The Effects of Oil on the Thermodynamic Properties of Dichlorodifluoromethane (CFC 12) and Tetrafluoromethane (HFC 134a)". *Relatório Técnico ACRC TR-13*, Univ. Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, EUA.

Krueger, M.; Driessen, J.L., 1992, "Desempenho de Refrigerantes Alternativos ao CFC-12 para Aplicações em Refrigeradores e Freezers". *Anais do III Cong. Bras. Refrigeração Ventilação e Condicionamento de Ar*, São Paulo, Brasil, p. 33-36.

Molina, M.J. e Rowland, F.S., 1974, "Stratospheric Sink for Chlorofluoromethanes: Chlorine Atom Catalysed Destruction of Ozone". *Nature*, no. 249, p. 810-12.

Paiva, M.A.S.; Peixoto, R.A.; Hernandez Neto, A., 1992, "Otimização Energética de Refrigeradores e Freezers Domésticos". *Anais do III Congr. Bras. Refrigeração Ventilação e Condicionamento de Ar*, São Paulo, Brasil, p. 111-114.

Paiva, M.A.S.; Vodianistkaia, P.; Hernandez Neto, A.; Silveiras, O.M.; Fiorelli, F.A.S., 1994, "The Behavior of Lateral and Concentric Capillary Tube-Suction line Heat Exchangers Using CFC-12 and HFC-134a". *Proc. Int. Refrigeration Conf. Purdue*, West Lafayette, EUA.

Paiva, M.A.S.; Fiorelli, F.A.S.; Vodianistkaia, P.; Peixoto, R.A.; Hernandez Neto, A.; Silveiras, O.M., 1995, "Experimental and Numerical Study of the Flow Through Non Adiabatic Capillary Tubes with Lateral and Concentric Capillary Tube-Suction Line Heat Exchanger Configuration". *Proc. 19th Int. Congr. Refrigeration*, Haia, Holanda, vol. IIIa, p. 429-436.

Rice, C.K., 1987, "The Effect of Void Fraction Correlation and Heat Flux Assumption on Refrigerant Charge Inventory Predictions." *ASHRAE Trans.*, vol. 93 part 1, pp. 341-67.

Sand, J.R. et al, 1990, "Experimental Performance of Ozone-Safe Alternative Refrigerants". *ASHRAE Trans.*, vol. 96, part 2, p.173-181.

Vineyard, E.A. et al, 1989, "Refrigerator-Freezer Energy Testing with Alternative Refrigerants" *ASHRAE Trans.*, vol.95, part 2, p.295-99.

## ABSTRACT

This paper presents a numerical study about the effect of some parameters on the performance of small refrigeration systems. It is presented the effect of external air temperature, air temperature inside the cabinet, refrigerant charge, and some geometrical dimensions of capillary tube, on the mass flow rate, power consumption, refrigeration capacity and coefficient of performance. It was also studied the effect of changing CFC 12 by HFC 134a. The results show a great influence of refrigerant charge and capillary diameter on the performance. The performance of system with HFC 134a is about 6% lower than with CFC 12.

## INFLUENCE OF THE REFRIGERANT PROPERTIES ON THE REFRIGERATION SYSTEM PERFORMANCES



**Claudio Saavedra O.**  
Department of Mechanical Engineering  
University of Concepción  
P.O.Box 53-C, Concepcion-Chile

**Eric Winandy**  
Thermodynamics Laboratory  
University of Liège  
Liège - Belgium



### SUMMARY

*The aim of this paper is to compare the effect of the refrigerant thermodynamic properties on the vapor refrigeration plant behaviour. First, the influence of the refrigerant on the efficiency of current methods used to increase the refrigerating capacity is analysed. Secondly, performances of screw and reciprocating compressors operating with different refrigerants are predicted by means of the simulation.*

### 1. INTRODUCTION

In the area of domestic and commercial refrigeration, vapor compression machines are up to now, most preferably supplied with CFC-12, CFC-114 and HCFC-22 and the azeotropic blend R502. Among these refrigerants, only the HCFC-22 is still permitted for a limited period of time.

According to today requirements, R717, R290, R125, R32, R134a and R600a remain the only acceptable substances. However in typical refrigeration machines, these substances can only be used exceptionally as refrigerants, due to their specific characteristics. The use of some of them implies flame proof design.

Design of new plants and retrofitting of actual refrigeration systems require a previous evaluation of the system performance with substitute available refrigerants or those being developed. In this paper, the screw compressor model proposed by Saavedra C. (1993) and the reciprocating compressor model proposed by Winandy E. (1996) are used to predict the influence of refrigerant thermodynamic properties on refrigeration compressors

### 2. REFRIGERANT PROPERTIES AND REFRIGERATING CAPACITY

Current methods used to increase the refrigerating capacity and therefore the COP are: subcooling of refrigerant after condensation and/or vapor extraction during throttling.

To account for the influence of refrigerant properties, five refrigerants were selected: R12, R502, R22, R134a and R717. Cycles to be compare are: the reference cycle 1-2-3-4-1 the cycle with subcooling 1-2-3'-4'-1 and the cycle with subcooling and vapor extraction 1-2-3'-3''-5'-5''-1 (see figure N°2.1).

Two typical cases of refrigeration applications were analyzed:

- The first one refers to the temperatures range for air-conditioning 1.1C/40C (34F/104F).
- The other one refers to the temperatures ranges for commercial refrigeration: -35C/35C (-31F/95F).

Results of the comparison are given in function of:

- The vapor-flash mass ratio "x" defined as follows:

$$x = \frac{\dot{m}_{vf}}{\dot{m}_c} \quad (2.1)$$

Where " $\dot{m}_{vf}$ " is the flash vapor mass flow rate produced by the liquid expansion down to the economizer pressure and " $\dot{m}_c$ " the refrigerant mass flow rate at condenser.

- The refrigerating capacity increase ratios "f<sub>sc</sub>" and "f<sub>sex</sub>" defined as follows:

$$f_{sc} = \frac{Q_{sc} - Q_R}{Q_R} 100 \quad (2.2)$$

Where "f<sub>sc</sub>" represents the capacity increases ratio due to subcooling, "Q<sub>sc</sub>" is the capacity with subcooling and "Q<sub>R</sub>" is the capacity of the reference cycle.

$$f_{sex} = \frac{Q_{sex} - Q_R}{Q_R} 100 \quad (2.3)$$

Where "f<sub>sex</sub>" represents the capacity increases ratio due to subcooling and vapor extraction, and "Q<sub>sex</sub>" is the capacity with subcooling and vapor extraction.

Values of "x", "f<sub>sc</sub>" and "f<sub>sex</sub>" are computed using fixed values of subcooling " $\Delta t_{sc}$ " (4K, 8K) and for the optimal intermediate temperature "t<sub>i</sub>" (defined as the value that makes the capacity increase maximum for fixed values of evaporation and condensation temperatures).

Results are given in table N°2.1 for the air conditioning range and in table N°2.2 for commercial range.

Table N° 2.1  
Air conditioning temperatures range (1.1°C/40°C)

Ref.	$\Delta t_{sc}=4K$			$\Delta t_{sc}=8K$		
	x	f <sub>sc</sub> %	f <sub>sex</sub> %	x	f <sub>sc</sub> %	f <sub>sex</sub> %
<b>R12</b>	0.11	3.6	4.3	0.10	7.1	7.7
<b>R502</b>	0.14	5.1	6.3	0.14	10.1	11.0
<b>R22</b>	0.11	3.4	3.8	0.10	6.7	7.0
<b>R134a</b>	0.12	4.2	5.1	0.12	8.2	9.0
<b>R717</b>	0.08	1.9	2.0	0.06	3.7	3.8



Table N° 2.2  
Commercial temperatures range (-35°C/35°C)

Ref.	$\Delta t_{sc}=4K$			$\Delta t_{sc}=8K$		
	x	$f_{sc}$ %	$f_{sex}$ %	x	$f_{sc}$ %	$f_{sex}$ %
R12	0.20	3.9	6.9	0.20	7.4	10.0
R502	0.30	5.5	10.0	0.20	11.1	15.0
R22	0.20	3.9	5.3	0.20	6.9	8.5
R134a	0.20	4.5	8.1	0.20	8.9	12.0
R717	0.10	1.9	2.4	0.10	3.8	4.3

Results from table N°2.1 show that, for the air-conditioning range, vapor extraction contributes poorly to capacity increases. The lower capacity increase is obtained with R717, and the R134a (the main alternative to R12), presents better results than R12.

Table N°2.2 shows the obvious influence of vapor extraction on the capacity increases. But, again R717 presents the lower capacity increase. Also R22, as a substitute for R502 shows a lower performance.

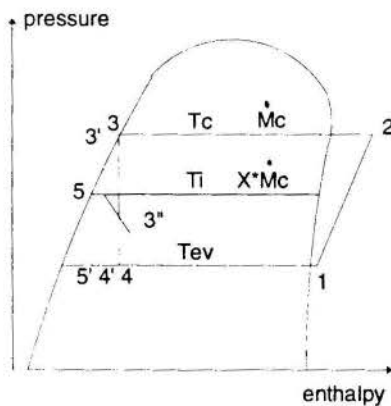


Figure Nø2.1 Refrigeration cycles

### 3. SCREW COMPRESSOR PERFORMANCE WITH DIFFERENT REFRIGERANTS

To account for the influence of refrigerant properties on the screw compressor performance, six refrigerants were selected: R12, R134a, R22, R502, R600a and R717.

Computer simulation is made by using the screw compressor model, described in reference N°1, with the following assumptions:

- The leakage ratio " $x_L$ " is taken as a function of the pressure ratio " $r_p$ " only,

$$x_L = 1 - r_p^{-a} \quad (3.1)$$

- The specific friction power " $w_{fe}$ ", ratio between the friction power " $w_f$ " and the swept volume " $\dot{V}_{sn}$ " is taken as a parameter

$$w_{fe} = \frac{w_f}{\dot{V}_{sn}} \quad (3.2)$$

- The oil refrigerant heat transfer coefficient "AU" is taken as a function of the pressure ratio and the refrigerant mass flow rate " $\dot{m}_r$ ":

$$AU = (b + c r_p) \dot{m}_r \quad (3.3)$$

- The oil flow volume rate " $\dot{V}_{oil}$ " is set in function of the swept volume as follows:

$$\dot{V}_{oil} = 0.005 \dot{V}_{sn} \quad (3.4)$$

where a, b, c,  $w_{fe}$  and  $\dot{V}_{sn}$  take fixed values for a given compressor, operating at full-load and with fixed rotational velocity, independently of refrigerant properties.

- The input variables are:

- $t_{re}$  : refrigerant temperature at the compressor inlet,
- $t_{ev}$  : evaporating temperature,
- $t_c$  : condensing temperature,
- $t_{ie}$  : oil temperature at the compressor inlet.

- The main output variables are:

- $t_{mn}$  : refrigerant temperature leaving compressor chamber,
- $t_{rex}$  : refrigerant temperature leaving compressor,
- $t_{lex}$  : oil temperature leaving compressor,
- $E_v$  : volumetric efficiency,
- $\dot{m}_r$  : refrigerant mass flow rate,
- $Q_r$  : refrigerating capacity (without subcooling),
- $W_e$  : electrical power consumption,
- $Q_o$  : oil cooler heat load,
- COP : performance coefficient.

Fig. 3.1 and 3.2 show the conceptual scheme and the information flow diagram, respectively, for a screw compressor in full-load operation.

*Screw compressor performance.* A screw compressor with a swept volume of 445 cfm at 3550 rpm and with a variable volume ratio was simulated.

Operating conditions were taken as follows: fixed values for: condensing temperature (40C), oil temperature at compressor entering (40C), and superheating (5C). Variable values for evaporating temperature: 4C, 0C, -5C, -10C, -15C, -20C, -25C, -30C, -35C and -40C.

The computed values are shown in following figures: volumetric efficiency (Fig. 3.3), COP (Fig. 3.4), refrigerating capacity (Fig. 3.5), refrigerant temperature leaving compressor chamber (Fig. 3.6) and oil temperature leaving compressor vs. the evaporating temperature (Fig.3.7).

The results obtained by the simulation show that :

- R22 as a substitute for R12 and R502 : a higher discharge temperature and a higher oil temperature are critical factors to retrofitting R12 and R502 systems with R22. Single stage operation used previously with R502 and R12, specially with higher suction gas superheat is tightly limited.
- R134a appears as a good substitute for R12 : COP, capacity, and volumetric efficiency are very similar. Unfortunately and as it is well known, retrofitting of R12 systems is limited by problems produced by reactions between remaining mineral oil, chlorine and ester oils.
- Higher temperatures and lower volumetric efficiency for R717 are two important limiting factors to retrofit actual refrigerating systems with R717.
- R600a appears to be a good substitute due to low temperature levels for vapor refrigerant and oil, but its low refrigerating capacity is a critical factor.

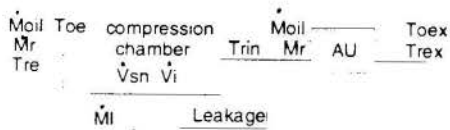


Figure №3.1 Conceptual scheme

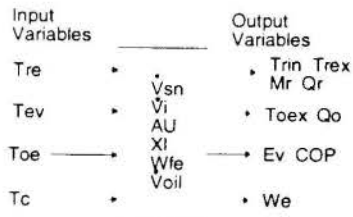


Figure №3.2 Information flow diagram

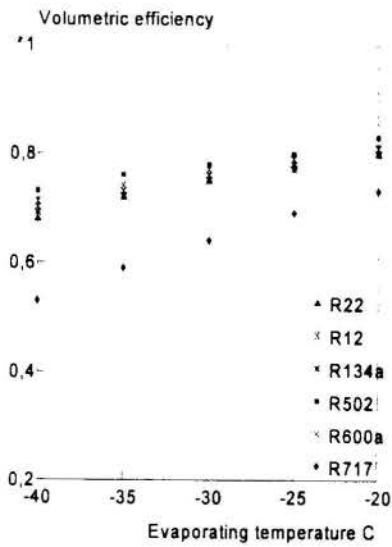


Figure №3.3 Volumetric efficiency

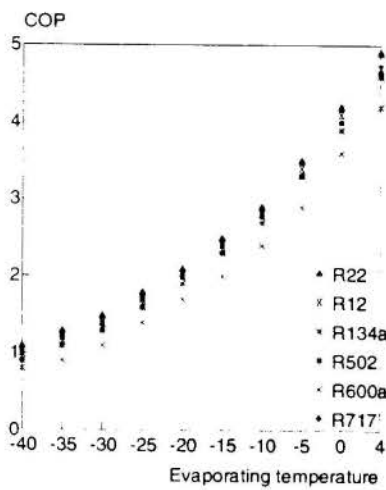


Figure №3.4 COP

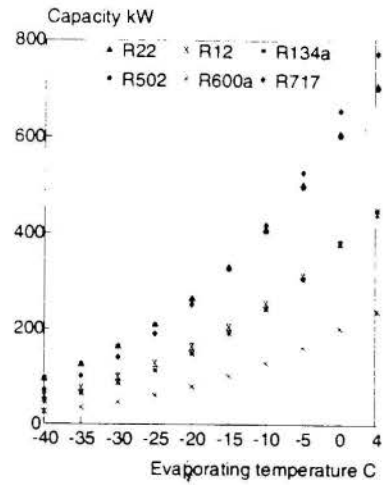


Figure №3.5 Refrigerating capacity

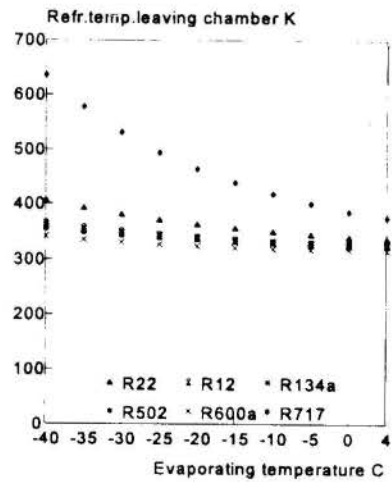


Figure №3.6 Refrigerant temperature leaving chamber

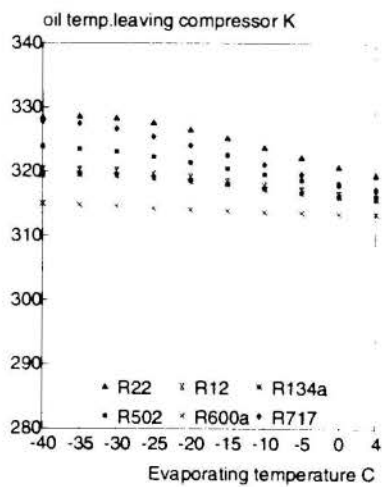


Figure №3.7 Oil temperature leaving compressor

#### 4. RECIPROCATING COMPRESSOR PERFORMANCES WITH DIFFERENT REFRIGERANTS

The semi-empirical model used to compare reciprocating compressors with different refrigerants is based on the following hypotheses (Winandy, 1996):

- . adiabatic cycle because of the small effect cylinder heat transfer on compressor performances,
- . real gas,
- . no leakage,
- . no effect of the oil on the refrigerant properties,
- . compression and expansion are considered as polytropic process with variable polytropic coefficient,
- . pressure drop at the suction and discharge phases are assumed to be proportional to the mean mass flow rate during these processes. In a first approximation, the flow is considered steady state unidirectional with contraction and expansion coefficients depending on the type of valve,
- . all the friction losses are heating the refrigerant at the entrance before compression,
- . the friction losses are calculated assuming constant friction coefficients.

The model requires general geometric data such as cylinder diameter, stroke,...and more specific ones as valves and rings characteristics,...or default values when not available. It also requires identification of the clearance volume.

The operating conditions introduced in the model are the inlet and outlet pressures, inlet temperature and rotational speed. As relevant results, it gives the mechanical work, the discharge temperature and the refrigerant mass flow rate.

##### 4.1 Comparison R12-R134a

In this section, a comparison of the performances of the reciprocating compressor for the two refrigerants R12 and R134a is presented. A suction temperature of 20 °C has been fixed for the comparison.

Figure 4.1 presents the influence of the pressure ratio on the volumetric efficiency. As it can be seen, no great difference between the two refrigerants can be detected. It is logical since in this model without heat transfer and without leakage, only the clearance volume, the pressure ratio, the pressure drop and the equivalent polytropic coefficient can have an influence on the volumetric efficiency. The clearance volume has been kept the same for the two refrigerants and so the small difference between both profiles can be attributed to the pressure drop and the polytropic coefficient.

Figure 4.2 shows that due to the difference between the thermodynamic properties of the two refrigerants, there exist a sensible difference of discharge temperature, the lowest being the one of the R134a. For this reason, the critical evaporating temperature below which water cooling of the cylinder head is necessary is lower in the case of the R134a.

Figure 4.3 shows the mechanical work for 465 rpm, for three different condensing temperatures : 30, 40 and 50°C. There is a certain reduction of the mechanical work passing from R12 to R134a at temperatures lower than 0°C. This reduction becomes significant at temperatures lower than -20°C. This is mainly due to the difference of thermodynamic properties between the refrigerants.

This reduction of mechanical work at low temperatures is of course followed by a diminution of the refrigerating capacity. Figure 4.4 shows that the mechanical work decreases faster than the refrigerating capacity. Indeed, the COP, the ratio of these two powers is increases a little for the R134a.

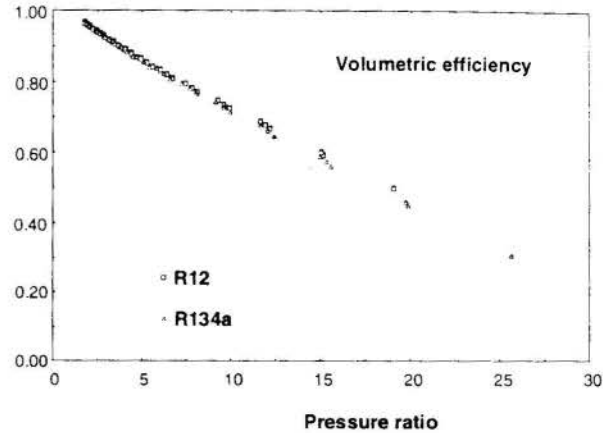


Figure 4.1 Comparison of the volumetric efficiency for R12 and R134a refrigerants

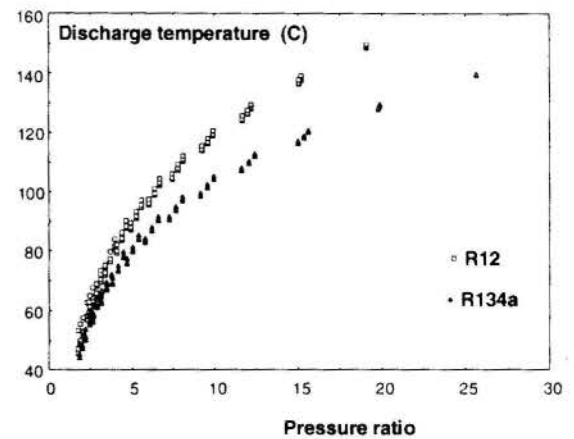


Figure 4.2 Comparison of the discharge temperature for R12 and R134a refrigerants.

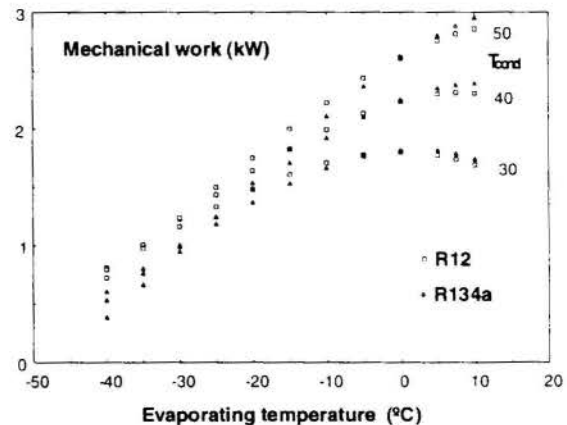


Figure 4.3 Comparison of the mechanical work for the two refrigerants R12 and R134a.

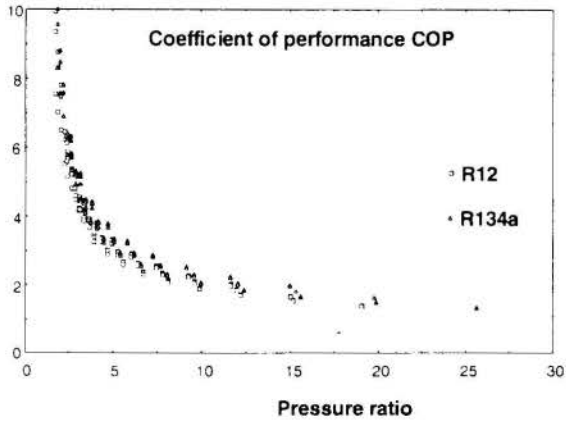


Figure 4.4. Comparison of the COP for the two refrigerants R12 and R134a.

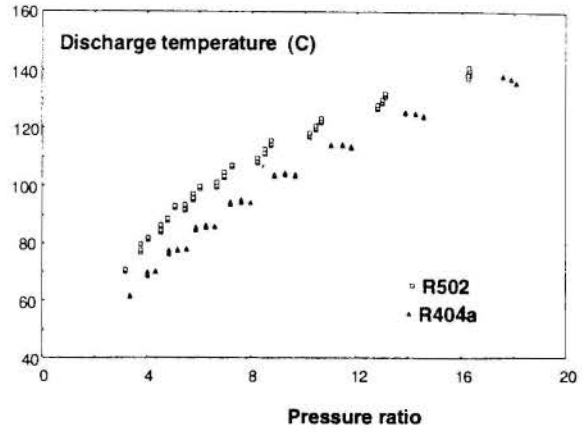


Figure 4.6 Comparison of the discharge temperature for the two refrigerants R502 and R404a

#### 4.2 Comparison R502-R404a

As for the case of the comparison of R12 and R134a, it can be seen from the following results (figure 4.5 to 4.8) that the performances of the refrigerant R502 and its most probable candidate for replacing the refrigerant R404a are quite similar. The discharge temperature is quite lower for the case of the R404a which is an advantage to use it.

The shaft power computed by the model appears to be lower (a few watts!) for the R404a (figure 4.7). This is more than compensated by a decrease of the refrigerating capacity as it can be concluded by the decreasing COP from R502 to R404a on figure 4.8.

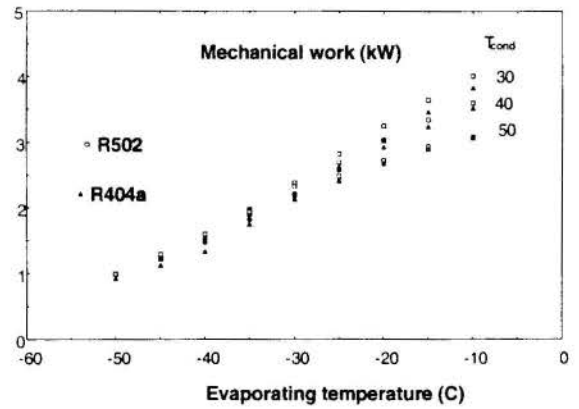


Figure 4.7 Comparison of the mechanical work for the two refrigerants R502 and R404a

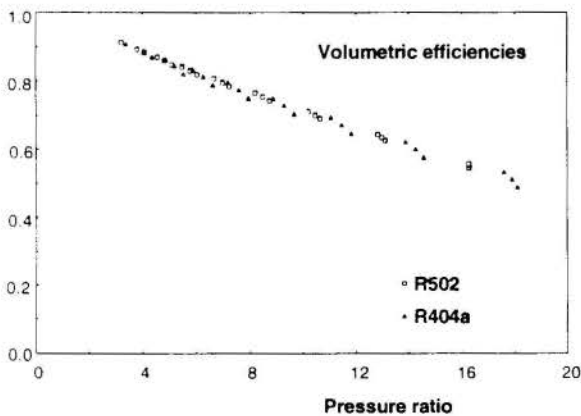


Figure 4.5 Comparison of the volumetric efficiency for the refrigerants R502 and R404a

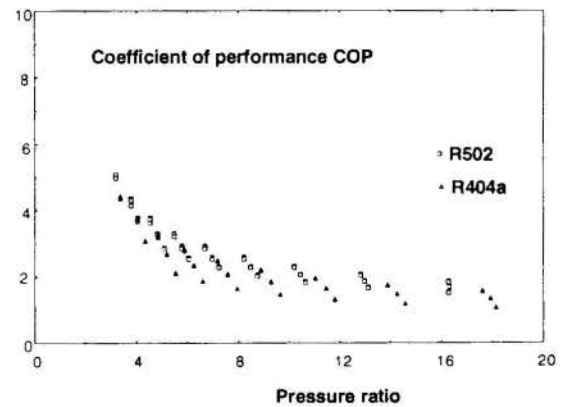


Figure 4.8 Comparison of the coefficient of performance for the two refrigerants R502 and R404a



## 5. CONCLUSIONS

Taking into account the results obtained, the conclusions are the following :

R134a-R12 : R134a appears to be a good substitute for R12 : COP, capacity, volumetric efficiency, refrigerant temperatures at the compressor discharges, etc... are very similar.

R404a-R502 : reciprocating compressors performances operating with R404a are quite similar to what is obtained with R502.

R22 as a substitute for R12 and R502 : the higher discharge temperature for refrigerant and the higher oil temperature are critical factors to retrofitting R12 and R502 systems with R22.

R600a appears to be a good substitute due to low temperature levels for refrigerant and oil but its low refrigerating capacity is a critical factor to retrofitting R12 and R502 systems.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors wish to thank the research program of Universities of Liege and Concepcion, the Professor J. Lebrun and the APEFE ("Association pour la Promotion de l'Education et la Formation à l'Etranger" - French Community of Belgium).

## REFERENCES

- SAAVEDRA C., 1993. Contribution to modelling of heating and refrigeration equipments. Ph.D. Thesis. University of Liège, Belgium.
- WINANDY E., "Study of the real cycle of reciprocating compressors, first part : model". Internal report, University of Concepcion, Chile, 1996.



## PERFORMANCE ANALYSIS OF AIR-COOLED CONDENSING UNITS RUNNING ON CFC SUBSTITUTES

S. Y. MOTTA, L. G. CHAVES and J. A. R. PARISE

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Department of Mechanical Engineering  
22453-900 Rio de Janeiro - RJ - Brazil



### SUMMARY

*This paper investigates the feasibility of substitution of conventional refrigerants, with high Ozone Depletion Potential (ODP), by hydrocarbons and R134a. The use of a simulation model enabled to predict the performance of small size hermetically sealed air-cooled condensing units running on these refrigerants. Results generated by the model enabled to determine if substitution is possible and which modifications are necessary to make the equipment compatible to the new refrigerant, yet maintaining the same performance.*

### INTRODUCTION

According to the latest review of the Montreal Protocol, in Copenhagen, 1992, CFC's, and later, HCFC's, shall be replaced by environmentally safe substances (IIR, 1993). A brief review of the existing literature (Nowotny, 1995; Cohen and Groll, 1995; Kruse, 1995) shows that, at present, two main lines of action exist: one headed by USA and the other, by the European Community. Differences exist, among other things, due to distinct legislation and commercial interest of local industries. The main issue is the use, or not, of flammable substances as replacement refrigerants.

The present paper is concerned with the study of the technical feasibility of redesigning hermetically sealed air-cooled condensing units to operate with new substitutes, R134a and hydrocarbons.

Condensing units operate under three different evaporating temperature ranges: low, medium and high. Table 1 summarizes the traditional refrigerants used for each range, together with the corresponding substitutes.

Evaporation temperature	Traditional refrigerants	Alternative refrigerants
low (-30 to 10°C)	R502/R22	R290, mixtures
medium (-15 to 0°C)	R12	R134a, R600a, R290
high (0 to 10°C)	R22	R290, mixtures

Table 1- Traditional refrigerants and their alternatives.

In the medium evaporation temperature range, R12 is replaced by R134a. It is not appropriate to act as a drop-in, i.e. replacement of fluid with unchanged system, as it does not perform well with the lubricant oils used with R12. On the other hand, a more convenient lubricant oil (ester oil) may present chemical incompatibility with the materials of the equipment (IIR, 1992, 1993).

Hydrocarbons like R600a, R290 (James, 1992 and Nielsen, 1995) and their mixtures (Camporese et al., 1994; Baskin and Perry, 1994) have been considered in the European Community (Baz et al., 1995) as alternatives to R134a for the replacement of R12. Oil and material compatibility problems do not exist. The main problem is the flammability of such substances which, in fact, could be avoided with the establishment

of restrict safety procedures during refrigerant manipulation (Nowotny, 1995).

In the low and high evaporation temperature range applications, another traditional refrigerant is encountered: R22. It has good thermodynamic properties and, in an intermediate stage, is being used as a substitute to R502, too. But the same problem remains, as it will have to be replaced by 2030. For its replacement another natural refrigerant appears: R290 (propane). It is already being used as a substitute for R22 in small capacity air conditioning systems (Baz et al., 1995).

If a partial conclusion could be taken from the above literature review, it could be said that, in Europe, due to the power of environmental organizations, natural refrigerants are the predominant substitutes for small capacity hermetic condensing units (Baz et al., 1995). The content of refrigerant in such systems is small thus reducing the risks (Steimle, 1994). In the United States, however, where an important issue is the liability problem associated with fire accidents (Cohen and Groll, 1995), hydrocarbons are not well accepted. However, some efforts have been carried out to evaluate (Chen et al., 1994) and to minimize their risks (Douglas, 1995).

In the present paper a simulation model for hermetic compressor air-cooled condensing units, as described in an earlier work (Motta et al, 1995), is used to predict the performance of such systems running on CFC and HCFC substitutes. First, the model is validated against experimental data that has been made available further to that presented by Motta et al. (1995). A drop-in simulation of a typical unit, in the performance of a single system is predicted for different substances, traditional and alternative refrigerants, is then carried out. Finally, the model is employed to perform a redesign procedure, in which modifications to the system are proposed in order to make it keep its original capacity, with the new refrigerant.

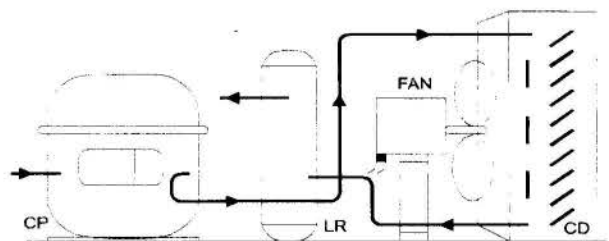


Figure 1 - Schematics of the air condensing unit.

## SIMULATION MODEL

Figure 1 shows the schematics of an air-cooled condensing unit, comprising the hermetic compressor (CP), the air-cooled condenser (CD), the fan (FAN), connecting tubes and, eventually, the liquid receiver (LR). Refrigerant approaches the compressor, from the evaporator, as low pressure superheated vapor. High pressure refrigerant superheated vapor enters the condenser and, at the design condition, is fully condensed and slightly sub-cooled. The liquid receiver can be omitted in certain units.

Mathematical models were developed for all components: hermetic compressor, condenser, connecting tubes, fan and liquid receiver. Energy balance equations as well as thermodynamic properties, pressure drop and heat transfer relations are employed in the compressor semi-empirical model. It only requires experimental results from one single calorimetric test as input data. The condenser is divided in small control volumes (tube sections) for which energy balance equations are solved. This allows for the study of the effect of coil arrangement in the system performance. Air flow rate is determined from a balance between fan capacity and condenser predicted pressure drop. An algorithm is employed to determine the steady-state operating point of the unit for a given geometry and operational conditions. Further details of the model can be found elsewhere (Motta et al., 1995; Parise et al., 1995).

## MODEL VALIDATION

Calorimetric test data from four commercially available condensing units (running with different refrigerants) were used to validate the model. The data were obtained for a wide variety of operating conditions (ambient temperature, evaporation pressure, etc.). The comparison was carried out between the predicted and experimental values of the following parameters: discharge pressure, electric consumption, refrigerating capacity and refrigerant mass flow rate. It should be mentioned that the model was developed to simulate the condensing unit as operating under typical conditions of a calorimetric test.

Results of the comparison are shown on figures 2 to 5. Agreement was good, since the maximum deviation lies within  $\pm 10\%$  from the experimental data. Considering that experimental data were obtained from standard calorimetric tests (carried out in industrial laboratories) the result can be regarded as reasonable.

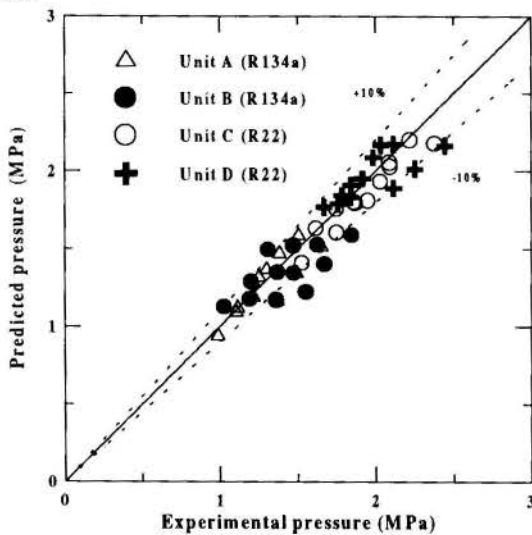


Figure 2 - Comparison between predicted and experimental values of compressor discharge pressure.

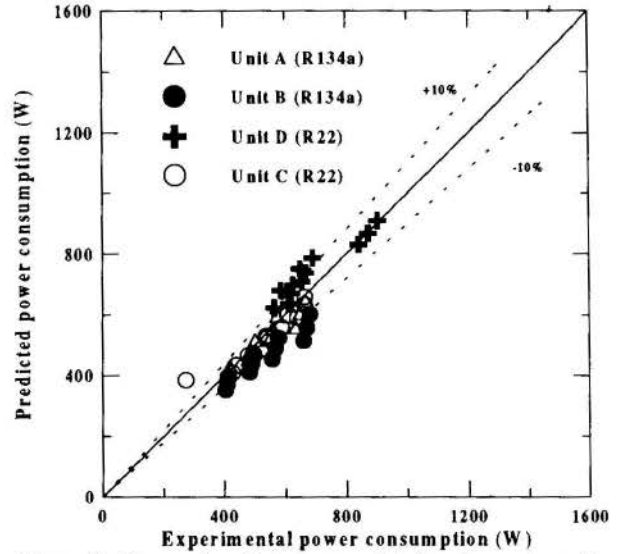


Figure 3 - Comparison between predicted and experimental values of electric power consumption.

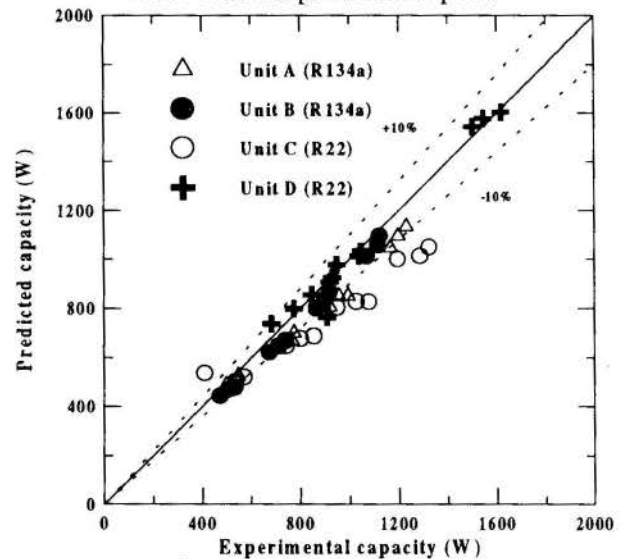


Figure 4 - Comparison between predicted and experimental values of refrigerating capacity.

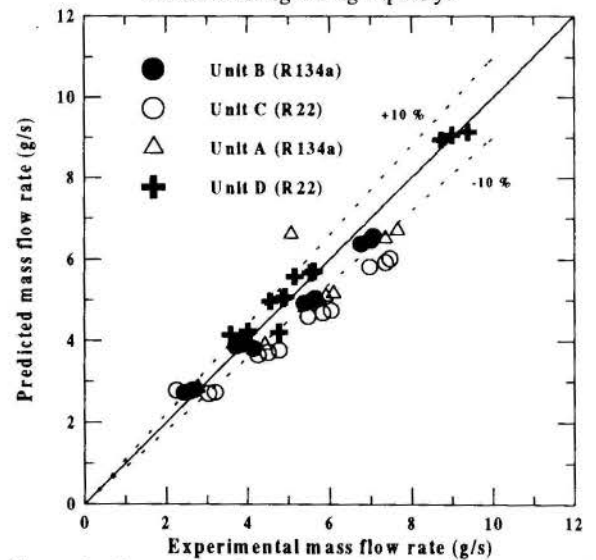


Figure 5 - Comparison between predicted and experimental values of refrigerant mass flow rate.

## RESULTS

The simulation model was employed in the analysis of a typical air cooled condensing unit. First, a drop-in analysis was carried out, followed by a redesign study, to better accommodate the unit to the new refrigerant.

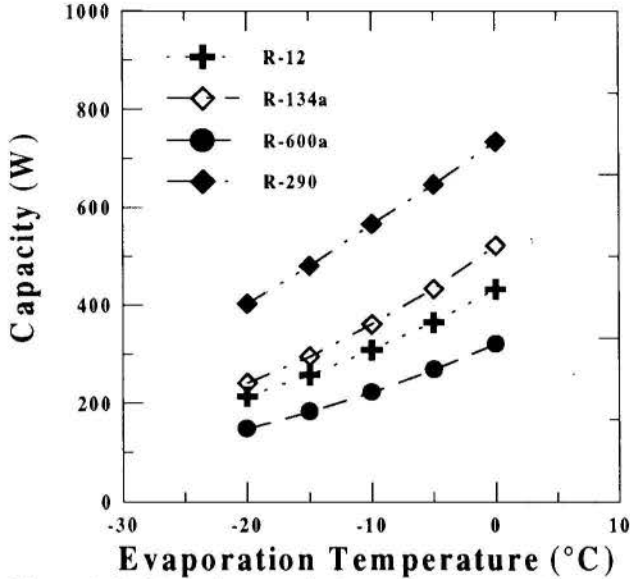


Figure 6 - Refrigerating capacity for medium evaporation temperatures.

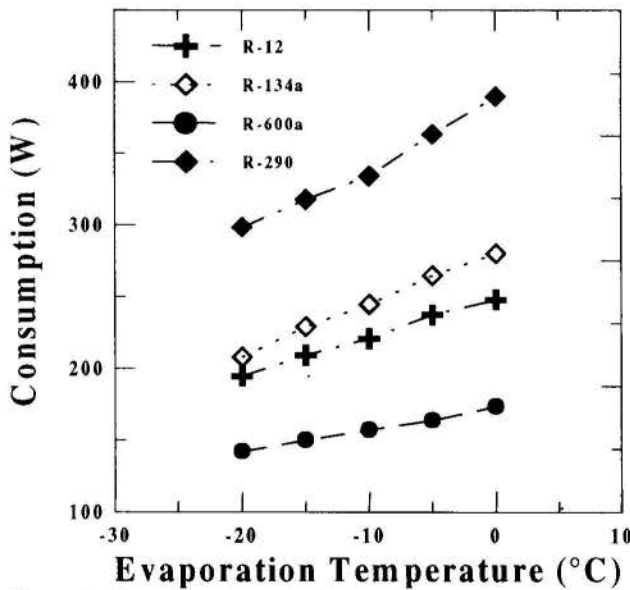


Figure 7 - Electric energy consumption for medium evaporation temperatures.

### Drop - in Analysis

Results in this section simulate the thermodynamic performance of different refrigerants in an otherwise unchanged condensing unit. The model, of course, is not capable of predicting the changes that may occur due to material compatibility or different lubricating oil. Therefore, the study is restricted to the thermodynamic aspects of the problem. Three evaporation temperature ranges (low, medium and high) were covered in the simulation, for the same ambient conditions. Figures 6 to 9 show the results obtained for a medium temperature unit. Refrigerant R12 was studied together with three of its alternatives: R134a,

R600a and R290. Figure 6 shows that similar refrigerating capacities for R12 and R134a were predicted, while for R290 (propane) capacity was higher and, for R600a (isobutane), lower. The same trend was found for the energy consumption and the discharge pressure, Figures 7 and 8. Figure 9 reveals a considerable reduction in the mass flow rate when R600a is used.

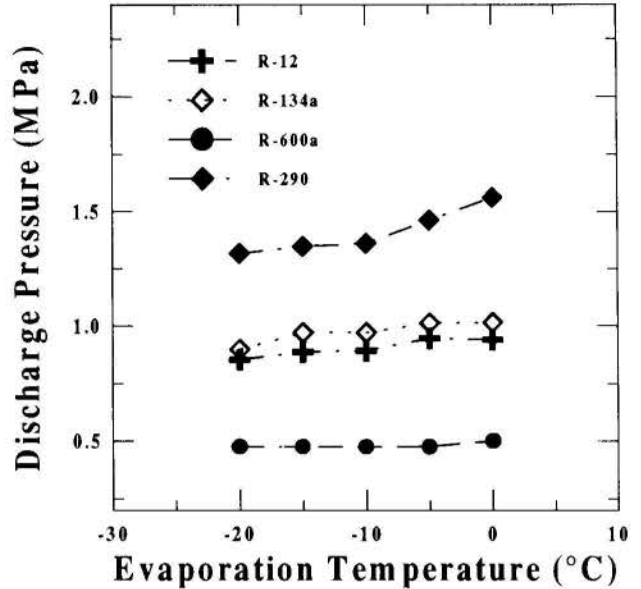


Figure 8 - Compressor discharge pressure for medium evaporation temperatures.

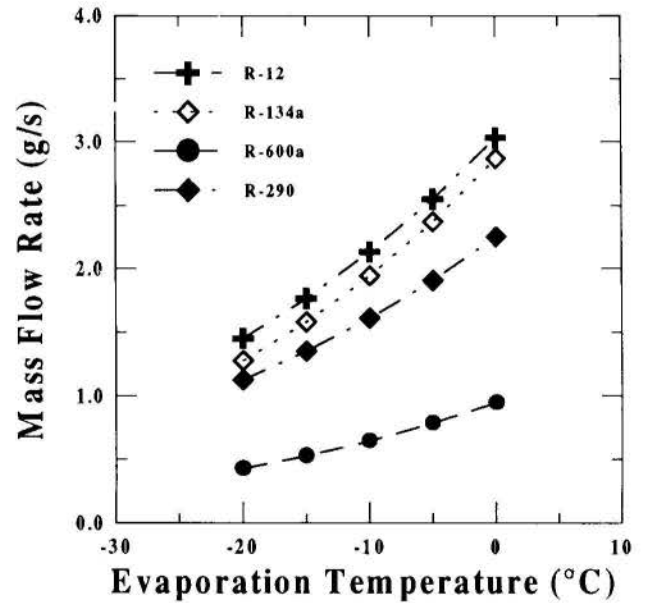


Figure 9 - Refrigerant mass flow rate for medium evaporation temperatures.

Figures 10 and 11 show comparisons of the refrigerating capacity for low and high evaporation temperatures. Figure 10 shows that, from the thermodynamic point of view, no significant changes were predicted between R502 and its likely substitutes: R22 and R290 (in Europe). A similar comparison is presented on Figure 11, for high evaporation temperatures. Two possible fluids were studied: R22 and R290. Results show that, at high evaporation temperatures, the refrigerating capacity



achieved by R290 (propane) is slightly lower than that obtained by R22.

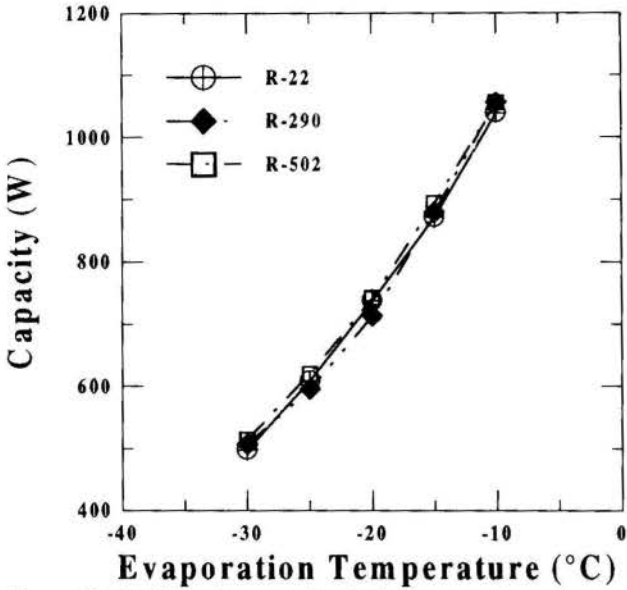


Figure 10 - Refrigerating capacity for low evaporation temperatures.

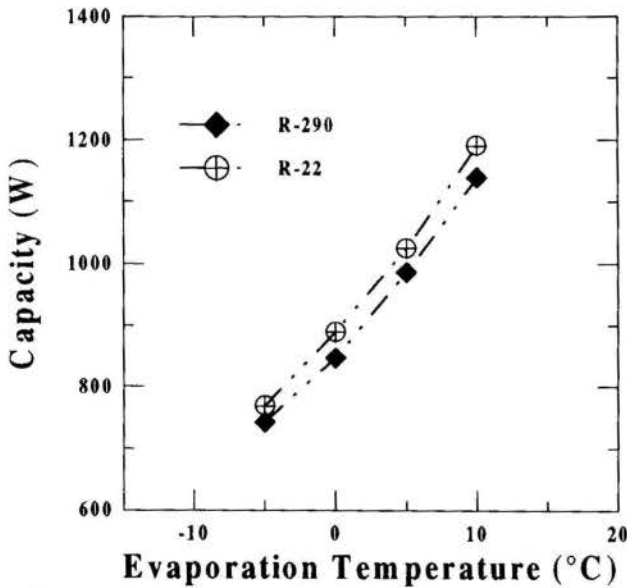


Figure 11 - Refrigerating capacity for high evaporation temperatures.

### Equipment redesign procedure

Concentrating on the medium evaporation temperature range, results of figure 6 have shown that modifications to the condensing unit characteristics are necessary, if the same capacity is to be maintained with the new refrigerants. In this section, a redesign evaluation is carried out. For this purpose, two basic steps are proposed:

I. Present the predicted results in a non-dimensional way. Refrigerating capacity, energy consumption and discharge pressure ratios are defined, relating the predicted values of these quantities for the new refrigerant with those obtained for the unit running on conventional R12 ( $X_{\text{alternative}}/X_{\text{R12}}$ , where  $X$  is either one of the performance parameters). The ratios are obtained by performing the simula-

tion model for exactly the same conditions with otherwise different refrigerants.

II. Modify system characteristics so that the capacity ratio approaches unity (i.e., same refrigerating capacity). This objective can be achieved by using one (or a combination) of the alternatives below:

- i) Change the condenser heat transfer area (practice shows that this procedure affects the discharge pressure directly);
- ii) Alter the electric motor velocity, thus modifying the compressor throughput - see, for example, Ramussen (1996).
- iii) Modify the compressor swept volume. As in (ii), the compressor mass flow rate will be altered.

A first example of this procedure is shown in figures 12 and 13, where propane (R290) is compared to R12. Only the compressor displacement was altered. Figure 12 indicates that, to provide the same refrigerating capacity, the propane compressor displacement would have to be reduced to somewhere between 40% and 50% of the original displacement, for R12. Values in figures 12 to 15 represent the compressor displacement expressed as a percent fraction of the original value. For the particular unit under study, the objective (same capacity) was achieved using approximately 45% of the original cylinder swept volume. This reduction represents an even lower mass flow rate (figure 13). Steimle (1994) shows that propane systems, in substitution to R12, have a lower refrigerant inventory. This is of particular interest when dealing with flammable fluids. Figure 12 also shows that the capacity ratio is fairly constant over the entire range of the evaporation temperature, which means that the modified unit will keep, approximately, the same original capacity over a wide range of evaporating temperatures.

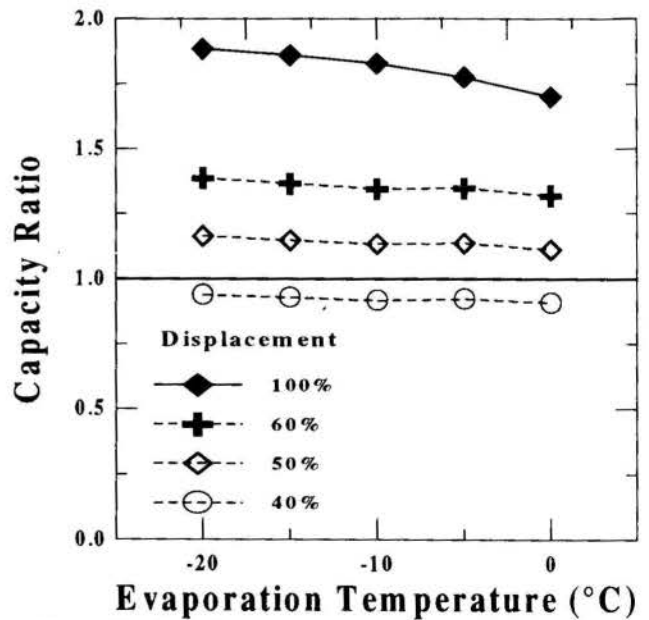


Figure 12 - Capacity ratio against evaporation temperature (R290 vs. R12).

Another study was carried out for R600a (figures 14 and 15). Similar conclusions as above can be drawn, now for a compressor of greater swept volume (120% of the original cylinder volume). This value still represents a lower mass flow rate (figure 15).

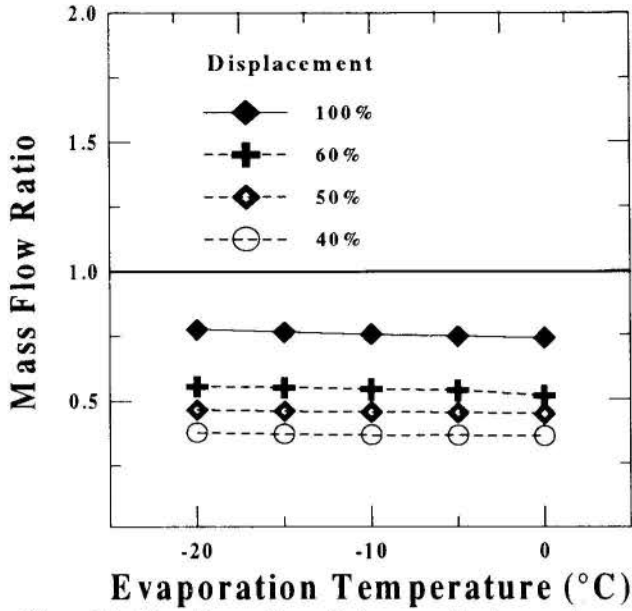


Figure 13 - Mass flow ratio against evaporation temperature (R290 vs. R12).

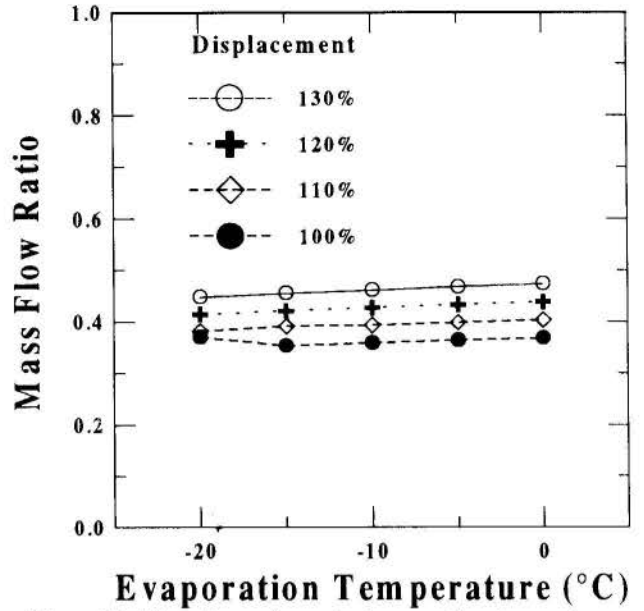


Figure 15 - Mass flow ratio against evaporation temperature (R600a vs. R12).

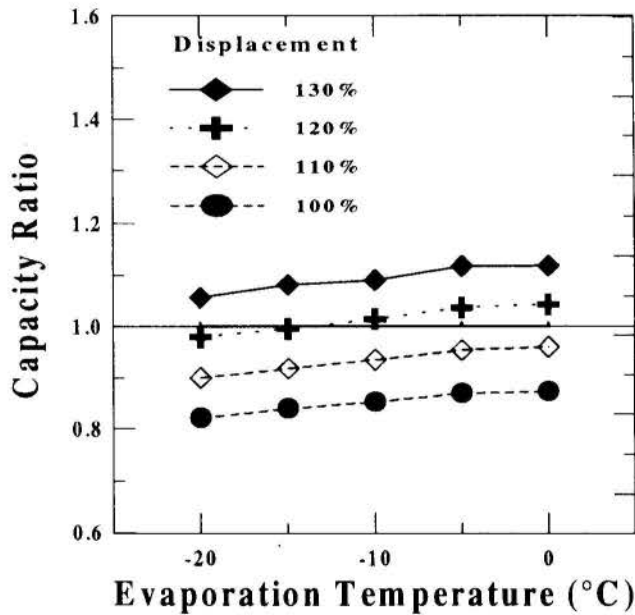


Figure 14 - Capacity ratio against evaporation temperature (R600a vs. R12).

#### CONCLUDING REMARKS

The main objective of this work was to present an example of the use of the simulation model as a design tool. An extensive validation of the model was also included.

Some theoretical comparisons can be found in the literature, even though they do not account for as much of the internal details of the condensing unit (coil geometry, line dimensions, compressor internal parameters, electric motor efficiency, to name but a few) as it has been done in the present work.

The study concentrated on pure fluids, even though it should be extended to mixtures, which have been tested as alternatives to R22 and R502 (Domansky and Didion, 1993).

#### ACKNOWLEDGEMENTS

Thanks are due to Tecumseh Brasil for the financial support. The authors are also indebted to CAPES and CNPq for providing scholarships.

#### REFERENCES

- Baskin E. and Perry R. B., The Performance of Hydrocarbons in a Household Refrigerator/freezer, The International Refrigeration Conference at Purdue, pp. 237-244, July 1994.
- Baz P., Meyersen K. and Legatis D., "Hydrocarbon Technology", The Use of Hydrocarbons as Foaming Agents and Refrigerants in Household Refrigerators, GTZ year book 95, 1995.
- Camporese R., Bobbo S., Rozza F., Hydrocarbons as Substitutes for Halogenated Refrigerants in Refrigerating systems, The International Refrigeration Conference at Purdue, pp. 231-236, July 1994.
- Chen S., Judge J. F., Groll E. A., Radermacher R., Theoretical Analysis of Hydrocarbon Mixtures as a Replacement for HCFC-22 for Residential Use, The International Refrigeration Conference at Purdue, pp. 225-230, July 1994.
- Cohen R. and E.A. Groll, Status of Refrigerant Compressors in Light of CFC Substitutes, III Iberian American Congress of Air Conditioning and Refrigeration, Vol. 1, pp. 37-46, Brazil, 1995.
- Domansky P. A. and Didion D. A., Theoretical Evaluation of R22 and R502 Alternatives, Final report, DOE/CE/23810-7, National Institute of Standards and technology, MD, USA, January 1993.
- Douglas J. D., Braun J. E., Tree D. R., Trade-off between Flammability and Performance of Hydrocarbon/flame Suppressant Mixtures as Refrigerants, 19th International Congress of Refrigeration, Den Hagen, Holland, vol. IVa, pp 155-162, August 1995.

IIR, Informatory Note 8, The Environmental Impact of the Molecules used as Refrigerants, International Institute of Refrigeration, Paris, France, 1992.

IIR, Informatory Note 9, Replace R22? When and How?, International Institute of Refrigeration, Paris, France, 1993.

IIR, Informatory Note 10, Refrigerant Mixtures, International Institute of Refrigeration, Paris, France, 1994.

James, R. W. and Missenden, J. F., The Use of Propane in Domestic Refrigerators, International Journal of Refrigeration, Vol. 15 No 2, 1992.

Kruse H., European Development in Substituting CFC and HCFC Refrigerants, III Iberian American Congress of Air Conditioning and Refrigeration, Vol. 1, pp. 47-66, Brazil, 1995.

Motta S. Y., Quintella M., Pereira R. H., Braga S. L., Parise J. A. R. and Pereira, E.A.G., Performance Analysis of Air Cooled Condensing Units, 19th International Congress of Refrigeration, Den Hagen, Holland, vol. IIIa, pp 395-402, August 1995.

Nielsen O. R. and Schreiber J., Propane as Refrigerant in Commercial Refrigeration - an Example in Practice, 19th International Congress of Refrigeration, Den Hagen, Holland, vol. IVb, pp 933-937, August 1995.

Nowotny S., Conversion of Refrigerators and Freezers Manufactured in Developing Countries to the Application of Environmental Benign Refrigerants and Foam Blowing Agents, 19th International Congress of Refrigeration, Den Hagen, Holland, vol. IVb, pp. 939-946, August 1995.

Parise J. A. R., Braga S. L., Motta S. Y., Quintella M. and Pereira R. H., Estudo Técnico Relativo à Simulação do Desempenho de Unidades Condensadoras, Convênio de Cooperação e Intercâmbio Científico e Tecnológico SICOM/FPLP/ PUC-Rio, Fevereiro de 1995.

Ramussen, B.D., Small Variable Speed Hermetic Reciprocating Compressors for Domestic Refrigerators, 1996 International Compressor Engineering Conference at Purdue, vol I, pp. 49-54, West Lafayette, Indiana, July 1996.

Steimle F., Tendencies in CFC Development, International Conference "CFCs The day after", pp. 3-10, Padova - Italy, 1994.



**PERFORMANCE DE UM SISTEMA FRIGORÍFICO COM BANCO DE GELO PARA CONDICIONAMENTO DE AR**



Dênio Lemos Panissi

Eli Silva

Manuel da Silva Valente de Almeida

Departamento de Mecânica - Escola Federal de Engenharia de Itajubá  
Av. PS, 1303 - CEP 37500-000 - Itajubá - MG - Brasil

SUMÁRIO

*O trabalho consiste na simulação computacional de um sistema de condicionamento de ar acoplado a um banco de gelo. A simulação é realizada, com base no processo termodinâmico de equilíbrio quase estático, sobre os principais componentes do sistema: compressor, condensador, evaporador, válvula de expansão termostática, torre de resfriamento de contra-corrente, válvula de mistura de três vias, fan-coil e banco de gelo. Os resultados obtidos por essa simulação proporcionam o levantamento da performance do sistema.*

INTRODUÇÃO

Em geral, os sistemas de ar condicionado de edifícios comerciais não operam com 100% de sua capacidade, durante o ciclo diário de refrigeração. A carga de ar condicionado atinge seu pico, no período da tarde, quando as temperaturas do meio externo são mais elevadas, causando pontas de demanda de energia elétrica. Assim, a capacidade total de uma central frigorífica e a potência elétrica demandada são solicitadas somente por algumas horas.

As concessionárias públicas de energia elétrica taxam os consumidores comerciais, conforme sua maior demanda e a energia consumida, durante o horário de ponta (das 17 às 22 horas, de segunda à sexta-feira), tem uma tarifa maior.

A termoacumulação de frio é um método para nivelamento da potência demandada, ou ainda, para deslocar o consumo total ou parcial de energia elétrica para os horários cuja tarifa elétrica horo-sazonal é menos elevada.

Neste trabalho, apresenta-se a simulação de um sistema operando com armazenagem parcial e prioridade para o chiller.

DEFINIÇÃO DA INSTALAÇÃO SIMULADA

A instalação foi definida em função da estratégia adotada de armazenagem parcial com prioridade para o chiller. Nesta disposição, o chiller trabalha com maior capacidade e eficiência, porém a recuperação do frio armazenado é reduzida. Os tamanhos do chiller e banco de gelo são menores, resultando em um menor custo de investimento na instalação, mas a redução da potência demandada não é maximizada. (McCraken, 1984), (Rawlings, 1985), (Chiachia, 1993), (Simmonds, 1994).

Esquema da Instalação. A Fig.1 mostra uma unidade de refrigeração acoplada a um banco de gelo, operando com prioridade para o chiller (ASHRAE, 1987) e a Fig.2 apresenta a disposição dos equipamentos no chiller.

Equipamentos. Os equipamentos constituintes da instalação que foram simulados são os seguintes:

- torre de resfriamento de contra-corrente;
- compressor a pistão;
- condensador do tipo carcaça e tubo (shell and tube);
- evaporador do tipo seco, carcaça e tubo (shell and tube);
- válvula de expansão termostática de equalização interna;
- válvula de mistura modulante de três vias servomotorizada (automática);
- válvula de desvio modulante de três vias servomotorizada (automática) e
- banco de gelo do tipo tanque e trocador de calor tubular interno.

- evaporador do tipo seco, carcaça e tubo (shell and tube);
- válvula de expansão termostática de equalização interna;
- válvula de mistura modulante de três vias servomotorizada (automática);
- válvula de desvio modulante de três vias servomotorizada (automática) e
- banco de gelo do tipo tanque e trocador de calor tubular interno.

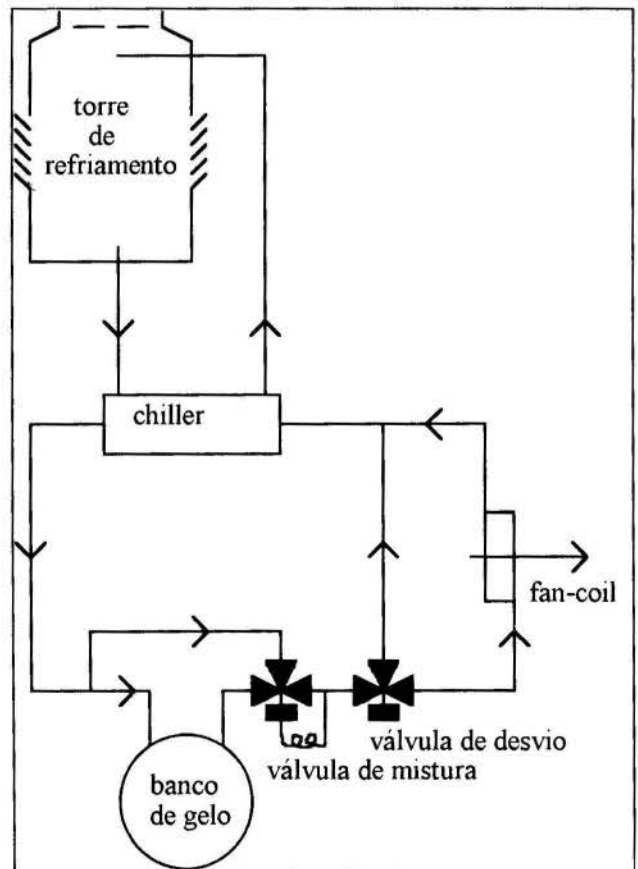


Figura 1 - Esquema da instalação simulada



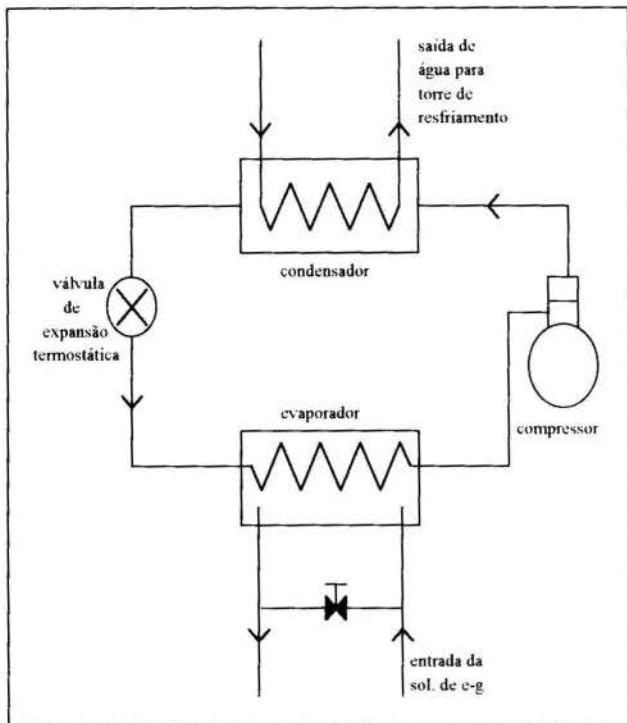


Figura 2 - Esquema do Chiller

#### FUNCIONAMENTO DO SISTEMA

O ciclo de funcionamento para um sistema com armazenagem parcial, operando com prioridade para o "chiller", divide-se em duas fases: armazenagem e utilização do frio.

**Armazenagem do frio.** O período de formação de gelo, no banco, acontece comumente à noite, ocasião em que o ambiente objeto do condicionamento de ar, em geral, encontra-se não necessitando de refrigeração. Assim, neste período, a capacidade do "chiller", que em um sistema convencional (sem banco de gelo) ficaria ociosa, é utilizada para fazer termoacumulação.

**Utilização do frio armazenado.** No processo de "queima de gelo", o que geralmente se realiza durante o dia, a solução aquosa de etileno-glicol aquecida pelo fan-coil chega ao chiller onde é pré-resfriada. Em seguida, a válvula de mistura permite que uma parte desse fluido sofra um novo resfriamento passando através do banco de gelo. Essa válvula é ajustada para que a temperatura de mistura das soluções vindas do chiller e banco de gelo se situem em 7°C que é uma temperatura desejável para entrada no fan-coil.

#### MODELAGEM DO SISTEMA

**Banco de gelo.** A Fig.3 ilustra o esquema do dispositivo usado como modelo para o banco de gelo.

Este dispositivo é constituído de um tanque que abriga no seu interior trocadores de calor tubulares imersos em água. Através dos tubos flui uma solução de água e anti-congelante, comumente etileno-glicol inibido.

O gelo fica armazenado no lado externo dos tubos, sendo produzido e consumido no sentido radial de dentro para fora.

Conforme mostra a Fig.4, o modelo matemático proposto para o banco de gelo consiste de um tubo horizontal imerso em um volume de água. Através do tubo, flui uma solução aquosa de

etileno-glicol.

No período de congelamento, a solução aquosa de etileno-glicol entra no tubo com uma temperatura abaixo de zero grau Celsius e ao longo do tubo vai se aquecendo devido as trocas de calor com a água no tanque. Dependendo das condições do momento, é possível que se tenha formação de gelo no início do tubo e no restante do mesmo, apenas resfriamento da água.

Na fase de descongelamento, a solução aquosa de etileno-glicol entra no tubo com uma temperatura acima de zero grau Celsius e ao longo do tubo vai se resfriando, devido as trocas de calor com o exterior do tubo. No decorrer desse descongelamento, pode-se encontrar uma parte do tubo coberta com gelo e outra apenas com água. Na região onde não houver gelo para se fundir poderá ocorrer um aquecimento da água no tanque e onde houver gelo o descongelamento prosseguirá.

Uma vez que o processo não é uniforme ao longo do tubo, divide-se o comprimento total dele em elementos de comprimento  $\Delta L$ , e faz-se um estudo da troca de calor, como se cada elemento fosse um pequeno trocador de calor, ligado em série aos demais. Esta divisão permite simular as possíveis situações que ocorrerão ao longo do tubo, durante os processos de congelamento ou descongelamento.

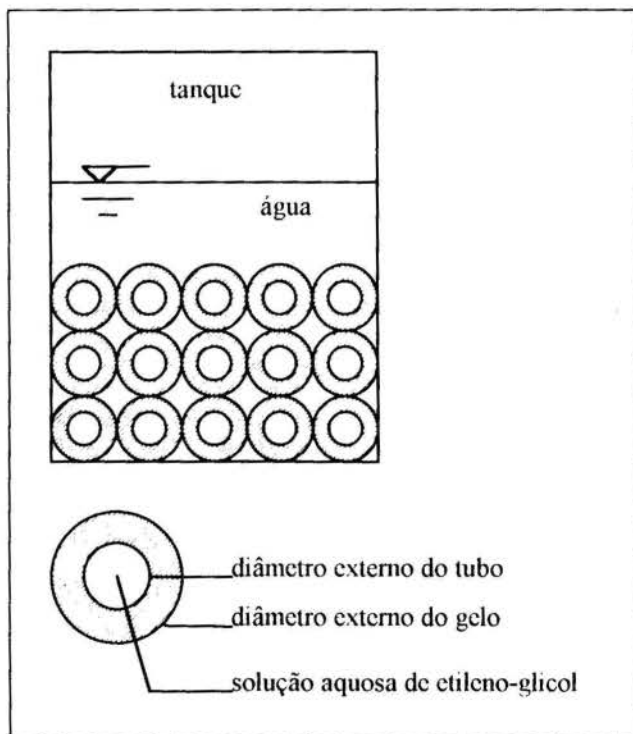


Figura 3 - Esquema teórico do banco de gelo

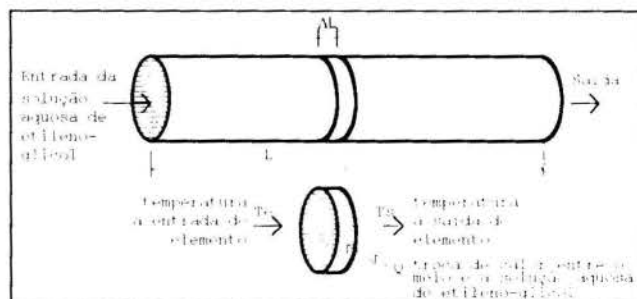


Figura 4 - Modelo matemático do banco de gelo

O modelo matemático do banco de gelo considera cinco possíveis situações ocorrendo ao longo do tubo: resfriamento da água sem formação de gelo, congelamento, descongelamento, aquecimento, recongelamento (esta situação ocorre quando um novo ciclo de congelamento se inicia e nem todo o gelo foi consumido no ciclo anterior de descongelamento).

Chiller e torre de resfriamento. A modelagem matemática de cada equipamento foi desenvolvida conforme estudos realizados por Almeida (1982), Massafelli (1991) e Panissi (1995-a).

Com o intuito de se obter resultados próximos à realidade, os modelos foram elaborados e alimentados, sempre que possível, com os dados encontrados em catálogos de fabricantes.

As demais hipóteses, equações adotadas na modelagem do sistema e o programa computacional para a simulação podem ser encontrados na referência Panissi (1995-a e 1995-b).

## SIMULAÇÃO

A simulação do sistema é realizada, com base no processo termodinâmico de equilíbrio quase estático.

As condições iniciais do sistema são as seguintes:

- banco de gelo totalmente descongelado e
- temperatura da água do banco de gelo à 5 (°C).

Os agentes externos que interferem no sistema são:

- temperatura de bulbo úmido do ar à entrada da torre de resfriamento e
- carga térmica no fan-coil.

A temperatura de bulbo úmido simulada varia senoidalmente com período de 24 horas, conforme Fig.5. Seu valor mínimo é 23 (°C) e o máximo de 25 (°C), ocorrendo às 15 horas (no primeiro período).

A Fig.6 apresenta o perfil da carga térmica absorvida pelo fan-coil. A primeira hora de carga térmica corresponde ao período de pré-resfriamento do ambiente condicionado. O valor máximo da carga térmica no decorrer do dia é 317 (kW).

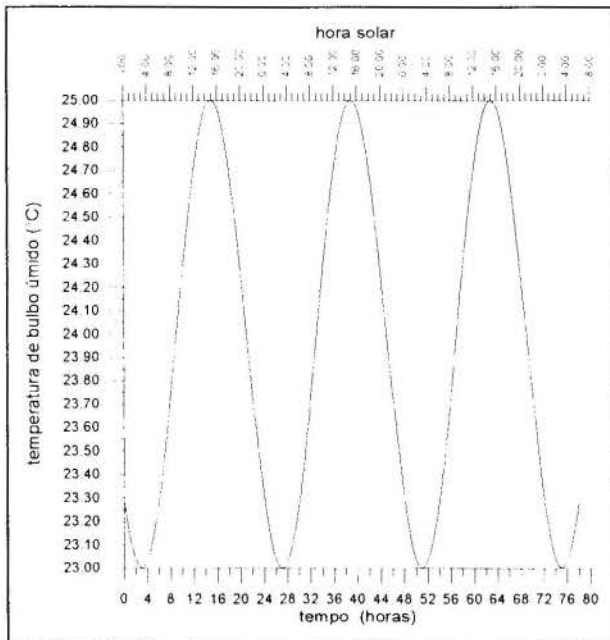


Figura 5 - Temperatura de bulbo úmido

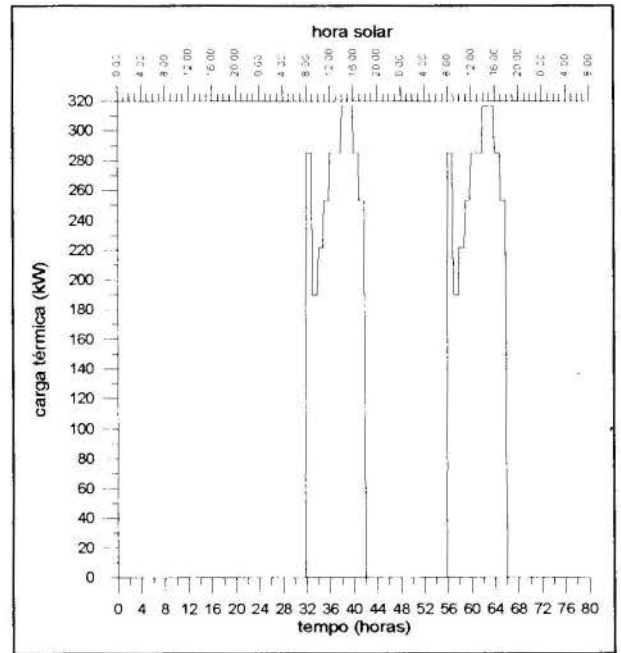


Figura 6 - Carga térmica

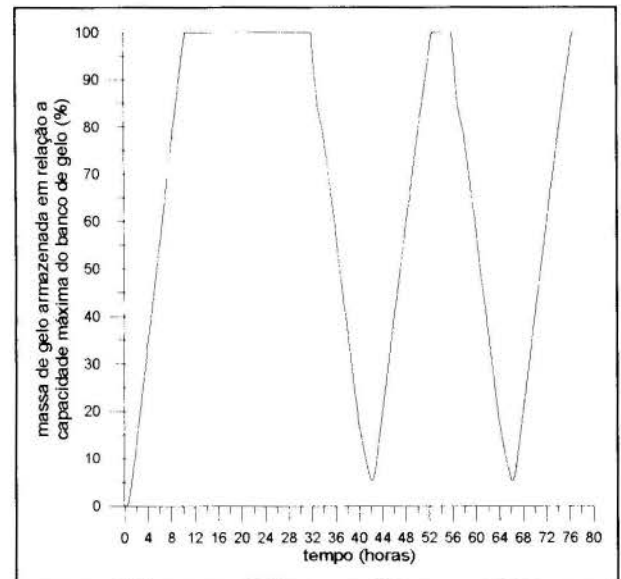


Figura 7 - Massa de gelo armazenada

A Fig.7 apresenta a massa de gelo armazenada em relação à capacidade máxima do banco.

No início, o banco de gelo encontra-se totalmente descongelado e com água levemente aquecida com temperatura de 5 (°C).

O primeiro congelamento do banco começa em 0 (zero) hora. Após 20 minutos de resfriamento da água no seu interior, começa a formação de gelo. O banco atinge a capacidade máxima de armazenagem, 10 horas após o início do processo.

No período de tempo, compreendido entre 10 e 32 horas, todo o sistema frigorífico se mantém desligado e na ausência de fluxo de calor, através do banco de gelo, este conserva a energia armazenada.

No período entre 32 a 42 horas, ocorre a remoção de carga térmica do fan-coil. Neste intervalo, através do banco, flui a solução de etileno-glicol aquecida, promovendo o descongelamento.

Ao final deste período, restam aproximadamente 5 (%) da massa de gelo inicial.

No período seguinte, compreendido entre 42 e 52 horas, o sistema frigorífico volta a retirar calor do banco de gelo, promovendo o recongelamento, até este atingir 100 (%) de sua capacidade de armazenagem. Desta vez, o congelamento é parcial, pelo fato de terem sobrado 5 (%) da massa de gelo do ciclo anterior.

Entre 52 e 56 horas, o sistema frigorífico permanece desligado.

No tempo restante, de 56 a 78 horas, ocorre um descongelamento, um recongelamento parcial e uma parada do sistema frigorífico, idêntico ao período anterior (de 42 a 56 horas).

A Fig.8 apresenta as temperaturas de entrada e saída da água na torre de resfriamento e também a temperatura de bulbo úmido do ar à entrada da mesma.

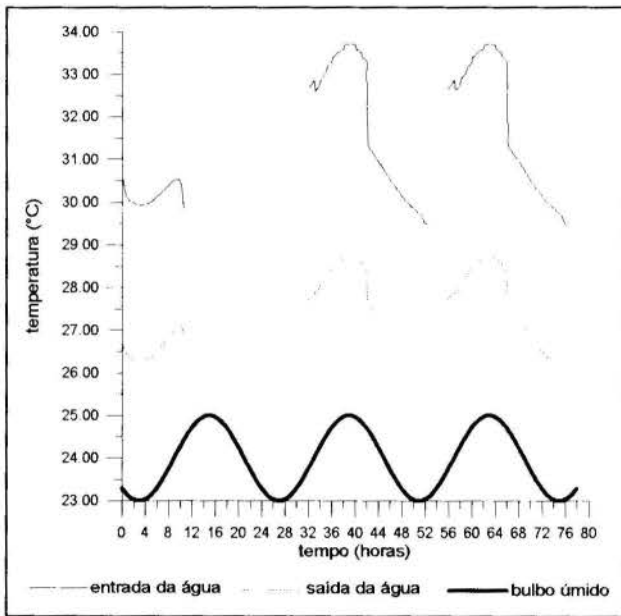


Figura 8 - Temperaturas na torre de resfriamento

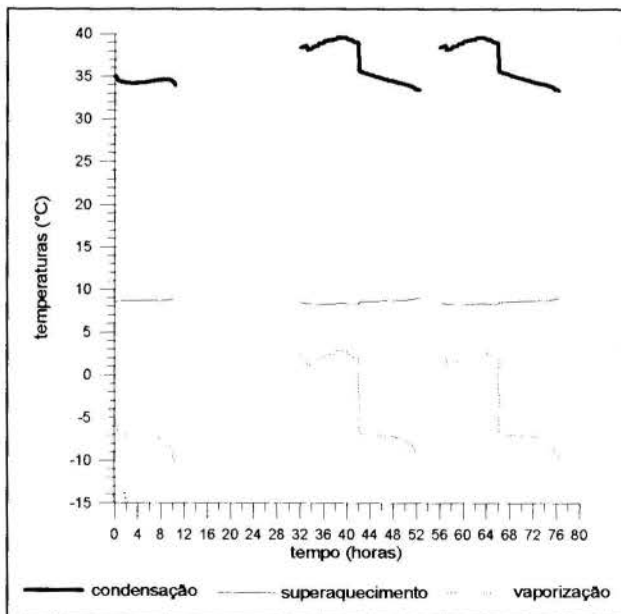


Figura 9 - Temperaturas do refrigerante no ciclo

A Fig.9 apresenta as temperaturas de condensação, vaporização e o superaquecimento proporcionado pela válvula de expansão.

são termostática.

As temperaturas de condensação e vaporização sofrem uma queda, durante os ciclos de congelamento e recongelamento, enquanto que o superaquecimento permanece praticamente constante.

A Fig.10 apresenta os fluxos de calor no evaporador, condensador e também a potência teórica do compressor

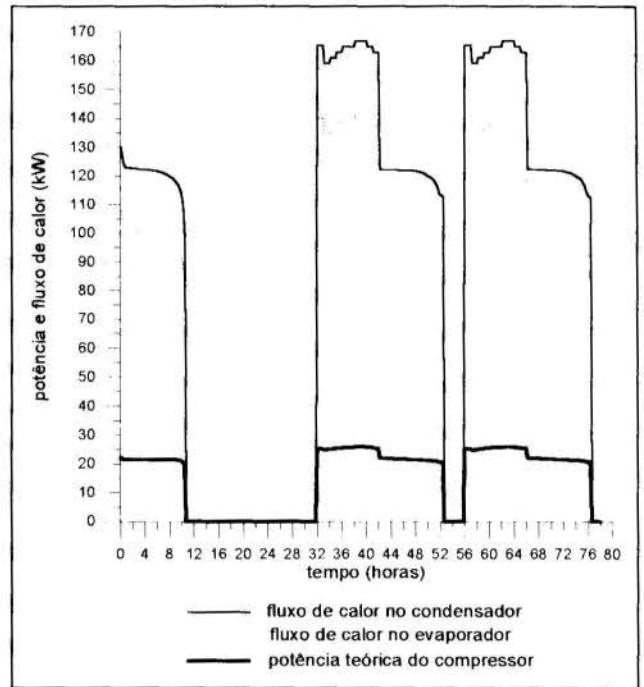


Figura 10 - Fluxos de calor e potência

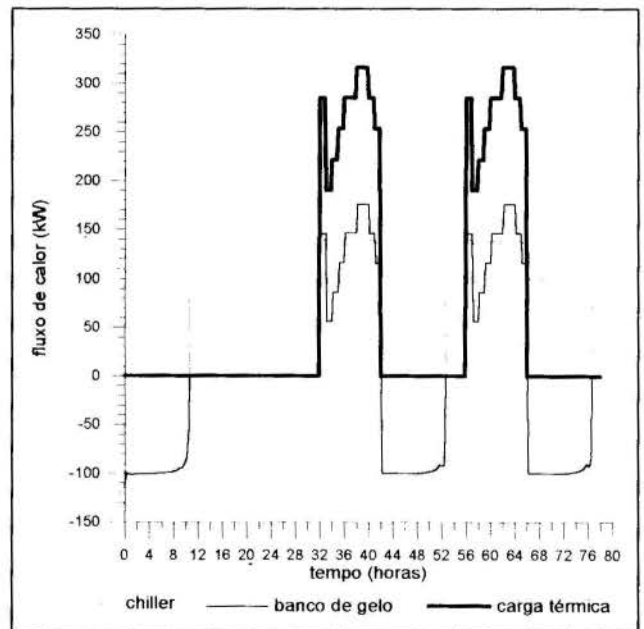


Figura 11 - Balanço do fluxo de calor

A Fig.11 apresenta as contribuições do chiller e banco de gelo na remoção da carga térmica, absorvida pelo fan-coil. Também apresenta o fluxo de calor no chiller e banco de gelo, durante os ciclos de congelamento e recongelamento parcial.

Durante a remoção da carga térmica, podemos observar que

a contribuição do chiller sofre pouca influência das variações da carga térmica, uma vez que o chiller já está operando, próximo ao limite de sua capacidade máxima. Enquanto isso, a contribuição do banco de gelo sofre grandes alterações sendo causadas, principalmente, pela vazão da solução de etileno-glicol, bastante variável, que por ele passa.

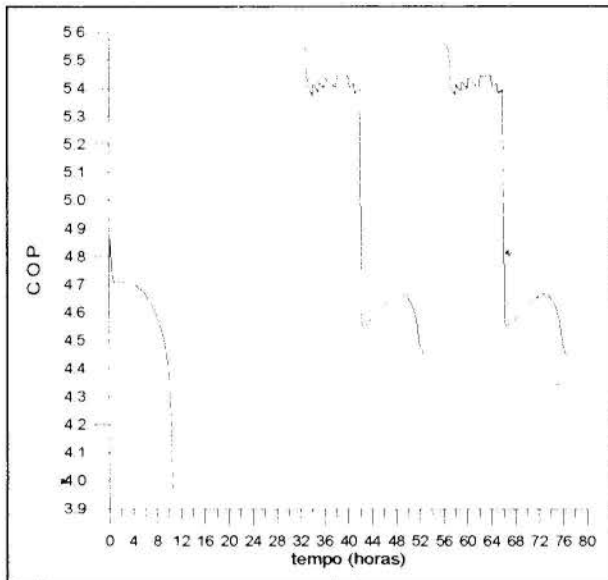


Figura 12 - Coeficiente de performance da unidade frigorífica

A Fig.12 apresenta o coeficiente de performance da unidade frigorífica.

Nos ciclos de remoção da carga térmica, devido à alta temperatura de vaporização, o COP apresenta valores mais elevados, do que os dos ciclos de congelamento e recongelamento parcial.

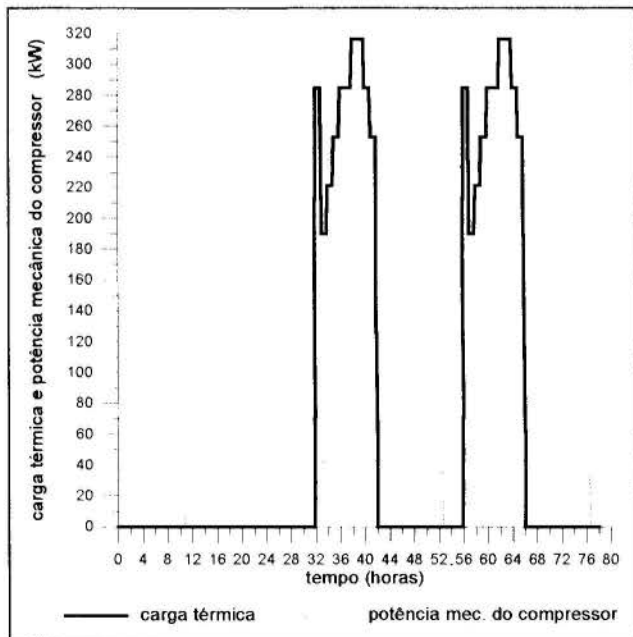


Figura 13 - Carga térmica e a potência mec. no compressor

A Fig.13 apresenta a carga térmica e a potência mecânica no compressor.

Enquanto a carga térmica sofre grandes alterações, ao longo do dia, a potência do compressor permanece praticamente nivelada.

## CONCLUSÃO

No presente trabalho, apresentou-se a simulação de um sistema operando com armazenagem parcial e prioridade para o chiller. Através das figuras, nota-se boa concordância entre os resultados obtidos e aqueles esperados. Contudo, para a completa validação do modelo, ainda falta um levantamento experimental do banco de gelo, uma vez que os dados obtidos da literatura técnica e dos catálogos de fabricantes são insuficientes para suprir o modelo, de modo a permitir uma análise comparativa de performances.

## REFERÊNCIAS

- Almeida, M. S. V., 1982, "Modelamento Matemático de um Sistema de Refrigeração por Compressão em Regime Transitório, com Análise Comparativa de Dois Tipos de Controle de Temperatura", Tese de Mestrado, UNICAMP.
- ASHRAE Handbook, 1987, "HVAC Systems and Applications".
- Chiachia, A., 1993, "Sistema de Termoacumulação em Banco de Gelo, Alpina - Calmac", Curso ABRAVA de Divulgação Tecnológica.
- MacCracken, C. D., 1984, "Design Considerations for Modular Glycol Ice Storage Systems", ASHRAE Transactions, Vol. 90, Part 1B, pp. 374-386.
- Massafelli, N., 1991, "Análise de Resfriamento de Instalações Frigoríficas para Carne Bovina", Tese de Mestrado, EFEI.
- Panissi, D. L., 1995-a, "Simulação de um Sistema de Ar Condicionado com Termoacumulação", Tese de Mestrado, EFEI.
- Panissi, D. L., 1995-b, "Simulação de Banco de Gelo em Termoacumulação", III Congresso Ibero-Americano de Ar Condicionado e Refrigeração, Vol. 2, pp. 271-278.
- Rawlings, L. K., 1985, "Ice Storage System Optimization and Control Strategies", ASHRAE Transactions, Vol. 91, Part 1B, pp. 12-23.
- Simmonds, P., 1994, "A Comparison of Energy Consumption for Storage Priority and Chiller Priority for Ice-Based Thermal Storage Systems", ASHRAE Transactions, Vol. 100, Part 1, pp. 1746-1753.

## ABSTRACT

The dynamic simulation of an ice bank for a system operating with partial storage (with priority for the chiller) is presented.

The overall system dynamic equilibrium formulation is that of a thermodynamic quasi-static equilibrium process.

The simulation is done over the main components of the system: reciprocating compressor, shell-and-tube water-cooled condenser, shell-and-tube water-cooling evaporator, thermostatic expansion valve, counterflow cooling tower, automatic temperature modulation three way valve and brine-type solid ice builder.

The simulation results obtained are then used for system performance analysis.





## TERMOACUMULAÇÃO: SIMULAÇÃO E EXPERIMENTAÇÃO

Osvaldo J. Venturini  
 Manuel da Silva Valente de Almeida  
 Eli Silva  
 Departamento de Mecânica  
 Escola Federal de Engenharia de Itajubá  
 37500-000 - Itajubá - MG - Brasil



### RESUMO

*Apresenta-se, neste trabalho, um método para simulação computacional de sistemas de ar condicionado com termoacumulação de frio, utilizando banco de gelo com expansão direta. O método desenvolvido é baseado no processo termodinâmico do equilíbrio quase-estático, e utiliza dados de performance, fornecidos pelo fabricante, para cada equipamento do sistema.*

### INTRODUÇÃO

O uso da termoacumulação de frio, a partir de banco de gelo, em sistemas de condicionamento de ar, tem aumentado significativamente, em virtude dos esforços para redução dos gastos com energia elétrica (Chiachia et al., 1993). Consequentemente, diversos sistemas para produção, armazenamento e consumo de gelo tem sido desenvolvidos e estudados.

Os sistemas de termoacumulação de frio, utilizando banco de gelo, podem ser separados em duas categorias básicas: sistemas de acumulação com expansão direta e sistemas de acumulação indireta de gelo (ASHRAE, 1987).

Os sistemas de acumulação de gelo com expansão direta são constituídos de um tanque, dentro do qual está imerso em água o evaporador de expansão direta da unidade frigorífica. Assim, o gelo é produzido e armazenado diretamente sobre os tubos do evaporador.

A principal característica dos sistemas de acumulação indireta, é a existência de um fluido intermediário, geralmente uma solução aquosa de etileno-glicol, que após ter sido resfriada no evaporador da unidade frigorífica, pode circular através do tanque de armazenamento de gelo.

Neste trabalho é desenvolvido um método para a simulação de sistemas de acumulação de gelo com expansão direta, onde cada componente do sistema (compressor, condensador, válvula de expansão e torre de resfriamento) é modelado separadamente, a partir de dados de performance obtidos em catálogos de fabricantes.

### SISTEMA DE ACUMULAÇÃO COM EXPANSÃO DIRETA

Nos sistemas de acumulação de gelo com expansão direta, o tanque de armazenamento e o evaporador da unidade frigorífica formam um só equipamento, e estão termodinamicamente acoplados (Strand, 1995), portanto é conveniente modelá-los simultaneamente.

A modelagem do banco de gelo consiste na determinação dos fluxos de calor através dos tubos do evaporador e, a partir destes, da quantidade de gelo formada ou consumida e a variação de temperatura da água no tanque, quando for o caso (Halász, 1979).

A análise dos fluxos de calor nos tubos do evaporador, deve considerar que o processo de transferência de calor não é uniforme ao longo do comprimento do mesmo ( $L$ ). Portanto, este será dividido em seções de pequeno comprimento ( $\Delta L$ ), sobre as quais é efetuado o estudo da transferência de calor (Panissi, 1995).

Neste modelo são consideradas três situações: resfriamento sem formação de gelo, formação de gelo e consumo de gelo. Para a primeira situação, o fenômeno da transferência de calor da água para o fluido frigorífico, pode ser dividido em duas etapas. A primeira etapa corresponde à transmissão de calor por convecção (natural ou forçada) da água para a superfície externa do tubo, sendo que este fluxo de calor ( $\dot{Q}_{ap}$ ) é dado pela Eq. (1), onde  $D_e$  é o diâmetro externo do tubo,  $T_a$  a temperatura da água no tanque,  $T_p$  a temperatura da superfície externa do tubo e  $\alpha_e$  é o coeficiente de convecção entre a água e o tubo.

$$\dot{Q}_{ap} = \alpha_e \cdot \pi \cdot D_e \cdot \Delta L \cdot (T_a - T_p) \quad (1)$$

Já o calor transferido da superfície externa do tubo, para o fluido frigorífico ( $\dot{Q}_{pf}$ ), que corresponde à segunda etapa, pode ser calculado pela Eq. (2), onde  $RT_1$  é o resistência térmica oferecida pela parede do tubo e pelo refrigerante, e  $T_o$  é a temperatura do refrigerante.

$$\dot{Q}_{pf} = \frac{(T_p - T_o)}{RT_1} \quad (2)$$

A variação da temperatura da água no tanque é dada pela Eq. (3), onde  $m_a$  é a massa de água no tanque,  $C_{p_a}$  é o calor específico da água,  $\Delta t_{tempo}$  é o intervalo de tempo considerado e  $\dot{Q}_t$  é a carga térmica.

$$\Delta T_a = \frac{(\dot{Q}_t - \dot{Q}_{ap})}{m_a \cdot C_{p_a}} \cdot \Delta t_{tempo} \quad (3)$$

Da mesma forma que na situação anterior, durante a fase de congelamento, a transferência de calor da água para o refrigerante será dividida em duas etapas: transferência de calor da água para a superfície da camada de gelo e transferência de calor da superfície da camada de gelo para o refrigerante, sendo que estes fluxos de calor são dados pelas Eq. (4) e Eq. (5), respectivamente.

$$\dot{Q}_{ag} = \alpha_e \cdot \pi \cdot D_g \cdot \Delta L \cdot (T_a - T_{sg}) \quad (4)$$

$$\dot{Q}_{gf} = \frac{(T_{sg} - T_o)}{RT_2} \quad (5)$$

Na Eq. (4)  $RT_2$  é a resistência térmica oferecida pela camada de gelo, pela parede do tubo e pelo refrigerante. É importante observar ainda que a temperatura da superfície da camada de gelo ( $T_{sg}$ ) se mantém a 0 °C.

A variação do diâmetro externo do gelo ( $\Delta D_g$ ), em um intervalo de tempo, é dada em função do calor latente removido da água. Sendo que este é dado pela diferença entre o calor transferido da superfície da camada de gelo para o refrigerante, e o calor transferido da água para a superfície da camada de gelo, logo:

$$\Delta D_g = \frac{2 \cdot (\dot{Q}_{gf} - \dot{Q}_{ag})}{\pi \cdot \rho_g \cdot \Delta L \cdot D_g \cdot q'_g} \cdot \Delta t_{tempo} \quad (6)$$

A fase de consumo do gelo tem início quando a carga térmica for maior que o calor removido pelo refrigerante. Neste caso a massa de gelo consumida ( $mg$ ), em um intervalo de tempo, é dada em função da diferença entre a carga térmica e o calor removido pelo refrigerante, como indicado pela Eq. (7), onde  $q'_g$  é o calor latente de solidificação da água e  $\rho_g$  é a massa específica do gelo e  $\dot{Q}_o$  é a capacidade de refrigeração. Enquanto houver gelo sobre os tubos, a temperatura da água no tanque permanece constante.

$$mg = \frac{\dot{Q}_t - \dot{Q}_o}{q'_g} \cdot \Delta t_{tempo} \quad (7)$$

O escoamento do refrigerante no interior dos tubos do evaporador é caracterizado pela existência de duas regiões: na primeira região o refrigerante é vaporizado, recebendo calor da água à temperatura de saturação, e na segunda ele é superaquecido (Rahman et al., 1995). Assim, para a determinação da taxa de calor transferida para o refrigerante, devem ser usadas duas correlações para o coeficiente de convecção interno ( $\alpha_i$ ), uma para cada região. De acordo com Klimenco (1988), o coeficiente de convecção ( $\alpha_i$ ), para escoamento com mudança de fase, no interior de tubos, é dado pela Eq. (8).

$$\alpha_i = 0,087 \cdot \text{Re}_q^{0,6} \cdot \text{Pr}_l^{1/6} \cdot \left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{0,2} \cdot \left(\frac{k_v}{k_l}\right)^{0,09} \cdot \frac{k_l}{L'} \quad (8)$$

Na Eq. (8),  $\text{Re}_q$  é o número de Reynolds equivalente para escoamento bifásico,  $\text{Pr}$  é o número de Prandtl,  $\rho$  é a massa específica,  $k$  é a condutividade térmica e  $L'$  é a constante de Laplace, definida pela Eq. (9), onde  $\sigma$  é a tensão superficial do refrigerante e  $g$  é a aceleração da gravidade. Os índices  $l$  e  $v$ , que aparecem nestas equações se referem a fase líquida e a vapor, respectivamente.

$$L' = \sqrt{\frac{\sigma}{g \cdot (\rho_l - \rho_v)}} \quad (9)$$

Para o cálculo do coeficiente de convecção na região de superaquecimento, será utilizada a Eq. (10), que define o número de Nusselt (Rahman et al., 1995), onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido,  $\text{Re}$  é o número de Reynolds e  $f$  é o fator de atrito.

$$\text{Nu} = \frac{\text{Re} \cdot \text{Pr}}{X} \cdot \left(\frac{f}{8}\right) \cdot \left(\frac{\mu_l}{\mu_v}\right)^{0,25}$$

$$X = 1,07 + 12,7(\text{Pr}^{2/3} - 1) \cdot (f/8)^{1/2} \quad (10)$$

$$f = (1,82 \cdot \log(\text{Re}) - 1,64)^{-2}$$

## COMPRESSOR

O rendimento volumétrico, parâmetro básico para a análise do desempenho de compressores alternativos, varia em função das condições de operação do sistema. Portanto é difícil prever matematicamente o seu valor, mas levantamentos experimentais (Almeida e Massafeli, 1995) indicam que ele é, principalmente, uma função da relação de pressões ( $r_p$ ), isto é, da relação entre a pressão na descarga ( $P_d$ ) e a pressão na sucção ( $P_s$ ), sendo bem representado por um polinômio do 2º grau, como mostra a Figura 1, para um compressor operando com R-12.

A vazão mássica de refrigerante deslocada pelo compressor ( $\dot{m}_f$ ), pode ser calculada pela Eq. (11), onde  $\dot{V}_d$  é o deslocamento volumétrico do compressor,  $v_1$  é o volume específico do refrigerante à entrada do compressor e  $\eta_{VR}$  é o rendimento volumétrico real.

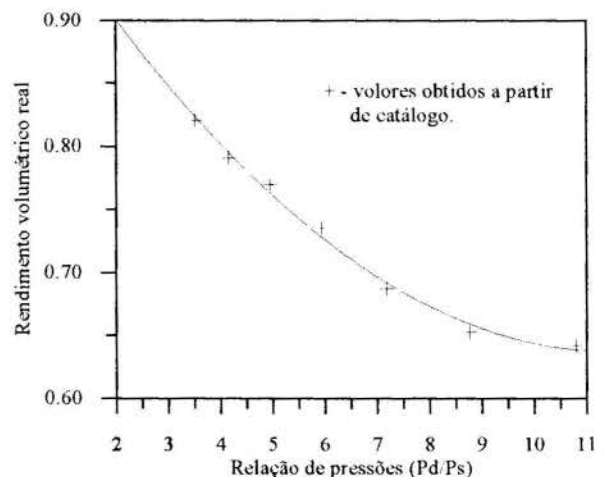


Figura 1 - Rendimento volumétrico real em função da relação de pressões

$$\dot{m}f = \frac{Vd \cdot \eta_{VR}}{v_1} \quad (11)$$

A capacidade de refrigeração é dada pela Eq. (12), onde  $h_4$  e  $h_1$  são as entalpias específicas do refrigerante na entrada e na saída do evaporador, respectivamente.

$$\dot{Q}_o = \dot{m}f \cdot (h_1 - h_4) \quad (12)$$

A potência real de eixo consumida pelo compressor é calculada a partir da vazão mássica de refrigerante e da variação de entalpia na compressão isentrópica, isto é, da diferença entre a entalpia específica do refrigerante na saída ( $h_2$ ) e na entrada ( $h_1$ ) do compressor, admitindo-se um rendimento global médio ( $\eta_g$ ).

$$\dot{W}_{eixo} = \frac{\dot{m}f \cdot (h_2 - h_1)}{\eta_g} \quad (13)$$

## CONDENSADOR

O condensador modelado neste trabalho é do tipo "shell and tube", com água por dentro dos tubos e refrigerante entre tubo e carcaça.

A rejeição total de calor em um condensador, inclui tanto o calor absorvido no evaporador como a potência equivalente do trabalho de compressão, e pode ser estimada por:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_c &= (AU)_c \Delta T_{ml} \\ \dot{Q}_c &= \dot{m}_a \cdot C_{p_a} \cdot (T_{s_a} - T_{e_a}) \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $(AU)_c$  é a condutância global de transferência de calor,  $\Delta T_{ml}$  é a diferença de temperatura média logarítmica,  $\dot{m}_a$  é vazão mássica de água de condensação,  $T_{s_a}$  e  $T_{e_a}$  são as temperaturas da água na saída e na entrada do condensador, respectivamente. Admitindo-se que as diferenças entre a temperatura do refrigerante e da água de resfriamento, em um condensador utilizado em refrigeração, são relativamente pequenas, a diferença de temperatura média logarítmica pode ser calculada por:

$$\Delta T_{ml} = T_c - \left( \frac{T_{s_a} + T_{e_a}}{2} \right) \quad (15)$$

onde  $T_c$  é a temperatura de condensação.

A partir das Eq. (14) e Eq. (15), após algumas simplificações, tem-se:

$$\dot{Q}_c = \frac{2 \cdot \dot{m}_a \cdot C_{p_a} \cdot (AU)_c}{(AU)_c + 2 \cdot \dot{m}_a \cdot C_{p_a}} (T_c - T_{s_a}) = F_{cond} (T_c - T_{s_a}) \quad (16)$$

Segundo Almeida e Massafeli (1995), o valor de  $F_{cond}$ , que aparece na Eq. (16), varia sensivelmente com a vazão de água de condensação. A Figura 2, mostra esta variação, a partir de dados obtidos de catálogo, para um condensador operando com R-12.

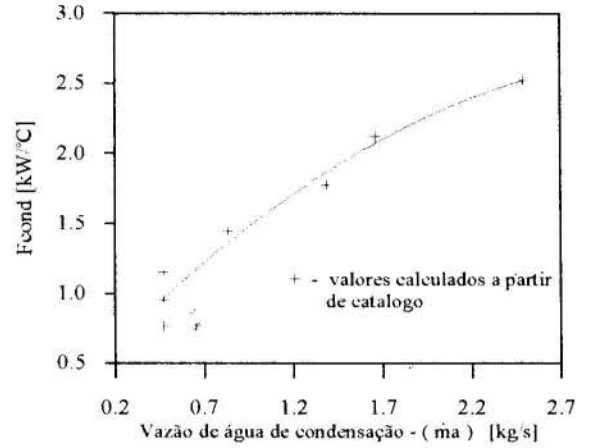


Figura 2 -  $F_{cond}$  em função da vazão de água de condensação.

## TORRE DE RESFRIAMENTO

Nas torres de resfriamento de contra corrente, equipamento aqui estudado, o ar escoava verticalmente para cima, em oposição a uma massa de água que flui para baixo, ocorrendo transferência simultânea de calor e massa, do fluxo de água para o fluxo de ar.

Para o cálculo da performance de um torre de resfriamento utiliza-se o Número de Unidades de Transferência (NTU). O NTU é função de características de projeto da torre de resfriamento, e das vazões de ar e água, pois elas controlam o coeficiente de convecção ( $\alpha_D$ ) e a área de troca de calor (A). O valor do NTU pode ser obtido da Eq. (17) (Stoecker e Jones, 1985), que resulta de um processo numérico, onde a torre de resfriamento é dividida em volumes diferenciais, realizando-se em seguida o somatório da diferença de entalpia média aritmética  $(h_i - h_{ar})_m$ , para cada incremento de volume em que é dividida a torre. Na Eq. (17)  $h_{ar}$  é a entalpia do ar,  $h_i$  é a entalpia do ar saturado na temperatura da água e  $\Delta T_a'$  é a variação da temperatura da água em um volume diferencial.

$$NTU = \frac{\alpha_D \cdot A}{C_{p_u} \cdot \dot{m}_a} = C_{p_a} \cdot \Delta T_a' \cdot \sum \frac{1}{(h_i - h_{ar})_m} \quad (17)$$

Para qualquer condição de operação da torre, o valor do NTU pode ser calculado, a partir da relação entre as vazões de água e ar (Massafeli, 1991), conforme mostra a Figura 3.

Durante a simulação da operação de uma torre de resfriamento, são conhecidos as vazões de ar e água e da temperatura da água na entrada da torre, e deseja-se determinar a temperatura da água na saída da torre. O procedimento para se fazer a previsão da temperatura da água na saída da torre não é direto, requerendo cálculos iterativos.

Como a temperatura da água na saída da torre não é conhecida, inicialmente estima-se o seu valor, e então determina-se um valor para o NTU. Se o NTU resultante for

maior que o NTU conhecido, isto é, maior que o NTU calculado a partir da vazões de ar e água, a temperatura da água na saída da torre deve ser aumentada, caso contrário a temperatura da água na saída da torre deve ser diminuída, efetuando-se em seguida novo cálculo do NTU. O procedimento pára quando o NTU calculado for aproximadamente igual ao conhecido.

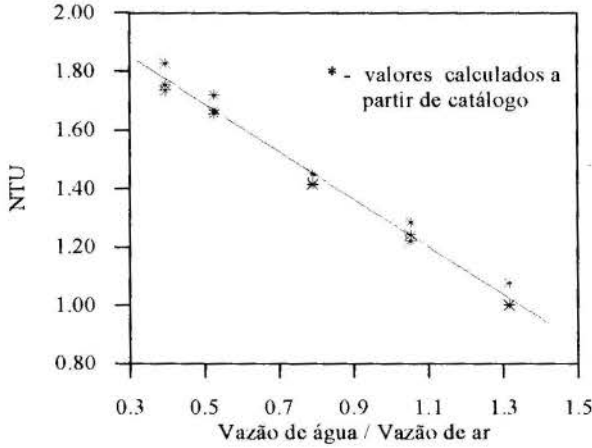


Figura 3 - Variação do NTU em função da relação entre vazão de água e vazão de ar.

#### VÁLVULA DE EXPANSÃO TERMOSTÁTICA

As válvulas de expansão termostáticas são utilizadas nos sistemas de refrigeração mecânica por meio de vapores, para provocar a expansão do fluido frigorífico liquefeito, desde a pressão de condensação até a pressão de vaporização do ciclo.

Para as condições dadas nos catálogos, isto é, válvula operando totalmente aberta, admitindo-se que a vaporização do fluido refrigerante só ocorre após a sua saída da válvula e considerando-a como um orifício concêntrico, pode-se calcular a vazão mássica máxima de refrigerante através da válvula, pela equação abaixo:

$$\dot{m}_{fmax} = Ka \cdot \sqrt{2 \cdot \rho_3 \cdot \Delta P} \quad (18)$$

Na Eq. (18),  $\Delta P$  é a diferença de pressão operada pela válvula,  $\rho_3$  é a massa específica do refrigerante na entrada da válvula e  $Ka$  é um coeficiente que exprime o produto da área do orifício da válvula ( $Ao$ ) pelo coeficiente de descarga ( $Cd$ ). De acordo com estudos realizados por Massafeli (1991), o coeficiente  $Ka$ , para vários tipos e tamanhos de válvulas de expansão termostática, é uma função da temperatura de vaporização ( $To$ ) do sistema, como mostra a Figura 4.

A vazão mássica de refrigerante através da válvula, para condições de operação com carga parcial, pode ser calculada segundo Yassuda et al. (1983), pela Eq. (19):

$$\dot{m}_f = \dot{m}_{fmax} \cdot \frac{\Delta T_{ops} - \Delta T_{ss}}{\Delta T_{os}} \quad (19)$$

Na Eq. (15),  $\Delta T_{ss}$  é o superaquecimento necessário para o início de abertura da válvula,  $\Delta T_{os}$  é o superaquecimento de abertura e  $\Delta T_{ops}$  é o superaquecimento de operação.

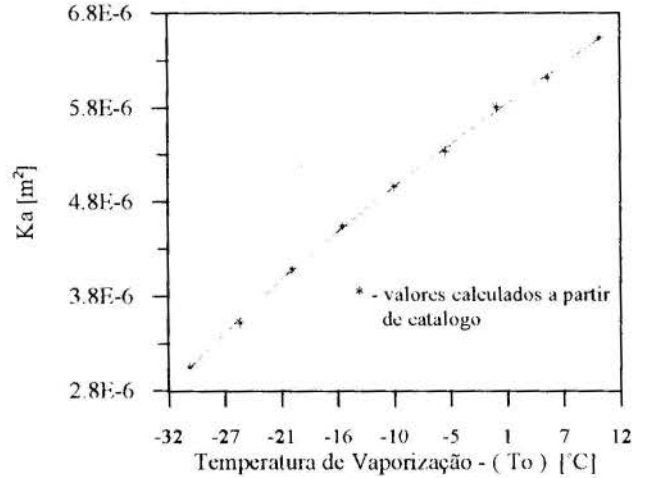


Figura 4 - Coeficiente  $Ka$  em função da temperatura de vaporização do sistema.

#### SIMULAÇÃO DO SISTEMA DE AR CONDICIONADO

Nas seções anteriores foram apresentadas as equações que caracterizam cada componente do sistema de ar condicionado. Para a simulação, a solução do sistema de equações obtido será efetuada através da técnica da substituição sucessiva, exigindo que inicialmente se estime uma variável do sistema, no caso, a variável estimada é a temperatura de condensação.

Os resultados da simulação, mostrados à seguir, foram obtidos para a instalação operando com o refrigerante R12, porém o modelo desenvolvido pode ser utilizado também com os refrigerantes R22 e R134a, bastando para isto, a alteração das equações para cálculo das propriedades do refrigerante (Almeida, 1995). As curvas referentes aos dados experimentais, que aparecem nas Figuras 7, 8 e 10, foram obtidas a partir de ensaios realizados no Laboratório de Ar Condicionado da Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

As Figuras 5 a 8, foram obtidas para o ciclo de produção de gelo, onde o sistema opera somente com a carga devido à inércia térmica do tanque. A produção de gelo é interrompida quando aproximadamente 60 % da massa de água se solidificou. Na Figura 5 é apresentada a variação da espessura média da camada de gelo, formada ao longo dos tubos, ao passo que na Figura 6 tem-se a variação da espessura da camada de gelo ao longo do tudo, e em função do tempo. A Figura 7 mostra a massa de gelo formada, durante o ciclo de acumulação de gelo.

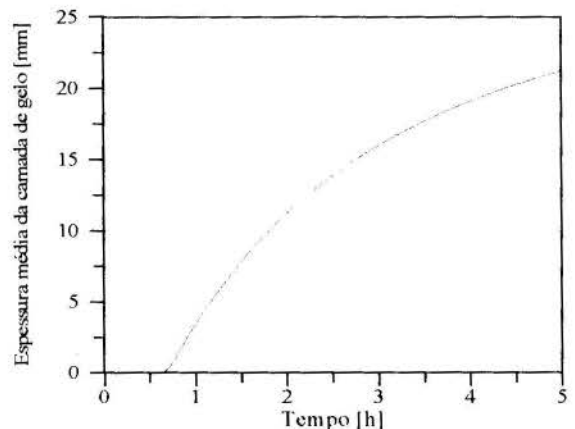


Figura 5 - Espessura média da camada de gelo em função do tempo, produzida durante o ciclo de formação de gelo.



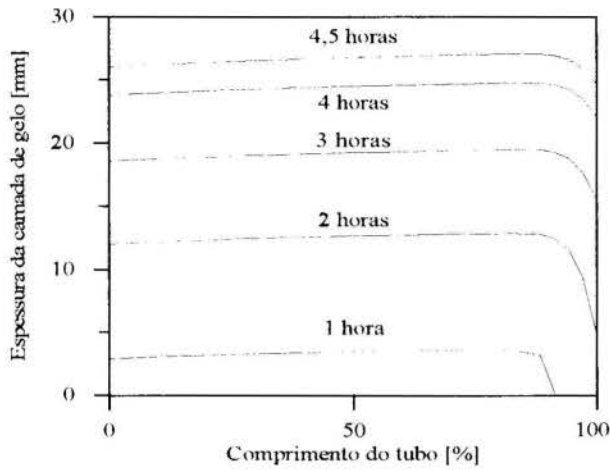


Figura 6 - Crescimento da camada de gelo ao longo dos tubos do banco de gelo.

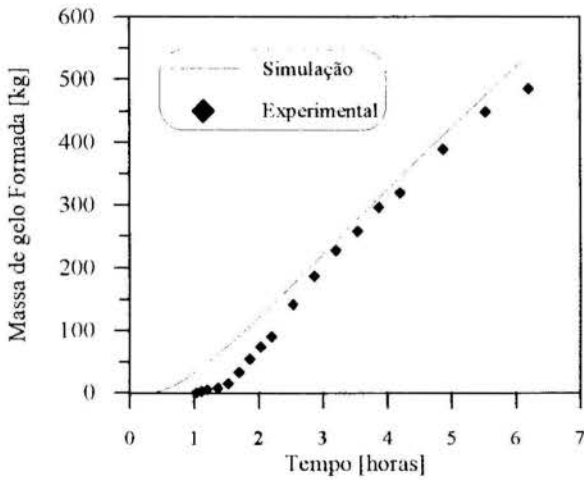


Figura 7 - Massa de gelo formada durante o ciclo de congelamento, em função do tempo

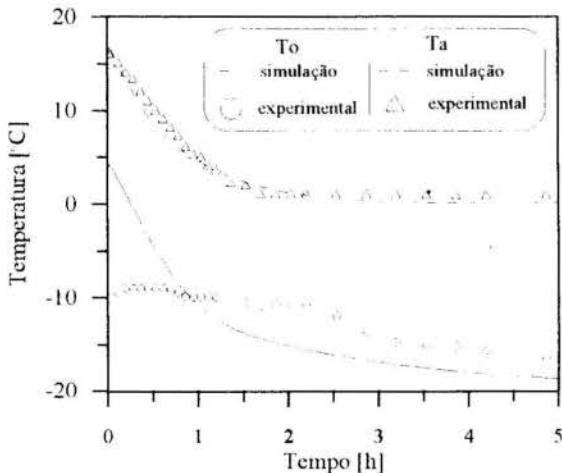


Figura 8 - Variação temperatura da água ( $T_a$ ) e da temperatura de vaporização ( $T_o$ ), em função do tempo.

A Figura 9 mostra o consumo do gelo, na forma da variação da espessura de sua camada, quando são aplicadas cargas de 9 e 12 kW

12 kW ao sistema, com a unidade frigorífica desligada. A Figura 10 tem-se uma apresenta a massa de gelo remanescente no tanque, em função do tempo, durante o ciclo de "queima de gelo", para uma carga aplicada de 18 kW

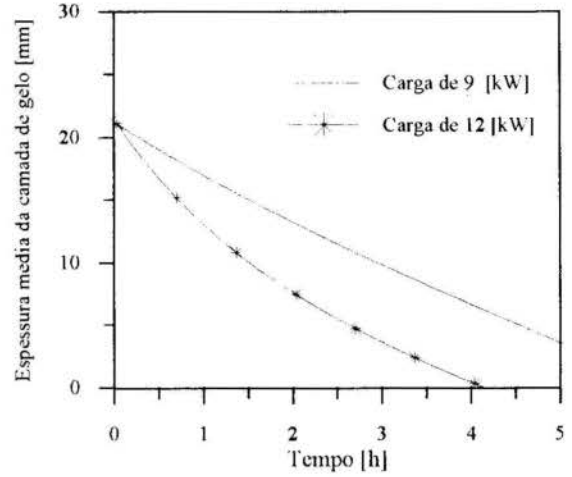


Figura 9 - Variação da camada de gelo, durante o período de consumo do mesmo, em função do tempo, para duas cargas térmicas

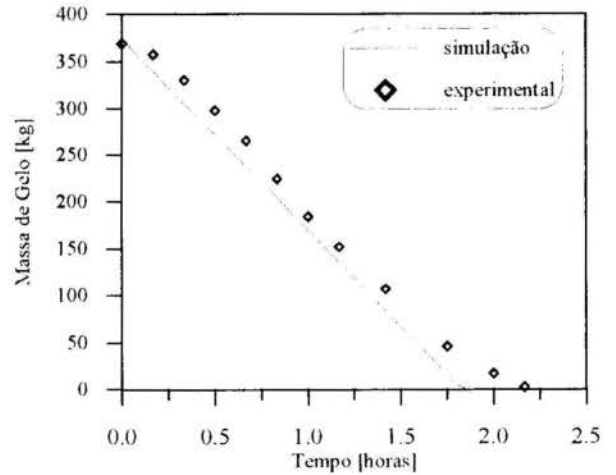


Figura 10 - Massa de gelo remanescente no banco em função do tempo, durante o ciclo de "queima de gelo".

## CONCLUSÕES

Como pode ser observado nas Figura 7, 8 e 10, os valores obtidos da simulação e os valores experimentais mostram-se coerentes, principalmente no que diz respeito a massa de gelo e temperatura da água no tanque. Assim, pode-se dizer que o modelo desenvolvido representa de forma satisfatória os processos de congelamento e queima de gelo.

Uma observação importante é a diferença entre a temperatura de vaporização ( $T_o$ ) simulada e o respectivo valor experimental. Embora os valores mostrados na Figura 8 difiram consideravelmente no início do funcionamento, a temperatura da água no tanque, está bem representada. Esta diferença pode ser devido ao modelo utilizado de processo quase-estático, pois

no início os gradientes são muito grandes, e o modelo utilizado considera equilíbrio instantâneo. Por outro lado, é possível que o sistema de medida de temperatura de vaporização esteja mal posicionado, e portanto não devolvendo o valor correto. Verificações estão sendo efetuadas no sentido de dirimir esta questão.

Na simulação do banco de gelo, ao se efetuar a discretização dos tubos do evaporador, devem ser utilizadas seções de comprimento (L) inferior a 0,25 m, para que desta forma possa ser adotado um método explícito para o cálculo do coeficiente de convecção interno ( $\alpha_{int}$ ), o que diminui o tempo de execução do programa computacional, o mesmo não acontecendo para comprimentos superiores a este valor.

O tempo de processamento, em uma máquina do modelo Pentium 100 MHz com o compilador Microsoft Fortran PowerStation versão 1.0a, para o caso apresentado na Figura 8, isto é, 5,0 horas de funcionamento do sistema de ar condicionado, foi de aproximadamente 1,7 minutos.

## REFERÊNCIAS

- Almeida, A. M., 1995, "Desenvolvimento de Software para Simulação de Sistemas Industriais Típicos", Relatório Final do Programa de Bolsas de Iniciação Científica - CNPq, EFEI.
- Almeida, M. S. V., Massafeli, N., 1995, "Simulação da Dinâmica de Resfriamento de Carne na Forma de Meias Carcaças", Anais do III Congresso Ibero-americano de Ar Condicionado e Refrigeração, Vol II, pp. 325-333.
- ASHRAE Handbook, HVAC Systems and applications, 1987, Cap. 46.
- Chiachia, A. 1993, "Sistema de Termoacumulação em Banco de Gelo", Curso ABRAVA de Divulgação Tecnológica.
- Hálasz, L., 1979, "Técnica de Refrigeração Avançada", Apostila do Curso de Pós-graduação, UNICAMP.
- Klimenko, V. V., 1988, "A Generalized Correlation for Two-Phase Forced Flow Heat Transfer", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol 31, No. 3, pp. 541-542.
- Massafeli, N., 1991, "Análise da Dinâmica de Resfriamento de Instalações Frigoríficas Para Carne Bovina", Tese de Mestrado, EFEI.
- Panissi, D. L., 1995, "Simulação de Um Sistema de Ar Condicionado Com Termoacumulação", Tese de Mestrado, EFEI.
- Rahman, A. A., Castro F., Tinaut, F. V., 1995, "Modeling of an Air Conditioning Evaporator With Calculation of Refrigerant Pressure Drop", Anais do III Congresso Ibero-Americano de Ar Condicionado e Refrigeração, Vol II, pp. 163-168.
- Stoecker, W. F., Jones, J. W., 1985, "Refrigeração e ar Condicionado", McGraw-Hill do Brasil, São Paulo.
- Strand, R. K., Pedersen, C. O., Coleman, G. N., 1995, "Development of Direct and Indirect Ice-Storage Models For Energy Analysis Calculations", ASHRAE Transactions, Vol. 2, pp 1230-1244.
- Yassuda, H., Touber, S., Machielsen, C. H. M., 1983, "Simulation Model of a Vapor Compression Refrigeration System", ASHRAE Transactions, parte 2A, pp. 408-425.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, pelo apoio financeiro, o que possibilitou a realização deste trabalho.

## ABSTRACT

This work presents a model for computational simulation of direct ice-storage air conditioning systems. The model developed is based on the application of the thermodynamics quasi-steady equilibrium process, and the required simulation data, for each component of the system, can be obtained directly from manufacturer's catalogues.



## PHYSICO-CHEMICAL ASPECTS OF THE ADHESION OF CRUDE OIL TO WET MORTARS

Geraldo S. Ribeiro<sup>1</sup>, Michael S. Arney<sup>2</sup>, Timothy J. Hall<sup>2</sup> & Daniel D. Joseph<sup>2</sup>

1- PETROBRAS/CENPES/DIPILOT - Rio de Janeiro - RJ - Brazil

2- Dept. of Aerospace Eng. & Mechanics - Univ. of Minnesota - Minneapolis - USA



### SUMMARY

*Certain water wet ceramics will reject fouling by crude oils. Steel pipes, lined with the right mortar, will resist the fouling of their walls by crude oil in water-lubricated pipelines of heavy crudes. These same crudes will foul unprotected steel, compromising the core annular flow structure. This paper is the first systematic study of wet ceramics that resist adhesion by heavy crude oil. Over two hundred wet mortar samples, as well as other miscellaneous ceramics, were analyzed and tested for oleophobic characteristics in a search for the optimum mortar composition and method of preparation.*

### INTRODUCTION

It is possible to achieve huge savings in transporting viscous heavy crude oils through pipelines by lubricating the oil core in an annulus of water (core-annular flow). Nature's gift is that the less viscous liquid (water) spontaneously migrates to the wall where the shear is high, and the oil is confined to a core flow lubricated all around by the water. This kind of configuration is hydrodynamically stable (for a full discussion, see Joseph and Renardy, 1993), and produces pressure gradients of the order of water alone at the same total throughput. This means that savings of the order of the viscosity ratio can be achieved in lubricated flows.

Lubricated lines have been tested (and in some cases installed) by oil companies periodically since 1906. A historical account of these tests has been presented in Joseph and Renardy (1993). As new fields of heavy crudes are being discovered worldwide, oil companies are showing increasing interest in this technology. The main barrier to a wider adoption of commercial lubricated lines is the problem of fouling described below.

Even though lubricated flows are hydrodynamically stable, oil can foul the wall. This is a physico-chemical rather than a hydrodynamic effect and is not taken into account in the equations used to study stability. The hydrodynamic stability of lubricated flow is very robust even when oil wets the wall. In experiments, one can sometimes see an annulus of water lubricating an oil core in a pipe whose walls are completely fouled with oil. However, the fouling builds up and leads to rapidly increasing pressure drops and can even result in blockage of the flow (see Arney et al., 1996).

A related problem is the fouling of solid walls by oil during the processing and transport of concentrated oil-in-water emulsions. Princen (1983), in his pioneering work on the rheology of foams and concentrated emulsions of oil in water, notes that "to obtain meaningful and reproducible results, it appears essential that the viscometer walls are perfectly wetted by the continuous phase. Otherwise, the surface induces instability of the emulsion layer adjacent to the wall." Princen and Kiss (1989) note that stainless steel rotating cylinders are not usable for studies of such emulsions because they are hydrophobic such that "with highly concentrated O/W emulsions, the oil droplets have a strong tendency to 'coalesce' with the walls and to form a thick oil layer when shear is applied (wall-induced instability). (...) The problem may be solved using (...) glass cylinders." These

studies suggest that a thin layer of lubricating water will appear in the transportation of concentrated oil-in-water emulsions through pipes when the walls of the pipe are oleophobic, say, in glass-lined pipes, but that these emulsions will invert at oleophilic walls, e.g. the steel walls of pipes.

This paper presents the results of an experimental investigation aiming to identify materials which could be used (either as primary materials or as linings) in pipelines operating in core-annular flow regimes, in order to avoid oil adhesion to the walls. The scope of this work includes testing the adherence of oil-water systems to different materials in simple static situations. Results of similar, but more restricted tests done in Venezuela were given by Rivera et al. (1995). Arney et al. (1996) report the results of tests with a pipeline made with cement lined pipes; their choice of cement-lined pipes was based on the results presented here. In general, the results of these works support our conclusions and can be summarized by the observation that fuel oil and the heavy crudes oils used in tests never fouled pipes lined with mortars of Portland cement if they were first hydrated in sodium *m*-silicate. A full discussion on all these research efforts can be found in Ribeiro (1994).

### PRELIMINARY TESTS

In this section we review the results of the first experimental attempts, simple tests aiming to identify materials and fabrication processes which would make pipe walls hydrophilic/oleophobic. Based on the results of these preliminary tests an experimental methodology was proposed to further refine the findings.

Different crudes stick to steel in various degrees depending on their composition. Usually, crude oils which contain more carboxylic acid groups are more susceptible to foul a steel surface. When in contact with water, these crudes loose protons and became negatively charged at the interface, making them more likely to stick to steel, which contains ferrous ( $Fe^{+2}$ ) ions. Among the heavy crudes available for the research, it was found that the one from the Zuata field, in Venezuela (density of  $996 \text{ kg/m}^3$ , viscosity of  $115 \text{ Pa.s}$ , at  $25^\circ\text{C}$ ) was the more likely to foul a metallic or a ceramic surface. Therefore Zuata oil was used in the experiments.

The preliminary tests investigated how different materials resist fouling under pressure. Such a pressure could be produced in a stopped line at elevation due to a hydrostatic

head or by dynamic pressure in choked regions of the pipe. To look at this question, we used pair of steel plates, mortar bricks and fired clay bricks. Prior to the experiments, the plates were soaked in a hydrating solution (which could be plain water or a 1% solution of sodium *m*-silicate --Na<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub>) for two days; then an oil drop was sandwiched between the plates and the plates were submerged again with a deadweight on top (Fig. 1). The deadweights applied a pressure of 7 kPa on the steel plates, 19 kPa on the mortar bricks and 44 kPa on the clay bricks. After two days, the weights were removed and the plates separated. If any oil was attached to the surface, the plate was rinsed under running water. Inferences on the degree fouling on each material were taken qualitatively, by visual observation of the plates after separation.

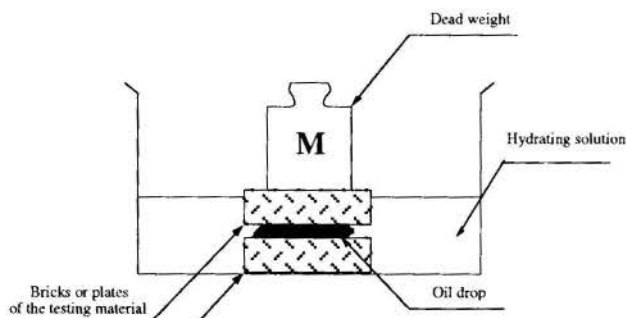


Figure 1- Fouling under pressure tests

The conclusion was that the extra pressure does not seem to promote oil adhesion to clay and mortar walls. The ceramic plates could be easily pulled apart and the oil residue was promptly rinsed off either by gentle scraping with a spatula or washed out by water flowing at a rate of 1 liter/s, in contrast with steel plates, where the oil stuck very tenaciously. Figure 2 sketches the results for these tests in steel and cement plates. Both steel plates were completely fouled after separation. This means that when separating the plates, it was easier to fracture the oil layer than break the adhesive bonds between steel and oil (Fig. 2a). In contrast, the ceramic plates fouled only partially, and the fouling of one plate was accompanied by a lack of fouling of the other, as in Fig. 2(b and c). This implies adhesive rather than cohesive failure under separation.

An important question must be risen on the role of the hydrating solution, which acts as a coating to the surface. Oil easily sticks to dry ceramic surfaces (as one can observe on a garage floor), but does not stick if the surface is wet (i.e. coated) by water. The hydrodynamic of lubricated pipeline is such that the water naturally migrates to the high shear regions, close to the walls. This means that in the application sought it is possible to keep the pipe walls always wet with the hydrating solution. The results of these preliminary tests showed that plates hydrated in sodium *m*-silicate solution always resisted fouling better than those hydrated in water. In fact, it is known that sodium *m*-silicate is effective in producing oleophobic and hydrophilic surfaces on steel, and glass. The addition of sodium *m*-silicate to the water at periodic intervals prevented oil adhesion to steel pipe walls in some lines operating in core-annular flow regime, but it did not avoid fouling of Zuata on a 54 km steel line in Venezuela.

## EXPERIMENTAL METHODS

Our preliminary experiments point strongly to the use of ceramics hydrated in sodium *m*-silicate as the optimal technique to prevent oil adhesion to pipe walls in pipelines operating in core-annular flow regime. Since Portland cement lined pipes are a commercially available product, it was decided to carry on a systematic investigation on the

properties of cement surfaces which would enhance their hydrophilic/oleophobic character. The research questions were:

- 1 - What are the optimal properties of Portland cement mortars in terms of avoiding oil adhesion when wet?
- 2 - Are there any additives to the usual mortar mix which can improve its hydrophilic characteristics?
- 3 - Knowing that hydration in sodium *m*-silicate enhances the hydrophilic character of a mortar mix, what is the optimal (minimum) concentration of this salt in aqueous solutions which may render such enhancement?
- 4 - Are these hydrophilic/oleophobic properties persistent long after hydration in sodium *m*-silicate?



Fig 2a - Typical separation for steel plates. Both sides are heavily fouled, and the fracture occurs inside the oil drop. It is very hard to clean both surfaces.

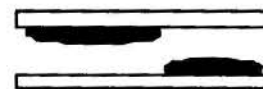


Fig 2b - Separation for some concrete or clay plates. Fouling happens on both plates, but in a way that the fracture line was always between the plates and the oil. Both surfaces can be easily cleaned.

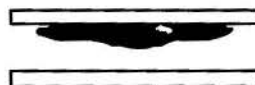


Fig 2c - Other concrete and clay plates separated in a different way. One plate was completely fouled, the other completely clean. Again, the fracture line was between the concrete plate and the oil. The contaminated surface can be easily cleaned

Figure 2. Sketch the plates separated after testing for fouling under pressure. The fact that the separation in the steel plates happened inside the oil drop tell us that the energy of adhesion between steel and oil is higher than the energy of cohesion of the oil phase itself.

To answer these questions, a total of 240 samples (mortar disks, 10 cm diameter, 6-12 mm thick) were made. Five variables were controlled in the experiments:

- *cement type* (eight categories: IA, , III, IIIA, I-LA, I-II-LA, II, V (ASTM C-150); commercial brand Quikrete);
- *sand-to-cement ratio* (two cases: 1 to 1 and 3 to 1);
- *water-to-cement ratio* (three cases: 0.3, 0.4, and 0.5);
- *sand type* (two cases: coarse and fine sand);
- *hydrating liquid* (two cases: water and 1% aqueous solution of sodium *m*-silicate).

Two properties of the samples which could not be absolutely controlled, but could be correlated with the oleophobic character of Portland cements mortars were also considered: (1) the *bulk porosity* and the *water absorption capacity*; (2) the *macroscopic aspect* of the surface.

*Bulk porosity*,  $\phi$ , is the volume fraction of porous voids, measured according to the specification ASTM C642-90. To measure it, the sample was weighed after each of these procedures: oven drying for at least 48 hours, immersion in water for at least 48 hours and immersion in boiling water for six hours. We also measured the weight of the sample while immersed in water. The bulk porosity is then calculated by:

$$\phi = \frac{(\text{weight after boiling} - \text{oven-dried weight})}{(\text{weight after boiling} - \text{immersed weight})} \quad (1)$$

A related parameter is the *water absorption capacity*,  $w$ , which is defined (ASTM C642-90) as:



$$w = \frac{(\text{weight after boiling} - \text{oven-dried weight})}{(\text{oven-dried weight})} \quad (2)$$

The *macroscopic aspect* of the sample surface was identified by observing the density and size of visible voids and protrusions on the sample. Each sample was independently inspected by three researchers, and a consensus was reached after discussion. Samples of the same composition had relatively the same appearance.

Two experimental tests were performed in order to quantify the resistance to oil adhesion of each sample: (1) contact angle ( $\alpha$ ) measurement and (2) the twist and press test.

Zuata is slightly lighter than water so that an "inverted" sessile drop can be formed by allowing the oil to float up in water onto a plane solid. Since the density difference is of the order of  $10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup>, the oil drop is only weakly levitated onto the solid plane by gravity. If we suppose that the contact angles are determined by the energies of adhesion, the drop shapes, including the area of contact between the drop and the plane on which it rests, are determined by the drop volume, which in the present case was held at approximately 0.4 cm<sup>3</sup>. The samples were allowed to soak in hydrating solutions for a period of 3 days prior to test. We then measure the contact angle of the system water/oil/mortar. A clear square container was filled with water, and a stage was set up within the container such that a cement sample could rest on it and yet the bottom surface of the cement could still be observed from outside the container. The sample was removed from its hydrating solution and towel dried in order to remove all excess liquid from its surface. If the sample was not towel dried, the oil would merely float upon a water/surfactant layer between it and the surface of the sample, and no contact between the drop and the surface would occur (this is true for mortar surfaces. The drop would completely adhere in wet steel surfaces). After towel drying, the oil drop was applied with a syringe in such a way that it lay relatively flat on the cement covering a circular area of approximately 2.5 cm diameter. The cement sample was placed in the test solution with the oil on the bottom surface, thus allowing the buoyancy forces from the water to further impel the oil to the surface of the sample.

Contact angle was then measured through an optical system, which included a stereomicroscope, a video camera and a computer. By checking this system against known angles on stainless spheres cut to unequal pieces and glued to metal sheets, it was found that the measured angles were underestimated in all cases, but they deviated from the real values by no more than 4°, with an average deviation of 2°.

The oil was closely observed for the first half hour after application to the mortar sample, primarily to see how rapidly it descended into a sessile drop. Although the experimental facilities prevented an accurate measurement of the area of contact, we could anticipate the eventual method of separation of the oil by observing the reduction in the diameter of contact area. After each of the first two hours of contact, the angle on each side of the oil drop was measured. Usually the drop would reach a constant shape after 3 hours, but it took longer for some samples. In many cases, but mostly for samples hydrated in sodium *m*-silicate, it was possible to observe a significant reduction of contact area (and increase of the angle of contact) in the evolution toward equilibrium. In general, equilibrium could be reached in less than 3 hours but in some cases the evolution time was much larger, as shown in Figure 3, where the total reduction of contact area was of about 98%. In few cases, the drop self detached from the surface during the test. Since the oil did not contact the sample, no contact angle was measured for these samples, which were those with the best performances ( $\alpha = 180^\circ$ ).

The other quantitative test to evaluate the hydrophilic character of a surface was the so called twist-and-press test. Two equivalent samples (based on their composition) were

immersed in a hydrating solution for at least 3 days, after which one of the samples had one of its sides thoroughly pacted (using a spatula) with Zuata. The two samples were then forcefully pressed together and twisted in opposite directions. The combination of pressing the samples together and twisting them was sufficient to force the oil into direct contact with all the surface. The sandwiched samples were placed inside a water filled tank. After two days, they were removed from the water and pulled apart, allowing excess oil to drip off. In some cases, most or all the oil detached in this manner, leaving the mortar surface clean and uncontaminated. In any case for which oil still remained on the surface after the excess was removed, the sample was placed under running tap water (flow rate around 1 liter/s) for 3 to 4 minutes. Taking care to not destroy the cement surface, a spatula was used to scrape away oil remnants which remained after washing. Any oil which could not be removed was assumed to have fouled the surface.

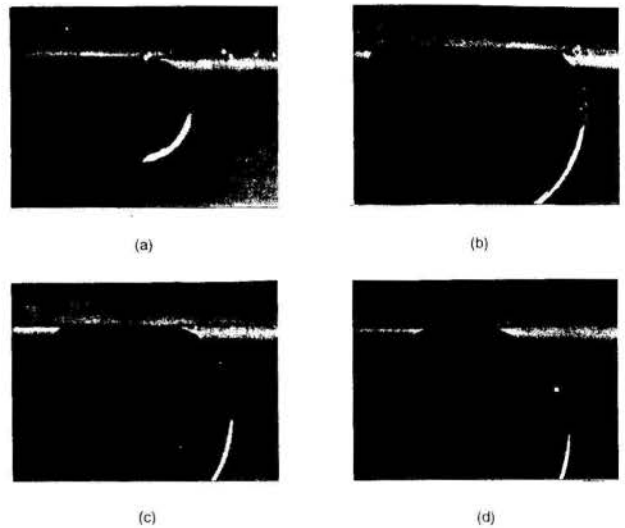


Figure 3- Time evolution of the contact angle of Zuata and water on top of a cement sample. After (a) 3 minutes, (b) 25 minutes, (c) 3.5 hours, (d) 24 hours.

The results of the twist and press test were quantified based on the percentage of the mortar's surface area still covered with oil after all these removal attempts, measured by a computerized image analysis system.

It is important to point that (even though their results pointed to similar answers to the research questions) the process being evaluated in each test (contact angle and twist-and-press) was quite different. The measured contact angle reflected the degree of adhesion of the oil to the sample in a small, "homogeneous" area. Although the values of the contact angles were pretty much the same for different regions of a certain sample, they did not give any information of what could occur in the neighborhood of surface defects, such as cracks, voids and so on. The area near these anomalies was avoided on purpose, because no reliable contact angle measurement could be obtained for these regions. In contrast, the results of the twist-and-press tests provide information of the adhesion properties of the whole sample.

## RESULTS

The complete results of the research described in the previous section can be found in Ribeiro (1994), and comprehends a massive number of tables. Within the limitations of this paper, only the significant results are reported here. Given the large number of samples and tests, an

statistical approach to analyze the data seems to be the more appropriated path to make any inferences on the variables' influence on the hydrophilic character. Therefore, statistical analysis of variance, (ANOVA) was used in data analysis.

**Optimal properties of Portland cements.** To address the first research question a total of 114 samples were tested according to the procedures described in the previous section. Tables 1 and 2 compile the statistical characteristics of the groups which showed major significance in the experiments. The only variables-properties which appear to be changing the wetting properties of mortars are *hydration in sodium m-silicate* and, in minor scale, *bulk porosity* and the *cement type*. All other variables (or interaction of variables) did not appear to have an impact (with  $p < 0.05$ ) on the results, at least in the range covered in these experiments.

Table 1- Contact angle test results

		Hydration in water	Hydration in Na <sub>2</sub> SiO <sub>4</sub>
Porosity $\phi > 25\%$	Average $\alpha$	107°	148°
	Minimum $\alpha$	47°	140°
	Maximum $\alpha$	143°	160°
Porosity $\phi < 25\%$	Average $\alpha$	121°	143°
	Minimum $\alpha$	48°	113°
	Maximum $\alpha$	150°	180°
Overall	Average $\alpha$	118°	144°

Table 2- Twist-and-press test results

		Hydration in water	Hydration in Na <sub>2</sub> SiO <sub>4</sub>
Porosity $\phi > 25\%$	Average $\Pi$	36%	5%
	Minimum $\Pi$	5%	0%
	Maximum $\Pi$	100%	8%
Porosity $\phi < 25\%$	Average $\Pi$	17%	3%
	Minimum $\Pi$	2%	0%
	Maximum $\Pi$	100%	5%
Overall	Average $\Pi$	22%	3.5%

$\Pi$  - Portion of the total sample area contaminated by oil (%)

The results of both contact angle and twist-and-press test plainly indicate that *hydration in sodium m-silicate* is the most important control variable. Samples which were hydrated in 1% sodium *m-silicate* prior to testing outperformed those which were hydrated in water. We performed ANOVA tests on the results, and hydration with sodium *m-silicate* was the factor most likely to be responsible for differences among all tests means ( $p < 10^{-12}$ ). We were already aware of the benefits of using sodium *m-silicate* in the preliminary experiments, and some thoughts about its action on hydrophilic properties of mortars will be presented later.

In the twist-and-press tests, *bulk porosity* (with  $p < 0.04$ ) was a factor which appeared to be relevant. The results show that that samples with porosity above 25% performed somewhat worse than the others. Porosity was not a major significant factor in the contact angle tests, in which oil was in contact with the samples in localized regions, as discussed before. The twist and press tests also showed that large voids and surface irregularities such as cracks are preferential sites for fouling. Sample fouled in the voids, but otherwise clean were often observed. Obviously, it is desirable to avoid large voids and surface irregularities.

The *cement type* showed to be a minor significant factor in ANOVA ( $p < 0.05$ ). We did get somewhat worse results for samples made with cement types II or V, and samples made of Quikrete performed slightly better than the average. This

indicates that there are differences due to the cement type or, ultimately, its chemical composition. As composition vary slightly from a cement type to another, a small variation of the results was to be expected.

To better understand the role of the hydration solution, flat pieces of glass, quartz and steel were also tested for contact angle after hydration in water and in 1% aqueous sodium *m-silicate*. When hydrated in water, all materials showed some degree of oil adherence, with contact angles of 111° (glass), 40° (quartz) and 48° (steel). When tested after hydration in the sodium *m-silicate* solution, contact angles were 180° (self-detachment) for glass and quartz, and 51° for steel.

**The role of additives to the mortar mix.** A total of 118 samples were made to address the second research question. Powder additives tested were calcium hydroxide (Ca(OH)<sub>2</sub>), clay, fly ash, blast furnace slag, sodium *m-silicate*, sodium hydroxide. Of all those, only samples which contained calcium hydroxide added to the original mix had showed significant enhancement of antifouling properties. All others additives (at least in the proportions tried) did not yield any increase on the oleophobic character of the mortars and in one case (sodium hydroxide) even made the mortar oleophilic.

For each group samples prepared for the tests with Portland cement, two other samples were prepared having an added amount of calcium hydroxide (1 part of Ca(OH)<sub>2</sub> for 10 parts of cement). These samples were hydrated in water for at least 48 hours prior to any tests and they never came into contact with sodium *m-silicate* when first tested. The initial idea was to verify if the addition of Ca(OH)<sub>2</sub> could eliminate the need of hydration in sodium *m-silicate* solution.

Contact angle tests results indicate that calcium hydroxide is not a replacement for hydration in sodium *m-silicate*. The average contact angle for these samples was 122°. Mortar samples (see Table 1) which were hydrated in sodium *m-silicate* were consistently more oleophobic. Still, ANOVA indicates that samples containing Ca(OH)<sub>2</sub> are more oleophobic than their counterparts which were hydrated in water (overall average of 5% surface contamination, against 22% for non-Ca(OH)<sub>2</sub> samples,  $p < 0.001$ ).

After these tests, the samples containing Ca(OH)<sub>2</sub> were cleaned and hydrated in a 1% sodium *m-silicate* solution, and then retested in the twist-and-press test. Some samples were badly fouled in the previous tests and could not be cleaned, so they were not retested. After hydration in a 1% sodium *m-silicate* solution the overall number of samples showing a completely clean surface increased from 1 to 11, and average surface contamination stayed below 3%. Two-factor ANOVA tests revealed that both sodium *m-silicate* hydration and calcium hydroxide addition were significant ( $p < 0.0001$ ) and that they interact ( $p < 0.0005$ ), indicating that their combined use improved the ratings.

**Optimal concentration of sodium m-silicate solutions.** All tests involving hydration with sodium *m-silicate* described so far had been done with a 1% solution. This concentration was arbitrarily selected, and yield good results from the beginning of the study. However, we questioned if a smaller concentration could be as effective as the 1% solutions.

Eight samples of the same composition were prepared and split in pairs, and each pair was hydrated in sodium *m-silicate* solutions of different concentrations. The first pair was hydrated for 5 days in the usual 1.00% sodium *m-silicate* solution and tested for contact angle; then the next pairs were successively hydrated in less concentrated solutions for 5 days and tested, until the optimum concentration was reached. This sample pair was then retested to verify this result. Finally, twist-and-press tests were performed on all samples.

We identified 0.5% as the minimum concentration to completely reproduce the results of the 1% solution, though samples hydrated in 0.25% solutions still gave results within



the acceptable limits (<5% of area contaminated). More extensive testing should be done to check if the optimal concentration depends on the composition of the mortar or on the length of time the mortar was hydrated in the solution.

Long term persistence of oleophobic properties. Here we ask about the long-term oleophobic characteristics of a wet mortar. No oil company would build a cement-lined pipeline without a clear warranty that these oleophobic effects persist for some time, or at least could be easily revitalized. To address this issue, several follow-up experiments were conducted on some of the samples tested previously.

The retest samples were chosen from the group of original Portland cement samples (14 samples) and from the group which contained calcium hydroxide additive (6 samples). The selected samples performed very well in the first tests. After the original tests, they were placed in buckets filled with tap water, which was changed every 3-4 weeks.

The Portland cement samples were last hydrated in 1% sodium *m*-silicate in December 1993, for 48 hours. The first follow-up test was performed 3 months later. The samples were simply removed from the bucket, rinsed off under in fresh tap water, and the twist-and-press test was performed. The results were very good, with no fouling observed on either sample.

In June 1994, contact angle and the twist-and-press tests were done on the Portland cement samples. The results points that the samples lost, partially or completely, their oleophobic properties. This provided the first solid proof that oleophobic properties could be temporary.

Somehow, the surface loses its protection and with it all resistance to oil fouling. However, this resistance can be reacquired by rehydration with sodium *m*-silicate. In fact, rehydrating the samples in a 1% sodium *m*-silicate solution for two days and repeating the tests one could see that, once again, the mortar surface resisted oil fouling, whereas just a few days before oil tenaciously stuck to the very same surface. These results suggest that, while oleophobic properties may not persist, they can be reacquired by the same method in which they were attained in the first place, namely, hydration in sodium *m*-silicate solutions.

The same type of follow-up testing was performed on the samples which belonged to the group containing calcium hydroxide additive. The calcium hydroxide samples performed well in the original tests. These samples were hydrated in a 1% sodium *m*-silicate solution in January 1994 for two days, and placed in the water filled buckets as all other samples. Six months elapsed until the retests were done. The results indicate that all samples matched their previous success in completely resisting oil fouling, without the need of an extra boost hydration in sodium *m*-silicate.

## ANALYSIS OF RESULTS AND DISCUSSION

It was showed that mortars of wet Portland cement resist fouling by Zuata after properly hydrated. The following discussion is an attempt to understand the physico-chemical aspects of water-oil-mortar systems which bear on the experimental observations.

We start by noting that cement is strongly oleophobic only when wet. So, it obtains oleophobic properties through the tenacious binding of water on its surface, which prevents oil adhesion. Two mechanisms seem to be responsible for this binding: one of them relates to the geometry of the mortar surface and its connection with capillary forces; the other relates to chemical attraction forces between surface and water molecules. Finally, we discuss the effects of hydration in sodium *m*-silicate and the role of calcium hydroxide additives.

Surface geometry. Capillary forces are inversely proportional to the radius of the cavity (in this case, the pore). In a very large pore (say, of the order of 1 mm) filled with

water, capillary forces are relatively small, making it easier for the oil to dislodge the water from the pore. The same can happen in a crack on the surface. This explains what was observed in the results of twist-and-press tests, where large voids and cracks were preferential sites for oil adhesion. Usually, samples with these anomalies were characterized by a very large value for *bulk porosity*, typically above 25%, the range for which ANOVA tests detected a significant increase on the averages of oil contaminated area.

On the other hand, Rivera et al. (1995) found that a *water absorption capacity* smaller than 8% could lead to oil fouling. This means that a very small pore network is unable to absorb enough water, leaving space for oil adhesion to the surface. All samples in this study had a *water absorption capacity* around or larger than 8%, so it was not possible to check this lower limit, and in fact, no increase of fouling within this range was detected.

This discussion seems to point to a range of optimal pore sizes (or its correspondent macroscopic property, the *bulk porosity*). Combining our findings with Rivera et al (1995), one may say that oleophobic samples were characterized by a *bulk porosity* between 15% to 25% (corresponding to a *water absorption capacity* ranging from 8% to 12.5%).

Chemical aspects. We now turn to the other mechanism which seems to determine the oleophobic character of wet mortars, the chemical attraction forces between water and the surface. There appears to be substantial literature bearing on design and properties of hydrophilic cements, without reference to their application to anti-fouling technologies -- Taylor (1990), Lea (1970), Nelson (1990) and Kosmatka and Panarese (1988). We shall point that we are at best dedicated amateur students of cement chemistry and our conclusions should be regarded as suggestive, rather than definitive.

The major components of Portland cements are compounds of lime (CaO), silica (SiO<sub>2</sub>), alumina (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) and ferric oxide (Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), which together make up more than 90% of unhydrated Portland cement. When water is mixed with cement, the cement grains absorb the water and form a colloidal system. The compounds on the surface of these grains undergo a series of complex hydration reactions. The main products of these reactions are calcium hydroxide and the calcium silicate hydrate gel (C-S-H gel). Calcium hydroxide quickly saturates the water and eventually precipitates and crystallizes. The C-S-H gel remains on the surface of the grains and continues to swell by the hydration reaction. Eventually these gel-covered grains connect with other grains to form a rigid network with dispersed calcium hydroxide crystals. In Portland cements, other mineral structures are present in the gel network. There are many types of C-S-H gels, depending upon the Ca/Si ratio.

For our purposes, the more important feature of this reaction is the formation of a hydrophilic gel. Taylor (1990, pp. 19) defines gels as "coherent, colloidal disperse systems of at least two components" which "exhibit mechanical properties characteristic of the solid state." The dispersed phase can be composed of particles, crystals, or long-chain molecules and adheres together in an open or irregular framework networked (or percolated) throughout the gel.

The hardened cement paste has the properties of a rigid gel. Taylor (1990, pp. 246) observes that "variations of the relative humidity of the surrounding atmosphere cause it to gain or lose water", which indicates the hydrophilic degree of the surface. It contains chemically combined water, and is capable of retaining water in the capillary pores and gel interstices. The surface of the C-S-H gel is rich in polarized oxygen groups, which can be readily available to form hydrogen bonds with water molecules so as to form a monolayer of bound moisture followed by a layer of excess free water, as shown in Taylor (1990, Figure 8.4).

Also, electron micrographs of the C-S-H crystals in set cement (Lea, 1970, Plate XI) show a formation of needle-like

appendages on its surface, remotely comparable to the cilia in a human throat. These appendages have a complicated chemical structure, being formed not only of C-S-H gel, but also of similar compounds. The water clings to these protuberances in the same way as it clings to a paint brush.

The effects of sodium *m*-silicate. The experiments have also demonstrated that mortars of Portland cement and other materials which have been hydrated in solutions of sodium *m*-silicate are strongly and persistently oleophobic. This enhancement in oleophobic properties can be related to the hydrophilic properties of the C-S-H gel in mortars and to electrostatic forces in ceramic and metal surfaces.

One method for producing C-S-H gel is from a reaction between a solution of a calcium salt with sodium silicate (see Taylor (1964, pp.193) for the recipe). The aqueous  $\text{Ca}^{+2}$  and  $\text{SiO}_3^{-2}$  ions react to form the gel. As noted before, cement contains numerous crystals of  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  embedded into the C-S-H gel network. When contacted by the aqueous sodium *m*-silicate, these crystals dissolve and reacts to form more gel. The reaction naturally occurs on the cement surface, because there are already many gel sites to nucleate the reaction. By replenishing the hydrophilic gel, hydration in sodium *m*-silicate improves the oleophobic properties of cement surfaces.

This process tends to fill the surface pores by producing of extra gel. We did not observe marked changes in pore structure after hydration in 1% sodium *m*-silicate, but more concentrated sodium silicate solutions are used to harden and smooth concrete surfaces. This may suggest an upper limit on the concentration of a hydrating solution.

Another possible, and perhaps complementary, explanation for the enhancement of hydrophilic properties is that sodium *m*-silicate contributes to the development of a strong electrostatic repulsion at the oil/water/mortar interface. Most crude oils become negatively charged at the water/oil interface due to their carboxylic acids (the acids loose protons to the aqueous medium and become ionized, giving the oil surface a negative charge). On the other hand, sodium *m*-silicate gives a negative charge to the mortar surface, since  $\text{SiO}_3^{-2}$  ions are absorbed onto the C-S-H gel. Cations (mostly  $\text{Na}^+$  ions from the sodium *m*-silicate solution) in the water migrate forming an intermediate positively charged aqueous layer between the (negatively charged) cement and oil surfaces. So, both dissociated ions of the sodium *m*-silicate contribute to the double layer formation. In steel pipes the same mechanism occurs but, unfortunately, the  $\text{SiO}_3^{-2}$  ions are continuously washed off steel walls. On mortar surfaces, however, the C-S-H gel and the pore structure help to maintain these ions on the surface over longer times.

In summary, hydration in a sodium *m*-silicate solution renders the mortar a hydrophilic character by two mechanisms. First, it promotes the creation of more C-S-H gel. Second, it helps to form the double layer which makes cement repel oil and cling to the water by electrostatic forces.

Calcium hydroxides additives. The experiments showed that the addition of calcium hydroxide to the mortar mix enhance oleophobic/hydrophilic properties of the resulting surface, and that an interaction happens with the common presence of calcium hydroxide and sodium *m*-silicate, yielding a more hydrophilic surface. Also, the addition of calcium hydroxide helps to keep these properties for longer times.

This seem to be explained by the role of calcium hydroxide as a provider of  $\text{Ca}^{+2}$  ions. The added calcium allows for a C-S-H gel with a higher Ca/Si ratio, which means the resulting mortar will have a more dense slurry of available calcium and will be much less permeable and porous. This ultimately mean a more stable, durable, and higher quality C-S-H gel.

Moreover, when used along with hydration in sodium *m*-silicate, calcium hydroxide provides extra  $\text{Ca}^{+2}$  ions which react with the silicates producing even more C-S-H gel.

## CONCLUSION

This work describes a research on the properties which render wet mortars hydrophilic/oleophobic properties, for applications in pipelines operating in core-annular flow regimes. It was found that the hydrophilic character of a wet mortar surface can be greatly enhanced by hydration in low concentration aqueous sodium *m*-silicate solutions (0.5%-1%). Porosity also plays an important role in this phenomenon: there is an optimum porosity range (between 15% and 25%) for which mortars better resist to oil fouling. Moreover, the addition of a small amount of calcium hydroxide to a mortar mix improves the hydrophilic character of the resulting surface.

The physico-chemical aspects of the adhesion in oil-water-mortar systems were also discussed, and it was concluded that water wet mortars can repel the oil because of the combined action of chemical, capillary and electrostatic forces.

Pipelines operating in core-annular flow regimes built with cement-lined pipes designed based on the results of this work are now being tested with success (Arney et al., 1996).

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported primarily by the DOE, NSF and ARO. We thank Mike Cowan for his correspondence regarding cement chemistry, Mansell Rubenstein (Cement Lining Co., Houston, TX) for his insights on cement-lined pipes and Mark Wibben for his help in the experiments. The work of Geraldo S. Ribeiro was partially supported by the Brazilian National Scientific Research Council (CNPq).

## REFERENCES

- Arney, M., Ribeiro, G., Guevara, E., Bai, R., & Joseph, D., 1996, "Cement-lined pipes for water lubricated transport of heavy oils", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 22, pp. 207-221.
- Joseph, D. D., & Renardy, Y. Y., 1993, "*Fundamentals of two-fluid dynamics, Part II: Lubricated transport, drops and miscible liquids*", Springer-Verlag, New York, NY.
- Kosmatka, S. & Panarese, W., 1988, "*Design and control of concrete mixtures*", Portland Cement Assoc., Skokie, Ill.
- Lea, F. M., 1970, "*The chemistry of cement and concrete*." 3rd ed., Edward Arnold Ltd., Glasgow.
- Nelson, E., 1990, "*Well cementing*", Elsevier, Amsterdam.
- Princen, H. M., 1983, "Rheology of foams and highly concentrated emulsions--Part I", *J. Colloid Interface Sci.* Vol. 91, pp. 160-175.
- Princen, H. M. & Kiss, A. D., 1989, "Rheology of foams and highly concentrated emulsions--Part IV", *J. Colloid Interface Sci.*, Vol. 128, pp. 176-187.
- Ribeiro, G., 1994, "Topics in the transport and rheology of heavy crude oils", Ph. D. Dissertation, University of Minnesota, Minneapolis, MN.
- Rivera, M., Guevara, E., Joseph, D.D., Jaua, J. & Carabaño, N., 1995, "Preventing oil adhesion to pipe walls in heavy crude transportation", *VI UNITAR International Conference on Heavy Crude and Tar Sands*, Houston, TX.
- Taylor, H. F. W., 1990, "*Cement chemistry*", Academic Press, London.
- Taylor, H. F. W., 1964, in "*The chemistry of cements*", H.F.W. Taylor, ed., Academic Press, London.





## LIQUID HOLDUP MEASUREMENTS IN SLUG FLOW OF AIR/NON-NEWTONIAN LIQUID AND AIR/WATER THROUGH INCLINED PIPE

João Tadeu V. de Sousa, Edson Y. Nakagawa  
 Petrobras Research Center  
 21949-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brazil  
 Fernando A. França  
 Department of Petroleum Engineering  
 State University of Campinas  
 13081-970 - Campinas - SP - Brazil



### SUMMARY

This work shows the results of an experimental investigation carried out to evaluate the influence of a Non-Newtonian medium and pipe inclination on the liquid holdup in the slug flow. The experimental apparatus consists of 9.44m long transparent pipe with 77.2mm inside diameter that can be set at any inclination from vertical to horizontal. Quick closed valves were used to measure the liquid holdup. A data acquisition system was used to record gas and liquid volumetric flow rates. Tests were run for several pipe inclinations with air-Xanthan gum solution and air-water mixtures. The experimental results were compared with previous experimental and theoretical works.

### INTRODUCTION

During drilling operations of an oil well, an undesirable gas influx from the formation being drilled into the well can occur. This phenomenon is called gas kick. Kicks always happen when the bottom hole pressure, exerted by the drilling fluid inside the well, is lower than the pore pressure in the formation that contains gas. If this situation is not controlled properly, the kick will become a blowout, an uncontrolled flow of formation fluids to the surface. It normally results in personal injury, environment damage and loss of drilling equipment. Therefore, as soon as the gas kick is detected, it is necessary to control the gas inflow and to remove it from the well safely.

While removing the gas, the small bubbles, which were earlier in the bottom of the hole, tend to collapse into large bubbles, called Taylor's bubbles, as the gas ascends to the surface, originating the Slug Flow (Figure 1). Under this context, the accurate prediction of the pressure profile along the well is decisive to the success of the gas removing from the well. This operation has to be conducted under two pressure limits: (1) at bottom, the pressure inside the well has to be larger than the pore pressure to avoid additional gas influx; and (2) in front of the weakest formation, the pressure has to be smaller than the fracture pressure, to prevent fluid losses or even and uncontrolled underground flow.

Flow regime. To reach this goal, several tests were run in 9.44m long transparent pipe with 77.2mm inside diameter, set in several positions, with air-Xanthan gum solution (non-Newtonian fluid) and air-water mixtures. Further, the results were compared with Slug Flow data from Nakagawa and Bourgoyne(1992), and with predicted values using Beggs and Brill (1973) and Abdul-Majeed's(1994) correlations.

It is very interesting the comparison with Nakagawa and Bourgoyne's(1992) data. Although their data and the present ones were obtained under very distinct conditions, many conclusions related to the effects of the liquid viscosity and test section inclination on liquid holdup are similar in both studies. They worked in an eccentric annular section, in vertical and slanted positions, under high operational pressures, with three different two-phase mixtures: natural gas-water, and natural gas with two different non-Newtonian liquids.

### SOME CONSIDERATIONS ON LIQUID HOLDUP

In a two-phase flow, when the phases are distinct in density and/or viscosity, one of them (normally the less dense) has a tendency to flow at a higher in situ average velocity than the other. Consequently, in gas liquid mixtures, the liquid holdup ( $H_L$ ) tends to be higher along the pipe than the non-slip liquid holdup ( $\lambda = Q_L / (Q_L + Q_g)$ ), which is the inlet liquid fraction. The following equation illustrates the difference between the gas and liquid velocities

$$V_r = V_g - V_L = \frac{j_g}{1-H_L} - \frac{j_L}{H_L} \quad (1)$$

where  $V_r$  is the relative velocity between the gas and liquid phases,  $j_g$  and  $j_L$  are the gas and liquid superficial velocities.

The liquid holdup is also dependent on pipe inclination. The degree of this dependency varies with the flow rates. From experimental tests run in two pipes with 25.4 mm and 38.1 mm inside diameters, using air-water mixture, Beggs and Brill (1973) noticed that the liquid holdup reached a maximum at approximately 50° from horizontal. The effect of pipe inclination on the liquid holdup can also be explained by the slippage between the gas and liquid phases.

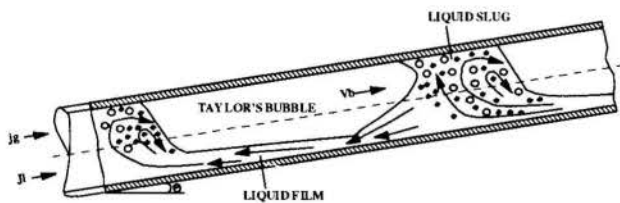


Figure 1 - Simplified Slug Flow model in a pipe

However, accurate pressure predictions along the well require a good knowledge of the liquid holdup, which in turn depends on the gas and liquid properties, pipe geometry and inclination. Many experimental works on liquid holdup measurements have been published, but most of them use just air-water mixtures, in vertical or horizontal pipes. Few works considered, simultaneously, the effects of fluid properties and pipe inclination.

The proposal of this experimental work is to investigate the effect of fluid rheology and pipe inclination on the liquid holdup in the Slug

**PREVIOUS WORKS**

Two liquid holdup correlations, Beggs and Brill's(1973) and Abdul-Majeed's(1994), and the experimental data by Nakagawa and Bourgoyne (1992) will be used as a basis for comparison with the results of the present work.

Beggs and Brill's Liquid Holdup Correlation.

$$H_L(\theta) = H_L(0^\circ) \left\{ 1 + C \left[ \sin(1.8\theta) - \frac{1}{3} \sin^3(1.8\theta) \right] \right\} \quad (2)$$

$$C = (1-\lambda) \ln \left[ \frac{2.96 \lambda^{0.305} N_{FR}^{0.0978}}{N_{LV}^{0.4473}} \right] \quad (3)$$

$$H_L(0^\circ) = \frac{0.845 \lambda^{0.5351}}{N_{FR}^{0.0173}} \quad (4)$$

where  $H_L(\theta)$  is the liquid holdup at angle  $\theta$ ,  $C$  is the inclination effect factor,  $H_L(0^\circ)$  is the horizontal liquid holdup,  $\lambda = j_l/j$  is the non-slip liquid holdup,  $N_{LV} = j_l(\rho_L g/\sigma)^{0.5}$  is the liquid velocity number and  $N_{FR} = j^2/(gD)$  is the Froude number. As this correlation was developed from data obtained with air-water mixtures, it does not take into account the liquid viscosity.

Abdul-Majeed's Liquid Holdup Correlation.

$$H_L(\theta) = H_L(0^\circ) \{ 1 + (\sin\theta)^{0.87} (1 + \cos\theta)^{1.87} [-0.2426 + 0.025 \ln Y + 0.034814 (\ln Y)^2] \} \quad (5)$$

$$H_L(0^\circ) = 0.7947 + 0.2746 \ln X + 0.02405 (\ln X)^2 \quad (6)$$

$$X = \frac{\lambda^{0.9} N_D^{0.085} N_{L\mu}^{0.01}}{N_{gV}^{0.08} N_{LV}^{0.408}} \quad (7)$$

$$Y = \frac{N_{LV} N_{gV}}{\lambda N_{FR}} \quad (8)$$

where  $N_D = D(\rho_L g/\sigma)^{0.5}$  is the diameter number,  $N_{L\mu} = \mu_L(D^3 g/\rho_L)^{0.5}$  is the liquid viscosity number and  $N_{gV} = j_g(\rho_L g/\sigma)^{0.5}$  is the gas velocity number. Apart from the diameter and liquid viscosity numbers, this correlation uses the same dimensionless parameters used by Beggs and Brill(1973).

Nakagawa and Bourgoyne's Experimental Data on Liquid Holdup.

Their tests were run in a 14 m long eccentric annular section (154 mm X 60.3 mm). The working pressure was kept between 1,724-2,896 kPa. The gas phase consisted of natural gas with specific gravity 0.61. The liquid phase adopted were water and two different water-bentonite mixtures (Table 1).

From all data presented by Nakagawa and Bourgoyne(1992), only the ones with the vertical liquid holdup less than 0.75, which correspond to void fractions greater than 0.25, were chosen.

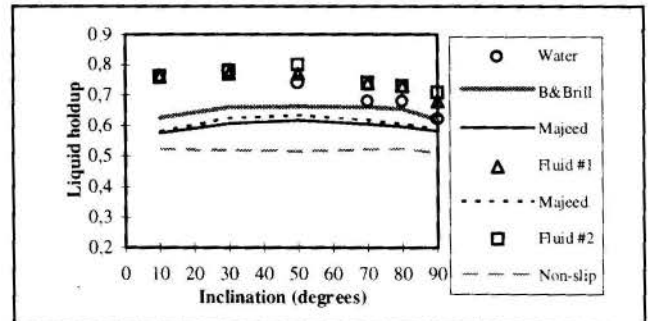
According to Taitel et al. (1980), this value of void fraction would correspond to the transition between Bubble Flow and Slug Flow in vertical pipes.

Their data and the curves representing the predictions of the two aforementioned correlations and non-slip liquid holdups, for four different combinations of gas and liquid superficial velocities, are shown in Figures 2 - 5. Since the values predicted by Abdul-Majeed's(1994) correlation for two non-Newtonian mixtures are almost the same, only the ones calculated for gas-fluid #1 are shown.

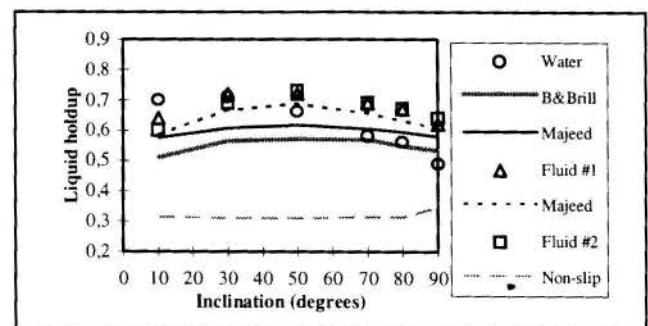
**Table 1** - Characteristics of the non-Newtonian liquids used by Nakagawa and Bourgoyne[1992]

Liquid phase	$\rho_L$ (kg/m <sup>3</sup> )	Bingham Model
Fluid #1	1,068	$\tau = 4.79 + 0.01 \gamma$
Fluid #2	1,080	$\tau = 9.10 + 0.019 \gamma$

Figures 2 - 5 show that the annular section inclination affected the liquid holdup. This influence depends on the gas and liquid superficial velocities. The liquid holdup for both mixtures of gas and non-Newtonian liquids reaches a maximum at an angle of approximately 50°, which agrees with the observations made by Beggs and Brill (1973) for air-water. Notice that the same did not happen with the gas-water mixture, since the maximum is about 10°-30°. It might be that a stable Slug Flow for gas-water mixture was not obtained..



**Figure 2** - Nakagawa and Bourgoyne's data for  $j_g=0.48\pm 0.02$  m/s and  $j_l=0.52\pm 0.01$  m/s



**Figure 3** - Nakagawa and Bourgoyne's data for  $j_g=0.48\pm 0.01$  m/s and  $j_l=0.23\pm 0.01$  m/s

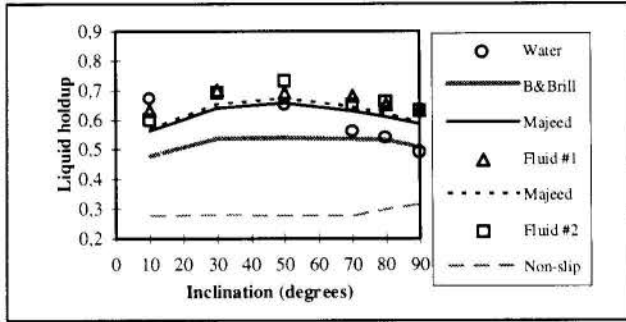


Figure 4 - Nakagawa and Bourgoyne's data for  $j_g=0.54\pm 0.01$  m/s and  $j_l=0.23\pm 0.02$  m/s

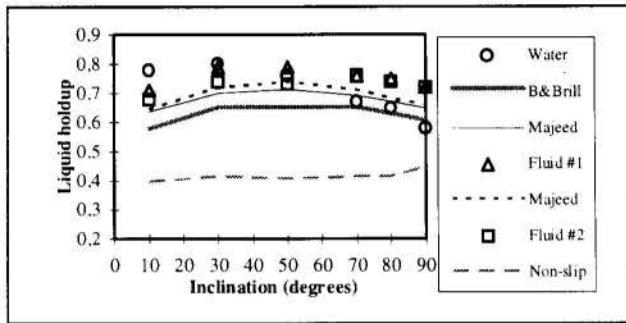


Figure 5 - Nakagawa and Bourgoyne's data for  $j_g=0.31\pm 0.01$  m/s and  $j_l=0.23\pm 0.02$  m/s

For all cases, with the annular section near or at the vertical position ( $\theta=70^\circ$ ,  $\theta=80^\circ$  and  $\theta=90^\circ$ ), the gas-water liquid holdups are less than those for the two non-Newtonian mixtures.

Table 2 shows the ratio of liquid holdup,  $H_L$ , and the non-slip liquid holdup,  $\lambda$ . Notice that as  $j_L$  decreases, maintaining  $j_g$  constant, the ratio  $H_L/\lambda$  increases. Conversely, as  $j_g$  decreases, maintaining  $j_L$  constant, the ratio  $H_L/\lambda$  also decreases. Observe yet that, with  $J_L$  and  $J_g$  constant, the ratio  $H_L/\lambda$  increases when the density and viscosity of the liquid phase increase. These observations are explained by the increasing in the relative velocity (see Eq. (1)).

Also, the values of liquid holdup obtained with gas-fluid #1 and gas-fluid #2 mixtures are similar.

Table 2 - Ratio of  $H_L$  and  $\lambda$  for the three two-phase mixtures investigated by Nakagawa and Bourgoyne (1992)

$j_L$	$j_g$	Gas - Water	Gas - Fluid #1	Gas - Fluid #2
(m/s)	(m/s)	$H_L/\lambda$	$H_L/\lambda$	$H_L/\lambda$
0.52	0.48	1.37	1.45	1.48
0.23	0.48	1.95	2.31	2.34
0.23	0.54	2.10	2.45	2.40
0.23	0.31	1.71	1.93	1.95

Beggs and Brill's(1973) correlation fitted well just the data obtained with gas-water mixture, with the pipe close to or at the vertical position. For the other cases, it underpredicted the experimental values. Abdul-Majeed's(1994) correlation had a good

performance when applied to the three two-phase mixtures studied.

## EXPERIMENTAL APPARATUS FOR THE PRESENT WORK

The experimental facility is shown schematically in Figure 6. The test section consists of a 9.44m long transparent pipe with 77.2mm inside diameter, which can be set at any inclination from vertical to horizontal. Orifice plates and positive displacement flow meters were used to measure the gas and liquid volumetric flow rates, respectively. Quick closed valves were used to measure the liquid holdups. A data acquisition system was used to record the volumetric flow rates. More details can be found in de Sousa (1995).

The calculated errors for the experimental values of  $j_L$ ,  $j_g$  and  $H_L$  were 1.3%, 5.3% and 3.5%, respectively.

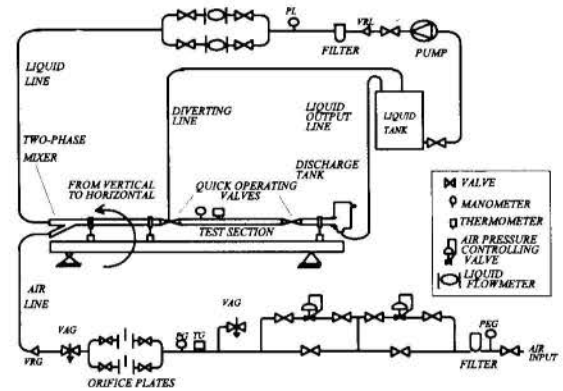


Figure 6 - Schematic diagram of experimental apparatus

## FLUIDS USED DURING THE EXPERIMENTS

Tests were performed with the pipe set at horizontal,  $3^\circ$ ,  $13^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $55^\circ$ ,  $75^\circ$  and vertical ( $90^\circ$ ) positions, with air-water and air-Xanthan gum solution. The solution's concentration was 0.428% by weight, resulting in a liquid with a density of  $1,018 \text{ kg/m}^3$  and a surface tension of  $67.50 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ . During the tests, the rheological solution properties were fit into the interval shown in Figure 7 and Table 3.

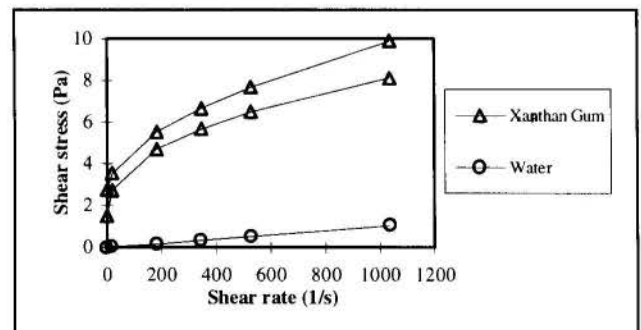


Figure 7 -Rheological curves for water and xanthan gum solution

**Table 3** - Rheological models applied to Xanthan gum solution

Rheological Model	Herschel and Bulkley	Bingham	Power-Law
Minimum Rheology	$\tau = 1.5245 + 0.3565 \gamma^{0.4203}$	$\tau = 2.9996 + 0.0058 \gamma$	$\tau = 1.3429 \gamma^{0.2546}$
Maximum Rheology	$\tau = 2.7728 + 0.1584 \gamma^{0.5480}$	$\tau = 3.8051 + 0.0066 \gamma$	$\tau = 0.9598 \gamma^{0.3351}$

†  $\tau$  (Pa) and  $\gamma$  (1/s)

**EXPERIMENTAL RESULTS**

All the experimental data on liquid holdup, the predicted values obtained with Beggs and Brill's(1973) and Abdul-Majeed's(1994) correlations, and their correspondent percent errors and standard deviations are shown in Appendix.

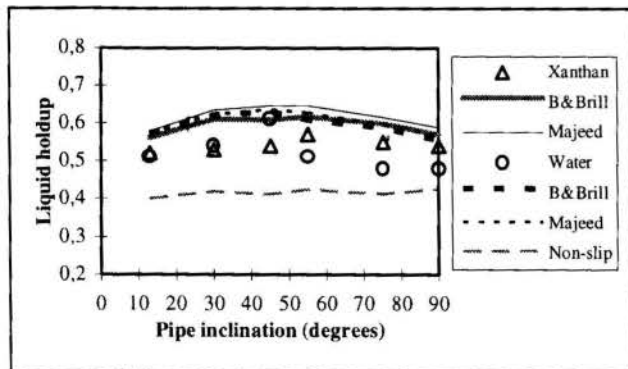
In order to avoid wrong conclusions on the effects of the liquid viscosity and pipe inclination on liquid holdup, it is necessary to consider the differences in the input flow rates at each pipe inclination, with emphasis on the input gas flow rates. This can be accomplished observing how constant are the non-slip liquid holdup curves (Figures 8-11).

Similarly to Nakagawa and Bourgoyne's(1992) work with eccentric annulus, the pipe inclination affected the liquid holdup, which varied according to the gas and liquid superficial velocities. In some cases, a maximum is observed around 45° to 55° (Figures 8, 9 and 11).

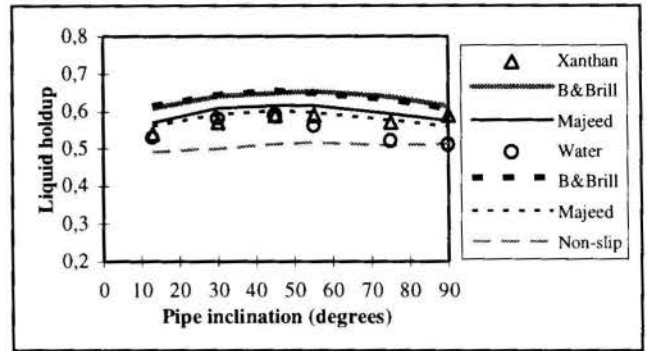
With the pipe close or at the vertical position ( $\theta=75^\circ$  and  $\theta=90^\circ$ ), the liquid holdup values for gas-water mixture are always smaller than those for air-Xanthan gum solution. According to Eq. (1), it means that, for such cases the relative velocities for air-Xanthan gum solution are greater than those for air-water. The main reason for this behavior is the higher viscosity of the Xanthan gum solution. Observe that similar conclusions can be taken from Nakagawa and Bourgoyne's(1992) data.

The remarks made about the ratio  $H_L/\lambda$ , in the annular case, hold true here, except for  $j_L=0.42$  m/s and  $j_g=0.32$  m/s (see Table 4).

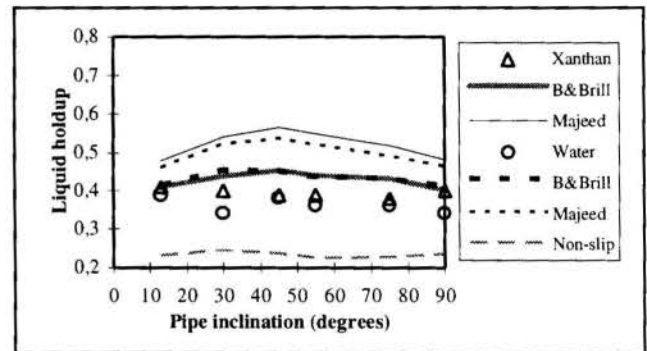
The agreement of Beggs and Brill(1973) and Abdul-Majeed's(1994) correlations for the experimental results were good.



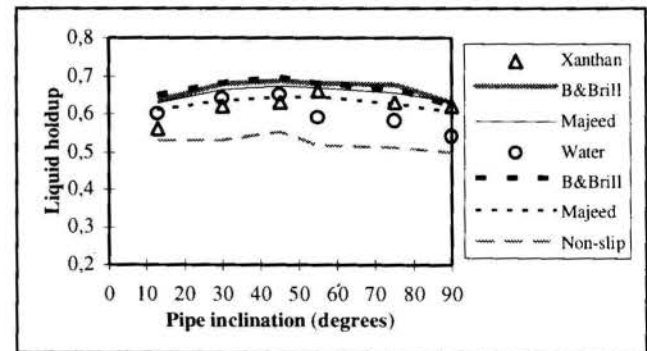
**Figure 8** - Experimental data for  $j_g=0.59\pm0.04$  m/s and  $j_l=0.42\pm0.01$  m/s



**Figure 9** - Experimental data for  $j_g=0.59\pm0.04$  m/s and  $j_l=0.60\pm0.01$  m/s



**Figure 10** - Experimental data for  $j_g=1.40\pm0.07$  m/s and  $j_l=0.42\pm0.01$  m/s



**Figure 11** - Experimental data for  $j_g=0.38\pm0.03$  m/s and  $j_l=0.42\pm0.01$  m/s

For the first correlation, the absolute average errors were inferior to 21% for air-water, and 17% for air-Xanthan gum solution. For the second one, the absolute average errors were inferior to 22% for air-water, and 19% for air-Xanthan gum solution.

The worst predictions using the Abdul-Majeed's(1994) correlation occurred for the smallest non-slip liquid holdup values. In such cases, the experimental results were overpredicted (see Figure 10).



**Table 4** - Ratio of  $\lambda$  and  $H_L$  for two two-phase mixtures investigated in the present work

$j_L$	$j_g$	Air - Water	Air - Xanthan Gum
(m/s)	(m/s)	$H_L/\lambda$	$H_L/\lambda$
0.42	0.59	1.25	1.30
0.60	0.59	1.10	1.13
0.90	1.40	1.11	1.16
0.42	1.39	1.55	1.72
0.61	1.39	1.27	1.39
0.76	1.42	1.17	1.26
0.42	0.38	1.14	1.19
0.42	0.32	1.12	1.11

## CONCLUSIONS

For practical purposes, the differences observed in the liquid holdup values for the two mixtures investigated are due to the higher viscosity of the Xanthan gum solution, since the densities of both mixtures were very close to each other.

Similarly to the eccentric annular cases investigated by Nakagawa and Bourgoyne(1992), the inclination of the test section also affected the liquid holdup in the present work. Such effect depends on the relative velocity between both phases, which in turn depends on the gas and liquid superficial velocities.

Near the vertical positions, it seems that the liquid viscosity increases, the influence of test section inclination on liquid holdup decreases. In such cases, it was observed the liquid holdup values for gas-water mixture were always less than those for air-Xanthan gum solution. Implying that the relative velocities for air-Xanthan gum solution were greater than those for air-water.

Considering all the present experimental results and those by Nakagawa and Bourgoyne(1992), the Abdul-Majeed's(1994) correlation outperformed the Beggs and Brill's(1973) ones. The basic reason is that the first correlation takes into account the effects of the

liquid viscosity, while the other does not. Considering only the present experimental data, the performances of both correlations were almost the same.

The Abdul-Majeed's(1994) correlation overpredicted the experimental results for small non-slip liquid holdup values.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors are thankful PETROBRAS for supporting the experiments and allowing the publication of this paper.

## REFERENCES

- Andrade Jr., P. H., 1995, "Velocities and Void Fractions in Air/Water and Air/Xanthan Gum Slug Flows Through Annular Duct, in Different Inclinations", M.Sc. Dissertation, State University of Campinas, Campinas, S.P., Brazil. (In Portuguese)
- Beggs, H. D. and Brill, J. P., 1973, "A Study of Two-Phase Flow in Inclined Pipes", *Journal of Petroleum Technology*, pp. 607-617.
- de Sousa, J. T. V., 1995, "Relative Motion of Elongated Bubbles in Non-Newtonian Fluids in Inclined Pipes", M.Sc. Dissertation, State University of Campinas, Campinas, S.P., Brazil. (In Portuguese)
- Farooqi, S.I. e Richardson, J. F., 1982, "Horizontal Flow of Air and Liquid (Newtonian and Non-Newtonian) in a Smooth Pipe. Part I: A Correlation for Averaged Liquid Holdup", *Trans. Institution of Chemical Engineers*, Vol. 60, pp. 292-305.
- Khatib, Z. e Richardson, J. F., 1984, "Vertical Co-Current Flow of Air and Shear Thinning Suspension of Kaolin", *Chem. Eng. Res. Des.*, Vol. 62, pp. 139-154.
- Nakagawa, E. Y. and Bourgoyne Jr., A.T., 1992, "Experimental Study of Gas-Slip Velocity and Liquid Holdup in an Eccentric Annulus", *Multiphase Flow in Wells and Pipelines*, ASME - FED Vol. 144, pp. 71-79.
- Srivastava, R. P. S. and Narasimhamurthy, 1981, "Void Fraction and Flow Pattern During Two-Phase Flow of Pseudoplastic Fluids", *The Chemical Engineering Journal*, Vol. 21, pp. 165-176.
- Abdul-Majeed, G. H., 1994, "Liquid Holdup Correlation for Horizontal, Vertical and Inclined Two-Phase Flow", Paper 26279, *SPE-Society Petroleum Engineering*.
- Taitel, Y., Barnea, D. and Dukler, A.E., 1980, "Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes", *AIChE Journal*, Vol. 26, pp. 345-354.

## Appendix

inclin. degrees	Air - Water							Air - Xanthan Gum									
	$j_L$ (m/s)	$j_g$ (m/s)	liquid holdup			error %		$j_L$ (m/s)	$j_g$ (m/s)	liquid holdup			error %				
			experim.	B&Brill	Majeed	B&Brill	Majeed			experim.	B&Brill	Majeed	B&Brill	Majeed			
13	0.42	0.59	0.51	0.57	0.57	-13.11	-13.04	0.42	0.63	0.52	0.56	0.58	-8.70	-12.24			
30	0.42	0.55	0.54	0.62	0.62	-17.35	-17.84	0.42	0.58	0.53	0.61	0.63	-16.85	-21.99			
45	0.43	0.54	0.61	0.63	0.63	-5.10	-6.32	0.42	0.6	0.54	0.61	0.65	-14.65	-23.03			
55	0.42	0.6	0.51	0.61	0.63	-20.13	-23.94	0.42	0.57	0.57	0.62	0.65	-10.85	-17.80			
75	0.42	0.63	0.48	0.59	0.60	-21.11	-22.46	0.42	0.6	0.55	0.60	0.61	-10.57	-14.43			
90	0.42	0.62	0.48	0.56	0.57	-14.50	-17.35	0.43	0.58	0.54	0.57	0.59	-6.50	-10.52			
			abs. average error % =				15.22	16.82				abs. average error % =				11.35	16.67
			standard deviation =				5.84	6.45				standard deviation =				3.81	5.15

inclin. degrees	Air - Water							Air - Xanthan Gum								
	$j_i$	$j_g$	liquid holdup			error %		$j_i$	$j_g$	liquid holdup			error %			
	(m/s)	(m/s)	experim.	B&Brill	Majeed	B&Brill	Majeed	(m/s)	(m/s)	experim.	B&Brill	Majeed	B&Brill	Majeed		
13	0.6	0.6	0.53	0.61	0.56	-18.03	-6.67	0.54	0.609	0.570	0.61	0.57	-14.94	-6.53		
30	0.6	0.58	0.58	0.65	0.59	-15.73	-2.91	0.57	0.641	0.607	0.64	0.61	-16.44	-8.65		
45	0.6	0.55	0.59	0.66	0.60	-16.53	-3.01	0.59	0.650	0.615	0.65	0.61	-14.58	-5.99		
55	0.61	0.59	0.56	0.65	0.60	-20.05	-8.56	0.6	0.56	0.59	0.65	0.62	-15.57	-6.13		
75	0.61	0.63	0.52	0.63	0.58	-22.91	-11.97	0.61	0.59	0.57	0.64	0.59	-16.16	-5.48		
90	0.61	0.61	0.51	0.61	0.56	-19.64	-10.29	0.61	0.58	0.59	0.61	0.58	-5.82	3.63		
			abs. average error % =				18.81	7.23			abs. average error % =				13.92	6.07
			standard deviation =				2.62	3.75			standard deviation =				4.03	4.30
13	0.88	1.4	0.51	0.52	0.48	-1.37	6.80	0.91	1.44	0.45	0.52	0.49	-11.89	-5.94		
30	0.9	1.36	0.4	0.54	0.52	-23.67	-19.61	0.92	1.34	0.44	0.55	0.54	-18.94	-16.04		
45	0.91	1.44	0.43	0.54	0.53	-18.45	-16.68	0.91	1.43	0.44	0.54	0.55	-17.00	-17.53		
55	0.9	1.39	0.41	0.54	0.53	-22.09	-19.65	0.91	1.4	0.45	0.54	0.55	-16.20	-15.89		
75	0.9	1.36	0.44	0.54	0.50	-17.70	-11.56	0.9	1.35	0.51	0.54	0.53	-6.00	-1.30		
90	0.91	1.38	0.42	0.52	0.48	-16.99	-10.21	0.9	1.43	0.45	0.51	0.50	-10.95	-6.34		
			abs. average error % =				16.71	14.08			abs. average error % =				13.50	10.51
			standard deviation =				7.96	9.95			standard deviation =				4.79	6.81
13	0.42	1.39	0.39	0.42	0.46	-4.24	-11.93	0.42	1.43	0.41	0.41	0.48	-0.01	-9.83		
30	0.43	1.32	0.34	0.46	0.52	-17.49	-27.87	0.42	1.4	0.4	0.44	0.54	-6.63	-21.13		
45	0.42	1.35	0.38	0.45	0.54	-11.54	-25.32	0.42	1.33	0.39	0.45	0.57	-10.37	-26.70		
55	0.43	1.47	0.36	0.44	0.52	-12.19	-25.20	0.43	1.44	0.39	0.44	0.55	-8.33	-24.19		
75	0.42	1.43	0.36	0.43	0.49	-11.31	-20.82	0.41	1.4	0.38	0.43	0.52	-8.42	-20.50		
90	0.43	1.39	0.34	0.41	0.47	-10.80	-19.01	0.41	1.41	0.4	0.40	0.48	-0.23	-11.82		
			abs. average error % =				11.26	21.69			abs. average error % =				5.67	19.03
			standard deviation =				4.23	5.78			standard deviation =				4.46	6.76
13	0.61	1.38	0.39	0.47	0.48	-13.03	-14	0.61	1.41	0.4	0.46	0.49	-10.81	-13.68		
30	0.61	1.32	0.39	0.50	0.53	-18.15	-22.64	0.6	1.38	0.41	0.49	0.55	-13.38	-21.19		
45	0.6	1.5	0.36	0.48	0.53	-18.29	-26.21	0.61	1.32	0.43	0.50	0.57	-12.73	-22.22		
55	0.61	1.44	0.41	0.49	0.53	-13.05	-20.34	0.61	1.44	0.43	0.49	0.56	-9.79	-19.81		
75	0.61	1.39	0.38	0.49	0.51	-17.26	-20.30	0.61	1.36	0.44	0.49	0.53	-8.94	-14.28		
90	0.61	1.4	0.38	0.46	0.48	-12.91	-15.34	0.61	1.35	0.45	0.47	0.50	-2.93	-7.18		
			abs. average error % =				15.45	19.80			abs. average error % =				9.76	16.39
			standard deviation =				2.71	4.54			standard deviation =				3.75	5.75
13	0.75	1.37	0.44	0.50	0.48	-10.57	-6.95	0.76	1.45	0.41	0.49	0.49	-13.56	-12.15		
30	0.76	1.35	0.43	0.52	0.52	-16.41	-16.32	0.76	1.36	0.45	0.52	0.55	-12.91	-15.35		
45	0.75	1.47	0.4	0.51	0.53	-18.09	-21.44	0.76	1.39	0.42	0.52	0.56	-17.15	-21.89		
55	0.76	1.41	0.4	0.52	0.53	-19.67	-21.66	0.76	1.41	0.45	0.52	0.56	-12.14	-16.85		
75	0.77	1.38	0.42	0.52	0.51	-16.84	-14.87	0.76	1.39	0.47	0.51	0.53	-8.24	-8.83		
90	0.76	1.35	0.4	0.50	0.48	-16.28	-13.68	0.75	1.34	0.48	0.50	0.50	-3.20	-2.38		
			abs. average error % =				16.31	15.82			abs. average error % =				11.20	12.91
			standard deviation =				3.09	5.48			standard deviation =				4.85	6.79
13	0.43	0.38	0.6	0.65	0.61	-12.66	-2.27	0.42	0.41	0.56	0.64	0.63	-17.15	-13.11		
30	0.43	0.38	0.64	0.68	0.64	-11.84	1.18	0.42	0.38	0.62	0.68	0.66	-15.69	-8.87		
45	0.43	0.35	0.65	0.70	0.64	-13.96	1.63	0.42	0.37	0.63	0.69	0.67	-15.64	-9.15		
55	0.42	0.39	0.59	0.68	0.65	-22.22	-13.48	0.43	0.39	0.66	0.68	0.67	-6.42	0.39		
75	0.42	0.4	0.58	0.67	0.63	-20.79	-11.16	0.42	0.37	0.63	0.68	0.65	-13.03	-3.84		
90	0.42	0.42	0.54	0.62	0.60	-17.90	-14.04	0.42	0.4	0.62	0.63	0.63	-2.55	-0.13		
			abs. average error % =				16.56	7.29			abs. average error % =				11.75	5.91
			standard deviation =				4.38	7.35			standard deviation =				5.91	5.45
13	0.43	0.31	0.66	0.68	0.62	-6.09	11.76	0.62	0.683	0.646	0.68	0.64	-16.46	-4.19		
30	0.42	0.3	0.63	0.71	0.64	-22.78	-2.66	0.6	0.710	0.663	0.71	0.65	-27.61	-13.10		
45	0.42	0.33	0.66	0.71	0.65	-13.38	3.85	0.67	0.717	0.672	0.72	0.66	-14.34	2.53		
55	0.42	0.33	0.67	0.71	0.65	-10.76	7.39	0.42	0.32	0.66	0.71	0.66	-14.31	-0.45		
75	0.43	0.34	0.6	0.69	0.63	-23.37	-7.44	0.43	0.32	0.65	0.70	0.65	-14.57	1.35		
90	0.42	0.33	0.58	0.66	0.62	-19.03	-9.37	0.42	0.32	0.62	0.66	0.63	-11.5	-3.57		
			abs. average error % =				15.90	7.08			abs. average error % =				16.48	4.20
			standard deviation =				6.96	8.44			standard deviation =				5.67	5.65



## HEAT TRANSFER TO HERSCHEL-BULKLEY FLUIDS IN LAMINAR FLOW THROUGH SHORT TUBES

Márcia Soares, Paulo R. Souza Mendes and Mônica F. Naccache  
Department of Mechanical Engineering, Pontifícia Universidade Católica  
Rio de Janeiro, RJ 22453-900, Brazil



### SUMMARY

The heat transfer problem that occurs during the laminar flow of a Herschel-Bulkley fluid through the entrance portion of tubes is studied. The Nusselt number is obtained as a function of the axial coordinate, yield stress, and power-law exponent. The thermal boundary condition of uniform wall temperature is examined. Among other results, it is seen that the developing length decreases as the fluid behavior departs from the Newtonian one.

### INTRODUCTION

Non-isothermal viscoelastic flow situations are present in numerous processes found in the industries of food, cosmetics, paint, plastics, petroleum and many other. Some important non-Newtonian engineering fluids frequently involved in industrial processes are sludge, slurries, grease, paper pulp, polymer melts and solutions, aqueous foams, suspensions, most food products, cement, drilling mud, tooth paste, to name a few. In these processes, the temperature distribution in the liquid must be evaluated if its rheology is to be controlled.

As an engineering example, the process of drilling petroleum wells may be mentioned. Drill muds have a key role in this process, and are typically highly non-Newtonian in nature. They should have the correct density to provide the pressure needed for well integrity. Their rheological properties must be such as to allow carrying rock particles that are generated during drill operation, with a minimum of pumping power. This requires a relatively low viscosity, but also a non-zero yield stress limit. Also, the success of a well cementing operation depends to a great extent on the knowledge and control of the rheological properties of the cement.

Rheological properties are often strong functions of temperature. Because the fluids exchange heat with the surroundings as they flow, the temperature distributions can only be determined if heat transfer coefficients are known.

In engineering applications, often the main goal is to obtain a flow rate/pressure drop, or flow rate/drag force relationship, for flows through ducts and other shear flows. In these cases, an excellent representation of the mechanical behavior of viscoelastic liquids is obtained through the Generalized Newtonian Liquid model (GNL), in conjunction with a viscosity function of the Herschel-Bulkley type:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1)$$

where

$$\eta = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1}, & \text{if } \tau > \tau_0; \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

In eq. (1),  $\boldsymbol{\tau}$  is the extra-stress tensor,  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  the rate-of-deformation tensor, defined as  $\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T$ , where  $\mathbf{v}$  is the velocity vector. In eq. (2),  $\tau_0$  is the yield stress,  $\tau \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr } \boldsymbol{\tau}^2}$  a measure of the magnitude of  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\dot{\gamma} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr } \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2}$  a measure of the magnitude

of  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ ,  $K$  the consistency index, and  $n$  the power-law exponent. These three parameters ( $\tau_0$ ,  $K$  and  $n$ ) are normally determined via least squares fit to experimental shear data.

While the power-law exponent,  $n$ , is often insensitive to the temperature of the liquid, this is typically not the case for both  $K$  and  $\tau_0$ .

For laminar flow of power-law fluids<sup>1</sup> in ducts, some heat transfer information is available. For fully developed flow and uniform wall temperature, Bird *et al.* (1987) give  $Nu = 3.657, 3.949$  and  $4.175$  respectively for the power-law exponent  $n = 1, 0.5$  and  $1/3$ . For fully developed flow and uniform wall heat flux, Irvine and Karni (1987) present

$$Nu = \frac{8(5n+1)(3n+1)}{31n^2+12n+1} \quad (3)$$

Joshi and Bergles (1980a, 1980b) reported a comprehensive study for power-law fluids, including both entrance region and fully developed results. In this study, they obtained correlations for  $q_w = \text{constant}$ , and considered the temperature dependence of  $K$ . Another detailed study for flow and heat transfer to pseudo-plastic liquids is presented by Scirocco *et al.* (1985). In both studies, at the inlet of the heated portion of the test section, the velocity profiles were already fully developed.

For turbulent flow, the thermal boundary condition becomes of minor importance, and the entry length becomes much shorter. Moreover, the shear rates are so large that the yield stress limit becomes unimportant. Therefore, information for power-law fluids and for fully developed flow can be employed for a wide range of situations. Irvine and Karni (1987) recommend Yoo's correlation, valid in the range  $0.2 \leq n \leq 0.9$ :

$$j_H \equiv \frac{Nu}{RePr^{1/3}} = \frac{0.0152}{Re^{0.155}} \quad (4)$$

where

$$Re = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} D^n}{K} \left( \frac{2(3n+1)}{n} \right)^{1-n} \quad (5)$$

and

$$Pr = \frac{K c_p}{\kappa} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{n-1} \left( \frac{8\bar{u}}{D} \right)^{n-1} \quad (6)$$

<sup>1</sup>A power-law fluid has a viscosity function that is well represented by eq. (2) with  $\tau_0 = 0$ .

In the above expressions,  $D$  is the tube diameter,  $\rho$  the mass density,  $\bar{u}$  the average velocity,  $c_p$  the specific heat, and  $\kappa$  the thermal conductivity. Yoo's correlation can be used for  $Re$ 's in the range  $3000 \leq Re \leq 90000$ . From eq. (4), it can be seen that  $j_H$  is a rather weak function of  $Re$ .

Due to the industrial importance of non-Newtonian liquids that possess a non-zero yield stress, it is rather surprising that heat transfer information is so scarce in the open literature. Vradis *et al.* (1992), analyzed numerically the heat transfer problem for entrance-region flows of Bingham, constant-property liquids through tubes. They considered the case of simultaneous velocity and temperature development. More recently, an experimental and theoretical heat transfer study for Herschel-Bulkley liquids is reported by Nouar *et al.* (1994). They also investigated the entrance region, but considered fully developed velocity profiles. An interesting discussion regarding the impact of temperature-dependent rheological properties on velocity profiles and Nusselt numbers can be found in this paper.

The purpose of the research reported here is to present laminar heat transfer coefficients for entrance-region flows in isothermal-wall tubes ( $T_w = \text{constant}$ ) of yield-pseudoplastic liquids. The case of simultaneous velocity and temperature development is considered, and the liquids are assumed to obey the Herschel-Bulkley model. It is part of a research program whose first results, for fully developed flows of Herschel-Bulkley fluids, were recently reported by Souza Mendes and Naccache (1995). The conservation equations of mass, linear momentum and energy are solved numerically via a finite volume technique. Velocity, pressure and temperature fields are presented and discussed. The Nusselt number is also determined as a function of the (inverse) Graetz number and rheological parameters, namely, a dimensionless form of the yield stress limit and the power-law exponent.

## ANALYSIS

The flow under analysis is steady and axisymmetric. The thermophysical and rheological properties of the flowing fluid are independent of temperature. The fluid is a Generalized Newtonian Liquid (eq. (1)) whose viscosity function is of the Herschel-Bulkley type (eq. (2)), and enters the tube with uniform velocity and temperature profiles. The tube inner wall is kept at a uniform temperature,  $T_w$ , which is different from  $T_i$ , the inlet temperature.

**Conservation of momentum: fully developed flow.** The analysis begins by choosing characteristic quantities. Appropriate choices are very important, in order to yield convenient dimensionless forms for the governing equations. In this work we employ the fully developed values of some key quantities as characteristic.

For example, the characteristic shear rate,  $\dot{\gamma}_c$ , is chosen to be the one that occurs at the wall in the fully developed region:

$$\dot{\gamma}_c \equiv \left( \frac{\tau_{R,fd} - \tau_0}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (7)$$

where  $\tau_{R,fd}$  is the shear stress at the wall in the fully developed region:

$$\tau_{R,fd} \equiv -[\tau_{rx}(R)]_{fd} = - \left( \frac{dp}{dx} \right)_{fd} \frac{R}{2} = \frac{\Delta p R}{L_{fd} 2} \quad (8)$$

The subscript "fd" indicates that the quantity is to be evaluated in the fully developed region. In the above expression,  $p$  is the pressure,

$x$  the axial coordinate,  $R$  the tube radius, and  $L_{fd}$  a tube length in the fully developed region to whose ends the pressure difference  $\Delta p$  corresponds.

The characteristic viscosity is chosen as:

$$\eta_c \equiv \eta(\dot{\gamma}_c) = \frac{\tau_{R,fd}}{\dot{\gamma}_c} \quad (9)$$

Defining a dimensionless shear rate as  $\dot{\gamma}' \equiv \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c$  and the dimensionless viscosity function as  $\eta' \equiv \eta/\eta_c$ , we can write:

$$\eta' = \begin{cases} \frac{r'_0}{\dot{\gamma}'^n} + (1 - r'_0)\dot{\gamma}'^{n-1}, & \text{if } \tau' > r'_0; \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10)$$

where

$$\tau' \equiv \frac{-\tau_{rx}}{\tau_{R,fd}} \quad \text{and} \quad r'_0 \equiv \frac{\tau_0}{\tau_{R,fd}} \quad (11)$$

In the fully developed region the shear stress is a linear function of the radial coordinate,  $r$ , i.e.,

$$\tau_{rx}(r) = -\tau_{R,fd} \frac{r}{R} \quad (12)$$

or, defining  $r' \equiv r/R$ ,

$$\tau' = r' \quad (13)$$

From eq. (13) it is easy to observe that, in the fully developed portion of the flow,  $r'_0$  has an important physical meaning: it is the dimensionless radial position where  $\tau_{rx} = -\tau_0$ . In other words, it is the radius of the plug-flow region that occurs in the flow core due to the existence of a non-zero yield stress. Because eq. (13) holds for fully developed flow only, this interpretation of  $r'_0$  is not applicable in the entrance region.

For the Herschel-Bulkley fluid, and for  $\tau > \tau_0$ ,

$$\tau' = r'_0 + (1 - r'_0)\dot{\gamma}'^n \quad (14)$$

Therefore, for fully developed flow conditions, eq. (15) becomes

$$r'_0 + (1 - r'_0)\dot{\gamma}'^n = r' \quad (15)$$

Defining a dimensionless axial velocity as

$$u' \equiv \frac{u}{R\dot{\gamma}_c} \quad (16)$$

and observing that

$$\dot{\gamma}' = -\frac{1}{\dot{\gamma}_c} \frac{du}{dr} = -\frac{du'}{dr'} \quad (17)$$

we can write eq. (15) as

$$-\frac{du'}{dr'} = \left( \frac{r' - r'_0}{1 - r'_0} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (18)$$

Integrating this equation and rearranging, we get

$$u'(r') = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{1 - r'_0} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left[ (1 - r'_0)^{\frac{n+1}{n}} - (r' - r'_0)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (19)$$

if  $r' > r'_0$ , and

$$u'(r') = \frac{n}{n+1} (1 - r'_0) \quad (20)$$



if  $r' \leq r'_0$ .

From the definition of average velocity,

$$\bar{u}' = 2 \int_0^1 u' r' dr' \quad \text{or} \quad \bar{u}' = u'_0 r'_0{}^2 + 2 \int_{r'_0}^1 u' r' dr' \quad (21)$$

where  $u'_0 \equiv u'(r'_0)$ . Integrating, we get the following expression for  $\bar{u}'$ :

$$\bar{u}' = \frac{2n}{n+1} \left[ \frac{1}{2} (1 - r'_0) - \frac{n}{2n+1} (r'_0) (1 - r'_0)^2 - \frac{n}{3n+1} (1 - r'_0)^3 \right] \quad (22)$$

It is observed that eq. (22) reduces to Hagen-Poiseuille's, for the Newtonian case, and to the corresponding results for (i) the Bingham plastic (Buckingham equation) and (ii) the power-law fluid.

Another result of potential interest, easily obtained by eq. (22), is an expression for the fully-developed wall shear rate,  $\dot{\gamma}_c$ , as a function of the average velocity,  $\bar{u}$ :

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\bar{u}}{\bar{u}'R} = \frac{\bar{u}}{R} \frac{n+1}{2n} \left[ \frac{1}{2} (1 - r'_0) - \frac{n}{2n+1} (r'_0) (1 - r'_0)^2 - \frac{n}{3n+1} (1 - r'_0)^3 \right]^{-1} \quad (23)$$

As expected, when  $r'_0 = 0$ , the above equation reduces to the well-known expression for the fully-developed wall shear rate observed in flows of power-law fluids, namely:

$$\dot{\gamma}_c, \text{ power law} = \left( \frac{8\bar{u}}{D} \right) \frac{3n+1}{4n} \quad (24)$$

**Conservation of mass and momentum: entrance region.** For the entrance region steady flow of a Herschel-Bulkley fluid through a duct, the dimensionless mass and momentum equations are:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial(r'v')}{\partial r'} = 0 \quad (25)$$

$$v' \frac{\partial u'}{\partial r'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{2\bar{u}'}{Re} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( \eta' r' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial}{\partial x'} \left( \eta' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \right] \quad (26)$$

$$v' \frac{\partial v'}{\partial r'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} = - \frac{\partial p'}{\partial r'} + \frac{2\bar{u}'}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (\eta' r' v') \right) + \frac{\partial}{\partial x'} \left( \eta' \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right] \quad (27)$$

In these equations,  $u' = u/R\dot{\gamma}_c$ ,  $v' = v/R\dot{\gamma}_c$ ,  $x' = x/R$ , and  $p' = p/\rho(R\dot{\gamma}_c)^2$ . The Reynolds number is defined as

$$Re \equiv \frac{\rho \bar{u} D}{\eta_c} = \frac{2\rho(\bar{u}')^{n-1}(\bar{u})^{2-n}R^n}{K + \tau_0 \frac{(\bar{u}')^n R^n}{(\bar{u})^n}} \quad (28)$$

It is interesting to observe that, when  $\tau_0 = 0$ , eq. (28) reduces to eq. (5), which is a widely used expression for the Reynolds number for flows of power-law fluids.

As  $x' \rightarrow \infty$ , the dimensionless  $x$ -component of velocity,  $u'(r', x')$ , should approach the analytical solution for fully-developed flow, given by eqs. (19) and (20).

The boundary conditions are the usual no-slip condition at the wall, the symmetry condition at the centerline, uniform velocity profile at the tube inlet, and locally parabolic flow at the outlet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial r'}(0, x') &= 0 & v'(0, x') &= 0 \\ u'(1, x') &= 0 & v'(1, x') &= 0 \\ u'(r', 0) &= \bar{u}' & v'(r', 0) &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial x'}(r', L') &= 0 & \frac{\partial v'}{\partial x'}(r', L') &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

where  $L' \equiv L/R$  is the dimensionless tube length.

**Modified bi-viscosity model.** The viscosity function as given by eq. (10) is not convenient to handle numerically. The usual approach in numerical schemes for flows of Bingham plastics is to replace it with another viscosity function, the so called *bi-viscosity model* (Beverly and Tanner, 1992). This idea can be easily extended to Herschel-Bulkley fluids, yielding the following approximate representation of the viscosity function:

$$\eta' = \begin{cases} \frac{r'_0}{\dot{\gamma}'} + (1 - r'_0) \dot{\gamma}'^{n-1} & \text{if } \dot{\gamma}' > \dot{\gamma}'_{\text{small}} \\ \eta'_{\text{large}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

Beverly and Tanner (1992) recommend

$$\eta'_{\text{large}} = 1000 \quad (31)$$

Therefore,

$$\dot{\gamma}'_{\text{small}} = \frac{r'_0}{1000 - (1 - r'_0) \dot{\gamma}'_{\text{small}}^{n-1}} \simeq \frac{r'_0}{1000} \quad (32)$$

**Conservation of energy.** We now turn to the thermal problem for uniform wall temperature ( $T_w = \text{constant}$ ). Neglecting viscous dissipation effects and assuming that the thermal conductivity is a constant, the dimensionless energy equation for this situation is

$$u' \frac{\partial \theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \theta}{\partial r'} = \frac{2\bar{u}'}{Pe} \left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial \theta}{\partial r'} \right) \right\} \quad (33)$$

where  $\theta \equiv (T - T_w)/(T_i - T_w)$  is the dimensionless temperature,  $Pe \equiv \bar{u}D/\alpha$  the Peclet number, and  $\alpha \equiv \kappa/(\rho c_p)$  the thermal diffusivity. Equation (33) shows that, when viscous dissipation effects are negligible, the influence of rheological behavior on heat transfer is conveyed through the velocity field only.

The boundary conditions for eq. (33) are

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial r'}(0, x') &= 0 & \theta(1, x') &= 0 \\ \theta(r', 0) &= 1 & \frac{\partial \theta}{\partial x'}(r', L') &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

For this situation, the Nusselt number becomes

$$Nu(x') \equiv \frac{hD}{\kappa} = - \frac{2}{\theta_b(x')} \frac{\partial \theta}{\partial r'}(1, x') \quad (35)$$

where

$$\theta_b \equiv 2 \int_0^1 \frac{u'}{\bar{u}'} \theta r' dr' \quad (36)$$

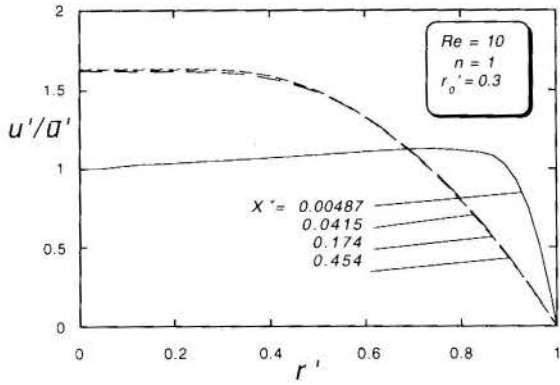


Figure 1: Velocity profiles – Bingham fluid

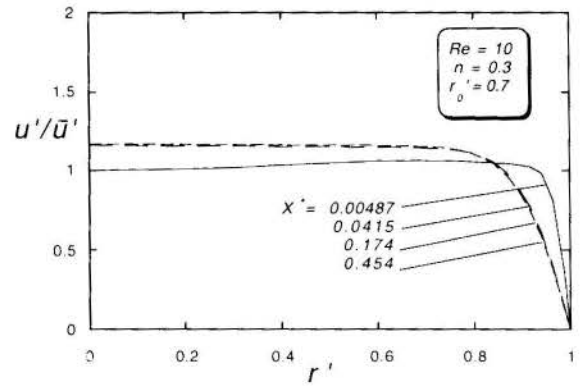


Figure 2: Velocity profiles – Herschel-Bulkley fluid

**Numerical solution.** The conservation equations are discretized by the finite volume method described by Patankar (1980). Staggered velocity components are employed to avoid unrealistic pressure fields. The pressure-velocity coupling is handled by the SIMPLE algorithm (Patankar, 1980). The resulting algebraic system is solved by the TDMA line-by-line algorithm (Patankar, 1980) with the block correction algorithm (Settari and Aziz, 1973) to increase the convergence rate.

A non-uniform  $140 \times 32$  grid is employed, with points concentrated toward the inlet region in the  $x$ -direction, and toward the wall in the  $r$ -direction, to resolve the sharp gradients in these regions. The domain length in the axial direction,  $L$ , is equal to fifteen diameters for the low  $Pe$  cases, and ninety five diameters for the high  $Pe$  cases. Extensive grid tests were performed, which attested that the solutions obtained are grid-independent.

## RESULTS AND DISCUSSION

Results for some representative combinations of the governing parameters are now presented and discussed.

Figures 1 and 2 show velocity profiles at four different axial positions along the entrance region. It is seen in these figures that, close to the tube inlet, there is a velocity overshoot near the wall. This overshoot is related to axial diffusion of momentum, and therefore cannot be predicted by formulations that consider radial diffusion only. Although milder than the one observed for Newtonian fluids, this effect is not negligible, and might have important impact in heat transfer.

Temperature profiles at some axial locations are seen in Figs. 3 and 4. In order to eliminate  $x$ -dependence in the fully developed region, these profiles are presented as a ratio of  $\theta$  to  $\theta_b$ . Because the Prandtl number, defined as  $Pr \equiv \eta_c/\rho\alpha = Pe/Re$ , is equal to 5, the temperature profiles for the cases shown take larger development lengths than the corresponding velocity profiles, shown in Figs. 1 and 2.

Figure 5 shows the Nusselt number variation with the inverse Graetz number,  $x^+ \equiv x'/Pe$ , for a number of combinations of  $r'_0$  and  $n$ . It is seen that, whenever the velocity gradient is high in the neighborhood of the wall, the Nusselt number is also high. High  $r'_0$ 's imply high velocity gradients near the wall, as does low

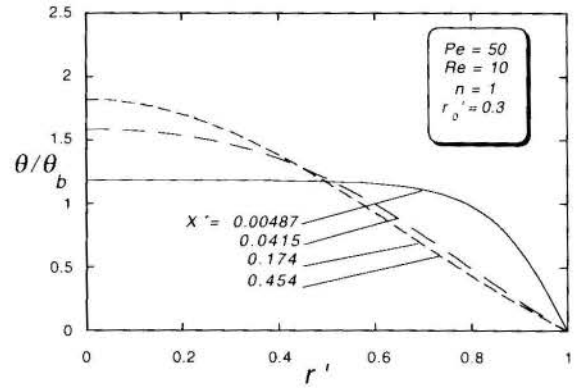


Figure 3: Temperature profiles – Bingham fluid

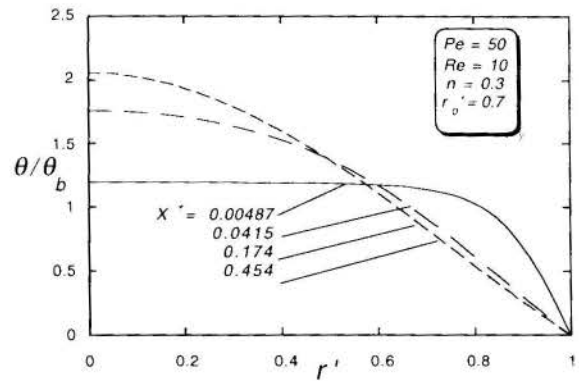


Figure 4: Temperature profiles – Herschel-Bulkley fluid

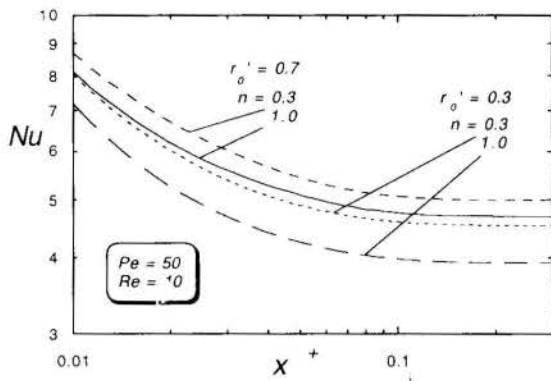


Figure 5: Entrance-region  $Nu$  for different  $r'_0$ 's and  $n$ 's

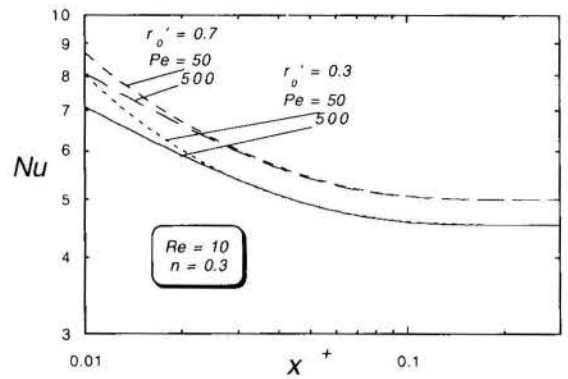


Figure 7: Entrance-region  $Nu$  for different  $r'_0$ 's and  $Pe$ 's

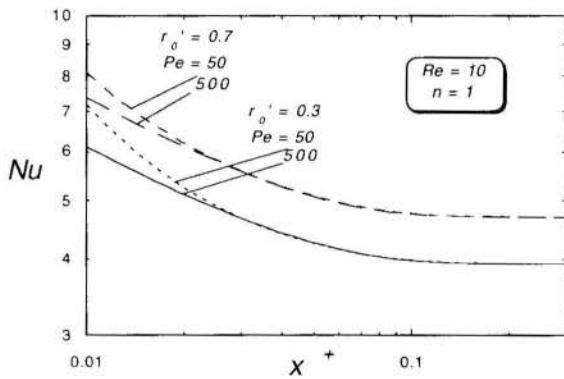


Figure 6: Entrance-region  $Nu$  for different  $r'_0$ 's and  $Pe$ 's

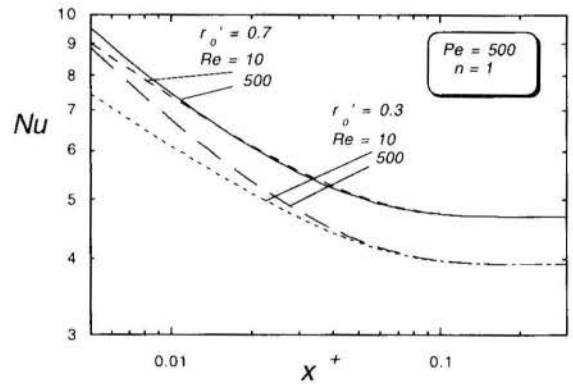


Figure 8: Entrance-region  $Nu$  for different  $r'_0$ 's and  $Re$ 's

$n$ 's. For example, the curve for  $r'_0 = 0.7$  and  $n = 0.3$  falls above all other in Fig. 5, while the curve for  $r'_0 = 0.3$  and  $n = 1.0$  gives the lowest  $Nu$  for a given  $x^+$ .

Figures 6 and 7 illustrate the entrance-region Nusselt number variation with the Peclet number, for some combinations of the governing parameters. It is interesting to observe that axial conduction is important in the vicinity of the tube inlet only, and its effect is to increase the Nusselt number. Larger yield stresses tend to decrease the axial conduction effect. On the other hand, axial conduction is not greatly affected by the power-law exponent in the range investigated.

For the constant-property situations examined in this paper, the Nusselt number depends on the fluid rheology through its influence on the velocity profile only. Therefore, axial diffusion of momentum—which affects the velocity field—is expected to affect the Nusselt number. This is illustrated in Figs. 8 and 9. It is seen in these figures that the effect is restricted to the neighborhood of the tube inlet, and is negligible for high yield stress fluids. However, it becomes important as the rheological behavior approaches the Newtonian (higher  $n$ 's and lower  $r'_0$ 's).

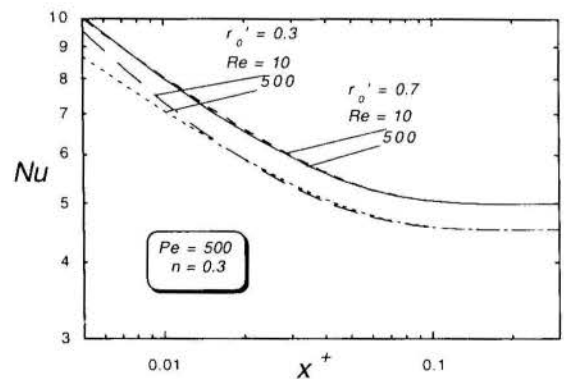


Figure 9: Entrance-region  $Nu$  for different  $r'_0$ 's and  $Re$ 's

## CONCLUSIONS

This paper has studied the heat transfer problem in the entrance-region flow of Herschel-Bulkley fluids. The case of uniform wall temperature and simultaneous development of velocity and temperature profiles is examined.

For fully developed flow, an analytical solution for the velocity profile is presented, which provides the characteristic quantities needed in the definition of the appropriate dimensionless governing parameters. Although in essence this analytical solution is already available in the open literature, the form of the solution presented here has some advantages. It is more compact, and gives the velocity in terms of two convenient dimensionless parameters, namely,  $n$  and  $r'_0$ .

The governing equations are solved numerically via a finite-volume technique. Results are presented in the form of velocity and temperature profiles, and entrance-region Nusselt number distributions.

Among other results, it is observed that the velocity profile presents an overshoot near the wall, in the neighborhood of the tube inlet, and that the cases for which the velocity gradient at the wall is high yield higher Nusselt numbers.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Financial support for the present research was provided by Petrobras S. A., CNPq and MCT.

## REFERENCES

- Beverly C R, R I Tanner 1992, Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics* **42**, 85–115.
- Bird R B, R C Armstrong, O Hassager 1987, Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Wiley.
- Irvine, Jr. T F, J Karni 1987, Non-Newtonian fluid flow and heat transfer, in *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, edited by Kakaç S, R K Shah, W Aung, Wiley, 20.1–20.57.
- Joshi S D, A E Bergles 1980a, Experimental Study of laminar heat transfer to in-tube flow of non-Newtonian fluids, *J. Heat Transfer* **102**, 397–401.
- Joshi S D, A E Bergles 1980b, Analytical Study of laminar heat transfer to in-tube flow of non-Newtonian fluids, *AICHE Symposium Series* no. 199, **76**, 270–281.
- Nouar C, R Devienne, M Lebouche 1994, Convection thermique pour un fluide de Herschel-Bulkley dans la région d'entrée d'une conduite, *Int. J. Heat Mass Transfer* **37**, 1–12.
- Patankar S V 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation.
- Scirocco V, R Devienne, M Lebouche 1985, Écoulement laminaire et transfert de chaleur pour un fluide pseudo-plastique

dans la zone d'entrée d'un tube, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 91–99.

- Settari A, K Aziz 1973, A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations, *SIAM J. Numerical Analyses* **10**, 506–521.
- Souza Mendes P R, M F Naccache 1995, Heat transfer to Herschel-Bulkley fluids in laminar fully developed flow through tubes, *COBEM-CIDIM/95*, Belo Horizonte (in CD-ROM).
- Vradis G C, J Dougher, S Kumar 1992, Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic, *Int. J. Heat Mass Transfer* **35**, 543–552.





## EXPERIMENTS, COMPUTATION AND THEORY FOR FLOWS OF BINGHAM LIQUIDS THROUGH IDEAL POROUS MEDIA

P. R. Souza Mendes, M. F. Naccache, A. O. Nieckele

C. V. M. Braga, L. F. A. Azevedo and R. L. A. Santos\*

Department of Mechanical Engineering, Pontifícia Universidade Católica

Rio de Janeiro, RJ 22453-900, Brazil



### SUMMARY

Experiments have been performed to study the flow of a Bingham liquid through an array of rods. The mass and momentum conservation equations have been solved numerically, in conjunction with the bi-viscosity model, which also yielded a flow rate/pressure drop relationship. A capillary theory has been developed to determine an analytical relationship between the flow rate and pressure drop for these flows. The predictions of this theory are in good agreement with the experimental and numerical results.

### INTRODUCTION

When a petroleum well is drilled, the pressure in the porous rock near the well decreases, altering the thermodynamic state of the petroleum. Light hydrocarbons volatilize, which causes the temperature and solubility of the heavy hydrocarbons to decrease. In the case of waxy crudes, paraffins tend to precipitate off the oil.

The presence of sub-micron precipitated paraffin crystals cause the oil to become a colloidal dispersion, whose viscosity is high, and whose mechanical behavior is often non-Newtonian. Typically the oil acquires a non-zero yield stress and a shear thinning viscosity. Elasticity is also possible, although less common.

Flows of non-Newtonian fluids through porous media do not obey Darcy's law. When the fluid is elastic, the converging-diverging passages found in porous media—which impose extensional kinematics—cause normal stresses to reach high values, becoming the main source of flow resistance (Durst *et al.*, 1987; Souza Mendes and Naccache, 1994a).

Purely viscous non-Newtonian fluids are well represented by the generalized Newtonian constitutive relation. If the fluid has a yield stress, often the Bingham plastic viscosity function is representative of rheological data. For oils with this type of rheological behavior, Wu *et al.* (1990) proposed a seepage velocity/pressure gradient relation where a "yield pressure gradient"  $G$  appears, which is a function of both the fluid and the porous medium:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -\frac{K_N}{\mu_p} \left[ 1 - \frac{G}{|\text{grad } p|} \right] \text{grad } p, & \text{if } |\text{grad } p| > G; \\ \mathbf{0}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

where  $\mathbf{u}$  is the seepage velocity,  $\mu_p$  the plastic viscosity,  $K_N$  the Newtonian permeability and  $p$  the pressure. This equation has been proven useful in reproducing experimental data, via least-squares fits to the data for the determination of  $G$ , for each combination of porous medium and fluid. However, it will be shown that Wu's equation has a qualitative behavior that is not in agreement with the one observed experimentally for low flow rates.

The present work reports a performance evaluation of an equation firstly proposed by Souza Mendes and Naccache (1994b) for flows of Bingham liquids through porous media. The goal of this evaluation is to assess its capability of describing the influence of rheological parameters.

To this end, the flow through an ideal porous medium is studied numerically and experimentally. The geometry of this ideal porous medium differs significantly from the one assumed in the theory which led to the proposed equation. The flow rate/pressure drop relationship obtained from these studies are then compared with the predictions of the proposed equation.

### THEORY

The simple theory presented briefly in this section is aimed at obtaining a relationship between the flow rate and the pressure drop for the flow of a Bingham liquid through porous media. More details of this theory can be found in Souza Mendes and Naccache (1994b).

The fluid considered here has a Binghamian behavior, which is accounted for through the use of the Generalized Newtonian Liquid (GNL) model:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad (2)$$

where  $\boldsymbol{\tau}$  is the extra-stress,  $\mathbf{D} \equiv (\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T)/2$  the rate of deformation, and  $\dot{\gamma} = \sqrt{2 \text{tr } \mathbf{D}^2}$  a scalar measure of its intensity.

For the Bingham liquid, the viscosity function is

$$\eta = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p, & \text{if } \tau \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr } \boldsymbol{\tau}^2} > \tau_0; \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

where  $\tau_0$  is the fluid yield stress.

Starting with a differential momentum balance for the fully developed flow through a tube, it is possible to obtain an expression for the flow rate as a function of the pressure drop for this non-Newtonian fluid:

$$Q = \frac{\pi \tau_R R^3}{4\mu_p} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_R} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_R} \right)^4 \right\} \quad (4)$$

\*Petrobras/CENPES/DIGER, Ilha do Fundão, Q7, Rio de Janeiro, RJ 24949-900, Brazil.

where  $\tau_R = R\Delta p/2L$  is the shear stress at the tube wall,  $R$  the tube radius, and  $\Delta p$  the pressure drop along the tube length  $L$ . Equation (4) is the so called Buckingham's equation, which applies only when  $\tau_R > \tau_0$ .

For high flow rates,  $\tau_R$  is much larger than  $\tau_0$ , and the term  $\frac{1}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_R} \right)^4$  is much smaller than the other terms in eq. (4), and often can be neglected. The error in omitting this term is less than 1.8% when  $\tau_0/\tau_R < 0.4$ . However, for low flow rates, the fourth power term is of the same order of magnitude of the others, and cannot be neglected.

Classic capillary theories assume that the porous medium is composed of several parallel capillary tubes (Scheidegger, 1974). Then eq. (4) is applied to each of the tubes, and the average velocity through the medium is taken as the average velocity through each tube times the porosity. Equation (4) can be written in the following form after neglecting the above mentioned term and applying the ideas of the capillary theories:

$$u = \frac{\phi R^2}{8} \frac{\Delta p}{L \mu_p} \left\{ 1 - \frac{8}{3} \left( \frac{\tau_0/R}{\Delta p/L} \right) \right\} \quad (5)$$

Equation (5) can be applied locally if it is re-written in vector form as

$$\mathbf{u} = -\frac{\phi R^2}{8 \mu_p} \left[ 1 - \frac{8 \tau_0 / (3R)}{|\text{grad } p|} \right] \text{grad } p \quad (6)$$

It is worth noting that this reduces to eq. (1) if

$$K_N = \frac{\phi R^2}{8} \quad (7)$$

and

$$G = \frac{8 \tau_0}{3R} \quad (8)$$

Therefore, because the fourth power term is neglected in its derivation, eq. (1) is expected to perform well for large flow rates only. This can be a major drawback. For example, in flows of petroleum through reservoirs toward the well, typical flow velocities are of the order of a few centimeters per day.

If the fourth power term in eq. (4) is preserved, similar arguments and some more involved algebra lead to the following expression:

$$\mathbf{u} = -\frac{\phi R^2}{8 \mu_p} \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{G'}{|\text{grad } p|} + \frac{1}{3} \left( \frac{G'}{|\text{grad } p|} \right)^4 \right] \text{grad } p \quad (9)$$

where  $G'$  is given by

$$G' = \frac{2 \tau_0}{R} \quad (10)$$

In eqs. (8), (7) and (10) the tube radius  $R$  should be regarded as a characteristic length of the pore.

Unfortunately, pore geometries are so complex and nonuniform that just one parameter is seldom enough to represent the morphology of typical porous media. Another assumption about the pore channel geometry which introduces more geometrical parameters is also considered in Souza Mendes and Naccache (1994b).

## NUMERICAL STUDY

**Previous work.** The geometry of the ideal porous medium employed in the numerical and experimental studies is described with

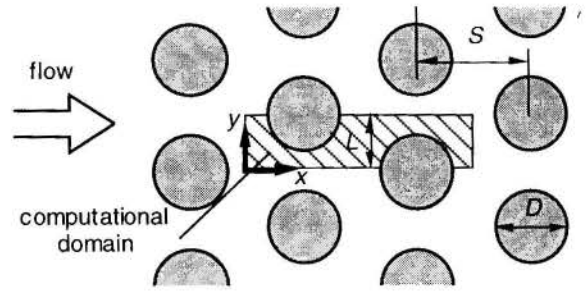


Figure 1: Geometry of the ideal porous medium.

the aid of Fig. 1. This geometry is common in heat exchanger, nuclear reactor, and other engineering applications.

If the fluid flowing externally to the rods is Newtonian, pressure drop and heat transfer information abounds in the literature, and is reviewed by Žukauskas (1972). For non-Newtonian liquids, some work is found for flow of pseudoplastic power-law liquids around a cylinder (e.g., Shah *et al.*, 1962, Mizushima *et al.*, 1978, and Mizushima & Usui, 1978). For flow past rod bundles of viscoelastic polymeric solutions, pressure drop data are reported by Chmielewski and Jayaraman (1992). However, no information is available in the open literature for Bingham liquids, as far as the authors know.

**Analysis.** In the present analysis, the liquid is assumed to be incompressible, so that the equation of mass conservation reduces to

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (11)$$

where  $\mathbf{v}$  is the velocity vector field.

The momentum equation is, for steady flow and negligible external forces,

$$\rho \text{div}(\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\text{grad } p + \text{div } \boldsymbol{\tau} \quad (12)$$

where  $\boldsymbol{\tau}$  the extra-stress and  $\rho$  the mass density.

The extra-stress  $\boldsymbol{\tau}$  is a function of the flow kinematics. For the Generalized Newtonian Liquid model (GNL), it is given by eq. (2). For a Bingham liquid, the viscosity function,  $\eta(\dot{\gamma})$ , is given by eq. (3).

The viscosity function as given by eq. (3) is not simple to model numerically, and the usual approach is to replace it by another viscosity function, the so called bi-viscosity model (Beverly and Tanner, 1992):

$$\eta = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p, & \text{if } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c; \\ \mu_\infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (13)$$

where

$$\mu_\infty = 1000 \mu_p; \quad \dot{\gamma}_c = \frac{\tau_0}{\mu_\infty - \mu_p} = \frac{\tau_0}{999 \mu_p} \quad (14)$$

Equations (12), (2) and (13), plus the continuity equation (eq. (11)) complete the problem formulation, together with appropriate periodically-developed (cyclic) boundary conditions. Assuming

two-dimensional flow, these equations are written in Cartesian coordinates and then integrated numerically in the domain shown in Fig. 1.

The physical dimensionless parameters that govern the problem are the Reynolds number,  $Re$ , and the yield number,  $Y$ , defined respectively as

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu_p}; \quad Y = \frac{\tau_0}{\mu_p \bar{v} / D} \quad (15)$$

In addition, there are two geometrical parameters, the ratios

$$D^* = \frac{D}{S}; \quad L^* = \frac{L}{S} \quad (16)$$

where  $D$  is the rod diameter,  $L$  the row spacing, and  $S$  the column spacing (Fig. 1).

Because typical flows of petroleum in reservoirs are rather slow, in the present paper attention is focused toward situations of negligible inertial forces ( $Re \rightarrow 0$ ), and therefore the effect of the Reynolds number is not examined.

**Numerical method.** The conservation equations were discretized by the finite volume method described by Patankar (1980), by using a non-orthogonal curvilinear system of coordinates which adapts to the boundaries of the domain.

Staggered velocity components were employed to avoid unrealistic pressure fields and the contra-variant velocity component was selected as the dependent variable in the momentum conservation equations (Pires and Niecele, 1994).

The pressure-velocity coupling was solved by an algorithm based on SIMPLEC (Van Doormaal and Raithby, 1984). The resulting algebraic system was solved by the TDMA line-by-line algorithm (Patankar, 1980) with the block correction algorithm (Settari and Aziz, 1973) to increase the convergence rate.

A transfinite interpolation scheme was employed to generate a mesh of  $40 \times 40$  control volumes in the computational domain.

Further details of this study, and results for a wide range of the governing parameters, are given in Niecele *et al.*, (1995).

## EXPERIMENTAL STUDY

Before eq. (9) can be employed in engineering design, some experimental evidence of its reliability is desirable. In order to assess its description capability regarding the fluid rheology, perhaps the first step is to check its performance against experimental data pertaining to an ideal porous medium. In this manner, influences other than the ones related to rheological parameters are kept under full control.

Due to the previously mentioned scarcity in the literature of experimental data related to flows of Bingham liquids through porous media, experiments have been performed to generate some data to be used in the desired assessment. These experiments are now described.

**Test fluid.** A commercial grease has been employed in the experiments. It has been rheologically characterized in the facilities of the Laboratory for Characterization of Fluids (LCF) at PUC-Rio, and the following was observed:

1. Its density is  $\rho = 884 \text{ kg/m}^3$ .
2. Its yield stress is  $\tau_0 = 450 \text{ Pa}$ . The measuring method of

this quantity was a stress sweep, with the aid of a rotational rheometer.

3. its viscosity is rather dependent on the shearing time (thixotropy). However, a representative value of its plastic viscosity for the experiments was  $\mu_p = 110 \text{ Pa.s}$ . The rotational rheometer was also employed in these viscosity measurements.

**Test section.** The test section is described with the aid of Fig. 2. Inside a duct of square cross section ( $100 \times 100 \text{ mm}$ ) and total length  $C = 700 \text{ mm}$ , twenty seven cylindrical rods ( $D = 9.3 \text{ mm}$ ) are assembled in the staggered arrangement shown in Fig. 2. This rod assembly is located at half-length of the square duct, to eliminate entrance and exit effects on the measurements. To reduce the influence of the side walls, three semi-cylindrical rods are attached to each of two of the side walls, following the same staggered pattern. The longitudinal pitch is  $S = 20 \text{ mm}$ , while the transversal one is  $L = 10 \text{ mm}$  (Fig. 2). There are two pressure taps, one located just upstream of the rod assembly and other just downstream.

**The experimental apparatus.** Upstream and downstream of the square duct which contains the test section, there are two identical cylinder/piston assemblies (Fig. 3). Prior to the runs, the grease is carefully loaded into the system, in such a way as to eliminate the presence of air bubbles.

During a run, the upstream piston is pushed with the aid of compressed air. The air pressure is kept at a selected level with the aid of an appropriate constant pressure valve. Because the upstream and downstream cylinder/piston assemblies are identical, the total resistance to motion is invariant during a given run, which implies a constant flow rate through the test section.

The grease flow rate is easily and accurately determined by measuring the upstream piston displacement rate. This is done with the aid of a stopwatch and reference notches which were made on the surface of the piston rod.

The pressure drop across the test section is determined with a differential manometer, which full scale is  $2 \text{ kgf/cm}^2$ .

This assembly yielded good repeatability and low scattering of the data, as it will be seen later.

## RESULTS AND DISCUSSION

It is important to emphasize that the theory used to obtain eq. (9) employs simplifying assumptions that might imply limitations in its range of applicability. For instance, the geometry of a porous rock by far more complex than the assumed parallel straight tubes. Also, molecular flow effects, which might be present in flows through porous rocks, are also neglected in the theory when the no-slip condition is assumed at solid-liquid interfaces.

Because of these possible limitations of the theory, it is interesting to start the validation process by comparing its predictions with results that are free from influences of physical mechanisms other than the ones taken into account by the theory. Results obtained in the present research for the porous medium of idealized geometry fall into this category. Therefore, if good agreement is observed, then it can be concluded that the theory is capable of well representing the main effect of interest here, *viz.*, the dependence of the  $\mathbf{u} \times |\text{grad } p|$  relationship on the fluid rheological parameters ( $\tau_0$  and  $\mu_p$ ).

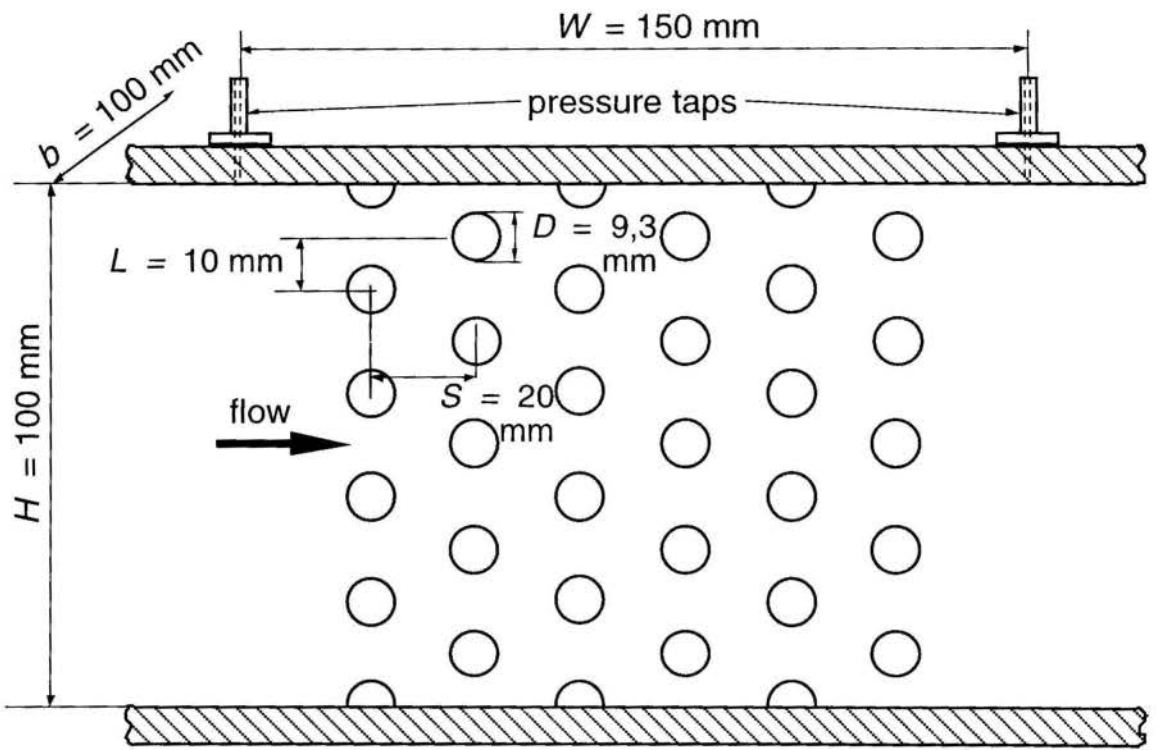


Figure 2: The test section

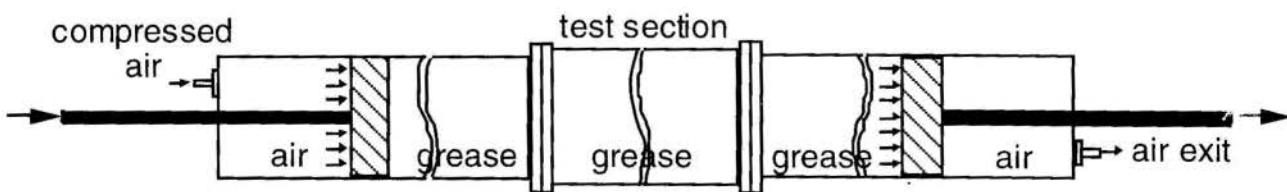


Figure 3: The apparatus



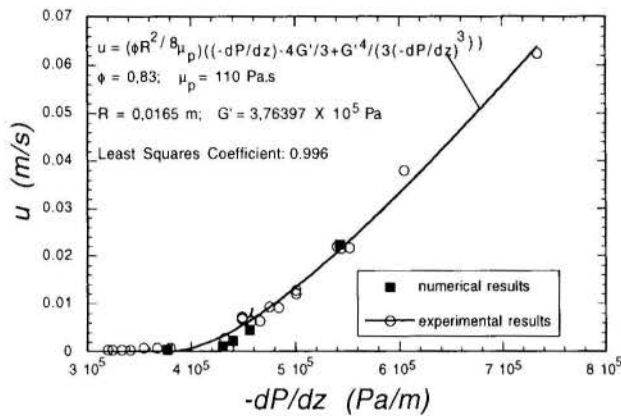


Figure 4: Comparison among theory, experimental and numerical results

In addition, the uncertainty of results of experiments with ideal porous media like the one performed in the present research is typically much lower than the uncertainty related to experiments using natural porous rocks. Therefore, comparisons with theoretical predictions tend to be more conclusive.

Furthermore, the geometrical simplicity of the ideal porous medium chosen (Fig. 1) allows numerical solutions of the conservation equations that govern the flow past the rod bundle. Because the phenomena taken into account in these governing equations is known, good agreement between numerical and experimental results indicates that the meaningful experiment parameters were kept under control in the course of each data run. Moreover, the availability of numerical results gives another tool for theory evaluation.

Comparisons: qualitative behavior. Figure 4 presents numerical and experimental results for the flow of the grease in the geometrical configuration shown in Fig. 2. The predictions of eq. (9) for this situation are also shown. In this figure, the open circles represent the experimental data obtained with the apparatus shown in Figs. 2 and 3, while the black squares pertain to the numerical results, obtained as explained before.

The curve shown in Fig. 4 was obtained by a procedure of least-squares fitting to the experimental data which assumes the functional relationship determined by the theory, *viz.*, eq. (9) (also shown in the insert of Fig. 4). In this fitting procedure,  $R$  and  $G'$  are the parameters to be determined.

All the other parameters appearing in eq. (9), and the ones needed to obtain the numerical results, were taken to be equal to the ones that actually occurred in the experiments, namely:  $\phi = 0.83$ ,  $\mu_p = 110$  Pa.s,  $\tau_0 = 450$  Pa,  $\rho = 884$  kg/m<sup>3</sup>.

It is observed that the qualitative behavior of the numerical, experimental and theoretical predictions is the same:

1. At low pressure gradients there is no flow.
2. At a certain critical value of the pressure gradient, the onset of motion is observed.
3. In the range of pressure gradients just beyond this critical value, the velocity/pressure gradient dependence is clearly non-linear.

4. For larger pressure gradients there is an asymptotic trend toward a linear behavior.

The trends described above are interpreted as follows:

- For low pressure gradients, the stresses that occur are lower than the yield stress of the fluid everywhere in the flow field, and hence there is no motion.
- For pressure gradients above the critical value, the fluid stresses exceed the yield stress, and motion takes place.
- In the range of pressure gradients just beyond the observed threshold, the fluid viscosity decreases fast with the deformation rate (and hence with the pressure gradient), because in this range it is highly influenced by the yield stress,  $\tau_0$  (see eq. (3)). Thus, in this range the permeability—which is the slope of the curve in Fig. 4—increases.
- In the range of higher pressure gradients, the deformation rates are also higher, and, consequently, the viscosity asymptotically approaches a constant value, namely,  $\mu_p$ . Thus, the permeability also approaches a constant value asymptotically, as seen in Fig. 4.

Comparisons: quantitative evaluation. In Fig. 4's insert, the  $R$  and  $G'$  values are given as determined by the least-squares procedure mentioned above, namely,  $R = 16.5$  mm and  $G' = 3.76397 \times 10^5$  Pa.

It is interesting to compare the above  $R$  value with a characteristic length related to the flow passages found in the rod-bundle porous medium. A possible choice for this characteristic length is the rod spacing in the narrowest cross section. It can be observed in Fig. 2 that, if this characteristic length is chosen, for this case it would be equal to 10.7 mm. Therefore, the  $R$  value obtained via least squares is of the same order of magnitude as the characteristic length of the porous medium employed in the experiments differing by a factor of 1.5. This discrepancy is acceptable if it is recalled that the geometry assumed in the theory is completely different from the one related to the data.

Another interesting comparison consists in employing eq. (10) for evaluating  $G'$ , using the values for  $\tau_0$  and  $R$  relative to the experiments:

$$G' = \frac{2\tau_0}{R} = \frac{2 \times 450}{0.0107} = 8.41122 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (17)$$

If this value is compared with the one obtained via least squares, it can be seen that they differ by a factor of 4.5. Again, the discrepancy is large, but the order of magnitude provided by the theory (eq. 10) is correct.

These discrepancies are surely due to the dramatic difference between the morphology assumed in the theory and the one employed in the experiments and computation. It seems reasonable to expect that the qualitative behavior observed and discussed above be independent of the morphology, and thus, it should also be observed in more complex morphologies like the ones found in petroleum reservoirs. Quantitatively, however, the results should be a function of the porous medium morphology.

## CONCLUSIONS

The comparisons discussed above suggest that:

- The proposed theory describes correctly the effect of a Binghamian rheology in flows through porous media, in the same way as Darcy's law describes correctly the flow of Newtonian fluids through porous media.
- The qualitative behavior observed for Bingham liquids should not depend on the porous medium morphology, but, quantitatively, the morphological characteristics should matter.
- In the same way as Darcy's law has its limitations, since it groups two many important effects into only one parameter (the permeability), the same is true for eq. (9).
- The theory should be useful in fittings to experimental data, as well as in oil reservoir simulations. It is worth noting that, for flows at low rates of Bingham liquids through porous media, eq. (1) will not yield good fittings because it is a linear relation. Equation (9) has a correct qualitative behavior at all flow rates.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

Financial support for the present research was provided by Petrobras S. A., CNPq and MCT.

#### REFERENCES

1. Beverly, C. R., and Tanner, R. I., 1992, "Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow," *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 42, pp. 85-115.
2. Chmielewski, C., and Jayaraman, K., 1992, "The effect of polymer extensibility on crossflow of polymer solutions through cylinder arrays," *J. Rheology*, Vol. 36(6), pp. 1105-1126.
3. Dullien, F. A. L., 1992, "Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure" (2<sup>nd</sup> ed.), Academic Press.
4. Durst, F., Haas, R., and Interthal, W., 1987, "The nature of flows through porous media," *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 22, pp. 169-189.
5. Mizushima, T., and Usui, H., 1978, "Approximate solution of the boundary layer equations for the flow of a non-Newtonian fluid around a circular cylinder," *Heat Transfer—Jpn. Res.*, Vol. 7(2), pp. 83-92.
6. Mizushima, T., Usui, H., Veno, K., and Kato, K., 1978, "Experiments of pseudoplastic fluid cross flow around a circular cylinder," *Heat Transfer—Jpn. Res.*, Vol. 7(3), pp. 92-101.
7. Nieckele, A. O., Naccache, M. F., Souza Mendes, P. R., and Pires, L. F. G., 1995, "Flow of Bingham liquids through arrays of tubes," *XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, in CD-ROM.
8. Patankar S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere Publishing Corporation.
9. Pires L. F. G., and Nieckele, A. O., 1994, "Um método numérico para solução de escoamentos utilizando componentes contravariantes em coordenadas não ortogonais," *Proc. V Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, São Paulo, São Paulo, December 7-9, pp. 343-346.
10. Scheidegger, A. E., 1974, "The Physics of Flow Through Porous Media" (3<sup>rd</sup> ed.), University of Toronto Press.
11. Settari, A., and Aziz, K., 1973, "A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations," *SIAM J. Numerical Analyses*, Vol. 10, pp. 506-521.
12. Shah, M. J., Peterson, E. E., and Acrivos, A., 1962, "Heat Transfer from a Cylinderto a Power-Law Non-Newtonian Fluid," *AIChE J.*, Vol. 8, pp. 542-549.
13. Souza Mendes, P. R., and Naccache, M. F., 1994a, "A modified Darcy's Law which Accounts for Extension-Thickening Rheological Fluid Behavior," *V Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, São Paulo, São Paulo, December 7-9.
14. Souza Mendes, P. R., and Naccache, M. F., 1994b, "A modified Darcy's Law which Accounts for Binghamian Rheological Fluid Behavior," *XXII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos*, Florianópolis, Santa Catarina, October 19-21.
15. Van Doormaal, J. P., and Raithby, G. D., 1984, "Enhancements of the SIMPLE Method for Prediction Incompressible Fluid Flows," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147-163.
16. Wu Y-S, Pruess K., and Whitherspoon, P. A., 1990, Flow and displacement of Bingham non-Newtonian fluids in porous media, 60th California Regional Meeting, Society of Petroleum Engineers, paper no. SPE 20051.
17. Žukauskas, A., 1972, "Heat transfer from tubes in cross-flow," *Adv. Heat Transfer*, Vol. 8, pp. 93-160. Academic, New York.



INVERSE PROBLEM FOR ESTIMATING THE HEAT FLUX TO A NON-NEWTONIAN FLUID IN A PARALLEL PLATE CHANNEL



H. A. Machado and H. R. B. Orlando  
 PEM/COPPE  
 Universidade Federal do Rio de Janeiro  
 Cx. Postal: 68503 - 21945-970  
 Rio de Janeiro - RJ - Brasil

SUMMARY

In this paper we use the Conjugate Gradient Method with Adjoint Equation in order to estimate the transient wall heat flux to a Power-Law fluid in a parallel plate channel. Simulated transient temperature measurements of a single sensor are used in the inverse analysis. The effects on the solution of sensor position, power-law index and random measurement errors are examined.

INTRODUCTION

The Direct Heat Transfer Problem involving hydrodynamically developed forced convection in a parallel plate channel, is concerned with the determination of the temperature field of the fluid flowing inside the channel. The initial, entrance and boundary conditions, as well as the fluid physical properties are required, so that such direct problem is well-posed, that is, its solution satisfies the requirements of existence, uniqueness and continuous dependence on given conditions (stability). On the other hand, an Inverse Convection Heat Transfer Problem is concerned with the estimation of at least one of the quantities required for the well posedness of the direct problem. Inverse problems are mathematically classified as ill-posed. Although the existence of a solution of an inverse problem can be assured by physical reasoning, it usually does not satisfy the requirements of uniqueness and stability.

The papers available in the literature on the solution of inverse convection problems have generally dealt with the internal forced convection of Newtonian fluids (Huang and Ozisik, 1992, Bokar and Ozisik, 1995, Machado and Orlando, 1995,1996, Raghath, 1993). In this paper, we study the solution of an inverse problem involving the flow of a non-Newtonian fluid in a parallel plate channel. The unknown transient wall heat flux, which is supposed to be uniform along the channel, is estimated by using the transient temperature measurements of a sensor located inside the channel. The fluid flow is considered to be laminar and hydrodynamically developed and the fluid is assumed to follow the Power Law (Ostwald-de Waele) model for the shear stress (Bird et al, 1960).

For the solution of the present inverse problem, we use the Conjugate Gradient Method with Adjoint Equation. This is a powerful and straightforward iterative method, which can be applied to function and parameter estimations, as well as to linear and non-linear inverse problems (Jarny et al, 1991, Alifanov, 1994).

We use simulated measurements in order to assess the accuracy of the conjugate gradient method with adjoint equation, as applied to the solution of the present inverse problem. The effect of the position of the temperature sensor on the solution is examined in order to design optimized

experiments for fluids with different power-law indexes. Some computational aspects of the solution of the present inverse problem are also addressed on the paper.

DIRECT PROBLEM

The physical problem considered here is the laminar hydrodynamically developed flow between parallel plates of a non-newtonian fluid with constant properties. The inlet temperature is maintained at a constant value  $T_0^*$ . The plates are subjected to a transient heat flux, as illustrated in figure 1.

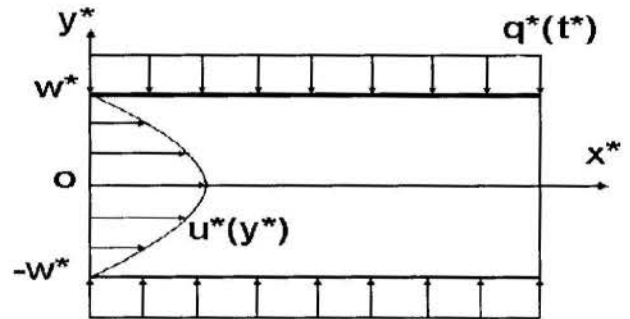


Figure 1 - Physical Problem

By taking into account the symmetry with respect to the  $x$ -axis and neglecting conduction along the flow direction, the mathematical formulation of this problem in dimensionless form is given by:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{in } 0 < y < 1, x > 0, t > 0 \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, x > 0, t > 0 \quad (1.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = q(t) \quad \text{at } y = 1, x > 0, t > 0 \quad (1.c)$$

$$T = 0 \quad \text{at } x = 0, 0 < y < 1, t > 0 \quad (1.d)$$

$$T = 0 \quad \text{for } t = 0, 0 < y < 1, x > 0 \quad (1.e)$$

where the following dimensionless groups are introduced

$$y = \frac{y^*}{w^*}; \quad x = \frac{\alpha^* x^*}{u_m^* w^{*2}}; \quad T = \frac{T^* - T_o^*}{q_o^* w^*}; \quad t = \frac{\alpha^*}{w^*} t^* \quad (2.a-d)$$

$\alpha^*$  and  $k^*$  are the fluid thermal diffusivity and conductivity, respectively, and  $w^*$  is the channel half-width.

The fluid is assumed to follow the Power-Law (Ostwald-de Waele) model for the shear stress. Thus, the dimensionless velocity  $u(y)$  is given by (Bird, 1960)

$$u(y) = \frac{u^*(y^*)}{u_m^*} = \left( \frac{1+2n}{1+n} \right) \left[ 1 - \left( \frac{y^*}{w^*} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (2.e)$$

where  $u_m^*$  is the mean fluid velocity and  $n$  is the power-law index. The wall heat flux is written as

$$q^*(t^*) = q_o^* q(t) \quad (3)$$

where  $q_o^*$  is a constant with units of heat flux and  $q(t)$  is a dimensionless function of  $t$ . The superscript “\*” above denotes dimensional variables.

The direct problem given by equations (1) is concerned with the determination of the temperature field of the fluid inside the channel, when the boundary heat flux  $q(t)$  at  $y = 1$  is known.

#### INVERSE PROBLEM

For the inverse problem, the heat flux  $q(t)$  at  $y = 1$  is considered to be unknown and is to be estimated by using the transient readings of  $S$  temperature sensors located inside the channel. The readings are taken up to a final time  $t_f$  and the sensors are located within the length of the test section  $x_f$ .

The solution of such inverse problem is obtained by minimizing the following functional,

$$J[q(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \sum_{i=1}^S \left\{ T[x_i, y_i, t; q(t)] - Y_i(t) \right\}^2 dt \quad (4)$$

where  $Y_i$  is the measured temperature at the sensor location  $(x_i, y_i)$  inside the channel and  $T[x_i, y_i, t; q(t)]$  is the estimated temperature at the same location. Such estimated temperature is obtained from the solution of the direct problem given by equations (1), by using an estimate for the unknown heat flux  $q(t)$ .

The minimization of the functional given by equation (4) is obtained by utilizing the conjugate gradient method, as described next.

#### CONJUGATE GRADIENT METHOD OF MINIMIZATION

The iterative algorithm of the conjugate gradient method, as applied to the estimation of the unknown heat flux  $q(t)$  is given by (Jarny et al, 1991):

$$q^{k+1}(t) = q^k(t) - \beta^k d^k(t) \quad (5.a)$$

where the superscript “k” denotes the number of iterations.

The direction of descent  $d^k(t)$  is obtained as a conjugation of the gradient direction and of the previous direction of descent as:

$$d^k(t) = J'[q^k(t)] + \gamma^k d^{k-1}(t) \quad (5.b)$$

where the conjugation coefficient is obtained from the Fletcher-Reeves expression

$$\gamma^k = \frac{\int_{x=0}^{x_f} \int_{t=0}^{t_f} \left\{ J'[q^k(t)] \right\}^2 dt dx}{\int_{x=0}^{x_f} \int_{t=0}^{t_f} \left\{ J'[q^{k-1}(t)] \right\}^2 dt dx} \quad (5.c)$$

for  $k = 1, 2, 3, \dots$  with  $\gamma^0 = 0$

In order to implement the iterative algorithm given by equations (5), we need to develop expressions for the search step size  $\beta^k$  and for the gradient direction  $J'[q^k(t)]$  by making use of two auxiliary problems, known as the *sensitivity problem* and *adjoint problem*, respectively.

#### SENSITIVITY PROBLEM AND SEARCH STEP SIZE

The sensitivity problem is obtained by assuming that the heat flux  $q(t)$  is perturbed by an amount  $\Delta q(t)$ . Such perturbation in the heat flux causes a perturbation  $\Delta T(x, y, t)$  in the temperature  $T(x, y, t)$ . By substituting  $T(x, y, t)$  by  $T(x, y, t) + \Delta T(x, y, t)$  and  $q(t)$  by  $q(t) + \Delta q(t)$  in the direct problem given by equations (1), and by subtracting from the resulting expressions the original direct problem, we obtain the following sensitivity problem for the determination of the sensitivity function  $\Delta T(x, y, t)$ :

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} + u(y) \frac{\partial \Delta T}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} \quad \text{in } 0 < y < 1, x > 0, t > 0 \quad (6.a)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, x > 0, t > 0 \quad (6.b)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial y} = \Delta q(t) \quad \text{at } y = 1, x > 0, t > 0 \quad (6.c)$$

$$\Delta T = 0 \quad \text{at } x = 0, 0 < y < 1, t > 0 \quad (6.d)$$

$$\Delta T = 0 \quad \text{for } t = 0, \text{ in } 0 < y < 1, x > 0 \quad (6.e)$$

An expression for the search step size  $\beta^k$  is obtained by minimizing the functional given by equation (4) with respect to  $\beta^k$ , that is,

$$\min_{\beta^k} J[q^{k+1}(t)] = \min_{\beta^k} \int_{t=0}^{t_f} \sum_{i=1}^S \left[ T(x_i, y_i, t; q^k - \beta^k d^k) - Y_i(t) \right]^2 dt \quad (7.a)$$

By linearizing the estimated temperature  $T(x_i, y_i, t; q^k - \beta^k d^k)$  and performing the minimization above, we obtain the search step size as:



$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} \sum_{i=1}^S (T_i - Y_i) \Delta T_i(d^k) dt}{\int_{t=0}^{t_f} \sum_{i=1}^S [\Delta T_i(d^k)]^2 dt} \quad (7.b)$$

where  $\Delta T_i(d^k)$  is the solution of the sensitivity problem at the sensor position  $(x_i, y_i)$ , obtained from equations (6) by setting  $\Delta q(t) = d^k(t)$ .

### ADJOINT PROBLEM AND THE GRADIENT EQUATION

In order to obtain the adjoint problem, we multiply the differential equation (1.a) of the direct problem by the Lagrange multiplier  $\lambda(x, y, t)$  and integrate over the time and space domains. The resulting expression is then added to equation (4) to obtain the following extended functional:

$$J[q(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^{x_f} \int_{y=0}^1 \left\{ \sum_{i=1}^S [T(x_i, y_i, t) - Y_i(t)]^2 \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) + \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \lambda(x, y, t) \right\} dx dy dt \quad (8)$$

where  $\delta(\bullet)$  is the Dirac delta function.

We assume that the extended functional given by equation (8) is perturbed by an amount  $\Delta J[q(t)]$ , when the heat flux  $q(t)$  is perturbed by  $\Delta q(t)$ . An expression for the variation  $\Delta J[q(t)]$  is obtained by substituting  $J[q(t)]$  by  $J[q(t)] + \Delta J[q(t)]$  and  $T(x, y, t)$  by  $T(x, y, t) + \Delta T(x, y, t)$  in equation (8), and by subtracting the original equation (8) from the resulting expression. We obtain,

$$\Delta J[q(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^{x_f} \int_{y=0}^1 \left\{ \sum_{i=1}^S [2(T - Y) \Delta T] \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) + \left[ \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + u(y) \frac{\partial \Delta T}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} \right] \lambda(x, y, t) \right\} dx dy dt \quad (9)$$

The three terms involving derivatives inside brackets above are integrated by parts with respect to  $t$ ,  $x$  and  $y$ , respectively. The boundary and initial conditions of the sensitivity problem, equations (6.b-e), are substituted into the resulting expression, which is then allowed to go to zero. The vanishing of the integral terms containing  $\Delta T(x, y, t)$  results in the following adjoint problem for the determination of the Lagrange Multiplier  $\lambda(x, y, t)$ :

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial t} - u(y) \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + 2 \sum_{i=1}^S (T - Y) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) = 0 \quad \text{in } 0 < y < 1, x > 0, t > 0 \quad (10.a)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, x > 0, t > 0 \quad (10.b)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 1, x > 0, t > 0 \quad (10.c)$$

$$\lambda = 0 \quad \text{at } x = x_f, 0 < y < 1, t > 0 \quad (10.d)$$

$$\lambda = 0 \quad \text{for } t = t_f, 0 < y < 1, t > 0 \quad (10.e)$$

Finally, in this limiting process, the following integral term is left:

$$\Delta J[q(t)] = - \int_{t=0}^{t_f} \left\{ \int_{x=0}^{x_f} \lambda(x, y, t) dx \right\} \Delta q(t) dt \quad (11)$$

By assuming that  $q(t)$  belongs to the space of square integrable functions in  $0 < t < t_f$ , that is,

$$\int_{t=0}^{t_f} [q(t)]^2 dt < \infty \quad (12)$$

we can write

$$\Delta J[q(t)] = \int_{t=0}^{t_f} J'[q(t)] \Delta q(t) dt \quad (13)$$

By comparing equations (11) and (13), we obtain the following expression for the gradient of the functional

$$J'[q(t)] = - \int_{x=0}^{x_f} \lambda(x, y, t) dx \quad (14)$$

After developing expressions for the search step size  $\beta^k$  and for the gradient direction  $J'[q(t)]$ , we can implement the iterative algorithm of the conjugate gradient method, until a stopping criterion based on the discrepancy principle described below is satisfied.

### STOPPING CRITERION

We stop the iterative procedure of the conjugate gradient method when the functional given by equation (4) becomes sufficiently small, that is,

$$J[q^{k+1}(t)] < \epsilon \quad (15)$$

If the measurements are assumed to be free of experimental errors, we can specify  $\epsilon$  as a relative small number. However, actual measured data contain experimental errors, which will introduce oscillations in the inverse problem solution, as the estimated temperatures approach those measured. Such difficulty can be alleviated by utilizing the Discrepancy Principle (Alifanov, 1994) to stop the iterative process, where we assume that the inverse problem solution is sufficiently accurate when the difference between estimated and measured temperatures is less than the standard deviation ( $\sigma$ ) of the measurements. Thus, the value of the tolerance  $\epsilon$  is obtained from equation (4) as

$$\epsilon = \sigma^2 t_f \quad (16)$$

### COMPUTATIONAL ALGORITHM

We suppose available an estimate  $q^k(t)$  for the unknown heat flux  $q(t)$  at iteration  $k$ . Thus:

**STEP 1:** Solve the direct problem given by equations (1) to obtain the estimated temperatures  $T(x, y, t)$ ;

- STEP 2:** Check the stopping criterion given by equation (15). Continue if not satisfied;
- STEP 3:** Solve the adjoint problem given by equations (10) to obtain the Lagrange Multiplier  $\lambda(x,y,t)$ ;
- STEP 4:** Compute the gradient of the functional  $J'[q^k(t)]$  from equation (14);
- STEP 5:** Compute the conjugation coefficient  $\gamma^k$  from equation (5.c) and then the direction of descent  $d^k(t)$  from equation (5.b);
- STEP 6:** Solve the sensitivity problem given by equations (6) to obtain  $\Delta T(x,y,t)$  by setting  $\Delta q(t) = d^k(t)$ ;
- STEP 7:** Compute the search step size  $\beta^k$  from equation (7.b);
- STEP 8:** Compute the new estimate  $q^{k+1}(t)$  from equation (5.a) and go to step 1.

**RESULTS AND DISCUSSION**

For the results presented below we have taken the dimensionless final time and length of test-section respectively as  $x_f = 8 \times 10^{-4}$  and  $t_f = 0.08$ . For the flow of a solution of pulp of paper in water at 4% ( $n = 0.575$ ) (Bird,1960), at the mean velocity  $u_m^* = 0.0105$  m/s, through a channel of half-width  $w^* = 0.02$  m, such dimensionless values correspond to  $x_f^* = 0.10$  m and  $t_f^* = 200$  s.

The direct, sensitivity and adjoint problems were solved with finite-differences by using an upwind discretization for the convection term and an implicit discretization in time. The domain was discretized with  $101 \times 81$  points in the x and y directions, respectively, while 41 time steps were used in the time domain. Such number of points were chosen by comparing the results obtained with the direct problem for a constant heat flux,  $q(t) = 1$ , with benchmark results available in the literature for the local Nusselt number (Cotta and Ozisik,1986). The agreement between the two solutions was better than 1%.

The linear system resulting from the discretization was solved iteratively by using Gauss-Seidel's method with SOR and red-black reordering (Ortega, 1988). Such approach allowed for the vectorization of the computer code on vector-supercomputers and resulted in a speedup of approximately 9, over a scalar version of the same code, on the CRAY J90 at COPPE.

By examining eqs. (10.e) and (14), we notice that the gradient of the functional is null for the final time  $t_f$ . Thus, the initial guess used for  $q(t_f)$  is not changed by the iterative procedure of the conjugate gradient method. In order to avoid such difficulty, we have used as initial guess at the final time the exact value for  $q(t)$ , which is assumed to be known a priori. A null heat flux was used as initial guess for other times.

We use transient simulated measurements of a single sensor in order to assess the accuracy of the present approach of estimating the unknown wall heat flux  $q(t)$ . The simulated temperature measurements are obtained from the solution of the direct problem for a specified function  $q(t)$ . The temperatures computed in this manner are considered to the errorless, and the simulated measured data is given by:

$$Y = Y_{ex} + \alpha \sigma \tag{17}$$

where  $Y_{ex}$  is the solution of the direct problem;  $\alpha$  is a random variable with normal distribution, zero mean and unitary standard deviation; and  $\sigma$  is the standard deviation of the measurements.

By examining the accuracy of the inverse problem solution, we can estimate the optimum location for the single

sensor used in the inverse analysis. Figure 2 shows a comparison of the inverse problem solutions for errorless measurements ( $\sigma = 0$ ) obtained with the sensor located at five different locations and for  $n = 0.575$ . The step function was chosen for this comparison because discontinuous functions are the most difficult to be recovered by an inverse analysis. We can notice in figure 2 that accurate solutions can be obtained with the sensor at the five different locations tested. We present in table 1 the RMS error for such solutions. The RMS error is computed as

$$e_{RMS} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N [q_{ex}(t_i) - q_{est}(t_i)]^2} \tag{18}$$

where N is number of measurements used in the inverse analysis, while  $q_{ex}(t_i)$  and  $q_{est}(t_i)$  are the exact and estimated heat fluxes, respectively. Table 1 shows that the sensor location  $x/x_f = 0.8$  and  $y = 0.95$  is the best among those tested. The solution deteriorates as the sensor is moved away from the boundary  $y = 1$  or towards the channel inlet.

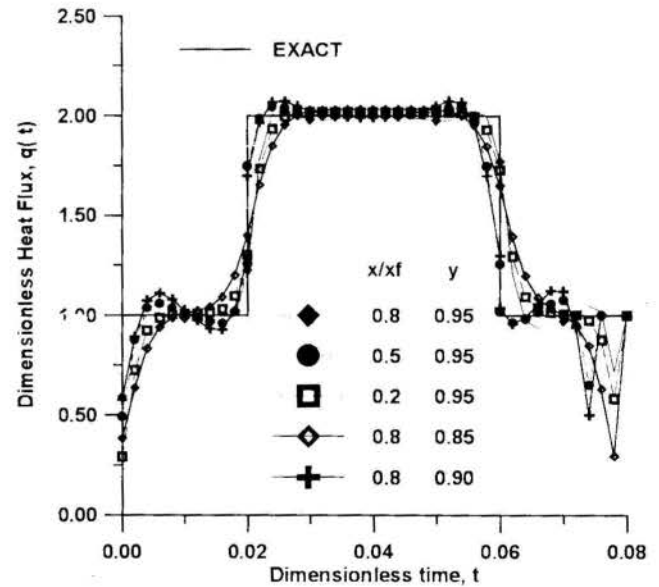


Figure 2 - Effect of sensor position on the solution for errorless measurements ( $\sigma = 0$ ) and  $n=0.575$ .

Table 1 - RMS error ( $e_{RMS}$ ) for different sensor locations

Sensor Location		$e_{RMS}$
$x/x_f$	$y$	
0.8	0.95	0.0114
0.5	0.95	0.0168
0.2	0.95	0.0276
0.8	0.90	0.0221
0.8	0.85	0.0469

Figure 3 shows the results for different power-law indexes obtained with errorless measurements ( $\sigma = 0$ ) for a sensor located at  $x/x_f = 0.8$  and  $y = 0.95$ . It can be noticed in this figure that accurate results were obtained, irrespective of the power-law index of the fluid inside the channel.

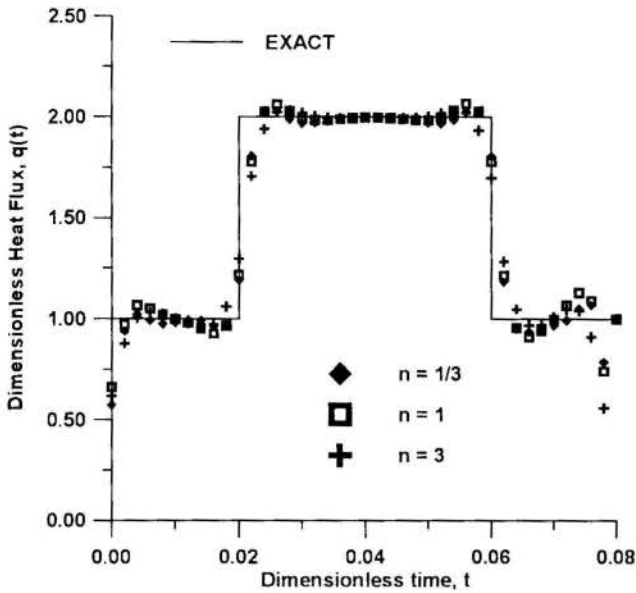


Figure 3 - Effect of the power-law index on the solution for errorless measurements ( $\sigma = 0$ ).

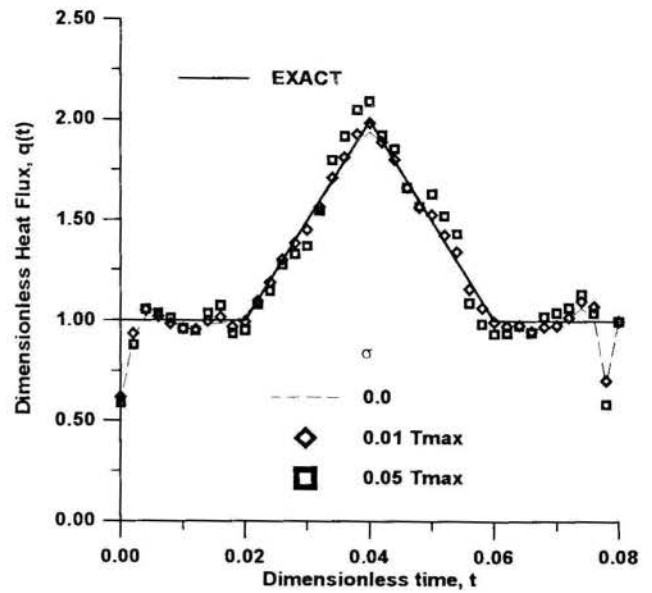


Figure 5 - Inverse problem solution for different levels of measurement error - Triangular variation for  $q(t)$ .

Figures 4-6 show the results for a sine, triangular and step variation of the transient heat flux, respectively, for measurements with different levels of errors, including  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = 0.01 T_{max}$  and  $\sigma = 0.05 T_{max}$ , where  $T_{max}$  is the maximum temperature measured by the sensor. The sensor was located at  $x/x_f = 0.8$  and  $y = 0.95$ . The power-law index was taken as  $n = 0.575$ . These figures show that the present approach is capable of recovering functions with sharp corners and discontinuities. Also, the inverse problem solution appears to be stable with respect to measurement errors. Note in these figures that the inverse problem solution is reasonably accurate, even for large measurement errors involving a standard deviation  $\sigma = 0.05 T_{max}$ .

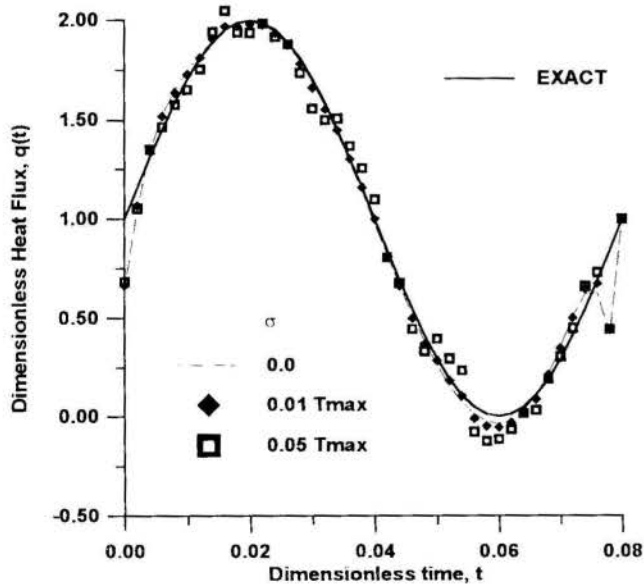


Figure 4 - Inverse problem solution for different levels of measurement error - Sine variation for  $q(t)$ .

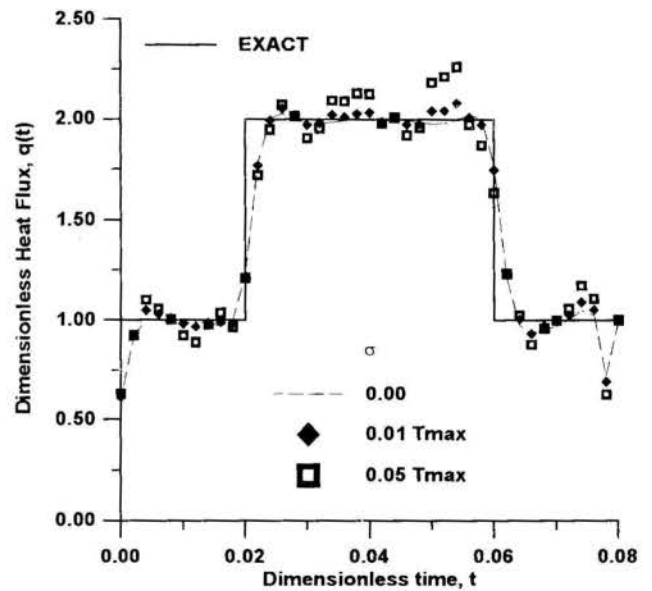


Figure 6 - Inverse problem solution for different levels of measurement error - Step variation for  $q(t)$ .

## CONCLUSIONS

The inverse problem of estimating the timewise variation of the wall heat flux to a non-Newtonian fluid in a parallel plate channel, was solved by using the conjugate gradient method with adjoint equation for function estimation.

We have used in the inverse analysis the measurements of a single sensor. Five different locations for such sensor were tested by examining the accuracy of the inverse problem solution, obtained with simulated measurements. Among those tested, the location  $x/x_f = 0.8$  and  $y = 0.95$  yielded the most accurate results and was then used throughout the paper.

The inverse problem solution appears to be insensitive to the power-law index of the fluid flowing in the channel. Also, the present function estimation approach is stable with respect to random measurement errors, even for functional forms containing sharp corners and discontinuities, which are the most difficult to be recovered by an inverse analysis.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The CPU time for this work has been provided by CESUP-UFRGS and NACAD-COPPE-UFRJ.

#### REFERENCES

Alifanov, O.M., "Inverse Heat Transfer Problems", Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N., "Transport Phenomena", John Wiley & Sons, New York, 1960.

Bokar, J. C., Ozisik, M. N., "An Inverse Analysis for Estimating the Time-Varying inlet Temperature in Laminar Flow inside a Parallel Plate Duct", Int. J. Heat Mass Transfer, vol.38, No.1, pp. 39-45, 1995.

Cotta, R. M. and Ozisik, M. N., "Laminar Forced Convection to Non-Newtonian Fluids in Ducts with Prescribed Wall Heat Flux", International Comm. of Heat & Mass Transfer, Vol. 13, No. 3, May, June, 1986.

Huang, C. H., Ozisik, M. N., "Inverse Problem of Determining Unknown Wall Heat Flux in Laminar Flow Through a Parallel Plate Duct", Numerical Heat Transfer, Part a, Vol. 21, pp. 55-70, 1992.

Jarny, Y., Ozisik, M. N. and Bardon, J.P., "A General Optimization Method using Adjoint Equation for solving Multidimensional Inverse Heat Conduction", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 34, No. 11, pp. 2911-2919, 1991.

Machado, H. A., Orlande, H. R. B., "Estimation of Wall Heat Flux Parallel Plate Channel Via Conjugate Gradient Method", XIII COBEM, Belo Horizonte, Brazil, 1995.

Machado, H. A., Orlande, H. R. B., "Inverse Analysis of Estimating the Timewise and Spacewise Variation of the Wall Heat Flux in a Parallel Plate Channel", Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, in press.

Ortega, J. M., "Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear System", Plenum Press, New York, 1988.

Ragunath, R., "Determining Entrance Conditions From Downstream Measurements", Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 20, pp. 173-183, 1993.





## ON A THERMODYNAMICALLY CONSISTENT MODELING OF NON-NEWTONIAN FLUID BEHAVIOR

H. S. COSTA MATTOS

Department of Mechanical Engineering  
Universidade Federal Fluminense  
Rua Passo da Pátria 156  
24210 - 240, Niterói, RJ - Brazil



### ABSTRACT

*This work presents a general procedure, developed within the framework of thermodynamics of irreversible processes, to obtain constitutive relations for fluids that verify automatically the principle of material objectivity and a local version of the second law of thermodynamics. In this constitutive theory the free energy is supposed to be a differentiable function of a finite set of variables, some of them introduced to account for the interference of the microstructure with the macrostructure. This phenomenological theory may allow a simplified macroscopic description of the microstructural physical mechanisms, relevant for certain classes of fluids. The choice of a particular objective time derivative and of two thermodynamic potentials is sufficient to define a complete set of constitutive equations. Some basic features and possibilities of the theory are presented through examples concerning viscoelastic fluids.*

### INTRODUCTION

To set up a general constitutive theory for fluids it is necessary to consider aspects of the second law of thermodynamics since dissipative phenomena must be taken into account. In addition, the constitutive equations must satisfy the principle of material objectivity. The constitutive theories in which the free energy is supposed to be a function of a set of independent variables [1], widely used in solid mechanics ([2], [3]), may provide practical tools for the modeling of non-newtonian fluids especially when it is necessary to account for the interference of the microstructure with the macrostructure. That is the case, for instance, of certain kinds of polymeric liquids in which the breakdown of connections between the structural units that characterize the internal, i.e., the submacroscopic, structure may induce a decrease in the resistance to flow ([4], [5]). In these theories, some of these variables are introduced to account for dissipative mechanisms. In a phenomenological approach, such additional variables are supposed to contain microstructural information, relevant for certain classes of materials. To each of these variables is associated one constitutive equation in such a way that a local version of the second law of thermodynamics must be satisfied.

This paper is concerned with a systematic procedure to obtain constitutive equations for fluids within this framework. Whatever is the choice and interpretation of the additional variables introduced to account for dissipative mechanisms, the resulting constitutive equations are objective and satisfy a local version of the second law of thermodynamics no matter the external actions and the initial and boundary conditions. The choice of two potentials and of a particular objective time derivative is sufficient to de-

fine a complete set of constitutive equations. Although a large number of alternative objective time derivatives found in literature can be considered in rate-type constitutive theories (Jaumann, Truesdell, Cotter-Rivling, etc.), some of them may lead to physically unrealistic oscillatory behaviors even if the resulting constitutive equations are thermodynamically admissible and satisfy the principle of material objectivity. Hence, in order to assure material objectivity without undesirable oscillations, special kinds of objective time derivatives for tensorial quantities are considered. Since the choice of a particular objective time derivative can be interpreted as a constitutive assumption, it is presented a discussion about the physical interpretation of these derivatives and their possible relation with micromotions.

The main features and possibilities of the theory are presented through examples concerning viscoelastic fluids. The study of fluids that may store elastic energy is interesting because some important phenomena, such as the variability of viscosity with rate of shear and normal stress effects such as the die - swell and centripetal (or rod climbing) motion may be connected with the ability of the fluid to store elastic energy temporarily. To better understand the role of the objective time derivative in the theory, a simple shear flow of (generalized) Maxwell fluids is studied. The analysis of this particular example allows to verify that, due to the dissipative behavior, in some non-newtonian fluids a flow may strongly depend on the initial conditions adopted for some of the independent variables.

### THE SECOND LAW OF THERMODYNAMICS

Under suitable regularity assumptions it is possible to consider the following local version of the second

law of thermodynamics:

$$d = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{e} - \theta \dot{s}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (1)$$

where  $(\dot{\phantom{x}})$  denotes the material time derivative of  $(\phantom{x})$ ;  $\rho$  is the mass density;  $\mathbf{T}$  the Cauchy stress tensor;  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\text{grad}\mathbf{v} + (\text{grad}\mathbf{v})^T]$  the deformation rate tensor;  $e$  the internal energy per unit mass;  $\theta$  the absolute temperature;  $s$  the total entropy per unit mass;  $\mathbf{q}$  the heat flux vector and  $\mathbf{g} = -\text{grad}(\log\theta)$ ,  $\log\theta$  standing for the logarithm of the absolute temperature.  $d$  is the rate of energy dissipation per unit volume. The second law of thermodynamics makes a distinction between possible processes ( $d \geq 0$ ) and impossible processes ( $d < 0$ ). The possible processes may be reversible (the rate of energy dissipation  $d$  is always equal to zero) or not. The Clausius-Düheim inequality, an alternative local version of the second law of thermodynamics, is obtained introducing the definition of the Helmholtz free energy per unit mass  $\Psi$  ( $\Psi = e - \theta s$ ) in equation (1):

$$d = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{\theta}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2)$$

## CONSTITUTIVE THEORY

A general procedure to obtain a set of thermodynamically admissible constitutive equations for fluids that verify automatically the principle of objectivity can be described by the following steps:

**1. Free energy potential:** To set up a constitutive theory within the framework of the thermodynamics of irreversible processes, the present work considers fluids for which the Helmholtz free energy  $\Psi$  can be expressed as an isotropic and differentiable function of the absolute temperature  $\theta$ , of the density  $\rho$ , of a measure of strain  $\boldsymbol{\epsilon}$  (to be defined in the next section) and of whatever may be relevant independent variables, which must be objective quantities. Generally, these variables are used to model the interference of the microstructure with the macrostructure. For instance: a tensorial variable related to the irreversible part of the fluid deformation caused by different possible submacroscopic mechanisms in molten metals and polymers; a tensorial variable that takes into account the incompatibility between different slip systems in crystalline fluids; a scalar variable related to the size and volume fraction of particles in suspensions; a scalar variable related with the proportion of broken connections between structural units in a macromolecule; etc.

A further discussion about the definition, choice and interpretation of these variables is performed in the next sections. Since, in this theory, most of the difficulties with material objectivity appear when these additional variables are tensorial quantities, only one abstract additional second order symmetric tensorial variable  $\mathbf{A}$  is considered from now on in order to simplify the presentation:

$$\Psi = \psi(\rho, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{A}, \theta) \quad (3)$$

**2. Objective time derivatives:** The concepts underlying these constitutive equations cannot be presented without regard to the question of whether they satisfy the principle of material objectivity. Since the material time derivative of an objective tensorial quantity is not necessarily objective, it is interesting to use some special kind of time derivative in rate type constitutive equations in order to assure the objectivity (for a further discussion see, for instance, Billington and Tate [5] and Truesdell and Noll [6]).

A large number of definitions of objective time derivatives can be found in the literature (Jaumann, Truesdell, Cotter-Rivling, etc.). The choice of a particular derivative is very important and can be interpreted as a constitutive assumption. The present study is restricted to a particular family of derivatives:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}(\mathbf{W} - \mathbf{W}^R) - (\mathbf{W} - \mathbf{W}^R)\mathbf{T} \\ \dot{\mathbf{A}} &= \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}(\mathbf{W} - \mathbf{W}^R) - (\mathbf{W} - \mathbf{W}^R)\mathbf{A} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{W} - \mathbf{W}^R) - (\mathbf{W} - \mathbf{W}^R)\boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (4)$$

where  $\dot{\mathbf{T}}$ ,  $\dot{\mathbf{A}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  are objective time derivatives of the objective quantities  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$ .  $\mathbf{W} = \frac{1}{2}[\text{grad}\mathbf{v} - (\text{grad}\mathbf{v})^T]$  is the spin tensor and  $\mathbf{W}^R$  is a skew-symmetric second order tensor. The objective derivatives  $\dot{\mathbf{T}}$ ,  $\dot{\mathbf{A}}$  and  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  are equal to the material derivatives of  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$  and  $\boldsymbol{\epsilon}$  as they would appear to an observer in a frame of reference attached to the particle and rotating with it at an angular velocity equal to the instantaneous value of the spin  $(\mathbf{W} - \mathbf{W}^R)$ . The spin  $\mathbf{W}^R$  can be associated to micro-rotations of the material structure or substructure. Nevertheless, it is not a simple task to give a complete interpretation of this additional spin based on microstructural consideration. The term  $(\mathbf{W} - \mathbf{W}^R)$  can be associated to the independent movement of a unit vector  $\mathbf{n}$  attached to the material point:  $\dot{\mathbf{n}} = (\mathbf{W} - \mathbf{W}^R)\mathbf{n}$  and  $\mathbf{W}^R$  may be interpreted as relative rotation of the material structure or substructure with respect to the continuum. In this case,  $\mathbf{W}^R$  coincides with the concept of relative spin proposed by Zbib and Aifantis in the context of solid mechanics [7] which is a generalization of the plastic spin utilized by Dafalias [8], [9].

The determination of the additional spin  $\mathbf{W}^R$  can be based on the analysis of the interference of the microstructure (micromovements) with the macrostructure or on a phenomenological approach (which is the way adopted in this paper), presenting directly macroscopic constitutive relations for  $\mathbf{W}^R$ . If  $\mathbf{W}^R = \mathbf{0}$ , the derivatives  $\dot{\mathbf{T}}$ ,  $\dot{\mathbf{A}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  coincide, respectively, with the definition of the Jaumann derivative of  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$  and  $\boldsymbol{\epsilon}$ . From a phenomenological point of view, the spin  $\mathbf{W}^R$  should be introduced in the theory to eliminate physically unrealistic oscillations of the variables  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$  and  $\boldsymbol{\epsilon}$  that may appear if the Jaumann derivative is considered. In this phenomenological approach, the relative spin is assumed to be an objective function of the deformation rate tensor  $\mathbf{D}$ , of the Cauchy stress  $\mathbf{T}$  and also of  $\mathbf{A}$  such that  $\mathbf{W}^R = \mathbf{0}$  if  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ . Hence, very general expressions can be adopted for the skew-symmetric

tensor  $\mathbf{W}^R(\mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{A})$ . In general, for an adequate phenomenological description of fluid behavior, in order to eliminate the undesirable oscillations induced by the Jaumann derivative, it is sufficient to consider:

$$\mathbf{W}^R = \eta(\mathbf{A}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}) \quad (5)$$

with  $\eta$  being a constant. For the sake of simplicity, this expression for  $\mathbf{W}^R$  is adopted in the examples presented in sections 5 and 6.

The definition of the objective derivative  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  allows to propose a definition for the measure of deformation  $\boldsymbol{\epsilon}$  considered in this paper -  $\boldsymbol{\epsilon}$  is the second order tensor such that:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}, \quad \forall t \quad (6)$$

As it is shown in section 6, such definition of  $\boldsymbol{\epsilon}$  is very useful in the modeling of elastic effects in some fluid flows.

**3. Fourier Law:** The main idea in this theory is to characterize a fluid behavior through the free energy  $\Psi$  and the rate of energy dissipation  $d$ . Consequently, constitutive informations about the parcel  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}$  of the rate of energy dissipation  $d$  must be given. In this theory these information are obtained through the following constitutive relation between  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{q} = k(\theta) \mathbf{g} \quad (7)$$

where  $k$  is a positive scalar function of  $\theta$ . From the definition of  $\mathbf{g}$  it comes that:

$$\mathbf{q} = k(\theta) \text{grad}(\log\theta) = -\frac{k(\theta)}{\theta} \text{grad}\theta = -K(\theta) \text{grad}\theta \quad (8)$$

Equation (8) is a generalized version of the Fourier law with  $K$  being the thermal conductivity. It can be reduced to the usual Fourier law ( $K = \text{constant}$ ) if small deviations of temperature from a fixed  $\theta_0$  is assumed.

**4. Rate of energy dissipation:** The choice and interpretation of the auxiliary variable  $\mathbf{A}$  may vary from one problem to another. Nevertheless, in the present theory, such kind of variable is supposed to be related with irreversible changes on the microstructure and, consequently, with dissipative mechanisms. This relation with dissipative mechanisms is introduced through the constitutive assumption that the parcel  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{\theta}))$  of the rate of energy dissipation  $d$  can be expressed as a function  $d_m$  of  $\mathbf{D}$  and  $\dot{\mathbf{A}}$  such that  $d_m(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ .

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{\theta}) = d_m(\mathbf{D}, \dot{\mathbf{A}}) ; \quad d_m(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \quad (9)$$

Hence,  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{\theta})) = (d - \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}) = d_m(\mathbf{D}, \dot{\mathbf{A}})$  is a parcel of the rate of energy dissipation related only to mechanical effects since  $d_m$  is supposed to be only a function of  $\mathbf{D}$  and  $\dot{\mathbf{A}}$ . This assumption has an important role in the theory. For instance, in any homothermal rigid body motion, the rate of energy dissipation

$d$  may be positive ( $d > 0$ ) only if  $\dot{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$ , otherwise,  $d = 0$ . As a consequence, in this kind of motion, the only possible dissipative mechanism would be the microscopic changes related to the variable  $\mathbf{A}$ . Besides, if the potential  $\psi$  is a function only of  $\rho$  and  $\boldsymbol{\epsilon}$ , all possible processes must be reversible.

$d_m$  is supposed to have the following form for the fluids considered in this theory:

$$d_m = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\mathbf{A}} \quad (10)$$

where  $\phi$  is a differentiable function of  $\mathbf{D}$  and  $\dot{\mathbf{A}}$  such that  $\phi(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ . Equation (10) implies that the parcel of the rate of energy dissipation due to mechanical effects is the sum of two parts, the first one  $(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D})$  related to the rate of energy dissipation due to viscous phenomena and the second one  $(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\mathbf{A}})$  related to the dissipation due to internal changes of the material.

To understand the implications of the choice of expression (10), it is interesting to use the following local form for the rate of energy dissipation, obtained from equations (2) and (3):

$$d = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + s\dot{\theta} \right) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \quad (11)$$

Using the symmetry of  $\boldsymbol{\epsilon}$  and  $\mathbf{A}$  it is possible to verify that:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{D} ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} \quad (12)$$

Introducing the balance of mass equation and equations (12) in (11), it then comes that:

$$d = \left( \mathbf{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{1} \right) \cdot \mathbf{D} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \left( \mathbf{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{1} \right) \cdot \mathbf{D} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \rho s \right) \dot{\theta} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \quad (13)$$

Since  $d_m$  is given by (10), then:

$$d_m(\mathbf{D}, \dot{\mathbf{A}}) = d - \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} = \left( \mathbf{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{1} \right) \cdot \mathbf{D} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \rho s \right) \dot{\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\mathbf{A}} \quad (14)$$

And, consequently:

$$\left( \mathbf{T} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{1} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \right) \cdot \mathbf{D} - \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{A}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \rho s \right) \dot{\theta} = 0 \quad (15)$$

Equation (15) must hold in any possible process. Thus, it is possible to conclude that the following relations must always hold:

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (16.1)$$



$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = 0 \quad (16.2)$$

$$\mathbf{T} = -\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{1} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \quad \text{if } \text{tr} \mathbf{D} \neq 0 \quad (16.3)_a$$

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{1} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \quad \text{if } \text{tr} \mathbf{D} = 0 \quad (16.3)_b$$

Equations (16) are constitutive relations that result from the hypothesis adopted for the free energy  $\Psi$  and the rate of energy dissipation  $d$ . The choice of the expression for the relative spin  $\mathbf{W}^R$  and also for the potentials  $\psi$  and  $\phi$  characterize completely a given fluid in this theory. Equations (16) together with the Fourier law (8), then form a complete set of objective constitutive equations.

(16.1) is a classical expression found in many works, which is very good, at least, in the case of small variations of temperature from a fixed  $\theta_0$ .

Equation (16.2) relates the objective time derivative of  $\mathbf{A}$  with the other independent variables. Similar expressions appear in some works concerned with solid mechanics [2] and are generally called complementary equations. Nevertheless, these complementary equations are directly postulated and they are not obtained, like in the present work, as consequences of hypothesis concerning the free energy and the rate of energy dissipation.

The stress tensor  $\mathbf{T}$  and the others variables are related through equation (16.3)<sub>a</sub> (compressible fluids) or equation (16.3)<sub>b</sub> (incompressible fluids). The term  $\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)$  is the elastic or reversible part of  $\mathbf{T}$  and  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}}\right)$  the irreversible part of  $\mathbf{T}$  which is related to viscous phenomena. The term  $\left(\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right)$  is the thermodynamic pressure.  $P$  is a multiplier of the incompressibility constraint  $\text{tr} \mathbf{D} = 0$ .  $P$  is an unknown quantity to be determined from the problem formed by the balance equations, the constitutive equations and a suitable set of boundary and initial conditions.

Equation (14) shows that, in order to have  $d \geq 0$ , the following condition is necessary:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\mathbf{A}} \geq -\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}$$

Since the Fourier law is assumed to be valid for this class of materials, the parcel of the dissipation rate due to thermal effects is always non-negative ( $\mathbf{q} \cdot \mathbf{g} = K \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \geq 0$ ). This fact leads to the classical heat conduction inequality ( $-\mathbf{q} \cdot \text{grad} \theta \geq 0$ ) since the absolute temperature  $\theta$  is a positive quantity. Hence, the parcel of the dissipation rate due to mechanical effects is not necessarily non-negative, except for homothermal processes ( $\text{grad} \theta = 0$ ). However, in the present theory, the following constitutive assumption for the potential  $\phi$  is taken into account:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\mathbf{A}} \geq 0 \quad \forall (\mathbf{D}, \dot{\mathbf{A}}) \quad (17)$$

For any particular set of constitutive equations obtained within this context, if condition (17) is verified,

the second law inequality is automatically satisfied in any process, regardless the external actions, the boundary conditions and also the initial conditions. It is important to remark that the potentials  $\psi$  and  $\phi$  do not need to be a convex functions. The convexity of  $\phi$  is only a sufficient condition in order to verify (17).

## VISCOELASTIC FLUIDS

In this theory, the so-called viscoelastic fluids have the following basic features:

- (i)  $\psi$  is, at least, a function of  $\rho$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\theta$  and the free energy potential has the following particular form:

$$\psi(\rho, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{A}, \theta) = \psi_m(\rho, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{A}) + \psi_t(\theta)$$

$$\psi_m(\rho, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{A}) = \frac{1}{\rho} \hat{\psi}_m(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{A}) \quad (18)$$

where  $\hat{\psi}_m$  is a differentiable function of  $(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{A})$ .

- (ii) The potential  $\phi$  is a differentiable isotropic function of  $\mathbf{D}$  and  $\dot{\mathbf{A}}$ ; This potential cannot be identically equal to zero:  $\phi \neq 0$ .

From equation (16) it comes that:

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{1} + \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} ; \quad \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \mathbf{A}} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = 0 \quad (19)$$

$\left(\frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)$  is the elastic or reversible parcel of the stress tensor  $\mathbf{T}$ .  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}}\right)$  is the viscous part of  $\mathbf{T}$ . This general class of constitutive equations may be used to model the macroscopic behavior of macromolecular fluids (molten plastics, some lubricating oil and paints, etc.).

An example of a viscoelastic fluids is the so-called Generalized Maxwell's fluid which is defined as follows:

### Generalized Maxwell fluid:

Besides the variable  $\boldsymbol{\epsilon}$ , the potential  $\psi_m$  for such kind of fluid kind is a function of a symmetric second order internal variable  $\mathbf{A}$  called the anelastic or irreversible strain tensor.

$$\hat{\psi}_m(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \lambda (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{A}) ; \quad \phi(\dot{\mathbf{A}}) = \frac{1}{2} \kappa \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} \quad (20)$$

with  $\kappa > 0$  and  $\lambda > 0$ .

From (19) and (20) it follows that:

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{1} + \lambda (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{A}) ; \quad \lambda (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{A}) - \kappa \dot{\mathbf{A}} \quad (21)$$

And, defining  $\mathbf{T}^P = \mathbf{T} + P \mathbf{1}$ , it is possible to conclude that:

$$\mathbf{T}^P = \lambda (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{A}) \implies \mathbf{T}^P = \kappa \dot{\mathbf{A}} \quad (22)$$

Hence, deriving the first identity in (22) and combining with the second one it is possible to obtain the following relation:

$$\mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \lambda^{-1} \dot{\mathbf{T}}^P + \kappa^{-1} \mathbf{T}^P \quad (23)$$



Equation (23) is one possible generalized version of the classical Maxwell viscoelastic model in small strains. The importance of the choice of the objective derivative, the role of the initial conditions for the variable  $\mathbf{A}$  and other features of this model can be seen through a very simple example - a shear flow - which is usually defined by:

$$v_1 = \dot{\gamma}x_2 \quad v_2 = v_3 = 0 \quad (24)$$

with  $v_1, v_2, v_3$  being the cartesian coordinates of the velocity  $\mathbf{v}$  and  $\dot{\gamma}$  the shear strain.

In this case, taking  $\mathbf{W}^R$  given by (5), it can be shown that relations  $\mathbf{T}^R \cdot \mathbf{e} = \kappa \dot{\mathbf{A}}$ , and  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{D}$  are equivalent to:

$$\dot{A}_{11} - 2\dot{\gamma}[1 - 2\eta A_{11}]A_{12} = \left(\frac{1}{\kappa}\right)T_{11}^P = 0 \quad (25.1)$$

$$\dot{A}_{12} + 2\dot{\gamma}[1 - 2\eta A_{11}]A_{11} = \left(\frac{1}{\kappa}\right)T_{12}^P \quad (25.2)$$

$$A_{22} = -A_{11} \quad ; \quad A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0 \quad (25.3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{11} - 2\dot{\gamma}[1 - 2\eta A_{11}]\varepsilon_{12} = 0 \quad (26.1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{12} + 2\dot{\gamma}[1 - 2\eta A_{11}]\varepsilon_{11} = \dot{\gamma} \quad (26.2)$$

$$\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11} \quad ; \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (26.3)$$

and (42) is equivalent to:

$$\dot{T}_{11}^P - 2\dot{\gamma}[1 - 2\eta A_{11}]T_{12}^P + \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)T_{11}^P = 0 \quad (27.1)$$

$$\dot{T}_{12}^P + 2\dot{\gamma}[1 - 2\eta A_{11}]T_{11}^P + \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)T_{12}^P = \dot{\gamma}\lambda \quad (27.2)$$

$$T_{22}^P = -T_{11}^P \quad ; \quad \dot{T}_{13}^P = \dot{T}_{23}^P = \dot{T}_{33}^P = 0 \quad (27.3)$$

If  $\eta = 0$  then  $\mathbf{W}^R = \mathbf{0}$  (the Jaumann derivative). In this case the components of  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$  and  $\boldsymbol{\varepsilon}$  can be computed analytically. For instance, taking the initial conditions  $\mathbf{A}(t = 0) = \boldsymbol{\varepsilon}(t = 0) = \mathbf{T}(t = 0) = \mathbf{0}$  the following expressions are obtained:

$$\varepsilon_{12}(t) = \frac{1}{2}\sin(2\dot{\gamma}t) \quad ; \quad \varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\dot{\gamma}t))$$

$$T_{12}(t) = C \left[ e^{-\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)t} \left( -\frac{\lambda}{\kappa} \cos(2\dot{\gamma}t) + 2\dot{\gamma} \sin(2\dot{\gamma}t) \right) + \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right) \right]$$

$$C = \frac{\dot{\gamma}\lambda}{4\dot{\gamma}^2 + (\lambda/\kappa)^2}$$

Similarly as in the case of a rigid-viscoplastic fluid, the choice of the Jaumann derivative can lead to undesirable oscillations. The use of positive values for  $\eta$  can attenuate and even eliminate such kind of oscillations. To illustrate the implications of the use of the relative spin ( $\eta \neq 0$ ), the system of non-linear ordinary differential equations formed by (25), (26) and (27) is solved numerically for  $\eta = 1$ . The initial value problem can be put into a dimensionless form. In the process, only one dimensionless parameter  $\alpha = [\lambda/(\dot{\gamma}\kappa)]$  accounts for the material properties. Figure 1 shows the evolution of

the stress components  $T_{12}^P = T_{12}$  and  $T_{11}^P$  taking  $\eta = 1$  and  $\alpha = 1$ . It can be verified that  $\lambda$  is a limit value for the shear component  $T_{12}$ . After  $t = \dot{\gamma} \pi$ , the normal stress difference  $(T_{11} - T_{22}) = 2T_{11}^P$  is zero because the elastic part of strain  $(\varepsilon_{11} - A_{11})$  is zero. The evolution of the components of  $\mathbf{A}$  and  $\boldsymbol{\varepsilon}$  is depicted in Figures 2 and 3. It is important to remark that even in this simple problem, due to the dissipative behavior of such kind of fluid, the study of the flow depends strongly on the initial conditions adopted for  $\mathbf{A}$ .

## CONCLUDING REMARKS

The procedure to obtain constitutive relations that verify automatically the principle of material objectivity and the second law of thermodynamics proposed in this paper can be an useful tool in the modeling of non-newtonian fluids. It allows a generalization of classical rheological models (Jeffreys, Maxwell, Oldroyd, etc. [4], [12], [13]) by including microstructural effects. The interference of the microstructure with the macrostructure can be achieved not only by the choice of the potentials  $\psi$ ,  $\phi$  and its arguments but also by the choice of the relative spin  $\mathbf{W}^R$ .

It is important to emphasize the phenomenological approach of the present work. It is not its goal to give an interpretation completely based on microstructural consideration of the auxiliary variable  $\mathbf{A}$  and of the relative spin tensor. Such kind of definition is a very complex task not yet fully developed even in solid mechanics, where such kind of approach has been used for many years.

Additional couplings between non-linear physical mechanisms (such as between the strain-hardening or the strain-softening and the anelastic strain rate), can be described through the introduction of other auxiliary variables in the problem. Such kind of procedure has been used in solid mechanics and mixture theories with very good results ([14], [15]).

Temperature plays an important role in complex flows of non-newtonian fluids in many industrial applications, such as injection molding of polymers. The proposed theory allows an adequate modeling and a simple interpretation of thermomechanical couplings when dissipative mechanisms related to changes on the material structure or substructure must also be taken into account. Interesting works can be made by analyzing the dependence of the potentials  $\psi$  and  $\phi$  on the temperature and the resulting thermomechanical couplings similarly as it was done in [16] for solid materials.

## REFERENCES

- [1] P. Germain, N. Quoc Son, and P. Suquet, *Continuum Thermodynamics*. J. Appl. Mech. ASME, **50**, 1010-1020 (1983).
- [2] B. Halphen, and Nguyen, Q. S., *Sur les Matériaux Standards Généralisés*. J. Mécanique, **14**, 33 - 63 (1975).

- [3] S. Cleja-Țigoiu S. and E. Soós, *Elastoviscoplastic Models with Relaxed Configurations and Internal State Variables*. Appl. Mech. Rev. **43**, 131 - 151 (1990).
- [4] R. B. Byrd, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*. Vols. I and II John Wiley, New York (1987).
- [5] E. W. Billington and A. Tate, *The Physics of Deformation and Flow*, Mc Graw Hill (1981).
- [6] C. Truesdell, and W. Noll, *The Nonlinear Fields Theories of Mechanics*. Enc. Phys. vol III/3. Springer, Berlin (1965).
- [7] H. M. Zbib and E. C. Aifantis, *Constitutive Equations for Large Material Rotations*, in *Constitutive Laws for Eng. Materials: Theory and Applications*, Elsevier, U. K., 1411 - 1418 (1987).
- [8] Y. F. Dafalias, *The Plastic Spin*, Trans ASME, J. Appl. Mech. **52**, 865 - 871 (1985).
- [9] E. Van der Giessen, *Micromechanical and Thermodynamic Aspects of the Plastic Spin* Int. J. Plasticity, **7**, 365 - 386 (1991).
- [10] I. Ekeland, and R. Teman, *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland, Amsterdam (1976).
- [11] J. B. Agassant, P. Avenas, and J. P. Sergent, *La Mise en Forme des Matières Plastiques*, Lavoisier, Paris (1986).
- [12] E. Astarita and G. Marucci, *Principle of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, London (1974).
- [13] M. Doi and S. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*. Claredon Press, Oxford (1986).
- [14] H. S. Costa-Mattos, M. Fremond and E. Mamyia, *A Simple Model of the Mechanical Behavior of Ceramic-Like Materials*, Int. J. Solids and Structures, **20**, 3185 - 3200 (1992).
- [15] H. S. Costa-Mattos, M. L. Martins Costa and R. M. Saldanha da Gama, *On The Modelling of Momentum and Energy Transfer in Incompressible Mixtures*. Int. J. Non-linear Mech., **30**, 419 - 431 (1995)
- [16] P. C. L. Pacheco, *Analysis of the Thermomechanical Couplings in Elasto-Viscoplastic Materials*, Doctor Thesis (in portuguese). Department of Mechanical Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1994).

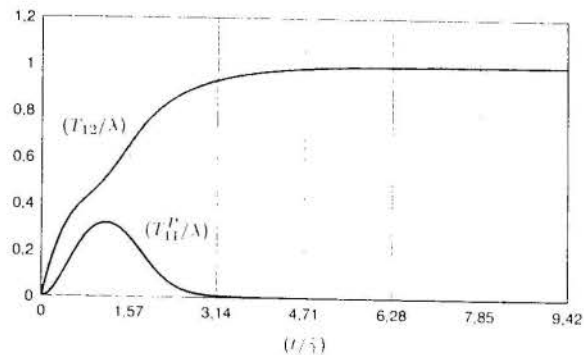


Figure 1: Evolution of the stress components  $T'_{12}$  and  $T'_{11}$  in a shear flow.  $\eta = 1$  and  $\alpha = 1$ .

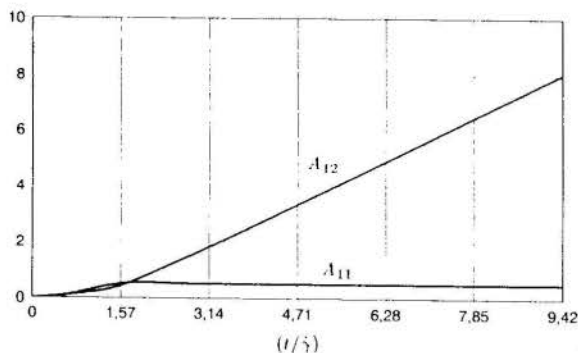


Figure 2: Evolution of the anelastic strain components  $A_{12}$  and  $A_{11}$  in a shear flow.  $\eta = 1$  and  $\alpha = 1$ .

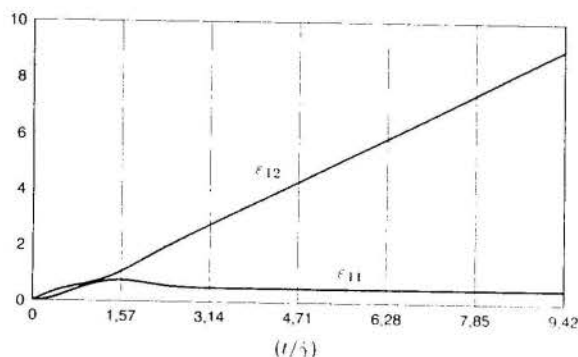


Figure 3: Evolution of the strain components  $\epsilon_{12}$  and  $\epsilon_{11}$  in a shear flow.  $\eta = 1$  and  $\alpha = 1$ .



## PREDICTION OF TURBULENT FLOW OF NON-NEWTONIAN FLUIDS IN PIPES AND ANNULI

Marco A. Teixeira

Diretoria de Metrologia Científica e Industrial - DIMCI  
Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial - INMETRO  
25.250-020 - Xerém - Duque de Caxias - RJ - Brazil

A. David Gosman

Department of Mechanical Engineering  
Imperial College of Science, Technology and Medicine  
Exhibition Road, London SW7 2BX, U.K.



### SUMMARY

*Turbulent annular flow is important in the rotary drilling process where the non-Newtonian drilling fluid (mud) passes between the drill shaft and the well casing to remove cuttings and friction-generated heat and assists the drill to penetrate. The present investigation considers the problem of predicting fully-developed turbulent flows in pipes and annuli of inelastic shear-thinning fluids. The power-law model is adopted as the constitutive equation for the fluids of interest. A low-Reynolds number form of the  $k - \epsilon$  turbulence model is used for the non-Newtonian fluid computations and produces good agreement with the available experimental data.*

### INTRODUCTION

Historically, engineers have had considerable difficulty estimating frictional pressure gradients for turbulent flow of drilling fluids. Although several calculation procedures have been presented in the literature, most of these have been obtained in laboratory apparatus in which lengths and diameters are much smaller than the well systems of practical interest. Furthermore, the knowledge of local flow patterns and turbulence quantities are only available for Newtonian flows. Thus the idea of using computational fluid dynamics (CFD) methodology for the prediction of the flow field as a whole appears an attractive option.

Although many of the drilling fluids exhibit both elastic and viscous behaviours, attention will be confined to those fluids for which elasticity is negligibly small, namely, 'purely viscous fluids'.

The study of fully-developed turbulent flow in circular pipes of these fluids dates back to 1950's. Initially, the work was concerned only with pressure drop measurements and correlations of the data obtained (see, for instance, Metzner and Reed, 1955, and Dodge and Metzner, 1959). Subsequently, Bogue and Metzner (1963) obtained Pitot tube measurements of fully-developed mean velocity profiles for the turbulent flow of Carbopol solutions of different concentrations.

In addition to the experimental investigations, there are the predictions of flow fields using computational fluid dynamics (CFD) techniques due to Politis (1989), and Collins (1990), who looked at the problems of predicting turbulent flows of inelastic shear-thinning fluids in pipes. In their work, the wall-function approach used in the study of Newtonian flows were modified to account for the wall-approximate effect in the near-wall region, while the mean value of the

shear stress was related with the mean value of the rate of dissipation of turbulent kinetic energy. However, their method requires adjustment of a model coefficient whenever  $n$  is changed.

The problem of describing fully developed turbulent flows through concentric annuli has been the subject of many investigations. Nevertheless, it is quite surprising that there is no general agreement on the precise dependence of basic quantities such as the pressure drop coefficient and the mean velocity profiles on radius ratio ( $\equiv R_1/R_2$ ),  $R_1$  and  $R_2$  being the inner and outer radius, respectively.

The friction factor results of Brighton and Jones (1964) are about 1 to 10 percent higher than pipe flow values, having no detectable dependence on the radius ratio.

Lawn and Elliott (1972) presented results in annuli of three different radius ratio. For the smallest radius ratio  $R_1/R_2 = 0.088$ , their values are about 8.5 percent above that of pipe flows, and for the radius ratios of both  $R_1/R_2 = 0.176$  and  $R_1/R_2 = 0.396$ , their experimental results are about 5 percent above the pipe flow values, indicating a decrease in the pressure drop coefficient with increasing radius ratio.

Rehme (1974) contradicts Lawn and Elliott's conclusions by introducing very detailed and precise measurements in annuli of radius ratios  $R_1/R_2 = 0.02$ , 0.04 and 0.1, respectively. For a Reynolds number  $Re \approx 10^5$  and a radius ratio  $R_1/R_2 = 0.02$ , the experimental data of Rehme coincide with pipe flow values; for  $R_1/R_2 = 0.04$  they are about 1.1 percent higher and for  $R_1/R_2 = 0.1$  about 4 percent higher than the pipe flow values. Rehme's results indicate an increase on the pressure drop coefficients with increasing radius ratio.

It should be noticed, however, that the previous discussion on fully developed turbulent flows through concentric annuli concerns Newtonian fluids. Experimental data for inelastic non-Newtonian fluids are not yet available.

## THEORETICAL BACKGROUND

First, for the fluids of interest, it is assumed that the viscosity is a scalar which depends only on the rate of shear tensor (eg. Bird *et al.*, 1987), and the shear stress tensor, in Cartesian tensor notation, reads:

$$\tau_{ij} = \mu(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \dot{\gamma}_{ij} \quad (1)$$

Here  $\tau_{ij}$  is the shear stress tensor,  $\dot{\gamma}_{ij}$  stands for the rate of shear ( $\equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ), and  $\mu$  is the viscosity, which may vary in space and time.  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  and  $\pi_3$  are the first, second and third invariants of  $\dot{\gamma}_{ij}$  and are defined as:

$$\begin{cases} \pi_1 = \text{tr } \dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ii} \\ \pi_2 = \text{tr } \dot{\gamma}_{ij}^2 = \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji} \\ \pi_3 = \text{tr } \dot{\gamma}_{ij}^3 = \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{jk} \dot{\gamma}_{ki} \end{cases} \quad (2)$$

For an incompressible fluid  $\pi_1 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ . For viscometric flows, i.e. unidirectional shear flows for which the shear rate is independent of time for a given particle,  $\pi_3$  turns out also to be zero. Slattery and Bird (1961), and Bird *et al.* (1987), argue that omitting  $\pi_3$  for non-viscometric flows is not a serious restriction. Accordingly Eq. (1) reduces to:

$$\tau_{ij} = \mu(\pi_2) \dot{\gamma}_{ij} \quad (3)$$

It can be readily seen that when  $\mu$  is a constant, the above equation describes a Newtonian fluid. For non-Newtonian shear-thinning fluids  $\mu$  is a decreasing function of the second invariant  $\pi_2$ , and for shear-thickening fluids it is an increasing function of  $\pi_2$  (Bird *et al.*, 1987).

A number of proposals for the forms of  $\mu(\pi_2)$  or  $\mu(\dot{\gamma})$  have appeared in the literature, varying in complexity depending on the range of the molecular viscosity-shear rate curve that they reproduce and the accuracy with which they do so. Among these suggested models, the most well-known and widely adopted empiricism in many engineering flow problems, and commonly used in the petroleum industry is a simple two-parameter expression, proposed independently by Ostwald (1925) and de Waele (1923), which is known also as the 'power-law' model:

$$\mu = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (4)$$

here  $\dot{\gamma}$  ( $\equiv \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$ ) is the magnitude of the rate of shear tensor  $\dot{\gamma}_{ij}$ , the dimensional parameter  $K$  [ $N s^n m^{-2}$ ] is called the fluid consistency, and the dimensionless quantity  $n$  is the power-law index.

An important experimental-based analysis of the turbulent flow of non-Newtonian fluids was made by Metzner and Reed (1955), who introduced a generalised Reynolds number for power-law fluids,  $Re'$  which is so defined that the analytical solution for the laminar friction factor  $f$  equals to  $16/Re'$  - in agreement with the Newtonian flow result. The definition is:

$$Re' = \frac{\rho U_b^{2-n} D^n}{K} \cdot \frac{1}{8^{n-1} \left(\frac{1+3n}{4n}\right)^n} \quad (5)$$

where  $U_b$  is the average mean velocity and  $D$  the pipe diameter.

Latef, Dodge and Metzner (1959) produced a turbulent friction factor correlation for power-law fluids:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = \frac{4.0}{n^{0.75}} \log \left( Re' f^{\frac{(2-n)}{2}} \right) - \frac{0.4}{n^{1.2}} \quad (6)$$

**Governing Equations.** The instantaneous equations for mass and momentum conservation can be derived using the methods of continuum mechanics or from kinetic theory. Unfortunately, the instantaneous equations are not tractable analytically for the turbulent flow conditions, and the direct numerical simulation procedures and computing resources are well beyond the needs of applicability in engineering problems. The most common approach is to use the statistical averaging devised by Reynolds (1895) and decompose an instantaneous quantity  $f$  as the sum of the mean  $\bar{f}$  and the fluctuation  $f'$  from the mean, see, for instance, Hinze (1975).

In the present theoretical study we consider steady-state flow of a homogeneous fluid of constant density. Using Cartesian tensor notation and applying the decomposition into the equations which express conservation of mass and momentum, and time averaging yields:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

and,

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} + \rho \overline{u'_i u'_j}) \quad (8)$$

The above equation set determines the mean velocity and pressure fields, but the appearance of  $\bar{\tau}_{ij}$  and  $\overline{u'_i u'_j}$  leaves the system of equations unclosed. Representations of  $\bar{\tau}_{ij}$  and  $\overline{u'_i u'_j}$  as functions of mean velocity values or their spatial gradients must therefore be supplied.

**Modelling of  $\bar{\tau}_{ij}$ .** The decomposition of the instantaneous deviatoric stress tensor, Eq. (3), and time averaging gives:

$$\bar{\tau}_{ij} = -(\bar{\mu} \bar{\dot{\gamma}}_{ij} + \overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}}) \quad (9)$$

Clearly, to model the mean viscous shear stress  $\bar{\tau}_{ij}$  is to model  $\bar{\mu}$  and  $\overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}}$ . Since viscous effects are expected to prevail only in the near-wall viscosity-influenced sublayer, in which turbulent fluctuations are negligible, it can be assumed that  $\overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}}$  is much smaller than  $\bar{\mu} \bar{\dot{\gamma}}_{ij}$  and may hence be neglected. In the turbulent core region, the modelling of  $\bar{\tau}_{ij}$  is irrelevant (at least insofar as the mean velocity field is concerned), because turbulent effects dominate there. Accordingly, Eq. (9) reduces to:

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{\mu} \bar{\dot{\gamma}}_{ij} \quad (10)$$

In analogy to Politis' (1989) linearisation of  $\tau_{ij}$ , the molecular viscosity is rewritten as:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu(\bar{\dot{\gamma}} + \dot{\gamma}') = \mu(\bar{\dot{\gamma}}) + \dot{\gamma}' \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}} \Big|_{\bar{\dot{\gamma}}} + O(\dot{\gamma}'^2) + \dots \quad (11)$$

After time averaging Eq. (11), neglecting high order terms and using the power-law constitutive Eq. (4), we obtain:

$$\bar{\mu} = K \bar{\dot{\gamma}}^{n-1} \quad (12)$$

and accordingly,

$$\bar{\tau}_{ij} = -K \bar{\dot{\gamma}}^{n-1} \bar{\dot{\gamma}}_{ij} \quad (13)$$

The above equation indicates that the mean value of molecular viscosity is obtained from the power-law Eq. (4) by replacing instantaneous shear rates with their mean values.



The above effort of modelling the mean molecular stress  $\overline{\tau_{ij}}$  has been directed only at the near-wall region. The justification for this, as stated by others (Bogue and Metzner, 1963; and Edwards and Smith, 1980) is that the only region of the flow in which viscous forces dominate is near the wall.

**Modelling of  $\overline{u'_i u'_j}$ .** For the purposes of the present study, *ie.* turbulence modelling of inelastic non-Newtonian fluids, it is expected that in the inertial core region, where the Reynolds stress rather than the viscous stress determines the flow, the rheological properties of the fluid will not affect the turbulence, as confirmed by the experimental data. Further, the fact that the measured velocity profiles in 'law of the wall' coordinates run parallel with that of Newtonian flow suggests that the turbulent length scales are not changed due to rheological effects. Therefore, the same approach in modelling  $\overline{u'_i u'_j}$  in this region as that employed in the case of Newtonian fluid flow can be adopted.

In the near-wall viscosity-influenced region, however, the non-Newtonian features of the fluid will determine the viscous forces and hence the way in which turbulence is damped out. Accordingly, it is necessary to assemble a low-Reynolds number form of turbulence model which is capable of accounting for the turbulence processes in the fully-turbulent region as well as the interaction between turbulence and non-Newtonian effect in the viscous sublayer. We do this on the basis of available models established for Newtonian flows, to which modifications due to non-Newtonian effects are made which are effective only in the near-wall layer. Moreover, it is ensured that the model still applies in the limiting case of Newtonian fluid flow ( $n = 1$ ).

Preliminary numerical calculations for the turbulent pipe flows of inelastic non-Newtonian fluids, performed using the low-Reynolds number  $k - \epsilon$  models versions of Jones and Launder (1972), and Yang and Shih (1993); and the  $k - \omega$  model of Wilcox (1992), indicated that while the results are qualitatively in line with experimental data, the  $k - \epsilon$  variant of Jones and Launder (1972) produces best overall predictions. It was therefore adopted in the present study.

The  $k - \epsilon$  model of Jones and Launder (1972) is based on the eddy viscosity hypothesis, where the Reynolds stress tensor takes the following form:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \overline{\gamma_{ij}} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (14)$$

Here  $\delta_{ij}$  is the Kronecker delta and  $k$  is the turbulence kinetic energy per unit mass. The proportionality parameter  $\nu_t$  is the eddy or turbulent kinematic viscosity, which is not a property of the fluid but a characteristic of the flow. It is obtained from:

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (15)$$

Here the quantity  $\tilde{\epsilon}$  ( $\equiv \epsilon - 2\bar{\nu}(\partial\sqrt{k}/\partial x_j)^2$ ), takes the value zero at the wall while it differs negligibly from the rate of dissipation of the turbulence kinetic energy  $\epsilon$ , in the fully turbulent region. Exact transport equations can be derived for both  $k$  and  $\tilde{\epsilon}$  but they require closure by replacing unknown correlations by approximate modelling.

Jones and Launder provide the following modelled forms of the transport equations for  $k$  and  $\tilde{\epsilon}$ :

$$\overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \overline{\gamma_{ij}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \bar{\nu} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$-\left[ \tilde{\epsilon} + 2\bar{\nu} \left( \frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j} \right)^2 \right] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \overline{u_j} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} = & C_1 f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{k} \nu_t \overline{\gamma_{ij}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \bar{\nu} + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} \right] \\ & - C_2 f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + 2\bar{\nu} \nu_t \left( \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

In the above the quantities  $f_\mu$ ,  $f_1$  and  $f_2$  are functions of the local turbulent Reynolds number  $Re_t$  ( $\equiv k^2/\epsilon\nu_w$ ), which equals zero at the wall and is progressively larger as one moves away from the wall:

$$f_\mu = \exp \left[ \frac{-2.5}{(1 + Re_t/50)} \right] \quad (18)$$

$$f_1 = 1.0 \quad (19)$$

$$f_2 = 1.0 - 0.3 \exp(-Re_t^2) \quad (20)$$

The quantities  $C_\mu$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$ , and  $\sigma_\epsilon$  are empirical coefficients, whose values are tabulated below:

$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
0.09	1.55	2.0	1.0	1.3

## PIPE FLOW RESULTS

The above equations were solved numerically by the finite volume method using the self-filtered central differencing scheme of Ziman (1990). All results were tested for mesh independence (with a recommended value of at least 120 points).

In Figure 1, the friction factor  $f$  is plotted against the generalised Reynolds number  $Re'$ , where the solid lines and dashed lines indicate the numerical predictions and the mean curves through the experimental data of Dodge and Metzner (1959) respectively. Evidently the current model succeeds in capturing the variations of  $f$  with  $Re'$  for both Newtonian and non-Newtonian fluid flows. The maximum departure of the predicted values from the measured ones occurs at high values of  $Re'$  for  $n = 0.6$  and  $n = 0.8$  and is about 6%. Considering the fact that the scatter of the data is typically around this level, the predictions can be regarded as generally satisfactory.

It is clear that, when plotted in these coordinates the  $f$  values for the non-Newtonian fluids are progressively lower than those for the Newtonian carrier fluid at the same  $Re'$  as the value of the power-law index  $n$  is reduced. In practice, such a  $f - Re'$  correlation would serve conveniently as a design chart: for it shows that for a certain value of  $n$ , the dependence of  $f$  on  $Re'$  is unique, irrespective of the diameter, as required by scaling theory and also as confirmed here by the present numerical predictions.

It should be appreciated that it is not easy to draw any direct conclusions from Figure 1 as to whether greater or smaller pressure drop is required to maintain the same mass flow rate for a non-Newtonian solution as that for its pure solvent in the same pipe. This is so because  $Re'$  depends on the viscosity, which changes with  $n$ . The effect is more readily perceived by recasting the  $f - Re'$  correlations of Figure 1 into  $f - U_b$  variations for a fixed pipe diameter. This has

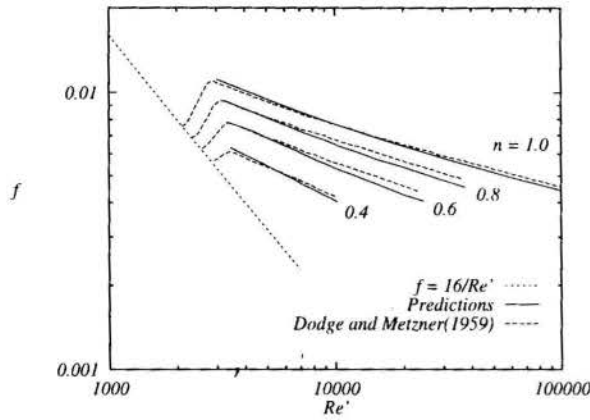


Figure 1: Variation of friction factor with Reynolds number for turbulent pipe flows.

been done in Figure 2, which relates to a 1-inch pipe and both highly and mildly non-Newtonian solutions, as well as those for the pure solvent, water.

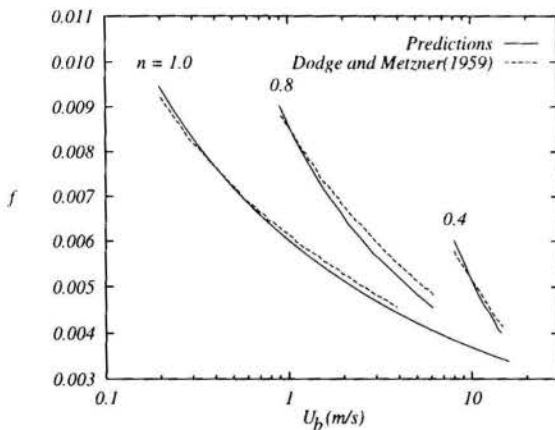


Figure 2: Variations of friction factor with bulk velocity for turbulent pipe flows.

From this figure it is clear that for the range of flows investigated the Carbopol solutions do not demonstrate drag reduction, confirming previous experimental results (Kostic, 1994).

#### ANNULAR FLOW RESULTS

To reveal the dependence of the friction factor on  $n$  and  $Re'$  for the turbulent concentric annular flows, a new definition for the generalised Reynolds number must be introduced:

$$Re' = \frac{\rho U_b^{2-n} D_h^n}{K} \cdot \frac{1}{8^{n-1} \left(\frac{1+3n}{4n}\right)^n} \quad (21)$$

Here  $D_h$  is the hydraulic diameter ( $\equiv D_2 - D_1$ ), with  $D_1$  and  $D_2$  the inside and outside diameter of annulus, respectively.

Figure 3 shows the predicted dependence of the friction factor  $f$  on  $Re'$ ,  $n$  and  $R_1/R_2$ . The solid lines and the symbols represent the numerical predictions for fully developed turbulent pipe and concentric annular flows, respectively. It

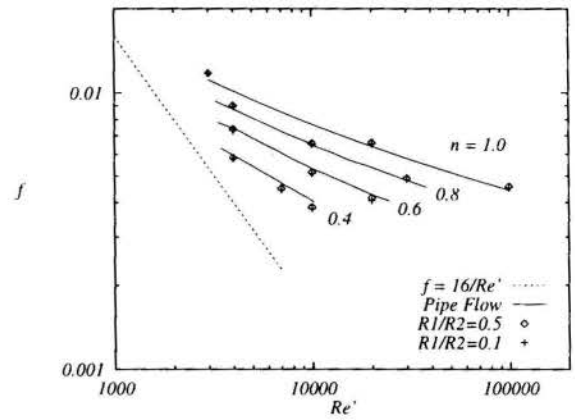


Figure 3: Variation of friction factor with Reynolds number for turbulent annular flows.

is clear that for the annular cases the  $f$  values for Newtonian fluids are higher than those for pipe flows. For a Reynolds number  $Re' = 3,000$  and for both radius ratios, the friction factor is 5.5 percent higher than the pipe flow value. For  $Re' = 10^5$  and  $R_1/R_2 = 0.5$ ,  $f$  is 3.4 percent higher and when  $R_1/R_2 = 0.1$  is 2.0 percent higher than the pipe flow value. The present numerical calculations therefore confirm the experimental results of Rehme (1974) and the idea that an increase in the radius ratio increases the pressure drop coefficient. For the non-Newtonian fluids, the predicted values show the same dependence of  $f$  on  $R_1/R_2$ . However, while the annular-geometry pressure drop coefficients are higher than the pipe flow values for  $n = 0.8$ , they are lower for  $n = 0.6$  and  $0.4$ .

#### CONCLUSIONS

A computational study of the fully-developed turbulent pipe flow of time-independent non-Newtonian fluids has been conducted using CFD methodology. The low-Reynolds number  $k - \epsilon$  turbulence model of Jones and Launder (1972) previously derived for Newtonian fluid flows has been adapted to a generalised form that can also be applied in predicting purely-viscous non-Newtonian fluid flows. On the basis of calculations performed with this model and analysis of experimental data, it is concluded that:

- The modifications to the model introduced in the present study satisfactorily capture the friction factor variations obtained experimentally for non-Newtonian fluid in pipes. The good agreement between the predicted values and the corresponding data suggests that one may use CFD methodology to *predict* for the first time such features of the flow.
- The superiority of the present analytical approach over the previous ones lies in the fact that no additional model constants are required to account specifically the non-Newtonian behaviour of the fluid. Furthermore, no geometry-related parameters are involved in the model.
- Finally, it is pointed out that although the present procedure has been established on the basis of testing simple one-dimensional pipe and concentric annular flows, the tensor form in which it is presented is a

generalised one that does not hold any mathematical problem in applying it to predict other complex multi-dimensional flows. The experimental data of such flows, however, are not yet available. The acquiring of such data seems necessary in the future in order that the physical validity of the present model can be tested.

- In general the pressure drop of a shear-thinning fluid will, at a given flow rate, tend to be higher than that of the pure solvent. There is no 'drag reduction' effect, as is sometimes erroneously interpreted.

## REFERENCES

Bird, R.B., Armstrong, R.C. and Hassager, O., 1987, "Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1-Fluid Mechanics", 2nd edition, John Wiley and Sons, New York.

Bogue, D.C. and Metzner, A.B., 1963, "Velocity profiles in turbulent pipe flow", *Industrial and Engineering Chemistry (Fundamentals)*, Vol. 2, pp. 143-149.

Brighton, J.A. and Jones, J.B., 1964, "Fully-developed turbulent flow in annuli", *Journal of Basic Engineering, Trans. ASME*, Vol. 86, pp. 835-844.

Collins, P.J., 1990, "Prediction of Turbulent Flow of Shear-Thinning Fluids in Ducts and Mixing Vessels", Ph.D. Thesis, Imperial College, University of London.

de Waele, A., 1923, *Oil and Color Chem. Assoc. Journal*, Vol.6, pp. 33-88.

Dodge, D.W. and Metzner, A.B., 1959, "Turbulent flow of non-Newtonian systems", *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. 5, pp. 189-204.

Edwards, M.F. and Smith, R., 1980, "The turbulent flow of non-Newtonian fluids in the absence of anomalous wall effects", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 7, pp. 77-90.

Hinze, J.O., 1975, "Turbulence", 2nd edition, McGraw-Hill, New York.

Jones, W.P. and Launder, B.E., 1972, "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301-314.

Kostic, M., 1994, "On turbulent drag and heat transfer reduction phenomena and laminar heat transfer enhancement in non-circular duct flow of certain non-Newtonian fluids", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 133-147.

Lawn, C.J. and Elliott, C.J., 1972, "Fully developed turbulent flow through concentric annuli", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 14, No. 3, pp. 195-204.

Metzner, A.B. and Reed, J.C., 1955, "Flow of non-Newtonian fluids - correlation of the laminar, transition and turbulent flow regions", *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. 1, pp. 434-440.

Ostwald, W., 1925, *Kolloid-Z.*, Vol. 36, pp. 99-117.

Politis, S., 1989, "Turbulence Modelling of Power-Law Fluids", BRITE Technical Report No.52, RIIIB. 0085.UK(H).

Rehme, K., 1974, "Turbulent flow in smooth concentric annuli with small radius ratios", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, pp. 263-287.

Reynolds, O., 1895, "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London - series A*, Vol. 186, pp. 123-164.

Slattery, J.C. and Bird, R.B., 1961, "Non-Newtonian flow past a sphere", *Chemical Engineering Science*, Vol. 16, pp. 231-241.

Wilcox, D.C., 1992, "The remarkable ability of turbulence model equations to describe transition", *Fifth Symposium on Numerical and Physical aspects of Aerodynamic Flows*, California State University, Long Beach, CA.

Yang, Z. and Shih, T.H., 1993, "New time scale based  $k - \epsilon$  model for near-wall turbulence", *A.I.A.A. Journal*, Vol. 31, pp. 1191-1198.

Ziman, H., 1990, "Computer Prediction of Chemically Reacting Flows in Stirred Tanks", Ph.D. Thesis, Imperial College, University of London.



## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM COLETOR SOLAR ACUMULADOR



A. L. De Bortoli, H. A. Vielmo e A. Krenzinger

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
 Rua Sarmento Leite, 425, 90050-170 - Porto Alegre - RS - Brasil

## RESUMO

*É simulada numericamente a operação de um coletor solar com acumulação de calor. São resolvidos em forma acoplada os problemas hidrodinâmico e térmico nos seus canais e o problema térmico em sua massa armazenadora de calor. Aplica-se o método dos volumes finitos, com uma metodologia para escoamentos a qualquer velocidade na simulação do escoamento nos canais. A complexidade geométrica do problema é tratada empregando um sistema de coordenadas generalizadas e a técnica de multiblocos. São resolvidos e analisados 2 casos onde o coletor-acumulador opera aquecendo o ambiente interno do prédio.*

## INTRODUÇÃO

O prédio do Laboratório de Energia Solar da UFRGS, ao mesmo tempo em que abriga as atividades de seus pesquisadores, também constitui-se ele mesmo num protótipo de testes e desenvolvimento de soluções visando o conforto térmico de ambientes. Porto Alegre localiza-se a  $30^\circ$  de latitude sul, com invernos rigorosos para os padrões brasileiros e verões quentes e úmidos. Sendo assim, este prédio é alongado no sentido leste-oeste, expondo uma grande fachada ao norte onde recebe radiação solar de modo direto e indireto. Sua fachada sul não possui janelas e, da mesma forma que as fachadas leste e oeste, possui paredes duplas. As áreas relativamente pequenas das fachadas leste e oeste minimizam o ganho de radiação solar nas manhãs e tardes de verão. A cobertura possui isolamento térmico, ventilação e cor clara.

O coletor solar acumulador, objeto deste trabalho, está colocado na fachada norte do prédio, conforme mostrado na figura 1. Este coletor emprega o ar como fluido de trabalho, que é aquecido e canalizado para o interior do prédio durante o inverno. No verão o ar quente é dirigido ao seu exterior por uma chaminé, causando um ingresso de ar proveniente de um ambiente externo sombreado, através de túneis sob a fachada sul do prédio. A massa armazenadora de calor é construída em concreto ciclópico com a forma aproximada de um triângulo, como mostra a figura 1 (Vielmo, 1981). Também nesta figura pode-se observar os canais formados entre a massa armazenadora e a cobertura de vidro do coletor, contrapiso e painel traseiro. Neste painel, isolado termicamente, encontram-se os "dampers" de entrada e saída do ar no coletor.

## MODELO FÍSICO

No presente trabalho a condição simulada é a de calefação ao longo do inverno. Desta forma o ar a ser aquecido é insuflado com uma velocidade de  $0,03$  m/s, temperatura de  $18^\circ\text{C}$ , de forma permanente, por baixo com um ângulo de  $20^\circ$  em relação à horizontal, dividindo-se entre os canais que circundam a massa armazenadora. Nesta primeira abordagem é resolvido portanto o regime permanente deste sistema, embora a massa armazenadora somente cumpra a sua função quando o regime é transiente. É prescrito um escoamento forçado na entrada dos canais, mas mesmo assim os termos de empuxo estão presentes nas equações governantes, possibilitando simulações futuras de casos onde somente existe convecção natural.

Considerando que a altura máxima do coletor é  $1,7$  m enquanto seu comprimento é de  $15,3$  m, com extremidades isoladas, e que o escoamento não possui nenhuma componente perpendicular ao plano do corte mostrado na figura 1, tanto o problema térmico como o de escoamento são tratados em forma bidimensional. O ganho de radiação solar pelo coletor é aproximado a partir da observação direta do coletor em operação, prescrevendo-se as temperaturas na superfície absorvedora e na cobertura.

As propriedades físicas, com exceção da densidade do ar nos canais, são consideradas constantes.

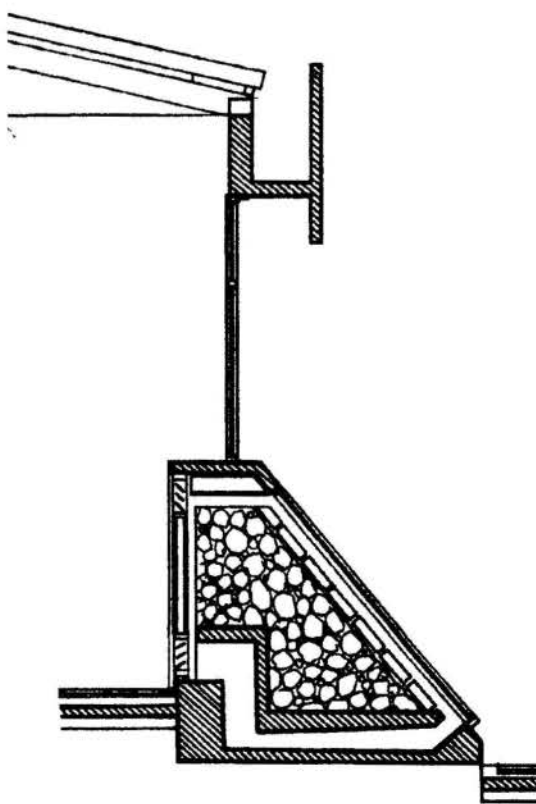


Figura 1 - Fachada norte do prédio com o coletor solar acumulador de calor



**EQUAÇÕES GOVERNANTES**

As equações governantes para os problemas térmico e de escoamento nos canais, e térmico no sólido, podem ser escritas de forma genérica, para uma variável escalar  $\phi$  como

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = p^\phi + \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S^\phi \tag{1}$$

Para a equação da conservação da massa  $\phi = 1$ ;  $\Gamma^\phi = 0$  e  $S^\phi = 0$ . Para a equação da conservação da quantidade de movimento  $\phi = u, v$ ;  $\Gamma^\phi = \mu$ ;  $p^\phi$  abriga o termo de pressão e  $S^\phi$  representa o empuxo e demais termos viscosos. Para a equação da energia  $\phi = T$ ;  $\Gamma^\phi = k/c_p$  e  $S^\phi$  abriga os termos de dissipação viscosa e demais termos fontes.

**METODOLOGIA NUMÉRICA**

Os métodos de solução das equações governantes são voltados para escoamentos compressíveis (Anderson et al., 1984) e incompressíveis. Considere-se um escoamento onde devem ser resolvidas as equações da conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia. As incógnitas são pressão, temperatura, massa específica e as componentes do vetor velocidade. Se for empregada uma metodologia segregada do processo de solução é necessário que cada incógnita tenha a sua equação evolutiva.

Se a massa específica não varia significativamente com a pressão, o desafio é determinar um campo de pressões que, quando inserido nas equações do movimento, origine um campo de velocidades que satisfaça a equação de conservação da massa. A equação da energia é utilizada para o cálculo da temperatura e as equações da quantidade de movimento para o cálculo das componentes do vetor velocidade.

Torna-se necessário tratar o acoplamento pressão-velocidades uma vez que o sistema é resolvido segregadamente. Então substitui-se as velocidades como uma função da pressão na equação da conservação da massa, obtendo a equação para a pressão. Esta formulação é denominada de formulação incompressível (Patankar, 1981). A classe de problemas mais frequente que usa esta formulação é a dos problemas de transferência de calor com escoamentos a baixa velocidade.

A Eq. (1) é transformada para o sistema generalizado de coordenadas a fim de conferir maior flexibilidade e generalidade ao modelo numérico (Maliska, 1995). A transformação é feita do plano físico  $(x,y,t)$  para o plano transformado  $(\xi,\eta,t)$ . A equação transformada obtida pode ser escrita como (Maliska e Silva, 1989)

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V\phi) + \frac{p^\phi}{J} = \frac{S^\phi}{J} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma^\phi J \left( \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma^\phi J \left( \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right\} \tag{2}$$

onde  $(\alpha, \beta, \gamma)$  são as métricas da transformação de coordenadas.

As componentes contravariantes do vetor velocidade  $U, V$  são escritas, como por exemplo (veja a figura 2)

$$\begin{aligned} U &= u\gamma_\eta - vx_\eta \\ V &= vx_\xi - uy_\xi \end{aligned} \tag{3}$$

Na Eq. (2)  $u$  e  $v$  são as componentes cartesianas do vetor velocidade. Mais detalhes sobre a transformação de coordenadas são encontrados em De Bortoli (1990).

Integra-se a Eq. (2) no volume e no tempo baseado no arranjo co-localizado com variáveis  $\{u, v\}$  armazenadas nos centros do volume de controle, conforme mostra a figura 2.

$$\begin{aligned} & \frac{M_p \phi_p - M_p^o \phi_p^o}{\Delta t} + M_e \phi_e - M_w \phi_w + M_n \phi_n - M_s \phi_s = \\ & \left( D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e - \left( D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_w + \\ & \left( D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_n - \left( D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_s - \\ & L[p^\phi] \frac{\Delta V}{J} + L[S^\phi] \frac{\Delta V}{J} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} M_p &= \left( \rho \frac{\Delta V}{J} \right)_p \\ M_e &= (\rho U \Delta \eta)_e \\ D_1 &= \Gamma^\phi \alpha J \Delta \eta \\ D_3 &= \Gamma^\phi \gamma J \Delta \xi \end{aligned}$$

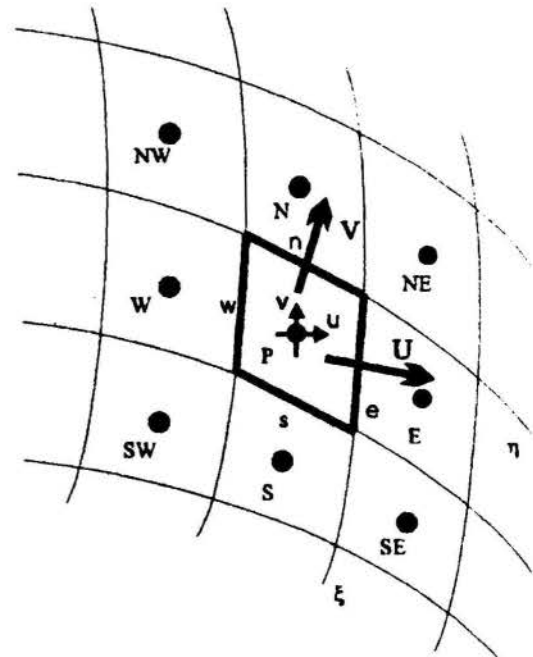


Figura 2 - Arranjo co-localizado das variáveis na malha

e  $\{e, w, n, s\}$  representam as faces do volume de controle. Os outros coeficientes são escritos de forma semelhante. O termo  $L[p^\phi]$  é a aproximação de  $p^\phi$ , e o superescrito "o" indica que as variáveis são

avaliadas no instante  $t$ , enquanto que as outras variáveis são avaliadas no instante  $(t + \Delta t)$  caracterizando uma formulação implícita.

Os valores de  $\phi$  nas faces do volume de controle podem ser obtidos através do esquema "WUDS" (Raithby and Torrence, 1974), como por exemplo para a face leste do volume de controle

$$\phi_e = (1/2 + \alpha_e)\phi_p + (1/2 - \alpha_e)\phi_E \quad (4)$$

Nesta expressão observa-se que o primeiro termo contém a informação da propriedade do ponto imediatamente anterior a face e o segundo termo para o ponto imediatamente posterior a face do volume de controle.

Como trabalha-se com as equações de Navier-Stokes, os valores assumidos para  $\alpha$  e  $\beta$  são dados por (Raithby and Torrence, 1974)

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{e^{Pe/2} - 1}{e^{Pe} - 1} \cong \frac{Pe^2}{10 + Pe^2},$$

$$\beta = Pe - \frac{e^{Pe/2}}{e^{Pe} - 1} \cong \frac{1 + 0,005Pe^2}{1 + 0,05Pe^2}$$

onde  $Pe$  é o número de Peclet.

A substituição da Eq. (4) e similares na Eq. (2) resulta na forma discretizada usada para resolver as velocidades e a temperatura

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{NB} + b^\phi \quad (5)$$

onde

$$a_p = \frac{M_p}{\Delta t} + a_e + a_w + a_n + a_s$$

$$a_w = (1/2 + \alpha_w)M_w + \left(D_1 \frac{\beta}{4\Delta\xi}\right)_w + \left(D_4 \frac{1}{4\Delta\xi}\right)_n - \left(D_4 \frac{1}{4\Delta\xi}\right)_s$$

$$a_{ne} = \left(\frac{D_2}{4\Delta\eta}\right)_e + \left(\frac{D_4}{4\Delta\xi}\right)_n$$

$$b^\phi = -\frac{\Delta V}{J} L[p^\phi] + \frac{\Delta V}{J} L[S^\phi] + \frac{M_p^o \phi_p^o}{\Delta t}$$

e de forma semelhante para as outros coeficientes.

O termo fonte  $b^\phi$  pode ser escrito como

$$b^\phi = -L[p^\phi] \frac{\Delta V}{J} + L[S^\phi] \frac{\Delta V}{J} + \frac{M_p^o \phi_p^o}{\Delta t} \quad (6)$$

O termo fonte  $p^\phi$ , como por exemplo na direção  $x$ ,

$$p^u = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x$$

é aproximado numericamente por

$$L[p^u]_p = \frac{P_E - P_W}{2\Delta\xi} y_{\eta_p} + \frac{P_N - P_S}{2\Delta\eta} y_{\xi_p} \quad (7)$$

O cálculo das componentes do vetor velocidade nas faces do volume de controle se constitui numa particularidade importante para o procedimento em volumes finitos, baseado na formulação incompressível com o arranjo co-localizado de variáveis na malha. Deve-se avaliar os fluxos nas faces do volume de controle para executar o balanço de massa. No entanto, as velocidades encontram-se armazenadas nos centros do volume de controle. Uma aproximação simples para as velocidades nas faces do volume de controle, como a diferença central, causa oscilações do campo de pressões e/ou o procedimento não converge para regime permanente (Patankar, 1981) (Peric et al., 1988) (Marchi et al., 1989). Para resolver este problema usa-se o procedimento indicado a seguir.

Considere, por exemplo, o cálculo da componente cartesiana e contravariante do vetor velocidade na face leste do volume de controle. Inicia-se pelo cálculo da componente cartesiana para o ponto  $P$ , dada por

$$u_p = \frac{1}{a_p} \left[ \sum (a_{nb} u_{NB})_p + \frac{M_p^o u_p^o}{\Delta t} \right] + \frac{\Delta V}{a_p} L[p^u]_p \quad (8)$$

Determina-se a componente cartesiana do vetor velocidade na face do volume de controle adicionando-se a Eq. (8) e similar para o ponto  $E$ , com exceção do termo de pressão, onde é aplicado o gradiente de pressões mais próximo ou fisicamente consistente, conforme Eq. (9).

$$u_e = \frac{1}{a_p + a_E} \left[ \sum (a_{nb} u_{NB})_p + \sum (a_{nb} u_{NB})_E + \frac{M_p^o u_p^o}{\Delta t} + \frac{M_E^o u_E^o}{\Delta t} \right] - \frac{2\Delta V_e}{a_p + a_E} L[p^u]_e \quad (9)$$

onde

$$L[p^u]_e = \frac{P_E - P_P}{\Delta\xi} y_{\eta_e} + \frac{P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE}}{4\Delta\eta} y_{\xi_e}$$

Para obter uma formulação que seja adequada tanto para escoamentos a alta velocidade como para escoamentos a baixa velocidade faz-se necessário que tanto a massa específica como as velocidades sejam mantidas ativas no processo de linearização da equação de conservação da massa (Van Doormaal, 1985) (Maliska e Silva, 1989). A estratégia usada nestes trabalhos é continuar usando a equação de conservação da massa para determinar a pressão, introduzindo também a variação da massa específica com a pressão nesta equação. Desta forma parte-se da equação de conservação da massa na forma discretizada

$$\frac{M_p - M_p^o}{\Delta t} + M_e - M_w + M_n - M_s = 0 \quad (10)$$

onde

$$M_n = (\rho V \Delta\xi)_n$$

$$M_s = (\rho V \Delta\xi)_s$$

e de forma semelhante para os outros coeficientes.

A linearização do fluxo de massa que aparece na equação de conservação da massa é feita de forma a manter a massa específica e

as velocidades ativas (Van Doormaal, 1985), obtendo-se, por exemplo, para a face leste do volume de controle (figura 2)

$$M_e = (\rho^* U + \rho U^* - \rho^* U^*) \quad (11)$$

Para avaliar as variáveis escrevem-se as mesmas em função de uma correção sobre o valor estimado como

$$\phi = \phi^* + \phi'$$

onde os escalares com asterisco são valores conhecidos e obtidos com o campo de pressões estimado.

A massa específica é aproximada na face leste do volume de controle usando a seguinte função de interpolação (Maliska e Silva, 1989)

$$\rho_e = (1/2 + \gamma_e) \rho_P + (1/2 - \gamma_e) \rho_E \quad (12)$$

Para obter a equação para a pressão, as componentes do vetor velocidade e a massa específica devem ser escritas em função da pressão. Partindo-se da equação da quantidade de movimento pode-se escrever

$$a_p u_p = \sum a_{nb} u_{NB} - L[p^u] \frac{\Delta V}{J} + b^u \quad (13)$$

que, para o valor estimado, assume a forma

$$a_p u_p^* = \sum a_{nb} u_{NB}^* - L[p^{u*}] \frac{\Delta V}{J} + b^u \quad (14)$$

Subtraindo-se a Eq. (14) da Eq. (13), obtém-se

$$u_p = u_p^* - d_p^u L[p^u] \Delta \xi \quad (15)$$

Na obtenção da Eq. (15) o método de acoplamento pressão-velocidade SIMPLEX (Van Doormaal and Raithby, 1984) foi empregado. Este método, proveniente do SIMPLE e do SIMPLER (Patankar, 1981), é necessário para que haja o acoplamento das equações governantes do problema do escoamento na forma discretizada. As equações de Navier-Stokes são acopladas e o acoplamento aqui mencionado refere-se à solução numérica das equações, já que o procedimento de cálculo não é feito de forma direta. Como extensão do que foi exposto, pode-se escrever a componente da velocidade corrigida para a face leste do volume de controle como

$$u_e = u_e^* - d_e^u L[p^u] \Delta \xi \quad (16)$$

A equação de estado, utilizada para o cálculo da massa específica, é escrita como

$$p = \rho RT \quad (17)$$

onde R é a constante dos gases. A massa específica é colocada em função de uma correção do campo de pressão pela equação

$$\rho = \rho^* + C_p^p p' \quad (18)$$

Partindo-se da definição da velocidade contravariante, Eq. (3), pode-se escrever a componente da velocidade contravariante corrigida, por exemplo, para a face leste do volume de controle,

$$U_e = U_e^* - d_e^u \left[ L[p^u] y_\eta - L[p^v] x_\eta \right] \Delta \xi \quad (19)$$

Substituindo-se as Eqs. (18) e (19) na Eq. (10), e as formas semelhantes para as outras faces do volume de controle, obtém-se a equação para a pressão

$$a_p p'_p = a_e p'_E + a_w p'_W + a_n p'_N + a_s p'_S + a_{ne} p'_{NE} + a_{nw} p'_{NW} + a_{se} p'_{SE} + a_{sw} p'_{SW} + b^{p'}$$

onde

$$a_p = m_p^p C_p^p + m_e^u d_e^u \alpha_e - m_w^u d_w^u \alpha_w + m_n^v d_n^v \alpha_n - m_s^v d_s^v \alpha_s$$

$$a_e = m_e^p C_E^p - m_e^u d_e^u \alpha_e + m_n^v d_n^v \beta^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} + m_s^v d_s^v \beta^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi}$$

$$a_{ne} = m_e^u d_e^u \beta_e^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} + m_n^v d_n^v \beta_n^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi}$$

$$b^{p'} = \left( \rho^o \frac{\Delta V}{J \Delta t} \right)_p - m_p^p \rho_p^* - m_e^p \rho_e^* - m_w^p \rho_w^* - m_n^p \rho_n^* - m_s^p \rho_s^*$$

e de forma semelhante para os outros coeficientes (De Bortoli, 1990).

### CONDIÇÕES DE CONTORNO

A maneira mais consistente sob o ponto de vista físico no equacionamento das interfaces entre os blocos é a realização de balanços de energia. No entanto, volumes fictícios são utilizados com o objetivo de facilitar a aplicação das condições de contorno e estabelecer apenas uma equação para representar todos os volumes do domínio.

Um balanço de calor na interface entre o sólido que compõe a massa armazenadora de calor e os canais que o circundam pode ser escrito da seguinte forma,

$$-k_s \frac{\partial T_s}{\partial n} \Big|_i + \tau \alpha G_i = -k_f \frac{\partial T_f}{\partial n} \Big|_i \quad (20)$$

onde, por exemplo

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_\eta = -\frac{J}{\sqrt{\gamma}} \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} + J \sqrt{\gamma} \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

e  $\tau \alpha G_i$  é a radiação solar líquida ganha pela superfície absorvedora do coletor solar (Duffie e Beckman, 1980). Esta equação fornece as temperaturas interfaciais sólido-canais. Naturalmente quando não se tratar da superfície absorvedora o ganho de radiação solar é nulo.

A aplicação desta condição de contorno entre o canal e o sólido tem apresentado dificuldades de convergência. Por este motivo a transferência do valor das variáveis nestas interfaces é realizada de forma aproximada. Considera-se que a temperatura do volume fictício do sólido equivale a temperatura do volume

correspondente do fluido e vice-versa. Desta forma, pequenas imprecisões aparecem na interface entre o canal e o sólido, e esforços estão sendo realizados no sentido de eliminar estas dificuldades.

As condições de contorno empregadas são basicamente as seguintes:

Problema térmico:

- Temperatura prescrita na entrada dos canais
- Derivada nula da temperatura na saída dos canais
- Temperatura prescrita na superfície da massa armazenadora e na cobertura do coletor
- Troca de calor via volume fictício nas outras superfícies da massa armazenadora
- Canais isolados termicamente junto ao piso, fronteira com o interior do ambiente e balcão superior

Problema hidrodinâmico:

- Pressão e velocidade prescritas na entrada e na saída dos canais
- Não deslizamento em todas as paredes

A interação entre os blocos é feita de maneira usual, com volumes fictícios.

### METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

O algoritmo de solução é o seguinte, entendendo-se como sólido a massa armazenadora de calor:

1. Estima as temperaturas  $T$  no sólido.
2. Estima as variáveis  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$  e  $T$  nos canais, mantendo nas interfaces sólido-canal as temperaturas já estimadas no passo 1.
3. Resolve a equação da energia no sólido.
4. Calcula os coeficientes e aproxima os termos fonte das equações da energia e do movimento nos canais.
5. Calcula as velocidades  $u'$  e  $v'$  (MSI).
6. Calcula as velocidades contravariantes  $U$  e  $V$ .
7. Calcula as pressões  $p$  (MSI, Schneider and Zedam, 1981).
8. Corrige as velocidades  $u'$  e  $v'$  (acoplamento).
9. Corrige as velocidades contravariantes (acoplamento).
10. Corrige as densidades  $\rho$  (acoplamento).
11. Resolve a equação da energia ainda nos canais. (MSI)
12. Retorna ao passo 3 até obter a convergência.

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

No que segue apresenta-se alguns resultados numéricos obtidos. A malha para este problema é constituída de três partes; um bloco sólido, um canal externo e um canal interno, conforme mostra a figura 3. As malhas foram obtidas por um processo de geração elíptica e contém  $24 \times 48$ ,  $141 \times 10$  e  $21 \times 4$  células, respectivamente.

Na figura 4 o campo de vetores velocidade calculado para condições de entrada do ar de  $0,03 \text{ m/s}$  e ângulo de ataque de  $20^\circ$ . A temperatura de entrada é de  $18^\circ \text{C}$  e a superfície do sólido voltada para o sol é admitida ser aquecida atingindo temperaturas máximas da ordem de  $28^\circ \text{C}$  na sua parte superior. Note-se que o isolamento térmico da extremidade superior dos canais, mostrado na figura 1, não está presente nesta simulação, conforme pode ser visto no detalhe da figura 4, porque ainda não foi implantado no protótipo. Neste detalhe também observa-se a presença de uma recirculação no escoamento, junto à mudança de ângulo superior.

A figura 5 mostra as linhas de temperatura constante no bloco sólido para o caso em estudo. Como esperado, as isothermas mostram o fluxo de calor partindo da superfície absorvedora e atravessando a massa acumuladora em direção aos

trechos internos dos canais.

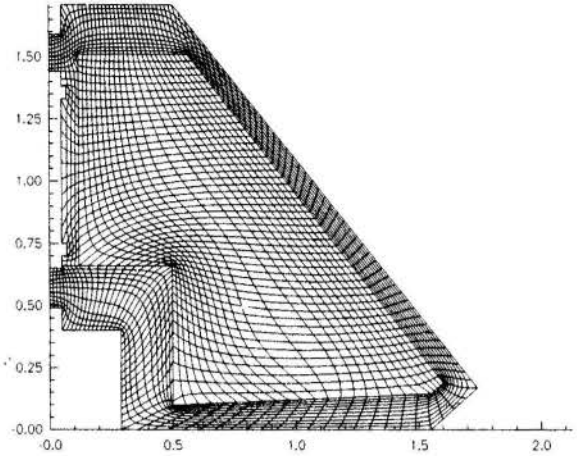


Figura 3 - Malha empregada, com dimensões em metros

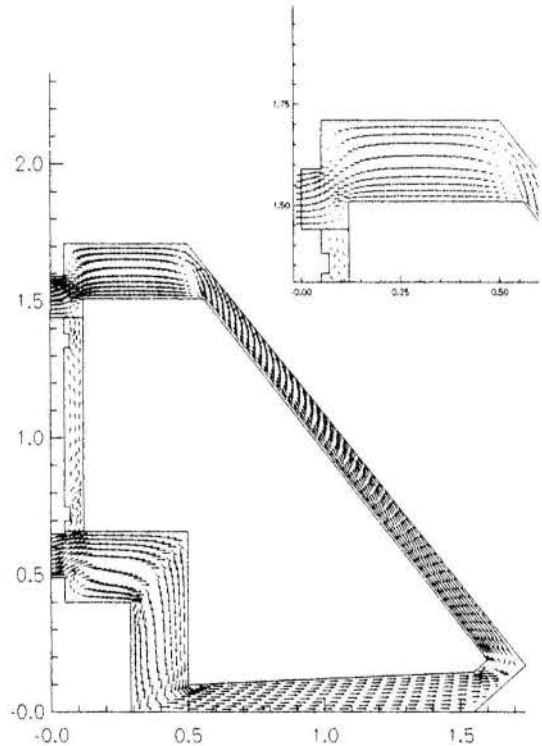


Figura 4 - Vetores velocidade nos canais

Observe-se que as baixas velocidades do canal vertical interno (figura 4) causam o pequeno fluxo de calor na sua interface (figura 5).

Para finalizar, a figura 6 mostra as isothermas para o caso de aquecimento da parte do bloco voltada para o sol até  $23^\circ \text{C}$ . Verifica-se que as isothermas possuem comportamento semelhante ao apresentado para aquecimento até  $28^\circ \text{C}$  da superfície da massa armazenadora.



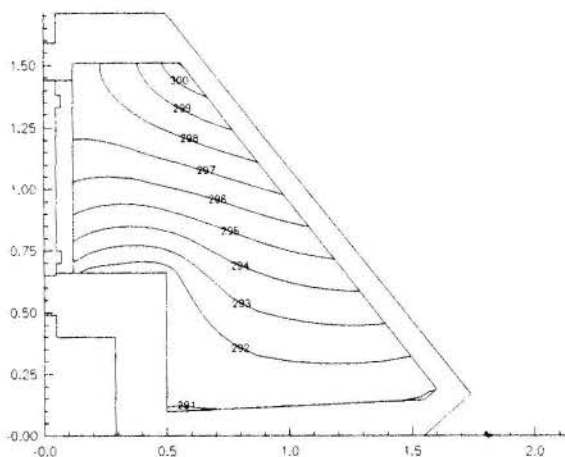


Figura 5 - Isotermas com a temperatura máxima da superfície absorvedora de 28 °C

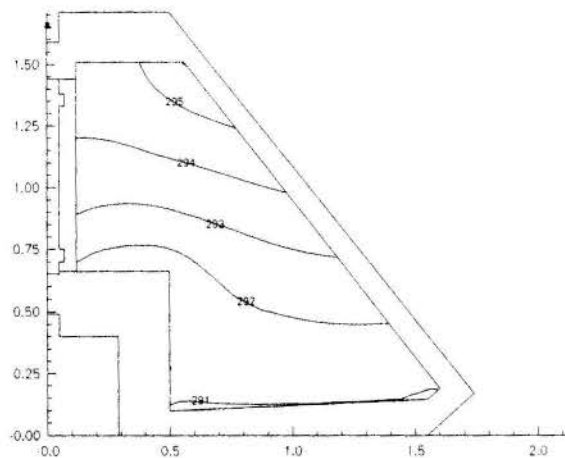


Figura 6 - Isotermas com a temperatura máxima da superfície absorvedora de 23 °C

## CONCLUSÕES

Dada a complexidade do problema em questão, seja na sua geometria ou na existência dos problemas térmico e hidrodinâmico acoplados, fica claro que a metodologia em volumes finitos, coordenadas generalizadas, variáveis co-localizadas e multiblocos empregada neste trabalho mostrou-se adequada para simular o comportamento do coletor solar acumulador em estudo. A solução numérica obtida é encorajadora, especialmente pelos campos de velocidade e isothermas obtidas.

No seguimento deste trabalho pretende-se resolver o sistema em sua operação transiente, implementar balanços mais precisos nas interfaces e comparar com os dados experimentais que já estão sendo providenciados, etapa esta importante, já que não se dispõe outro meio para a validação das soluções obtidas.

## REFERÊNCIAS

- Anderson, D.A., Tannehil, J.C. and Pletcher, R.H., 1984. "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill, New York.
- De Bortoli, A.L., 1990. "O Uso de Variáveis Co-Localizadas na Solução de Escoamentos Supersônicos sobre Corpos de Geometrias Arbitrárias", Dissertação de Mestrado, Florianópolis, Santa Catarina.
- Duffie, J.A. and Beckman, W.A., 1980. "Solar Engineering of Thermal Processes, John Wiley & Sons.
- Marchi, C.H., Maliska, C.R., De Bortoli, A. L., 1989. "The Use of Colocated Variables in the Solution of Supersonic Flows", X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica.
- Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., 1989. "A Boundary-Fitted Finite Volume Method for the Solution of Compressible and Incompressible Fluid Flows Using both Velocity and Density Corrections", Proceedings of the Seventh International Conference of Finite Element Methods in Flow Problems, Hunstville.
- Maliska, C.R., 1995. "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, RJ.
- Patankar, S.V., 1980. "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Mc Graw-Hill.
- Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G., 1988. "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Co-located Grids", Computer and Fluids, Vol. 16, Nr. 4, pp. 389-403.
- Raithby, G.D., Torrence, K.E., 1974. "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", Computer and Fluids, Vol. 2., pp 191-206.
- Schneider, G.E., Zedam, M., 1981. "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp. 1-19.
- Van Doormaal, P., 1985. "Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows", Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Canada.
- Van Doormaal, P. and Raithby, G.D., 1984. "Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", Numerical Heat Transfer, Vol. 7, pp. 147-163.
- Vielmo, H.A., 1981. "Modelo Matemático para Simular o Comportamento Térmico do Sistema Passivo do Laboratório de Energia Solar da UFRGS", dissertação de mestrado PPGEMM / UFRGS.

## ABSTRACT

This work presents a numerical simulation of the thermal behavior of a solar collector-storage system. The coupled hydrodynamics and thermal problem in the collector channels and the thermal problem in its storage mass were solved. The finite volume method using the all speed methodology was applied to the flow. The geometric complexity of the problem was treated by means of a generalized coordinate system and the multiblock technique. Two cases of heating operation of the collector-storage are solved and analyzed.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de pesquisa do Prof. Arno Krenzinger e pela bolsa de Recém-Doutor de Álvaro L. De Bortoli.



## CONCENTRADORES TIPO-V DE MÚLTIPLOS ESTÁGIOS

Danilo Lazzeri Pena

R. Estoril, 424 - 31255-190 - Belo Horizonte - MG - Brasil



### RESUMO

É apresentado um método de cálculo dos parâmetros óticos do concentrador tipo-V de múltiplos estágios, a partir do modelo matemático desenvolvido por Fraidenraich (1992) para os concentradores tipo-V de único estágio e posterior análise destes concentradores, visando estabelecer condições ótimas de operação.

### INTRODUÇÃO

Na literatura existem modelos matemáticos desenvolvidos para geometria de concentradores tipo-V de dois estágios (tipo-V2) (Mannan et al., 1978) ou de múltiplos estágios (tipo-Vn) (Mullick et al., 1988), mas são poucos os trabalhos que apresentaram um procedimento para calcular parâmetros óticos destes concentradores (função de transmissão, número médio de reflexões e eficiência ótica).

O artigo demonstra um processo de cálculo dos parâmetros óticos dos concentradores tipo-Vn, a partir do modelo matemático desenvolvido por Fraidenraich (1992), além de apresentar uma análise dos parâmetros óticos dos concentradores tipo-V2, que poderá ser aplicada a qualquer concentrador solar tipo-Vn.

### MODELO MATEMÁTICO

A determinação dos parâmetros óticos é importante para a avaliação da viabilidade técnica e econômica dos concentradores. O modelo matemático demonstrado a seguir foi desenvolvido para os concentradores tipo-V de único estágio (tipo-V1) (Fraidenraich, 1992) e possibilitará determinação analítica dos parâmetros óticos dos concentradores tipo-Vn.

Parâmetros Óticos do Concentrador Solar Tipo-V1. Os concentradores apresentam dois ângulos de aceite: o geométrico e o ótico. A Eq. (1) determina o ângulo de aceite ótico do concentrador tipo-V1:

$$\theta_o = \arcsen \left( \frac{1}{CR} \right) + \alpha_1 \quad (1)$$

Os ângulos característicos são importantes na determinação dos parâmetros óticos:

$\lambda_k$  → ângulo mínimo de incidência no qual os raios solares são aceitos e alcançam o absorvedor em número k de reflexões;

$\beta_k$  → ângulo máximo de incidência no qual os raios solares são aceitos e alcançam o absorvedor em número k de reflexões;

$\gamma_k$  → ângulo mínimo de incidência no qual os raios solares são rejeitados pela cavidade em número k de

reflexões.

Para uma melhor compreensão da relação entre os ângulos de incidência e os estados de iluminação do absorvedor, serão definidas as condições de iluminação no absorvedor:

- Ascendente → absorvedor parte da condição não iluminado até atingir a total iluminação para número k de reflexões;

- Total → absorvedor permanecerá totalmente iluminado para número k de reflexões;

- Decrescente → absorvedor inicia totalmente iluminado até atingir o estado de iluminação zero para número k de reflexões.

A função de probabilidade  $P_k(\theta_i)$  é definida para cada ângulo de incidência dos raios solares, na qual a abertura do concentrador é dividida em regiões  $A_k(\theta_i)$  onde os raios solares incidentes vão alcançar o absorvedor em um número k de reflexões (Fraidenraich, 1992).

$$P_k(\theta_i) = \frac{A_k(\theta_i)}{A} \quad (2)$$

Com as equações analíticas de  $P_k(\theta_i)$  é possível calcular  $F(\theta_i)$ ,  $\langle n \rangle(\theta_i)$  e  $\eta_c(\theta_i)$  com as seguintes expressões (Fraidenraich, 1992):

$$F(\theta_i) = \sum_{k=0}^M P_k(\theta_i) \quad (3)$$

$$\langle n \rangle(\theta_i) = \sum_{k=1}^M k P_k(\theta_i) \quad (4)$$

$$\eta_c(\theta_i) = \sum_{k=0}^M P_k(\theta_i) \rho^k \quad (5)$$

As três equações acima fornecem valores para radiação direta. Integrando as equações obtém-se valores para radiação difusa.

Parâmetros Óticos do Concentrador Solar Tipo-Vn. O processo de cálculos dos parâmetros óticos concentrador inicia-se com o desmembramento do concentrador tipo-Vn em n concentradores do tipo-V1 e deles calcula-se a razão de concentração e o ângulo de aceite ótico.

## ANÁLISE DO CONCENTRADOR TIPO-V2

Com os ângulos de inclinação das paredes refletoras dos concentradores desmembrados obtêm-se os ângulos característicos, número máximo de reflexões e as condições de iluminação, possibilitando o cálculo da função de probabilidade e por fim os valores da função de transmissão, do número médio de reflexões e da eficiência ótica para cada concentrador desmembrado.

Os valores da função de transmissão do concentrador tipo-Vn são obtidos pelo produto das funções de transmissão de cada estágio do concentrador em função do ângulo de incidência. O número médio de reflexões é obtido pelo somatório de cada estágio e da eficiência ótica pelo produto de cada estágio (Pena, 1995).

O método descrito acima fornecerá valores dos parâmetros óticos maiores que a realidade, pois neste procedimento de cálculo considera-se que toda a radiação solar admitida na abertura do estágio anterior também é admitida no estágio seguinte. Na prática, porém parte da radiação admitida e rejeitada no estágio seguinte.

A Figura 1 demonstra esta afirmação, pois o raio solar que passa pelo estágio anterior e sofre reflexões no interior deste estágio apresenta um ângulo de incidência alterado para o próximo estágio.

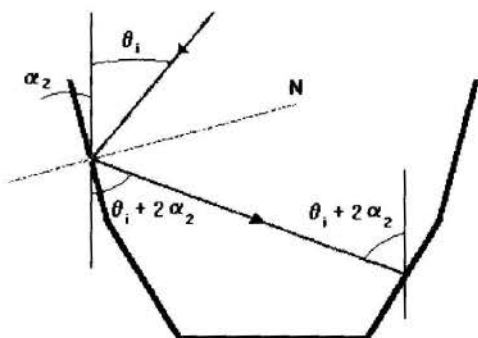


Figura 1 -Traçado do raio incidente sobre a superfície refletora.

A análise da figura mostra que para cada reflexão no estágio anterior desloca-se o ângulo da radiação solar em  $2\alpha$ . A determinação do ângulo de incidência do raio para qualquer estágio é:

$$\theta_{i,n} = \theta_{i,n-1} + K(2\alpha_{n-1}) \quad (6)$$

O concentrador tipo-V1 apresenta um ângulo mínimo de incidência para rejeitar os raios em número k de reflexões. O concentrador tipo-Vn apresenta um segundo ângulo de rejeição dos raios para número k de reflexões devido às alterações do ângulo de incidência dos raios solares. A equação a seguir determina este novo ângulo de rejeição dos raios no interior do concentrador:

$$\Delta_{n,k} = \theta_{o,n-1} - 2K\alpha_n \quad (7)$$

A partir destas considerações, a utilização do procedimento descrito neste tópico obtêm-se uma maior precisão nos cálculos dos parâmetros óticos dos concentradores tipo-Vn, como será visto a seguir.

A partir dos resultados numéricos do concentrador tipo-V2 pode-se concluir que:

- Não existem fórmulas gerais e precisas para determinação do ângulo de incidência para o número médio de reflexões máximo e número máximo de reflexões, do ângulo de aceite ótico e dos intervalos angulares da função de transmissão para todos os ângulos de aceite dos concentradores tipo-V2;

- Os valores aproximados da função de transmissão para concentrador tipo-V2 é dado pela Eq. (8), quando  $\theta_p > 10^\circ$ :

$$\begin{aligned} F(\theta) &= 1 & 0^\circ \leq \theta_i \leq \theta_g \\ F(\theta) &< 1 & \theta_g < \theta_i \leq \theta_o \\ F(\theta) &> 1 & \theta_i > \theta_o \end{aligned} \quad (8)$$

- O ângulo limite entre a região de transmissão total e parcial da radiação é definido pelo ângulo de aceite geométrico, de acordo com Eq. (9):

$$\begin{aligned} CR = \frac{A}{B} &= \left[ \frac{2 \cos \alpha_1 \operatorname{sen}(2\alpha_2 + \theta_g)}{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \theta_g) \operatorname{sen}(\alpha_2 + \theta_g)} + \right. \\ &\left. + \frac{(2\alpha_1 - \alpha_2 + \theta_g)}{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \theta_g) \operatorname{sen}(\alpha_2 + \theta_g)} \right] - 1 \end{aligned} \quad (9)$$

- Os valores aproximados do ângulo de aceite ótico dos concentradores tipo-V2 é dado pela Eq. (10), quando  $\theta_p > 10^\circ$ :

$$\theta_o \approx \theta_g + 2\alpha_1 \approx \arcsen\left(\frac{1}{CR}\right) + \alpha_1 + \alpha_2 \quad (10)$$

As Figura 2, 3 e 4 representam os parâmetros óticos destes concentradores para quatro ângulos de aceite geométrico diferentes. Da análise das figuras, conclui-se que:

**Radiação Direta.** O comportamento dos concentradores tipo-V2 frente a radiação direta está representada na Figura 1, 2 e 3, donde conclui-se que:

- Existe um aumento da região de transmissão total e a redução da parcial com incremento do ângulo de aceite;

- As curvas de eficiência e função de transmissão para a região parcial não apresenta a característica linear como nos concentradores tipo-V1, pois os concentradores tipo-Vn estão mais próximo dos concentradores de componente hiperbólica (CHC), da qual se origina as cavidades tipo-V;

- A redução do ângulo de aceite provoca o aumento do número médio de reflexões, sendo tendência indesejável, pois a região de transmissão total e de eficiência ótica constante são menores;

- As curvas de número médio de reflexões apresentam um ponto máximo bem definido para pequenos ângulos de aceite, sendo que para os demais ângulos ponto não existe;

- O número médio de reflexões para ângulo de incidência igual a zero ( $\theta_i = 0^\circ$ ) decresce com a redução do ângulo de aceite, contribuindo para uma maior região de transmissão total e eficiência ótica constante;

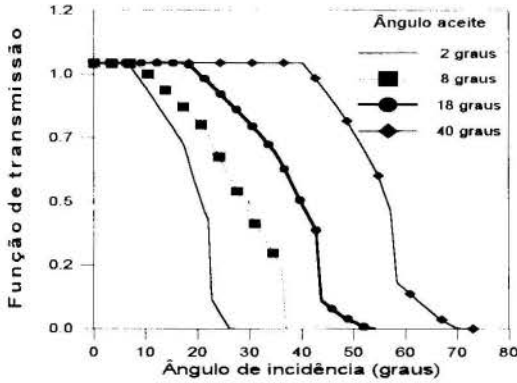


Figura 2 - Curvas da função de transmissão para radiação direta.

- O ponto máximo das curvas de número médio de reflexões representa o ângulo de incidência no qual o raio incidente sofre no interior da cavidade o maior número de reflexões;

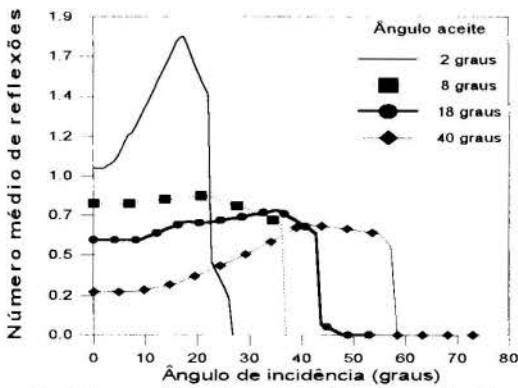


Figura 3 - Curvas do número médio de reflexões para radiação direta.

- As curvas de número médio de reflexões apresentam uma queda acentuada e atingem o valor zero rapidamente devido ao segundo ângulo de rejeição dos raios solares;

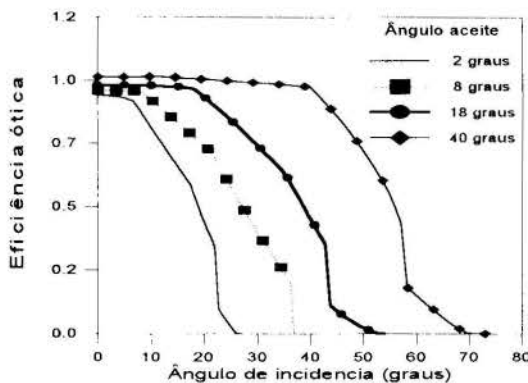


Figura 4 - Curvas de eficiência ótica para radiação direta.

- Quando  $\langle n \rangle = 0$  os raios solares alcançam o

absorvedor sem atingir as superfícies refletoras;

- As curvas de eficiência ótica e função de transmissão são semelhantes, diferenciando na inclinação da curva na região de transmissão total;

- A eficiência ótica do concentrador para  $\theta_i = 0^\circ$  decresce com a redução do ângulo de aceite;

- A eficiência ótica é aproximadamente constante na região de transmissão total, tendo uma ligeira queda com o aumento dos ângulos de incidência.

**Radiação Difusa.** O comportamento da radiação difusa no interior do concentrador está representada na Figura 5, na qual foram representados os valores de  $\langle n \rangle$  e  $\eta_o$  em função do ângulo de aceite geométrico. Conclui-se que:

- O número médio de reflexões no interior do concentrador é baixo em comparação ao da radiação direta. Para radiação direta o valor máximo do número médio de reflexões é de 1,8, no caso da radiação difusa o número de reflexões atinge 0,65. A explicação para este comportamento está na rejeição da maior parte da radiação difusa pela cavidade;

- O número médio de reflexões decresce e a eficiência ótica aumenta com o ângulo de aceite, sendo uma tendência esperada, pois ângulos de aceite elevados permitem que uma maior quantidade de radiação alcance o absorvedor;

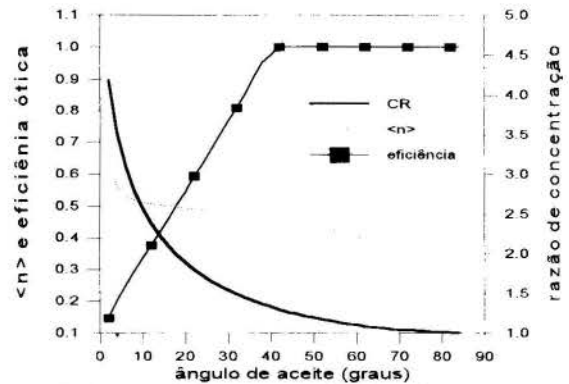


Figura 5 - Curvas de número médio de reflexões, eficiência ótica e razão de concentração para radiação difusa.

- Para os ângulos de aceite entre  $5^\circ$  a  $40^\circ$  tem-se  $\langle n \rangle_d \approx 0,5$ , mostrando que o número médio de reflexões mantém-se aproximadamente constante para uma larga faixa de ângulos de aceite;

- Para mesma faixa do ângulo de aceite a eficiência varia de 0,2 a 0,9. A grande variação é devido a rejeição da radiação difusa para pequenos valores do ângulo de aceite e o mesmo não ocorrendo para ângulos de aceite maiores.

**Comparativo dos Métodos.** As figuras 6 e 7 são gráficos comparativos dos valores do número médio de reflexões e da eficiência ótica em função do ângulo de incidência para o processo de desmembramento do concentrador tipo-V2 (método 1), sendo que o segundo processo associa o desmembramento do concentrador ao segundo ângulo de rejeição da radiação (método 2). A análise das figuras



mostra que:

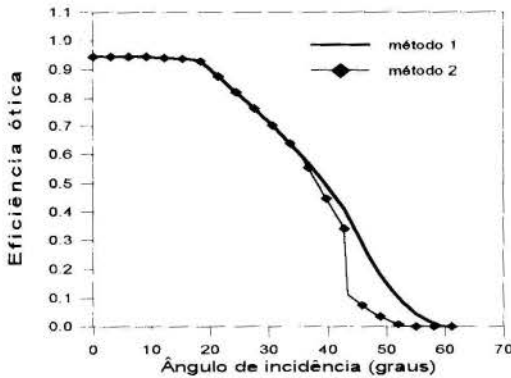


Figura 6 - Curvas comparativas dos métodos de cálculo da eficiência ótica para concentrador tipo-V2 com  $\theta_g = 18^\circ$ .

- Os raios incidentes com ângulo superior ao segundo ângulo de rejeição ( $\Delta$ ) apresentam uma queda drástica do número médio de reflexões e se esperava um aumento da eficiência, mas isto não ocorre porque a queda no número de reflexões é devido a rejeição da radiação no interior da cavidade;

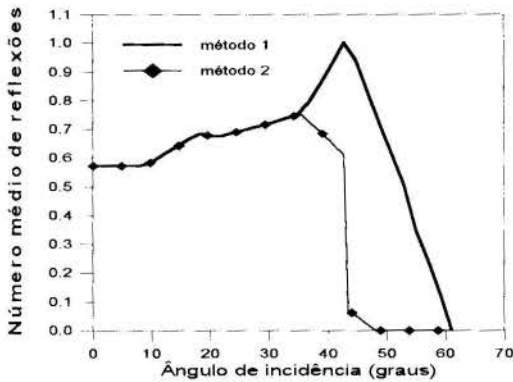


Figura 7 - Curvas comparativas dos métodos de cálculo da número médio de reflexões para concentrador tipo-V2 com  $\theta_g = 18^\circ$ .

## CONCLUSÃO

Os resultados apresentados para concentrador tipo-V2, mostra a viabilidade do processo de cálculo dos parâmetros óticos dos concentradores tipo-Vn.

Para os concentradores analisados, a faixa de  $14^\circ$  a  $30^\circ$  atende as exigências dos módulos fotovoltaicos, quanto aos valores da eficiência ótica e da razão de concentração geométrica ( $2,3 \leq CR \leq 1,5$ ) recomendados pela literatura.

A utilização de concentradores com  $CR = 2$  possibilita coletar a radiação solar com eficiência em torno de um ( $\eta_c \approx 1$ ) por duas horas de coleta, com eficiência apenas de 0,7 consegue-se até quatro de coleta, sendo o mesmo tempo de coleta de um coletor sem concentrador.

Os resultados obtidos por Pena, 1995 para um concentrador tip-V2 com  $CR = 2$ , mostra que o protótipo alcançou uma razão de concentração efetiva em torno de um ( $CR \approx 1$ ), em tais condições não justificaria a

utilização deste protótipo em sistemas fotovoltaico.

## AGRADECIMENTO

O autor agradece aos colegas de trabalho que colaboraram, em particular, a Professora Elizabeth Marques Duarte Pereira pela atenção dispensada.

## REFERÊNCIA

- Fraidenraich, N., 1992, Analytic solutions for the optical properties of V-trough concentrators. *Applied Optics*, Vol. Vol. 3, pp. 131 - 139.
- Mannan, K. D. and Bannerot, R. B., 1978, Optical geometries for one- and two-faced symmetric side-wall booster mirrors. *Solar Energy*, Vol. 21, pp. 385 - 391.
- Mullick, S. C., Malhotra A. and Manda, S. K., 1988, Optimal geometries of composite plane mirror cupped linear solar concentrator with absorber. *Solar Energy*, Vol. 40, pp. 443 - 459.
- Pena, D. L., 1995, "Concentradores solares aplicados a módulos fotovoltaicos". Tese de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.

## ABSTRACT

This article presents a method for calculations of optical parameters of multielement concentrator, through a mathematical model developed by Fraidenraich (1992) for V-trough concentrators. The article also presents the analysis of these concentrators from obtained data, aiming at establishing optimal operational conditions.

## NOMENCLATURA

- A - Área de abertura total do concentrador solar  
 $A_k(\theta_i)$  - Área de abertura do concentrador solar  
 B - Área do absorvedor do concentrador solar  
 CR - Razão de concentração  
 $F(\theta_i)$  - Função de transmissão  
 k - Número de reflexões  
 K - Número de reflexões do estágio anterior  
 M - Número máximo de reflexões  
 n - Número do estágio  
 $\langle n \rangle(\theta_i)$  - Número médio de reflexões  
 $P_k(\theta_i)$  - Função de probabilidade  
 $\alpha_1$  - Ângulo de inclinação do 1º estágio  
 $\alpha_2$  - Ângulo de inclinação do 2º estágio  
 $\alpha_n$  - Ângulo de inclinação do enésimo estágio  
 $\Delta_{nk}$  - Segundo ângulo de rejeição  
 $\eta_c(\theta_i)$  - Eficiência ótica do concentrador  
 $\theta_g$  - Ângulo de aceite geométrico  
 $\theta_o$  - Ângulo de aceite ótico  
 $\theta_i$  - Ângulo de incidência  
 $\rho$  - Índice de refletividade



## EFFICIENCY ANALYSIS OF A BOILING COLLECTOR IN THERMAL SIPHON OPERATION.



**Maria Eugênia Vieira and Rafaela Frota Reinaldo**

Applied Solar Energy Laboratory, Technology Center, Federal University of Ceará  
60455-760 - Fortaleza - Ce- Brazil  
eugenia@ufc.br

### SUMMARY

*This work presents an analysis of the thermal efficiency of a solar collector in thermal siphon operation. In well designed system, the collector heat removal factor and its efficiency factor have approximate values since the working fluid temperature at the collector inlet is close to its saturation temperature. Experimental and analytical results for a waffled plate collector designed for water use are presented. The absorber plate temperature in the direction of the flow showed the location where boiling started. The efficiency curves for single and two phase flow operation are presented.*

### INTRODUCTION

Hottel and Whillier (1958) presented a model based on the work of Hottel and Woertz (1942) to calculate the thermal efficiency of solar collector, Eq. (1), operating in single-phase forced convection.

$$\eta = F_r \left[ (\tau\alpha)_0 - \frac{U_l (T_i - T_a)}{I_0} \right] \quad (1)$$

In this equation,  $\eta$  represents the thermal efficiency,  $F_r$  the heat removal factor,  $(\tau\alpha)_0$  the transmittance-absorptance product,  $U_l$  the collector overall loss coefficient,  $T_i$  the fluid inlet temperature,  $T_a$  the ambient temperature, and  $I_0$  the incident solar radiation on the collector plane. The heat removal factor relates the actual useful energy gain of the collector to the useful gain if the whole collector surface were at the fluid inlet temperature.

Solar collectors operating in single phase thermal siphon loops, using either water or oils as the working fluid, have found various applications in water heating, water desalination, cookers, etc. These systems present the advantages of self-pumping and self-controlling and the associated costs with instruments, maintenance, and operation. As disadvantages, a lower natural convection heat transfer coefficient in the flow channels is found in comparison with the forced convection coefficient, which implies in lower efficiency.

Boiling collectors in closed thermal siphon loops present the advantages of single phase natural convection systems and, when well designed, can operate at a lower absorber plate temperature due to the higher boiling heat transfer coefficient. As disadvantages, these systems require higher installation cost and tighter construction since the system operates at low pressure. Also, it needs to use a working fluid with certain thermal-physical properties for boiling.

Existing models treat the boiling collector as a 'black box', where either sub-cooled or saturated liquid enters the channels of the absorber plate, and either saturated or superheated vapor exits. This is not a correct assumption since only a small part of the mass flow rate boils and there is a two-phase flow at the collector exit.

Two-phase flow with boiling is complicated both in the physical processes and mathematical models. This work presents a theoretical analysis of the thermal efficiency of a boiling collector in thermal siphon operation and the experimental results

which support the analysis to aid the design of more efficient units. It is shown that the heat removal factor and the efficiency factor have approximate values and that to better determine the heat removal factor a model based on the void fraction of the two phase flow is needed.

The thermal siphon operation of a boiling solar collector is described with the help of Figure 1. Liquid-phase refrigerant is

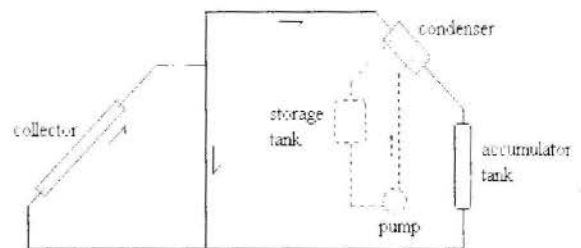


Figure 1 - Schematic view of the thermal siphon loop.

gravity fed from an accumulator tank to the collector. As the liquid contacts the inside tube walls, which are heated by radiant solar energy, bubbles are formed on small cavities. These bubbles grow until they detach from the wall and rise because of the difference in density between the liquid and vapor phases. As the bubbles rise, they drag the liquid beginning the two-phase flow, which is enhanced by the already started single-phase flow. The temperature of the fluid remains approximately constant. When the flow reaches the top of the collector, it moves through a tee-type connection where the liquid drains to the collector inlet while the vapor moves upward to the heat exchanger where it condenses giving up its latent heat to the storage coolant.

For higher efficiencies, boiling collectors should operate at a liquid length fraction of 0.7 to 1.0 (Soin et al., 1979). The liquid length fraction is defined as the length of the collector that is filled with the working fluid divided by the total length of the collector.

During operation, most of the mass flow rate of liquid refrigerant that enters the collector is re-circulated and a small part, as compared with the mass that stays in the liquid phase, boils and becomes vapor. The two-phase flow that leaves the collector is saturated and the re-circulated liquid has some heat

losses in the piping as it returns to the collector. The vapor has also some sub-cooling in the condenser and piping such that, the working fluid is slightly sub-cooled at the collector inlet.

Figure 2 shows the heat transfer processes inside the flow channel of a solar collector. Part of the solar energy incident on the collector is captured by the absorber plate and part is lost to the ambient. The absorbed energy is conducted to the inside walls of the channel and transferred to the working fluid in the boiling process. The walls reach a temperature greater than the saturation temperature of the liquid and bubbles nucleate from specific sites. The bubbles grow while in contact with the walls until they depart and new liquid comes in to take place of the departed bubbles. These vapor bubbles will release their latent heat to the circulating water in the second loop during condensation.

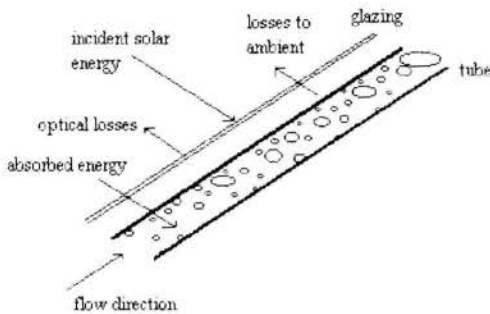


Figure 2 - Schematic of the heat transfer processes in a flow tube.

## LITERATURE REVIEW

In this section, a general review of previous work about the operation of boiling collectors in a thermal siphon loop is presented.

Davis and Bol (1978) tested a system using n-butane as the working fluid and concluded that two-phase thermal siphon systems are compatible in cost to single-phase ones and yet operated at efficiencies above forced convection water solar heating systems.

Soin et al. (1979) conducted experiments on a system using acetone and petroleum ether as the working fluid to study the effect of the initial liquid level. They concluded that efficiency increased with liquid level and that detailed analysis of the two-phase mass and heat transfer were needed.

Al-Tamimi (1982) and Al-Tamimi and Clark (1983) divided the collector into two sub-regions: one sub-cooled and one boiling. They presented a generalized heat removal factor that depended on the total mass flow rate through the channels, thermodynamic conditions of operation, physical arrangement, and the degree of sub-cooling.

Kaushika et al. (1982) conducted a numerical study in which the collector was divided into two regions: liquid and vapor. Efficiency was expressed in terms of correction factors in Eq. (1). These factors depended on the mass flow rate per unit collector area, liquid level, and other thermal properties.

El-Assy (1986) and El-Assy and Clark (1988, 1989) extended the work of Al-Tamimi and Clark by including a super-heated region in the collector.

Abramzon et al. (1983) suggested that a direct utilization of the classical models of a flat plate collector is not applicable to a collector with internal boiling because the classical models consider length-average values of the plate temperature, heat loss coefficient, and the transfer coefficient in the tubes. This averaging process did not permit an accurate determination of the local wall temperatures nor the location where boiling starts.

Abramzon and co-workers divided the absorber plate into small sections and performed an energy balance for each one. Their results indicated that the collector operated in the laminar range, the vapor content was a linear function of the channel length, and high efficiencies existed also when the fluid was sub-cooled by than 5 to 10 °C at the collector inlet.

Kishore et al. (1982) used a pump to circulate the working through the boiling collector. In the analytical study, the collector was divided into three heat transfer regions: sensible, boiling, and super-heated. Efficiency was expressed as dependent on the heat transfer coefficient, mass flow rate through the channels, and the length of the sub-cooled region.

Kamal (1984) used four energy balance equations in six unknowns to model the collector. The two specified parameters were the liquid level and the quality of the working fluid at collector exit. Using the data from Soin et al. (1979) and assuming quality to vary from 0.7 to 1.0, the fractional length of the boiling section was found to be 0.21 and that of super-heating of 0.65.

Neeper (1985) presented an expression for efficiency of the boiling collector with no super-heating which included two factors: one for the boiling portion and the other related efficiency to sub-cooling. It was concluded that for conventional flat plate collectors, testing at multiple values of insolation and sub-cooling, as required by the ASHRAE standard 109, was not necessary.

Price (1984) developed two models for use with TRNSYS (Klein et al., 1983), and considered the collector and condenser together as a single component. The ideal model assumed that saturated liquid entered the collector, saturated vapor exited, and neglected pressure losses in the connecting lines. In the non-ideal model, these assumptions were removed. Using the homogeneous two-phase flow model and assuming that the mass flow rate of the working fluid through the collector is the same as through the condenser, a mass balance calculation showed that the initial liquid length fraction in the collector should have been 0.05. In practice, this varies from 0.7 to 1.0 and therefore, the actual quality at the exit of the collector is much less than 1.0.

Mathur (1989) simulated the thermal siphon loop, for use with R-11 and R-113, and found low heat transfer processes in the morning hours. Efficiency increased with increasing solar radiation.

Vieira (1992) presented an analytical and experimental study of a solar thermal siphon hot water system installed in the Solar Energy Applications Laboratory at Colorado State University. The system was similar to that in Figure 1 and two different collectors were tested. They were designed for water as the working fluid and single phase operation. In the first collector, the absorber plate had a conventional tube arrangement with selective coating and double glazing. The second had a waffled plate geometry and was rebuilt at the laboratory with single glazing, but no selective coating. Two glycol-water solutions were used in the storage side of the condenser. The analytical study presented a boiling heat transfer model based on the active number of nucleation sites, but the actual void fraction of the two-phase flow could not be estimated due to the lack of more appropriate instrumentation. The results indicated that the self-pumping two phase system was more cost-effective than conventional operation.

To support the analysis in the present work, the experimental data gathered by Vieira (1992) were used. The instruments and the analysis are described in the next sections.

## EXPERIMENTAL MEASUREMENTS

Experimental measurements were performed to determine the incident solar radiation on horizontal and tilted planes, the

temperature of the absorber plate and of the outside walls of the connecting lines, the temperature of the ambient air, the working fluid pressure and temperature at collector inlet and pressure at outlet. On the storage side, the volumetric flow rate of the glycol-water solution through the condenser and the temperature difference between inlet and outlet were measured.

Incident radiation measurements were made with two precision pyranometers, temperature transducers ( $\pm(0.5\text{ }^\circ\text{C}$  or 4.0 percent, whichever was greater)) were copper-constantan, special limit type-T thermocouples, mounted on 44 positions along the flow on the back of the absorber plate and others at various positions along the loop piping. A five junction thermopile ( $\pm(1$  percent of reading +  $0.05\text{ }^\circ\text{C}$ )) was used to measure the temperature difference across the condenser, while a turbine type meter measured the volumetric flow of the water solution. Two diaphragm pressure transducers with a coil on either side and alternating current as output were used. A 1.22 m long sight glass was installed to indicate the liquid level in the collector when charging the system.

A data acquisition system collected the raw data and was programmed with a scan interval of twenty seconds and pseudo channels were defined to give average values. A program managed the data logger and processed the data received. Experimental system efficiency was calculated as the sensible heat gained by the storage solution in the condenser divided by the incident solar radiation flux times the collector area.

#### ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL WORK

If the working fluid were to enter the collector as saturated liquid and leave, like it actually does, as a two-phase flow mixture, its temperature would remain at the saturation value. In this case, the efficiency factor,  $F'$ , which represents the ratio of the actual useful energy gain to the useful gain that would result if the collector absorbing surface had been at the local fluid temperature, and the heat removal factor,  $F_r$ , would have the same value. In practice, it was found that  $F'$  approached  $F_r$ .

The level of sub-cooling in the collector was experimentally estimated by measuring the absorber plate temperature. The working fluid entered the collector as sub-cooled liquid, and increased its temperature as it was heated up until it reached its saturation temperature, which remained essentially constant. The location where boiling began was important since it divided the collector in the regions of single phase natural convection and boiling. As shown in Figure 3, boiling started at approximately 0.68m from the collector inlet.

Because of the higher coefficient in two-phase heat transfer as compared to single-phase, the boiling heat transfer accounts for most of the energy transfer in the collector even though the sub-cooling fraction may exits. However, were the same collector to operate at full boiling, its efficiency would be higher than if it were to operate with part of its length in sub-cooling, for instance. That is, in both cases, the sensible heat in sub-cooling either non-existed or was small compared to the boiling heat transfer; however, in the first case, the area for boiling and consequently the rate of heat transfer would be bigger.

In order to estimate the fluid saturation temperature, a widely used expression for the wall superheat required for the onset of nucleate boiling, (Davis and Anderson, 1966), was used. In this expression,  $\Delta T_{\text{ONB}}$  represents the difference between the heated wall temperature and the fluid saturation temperature,  $\sigma$  the surface tension,  $k_l$  the liquid thermal conductivity,  $\rho_v$  the vapor density,  $h_{fg}$  the latent heat of vaporization, and  $q$  the heat flux. In the experimental measurements, the rate of heat transfer in the condenser was estimated as the sensible heat gained by the

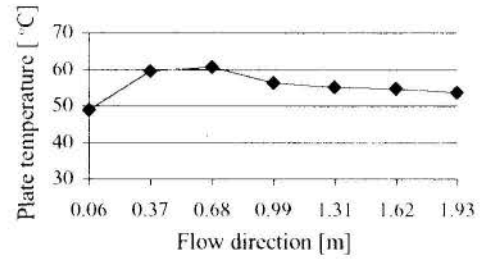


Figure 3 - Absorber plate temperature along the flow.

$$\Delta T_{\text{ONB}} = \sqrt{\frac{8 \sigma T_{\text{sat}} q}{k_l \rho_v h_{fg}}} \quad (2)$$

storage fluid. The boiling rate was then the sum of this sensible gain and the estimated conduction losses on the piping. Using the average values of the absorber plate temperature and the boiling heat flux, the fluid saturation temperature was numerically determined using Eq. (2), which is an implicit expression, and the Bisection Method. The fluid saturation temperature was used in the calculation of the thermal efficiency.

Other boiling heat transfer parameters were determined and used in the correlations to estimate the heat transfer coefficient. The average bubble departure diameter,  $d_d$ , was calculated using the expression presented by Fritz (1935), Eq. (3), where  $\beta$  is the contact angle and  $g$  the acceleration of gravity. The average value found was 0.74mm. The bubble frequency of emission,  $f$ , was

$$d_d = 0.0208 \beta \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)}} \quad (3)$$

estimated using the expression presented by Jacob (1949), Eq. (4), where  $\rho_l$  is the liquid density. The average value was  $79.2\text{ s}^{-1}$ . Tolubinsky and Ostrovsky (1966) reported experimentally measured values for refrigerant R-12 of 0.7mm for bubble departure diameter and of  $91\text{ s}^{-1}$  for its frequency.

$$d_d \cdot f = \frac{1.18}{2} \left[ \frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_l^2} \right]^{0.25} \quad (4)$$

As expected, difficulty was encountered to theoretically determine a heat transfer coefficient that would represent the natural convection processes in the flow channel of the absorber plate. The correlation used was presented by Imura et al. (1979) for a thermal siphon heat pipe. The heat removal factor,  $F_r$ , which was assumed to have approximately the same value as the efficiency factor,  $F'$ , was estimated using Eq. (5). In the equation,  $W$  is the distance between the tubes,  $D$  the tube diameter,  $F$  the standard rectangular fin efficiency,  $D_i$  the inside tube diameter, and  $h$  the heat transfer coefficient.

$$F_r \approx F' = \frac{1/U_L}{W \left\{ \frac{1}{U_L [D + (W - D)F]} + \frac{1}{\pi D_i h} \right\}} \quad (5)$$

The collector overall loss coefficient,  $U_L$ , was estimated considering the losses from the top, edges, and back. The waffled plate collector was rebuilt with three layers of insulation on the back and one on the edges and the absorber plate was sprayed with black dull paint.



## RESULTS

Experimental collector efficiency was calculated as the rate of boiling divided by the total radiation on the tilted collector. Figure 4 shows the efficiency plot for the collector operating in the two-phase flow thermal siphon.

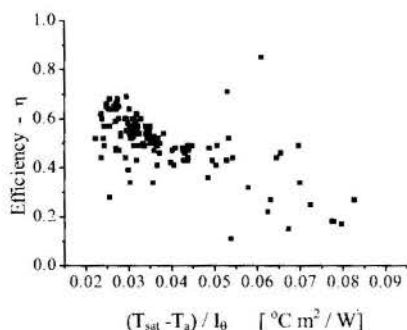


Figure 4. Efficiency of the collector in thermal siphon operation.

Using the experimental measurements, a linear regression model was applied to curve fit efficiency. The experimental values of the  $F_r (\tau\alpha)$  product and the  $F_r U_L$  found were 0.76 and 6.75, respectively. Considering the value of the effective  $(\tau\alpha)$  as 0.88,  $F_r$  was estimated as 0.86 and  $U_L$  as 7.85 W/(m<sup>2</sup>. K). The theoretically calculated values for  $F_r$ , Eq. (5), and  $U_L$  were 0.98 and 8.39 W/(m<sup>2</sup>. K). The difference between the experimental and calculated values for  $F_r$  can be explained as follows. In the two-phase flow with boiling collector, different heat modes are present in the absorber plate channels. In practice, there is always some sub-cooling in the condenser and when the fluid enters the collector there is a region of sensible heating preceding the onset of boiling. This region decreases the heat transfer area for boiling, thus efficiency. In the boiling region, nucleate boiling is expected to occur because of the low solar heat fluxes. As already stated, a heat transfer coefficient to represent these processes to be used in Eq. (5) is difficult to find.

Figure 5 shows the efficiency curves for single and two-phase flow operations. In single phase operation, a pump is used to force the fluid through the system. The manufacture curve for the single glazed, black paint collector reported 0.79 and 6.59 W/(m<sup>2</sup>. K) for the  $F_r (\tau\alpha)$  product and the  $F_r U_L$ . Since in the single-phase curve the abscissa values are  $(T_i - T_a) / I_0$  and in the two-phase curve these values are  $(T_{sat} - T_a) / I_0$ , a direct comparison between the heights of the two lines should not be made.

Just as an example between the modes of operation of the collector, consider the experimental data where the fluid entered the collector at a temperature of 35.6 °C, and the saturation temperature, ambient temperature, and insolation were 44 °C, 14 °C, and 874 W/m<sup>2</sup>, respectively. The energy collected in single phase operation was 1,282W and in two-phase operation 1,084W. Nevertheless, there are two observations to be made. In single phase operation, an additional 100 W pump is used to circulate the working fluid and the cost of electrical power is higher (by a factor of 2 or 3 times) than that of thermal power. The second observation is that there are two fluid loops in single-phase operation, and a heat exchanger in counterflow operation is needed to transfer energy from the collector loop working fluid to the storage water. In the two-phase flow loop, a condenser is used and the system performance is better because in system analysis, the collector-heat exchanger transfer processes are link and need to be seen as one unit.

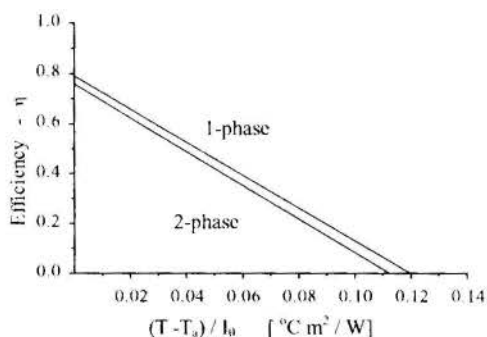


Figure 5. Efficiency curves for single and two-phase operation.

## CONCLUSION

From the analysis presented, the boiling collector in thermal siphon operation can present better overall system efficiency than in single-phase operation. When well designed, boiling collectors can take advantage of the high coefficient in two-phase energy transfer and operate at constant saturation temperature, reducing losses to the ambient. The collector tested was designed for single-phase operation and yet presented good results in two-phase operation.

To better design these collectors a detailed study of the two-phase flow with boiling process is necessary. It involves determining the flow regime, level of sub-cooling, the rate of vapor production in the flow channel, that is the void fraction of the flow, and the mass flow rate through the channels. At present, a drift flux model for the void fraction in the flow channels has been adjusted for this application. A new system has been designed to test new absorber plate geometries and system design. It is to be installed at the Applied Solar Energy Laboratory at the Federal University of Ceara.

## ACKNOWLEDGMENTS

We would like to very much thank Dr. J. H. Davidson and Dr. G.O.G. Löf from the Solar Energy Applications Laboratory at Colorado State University and also all its staff members for all the support given.

## REFERENCES

- Abramzon, B., Yaron, I., and Borde, I., 1983, "An Analysis of a Flat-Plate Solar Collector with Internal Boiling", *J. of Solar Energy Engineering*, 105, pp. 454-460.
- Al-Tamimi, A. I., 1982, "Performance of Flat-Plate Solar Collector in a Closed-Loop Thermosiphon Using Refrigerant-11", Ph.D. Thesis, Chemical Engineering Department, University of Michigan, Ann Arbor.
- Al-Tamimi, A. I., and Clark, J. A., 1983, "Thermal Analysis of a Solar Collector Containing a Boiling Fluid", *Progress in Solar Energy*, 6, pp. 319-324.
- ASHRAE 109, 1986, "Methods of Testing to Determine the Thermal Performance of Flat-Plate Solar Collectors Containing a Boiling Liquid", ASHRAE, 1791, Tullie Circle, N. E., Atlanta, Georgia, 30329.
- Davis, B. W., and Bol, K. B., 1978, "Using Two-Phase Working Fluid to Greatly Improve Passive Solar Water Heating", Proc. 1978 Annual Meeting of the American Section on the International Solar Energy Society, 2.1, Denver, Colorado, pp. 599-602.

Davis, E. J., and Anderson, G. H., 1966, "The Incipient of Nucleate Boiling in Forced Convection Flow", *AIChE J.*, 12:774-80.

Duffie, J. A., and Beckman, W. A., 1991, *Solar Engineering of Thermal Processes*, Wiley-Interscience.

El-Assy, A. Y., 1986, "Technical and Economic Analysis of the Thermal Performance of a Solar Boiling Concentrator for Power Generation", Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, University of Michigan, Ann Arbor.

El-Assy, A. Y., and Clark, J. A., 1988, "Thermal Analysis of a Flat-Plate Collector in Multiphase Flows, Including Superheat", *Solar Energy*, 40, pp. 345-361.

El-Assy, A. Y., and Clark, J. A., 1989, "Thermal Analysis of a Flat-Plate Boiling Collector Having Sub-Cooled Inlet and Saturated Exit States", *Solar Energy*, 42, pp. 121-132.

Fritz, W., "Berechnung des Maximalvolumens von Dampfblasen", *Phys. Zeitsch.*, Jg.36, Nr.11, pp. 379-384.

Hottel, H. C., and Whillier, A., 1958, "Evaluation of Flat-Plate Collector Performance", *Transactions on the Conference on the Use of Solar Energy*, 2, Part I, pp. 74-104, University of Arizona Press.

Hottel, H. C., and Woertz, B. B., 1942, "Performance of Flat Plate Solar-Heat Collectors", *Trans. ASME*, v.64, pp. 91-104.

Imura, Kusada, Ogata, Miyazaki, Sakamoto, 1979, "Heat Transfer in a Two-Phase Closed Thermosiphon", *Trans. JSME*, 45(393), B,712.

Jacob, M., 1949, *Heat Transfer*, vol.1, chapter 29, John Wiley and Sons, New York.

Kamal, W. A., 1984, "Performance Evaluation of Refrigerant-Charged Solar Collector", *Proc. of Energex 84*, Regina, Canada, pp. 193-198.

Kaushika, N. D., Bharadwaj, S. C., and Kaushik, S. C., 1982, "Analysis of a Flat Plate Collector with Fluid Undergoing Phase Change", *Applied Energy*, 11, pp. 233-242.

Kishore, V. V. N., Gandhi, M. R., Marquis, Ch., and Rao, K. S., 1982, "Evaluation and Testing of Flat Plate Collectors Employing Phase Changing Fluids", *Proc. of Energex 82*, Regina, Canada, pp. 134-139.

Klein, S. A., et al., 1983, "TRNSYS - A Transient Simulation Program", *Engineering Experiment Station Report 38-12*, University of Wisconsin, Madison.

Mathur, G. D., 1989, "Modeling and Simulation of Refrigerant Charged Flat Plate Collector of a Natural Circulation Closed Loop", *Proc. Winter Annual Meeting ASME*, San Francisco, California, pp. 43-49.

Neeper, D. A., 1985, "Efficiency of a Solar Collector with Internal Boiling", *ASHRAE Trans.*, 93, v.1, pp. 91-99.

Price, H. W., 1984, "Analysis and Modeling of Boiling Fluid Solar Collector", M.S. Thesis, University of Wisconsin, Madison.

Soin, R. S., Sangameswar Rao, K., Rao, D. P., and Rao, K. S., 1979, "Performance of Flat Plate Solar Collector with Fluid Undergoing Phase Change", *Solar Energy*, 23, pp. 69-73.

Tolubinsky, V. I., and Ostrovsky, J. N., 1966, "On the Mechanism of Heat Transfer (Vapour Bubbles Growth Rate in the Process of Boiling of Liquids, Solutions, and Binary Mixtures)", *J. Heat Transfer*, vol. 9, pp. 1463-1470.

Vieira, M. E., 1992, "Experimental and Analytical Study of a Boiling Collector in Thermal Siphon Operation", Ph.D. Thesis, Civil Engineering Department, Colorado State University, Fort Collins.

## EFICIÊNCIA DE COLETORES SOLARES COM ABSORVEDORES ALETADOS



Sergio Mourão Saboya

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA - IEME  
12228-900 - S.J. dos Campos - SP - BrasilFrancisco Eduardo Mourão Saboya  
Universidade Federal Fluminense - UFF  
Niteroi - RJ - Brasil

## SUMÁRIO

*O modelo de duas bandas para a radiação é aplicado para a análise de um coletor com absorvedor aletado. A formulação matemática do problema conduz a um sistema não linear integro-diferencial de equações que é resolvido numericamente. Os resultados obtidos mostram que a presença das aletas provoca o chamado "efeito cavidade", tendendo a diminuir as perdas por radiação, resultando, portanto, numa melhoria na eficiência do aparato.*

## INTRODUÇÃO

A idéia de utilizar-se coletores solares com absorvedores construídos de tal forma que as perdas por convecção e radiação sejam diminuídas tem sido bastante estudada. Um dos dispositivos mais comuns é o que usa as chamadas "colméias" ("honeycombs"). Buchberg e Edwards (1976) e Hollands (1965) dão uma revisão global das aplicações desse tipo de aparato, enquanto Buchberg et al. (1971) apresentam a teoria desses coletores. Outros trabalhos como os de Sparrow et al. (1971), Edwards et al. (1971), Tien e Yuen (1975), Hollands et al. (1978), Sparrow et al. (1962) estudam aspectos de projeto e as características radiativas desses aparatos. Entretanto, esses estudos, principalmente os que atacam o problema por métodos matemáticos, adotam um grau maior ou menor de simplificação na formulação do modelo teórico utilizado. Isto é devido às dificuldades inerentes aos problemas que envolvem radiação, que são não lineares. Franca (1983), num relevante trabalho, empreendeu uma análise bastante completa dos mecanismos de transferência de calor que têm importância no desempenho deste tipo de sistema.

O objetivo do presente artigo é analisar o coletor esquematizado na figura 1. O absorvedor desse coletor é constituído de placas (aletas) montadas longitudinalmente sobre uma base. Estas aletas visam desempenhar um papel similar às células em forma de colméia. As aletas, dificultando a movimentação do ar ambiente, diminuem as perdas por convecção ao mesmo tempo que provocam o chamado "efeito cavidade", isto é, a radiação que tenderia a deixar o coletor eventualmente seria refletida nas aletas, e, retornado à base, seria absorvida pelo sistema. Espera-se, com esse tipo de geometria, ter-se um sistema de mais fácil construção e de menor custo do que o coletor de colméia sem que isso se reflita negativamente na eficiência.

## MODELAMENTO MATEMÁTICO

No modelamento matemático do problema de transferência de calor no coletor serão feitas as seguintes hipóteses:

a) o material do qual é feito o aparato é opaco e emite e reflete radiação difusamente;

b) a temperatura da base na qual são montadas as aletas é constante e o aparato será considerado de dimensão infinita no sentido longitudinal;

c) a radiação solar incidente é direta e paralela as aletas atingindo, portanto, somente a base;

d) nas aletas será considerada condução unidimensional de calor;

e) será considerada a convecção entre as superfícies do coletor e o ambiente e o correspondente coeficiente de transferência de calor será considerado conhecido;

f) será utilizado o modelo de duas bandas para a radiação (espectros solar e infravermelho);

g) o meio será considerado não participante;

h) será considerado regime permanente.

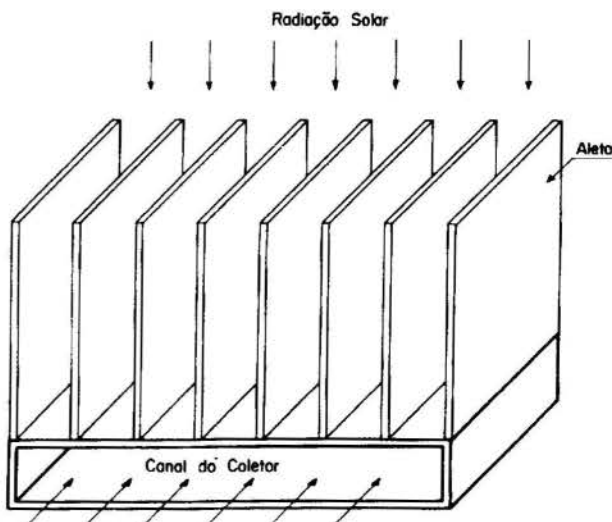


Figura 1 - Coletor com absorvedor aletado

O modelo de duas bandas consiste em considerar que a radiação nas superfícies do coletor está contida em duas faixas de comprimentos de onda: a primeira é o espectro solar (0 a

3μm) e a segunda o infravermelho (3μm em diante). Desta forma a potência emissiva total de uma superfície é:

$$e(T) = \int_0^{3\mu m} \epsilon_s e_b(T) d\lambda + \int_{3\mu m}^{\infty} \epsilon_i e_b(T) d\lambda \quad (1)$$

onde:  $\epsilon_s$  e  $\epsilon_i$  são as emissividades das superfícies respectivamente nos espectros solar e infravermelho;  $e_b$  é a potência emissiva do corpo negro e T é a temperatura da absoluta da superfície. Além disto o modelo considera que as emissividades e as absorvidades são iguais e constantes em cada uma das bandas consideradas, isto é:

$$\epsilon_s = \alpha_s = (const)_s \quad (2)$$

$$\epsilon_i = \alpha_i = (const)_i \quad (3)$$

Sabe-se, entretanto, que o Sol, considerado como um corpo negro na temperatura de 6000 K, emite 98% de sua energia na faixa de 0 a 3μm e que um corpo negro na faixa de temperaturas de operação do coletor emitirá 99,8% de energia radiante na faixa acima de 3μm. Vê-se, dessa forma, que a primeira integral da Eq. (1) é praticamente nula nas temperaturas típicas de operação dos coletores, pois a potência emissiva de um corpo negro nessas circunstâncias será muito pequena. O emprego deste modelo permite um tratamento mais realista dos problemas de radiação térmica, pois evita as hipóteses muito simplificadoras de superfícies negras ou cinzas, revelando-se adequado no tratamento de superfícies seletivas bastante usadas em coletores. Além disto as características da radiação, as quais foram discutidas acima, permitem o desacoplamento entre os espectros solar e infravermelho, facilitando a solução do problema, como será visto a seguir.

A radiosidade de uma superfície é definida como o fluxo de energia radiante que deixa a superfície, ou seja, a soma da energia emitida com a refletida. Aplicado-se esta definição às diversas superfícies do coletor (figura 2) pode-se mostrar que (Saboya, 1987) para o espectro solar tem-se:

$$\beta_{s1} = (1 - \epsilon_{s1}) \left[ \int_0^{L/D} \beta_{s2} dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} + \int_0^1 \beta_{s1} dF_{dA_1 \rightarrow dA_3} \right] \quad (4)$$

$$\beta_{s2} = (1 - \epsilon_{s2}) \left[ \int_0^{L/D} \beta_{s1} dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} + \int_0^1 \beta_{s1} dF_{dA_2 \rightarrow dA_3} + H \right] \quad (5)$$

Para o espectro infravermelho resulta:

$$\beta_{i1} = \epsilon_{i1} \theta_1^4(Y) + (1 - \epsilon_{i1}) \left[ \int_0^{L/D} \beta_{i2} dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} + \int_0^1 \beta_{i1} dF_{dA_1 \rightarrow dA_3} \right] \quad (6)$$

$$\beta_{i2} = \epsilon_{i2} + (1 - \epsilon_{i2}) \left[ \int_0^{L/D} \beta_{i1} dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} + \int_0^1 \beta_{i1} dF_{dA_2 \rightarrow dA_3} \right] \quad (7)$$

Nas Eqs. (4), (5), (6) e (7) tem-se:

$\beta = B/\sigma T_w^4 \equiv$  radiosidade adimensional, sendo:

B = radiosidade,  $T_w$  = temperatura na base do coletor

$\sigma$  = constante de Stefan-Boltzmann

$H = H_{sol}/\sigma T_w^4 \equiv$  radiação solar adimensional

$\theta = T/T_w \equiv$  temperatura adimensional

$Y = y/D \equiv$  coordenada adimensional na aleta

$dF_{dA_k \rightarrow dA_j} \equiv$  fatores de forma elementares

O entendimento dessa simbologia é facilitado pelo exame da figura 2. Os índices s e i referem-se aos espectros solar e infravermelho, respectivamente, enquanto os índices k e j nos fatores de forma podem ser 1, 2 ou 3 de acordo com a superfície em questão.

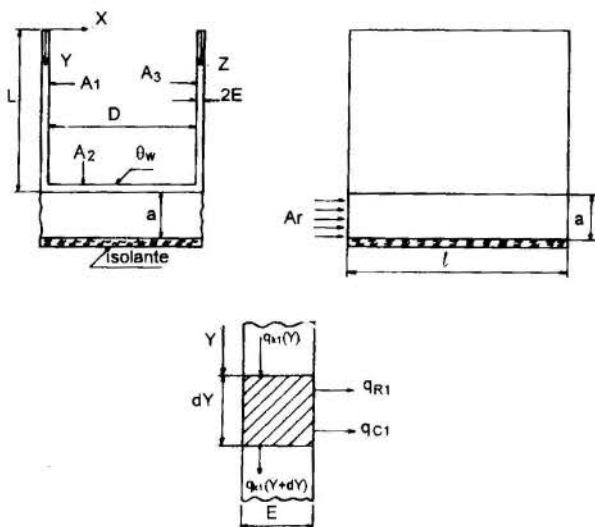


Figura 2 - Nomenclatura e balanço de energia na aleta

Para o cálculo dos fatores de forma considerou-se que as superfícies fossem alongadas, isto é, infinitas na direção longitudinal do aparato. As expressões para esses fatores podem ser encontradas em Sparrow e Cess (1978) ou em Siegel e Howell (1972).

As Eqs. (4), (5), (6) e (7) apresentam como incógnitas as 4 radiosidades mais a distribuição de temperaturas,  $\theta_1(Y)$  na aleta. Para determinar o sistema, o balanço de energia no elemento da aleta, mostrado na figura 2, fornece a equação diferencial para as temperaturas. Nessa figura  $q_{k1}$ ,  $q_{R1}$ , e  $q_{c1}$  representam os fluxos locais de calor transferidos por condução, radiação e convecção, respectivamente. O referido balanço fornece, em termos adimensionais, a seguinte equação diferencial (Saboya, 1987):



$$\frac{d^2\theta_1(Y)}{dY^2} = Nc \left[ \frac{\epsilon_{i1}}{1-\epsilon_{i1}} (\theta_1^4(Y) - \beta_{i1}) - \frac{\epsilon_{s1}}{1-\epsilon_{s1}} \beta_{s1} \right] + Mc \left[ \theta_1(Y) - \theta_\infty \right] \quad (8)$$

Na Eq. (8) tem-se:

$$Nc = \frac{D^2 \sigma T_w^3}{kE} \quad (9)$$

onde: k = condutividade da aleta

$$Mc = \frac{hD^2}{kE} \quad (10)$$

onde: h é coeficiente de transferência de calor ao ambiente por convecção

$$\theta_\infty = \frac{T_\infty}{T_w} \quad (11)$$

onde:  $T_\infty$  é a temperatura do meio ambiente.

As condições de contorno da Eq. (8) são: isolamento na ponta da aleta e temperatura constante e igual a  $T_w$  na sua raiz. Em termos matemáticos tem-se:

$$Y(\theta) \Rightarrow \frac{d\theta}{dY} = 0 \quad (12)$$

$$Y\left(\frac{L}{D}\right) \Rightarrow \theta = 1 \quad (13)$$

O resultado de interesse para a análise do desempenho do coletor, resultante da solução do sistema mostrado acima, é a eficiência definida por:

$$\eta = - \frac{Q_R + Q_C}{H} \quad (14)$$

onde  $Q_R$  e  $Q_C$  são, respectivamente, as taxas adimensionais de transferência de calor por radiação e convecção nas superfícies do aparato.

### MÉTODO NUMÉRICO DE SOLUÇÃO

O sistema integro-diferencial formado pelas 4 equações integrais e pela equação diferencial e respectivas condições de contorno é composto por duas partes: a primeira, formada pelas Eqs. (4) e (5), é linear e desacoplada da segunda, formada pelas Eqs. (6), (7) e (8). As Eqs. (4) e (5), podiam, portanto ser resolvidas independentemente das demais. Elas foram resolvidas pelo método das substituições sucessivas (Carnahan et al., 1969), usando-se como método de integração a regra de Simpson.

A segunda parte do sistema é não linear e as equações integrais têm que se resolvidas juntamente com a equação diferencial, a qual necessita também da solução da primeira parte. A principal dificuldade na solução é a não linearidade no termo  $\theta^4$ . O procedimento utilizado foi um método iterativo no qual se combinou as substituições sucessivas nas equações

integrais com uma solução por diferenças finitas na equação diferencial. O termo das temperaturas era linearizado por um desenvolvimento em série de Taylor em torno de uma estimativa  $\theta_c$  da distribuição de temperaturas. Essa estimativa era corrigida ao final de cada iteração até obter-se  $\theta_c = \theta$  dentro de uma certa tolerância especificada. Os detalhes do método numérico encontram-se em Saboya (1987).

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir serão discutidos os resultados obtidos pela solução numérica descrita. A figura 3 mostra a eficiência do em função do comprimento adimensional da aleta,  $L/D$ , para diversos valores de  $Nc$  e os demais parâmetros especificados. O parâmetro  $Mc=0$  significa ausência de convecção ou, em outras palavras, um coletor usado no espaço, em satélites artificiais, por exemplo. O primeiro fato a ser notado é a influência de  $Nc$  na eficiência: as eficiências crescem com  $Nc$ . Isto pode ser explicado examinando-se o significado físico desse parâmetro, que é a relação entre as condutâncias de radiação e as de condução. Valores menores de  $Nc$  indicam uma predominância da condução sobre a radiação nas aletas. As aletas com  $Nc$  menores têm, portanto, maior facilidade de conduzir calor que aletas com  $Nc$  maiores, mantidos os demais parâmetros do problema fixados, evidentemente. Maior facilidade de conduzir calor implica em menores variações de temperaturas ao longo das aletas e, conseqüentemente, maiores temperaturas médias do sistema o que resulta em maiores perdas por radiação para coletores com  $Nc$  menores e, portanto, menores eficiências. A figura 4 comprova estas conclusões.

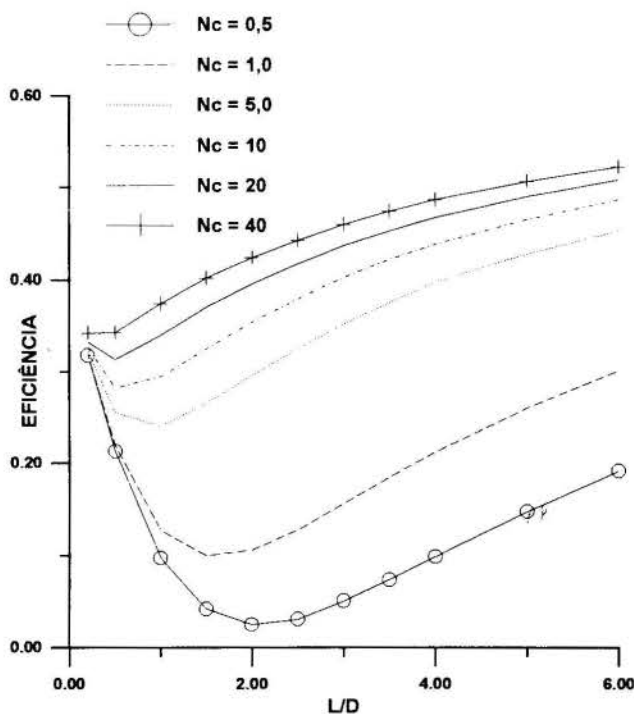


Figura 3 - Eficiência do coletor em função de  $L/D$   
 $H=0,50$ ;  $\epsilon_{s1} = \epsilon_{s2}=0,8$ ;  $\epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 0,2$ ;  $Mc=0$

O segundo fato a ser destacado é o comportamento da eficiência com  $L/D$  para um valor constante de  $Nc$ : à medida que

$L/D$  cresce  $\eta$  diminui até um valor mínimo. Isto se deve ao fato de que a temperatura média não é o único fator que determina as perdas por radiação do sistema. Um aumento de  $L/D$  também ocasiona um incremento nas perdas em consequência do aumento da superfície do coletor. Por outro lado, para um mesmo  $Nc$  um aumento de  $L/D$  resulta numa maior variação de temperaturas ao longo das aletas e em menores temperaturas médias (figura 4). Tem-se, então, dois efeitos concorrentes: simultaneamente um aumento de  $L/D$  tende a aumentar as perdas em consequência do aumento da superfície do aparato, mas tende também a diminuí-las, pois leva a menores temperaturas médias. Para coletores com aletas "curtas" ( $L/D$  menores) predomina o primeiro efeito. A figura 3 mostra que esse efeito predomina até o valor mínimo da eficiência, a partir do qual a diminuição da temperatura média torna-se cada vez mais importante

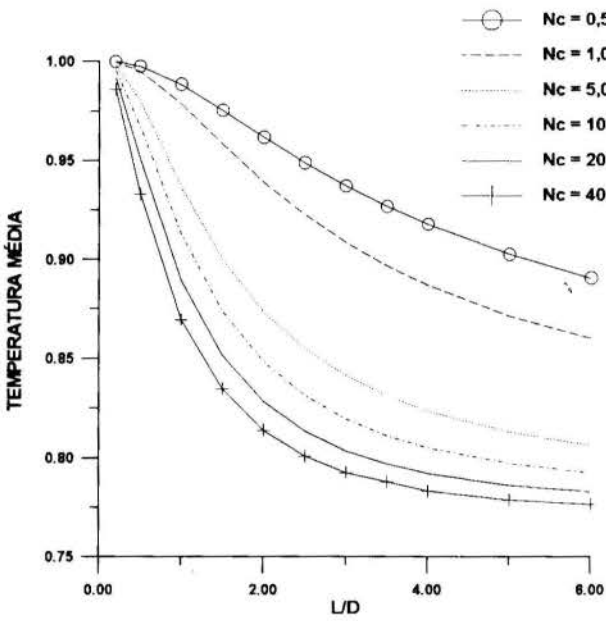


Figura 4 - Temperatura média do coletor  
 $H=0,50$ ;  $\epsilon_{s1} = \epsilon_{s2}=0,8$ ;  $\epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 0,2$ ;  $Mc=0$

Não se deve, entretanto, generalizar o efeito de  $Nc$  descrito anteriormente para todos os valores de  $H$ . As figuras 5 e 6 mostram as eficiências de coletores para um valor  $H$  maior, 2,50, mantidos os demais parâmetros do caso da figura 3. A figura 5 apresenta os resultados para valores de  $Nc$  mais baixos e a eficiência comporta-se de maneira similar à situação com  $H=0,50$ . Porém no caso  $Nc$  maiores (figura 6) a situação inverte-se, aparecendo uma tendência de queda da eficiência a medida que  $Nc$  cresce, tendência esta acentuada com o aumento de  $L/D$ . Isto é consequência da incapacidade das aletas de distribuir mais uniformemente a energia solar incidente e a refletida pelas outras superfícies. Esta incapacidade é causada pela menor condutância de condução comparada com a de radiação. Para níveis de  $H$  mais elevados esta incapacidade faz com que as distribuições de temperaturas com  $Nc$  maiores sejam mais elevadas do que as de  $Nc$  menores. Este efeito é exemplificado na figura 7 na qual são mostradas as distribuições num coletor com  $L/D = 4,0$  para  $Nc = 10$  e  $Nc = 40$  com  $H = 2,50$ . Observa-se que em praticamente toda a extensão da aleta as temperaturas para  $Nc = 40$  são maiores do que para  $Nc = 10$  e que próximo à

raiz da aleta a diferença se acentua. A referida incapacidade de aleta em distribuir a energia provoca um brusco aumento das temperaturas para  $Nc = 40$  próximo da base do coletor. Isto provoca um aumento da temperatura média do coletor e, conseqüentemente, das perdas.

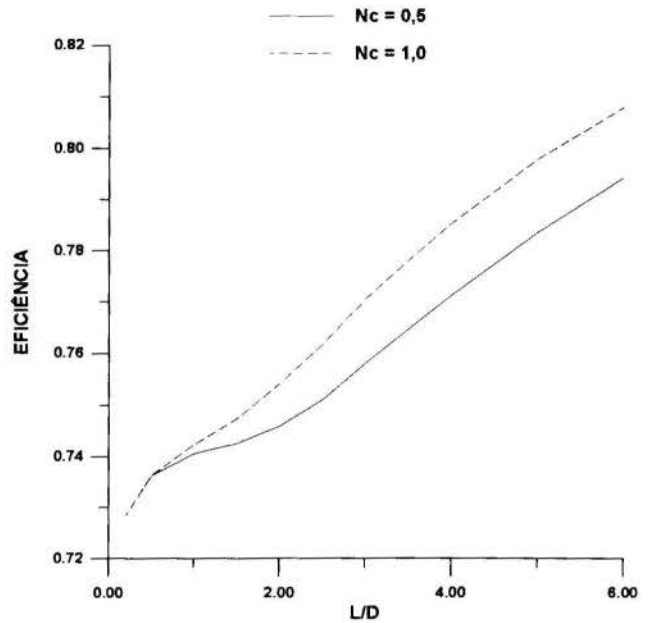


Figura 5 - Eficiência do coletor em função de  $L/D$   
 $H = 2,50$ ;  $\epsilon_{s1} = \epsilon_{s2}=0,8$ ;  $\epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 0,2$ ;  $Mc=0$

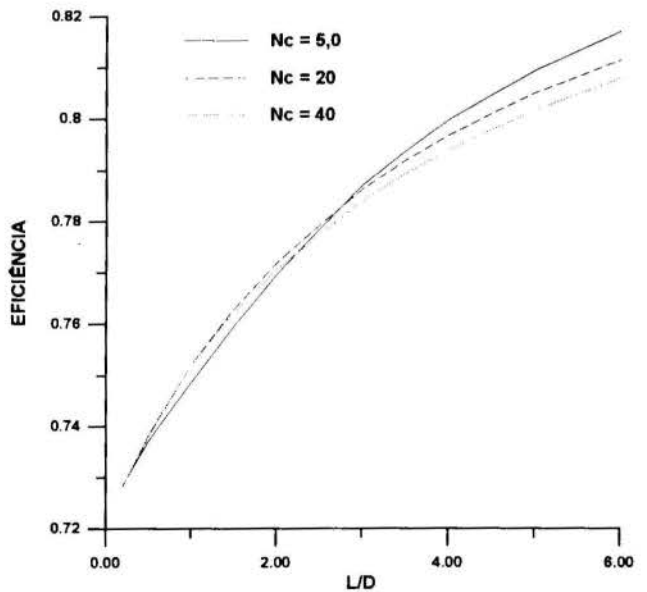


Figura 6 Eficiência do coletor em função de  $L/D$   
 $H=2,50$ ;  $\epsilon_{s1} = \epsilon_{s2}=0,8$ ;  $\epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 0,2$ ;  $Mc=0$

A figura 8 apresenta as eficiências em função de  $L/D$  nos casos dos parâmetros especificados na presença de convecção para o ambiente. Esta figura mostra a influência do parâmetro  $Mc$  no desempenho dos coletores. Nota-se que, apesar dos

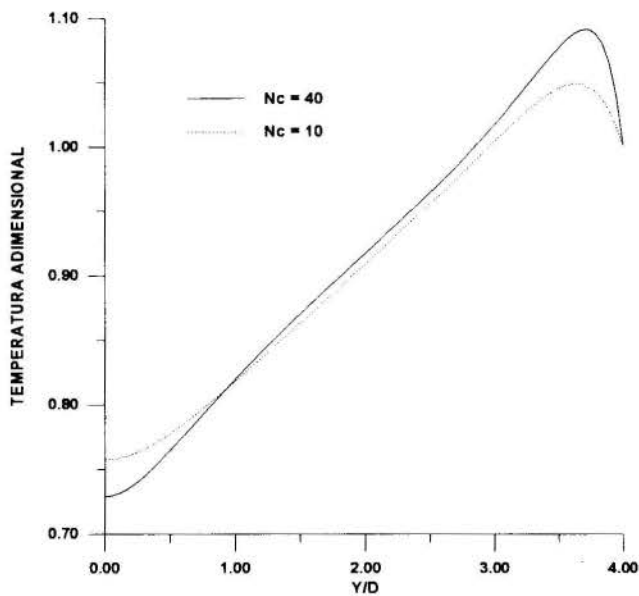


Figura 7 - Distribuição de temperaturas na aleta  
 $H=2,50$ ;  $\epsilon_{s1} = \epsilon_{s2}=0,8$ ;  $\epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 0,2$ ;  $Mc=0$ ;  $L/D = 4,0$

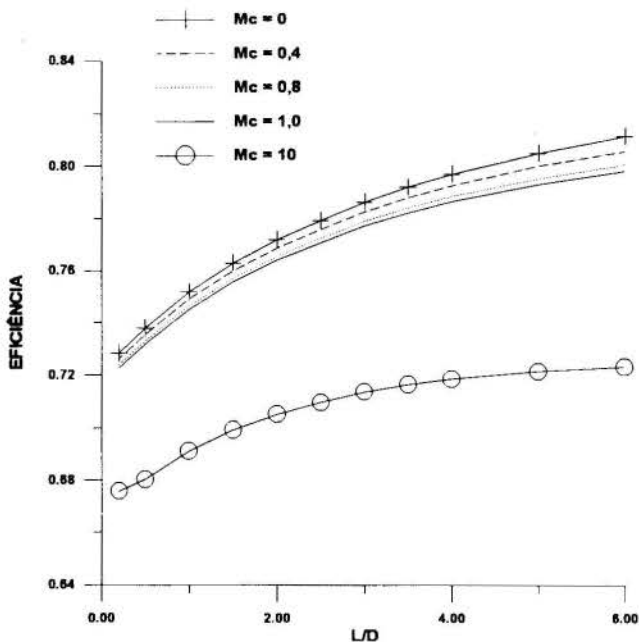


Figura 8- Eficiência do coletor em função de  $L/D$   
 $H=2,50$ ;  $\theta_{\infty}=0,80$ ;  $Nc = 20$ ;  $\epsilon_{s1} = \epsilon_{s2}=0,8$ ;  $\epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 0,2$ ;

efeitos desfavoráveis da convecção, o "efeito cavidade" (aumento de  $\eta$  com  $L/D$ ) ainda pode ocorrer, justificando-se dessa forma a utilização de coletores aletados.

Finalmente, a tabela 1 apresenta uma comparação entre o coletor com absorvedor aletado e o coletor de colméias, analisado por Franca (1983). O exame da tabela mostra que não há uma grande queda na eficiência do sistema se for utilizado o coletor com aletas. Pode ser, pois, compensador do ponto de vista econômico o emprego de aletas em substituição às colméias,

tendo em vista a maior facilidade de construção do absorvedor aletado.

Tabela 1 - comparação entre os coletores de absorvedores aletados e os de colméias

$$Nc = 20; \epsilon_{s1} = \epsilon_{s2} = 0,8; \epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 0,2; Mc = 0$$

Eficiência do coletor com absorvedor aletado				Eficiência do coletor de colméias (Franca, 1983)			
	$L/D$				$L/D$		
$H$	1,00	2,50	5,00	$H$	1,00	2,50	5,00
0,60	0,426	0,496	0,553	0,60	0,412	0,559	0,699
1,80	0,713	0,745	0,783	1,80	0,735	0,801	0,863
2,60	0,753	0,783	0,807	2,60	0,784	0,837	0,888

## CONCLUSÕES

A aplicação do modelo de duas bandas revelou-se proveitosa na análise do desempenho de coletores com absorvedores aletados, pois permitiu um estudo mais realista do problema, possibilitando o tratamento de superfícies seletivas. Os resultados obtidos permitiram a interpretação dos mecanismos que determinam as variações do desempenho do coletor em função dos parâmetros físicos e geométricos dos sistemas. Deve-se ressaltar o importante papel desempenhado pelo acoplamento da radiação e da condução nas aletas. Mostrou-se, ainda, que pode ser vantajosa a utilização de coletores com absorvedores aletados em substituição aos de colméia.

## REFERÊNCIAS

- Buchberg, H. e Edwards, D. K., 1976, "Design Considerations for Solar Collectors with Cylindrical Glass Honeycombs", *Solar Energy*, Vol. 18, pp. 193-204.
- Buchberg, H., Lalude, O. A. e Edwards, D. K., 1971, "Performance Characteristics of Rectangular-Honeycomb Solar Thermal Converters", *Solar Energy*, Vol. 18, pp. 193-221.
- Carnahan, B., Luther, H. A. e Wilkes, J. O., 1969, "Applied Numerical Methods", Wiley, New York.
- Edwards, D. K., Arnold, J. N. e Cotton, I., 1971, "End Clearance Effects on Rectangular-Honeycomb Solar Collectors", *Solar Energy*, Vol. 18, pp. 253-257.
- Hollands, K. G. T., 1965, "Honeycomb Devices in Flat Plate Solar Collectors", *Solar Energy*, Vol. 9, pp. 159-164.
- Hollands, K. G. T., Marshall, K. N. e Wedel, R. K., 1978, "An Approximate Equation for Predicting the Solar Transmittance of Transparent Honeycomb", *Solar Energy*, Vol. 21, pp. 231-236.
- Franca, L. L. C. P., 1983, "Aplicação do Modelo de Duas Bandas na Formulação de um Aparato em Forma de Colméia de Abelha para Absorver Energia Solar", Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, RJ.
- Saboya, S. M., 1987, "Análise Térmica de Coletor Solar com Absorvedor Aletado", Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- Siegel, R. e Howell, J. R., 1972, "Thermal Radiation Heat Transfer", McGraw-Hill, New York.
- Sparrow, E. M. e Cess, R. D., 1978, "Radiation Heat Transfer", Hemisphere, Washington.
- Sparrow, E. M., Bifano, W. J. e Mealy, J. A., 1971, "Efficiencies of Honeycomb Absorbers of Solar Radiation", Nasa-TN D-6337, Washington.

Tien, C. L. e Yuen, W. W., 1975, "Radiation Characteristics of Honeycomb Solar Collector", *Int. Journal of Heat Transfer*, Vol. 18; pp. 1409-1413.

ABSTRACT

*The two band model is applied to thermal analysis of a finned absorber solar collector. The mathematical formulation of the problem leads to a non-linear integro-differential system of equations which is numerically solved. The results obtained show that the finned absorber increases the collector efficiency as consequence of the so-called "cavity effect".*



## DESHIDRATADOR SOLAR: DISEÑO, CONSTRUCCION Y FUNCIONAMIENTO

José Luis Rodríguez, Mario E. Guerrero, Ana María Gimenez, Marcelo Ruiz Palma  
Area Energías Alternativas. Instituto de Mecánica Aplicada. Facultad de Ingeniería.  
Universidad Nacional de San Juan.  
Av. Libertador San Martín 1109 Sur, (5400) - San Juan. Tel.: 211700, int. 320.  
Fax: 064-210277. e-mail: jlrodri @ ima.unsj.edu.ar.

### RESUMEN

*Se plantea el diseño, la construcción y el funcionamiento de un sistema compuesto por colectores solares de aire, y un túnel de bajo costo, por cuyo interior circulan carros, a contracorriente, provistos de bandejas que transportan el producto. Se plantea un balance global energético teniendo en cuenta las características del producto antes y después del secado, la radiación solar y las condiciones del aire correspondientes.*

### OBJETIVOS

El objetivo general de este proyecto fue obtener una unidad de secado de la mayor capacidad posible respecto a una superficie dada de colectores solares, obteniendo un producto de gran calidad al menor costo.

### INTRODUCCIÓN

La conservación de los alimentos en fresco y la infraestructura necesaria para grandes cantidades es compleja y onerosa. Una alternativa válida es el secado solar por su bajo costo y baja demanda de energía y por lo tanto apta para zonas rurales ya que no requiere equipos de alta tecnología.

Con una inversión relativamente baja, este sistema posee varias alternativas interesantes y mejora notablemente la calidad del producto respecto al secado al aire libre. Existen varios sistemas desarrollados aptos para pequeños productores y cooperativas que han dado excelentes resultados. En base a estas premisas se ha desarrollado un sistema de estas características.

Una de las problemáticas de las instalaciones puede ser su costo y la poca utilización anual. Por ello es necesario prever su utilización durante todo el año, para que económica y energéticamente el sistema sea adecuadamente amortizado.

Para realizar esta experiencia se eligió un terreno del INTA (Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria) ya que allí se encuentra una unidad de investigación de la producción de diversos productos frutihortícolas y sus variedades aptas para la deshidratación; se intensifica actualmente el estudio de las especies aromáticas. En la tabla 1 se muestran los productos típicos de la región y el período en que se cosechan.

Ya que la distancia de San Juan al gran centro consumidor que es Buenos Aires es elevada (1200 Km), el traslado en fresco solo es posible en unidades refrigeradas de alto costo. De allí que el secado es una opción más al alcance de los pequeños productores, que de esta manera incrementan el valor agregado de su producción y pueden jugar con los tiempos de la demanda.

Este proyecto se llevó a cabo en virtud de un trabajo conjunto entre el Instituto de Mecánica Aplicada de la Universidad Nacional de San Juan, el Institut für Thermo und Fluid Dynamik de la Ruhr Universitaet Bochum, Alemania y la Estación Experimental del INTA que aporta los productos y su experiencia al respecto.

Tabla 1: Tabla de posibles productos a deshidratar y sus tiempos de cosechas.

Período	Productos
Enero - Marzo	Acelga, pimientos, espinacas.
Febrero - Abril	Uvas, manzanas.
Abril - Mayo	Puerros, aromáticas.
Abril - Agosto	Arvejas, papas, champignon.
Julio - Agosto	Acelga, espinaca.
Agosto - Octubre	Cebolla, puerros.
Noviembre - Diciembre	Damascos, ciruelas, duraznos, ajo, judías verdes.

El sistema se instaló en nuestra región, cuyos parámetros meteorológicos se muestran en la tabla 2.

Tabla 2: Datos de emplazamiento

Emplazamiento	Interpolación		
	Latitud:	31,30 ° Sur	
	Longitud:	68,30 ° Oeste	
Condiciones	Cont. de agua en el aire	Región Árida	Xaire ≤ 0,008 kg/kg
Climáticas	Temperatura del Aire	Verano	Taire med. ≥ 30°C
		Invierno	-5°C ≤ Th ≤ 15°C

### DISEÑO

Se determinó de acuerdo a los resultados de un análisis de expectativas de los medios locales que la capacidad diaria fuera de 100 kg de producto fresco por día, en un sistema modular posible de ser incrementado.

En base a esta premisa se dimensionó la cámara de secado, la superficie colectora y el ventilador.

El diseño de la instalación, representada en la figura 1, consta de: a) Cámara de secado, b) Colectores solares de aire,

c) Carros con sus bandejas, d) Instalaciones Auxiliares.



Figura 1: Esquema de la instalación

#### Referencias gráficas:

- 1 - Colectores Solares
- 2 - Túnel o cámara de secado
- 3 - Entrada a la cámara
- 4 - Ventilador
- 5 - Entrada del aire a los colectores
- 6 - Filtros de aire
- 7 - Sistema de adquisición de datos
- 8 - Computadora
- 9 - Carros

El sistema trabaja con flujo de aire a contracorriente ingresando el aire caliente a la cámara desde los colectores impulsado por el ventilador.

Está prevista su recirculación total o parcial según las condiciones de temperatura y contenido de agua a la salida de la cámara.

#### CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA

El secadero fue construido en terrenos del INTA (San Juan) y su diseño definitivo se adaptó a las dimensiones comerciales de los materiales y de sus costos, de modo tal de racionalizar sus usos y economizar los recursos naturales.

#### CÁMARA DE SECADO

La cámara de secado fue construida en adobe por las excelentes condiciones de inercia térmica, precio y facilidad tecnológica. La base fue realizada en ladrillos acentados sobre un lecho de arena con dos canaletas conformadas con un perfil de chapa para el desplazamiento de los carros.

La cara superior se resolvió con doble techo de cañas con una cámara rellena de vegetal seco como aislante térmico.

Las dos puertas de madera ubicadas en los extremos son de doble contacto.

#### COLECTORES

Se utilizan colectores planos de aire, de alta eficiencia. Son construidos de chapa galvanizada y la placa absorbente pintada con pintura negra selectiva. El vidrio superior es también de alta calidad con bajo contenido en hierro.

#### CARROS Y BANDEJAS

Se determinó que los carros debían cumplir las siguientes

condiciones de diseño:

- Ajustarse a las dimensiones de la cámara y a la capacidad productiva planteada.
- Ser económicos, sencillos y livianos.
- Debían ser aptos para unirse unos con otros conformando una especie de "tren" para facilitar su desplazamiento conjunto.
- Debían ser desarmables y de fácil limpieza.

Sus dimensiones son de (1 x 1 x 1,20) m, divididos en dos partes para portar 8 bandejas de cada lado, alternadas para permitir el paso del aire.

Se construyeron 10 carros con 16 bandejas constituidas estas últimas por un marco de (100 x 50) cm de hierro  $\phi 6$  con tela mosquitera plástica que permite el paso del aire.

#### INSTALACIONES AUXILIARES

Tienen por objeto vincular las distintas partes y aportar los elementos necesarios para el funcionamiento:

- a) Ventilador: Es un ventilador rotativo, centrífugo de 1,5 Hp que puede trabajar en 5 velocidades distintas. Este fue calculado en función del caudal necesario.
- b) Conductos: Los conductos que unen la cámara con los colectores son de chapas galvanizadas aisladas por su parte exterior de 30 cm de diámetro.
- c) Caja de filtros: Se consideró que la inclusión de la caja de filtros era indispensable para prevenir un buen funcionamiento de la instalación y la no contaminación del producto por polvo, pelos de roedores y otras partículas que se pudieran encontrar en suspensión en el aire. Se trata de una caja de (50 x 50 x 70) cm, también de chapa galvanizada con una tapa de acceso para el control y limpieza de los filtros. Consta de 2 sistemas de filtros; el primero de tipo acuoso con una chapa vertical que actúa como deflector y una bandeja de aceite (para retener las partículas pesadas). El segundo filtro consta de una superficie de fieltro dispuesta en zigzag calculada para el caudal de flujo cuya función es la de detener las partículas más finas y livianas.
- d) Centro de toma de datos: Se dispuso en una casilla rodante, aislada térmicamente, un sistema de adquisición de datos y una computadora conectada al mismo que permite procesar los datos recibidos de los sensores. Los sensores se ubicaron en diversos puntos estratégicos del sistema y en un carro testigo que se desplaza en el interior de la cámara. Se tomaron mediciones de temperatura y humedad; con un solarímetro externo se midió la radiación y se tomaron mediciones del peso del producto antes y después del proceso. También se midió la velocidad del aire en distintos puntos en forma manual y en distintas condiciones de trabajo. En este momento se instrumenta una celda de carga en el carro testigo para mediciones de peso instantánea con lo que se obtendrán las curvas características del proceso de secado de los distintos productos para proceder al control automático de la instalación.

#### FUNCIONAMIENTO

- a) Funcionamiento del sistema con el túnel sin carga: Durante 2 meses se ensayó el sistema sin producto alguno, el objetivo fue observar el comportamiento general del aire determinando las pérdidas producidas y el rendimiento térmico del sistema.
- b) Funcionamiento del sistema con carga, con recirculación parcial, total o renovación completa: Se ensayaron diversos productos en las variedades óptimas para ser deshidratadas, por ejemplo: pimientos, ajos, orégano, hongos, zanahorias, verduras

de hojas verdes, aceitunas, damascos, manzanas, uvas, semillas y otros. Se ensayaron diferentes tipos de exposición y distribución del producto en las bandejas, como así también diferentes tipos de cortes y pretratamientos (lavado, dipping oil, anhídrido sulfuroso, etc.), obteniéndose productos de muy buena calidad en las características organolépticas o sea en los aromas, colores, sabores y texturas.

### BALANCE GLOBAL

Careciendo en el momento de la cinética del proceso en nuestras condiciones de trabajo, se comenzó realizando un balance global como procedimiento de cálculo para obtener un dimensionamiento adecuado.

Las experiencias realizadas permiten, posteriormente, verificar las premisas de diseño.

Si tenemos en cuenta que un parral de una hectárea de rendimiento medio bajo puede producir 15.000 kg de uvas por año, secándolo en el período anteriormente mencionado, es posible deshidratar una producción diaria de 100 kg/día.

El módulo construido fue calculado entonces en base a la producción de una hectárea del producto típico sanjuanino; el resto del año se puede usar la instalación para otros productos.

De la capacidad seleccionada de 100 kg de producto fresco por día surge que la cantidad de agua típica a evaporar ( $M_{ag}$ ), teniendo en cuenta las condiciones iniciales y finales del producto será:

$$M_{ag} = \frac{M_p(X_e - X_s)}{(1 - X_s)} \quad (1)$$

$M_{ag}$  = Cantidad de agua a evaporar.

$M_p$  = Masa del producto en base húmeda.

$X_e$  = Cantidad de agua inicial [fracción molar].

$X_s$  = Cantidad de agua final [fracción molar].

Y el flujo másico instantáneo de agua evaporada será:

$$\dot{m}_{ag} = \frac{M_p (X_e - X_s)}{(1 - X_s) \cdot 9 \cdot 3600} \quad (2)$$

Con una cantidad de masa seca  $X_p$  de alrededor del 15 % del producto fresco, da un contenido de agua inicial [base húmeda  $X_e = (1 - X_p)$ ] alrededor de 0,85 kg/kg = 85 kg de agua contenida en los 100 kg de producto fresco; de estos 85 kg no se retiran todos, sino que se deja un resto de agua en el producto deshidratado final de alrededor del 14 %, en 9 horas de radiación solar útil.

$$\dot{m}_{ag} = 0,0026 \text{ kg / s}$$

Se tuvo en cuenta que la temperatura máxima de salida de los colectores no debe nunca superar los 70 °C para evitar deterioros organolépticos en los productos. Recordemos también que la ecuación general de rendimiento es:

$$\eta_c = \frac{\dot{m}_a \cdot C_{pa} (\Delta T)}{I \cdot A} \quad (3)$$

$\eta_c$  = Rendimiento del colector.

$\dot{m}_a$  = Flujo másico de aire.

$C_{pa}$  = Calor específico del aire.

$\Delta T$  = Incremento de temperatura entre la temperatura media del colector y temperatura ambiente.

$I$  = Radiación media.

$A$  = Área colectora.

La temperatura de salida del aire de los colectores estará en función de la temperatura ambiente, de la radiación solar y del rendimiento de los colectores seleccionados por la ecuación:

$$T_{sc} = \frac{\eta_c \cdot I \cdot A}{\dot{m}_{sca} \cdot C_{pa}} + T_{ec} \quad (4)$$

$T_{sc}$  = Temperatura a la salida del colector.

$T_{ec}$  = Temperatura a la entrada del colector.

$\dot{m}_{sca}$  = Flujo másico a la salida del colector.

### CONSUMO ENERGÉTICO Y OPTIMIZACIÓN

Los coeficientes de transporte de calor y materia no son conocidos para el proceso de secado solar por lo que consideramos un producto ideal, significando que el transporte de calor y materia en su interior es constante ya que el objetivo es alcanzar el estado de funcionamiento energético óptimo de la instalación.

Dados estos condicionamientos para el desarrollo del trabajo, se tomaron las siguientes premisas:

- La temperatura inicial del producto es igual a la del ambiente ( $T_h$ ).

$$T_{ep} = T_h \quad (5)$$

- La capacidad calorífica de la cámara es despreciable.
- El secado sucede adiabáticamente o sea sin pérdida de calor en el medio ambiente.
- La potencia mecánica del funcionamiento es baja.
- El producto no es higroscópico.
- El calor en el intercambio de materia se considera ideal.

En el esquema de la figura 2 se utilizan los siguientes parámetros:

- Entrada: (e)
- Recirculación: (r)
- Entrada a colector: (ec)
- Colector: (c)
- Salida de colector: (sc)
- Entrada a secadero: (es)
- Secadero: (s)
- Salida de secadero: (ss)
- Salida del sistema: (ssy)

Bajo estas premisas se calcula el consumo energético con los siguientes términos:

El contenido de Entalpia del vapor de agua es:

$$M_{ag} \cdot \Delta H_v$$

El calor sensible del vapor de agua para elevarlo desde la temperatura ambiente a la temperatura de salida del secadero es:

$$M_{ag} \cdot C_{pv} (T_{ss} - T_h)$$

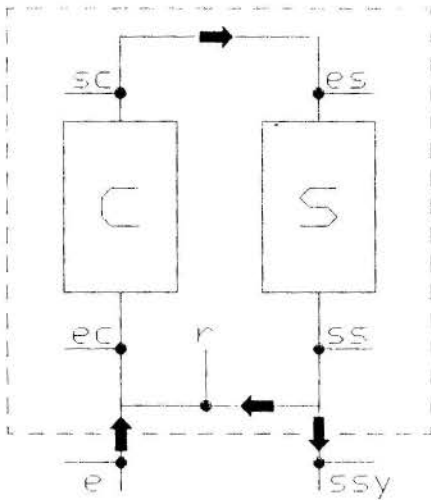


Figura 2: Funcionamiento del sistema

El calor sensible del aire para elevarlo de temperatura ambiente a temperatura de salida de colector es:

$$M_a \cdot C_{pa} (T_{ss} - T_a)$$

Con la cantidad de aire necesaria para secado.

$$M_a = \frac{M_{ag}}{(X_{ss} - X_{es})} \quad (6)$$

Con  $M_a$  se puede obtener el consumo energético (dependiente de la cantidad de agua).

$$q = \Delta H_v + \left( \frac{M_a}{M_{ag}} C_{pa} + C_{pv} \right) (T_{ss} - T_h) \quad (7)$$

$$q = \Delta H_v + \left( \frac{C_{pa}}{(X_{ss} - X_{es})} + C_{pv} \right) (T_{ss} - T_h) \quad (8)$$

Así se puede calcular "q" en función de la temperatura de salida de la cámara y la humedad relativa de la cámara.

#### PARÁMETROS DEL SISTEMA

Temperatura Máxima de Funcionamiento. Nivel de Temperatura en el Colector. a) Temperatura: La temperatura del producto seco no puede superar los 65°C pues la materia se ve afectada en sus características organolépticas; por encima de esas temperaturas disminuye su calidad. Por ello la superficie

total del colector debe ser tal que a su salida el aire no supere los 70 °C.

b) Flujo másico de aire: Se debe considerar el flujo másico de aire en los colectores para una temperatura ambiente máxima de 35 °C = 308 K bajo las siguientes suposiciones:

$$T_{ec} = T_h = 308 \text{ K} \quad \text{Sin recirculación.}$$

$$I = 900 \text{ w/m}^2$$

$$\eta_{e2} = 63 \%$$

$\eta_{e2}$  ha sido seleccionado por medio de un estudio comparativo con otros tipos de colectores y en función de la temperatura, humedad relativa, radiación solar y coeficiente de transmitancia-absortancia, según la gráfica de figura 3, donde  $T_{am}$  es la temperatura media del colector y  $T_h$  es la temperatura ambiente.

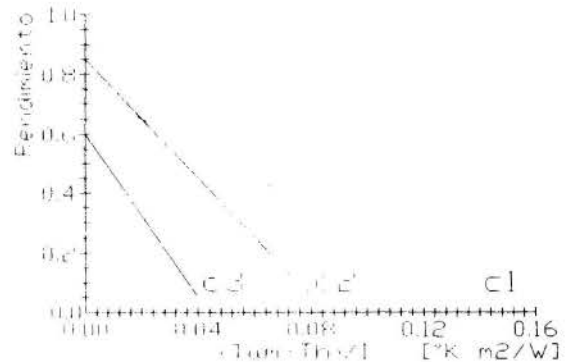


Figura 3: Rendimiento de colectores

#### BALANCE ENERGÉTICO

Se puede calcular el consumo energético de una instalación de secado en función de la cantidad de vapor de agua, la temperatura de funcionamiento apropiada y la humedad relativa en la cámara.

#### PRECISIONES DEL MODELO

- Temperatura de entrada  $T_h = 298 \text{ K}$
- Temperatura de salida del secadero, del aire  $T_{ssa} = 307 \text{ K}$
- Contenido inicial de agua en el aire  $X_{eca} = 0,008 \text{ kg/kg}$
- Humedad relativa a la salida del secadero  $\phi_{ssa} = 65 \%$
- Cont. de agua del aire a la salida  $X_{ssa} = 0,02229 \text{ kg/kg}$
- Flujo másico de agua  $m_{ag} = 0,0026 \text{ kg/s}$
- Producto seco  $m_{ps} = 14 \text{ kg/día}$
- Capacidad calorífica del producto seco  $C_{ps} = 1,2 \text{ kJ/kg K}$
- Nivel de Temperatura  $T_{ssp} - T_{ep} = 35 \text{ K}$
- Flujo másico de aire  $m_a = 0,182 \text{ kg / s}$



$$\dot{m}_a = \frac{\dot{m}_{ag}}{(X_{ssa} - X_{eca})} = \quad (9)$$

$$\dot{m}_a = 0,182 \text{ Kg / seg}$$

$$\dot{q} = \dot{q}_{\text{aire}} + \dot{q}_{\text{vapor}} + \dot{q}_{\text{masa seca}} + \dot{q}_{\text{agua}} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{m}_a \cdot C_{p_a} (T_{ssa} - T_h) + \\ &+ \dot{m}_d (X_{ssa} (\Delta H_{ve} + C_{p_D} \cdot T_{ssa}) - \\ &- X_{eca} (\Delta H_{ve} + C_{p_D} \cdot T_{eca})) + \\ &+ \dot{m}_{ps} M_{sp} \cdot C_{p_{ps}} (T_{esp} - T_h) + \\ &+ \dot{m}_{ep} C_{p_p} (X_{esp} \cdot T_{esp} - X_{exp} \cdot T_h) \quad (11) \end{aligned}$$

Se considera un régimen estacionario por lo tanto el flujo de calor extraído será:

$$\dot{q}_{\text{aire}} = 1,65 \text{ kw}$$

$$\dot{q}_{\text{vapor}} = 6,69 \text{ kw}$$

$$\dot{q}_{\text{masa seca}} = 0,023 \text{ kw}$$

$$\dot{q}_{\text{agua}} = -0,18 \text{ kw}$$

$$\dot{q} = 8,18 \text{ kw}$$

y el consumo de calor diario

$$Q = 9 \cdot \dot{q} \quad (12)$$

$$Q = 73,62 \text{ kw/h/día}$$

Este valor de  $Q$  es usado en el precálculo de los colectores.

## COLECTORES

Un cálculo exacto de la superficie colectora necesaria requiere de una simulación más exacta de la instalación que depende en su demanda energética de una descripción física matemática del consumo y del producto. Esta descripción, debe partir de la base del balance energético y del posible estado de humedad del aire por lo que es necesario hacer un precálculo de

la superficie colectora necesaria.

El sistema de secado es considerado un sistema abierto. Esto significa que el aire ambiente es calentado en los colectores que funcionarán con una temperatura de salida constante a pesar de que depende de la radiación y de las características del colector con un grado de rendimiento de  $47\% < \eta_c < 67\%$ .

El rendimiento es obtenido como función de la radiación dependiente del tiempo diario (la fecha). Para la determinación del rendimiento de utilización diaria se llevó a cabo una integración sobre el día promedio. Como expresión del día solar aparece un día significativo con el valor máximo de radiación de  $900 \text{ w/m}^2$ , la orientación del colector ( $45^\circ \text{ N}$ ) dará la máxima eficiencia. Con el programa TRANSYS se determinó una superficie colectora de  $20 \text{ m}^2$ .

## ESTUDIOS Y EXPERIENCIAS REALIZADAS

Se estudiaron en el laboratorio de Bochum los coeficientes de transporte de calor y materia para el secado de frutos, realizando una simulación del proceso. En San Juan se construyó el prototipo ensayando diversos productos con óptimos resultados.

El secado de la uva, para la elaboración de pasas, es importante y mereció un tratamiento especial.

Debido a una capa de cera llamada pruina que contiene la uva en su superficie externa, el proceso de secado es bastante lento en comparación con otros productos frutihortícolas.

Se experimentó con un pretratamiento denominado "dipping oil", que consiste en sumergir la uva en una solución de oleato de etilo y carbonato de potasio, a  $40^\circ \text{C}$ , no más de tres minutos. Con este procedimiento la velocidad de secado se incrementa aproximadamente un 40%. Esta opción queda a criterio del productor ya que se incrementan los costos de producción y la mano de obra.

Con respecto al método tradicional, extendiendo la uva sobre grava al aire libre, aparte de la pérdida de calidad, se obtuvo un 40% de disminución en el tiempo de secado.

Para mejorar la productividad se coloca un ventilador adicional en la cámara de secado para aumentar la velocidad del aire y llegar al menos al valor mínimo de  $1 \text{ m/s}$ , ya que con la cámara cargada la velocidad se reducía a  $0,4 \text{ m/s}$ .

La duración del proceso de secado depende también en este caso de la época del año en que se realice (función directa de la radiación solar). La vendimia comúnmente comienza en el mes de febrero y termina en abril. Las experiencias realizadas en abril (o sea el mes más desfavorable) sin pretratamiento, demoraron un total de 20 días para el proceso completo.

Posteriormente se realizaron experiencias con otros productos: manzanas, ciruelas, pimientos, etc. con excelentes resultados.

Actualmente y debido a su gran demanda, realizamos ensayos con aromáticas obteniendo en 2 o 3 días productos desecados de gran calidad, ya que las temperaturas del aire no pasaron nunca, en esta época invernal, los  $60^\circ \text{C}$ .

## CONSIDERACIONES ECONOMICAS

El costo de la instalación de este prototipo (colectores e instalaciones auxiliares: ventiladores, conductos, cables, etc.) es de aproximadamente de  $\text{US\$ } 500$  por  $\text{m}^2$  de colectores, con una vida útil de 20 años.

El costo de la cámara, carros y bandejas no es muy elevado ya que para su construcción no se necesita mano de obra especializada y los materiales pueden variar sin la zona.

La amortización de los mismos se disminuye con otros usos

como lo son depósito, transporte y estivaje de productos.

El costo operativo por unidad de producto deshidratado es bajo y similar al del secado tradicional al sol. El costo de energía eléctrica se reduce al consumo del ventilador eléctrico.

### CONCLUSIONES

El sistema respondió perfectamente a las expectativas de diseño en cuanto a la calidad del producto (textura y color muy aceptables) y costo de funcionamiento.

El funcionamiento del equipo es muy sencillo: las regulaciones para recircular el aire, los cambios de velocidad del ventilador y el movimiento de los carros se comprenden y aplican muy fácilmente.

Por su tamaño y costo se adapta a un productor mediano o a varios pequeños productores nucleados, por ejemplo, en una cooperativa. A parte de uva, se deshidratan actualmente otros productos como plantas aromáticas de gran auge en esta zona.

Diversos productores de la zona se acercan a la Estación Experimental del INTA a comprobar el funcionamiento del sistema. La Universidad transfiere continuamente estos proyectos a la comunidad. Esta actividad, conjuntamente con un adecuado seguimiento, es fundamental para el éxito final de un proyecto. Se pudo también comprobar que la participación en esta etapa de personal especializado (extensionistas del INTA y sociólogos) fue de gran importancia.

### REFERENCIAS

Chen, Y.; Morhenne, J. : Ermittlung des optimalen Luftzustandes solarbetriebener Trocknungsanlagen, Proc. 7. Int. Sonnenforum, Frankfurt 1990.

Eissen, W. : Trocknung landwirtschaftlicher Produkte mit Solarenergie, Forschungsbericht T 84-089, Technologische Forschung und Entwicklung - Nichtnukleare Energietechnik, BMFT, Bonn 1984.

Guerrero M., Rodriguez, J., Gimenez, A., Ruiz, M.: Módulo para secado solar. Actas XIII Congreso ASADES, Argentina, 1988.

Guerrero M., Rodriguez, J., Gimenez, A., Ruiz, M.: Módulo deshidratador de productos frutihortícolas con cámara de secado integrada al colector solar. Actas VI SENESE, Chile, 1990.

Kutzbach, H.D.; Mühlbauer, W.; Eissen, W. : Trocknung von Trauben mit Solarenergie in Griechenland, in : Meuren K. (Hrsg.), Nutzung der Sonnenenergie in der Landwirtschaft, Statusbericht Sonnenenergie 1982, Landtechnik Weihenstephan München, 1982.

Morhenne, J., Guerrero, M. Instalaciones de secado solar. Memoria de proyecto y cálculo. Ruhr-Universität Bochum. Universidad Nacional de San Juan. 1993.

Morhenne, J. : Optimierung des Trocknungsprozesses von Tabak hinsichtlich der Nutzungsmöglichkeiten solarer Strahlung, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum. 1987.

### AGRADECIMIENTO

Tec. Agr. A. Gil, Téc. Agrop. R. Moreno.  
INTA San Juan. Pocito. San Juan. Argentina.

Dr. Ing. Joachim Morhenne. U. Bochum, Alemania.

### ABSTRACT

This project presents the design, construction and operation of a system consisting of 20 m<sup>2</sup> of air solar collectors and a tunnel, through which carriages containing the product, move against the flow of air. There is an overall energy balance between the product, solar radiation and air conditions.



## ESTUDO SOLARIMÉTRICO COM BASE NA DEFINIÇÃO DE MÊS PADRÃO E SEQUÊNCIA DE RADIAÇÃO DIÁRIA, COM BASE NA BIBLIOTECA DE MATRIZES DE MARKOV

Guimarães, Ana P. C. - Departamento de Eng. Mecânica UFMG<sup>1</sup>

Pereira, Elizabeth M. D. - Departamento de Engenharia Mecânica / Pontifícia  
Universidade Católica de Minas Gerais - PUC MINAS -  
30535 - 610 - Belo Horizonte - Brasil



### RESUMO

Este trabalho descreve uma metodologia desenvolvida para tratamento estatístico dos dados solarimétricos através de processos que determinam, em um período mínimo de dez anos, meses padrões e seqüências de radiação diária. Estão incluídos também, métodos de estimativa da radiação global, direta e difusa nos planos horizontal e inclinado, introduzindo mudanças na base temporal. A metodologia pode ser utilizada em qualquer região do país, necessitando apenas da informação do número de horas de insolação diário em média mensal da localidade em questão. Uma aplicação do modelo é desenvolvida para o dimensionamento de uma instalação solar fotovoltaica isolada com armazenamento de energia.

### INTRODUÇÃO

O aproveitamento racional da energia solar no sentido de produzir instalações bem dimensionadas só é possível a partir do conhecimento da distribuição espacial e temporal do recurso solar, isto é, da radiação que incide sobre a superfície da Terra na região de interesse.

Historicamente, no campo da meteorologia, pouca importância é dada à precisão e determinação de tal distribuição, pois durante toda a década de 60 e grande parte de 70 a principal finalidade das estações meteorológicas era o fornecimento de informações para o setor agrícola e ainda a monitoração das condições ambientais em zonas urbanas. No que diz respeito à solarimetria apenas eram feitas medidas de horas de brilho solar através dos equipamentos denominados heliógrafos e em algumas poucas estações eram feitas medidas da radiação global através dos actinógrafos, que possuem erros sistemáticos da ordem de 15 a 20% [Lyra et al - 1993]. No final dos anos 70 e meados de 80, com o surgimento de grupos de estudos meteorológicos, pesquisas e projetos em energia solar e, sobretudo, o interesse por parte do setor elétrico, como CEMIG, CHESF e CESP, tornou-se possível a implantação do projeto da Rede Solarimétrica Nacional juntamente com o Centro Nacional de Radiação, desenvolvidos pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INEMET).

Atualmente, existem no Brasil cerca de 162 estações, no entanto, apenas 20 fazem medidas da radiação solar global, sendo que o único dado solarimétrico disponível em todas elas é o número de horas de insolação.

Apesar de todo o esforço realizado nesses últimos 20 anos no âmbito da solarimetria o cenário atual ainda é bastante precário. Os dados não são suficientes para as atividades que visam aproveitar a energia solar, não são processados e publicados e, principalmente, não são dados consolidados. Isto se deve ao custo elevado dos instrumentos instalados, aos problemas operacionais e, especialmente à ausência de uma política sistemática que possa dar continuidade ao programa e

manter o Centro Nacional de Radiação em funcionamento adequado.

Diante de tais fatores, a metodologia proposta estabelece uma contribuição significativa dentro do contexto da utilização da energia solar no Brasil, no sentido de melhorar a qualidade dos dados medidos e ainda estimar aqueles não disponíveis e necessários para o dimensionamento das instalações solares.

### METODOLOGIA

O período pesquisado compreende dez anos de medição ininterrupta (1984 a 1993) do número de horas de insolação e radiação global diária no plano horizontal em Belo Horizonte, MG. Estes dados foram fornecidos pelo INEMET.

É importante ressaltar que os dados experimentais utilizados neste trabalho foram fundamentais para o desenvolvimento e validação da metodologia, devendo ficar sempre claro que para a implementação do modelo apresentado, é suficiente o prévio conhecimento do número de horas de insolação em média mensal da localidade, como está descrito a partir do tópico sobre Estimativa da Radiação Global.

Devido ao procedimento repetitivo de toda a metodologia para cada mês do ano, escolhemos a título de exemplo, o mês de dezembro por ser considerado crítico em Belo Horizonte, já que possui o menor número de horas de insolação em média durante o ano.

### Consolidação dos Dados Solarimétricos

Como as estações meteorológicas nem sempre contam com equipamentos precisos e calibrados, há necessidade da consolidação dos dados medidos, ou seja, da eliminação daqueles considerados duvidosos ou não consistentes. Dessa forma, para os dez anos em questão, estuda-se cada mês separadamente a fim de analisar o comportamento das curvas de radiação solar comparativamente ao número de horas de insolação.

Para tal, a consolidação dos dados é obtida utilizando a combinação das curvas de radiação global e número de horas de

<sup>1</sup> Atual : CEPEL/ COPPE

insolação, desde que estas devem apresentar comportamentos similares, ao longo do período de medição.

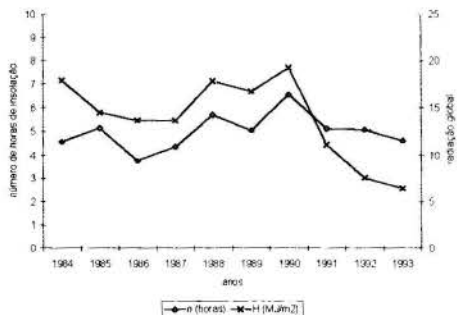


Figura 1 - Número de horas de insolação e radiação global em média mensal medidos em dezembro no período 1984/93 em Belo Horizonte, MG.

Uma análise da figura 1 mostra que nos últimos três anos a radiação global em Belo Horizonte diminuiu consideravelmente. Este comportamento não poderia ser explicado quando confrontado com dados referentes ao número de horas de insolação do mesmo período. Após uma visita à estação meteorológica, onde pudemos comprovar o estado crítico de conservação do piranômetro, que não é calibrado há 4 anos, decidimos pela eliminação dos dados de radiação global dos anos 1991 a 1993 do período em estudo. Enquanto que as medidas do número de horas de insolação se apresentaram consistentes, não sendo necessário a eliminação de nenhum período. Este comportamento apresentou-se semelhante para todos os meses do ano.

#### Estimativa da Radiação Global Diária Média Mensal no Plano Horizontal

Antes de inicializar a análise estatística dos dados solarimétricos é importante que se conheça a radiação global diária média mensal que juntamente com as medidas experimentais do número de horas de insolação, se tornam fundamentais para o desenvolvimento dos itens seguintes da metodologia.

Existem modelos clássicos que vem sendo tradicionalmente utilizados com bastante frequência para estimar a radiação global diária média mensal no plano horizontal a partir da fórmula modificada de Ångström :

$$\frac{\overline{H}}{H_0} = a + b \frac{\overline{n}}{N} \quad (1)$$

onde,  $\overline{H}$  é a radiação global diária média mensal,  $\overline{H}_0$  a radiação extraterrestre diária média mensal,  $\overline{n}$  o número de horas de insolação diário média mensal,  $N$  o número teórico de horas de insolação em média mensal e a e b constantes empíricas que dependem da localidade e da estação do ano.

Após estudo comparativo entre os diversos modelos clássicos, optamos pela formulação proposta por Samuel [1991] que determinou, para as condições climatológicas de Sri Lanka, as constantes empíricas apresentadas nas equações (2) e (3):

$$a = -0,14 + 1,20 \left( \frac{\overline{n}}{N} \right) - 0,82 \left( \frac{\overline{n}}{N} \right)^2 \quad (2)$$

$$b = 1,32 - 2,89 \left( \frac{\overline{n}}{N} \right) + 2,24 \left( \frac{\overline{n}}{N} \right)^2 \quad (3)$$

A figura 2 mostra o gráfico de comparação entre métodos de estimativa da radiação global calculados para Belo Horizonte, destacando Samuel, cujo modelo apresentou erro relativo de 2,9%, enquanto Frere[Samuel, 1991] e Bennett [1965] apresentaram erros cerca de 4,0% e 6,5% respectivamente. Justificando, assim, a utilização do modelo no desenvolvimento do trabalho.

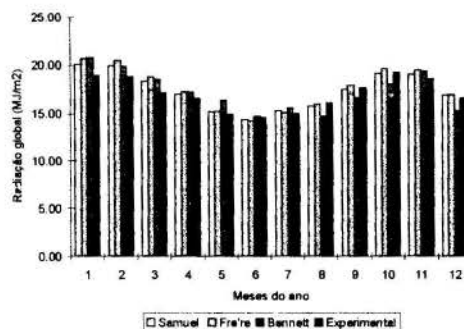


Figura 2 - Comparação entre modelos de estimativa da radiação global diária média mensal no plano horizontal em Belo Horizonte, MG.

#### Tratamento Estatístico dos Dados Solarimétricos

Este tópico apresenta os procedimentos estatísticos que definem, em um período cronológico mínimo de dez anos, meses padrões e seqüências sintéticas de radiação diária, estabelecendo, assim, o ano típico para a localidade em estudo.

Os meses padrões, basicamente, são definidos em função da maior frequência e menor desvio percentual em relação à média do período em análise. A seqüência sintética de radiação diária é obtida baseada em fundamentos de processos estocásticos através da utilização de uma biblioteca das matrizes de transição de Markov, proposta por Aguiar *et al* [1988].

**Meses Padrões.** O procedimento está baseado no modelo desenvolvido por Tavares [1976], que utiliza a concepção de ano padrão e estabelece critérios para sua escolha, tendo como dados de estudo as precipitações ocorridas em Campinas SP, durante um período de dez anos.

De acordo com o modelo, os dados mensais de precipitação são agrupados em períodos trimestrais que correspondem às estações do ano. No presente trabalho, tratamos os dados solarimétricos onde verificamos a necessidade do período de análise ser em uma base temporal menor, já que existem grandes variações em relação aos meses do ano, justificando, assim, sua adaptação para mês padrão.

Entende-se que o mês padrão é aquele em que a distribuição do número de horas de insolação mensal e radiação global mensal de um determinado lugar é semelhante à



distribuição do número de horas de insolação média e radiação global média, obtidos através de vários anos para esse local, sobretudo, levando em consideração a maior frequência em que ocorreram durante o período.

Para exemplificar o desenvolvimento da metodologia, após o agrupamento dos dados, calcula-se a média final referente ao período e desvio percentual de cada ano em relação ao dado médio final obtido, como apresentado na tabela 1.

A tendência inicial seria, de acordo com a tabela 1, considerar como padrão o período cujo desvio mais se aproxima de zero. Entretanto, devido ao próprio conceito de mês padrão, é ainda fundamental calcularmos a frequência na qual os anos ocorrem para aquele determinado período. Diante deste fato, utilizamos o processo estatístico denominado Análise Hierárquica por Pares Recíprocos o qual, através da construção de matrizes de distância, estabelece a junção de dois agrupamentos do período numa certa etapa produzindo um dos agrupamentos da etapa posterior. Em cada etapa procura-se fundir grupos que tenham a menor distância entre si. Para a definição dessa distância entre os grupos utiliza-se o Método da Centróide, pois, dentre as técnicas hierárquicas é considerado o processo mais direto, substituindo cada fusão de objetos em um único ponto representado pelas coordenadas de seu centro. Para a construção das matrizes de distância é necessário definir um coeficiente de similaridade que quantifique a proximidade entre grupos. Seguindo o conceito usual de distância, utilizamos a formulação da distância euclidiana, a saber:

$$d = \left[ (Z_1(84) - Z_1(85))^2 + (Z_2(84) - Z_2(85))^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

onde,  $Z_i(*)$  indica o valor da variável para o ponto em questão.

O final da Análise Hierárquica fornece elementos para a construção do dendrograma ou árvore de ligação, como apresentado na figura 3, sendo possível observar os agrupamentos dos anos considerados, bem como o nível de similaridade em que foram estabelecidos.

Tabela 1 - Número de horas de insolação, radiação global média mensal e desvios percentuais do mês de dezembro, referentes ao período de 1984/93 em Belo Horizonte, MG.

Período	$\bar{n}$ (h)	$\bar{H}$ (MJ/m <sup>2</sup> )	Desvio % $\bar{n}$	Desvio % $\bar{H}$
84	4,55	15,88	-9,58	-5,34
85	5,15	17,21	3,18	2,82
86	3,73	13,66	-33,67	-22,49
87	4,35	15,38	-14,67	-8,74
88	5,69	18,25	12,37	8,35
89	5,04	16,98	1,07	1,51
90	6,55	19,69	23,88	15,03
91	5,12	17,15	2,62	2,47
92	5,07	17,05	1,66	1,88
93	4,61	16,02	-8,16	-4,40
Média	4,99	16,73		

Uma análise da figura 3 mostra que o maior nível de similaridade ou menor distância, ocorre com os agrupamentos 1985/1991 e 1989/1992, atestando o fato de que esses quatro anos têm uma ocorrência mais frequente em dezembro. Dentre eles a opção é 1989, que na tabela 1 se apresentou mais próximo da média, ficando 1992, 1991 e 1985 como opções seguintes, respectivamente.

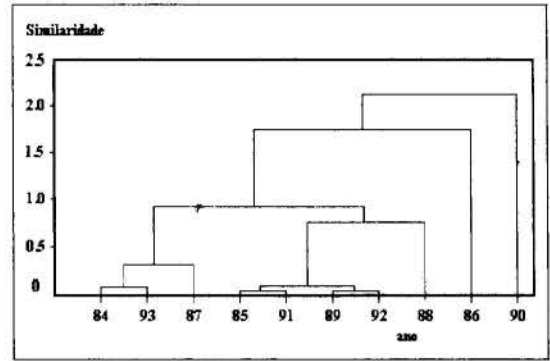


Figura 3 - Árvore de ligação construída a partir das variáveis solarimétricas - número de horas de insolação e radiação global - do mês de dezembro no período 1984/93, em Belo Horizonte, MG.

Seqüência Sintética de Radiação Diária. Quando tratamos do armazenamento da energia solar, torna-se fundamental o conhecimento do número de dias consecutivos em que a insolação é baixa, ou seja, os dias nos quais a energia recebida não é suficiente para suprir a demanda.

Aguiar *et al* desenvolveram um método capaz de gerar seqüências sintéticas de radiação diária utilizando uma biblioteca das matrizes de transição de Markov, de primeira ordem. A proposta foi desenvolvida e validada para Lisboa e em seguida testada nos Estados Unidos obtendo resultados consistentes. Para tal, o dado de entrada necessário é o índice de claridade  $\bar{K}_T$ , definido como a razão entre a radiação global  $\bar{H}$  e a radiação extraterrestre  $\bar{H}_0$ . As 10 matrizes selecionadas da biblioteca de acordo com intervalos preestabelecidos de  $\bar{K}_T$ , são utilizadas na metodologia e testadas para os meses padrões determinados.

Para garantir a qualidade dos resultados é fundamental que as médias mensais do índice de claridade utilizados como dado de entrada sejam suficientemente próximas das médias geradas. Neste trabalho utilizamos  $\bar{K}_T$  obtido a partir dos valores estimados da radiação global diária média mensal, assim:

$$\bar{K}_T \text{ sintético} \cong \bar{K}_T \text{ simulado}$$

A figura 4 estabelece uma comparação entre as curvas da seqüência experimental e seqüência sintética. Nosso objetivo é que a seqüência sintética seja capaz de prever corretamente o número de dias consecutivos de baixa insolação, visto que, os dias nos quais a seqüência ocorre durante o mês não é relevante na comparação.

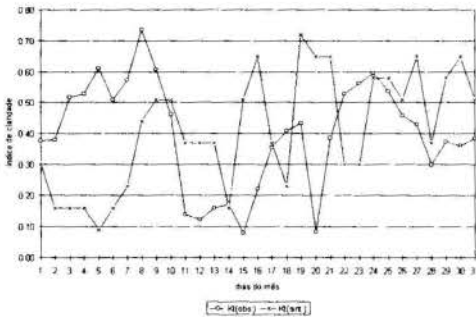


Figura 4 - Sequências sintética e observada do índice de claridade para dezembro padrão em Belo Horizonte, MG.

$$\overline{K_T} \text{ (sintético)} = 0.41$$

$$\overline{K_T} \text{ (simulado)} = 0.41$$

$$\overline{K_T} \text{ (observado)} = 0.42$$

Analisando as curvas para valores baixos do índice de claridade em dezembro, obtém-se:

$K_T < 0,30$  → seqüência experimental : 6 dias consecutivos  
seqüência sintética : 6 dias consecutivos

$K_T < 0,20$  → seqüência experimental : 5 dias consecutivos  
seqüência sintética : 5 dias consecutivos

#### Estimativa das componentes direta e difusa da radiação global nos planos horizontal e inclinado

Para a grande maioria dos projetos solares, os dados estimados no plano horizontal são insuficientes para o dimensionamento das instalações. Além de ser necessário a obtenção da radiação em intervalos de tempo menores, é fundamental estimá-la quando incidente em superfícies inclinadas, ou seja, no plano de abertura do equipamento.

Para isto, existem modelos clássicos disponíveis na literatura que decompõem a radiação global em direta e difusa na base temporal diária média mensal; e em seguida, as componentes são convertidas para a base horária sendo finalmente possível a determinação da radiação global horária em superfícies inclinadas.

Média mensal no plano horizontal A componente difusa é obtida a partir da radiação global  $\overline{H}$  e índice de claridade  $\overline{K_T}$ , utilizando o modelo de Liu e Jordan, dado pela equação 5.

$$\frac{\overline{H_d}}{\overline{H}} = 1,390 - 4,027(\overline{K_T}) + 5,531(\overline{K_T})^2 - 3,108(\overline{K_T})^3 \quad (5)$$

Os modelos clássicos para estimar a radiação difusa foram testados por Pereira [1993] em Januária MG, no período referente a 1990/1993, a partir dos dados medidos na estação meteorológica pertencente à CEMIG. Isto foi feito devido a falta de medidas das componentes da radiação global em Belo Horizonte. A figura 5 mostra o gráfico de colunas para comparação dos resultados.

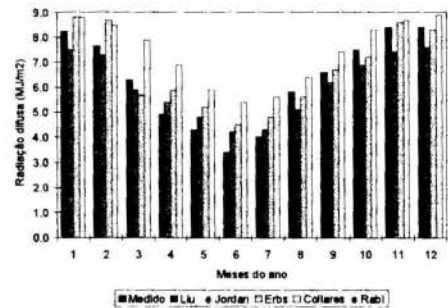


Figura 5 - Modelos de estimativa da radiação difusa diária média mensal no plano horizontal para o período 1990/1993 em Januária, MG

O modelo de Liu e Jordan foi utilizado no trabalho por ter apresentado o menor erro relativo médio - 10,4% - enquanto Erbs e Collares/Rabl apresentaram erros na faixa de 11,3% e 13,3%, respectivamente.

Média horária no plano horizontal. Nesta etapa os modelos utilizados não puderam ser validados, já que não existem no país medidas suficientes de dados na base temporal horária. O critério de escolha baseou-se na indicação feita pela literatura [Duffie e Beckman - 1991], que apresenta dois modelos clássicos: Liu e Jordan, Collares e Rabl, sendo que um estima a componente difusa e outro a radiação global, respectivamente.

Média horária no plano inclinado. Nesta etapa, assim como a anterior, não foi possível a validação do modelo para Belo Horizonte devido a falta de dados medidos, portanto, o critério de escolha também se baseou nas considerações da literatura [Duffie e Beckman].

Os modelos de estimativa da radiação solar em superfícies inclinadas que tratam a componente difusa levando em conta a anisotropia do céu, são considerados os mais precisos. Dentre eles escolhemos, neste trabalho, o modelo de Perez [1990] que apresenta um aumento significativo da radiação global quando comparado aos modelos isotrópicos, cerca de 18% e aproximadamente 8% quando comparado ao modelo HDKR que também considera céu anisotrópico [Duffie e Beckman].

#### APLICAÇÃO DA METODOLOGIA

O objetivo é analisar o dimensionamento de uma instalação solar fotovoltaica isolada, a partir da seqüência sintética de radiação solar diária gerada. Apresentamos um estudo de casos utilizando uma instalação básica dimensionada a partir do mês padrão crítico em Belo Horizonte. De acordo com a seqüência sintética obtida da radiação global, determina-se o balanço energético diário do mês.

Para o dimensionamento de uma instalação fotovoltaica é importante analisar conjuntamente o período crítico de demanda e o período crítico de insolação. No presente trabalho, assumimos a demanda de carga constante no decorrer do ano, e portanto, a análise é feita considerando apenas a questão da variação do potencial solar da região.

Considerando um sistema básico para instalação fotovoltaica isolada, normalmente utilizado para eletrificação rural, temos:

Demanda diária : 372Wh  
Energia Consumida : 437.6Wh

Mês Crítico BH : Dezembro  
Ângulo de inclinação dos painéis : 30°  
Radiação diária média mensal no plano inclinado : 3889 Wh/m<sup>2</sup>  
Potência pico estimada : 1000 W/m<sup>2</sup>  
Potência do módulo (comercial) : 36.72W

$$\text{Radiação horas pico} = \frac{3889 \text{Wh} / \text{m}^2}{1000 \text{W} / \text{m}^2} = 3,9 \text{ horas}$$

$$\text{Número de módulos} = \frac{437,6 \text{Wh}}{(36,72 \text{W})(3,9 \text{h})} = 3,05$$

≅ 3 módulos

Para análise do dimensionamento, determina-se o balanço energético levando em consideração a seqüência sintética de radiação diária gerada para dezembro padrão.

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Acumulo} \\ \text{de Energia} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{Gerada} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{Armazenada} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{Consumida} \end{array} \right]$$

onde, a energia gerada EG é obtida através da expressão :

$$EG = (W \cdot \text{módulo})(n \cdot \text{módulo}) \left( \frac{H_t}{1000 \text{W} / \text{m}^2} \right) \quad (6)$$

e a energia armazenada é denominada de capacidade máxima de armazenamento CA, que é calculada de acordo com o número de dias de autonomia do sistema juntamente com a capacidade da bateria.

A partir dos parâmetros determinados construiu-se o gráfico apresentado na figura 6. Para avaliação do funcionamento da instalação, assume-se em BE1, banco de baterias completamente carregado quando inicia-se o período, e para BE2 leva-se em consideração o descarregamento parcial do banco de baterias no primeiro dia do mês. É importante destacar que estas curvas não ultrapassam a linha constante da capacidade máxima de armazenamento, pois toda energia produzida acima deste limite é dissipada.

No caso BE2, através da análise da figura 6, é possível concluir que a demanda será maior do que a energia elétrica gerada no decorrer do mês, pois a curva do balanço de energia intercepta o eixo das abscissas. Tornam-se, então, necessária mudanças no projeto, seja na quantidade de módulos utilizada ou no número de dias de autonomia do sistema. Isto deve ser analisado com bastante cuidado para cada caso especificamente, considerando sempre a relação custo / benefício.

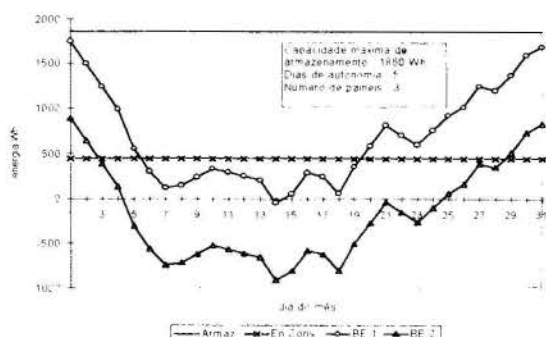


Figura 3.1 - Balanço energético de um sistema fotovoltaico para o mês dezembro padrão, utilizando 5 dias de armazenamento, em Belo Horizonte - MG.

Estas análises, utilizando a metodologia proposta, apresentam no seu conjunto a contribuição mais significativa deste trabalho, considerando que tradicionalmente os dimensionamentos de instalações fotovoltaicas são feitos para o mês de julho devido ao menor valor da radiação global nesta época do ano. Entretanto, deve-se levar em consideração dois fatos fundamentais, o primeiro é a utilização dos dados de radiação solar global no ângulo de inclinação otimizada para cada região, no sentido de aproveitar ao máximo o potencial solar. O segundo é a seqüência de radiação diária a qual indicará o número de dias de autonomia da instalação.

A inclinação dos painéis é estabelecida de forma a favorecer o inverno, exatamente pelo baixo valor da radiação solar, além de proporcionar uniformidade da radiação solar incidente durante o ano.

O número de dias de armazenamento necessário, está diretamente relacionado à seqüência de dias chuvosos que apresenta-se sempre maior durante o verão. Em Belo Horizonte foi estabelecido como crítico o mês de dezembro, por possuir o menor número de horas de insolação em média, apresentando também o maior número de dias consecutivos de baixa insolação, ao contrário dos meses de junho e julho, caracterizados por dias de céu claro e ausência de chuvas.

Quando o dimensionamento é feito considerando-se julho como mês crítico, o valor da capacidade máxima de armazenamento fica superdimensionado, atestando o fato de que normalmente nesta época do ano não ocorre seqüência de dias de baixa insolação, ficando claro que os parâmetros do projeto dimensionado para julho são insuficientes para atender a demanda de energia em dezembro.

## CONCLUSÕES

A consolidação dos dados solarimétricos disponíveis nas estações meteorológicas é bastante importante, já que muitos fatores atuam no sentido de torná-los inconsistentes. No entanto, deve-se levar em consideração que o número de horas de insolação, como mostrado neste estudo, tem-se constituído no dado mais confiável, devido à não necessidade de calibração do equipamento (Heliógrafo Campbell-Stockes) e sua fácil operação.

Para a estimativa dos dados não disponíveis foi possível testar modelos clássicos existentes a partir de medições feitas em Belo Horizonte e Janaína - MG. Em função da reduzida margem de erro apresentada pela formulação de Samuel para o cálculo da radiação global média mensal (cerca

de 3%), conclui-se que o modelo é viável para ser utilizado na região. A componente difusa da radiação solar foi testada para Januária, a partir de modelos também clássicos. Tendo sido constatado que a margem de erro na formulação de Liu e Jordan (cerca de 10,5%) é considerada aceitável, por estar na faixa de precisão do piranômetro. Assim, conclui-se que tal modelo é igualmente viável para ser utilizado na região, embora o período de medição seja de apenas 4 anos.

A determinação de meses padrões estabelecendo um ano típico, conforme desenvolvemos ao longo deste trabalho, mostra-se vantajosa na medida em que evitando trabalhar apenas com médias, trabalha-se também com a frequência. Diante disto, evidencia-se que este procedimento oferece maior confiabilidade das informações solarimétricas.

A aplicação e validação do modelo de geração da seqüência sintética de radiação diária, apresentou resultados coerentes e satisfatórios para todos os meses padrões obtidos em Belo Horizonte, estabelecendo assim, uma grande contribuição no que diz respeito ao dimensionamento dos dispositivos de armazenamento de energia.

Considerando a ineficácia normalmente verificada quanto ao rigor dos métodos utilizados para implantação dos projetos solares, sobretudo aqueles que necessitam de armazenamento de energia, evidencia-se que a aplicação da metodologia aqui proposta permite uma maior otimização para futuras instalações.

Quanto à qualidade do modelo desenvolvido, embora não possamos tirar conclusões definitivas até testarmos para outras localidades do país, a validação para Belo Horizonte, através da verificação dos resultados, permite tirar conclusões positivas sobre seu uso. Desta forma, consideramos que o nosso objetivo geral foi atingido no sentido de obter dados de radiação solar suficientes para dimensionamento de instalações solares, a partir da única medida disponível em todas as estações meteorológicas.

#### **Referências Bibliográficas**

AGUIAR, R.J., COLLARES-PEREIRA, M. and CONDE, J. P. Simple Procedure for Generation Sequences of Daily Radiation Values Using a Library of Markov Transition Matrices. *Solar Energy*, 40 (03): 269 - 279, 1988.

BENDT, P., COLLARES-PEREIRA, M. e RABL, A. The Frequency Distribution of Daily Insolation Values. *Solar Energy*, 27(01): 1 - 5, 1981.

BENNETT, I. Monthly Maps of Mean Daily Insolation for the United States. *Solar Energy*, 9 (145), 1965.

BUSSAD, W.O., MIAZAKI, E.S. and ANDRADE, D. F. Introdução à Análise de Agrupamentos. Associação Brasileira de Estatística - 9º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, São Paulo, 1990.

DUFFIE, J.A., AND BECKMAN, W.A. *Solar Engineering of Thermal Processes*. Wiley - Interscience Publication, 1991.

FRAIDENRAICH, N. e LYRA, F. *Energia Solar: Fundamentos e Tecnologias de Conversão Heliotérmica e Fotovoltaica*. Ed. Universitária da UFPE, 1995.

GALEGOS, H. G. Importância da Solarimetria e Estatística da Radiação Solar. III Curso de Energia Solar - Solarimetria e

Estatística da Radiação Solar - Departamento de Energia Nuclear - UFPE, 1995.

LYRA, F.J.M. Simulação Numérica de uma Central Fotovoltaica Interligada com a Rede de Energia Elétrica. Tese de Mestrado, curso de Mestrado em Ciência e Tecnologia Nuclear, UFPE, Recife, 1992.

LIU, B.H. and JORDAN, R.C. The Interrelationship and Characteristic Distribution of Direct, Diffuse and Total Solar Radiation. *Solar Energy*, 4(3), 1960

Manual de Engenharia para Sistemas Fotovoltaicos. Grupo de Trabalho de Energia Solar Fotovoltaica - GTEF, 1995

NUNES, G. S. *et al.* Estudo da Distribuição de Radiação Solar Incidente sobre o Brasil. *Revista Brasileira de Armazenamento, Viçosa*, 1979.

PEREIRA, E.M.D. Comparação entre Modelos que Estimam a Componente Difusa da Radiação Global a partir de Valores Medidos em Januária, MG. II Encontro Ibero Americano de Solarimetria, UFPE, 1993.

PEREZ, R. *et al.* A New Simplified Version of the Perez Diffuse Irradiance Model for Tilted Surfaces. *Solar Energy*, 39 (03): 221 - 231, 1987.

PEREZ, R. *et al.* The Development and Verification of the Perez Diffuse Radiation Model. Sandia National Laboratories Contractor Report, 1988.

Photovoltaic System Design-Course Manual. Flórida Solar Energy Center, FSEC, 1991

SAMUELL, T.D.M.A. Estimation of Global Radiation for Sri Lanka. *Solar Energy*, 47 (05) : 333 - 337, 1991.

SOARES, J.F. *et al.* Introdução à Estatística. Departamento de Estatística, UFMG, 1989.

TAVARES, J.D. Critérios de Escolha de Anos Padrões para Análise Rítmica. *Geografia*, 1 (01) : 79 - 87, Rio Claro - SP, 1976.

#### **Abstract**

This paper describes a methodology for statistical treatment of solar data, by a process which determine, within a ten year period, the standard month and the daily solar radiation sequence. It is included methods for estimating the global radiation, both in the horizontal and slope plane, introducing changes in the time base. The methodology can be used in any region of the country. The only input information required is the monthly mean of the daily insolation of the interest region. An application of the model is developed for the dimensioning of a solar photovoltaic installation with energy storage.





## CÁLCULO DE LA ENERGÍA SOLAR QUE INCIDE SOBRE CUALQUIER SUPERFICIE

Juan M. Rodríguez Menéndez

Departamento de Termodinámica y Fenómenos de Transporte  
Universidad Simón Bolívar,  
Valle de Sartenejas, Caracas, 1080, Venezuela. Apartado Postal 89000  
Teléfono 58-2-9064130, 9063740, Fax 58-2-938476, 9063743



### SUMARIO

*En este trabajo se estudió y calculó la Irradiación Total que recibe un cuerpo tomando en cuenta la contribución de la Energía Directa y Difusa, cuando éste se encuentra expuesto al Sol, para introducir estos valores en los balances de energía. Específicamente en cuerpos de geometría plana, inclinada o no, cilíndrica con cualquier orientación y esférica, obteniéndose una ecuación genérica, en función del área superficial, donde la geometría sólo influye en el valor de las constantes de la ecuación.*

### INTRODUCCIÓN

Para plantear y resolver los balances de energía donde la Energía Solar tiene influencia, es necesario evaluar este término. La Irradiación Solar que recibe un cuerpo, se divide en los componentes Directo y Difuso y su magnitud depende de la ubicación geográfica, del tiempo (hora del día, época del año y condiciones climáticas) y de la orientación del cuerpo. Para superficies planas la función es sencilla y ha sido tratada por muchos autores, donde algunos de ellos no diferencian las contribuciones Directa y Difusa de la Irradiación. Para superficies no planas, la contribución de la Irradiación Solar varía con la posición, en este trabajo se estudia como calcular el término de Irradiación Solar, tomando en cuenta sus dos componentes, para cualquier forma de la superficie, en específico para placas inclinadas, geometría cilíndrica en cualquier orientación y para geometría esférica.

### CÁLCULO DE LA ENERGÍA SOLAR QUE INCIDE SOBRE CUALQUIER SUPERFICIE

Para resolver los balances de energía donde influye la energía solar, obviamente hay que calcular este valor. Generalmente se disponen de datos de la energía total horizontal ( $G_h$ ) y de la energía directa ( $I$ ) que llegan sobre una superficie horizontal y el valor de la energía difusa horizontal ( $D_h$ ) se calcula según la ecuación (1) (Wieder, 1982).

$$D_h = G_h - I \cos(\theta) \quad (1)$$

Donde el ángulo  $\theta$  llamado ángulo de incidencia, es el formado entre la normal a la superficie y la dirección de los rayos solares. En el apéndice se muestra como calcularlo. Como ejemplo de estos datos, están los obtenidos por Ledanois (1984) para el Valle de Sartenejas usando un Piranómetro (energía total,  $G$ ) y un Pereliómetro (energía directa,  $I$ ). Luego de tener esta data experimental se correlacionan para tener las expresiones correspondientes, entre otras, se puede usar la siguiente (Hay, 1979 y Ma et al., 1983):

$$G = G_{max} \cos^{\lambda} [180(t - n) / n] \quad (2)$$

Donde  $G_{max}$  y  $\lambda$  son los valores a correlacionar,  $t$  es el tiempo del día solar y  $n$  la longitud del día solar. En la tabla 1 se presentan los valores de las constantes correlacionadas en este trabajo, para la energía total horizontal según la ecuación (2), basados en los datos de Ledanois (1984), los que se usarán en los cálculos a realizar en este trabajo.

Tabla 1. Valores de  $G_{max}$  y del exponente  $\lambda$  de la ecuación (2), para la radiación total sobre una superficie horizontal correspondiente al Valle de Sartenejas usando la data experimental de Ledanois (1984).

Mes	$G_{max}$ [W/m <sup>2</sup> ]	$\lambda$	Desviación
Enero	711,9	1,631	0,990
Febrero	776,9	1,651	0,993
Marzo	867,9	1,599	0,997
Abril	825,4	1,622	0,994
Mayo	820,5	1,550	0,998
Junio	630,3	1,251	0,985
Julio	725,3	1,453	0,995
Agosto	756,8	1,407	0,993
Septiembre	826,4	1,611	0,990

De la tabla 1 se puede inferir que el ajuste es bueno. Se intentó correlacionar de igual forma la energía difusa y directa usando la misma data y la misma ecuación. Los resultados se muestran en las tablas 2 y 3. Se nota un buen ajuste, pero de inferior calidad con respecto a la energía total.

Para determinar el calor que recibe por irradiación cualquier superficie, basta con integrar la energía total por el área tal como se plantea en la ecuación (3).

$$Q = \int_A G dA = \int_A D dA + \int_A I \cos(\theta) dA \quad (3)$$

Para una superficie plana horizontal,  $G_h$ ,  $I$  y  $D_h$  son constantes, mientras que para cualquier otra geometría  $G$ ,  $I$  y  $D$  pueden variar para cada diferencial de área. En las próximas secciones se encontrarán esas funciones para cualquier tipo de superficie, específicamente superficies planas no horizontales

(paredes de cualquier edificación), superficies cilíndricas colocadas horizontalmente (tuberías, tanques cilíndricos horizontales), superficies cilíndricas colocadas verticalmente (tanques cilíndricos verticales), superficies esféricas (tanques esféricos).

Tabla 2: Valores de  $D_{max}$  y del exponente  $\lambda_D$  de la ecuación (2), para la radiación difusa sobre una superficie horizontal correspondientes al Valle de Sartenejas usando la data experimental de Ledanois (1984).

Mes	$D_{max}$ [W/m <sup>2</sup> ]	$\lambda_D$	Desviación
Enero	328,4	1,193	0,959
Febrero	339,3	1,006	0,946
Marzo	342,0	1,034	0,952
Abril	324,5	0,929	0,982
Mayo	391,3	1,072	0,984
Junio	386,9	0,906	0,969
Julio	395,6	1,018	0,981
Agosto	519,0	1,088	0,978
Septiembre	389,1	1,003	0,960

Tabla 3. Valores de  $I_{max}$  y del exponente  $\lambda_I$  de la ecuación (2), para la radiación directa sobre una superficie horizontal correspondientes al Valle de Sartenejas usando la data experimental de Ledanois (1984).

Mes	$I_{max}$ [W/m <sup>2</sup> ]	$\lambda_I$	Desviación
Enero	456,0	0,719	0,915
Febrero	451,2	0,703	0,906
Marzo	533,9	0,781	0,991
Abril	510,5	1,107	0,983
Mayo	425,7	0,783	0,969
Junio	239,9	0,455	0,905
Julio	319,7	0,667	0,921
Agosto	234,0	0,785	0,913
Septiembre	419,2	0,746	0,901

### SUPERFICIES INCLINADAS PLANAS

Hasta ahora en la literatura sólo se han desarrollado ecuaciones de incidencia solar total en superficies planas en función de la data experimental, en las cuales existe una sola normal, que es constante en cada diferencial de área para correlacionar los datos experimentales de la energía solar. En el caso de superficies curvas, la normal varía punto a punto, luego, es necesario conocer en cada momento cual es el área involucrada, ya que los datos de radiación solar directa y difusa que se conocen están medidos por unidad de área, y por tanto, para obtener la cantidad de energía total que absorbe cualquier superficie curva se efectúa el análisis correspondiente. Las ecuaciones que relacionan las coordenadas solares y la posición de la placa y las definiciones de los ángulos que forman se muestran en el apéndice.

Para calcular la energía difusa en una superficie inclinada  $D_{incl}$ , en función de la difusa horizontal, se usa la ecuación (Iqbal, 1983):

$$D_{incl} = \frac{1}{2} D_h [1 + \cos(\Delta)] \quad (4)$$

Siendo  $\Delta$  el ángulo formado entre la normal a la superficie y el cenit. Cuando la superficie está orientada horizontalmente  $D_{incl} = D_h$ , mientras que para cualquier otra orientación  $D_{incl} = C_1 \cdot D_h$ , siendo  $C_1$  un factor constante de valor entre 0 y 1. Para determinar la irradiación que reciben estas superficies se procede igual que para las superficies planas horizontales previo cálculo del factor  $C_1$ . Para el cálculo de la irradiación directa  $I$  hay que calcular, como para las superficies horizontales, el ángulo de incidencia  $\theta$  (ver apéndice).

### SUPERFICIES CILÍNDRICAS HORIZONTALES

La cantidad de calor total ( $Q_{rs}$ ) que absorbe cualquier superficie, por ende una superficie cilíndrica dispuesta horizontalmente es:

$$Q_{rs} = \alpha \int \left\{ \frac{1}{2} D_h [1 + \cos(\Delta)] + I \cos(\theta) \right\} dA \quad (5)$$

Donde  $\alpha$  es la absorptividad solar de la superficie y el diferencial de área, para esta geometría, se define como:

$$dA = \frac{1}{2} d_e L d\Delta \quad (6)$$

Donde  $L$  es la longitud del cilindro y  $d_e$  el diámetro exterior del cilindro. Nótese que  $\Delta = 0$  corresponde cuando la normal a la superficie apunta al cenit.

Integrando la contribución de calor por radiación difusa  $Q_d$ :

$$Q_d = \alpha \frac{1}{4} D_h d_e L \int_0^{2\pi} [1 + \cos(\Delta)] d\Delta = \alpha \frac{\pi}{2} D_h d_e L \quad (7)$$

Se puede concluir que siempre para un cilindro horizontal, la contribución de la energía difusa se basa en el área proyectada por la energía difusa para una superficie plana horizontal ( $\pi/2$  del área proyectada,  $d_e L$ ) o como la mitad de la superficie externa del cuerpo.

Para resolver la integral de la contribución de calor por radiación directa que absorbe la superficie  $Q_r$ , debe conocerse la época del año y la hora, luego se deben obtener los límites de integración correspondientes a la superficie iluminada por el sol en cada instante; lo que se conoce es que siempre va a barrer  $180^\circ$ . Para obtener estos límites se calcula el ángulo  $\Delta$  que maximiza  $\cos(\theta)$  el cual indicará el "centro de la iluminación" del sol sobre el cilindro, por simetría  $\pm 90^\circ$  serán los límites de integración. Esto se logra derivando la expresión del  $\cos(\theta)$  (ecuación mostrada en el apéndice) e igualándola a cero.

$$\frac{d[\cos(\theta)]}{d\Delta} = -\cos(z) \sin(\Delta) + \sin(z) \cos(\Delta) \cos(A_z - \Psi) = 0 \quad (8)$$

Despejando  $\Delta$  se obtiene:

$$\Delta_c = \arctan\{\tan(z) \cos(A_z - \Psi)\} \quad (9)$$

Donde  $z$  es el ángulo cenital,  $A_z$  es el ángulo formado entre la proyección de los rayos solares y el sur y  $\Psi$  es el

ángulo formado entre la proyección de la normal sobre la superficie y el plano.

La contribución por radiación directa  $Q_i$  queda expresada de la siguiente manera:

$$Q_i = \frac{1}{2} \alpha I d_e L \int_{\Delta_c - 90^\circ}^{\Delta_c + 90^\circ} [\cos(z) \cos(\Delta) + \text{sen}(z) \text{sen}(\Delta) \cos(A_z - \Psi)] d\Delta \quad (10)$$

Recordando que  $A_z$  y  $z$  para cada instante de tiempo son constantes y  $\Psi$  sólo depende de la orientación del cilindro con respecto al eje Norte-Sur, resolviendo la integral anterior se obtiene:

$$Q_i = \frac{1}{2} \alpha I L d_e \{ \cos(z) [\text{sen}(\Delta_c + 90^\circ) - \text{sen}(\Delta_c - 90^\circ)] - [\text{sen}(z) \cos(\Delta_c + 90^\circ) - (\cos(\Delta_c - 90^\circ)) \cos(A_z - \Psi)] \} \quad (11)$$

Si se define  $F_{ch}$  = Integral del factor de oblicuidad para cilindros horizontales, se puede expresar la ecuación anterior como:

$$Q_i = \alpha \frac{1}{2} F_{ch} d_e L I \quad (12)$$

En la expresión anterior puede verificarse que la oblicuidad con que inciden los rayos solares en una superficie de dimensiones  $L d_e$  para cualquier hora del día dependen de la codeclinación, su ubicación geográfica ( $L' = 90^\circ$  - latitud) y su orientación referente al eje Norte-Sur (ángulo  $\Psi$ ). Como ejemplo se presentan para el Valle de Sartenejas ( $L' = 79^\circ$ ) los valores  $F_{ch}$  en las figuras 1 y 2 variando la codeclinación ( $D'$ ), la orientación ( $\Psi$ ) y la hora solar ( $t$ ).

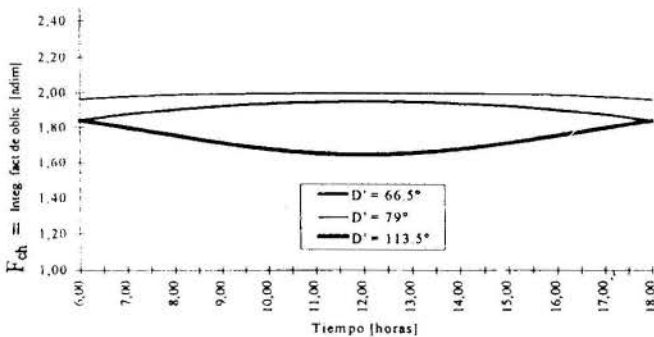


Figura 1. Gráfica comparativa del valor de  $F_{ch}$  para diferentes codeclinaciones, fija la orientación  $\Psi = 90^\circ$  y para la latitud del Valle de Sartenejas, en un cilindro horizontal.

De las figuras se puede apreciar, que la influencia sobre el valor  $F_{ch}$  del ángulo  $\Psi$  es mucho mayor que el que ejerce la codeclinación; que el valor  $F_{ch}$  varía entre 0 y 2; que cuando la codeclinación tiene el mismo ángulo que  $L'$ , el valor de  $F_{ch}$  es máximo; este valor de codeclinación y una orientación del cilindro Este-Oeste, maximiza el valor del factor  $F_{ch}$ . De estas relaciones, para cada ubicación geográfica se puede estudiar el efecto en el calor recibido por el sistema dependiendo de la orientación, hora del día y época del año.

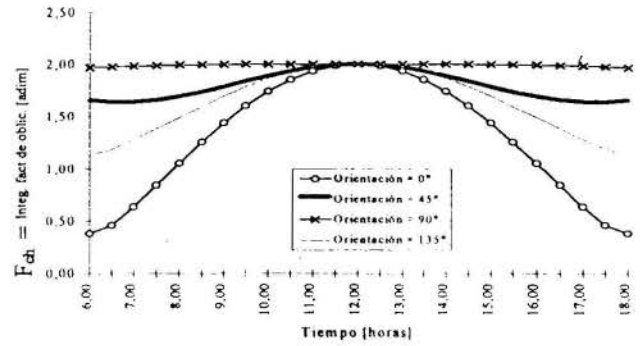


Figura 2. Gráfica comparativa del valor de  $F_{ch}$  para diferentes orientaciones ( $\Psi$ ), fija la codeclinación  $= 79^\circ$  y para la latitud del Valle de Sartenejas, en un cilindro horizontal.

En forma general el calor solar que absorbe un cilindro horizontal se puede expresar de la siguiente forma:

$$Q = Q_d + Q_i = \alpha d_e L \left[ \frac{\pi}{2} D_h + \frac{1}{2} F_{ch} I \right] \quad (13)$$

Con el factor  $F_{ch}$  definido como:

$$F_{ch} = \cos(z) [\text{sen}(\Delta_c + 90^\circ) - \text{sen}(\Delta_c - 90^\circ)] - [\text{sen}(z) \cos(\Delta_c + 90^\circ) - (\cos(\Delta_c - 90^\circ)) \cos(A_z - \Psi)] \quad (14)$$

#### SUPERFICIES CILÍNDRICAS EN POSICIÓN VERTICAL

La cantidad de calor total ( $Q_{rs}$ ) que absorbe una superficie cilíndrica dispuesta verticalmente se puede calcular con la misma expresión que para superficies cilíndricas dispuestas horizontalmente, ecuación (5):

$$Q_{rs} = \alpha \int \left\{ \frac{1}{2} D_h [1 + \cos(\Delta)] + I \cos(\theta) \right\} dA \quad (5)$$

Para el caso de cilindros verticales el valor de  $\Delta$  es constante e igual a  $90^\circ$ , mientras que el ángulo  $\Psi$  es el que varía igual al ángulo que forma el diferencial de área, por lo tanto el diferencial de área para este caso es el siguiente:

$$dA = \frac{1}{2} d_e L d\Psi \quad (15)$$

Integrando la contribución de calor por radiación difusa  $Q_d$ :

$$Q_d = \alpha \frac{1}{4} D_h d_e L \int_0^{2\pi} [1 + \cos(\Delta)] d\Psi = \alpha \frac{\pi}{2} D_h d_e L \quad (16)$$

Se obtiene el mismo resultado que para un cilindro horizontal: la contribución de la energía difusa se basa en el área proyectada por la energía difusa para una superficie plana horizontal ( $\pi/2$  del área proyectada,  $d_e L$ ) o como la mitad de la superficie externa del cuerpo.

Para resolver la integral de la contribución de calor por radiación directa que absorbe la superficie  $Q_i$ , debe conocerse la época del año y la hora, luego se deben obtener los límites de integración correspondientes a la superficie iluminada por el

sol en cada instante; lo que se conoce es que siempre va a barrer 180°. Para obtener estos límites se calcula el ángulo  $\Psi$  que maximiza  $\cos(\theta)$  el cual indicará el "centro de la iluminación" del sol sobre el cilindro, por simetría  $\pm 90^\circ$  serán los límites de integración. Esto se logra derivando la expresión del  $\cos(\theta)$  e igualándola a cero,

$$\frac{d[\cos(\theta)]}{d\Psi} = \sin(z)\sin(\Delta)\sin(A_z - \Psi) = 0 \quad (17)$$

Esto se cumple para  $\Psi_c = A_z$

Calculando la contribución por radiación directa:

$$Q_d = \alpha \frac{1}{2} d_e L I \int [\sin(z)\cos(A_z - \Psi)] d\Psi = \alpha d_e L \sin(z) I \quad (18)$$

En forma general el calor solar que absorbe un cilindro vertical se puede expresar en forma similar al de un cilindro horizontal (ecuación (13)):

$$Q = Q_d + Q_i = \alpha d_e L \left[ \frac{\pi}{2} D_h + \frac{1}{2} F_{cv} I \right] \quad (19)$$

Pero definiendo  $F_{cv}$  = Integral del factor de oblicuidad para cilindros verticales:

$$F_{cv} = 2 \sin(z) \quad (20)$$

El cual oscila de 0 a 2 y sólo es función de la ubicación del cilindro y de la posición del sol. En la figura 3 se muestra el valor de  $F_{cv}$  en función de la codeclinación y de la hora solar.

A medida que la codeclinación se acerca a  $L'$  (en este caso  $79^\circ$ ), el ángulo  $z$  tiende a  $0^\circ$  al mediodía solar, lo que trae como consecuencia que la oblicuidad en esta superficie vertical sea nula a esa hora, por tanto el valor de  $F_{cv}$  tiende a cero.

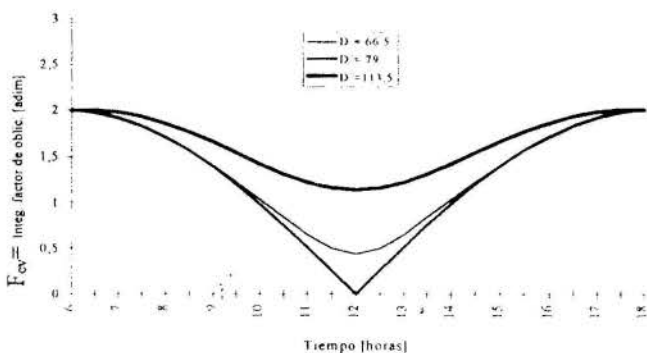


Figura 3. Gráfica comparativa del valor de  $F_{cv}$  para diferentes codeclinaciones, para la latitud del Valle de Sartenejas, en un cilindro vertical.

### SUPERFICIES ESFÉRICAS

La cantidad de calor total ( $Q_{rs}$ ) que absorbe una superficie esférica se puede calcular con la misma expresión utilizada para superficies cilíndricas, ecuación (5),

introduciendo en ella el diferencial de área correspondiente, quedando la ecuación de la siguiente forma:

$$Q_{rs} = \alpha \iint \{D_h[1 + \cos(\Delta)] + I \cos(\theta)\} \frac{1}{4} d_e^2 \sin(\Psi) d\Psi d\Delta \quad (21)$$

Integrando la contribución de calor por radiación difusa, se obtiene:

$$Q_d = \alpha \frac{1}{4} d_e^2 \int_0^\pi \int_0^\pi [1 + \cos(\Delta)] \sin(\Psi) d\Psi d\Delta = \alpha \frac{\pi}{2} d_e^2 D_h \quad (22)$$

La contribución por la radiación directa tiene la siguiente forma:

$$Q_i = \alpha \frac{1}{4} d_e^2 I \iint [\cos(z)\cos(\Delta) + \sin(z)\sin(\Delta)\cos(A_z - \Psi)] \sin(\Psi) d\Psi d\Delta \quad (23)$$

Encontrar los límites en forma genérica de integración para resolver esta integral no es tarea fácil, ya que no existe una relación matemática directa entre  $\Delta$  y  $\Psi$ . Para momentos específicos se pueden encontrar estos límites y efectuar la integral, y luego justificar su generalidad.

Para el caso de una codeclinación  $D' = 90^\circ$ , hora solar 6,00 a.m. y latitud  $11^\circ$  ( $L' = 79^\circ$ ), los límites de integración de los dos ángulos  $\Delta$  y  $\Psi$  están entre 0 y  $\pi$ . La ecuación (23) se resuelve:

$$Q_i = \alpha \frac{1}{4} d_e^2 I \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(\Delta) \sin^2(\Psi) d\Delta d\Psi = \alpha \frac{1}{4} \pi d_e^2 I \quad (24)$$

Siempre el Sol ve, no importa que posición, proyectado en un plano un círculo de diámetro  $d_e$ , y tomando en cuenta lo deducido para coordenadas cilíndricas horizontales, donde no importa la posición del Sol, la integral es siempre la misma, se puede inferir que para coordenadas esféricas la solución de la ecuación (22) siempre será la misma.

En las esferas, tanto la energía difusa como la directa no dependen de la orientación, por lo tanto la cantidad de calor que absorbe una superficie esférica se puede expresar de la siguiente forma:

$$Q_{rs} = \alpha \frac{\pi}{4} d_e^2 [4D_h + I] \quad (25)$$

### COMENTARIOS

Se ha calculado el calor instantáneo que reciben diferentes geometrías tomando en cuenta la energía directa ( $I$ ) y la energía difusa horizontal ( $D_h$ ). Se basó el cálculo en estas dos variables, pues son las que generalmente reportan de manera directa o indirecta, las publicaciones que tratan sobre la magnitud de la energía solar sobre regiones.

En forma genérica se puede expresar que la energía total que absorbe una superficie  $Q_{rs}$  (suponiendo absorptividad,  $\alpha =$  constante) se puede expresar de la siguiente forma:

$$Q_{rs} = \alpha A_{\text{superficial}} (C_1 D_h + f(\theta, z, \Delta, \Psi) I) \quad (26)$$



Donde la constante  $C_1$  y la función  $f(\theta, z, \Delta, \Psi)$ , dependen de cada geometría. En la tabla 4 se presenta el resumen de las geometrías calculadas en este trabajo.

Tabla 4. Valores de los factores de la ecuación (26) para calcular el  $Q_{ts}$  para las geometrías estudiadas en este trabajo.

Geometría	$C_1$	$f(\theta, z, \Delta, \Psi)$	Notas
1) Plana horizontal	1	$\cos(\theta)$	$\theta =$ ángulo de incidencia
2) Plana inclinada	$[1 + \cos(\Delta)]/2$	$\cos(\theta)$	
3) Cilíndrica horizontal	0,5	$F_{ch}/\pi$	Definición ecuación (14)
4) Cilíndrica vertical	0,5	$[2\text{sen}(z)]/\pi$	Cálculo del ángulo $z$
5) Esférica	1	0,25	

Se puede apreciar que tanto  $C_1$  como  $f(\theta, z, \Delta, \Psi)$  varían entre 0 y 1 para cualquier geometría.

En muchos estudios de energía solar, ya sea por simplificación o porque sólo se conoce la energía total ( $G$ ), la expresión para hallar  $Q_{ts}$  que se usa es:

$$Q_{ts} = \alpha \iint_A I \cos(\theta) dA = \alpha A_{\text{superficial}} f(\theta, z, \Delta, \Psi) I \quad (27)$$

Esta integral está también resuelta en la tabla 4, usando sólo la parte de energía directa e igualando la energía directa ( $I$ ) con el valor de energía horizontal total ( $G_h$ ). El error de la aproximación depende del valor de  $D_h$  y de los factores de posición y tiempo.

Estas ecuaciones se introducen en los balances de energía sobre diferentes volúmenes de control para el análisis térmico de los mismos. Como ejemplos de estos estudios, entre otros, se encuentra el cálculo de la temperatura para tuberías vacías (para el estudio de la dilatación de las mismas), con fluido estancado (para cálculo de la temperatura máxima que alcanza el fluido) y fluido circulando; en tanques de almacenamiento, ya sean cilíndricos (verticales u8 horizontales) y esféricos, para el ahorro energético y seguridad, realizados por Rodríguez et al. (1995).

## REFERENCIAS

Hay, J.E., 1979, "Calculation of monthly mean solar radiation for horizontal and inclined surfaces", *Solar Energy* Vol. 23, pp. 301-307.  
 Iqbal, N., 1983, "An introduction to Solar Radiation", Academic Press, Toronto, Canada.  
 Ledanois, J. M., 1984, "Datos experimentales de la Radiación Solar en el Valle de Sartenejas", Caracas, Venezuela.

Ma, C. C. Y. e Iqbal M., 1983, "Statistical comparison of models for estimating solar radiation on inclined surfaces", *Solar Energy*, Pergamon Press, USA, Vol. 31, pp. 313-317.

Rodríguez, J. M. y Ledanois, J. M., 1992, "Predicción de eficiencias de Colectores Solares de geometría no plana. Optimización de variables", *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, Barcelona España, Vol. 2, pp. 1252-1257.

Rodríguez, J. M., Angulo N. y Pérez, A., 1995, "Influencia de la Energía Solar en las Tuberías y Tanques de Almacenamiento", *Actas, II Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica COBEM-CIDIM/95, en C.D.*

Wieder, S., 1982, "An introduction to solar energy for scientist and engineering", John Wiley & Sons, USA.

Yakubov, Y., Umarov, G. y Baybutaev, K., 1972, "Calculations of incident solar radiation on an inclined ribbed surface", *Geliotekhnika*, Vol. 8, N° 4, pp. 60-63.

## ABSTRACT

In this paper the Total Irradiation that a body receives is studied and calculated, taking in count the Direct Energy and Diffuse Energy contributions, when the body is sun exposure, to introduce this values at the energy balances. Specifically, in plane geometry bodies, inclined or not, cylindrical with any orientation and spherical, to obtain a generic equation, in function of the surface area, where the geometry only has influence at the constant values of the equation.

## APÉNDICE: CALCULO DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA $\theta$

En este apéndice se presentan las ecuaciones básicas para calcular los diferentes ángulos usados en el trabajo. Existen varias formas de presentar las relaciones de los ángulos solares, las que se describen a continuación se adaptan bien a los requerimientos del presente trabajo. Primero se definirán los ángulos, para luego indicar las ecuaciones pertinentes.

### Definiciones de los ángulos:

$\theta =$  Incidencia: Ángulo formado por la normal a la superficie y la dirección de los rayos solares.

$z =$  Cenital: Ángulo formado por la dirección de los rayos solares y la vertical (cenit).

$A_z =$  Acimut solar: Ángulo formado por la proyección de los rayos solares en el plano horizontal y el eje Sur-Norte.

$\Delta =$  Inclinación plana: Ángulo formado por la normal a la superficie y la vertical al plano horizontal (cenit)

$\Psi =$  Acimut placa: Ángulo formado por la proyección de la normal a la superficie en el plano horizontal y el eje Sur-Norte.

$L = 90^\circ -$  Latitud: Ángulo formado entre el eje Norte-Sur y la normal a la superficie horizontal.

$D =$  Codeclinación: Ángulo formado entre la dirección de los rayos solares y el Polo Norte. Varía entre  $66,5^\circ$  en el solsticio de verano hemisferio Norte y  $113,5^\circ$  en el solsticio de verano hemisferio Sur.

H = Horario: Ángulo formado entre la proyección de los rayos solares en el plano ecuatorial y el meridiano local.

Estos ángulos se pueden clasificar en tres grupos, el primer grupo lo componen el ángulo cenital  $z$  y el acimut solar  $A_z$  y se refieren a las coordenadas solares para el lugar estudiado; luego aparece el grupo de ángulos correspondientes a la superficie, que lo forman el ángulo de incidencia  $\theta$ , el acimut de la placa  $\psi$  y la inclinación  $\Delta$ ; por último, el tercer grupo corresponde a las coordenadas geocéntricas solares, que lo forman la codeclinación  $D'$ , la latitud  $L$  y el ángulo horario  $H$ . En las figuras A1, A2 y A3 se representan gráficamente los ángulos señalados.

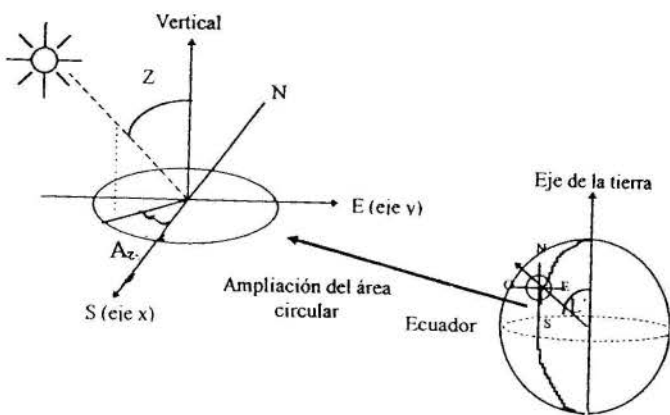


Figura A1. Coordenadas locales solares: ángulo cenital  $z$  y el acimut solar  $A_z$ .

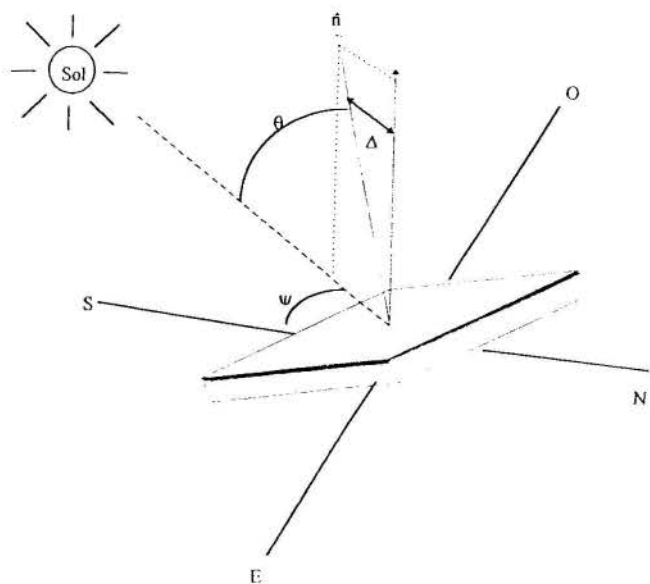


Figura A2. Ángulos de la superficie: ángulo de incidencia  $\theta$ , acimut de la placa  $\psi$  y el ángulo de inclinación  $\Delta$ .

A continuación se presentan las ecuaciones utilizadas en este trabajo que permiten relacionar estos ángulos, con la finalidad de encontrar el ángulo de incidencia  $\theta$  (Wieder, 1982).

$$\cos(\theta) = \cos(z)\cos(\Delta) + \text{sen}(z)\text{sen}(\Delta)\cos(A_z - \Psi) \quad (A1)$$

$$\cos(z) = \cos(D')\cos(L') + \text{sen}(D')\text{sen}(L')\cos(H) \quad (A2)$$

$$\tan(A_z) = \frac{\text{sen}(D')\text{sen}(H)}{\text{sen}(D')\cos(L')\cos(H) - \cos(D')\text{sen}(L')} \quad (A3)$$

$$D' = \arccos[\text{sen}(23,5^\circ)\text{sen}(\frac{360^\circ N_d}{365,25})] \quad (A4)$$

Donde  $N_d$  es el número del día del año.

$$H = \frac{180^\circ(t - n)}{n} \quad (A5)$$

Donde  $t$  es la hora del día y  $n$  es la longitud del día solar.

Existen otras formas de relacionar la posición del sol, localización de la superficie, geometría y orientación, usando otras relaciones. Por ejemplo, Yakubov et al. (1972) definen la orientación de la placa no en base a dos ángulos  $\Delta$  y  $\Psi$ , sino en base a tres ángulos, muy útil cuando se quieren resolver colectores solares de geometría no plana, Rodríguez et al. (1992); otro ejemplo son las diferentes ecuaciones para determinar la codeclinación solar y determinar el ángulo horario, tomando en cuenta la distancia en grados con respecto al meridiano solar, Iqbal (1983). Para cada problema se deben buscar las relaciones que más se adaptan.

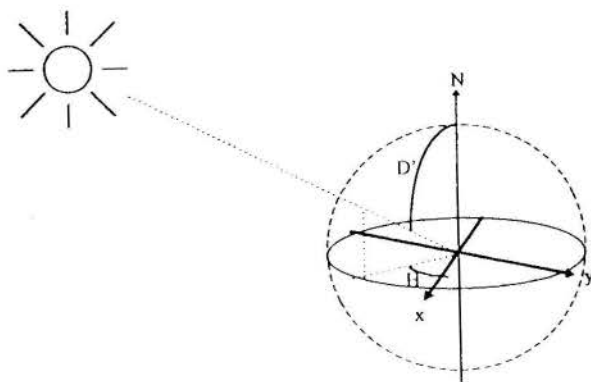


Figura A3. Coordenadas geocéntricas solares: la codeclinación  $D'$  y el ángulo horario  $H$ .



## MEDICIÓN Y MODELIZACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR ULTRAVIOLETA SOBRE ROSARIO, ARGENTINA (PERÍODO 1993-1995)

Rubén D. Piacentini<sup>1</sup>, Orlando M. Alfano<sup>2</sup> y Enrique D. Albizzati<sup>3</sup>

<sup>1</sup> IFIR (CONICET-UNRosario), Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNRosario) y Observatorio Astronómico - 2000 Rosario - Argentina

<sup>2</sup> INTEC (CONICET-UNLitoral) - 3000 - Santa Fe - Argentina

<sup>3</sup> Facultad de Ingeniería Química (UNLitoral) - 3000 Santa Fe - Argentina



### RESUMEN

Se presentan resultados de las mediciones de radiación solar ultravioleta global (300-400 nm) en el plano horizontal realizadas en días de cielo claro en la ciudad de Rosario, Argentina. Los datos se comparan con los obtenidos empleando un modelo teórico verificado previamente por los autores. Para valores intermedios y altos del ángulo cenital solar, se observa un buen acuerdo entre las predicciones del modelo y los datos experimentales. Finalmente, se presentan las relaciones entre la radiación solar ultravioleta y total, y entre las componentes directa y difusa de la radiación solar ultravioleta.

### INTRODUCCIÓN

Las radiaciones solares emitidas en los rangos UV, V e IR, deben atravesar la atmósfera de la tierra antes de llegar a interactuar con su superficie y la biosfera. Diversos componentes reducen las intensidades en diferentes zonas del espectro: gases atmosféricos, vapor de agua, partículas en suspensión y ozono. Además, la transmitancia de la atmósfera en los distintos rangos espectrales, es altamente dependiente del ángulo cenital.

En lo que respecta a la radiación ultravioleta solar, debido a la capacidad de absorción del ozono atmosférico, sólo se reciben radiaciones con intensidad significativa en la región del UVB (300 nm - 320 nm) y en la del UVA (320 - 400 nm). La comprobada disminución del espesor de la capa de ozono en el planeta verificada en los últimos diez años, ha provocado un aumento importante de la radiación UVB, que es la más perjudicial para los seres vivos. Una menor modificación se ha encontrado en la región correspondiente al UVA y a la radiación UV total.

En este trabajo se aplica un modelo para evaluar la radiación solar UV global y sus componentes directa y difusa, sobre una superficie horizontal en días de cielo claro, en la ciudad de Rosario (Argentina). En el cálculo se incluyen expresiones para calcular el espesor de la capa de ozono, teniendo en cuenta los siguientes factores: la latitud del lugar, el mes y el año (para incorporar la reducción global de la capa de ozono en el planeta).

Las predicciones del modelo se comparan con mediciones realizadas de la radiación ultravioleta global para diferentes días y ángulos cenitales solares, durante un período aproximado de tres años (1993-1995). Además, aplicando el modelo teórico, se analizan las relaciones entre las componentes directa y difusa de la radiación solar UV global, y entre la radiación solar UV y total, para diferentes posiciones del sol.

### ECUACIONES DEL MODELO

La evaluación de la radiación solar UV sobre la superficie terrestre en un plano horizontal y en días de cielo claro, se realizó en base al modelo de Bird y Riordan (1986). La irradiancia global espectral sobre una superficie horizontal

( $I_{G,\lambda}$ ), se obtiene considerando la componente directa normal al sol ( $I_{d,\lambda}$ ), el ángulo cenital ( $\theta_z$ ) y la componente difusa ( $I_{s,\lambda}$ ) de la radiación solar:

$$I_{G,\lambda} = I_{d,\lambda} \cos\theta_z + I_{s,\lambda} \quad (1)$$

$$I_{d,\lambda} = H_{o,\lambda} D T_{r,\lambda} T_{a,\lambda} T_{w,\lambda} T_{o,\lambda} T_{u,\lambda} \quad (2)$$

$$I_{s,\lambda} = I_{r,\lambda} + I_{a,\lambda} + I_{g,\lambda} \quad (3)$$

Notar que la irradiancia directa normal sobre la superficie terrestre para una cierta longitud de onda, se calcula a partir de la irradiancia solar extraterrestre ( $H_{o,\lambda}$ ), el factor de corrección por distancia sol-tierra ( $D$ ) y las transmitancias de la atmósfera que incluyen los fenómenos siguientes: "scattering" Rayleigh ( $T_{r,\lambda}$ ), "scattering" y absorción de aerosol ( $T_{a,\lambda}$ ), absorción del ozono ( $T_{o,\lambda}$ ), absorción del vapor de agua ( $T_{w,\lambda}$ ) y absorción de otros gases presentes en la atmósfera ( $T_{u,\lambda}$ ). La absorción del vapor de agua y de otros gases no es significativa en esta región del espectro.

En cambio, la irradiancia difusa terrestre sobre una superficie horizontal, puede evaluarse considerando las tres componentes siguientes: "scattering" Rayleigh ( $I_{r,\lambda}$ ), "scattering" de aerosol ( $I_{a,\lambda}$ ), y reflexiones múltiples entre el suelo y el aire ( $I_{g,\lambda}$ ). Cada una de estas componentes también puede obtenerse considerando la radiación solar extraterrestre y distintas funciones de transmitancia de la atmósfera (de absorción y "scattering").

Realizando una integración en longitudes de onda de las Ecs. (1) a (3), en el rango correspondiente a la radiación ultravioleta (300 nm a 400 nm), se obtiene finalmente:

$$I_G = I_d \cos\theta_z + I_s \quad (4)$$

En este trabajo se introdujeron dos modificaciones al modelo original descrito. En primer lugar se utilizó el modelo de Piacentini (1992) para predecir el espesor de la capa de ozono,

en reemplazo del modelo propuesto por Van Heuklon (1979). El modelo de Piacentini, elaborado en base a datos actualizados aportados por mediciones satelitales, tiene en cuenta la latitud del lugar, el mes del año, y la reducción de la capa de ozono para el año considerado. Este modelo correlaciona datos aportados por los satélites SVUB y Nimbus 7/NASA, y contempla la reducción observada en la capa de ozono en los últimos años. Esta reducción es del 2.66% por década para toda la tierra (Herman, 1991). El modelo de Van Heuklon (1979) considera el efecto de la latitud, la longitud y el día del año, pero no tiene en cuenta la variación temporal del espesor de la capa de ozono.

Se introdujo una segunda modificación al modelo con el fin de corregir el efecto de reducción de la radiación UV solar difusa, provocada por el horizonte del lugar utilizado para las mediciones. Resulta sumamente difícil efectuar mediciones de la radiación solar en lugares donde la componente difusa corresponda a la semiesfera completa del cielo (ángulo de  $2\pi$ ). De allí que se resolvió introducir un factor de corrección para la radiación difusa en función de la altitud promedio del horizonte del lugar.

La irradiancia global sobre una superficie horizontal se obtiene considerando la componente directa normal al sol, el ángulo cenital, la componente difusa de la radiación solar y un factor de corrección debido al horizonte ( $f_H$ ):

$$I_G = I_d \cos\theta_z + f_H I_s \quad (5)$$

A partir de relaciones geométricas conocidas, se obtuvo la expresión de cálculo de este factor de corrección para la radiación difusa como una función de  $\langle\gamma\rangle$ , ángulo promedio entre el plano horizontal y la altura libre sobre el horizonte del lugar (o altitud promedio del horizonte). La expresión geométrica obtenida resulta:

$$f_H = 1 - \sin\langle\gamma\rangle \quad (6)$$

Como se observa en la Ec. (6), este factor de corrección puede ser:  $0 \leq f_H \leq 1$ . Es decir, tomará el valor límite superior unitario para el caso en que la radiación difusa comprenda la semiesfera completa del cielo ( $\langle\gamma\rangle = 0$ ), y el valor límite inferior (cero) en el caso hipotético en que la radiación difusa recibida sea nula.

Finalmente, se debe señalar que para los cálculos efectuados con el modelo se utilizó la irradiancia solar UV extraterrestre, a la distancia media sol-tierra, propuesta por Fröhlich y Wehrli (1981), con valores promediados en un estrecho ancho de banda de 2 nm. Esto permitió obtener un mayor detalle en las predicciones espectrales del modelo, particularmente al analizar el efecto del "scattering" y de la absorción del ozono, para distintos valores de la masa de aire y diferentes estados de la atmósfera.

## MEDICIONES DE RADIACIÓN UV GLOBAL

Las mediciones de la irradiancia solar ultravioleta sobre un plano horizontal se realizaron con el instrumento Blak-Ray® UV-Meter J-221. Este dispositivo fotovoltaico permite medir la radiación ultravioleta solar en el rango de 300-400 nm, y, montado sobre una base móvil, obtener valores en plano horizontal o inclinado y en distintos lugares geográficos. El instrumento portátil utilizado ha sido calibrado con un instrumento Kahl Scientific Model TUVR, en el rango 0-40 W/m<sup>2</sup>.

Se obtuvieron datos experimentales para distintos ángulos cenitales y diferentes días y meses del año, durante un período aproximado de tres años (1993-1995). En todos los casos las determinaciones se realizaron en días de cielo claro, o con escasa presencia de nubes (se consideraron solamente días con un porcentaje de nubes menor o igual al 10%).

De este conjunto completo de mediciones se obtuvieron los valores de irradiancia solar ultravioleta sobre una superficie horizontal, utilizados a lo largo de todo este trabajo.

## RESULTADOS TEÓRICOS Y EXPERIMENTALES

Para la resolución del modelo se ha utilizado un conjunto de parámetros representativos del lugar estudiado, en base a las principales características atmosféricas de la zona y diferentes métodos o correlaciones existentes en la bibliografía.

Considerando para la región una visibilidad característica promedio  $V = 17$  km y el método de cálculo propuesto por Leckner (1978), se ha adoptado una turbidez para una longitud de onda de  $0.5 \mu\text{m}$  ( $\tau_{0.5}$ ) igual a 0.33. El valor del exponente de longitud de onda ( $\alpha$ ) correspondiente a la fórmula de turbidez de Ångström, admite en general una amplia variación de acuerdo a la distribución de tamaños de las partículas de aerosol. En este trabajo se ha adoptado un valor de  $\alpha = 1.2$  (Böer, 1980). En base a la fórmula propuesta por Bird y Riordan (1986) para estimar el albedo de "scattering" simple ( $\omega$ ) y los valores promedios propuestos por Gueymard (1989), se han adoptado:  $\omega_{0.4} = 0.815$  y  $\omega' = 0.095$ . Además, se ha utilizado un valor del factor de asimetría de aerosol ( $\langle\cos\theta\rangle$ ) igual a 0.65 (Bird y Riordan, 1986).

Se realizó el cálculo de la altitud promedio del horizonte y se obtuvo un valor de  $\langle\gamma\rangle = 11.2^\circ$ . Reemplazando este valor en la Ec. (6), el valor del factor de corrección de horizonte ( $f_H$ ) resultó igual a 0.806. Esto significa que la irradiancia difusa en el lugar utilizado para las mediciones, se vio sistemáticamente reducido en aproximadamente un 20%.

Los parámetros utilizados para predecir el espesor de la capa de ozono en función de la latitud del lugar, el mes y el año, han sido extraídos del trabajo citado de Piacentini (1992).

Por último, en la Tabla 1 se presentan algunos parámetros adicionales empleados por el modelo para obtener las predicciones teóricas del punto siguiente. En la segunda columna de la tabla se indica el día característico utilizado para obtener las curvas de cada mes, y en la tercer columna el ángulo cenital mínimo correspondiente a ese día característico y a la ciudad de Rosario, Argentina. Luego se incluye la información sobre el factor de corrección por la distancia sol-tierra, estimado con la fórmula de Spencer. Finalmente se muestra el valor del espesor de la capa de ozono en unidades Dobson para la ciudad de Rosario, obtenido con la fórmula de Piacentini (1992).

Tabla 1: Parámetros y resultados intermedios del modelo.

MES	NÚMERO DE DÍA TÍPICO	ÁNGULO CENITAL MÍNIMO (°)	FACTOR DE CORRECCIÓN SOL-TIERRA	CAPA OZONO (UD) (*)
ENE	17	12.0	1.034	266.8
JUL	198	54.1	0.967	288.1

(\*) calculado para el año 1994.



En la Fig. 1 se incluye la información teórica y experimental completa obtenida en el período 1993-1995, correspondiente a la variación de la irradiancia UV solar con el ángulo cenital, para la ciudad de Rosario (Argentina). El modelo se ha representado solamente para los meses siguientes: (i) enero, con la irradiancia solar más alta (línea continua), y (ii) julio, con la irradiancia solar más baja (línea de puntos). Además, se muestran las predicciones considerando el efecto de reducción por horizonte, y el modelo sin esta corrección.

Se observa una buena concordancia entre los resultados teóricos y experimentales, con estos últimos ubicados en general dentro de la banda definida por la curva límite superior (sin corrección de horizonte) y la curva límite inferior (con corrección de horizonte). Existen algunas mediciones que caen fuera de esta banda, pero que no se apartan significativamente de las predicciones de los modelos mencionados. Para estos

casos, aparte del error asociado a cada medición experimental, se debe tener en cuenta que algunas mediciones fueron realizadas bajo un cielo con un cierto porcentaje de nubes (menor o igual al 10%) y que el modelo ha sido desarrollado para días de cielo claro.

Considerando un ángulo cenital determinado, debe señalarse la reducida diferencia existente entre las predicciones del modelo para los meses de máxima (enero) y mínima (julio) irradiancia anual. La diferencia porcentual máxima observada en las predicciones, es de solamente un 6.8%. Esto revela que, para días de cielo claro con un valor de turbidez característico de la región estudiada, la irradiancia UV solar podría ser representada con una misma curva típica para todo el año. El error que puede cometerse al utilizar esta aproximación, posiblemente caería dentro del error que puede cometerse con una determinación experimental convencional.

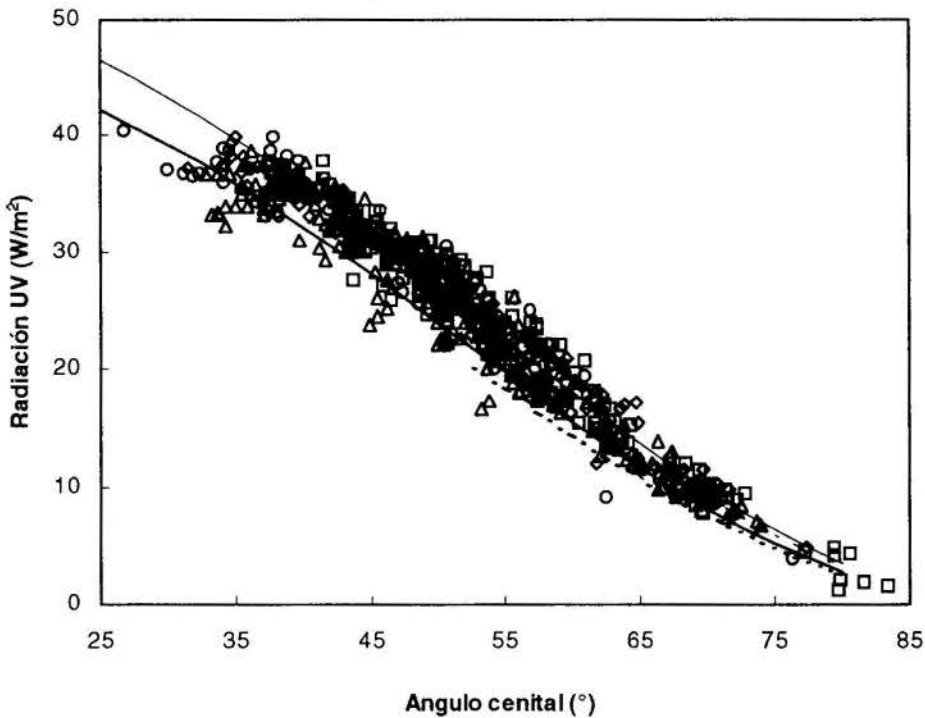


Figura 1 - Radiación solar UV global sobre plano horizontal en función del ángulo cenital solar, en Rosario, Argentina. Datos experimentales: ( $\diamond$ ) 1er. trimestre 1993-95, ( $\square$ ) 2do. trimestre 1993-95, ( $\Delta$ ) 3er. trimestre 1993-95, y ( $\circ$ ) 4to. trimestre 1993-95. Predicciones del modelo sin corrección de horizonte: (—) Enero, (- - - - -) Julio. Predicciones del modelo con corrección de horizonte: (—) Enero, (- - - - -) Julio.

#### COMPONENTES DIRECTA Y DIFUSA DE LA RADIACIÓN

En la Tabla 2 se muestran los valores de la radiación solar global, directa y difusa, en el rango UV y en todo el espectro solar, calculados con el modelo teórico para el día 17 de enero (día típico del mes). Se han considerado valores del ángulo cenital entre  $12.5^\circ$  y  $80^\circ$ .

Los valores máximo y mínimo tabulados de la radiación UV global ( $I_{UV,G}$ ) son  $52.12 W/m^2$  y  $3.49 W/m^2$  mientras que en todo el rango del espectro solar ( $I_{tot,G}$ ) son  $1004.4 W/m^2$  y  $90.3 W/m^2$ , respectivamente.

Notar que los valores de la radiación solar UV directa ( $I_{UV,d}$ ) superan a los de la radiación solar UV difusa ( $I_{UV,s}$ ), para ángulos cenitales bajos. A partir de un ángulo cenital próximo a  $\theta_z = 30^\circ$  la radiación UV difusa es mayor que la directa. Por ejemplo: cuando el ángulo cenital es igual a  $20^\circ$  el cociente entre la radiación UV directa y difusa ( $I_{UV,d} / I_{UV,s}$ ) es de 1.18, para un ángulo de  $60^\circ$  dicha relación es igual a 0.43 y, para ángulos cenitales mayores, se observa un fuerte predominio de la radiación difusa sobre la directa.

Con respecto al cociente entre la radiación solar directa y difusa en todo el rango del espectro ( $I_{tot,d} / I_{tot,s}$ ), a diferencia de

lo que ocurre en el rango UV, es mayor que la unidad para casi todos los ángulos cenitales tabulados. Solo para  $\theta_z \approx 80^\circ$  la radiación solar total difusa supera a la radiación directa.

Finalmente, la relación porcentual entre la radiación solar global UV y total ( $I_{UV,G}/I_{tot,G}$ ), varía aproximadamente entre 4 y 5, disminuyendo gradualmente este valor a medida que aumenta el ángulo cenital.

**Tabla 2:** Componentes directa y difusa de la radiación solar UV y total en función del ángulo cenital.

RAD. SOLAR (W/m <sup>2</sup> )	ÁNGULO CENITAL (°)				
	12.5	20	40	60	80
$I_{UV,G}$	52.12	49.18	35.77	17.92	3.49
$I_{UV,d}$	28.88	26.63	16.80	5.38	0.06
$I_{UV,s}$	23.24	22.55	18.97	12.54	3.43
$I_{tot,G}$	1004.4	959.2	746.4	429.7	90.3
$I_{tot,d}$	810.2	768.9	577.0	302.4	42.8
$I_{tot,s}$	194.2	190.3	169.4	127.3	47.6
$I_{UV,d}/I_{UV,s}$	1.24	1.18	0.89	0.43	0.02
$I_{tot,d}/I_{tot,s}$	4.17	4.04	3.41	2.38	0.90
$I_{UV,G}/I_{tot,G}$ (%)	5.19	5.13	4.79	4.17	3.86

## CONCLUSIONES

Las principales conclusiones obtenidas en este trabajo son:

Se confirma la tendencia por la cual, al aumentar el ángulo cenital solar, se produce una disminución de la irradiancia UV solar como consecuencia de un aumento de la masa de aire relativa.

Se obtiene un buen acuerdo entre las predicciones del modelo y los datos experimentales para el período investigado, si bien en el conjunto de datos que constituyen la "nube" de resultados se registran algunos valores que se desvían del comportamiento general.

Las predicciones de la irradiancia UV global (como cota máxima) y UV global corregida por efecto de horizonte (como cota mínima), definen una banda de resultados teóricos posibles. En general, los valores experimentales obtenidos caen dentro de la región comprendida por estas dos curvas límites.

Existe una diferencia poco significativa entre las predicciones del modelo que corresponden a un mismo ángulo cenital, aún considerando diferentes días o meses del año. La máxima diferencia observada se produce entre los meses de enero (radiación máxima) y julio (radiación mínima), alcanzando un valor aproximado del 6.8%.

Para días de cielo claro y para una turbidez característica de la localidad estudiada, la irradiancia UV solar global podría ser representada con una única curva anual en función del ángulo cenital. El error que puede cometerse al utilizar esta aproximación, caería probablemente dentro del error experimental de las mediciones o dentro de la incertidumbre con la cual es posible conocer los parámetros del modelo teórico aplicado.

A partir de las predicciones del modelo para días de cielo claro, se observa que la radiación difusa UV predomina sobre la

radiación directa cuando el ángulo cenital es superior a aproximadamente  $30^\circ$ . Este comportamiento difiere del correspondiente a las componentes difusa y directa en todo el espectro solar, donde predomina esta última en casi todo el rango de ángulos cenitales.

Se verifica que la radiación solar UV global constituye aproximadamente un 4-5% de la radiación solar total global, reduciéndose gradualmente este porcentaje a medida que crece el ángulo cenital.

**Agradecimientos:** Los autores agradecen la colaboración de las siguientes Instituciones: CONICET, Universidad Nacional del Litoral (Programación C.A.I.+D. 93-94 N° 174), Universidad Nacional de Rosario y Fundación Pablo Cassará, por sus contribuciones al presente trabajo de investigación.

## REFERENCIAS

- Bird, R.E. and C. Riordan, 1986, "Simple Solar Spectral Model for Direct and Diffuse Irradiance on Horizontal and Tilted Planes at the Earth's Surface for Cloudless Atmospheres", *J. Climate Appl. Meteor.*, Vol. 25, pp. 87-97.
- Böer, K.W., 1980, "The Terrestrial Solar Spectrum", in *Solar Energy Technology Handbook*, Dickinson W.C. and P.N. Cheremisinoff (eds), Marcel Dekker, New York, Part A: Engineering Fundamentals, Chapter 4, pp. 65-87.
- Fröhlich, C. and C. Wehrli, 1981, "Spectral Distribution of Solar Irradiance from 25000 nm to 250 nm", World Radiation Center, Davos, Switzerland.
- Gueymard C., 1989, "A Two-Band Model for the Calculation of Clear Sky Solar Irradiance, Illuminance, and Photosynthetically Active Radiation at the Earth's Surface", *Solar Energy* Vol. 43, pp. 253-265.
- Herman, J.R., R. McPeters and R. Stolarski, 1991, "Global Average Ozone Change from November 1978 to May 1990", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 96, pp. 17297.
- Leckner, B., 1978, "The Spectral Distribution of Solar Radiation at the Earth's Surface-Elements of a Model", *Solar Energy* Vol. 20, pp. 143-150.
- Piacentini, R.D., 1992, "Comportamiento Espacio-Temporal de la Capa de Ozono para Latitudes Bajas e Intermedias ( $50^\circ$  N,  $50^\circ$  S)", Congreso de la Asociación de Geofísicos y Geodestas, Buenos Aires, Argentina.
- Van Heuklon, T.K., 1979, "Estimating Atmospheric Ozone for Solar Radiation Models", *Solar Energy*, Vol. 22, pp. 63-68.

## ABSTRACT

*Measurements of global ultraviolet solar radiation (300-400 nm) on horizontal planes for cloudless sky days at Rosario, Argentina, are presented. Data are compared with those obtained with a theoretical model previously verified by the authors. For intermediate and high solar zenith angles a good agreement between model predictions and experimental data are observed. Finally, computed ratios of ultraviolet to total solar radiation and of direct to diffuse ultraviolet solar radiation are reported.*



## ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE UNA LAGUNA SOLAR. OPTIMIZACIÓN DEL CALOR RETIRADO.



**Ernesto Francisco G. y Juan M. Rodríguez M.**  
Departamento de Termodinámica y Fenómenos de Transporte,  
Universidad Simón Bolívar, Valle de Sartenejas,  
Apartado Postal 89000, Caracas 1080, Venezuela.  
Fax 58-2-938476, 9063743.

### SUMARIO

*En este trabajo se realizó un estudio de las lagunas solares, resolviendo las ecuaciones que describen su comportamiento por métodos numéricos, con el fin de analizar diferentes factores que afectan dicho sistema y lograr aportar ideas para su mejor uso. Se concluyó que el límite energético de la laguna, es decir, la cantidad máxima de calor que puede extraerse de la laguna sin llegar en ningún momento a la temperatura ambiente se encuentra alrededor del 18% y que la forma (cantidad y tiempo) de extraer el calor del fondo de la laguna repercute en la eficiencia de la laguna y en la calidad de esta energía obtenida (temperatura de la fuente energética).*

### INTRODUCCIÓN

Las llamadas Lagunas Solares, cumplen la función de almacenar energía gratuita, Energía Solar, debido al gradiente inverso de temperatura que poseen (es decir, más caliente en el fondo y más frío en la superficie), producto de un gradiente de concentración salina en el agua que la conforma. Si se logra conocer mejor su comportamiento, esto ayudaría a utilizarlas de forma más eficiente.

En este trabajo se hace un estudio de las lagunas solares, resolviendo las ecuaciones que describen su comportamiento por métodos numéricos, con el fin de analizar diferentes factores que afectan dicho sistema y lograr aportar ideas para su mejor uso. Para el logro de este objetivo, primero se definirán las características de dichas lagunas, luego se resolverán las ecuaciones que rigen su comportamiento térmico y salino, y finalmente se analizarán diferentes variables que afectan el perfil de temperatura y la energía acumulada en las lagunas solares.

### DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE LAS LAGUNAS SOLARES

Una laguna solar es un lago capaz de capturar y almacenar energía solar, mediante el calentamiento del fluido que la conforma. Consta de un estanque, en el cual existe un gradiente inverso de concentración de una sal (llamado también haloclina). Cuando la radiación solar llega a la superficie de la laguna, una parte de ella se refleja, otra porción se absorbe y el resto pasa hacia el fondo. En su camino al fondo, una fracción de esta radiación es absorbida por la masa de agua que consigue a su paso. Una vez en el fondo, la cantidad de radiación que llega al mismo se absorbe en su totalidad, produciendo un aumento en la temperatura de la masa de agua más profunda. De esta manera, el fluido del fondo se calienta pero no puede ascender, ya que su densidad sigue siendo mayor que la del fluido de las capas superiores debido a su salinidad, quedando así aislado de la superficie por la masa de agua que se encuentra sobre él.

Como consecuencia, las pérdidas de energía en el fluido del fondo se reducen a la conducción que ocurre tanto hacia las capas superiores como a través del fondo de la laguna. Así, se produce un efecto neto de acumulación, ya que la radiación solar que llega es mayor que las pérdidas caloríficas combinadas, lo cual resulta en el aumento de la temperatura. La temperatura en cada punto de la laguna dependerá de la radiación absorbida, de la conducción hacia otros puntos y de los efectos convectivos, en el caso de la superficie. Debido a estos efectos se crea un gradiente inverso de temperatura, llamado también termoclina.

El fenómeno de la Laguna Solar se presenta tanto de manera natural como artificial. Un ejemplo de laguna solar natural es el Lago Medve, en Transilvania, el cual alcanza en verano una temperatura de unos 70 °C a una profundidad de 1,3 m (Tabor et al., 1965). Por otro lado, uno de los más importantes lagos artificiales se encuentra en la localidad de Ein Bokek (Israel), en donde una laguna de unos 7.500 m<sup>2</sup> de superficie es capaz de producir 5 MW de energía eléctrica que se introducen a la red de distribución local (Subhahar et al., 1993).

Una laguna solar está dividida en tres zonas, tal como se muestra en la figura 1:

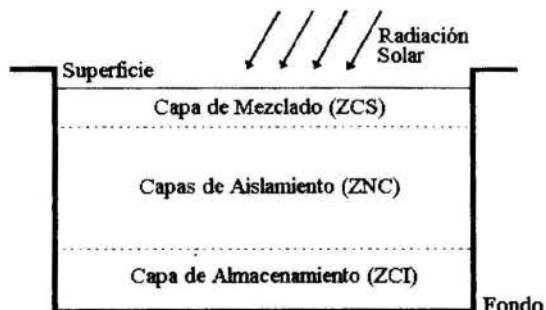


Figura 1. Esquema de una Laguna Solar.

Zona Convectiva Superior (ZCS): Llamada también capa de mezclado, es la parte superficial de la laguna. En ella, se realiza el intercambio de energía por convección con el medio

ambiente. Es la que posee menor concentración de sal. Incluso, algunas veces por facilidad, se utiliza agua pura para esta capa.

Zona no Convectiva (ZNC): También denominada capa de aislamiento, está compuesta por las sub-capas intermedias de la laguna. En ellas, el intercambio tanto de energía como de masa es por conducción. La concentración de dichas sub-capas aumenta con la profundidad. Además, es la zona de mayor espesor.

Zona Convectiva Inferior (ZCI): Conocida también como zona de almacenamiento, es la capa que toca el fondo. En ella, se alcanza la temperatura más alta de la laguna. Además, es la de mayor concentración salina. Es la capa de la que se extrae la energía.

### ECUACIONES QUE RIGEN EL COMPORTAMIENTO DE UNA LAGUNA SOLAR

Para modelar una laguna solar, hay que resolver los balances de masa y energía de la misma. Se tomará unidireccional (dirección z, desde la superficie hacia el fondo) tanto para el perfil de concentración S, como para el perfil de temperatura T.

Perfil salino: partiendo de la ecuación de balance de masa, o ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas, queda:

$$K_s \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (1)$$

Para llegar a esta ecuación se supuso que el movimiento del fluido es despreciable, lo cual es el fundamento de estas lagunas. Además, se tiene que conocer el perfil de concentración inicial para resolver el problema.

Balance de energía: Para calcular el perfil de temperatura en la laguna se deben resolver los balances de energía para cada una de las zonas antes especificadas, pues las contribuciones energéticas son diferentes.

Zona Convectiva Superior, ZCS:

$$\left( \text{Acumulación de energía en la ZCS} \right) = \left( \text{Radiación absorbida en la ZCS} \right) + \left( \text{Conducción de las capas adyacentes} \right) - \left( \text{Calor cedido al ambiente} \right) \quad (2)$$

Realizando las operaciones pertinentes, se expresa esta ecuación como:

$$\frac{\partial T_{\text{sup}}}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p \Delta z} \left( I_s f + K \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z_{\text{sup}}} - U_{\text{sup}} (T_{\text{sup}} - T_{\text{amb}}) \right) \quad (3)$$

Zona No Convectiva, ZNC:

$$\left( \text{Acumulación de energía por subcapa en la ZNC} \right) = \left( \text{Radiación que penetra y se absorbe en la subcapa} \right) + \left( \text{Conducción hacia las capas adyacentes} \right) \quad (4)$$

Sustituyendo cada término y despejando, la ecuación queda como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p} \left( \frac{I_s f'}{\Delta z} + K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right) \quad (5)$$

Zona Convectiva Inferior, ZCI:

$$\left( \text{Acumulación de energía en la ZCI} \right) = \left( \text{Radiación absorbida en la ZCI} \right) - \left( \text{Conducción a las capas adyacentes} \right) - \left( \text{Calor cedido al ambiente} \right) - \left( \text{Calor retirado por el proceso} \right) \quad (6)$$

Expresando esta ecuación como:

$$\frac{\partial T_{\text{inf}}}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p \Delta z} \left( I_s f'' - K \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=z_i} - U_{\text{inf}} (T_{\text{inf}} - T_{\text{amb}}) - Q_{\text{retirado}} \right) \quad (7)$$

Los términos  $I_s f$  engloban a dos componentes: el término  $I_s$ , que representa la cantidad de energía por radiación que llega a cada capa, y el término  $f$  que equivale a la fracción de esa energía que se queda en la capa. Ambos términos se pueden expresar conjuntamente y se definen como (Hawladar et al., 1981; Constán et al., 1985):

$$I_s f = (1-a) G(t) [1 - (1-F)] \exp[-\mu (z_{\text{sup}} - \delta) \sec \theta_R] \quad (8)$$

$$I_s f' = (1-a) G(t) \{ (1-F) \exp[-\mu (\Delta z - \delta) \sec \theta_R] + \mu \sec \theta_R \} \quad (9)$$

$$I_s f'' = (1-a) G(t) (1-F) \exp[-\mu (z_{\text{inf}} - \delta) \sec \theta_R] \quad (10)$$

Donde  $a$  se denomina albedo y vale:

$$a = 0,02 \exp(0,02 \theta_z) \quad (11)$$

En la cual,  $\theta_z$  es el ángulo cenital. En las ecuaciones (8) a la (10),  $\theta_R$  se denomina ángulo refractado de la radiación (en radianes) y se calcula a partir de:

$$\sin(\theta_R) = \sin(\theta)/n \quad (12)$$

### SIMULACIÓN DE LA LAGUNA

Para la resolución de las ecuaciones que resultan tanto del balance de masa como de energía del sistema, se decidió utilizar el método numérico de diferencias finitas, debido a su sencillez a la hora de programar, a que proporciona una exactitud adecuada y no presenta problemas de estabilidad en los rangos de valores en que se trabaja. Este método se basa en la aproximación de los valores de las derivadas que aparecen en la ecuación por una "diferencia finita", las cuales pueden ser de tres tipos: de avance, centrales o de retroceso (Dahlquist et al., 1974), según el tipo de datos que se utilicen. Las diferencias que se usarán para la resolución, son de la forma que se muestra en la tabla 1. Luego de sustituir estos valores convenientemente en las ecuaciones, fijando los pasos o intervalos de incremento, se despejan los valores requeridos de las variables estudiadas, basados en el valor de estas variables en el paso anterior.

Si se aplica el método de diferencia finita al perfil de concentración, se emplea la diferencia de avance para el valor  $dS/dt$ , mientras que para los valores de segunda derivada  $d^2S/dz^2$ , es necesario aplicar diferencia de avance en el caso de



ZCS, diferencia central para la ZNC y diferencia de retroceso para la ZCI, despreciando el término de error.

Por otra parte, para el perfil de temperatura (y despreciando nuevamente el término de error), se emplea diferencia de avance para el valor de  $dT/dt$ , se utilizará diferencia de avance para el valor de la primera derivada  $dT/dz$  en la ecuación de la ZCS, diferencia de retroceso para la primera derivada  $dT/dz$  en la ecuación que describe la ZCI, mientras que para la ZNC se utilizará una diferencia central para el valor de la segunda derivada ( $d^2T/dz^2$ ) que aparece en la ecuación.

Tabla 1. Aproximaciones en Diferencia Finita utilizadas en la Simulación.

Tipo de dif. finita	Fórmula empleada
Primera derivada: de avance	$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(z_0) \approx \frac{f_1 - f_0}{h} + Error$
Segunda derivada: de avance	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(z_0) \approx \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + Error$
Segunda derivada: central	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(z_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + Error$
Segunda derivada: de retroceso	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(X_0) \approx \frac{f_0 - 2f_{-1} + f_{-2}}{h^2} + Error$

Aplicando estas aproximaciones a las ecuaciones que rigen el comportamiento del perfil salino y térmico en las lagunas solares, éstas quedan expresadas en diferencia finita de la siguiente forma:

Perfil salino ( $S(z,t+1) = f(z,t)$ ):

Zona Convectiva Superior:

$$K_s \left[ \frac{S(z+2,t) - 2S(z+1,t) + S(z,t)}{z_{sup}^2} \right] = \frac{S(z,t+1) - S(z,t)}{\Delta t} \quad (13)$$

Zona No Convectiva:

$$K_s \left[ \frac{S(z+1,t) - 2S(z,t) + S(z-1,t)}{\Delta z^2} \right] = \frac{S(z,t+1) - S(z,t)}{\Delta t} \quad (14)$$

Zona Convectiva Inferior:

$$K_s \left[ \frac{S(z,t) - 2S(z-1,t) + S(z-2,t)}{z_{inf}^2} \right] = \frac{S(z,t+1) - S(z,t)}{\Delta t} \quad (15)$$

Dado el valor de la difusividad salina  $K_s$  (depende de la sal utilizada) y los valores de la concentración inicial, al fijar los valores de  $\Delta z$  y  $\Delta t$  y definir la longitud de las diferentes zonas de la laguna, se puede calcular la concentración  $S(z,t+1)$  para cada posición  $z$ , en cada instante de tiempo.

Perfil de Temperatura ( $T(z,t+1) = f(z,t)$ ):

Zona Convectiva Superior:

$$\frac{T_{sup}(z,t+1) - T_{sup}(z,t)}{\Delta t} = \frac{1}{\rho C_p z_{sup}} \left( I_s f' + K \left( \frac{T_{sup}(z+1,t) - T_{sup}(z,t)}{z_{sup}} \right) - U_{sup}(T_{sup} - T_{amb}) \right)$$

Zona No Convectiva:

$$\frac{T(z,t+1) - T(z,t)}{\Delta t} = \frac{1}{\rho C_p} \left( \frac{I_s f'}{\Delta z} + K \left( \frac{T(z+1,t) - 2T(z,t) + T(z-1,t)}{\Delta z^2} \right) \right) \quad (17)$$

Zona Convectiva Inferior:

$$\frac{T_{inf}(z,t+1) - T_{inf}(z,t)}{\Delta t} = \frac{1}{\rho C_p z_{inf}} \left( I_s f'' - K \left( \frac{T_{inf}(z-1,t) - T_{inf}(z,t)}{z_{inf}} \right) - U_{inf}(T_{inf} - T_{amb}) - Q_{ret} \right) \quad (18)$$

Para resolver las ecuaciones del perfil de temperatura, se procederá de manera similar a como se hizo para la resolución del perfil de concentraciones introduciendo los datos correspondientes a las propiedades físicas, los valores de la energía solar captada en cada capa, los coeficientes globales de calor perdido  $U_{sup}$  y  $U_{inf}$ , y del calor retirado de la ZCI. Además se requiere conocer el perfil de temperatura inicial y la temperatura del medio ambiente.

El método empleado es de tipo explícito (el valor que se quiere obtener de cada ecuación no es función del mismo), lo cual trae ventajas al resolver las ecuaciones, pero con la desventaja que el método no es incondicionalmente estable. El criterio de estabilidad para nodos en una dirección (Hawladar et al., 1981) es el siguiente:

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta z^2} = \frac{K \Delta t}{\rho C_p \Delta z^2} \leq \frac{1}{2} \quad (19)$$

Usando valores promedios para la densidad  $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ , el calor específico  $C_p = 4 \text{ kJ/kg K}$  y la conductividad térmica  $K = 2 \text{ kJ/h m K}$ , se puede obtener una relación entre el  $\Delta t$  (s) y el  $\Delta z$  (m) a utilizar para que el método sea estable.

$$\frac{\Delta t}{\Delta z^2} \leq 1000 \quad (20)$$

Ya que  $\Delta z$  está en el orden de 0,1 m, el método no presenta problemas de inestabilidad.

Para realizar el programa de simulación de la laguna, se eligió el lenguaje de programación QUICK BASIC versión 4.5, el cual aparte de su sencillez de programación permite compilar los programas para que corran desde el sistema operativo, de ser necesario.

Tomando las ecuaciones deducidas antes y los datos necesarios de las propiedades y condiciones iniciales, se estructuró la secuencia de cálculo y se construyó el programa. Los resultados se escriben en archivos, uno por cada capa de la laguna, para obtener al final el comportamiento térmico o salino de la capa. Debido a que es difícil manejar la gran cantidad de datos que se generan de la simulación, los resultados se presentarán de manera gráfica. De los gráficos obtenidos se extrae la información necesaria para el análisis del comportamiento de la laguna.

## PROPIEDADES FÍSICAS Y DATOS EMPLEADOS EN LA SIMULACIÓN

Se usó como fluido para los cálculos realizados en este trabajo una solución de cloruro de sodio, y las propiedades de esta solución: difusividad salina  $K_s$ , densidad  $\rho$ , calor específico  $C_p$ , conductividad térmica  $K$ , se pueden calcular con las siguientes ecuaciones (Constán et al., 1985):

$$K_s = 1,39 * [1+0,029(T-20)] * 10^{-9} \text{ [m}^2/\text{s]} \quad (21)$$

$$\rho = 1005,153 + 0,746259S - 0,3234134T \text{ [kg/m}^3] \quad (22)$$

$$C_p = 3720 + 28 (T-20) + 0,005 (T-20)^2 \text{ [kJ/kg K]} \quad (23)$$

$$K = 2,16 [1 + 0,00281 (T - 20)] \text{ [kJ/h m K]} \quad (24)$$

Por otro lado y para el cálculo de la cantidad de radiación solar que incide sobre la laguna se definen las siguientes constantes:  $F$ : Fracción de la energía solar absorbida cerca de la superficie, con un valor de 0,4;  $\mu$ : Coeficiente de extinción efectiva, que vale  $0,66 \text{ m}^{-1}$ ;  $\delta$ : Distancia de referencia, con un valor de 0,06 m.

Para los datos de la temperatura ambiente se tomaron los datos de un día promedio en el Valle de Sartenejas, temperatura máxima  $32,6 \text{ }^\circ\text{C}$  a la 1 p.m, temperatura mínima  $14^\circ\text{C}$  a las 2 a.m. El valor del coeficiente global de transferencia de calor en la superficie de la laguna  $U_{sup}$ , se asumirá de  $87,6 \text{ kJ/h m}^2 \text{ K}$  y en el caso del fondo,  $U_{inf}$  de  $5 \text{ kJ/h m}^2 \text{ K}$ . (Constán et al., 1985).

Se tomará una altura total de laguna de 0,8 m, con una altura de la ZCS de 0,1 m, en la ZNC de 0,6 m dividido en doce diferenciales de altura ( $\Delta z$ ) y 0,1 m para la zona de almacenamiento. El valor del perfil de concentración inicial será lineal desde agua pura en la superficie y  $182,66 \text{ kg/m}^3$  en el fondo, mientras que la temperatura inicial es constante para todas las capas e igual a  $22 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Para los valores de la radiación solar que incide sobre la laguna se dispone de correlaciones para la radiación directa y difusa, basada en datos experimentales tomados por Ledanois durante el período enero - septiembre de 1984 (Ledanois, 1984). La radiación total en la superficie de la laguna es la suma de la componente directa más la componente difusa:

$$G(t) = I(t) + D(t) \quad (25)$$

En la que la radiación directa se calcula de la expresión:

$$I(t) = I_m \cos^\lambda \left( \frac{180(t - N_H)}{N_H} \right) \quad (26)$$

Mientras que la radiación difusa se obtiene de:

$$D(t) = D_m \cos^{2D} \left( \frac{180(t - N_H)}{N_H} \right) \quad (27)$$

## RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

Determinación del incremento del tiempo óptimo. Para realizar la simulación, fue necesario determinar el valor adecuado para el incremento de tiempo de las ecuaciones de

diferencia finita  $\Delta t$ , con el propósito de obtener la exactitud requerida en los valores que arrojan dichas ecuaciones.

Se procedió a simular la temperatura de la ZCI en función del tiempo transcurrido, colocando  $\Delta t$  igual a 2, 1, 0,5 y 0,25 horas, para los grosores de capa  $z_s$  y  $z_i$  de 0,1 m y  $\Delta z = 0,05 \text{ m}$  (recomendados como óptimos en trabajos anteriores, por ejemplo Constán et al., 1985), con los cuales todos los  $\Delta t$  cumplen el criterio de estabilidad de la ecuación (20). Además, esto se hizo sin retirar calor de la última capa ( $Q_{retrado} = 0$ ).

En la tabla 2 se presentan una serie de valores de temperaturas extraídas de los resultados de la simulación para los cuatro casos citados, durante un tiempo de 1 año.

Tabla 2. Valores de las temperaturas en la capa inferior para distintos pasos de  $\Delta t$ .

$\Delta t$ [h]	$t_{est}$ (días)	$T_{max}$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$T_{min}$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$\Delta T$ [ $^\circ\text{C}$ ]
2,00	35	79,1	69,3	9,8
1,00	40	78,1	69,4	8,7
0,50	40	78,6	69,9	8,7
0,25	40	78,4	69,7	8,7

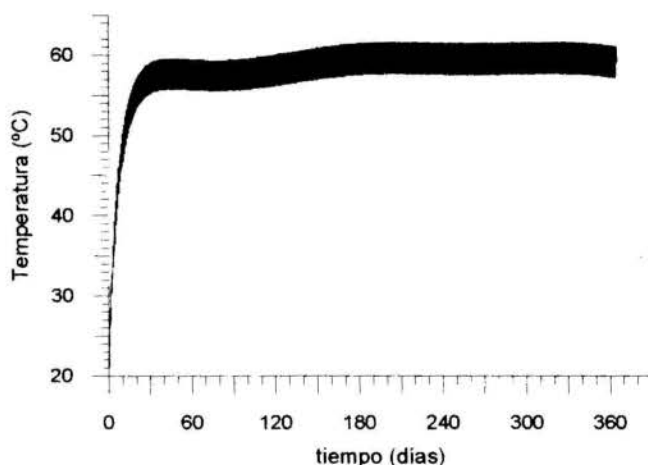


Figura 2. Temperatura de la ZCI para un  $\Delta t$  de 1 hora.

De las gráficas, se observó que el comportamiento de las curvas de temperatura fue similar para todos los intervalos de tiempo utilizados, experimentando una subida brusca hasta estabilizarse y alcanzar el estado estacionario, aproximadamente a los 40 días (ver figura 2). En cuanto a los valores de temperatura, se pudo apreciar que el comportamiento difiere poco de un intervalo de tiempo a otro, concluyéndose que a partir del intervalo de 1 hora las diferencias entre los valores de temperatura son despreciables. Donde se evidenció la influencia del valor de  $\Delta t$  en la exactitud del método numérico, fue en la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima del estado estacionario  $\Delta T$ , arrojando un valor de  $9,8 \text{ }^\circ\text{C}$  para el intervalo de 2 horas, mientras que para los intervalos de 1, 0,5 y 0,25 horas, el valor de dicha diferencia fue de  $8,7 \text{ }^\circ\text{C}$ . Se concluyó que para el intervalo de 1 hora se había alcanzado la exactitud buscada, por lo cual se utilizó en el resto de las simulaciones como valor fijo.

Efecto del grosor de la capa de acumulación de energía en la simulación. Luego de fijado el valor de  $\Delta t$ , se consideró necesario observar cómo afecta el valor del grosor de capa de

acumulación en la temperatura de la ZCI, pues es la zona donde se almacenará la energía posteriormente. Esto se determinó mediante la simulación de la temperatura promedio de la laguna y la eficiencia, con un  $Q_{\text{retirado}} = 0$ , variando el grosor de capa  $z_i$  desde 0,06 m a 0,20 m. Los resultados obtenidos se recopilan en las figuras 3 y 4.

A través del análisis de los perfiles de temperatura se llegó a la conclusión de que el tiempo que tarda la laguna en alcanzar el estado estacionario depende del grosor de la ZCI, ya que un menor grosor de capa implica menor masa en la zona, y por consiguiente, disminución en la capacidad de acumulación de energía y un mayor tiempo requerido para alcanzar el estado estacionario. Por otro lado, se observó que la diferencia de temperatura promedio entre cada curva tiende a disminuir a medida que se aumenta el valor de  $z_i$ . Este efecto se debe a que al aumentar la masa de fluido en la zona, la temperatura varía menos durante el día, lo cual genera que la temperatura mínima tienda al valor de la temperatura máxima de la capa.

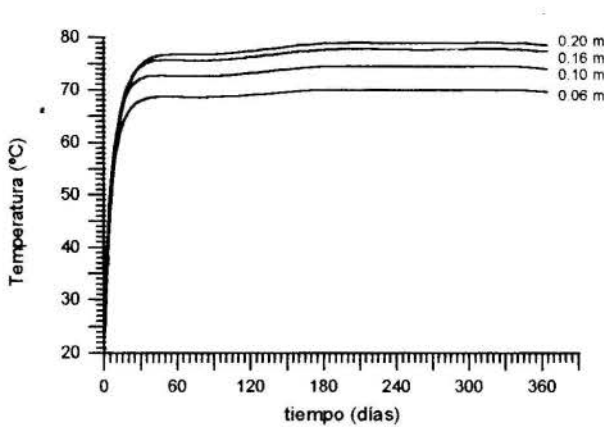


Figura 3. Temperatura promedio de la ZCI según el grosor de capa  $z_i$ .

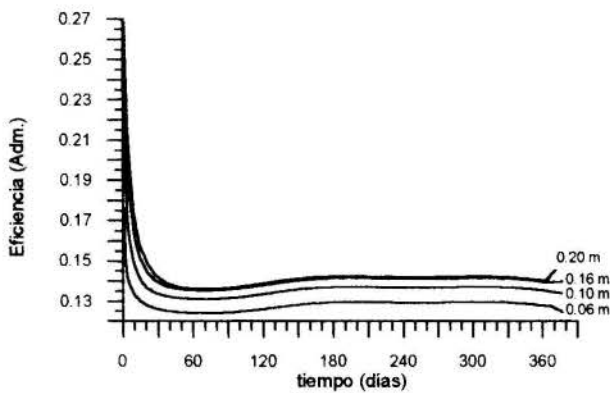


Figura 4. Eficiencia de la ZCI en función del grosor de capa  $z_i$ .

Por otra parte, del análisis de la gráfica de eficiencia se observa que los valores de eficiencia de la laguna se encuentran en los rangos reportados en las referencias consultadas (16% aproximadamente). Por otra parte, se observa que a partir de

0,16 m los valores de eficiencia se vuelven casi constantes para aumentos del grosor de capa.

Debido a lo anterior, se decidió utilizar 0,16 m como grosor de la ZCI, ya que se obtienen curvas similares a las que se obtienen con grosores superiores.

Determinación del efecto del número de capas de la ZNC.

En el método utilizado para la resolución de las ecuaciones, los resultados obtenidos dependen del número de capas en que se divide la ZNC, ya que la exactitud del método cambiará al variar dicho número. Se procedió a simular el comportamiento térmico de la ZCI dividiendo la ZNC en 3, 6, 12 y 24 capas (para esta última se utilizó un  $\Delta t = 0,5$  h, debido a la estabilidad del método). Los resultados obtenidos se resumen en la tabla 3.

Tabla 3. Valores de  $T_{\text{máx}}$ ,  $T_{\text{mín}}$  y  $\Delta T$  para diferentes números de capas en la ZNC.

# Capas	$\Delta t$ (h)	$T_{\text{máx}}$ (°C)	$T_{\text{mín}}$ (°C)	$\Delta T$ (°C)
3	1	77,6	70,3	7,3
6	1	76,3	67,5	8,8
12	1	78,1	69,4	8,7
24	0,5	81,5	72,4	9,1

De los resultados obtenidos, se observó que la tendencia general de las variables es a aumentar, tanto en  $T_{\text{máx}}$  como en  $T_{\text{mín}}$ , incrementando a su vez el valor de  $\Delta T$ . Para 6 y 12 capas, se observa que los valores obtenidos son muy similares, pero que no se ha llegado al límite de exactitud del método, ya que para 24 capas se observa la continuación de la tendencia al incremento. Debido al tiempo que demora una corrida del programa a 24 capas, se decidió utilizar un número de capas de 12, ya que para el  $\Delta t$  de 1 h es el más adecuado.

Utilización de la Laguna Solar en un proceso. Se simuló el comportamiento de la laguna, utilizándola como una fuente de energía de magnitud constante para un proceso, como por ejemplo la generación de energía eléctrica a través de un ciclo Rankine. Este ciclo consiste de una etapa que funciona con un fluido orgánico de bajo punto de ebullición (como freón 12, metano, etc.), conectado a un intercambiador de calor para elevar la temperatura de dicho fluido utilizando la solución salina de la laguna. Luego, el fluido orgánico se expandirá en una turbina, la cual generará energía eléctrica (Subhahar et al., 1993).

a) Determinación del límite energético de la laguna. Para poder iniciar las simulaciones de la laguna como fuente de energía para un proceso, era necesario conocer el límite energético de la laguna, es decir, el valor máximo de energía que puede extraerse de la ZCI sin llegar en ningún momento a la temperatura ambiente. Para ello, se simuló tanto la temperatura como la eficiencia de la capa, extrayendo flujos de 100, 200, 250 y 300  $\text{kJ/h m}^2$ . Los resultados se muestran en las figuras 5 y 6.

Observando el gráfico de temperatura, se concluye que a medida que se extrae calor de la ZCI se obtienen temperaturas más bajas en la capa, mostrando que para 300  $\text{kJ/h m}^2$  se registran temperaturas por debajo de la temperatura ambiente durante el arranque. Por otra parte, se observa del gráfico de eficiencia que la laguna acumula más energía si se extrae una cantidad mayor de la misma.

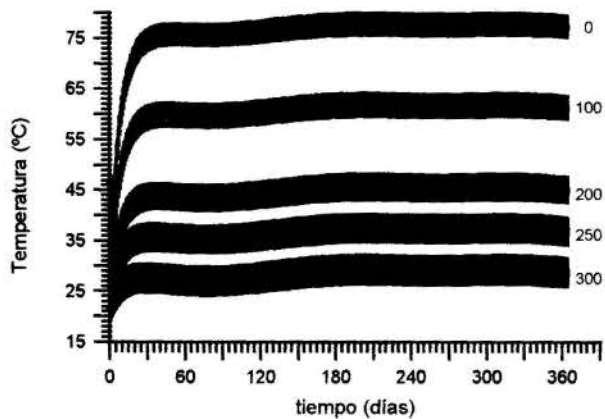


Figura 5. Temperatura de la ZCI en función del tiempo para diferentes valores de  $Q_{ret}$ . [ $\text{kJ} / \text{h m}^2$ ].

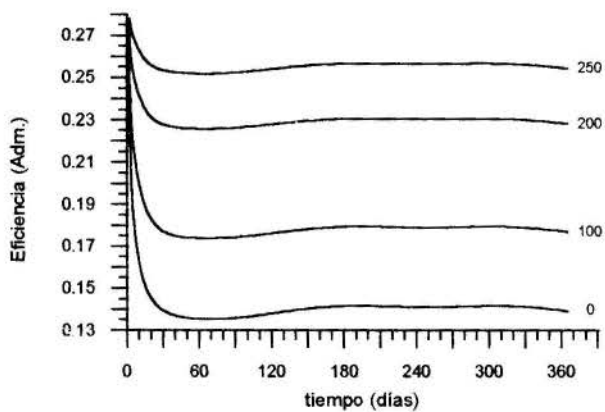


Figura 6. Eficiencia de la ZCI en función del tiempo para diferentes valores de  $Q_{ret}$  [ $\text{kJ} / \text{h m}^2$ ].

Si se combinan ambas observaciones, se llega a la conclusión de que se debe extraer el máximo de energía posible sin llegar a temperaturas muy bajas, para facilitar la utilización de la misma. Para no tener la posibilidad de problemas en las próximas simulaciones, se trabajará con un calor retirado de  $200 \text{ kJ/h m}^2$ .

b) Efecto de la extracción de energía en intervalos de 12 horas. Se realizaron simulaciones variando el intervalo de tiempo de retiro de energía de  $200 \text{ kJ/h m}^2$  en bloques de 12 horas (de 4:00 a.m. a 4:00 p.m., de 8:00 a.m. a 8:00 p.m., etc.) como una alternativa para optimizar la utilización de la laguna solar. Los resultados obtenidos se recopilan en la tabla 4 y en la figura 7.

Tabla 4. Temperatura máxima y mínima en el fluido de la última capa para diferentes horas de retiro de energía.

Intervalo de tiempo	$T_{m\acute{a}x}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$T_{m\acute{i}n}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$\Delta T$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]
8 a.m. a 8 p.m.	62,0	55,7	6,3
12 m. a 12 a.m.	62,2	55,4	6,8
2 p.m. a 2 a.m.	63,8	56,7	7,1
4 p.m. a 4 a.m.	80,0	73,4	6,6
6 p.m. a 6 a.m.	80,0	73,4	6,6
8 p.m. a 8 a.m.	80,0	73,4	6,6

El método aquí empleado es una herramienta excelente para decidir la forma de extracción de energía en estos sistemas.

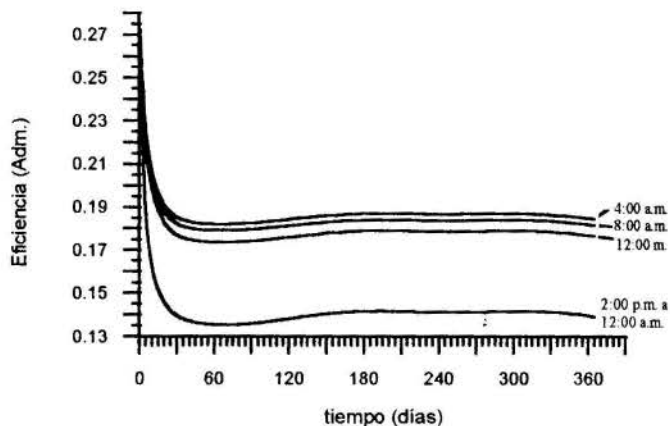


Figura 7. Eficiencia de la ZCI para diferentes intervalos de extracción de energía.

## COMENTARIOS

Resolver las ecuaciones que rigen el comportamiento de una Laguna Solar por el método de diferencia finita unidireccional, da buenos resultados y es relativamente sencillo de resolver. Si se desea usar la energía almacenada en una laguna solar como fuente de energía para un proceso, esta simulación servirá de marco para evaluar el tamaño de laguna requerida, la temperatura del fluido almacenado y la mejor distribución en el tiempo del retiro de la energía de la laguna.

## REFERENCIAS

- Constán F. y Ercolano, U., 1985, "Diseño, Montaje y Simulación de una Laguna Solar de Gradiente Inverso de Temperatura", Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.
- Dahlquist, G. y Bjork, A., 1974, "Numerical Methods" Prentice Hall, Englewood Cliff.
- Hawladar, M.N. y Brinkworth, B.J., 1981, "An analysis of the non-convective solar pond", Solar Energy 27, (3) 195-204.
- Ledanois, J.M., 1984 "Datos experimentales de la Radiación Solar en el Valle de Sartenejas". Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.
- Tabor, H. y Matz, R., 1965, "Solar Pond Project". Solar Energy: 177-182.
- Subhakar, D. y Srinivasa, S., 1993, "Saturated Solar Ponds 1: Simulation Procedure", Solar Energy 50, (3) 275-282.
- Subhakar, D. y Srinivasa, S., 1993, "Saturated Solar Ponds 2: Parametric Studies", Solar Energy 50, (4) 307-319.

## ABSTRACT

In this paper a solar pond study was done, resolving the equations that describe their behaviors by numerical methods, with the purpose to analyze the different factors that affect the system mentioned to show up ideas for their best uses. It was concluded that the pond energetic limit, that is to say, the maximum heat quantity that it can be extracted from the pond without reach, not at all, the atmospheric temperature is around the 18% and the way (quantity and time) to extract the heat from the bottom of the pond rebounds in the pond efficiency and in the quality of this obtained energy (the source energetic temperature).





## APPLICATION OF THE ZONING METHOD IN RADIATIVE INVERSE PROBLEMS

Francis H. R. França  
Leonardo Goldstein Jr.  
UNICAMP-FEM-DETF, C.P. 6122  
13083-970 Campinas, SP - Brasil



### SUMMARY

A methodology employing the zoning analysis is proposed for the solution of a inverse problem in radiative heat transfer, considering a rectangular cross-section enclosure with infinite depth, containing an isothermal participating medium. In an inverse problem, both the temperature and the heat flux distributions are imposed in one of the enclosure surfaces, while at another boundary no constraints are imposed at all, and its temperature and heat flux are to be found. Different medium optical thicknesses and temperatures, surfaces emittances and the ratio between the height and the width of the enclosure were considered.

### INTRODUCTION

Some heating processes in radiative enclosures require that both the temperature and the heat flux distribution be imposed at some of their surfaces. In continuous furnaces, for instance, once the desired temperature distribution on the processed material is imposed, its heat flux distribution also becomes imposed as a result from the application of the heat balance on it. Considering that the processed material can be considered as one of the surfaces of the enclosure, this makes up a case in which two conditions are imposed simultaneously in one of the enclosure surfaces. The problem is to determine the characteristics of the system, such as its geometry, temperature and heat flux distribution in the other boundaries of the enclosure, so that those two prescribed conditions were verified. This is an example of an inverse problem where the heat transfer is dominated by the radiation mechanism, that is, where convection effects can be assumed negligible.

In the literature, three works considered inverse problems in radiation heat transfer. Two of them, by Harutunian et al. (1995) and Oguma et al. (1995), took into account evacuated enclosures where some surfaces had no temperature or heat flux imposed, while for other surfaces two conditions were imposed. The sole work which considered participating media inside was presented by Morales et al. (1995), for known uniform medium temperature. The collocation method was used to solve the system of integral equations resulted from the heat balance in the enclosure. Due to the nature of the resulting system of equations, standard methods of solution such as Gaussian Elimination or QR factorization did not lead to acceptable results and a more sophisticated method had to be employed: the Modified Truncated Singular Value Decomposition.

This work proposes a solution for a radiative inverse problem based on the zoning method, which is the most commonly method employed in furnaces design. The problem consists of a rectangular enclosure with infinite depth, containing a participating medium. The medium temperature is uniform and known. In one of the enclosure surfaces, two conditions are imposed, the temperature and the heat flux distributions, and in another no constraints are imposed, and are to be found so that those desired conditions are obtained. Different medium temperatures and optical thicknesses, surface

emittances and the ratio between the height and the width of the enclosure were considered.

### PROBLEM ANALYSIS

Figure 1 shows a rectangular enclosure containing an isothermal medium. The surfaces of the enclosure are diffuse gray emitters and the medium is a gray absorber and emitter. The height and the width of the enclosure are designated by  $H$  and  $W$ , respectively, and the depth is infinite. In this problem, the heat transfer is dominated by the radiation process and so the conduction and convection mechanisms are not considered in the analysis. The system of coordinates are also presented in Fig. 1, and indicates the distance of a point to the center of the surface to which it belongs.

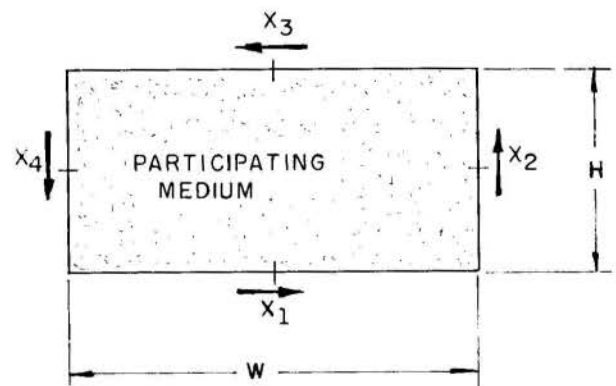


Figure 1 - Enclosure cross-section

To evaluate the radiative heat transfer exchange inside the enclosure, the zoning method is applied in this work. First, the enclosure surfaces are divided in  $N$  zones  $A_k$ , where the temperature can be assumed uniform. In each zone  $A_k$ , the radiative heat flux  $q_k$  can be calculated as:

$$q_k = q_{ok} - q_{ik} \quad (1)$$

where  $q_{ok}$  and  $q_{ik}$  correspond to the total outcome and income radiative heat fluxes in  $A_k$ , and  $\sigma$  is the Stefan-Boltzmann constant. For gray surfaces, these two last quantities are related by:

$$q_{ok} = \epsilon_k \sigma T_k^4 + (1 - \epsilon_k) q_{ik} \quad (2)$$

in which  $T_k$  and  $\epsilon_k$  are the temperature and the total hemispheric emittance of the zone  $A_k$ . The medium is gray and isothermal, i. e., the absorption coefficient is wave-length independent and uniform throughout the enclosure. Thus, the income radiative heat flux on  $A_k$  is (Siegel and Howell, 1981):

$$q_{ik} = \frac{1}{A_k} \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \int_{A_k} \left[ \exp(-as_{jk}) q_{oj} + (1 - \exp(-as_{jk})) \sigma T_m^4 \right] \times \frac{\cos \beta_k \cos \beta_j}{\pi s_{jk}^2} dA_j dA_k \quad (3)$$

where  $s_{jk}$  is the distance between the elements  $dA_k$  and  $dA_j$  and the angles  $\beta_j$  and  $\beta_k$  are shown in Fig. 2. The medium temperature and the absorption coefficient are indicated, respectively, by  $T_m$  and  $a$ , and both are uniform. In Eq. (3), the first and the second terms of the integral account for the radiative energy that  $dA_k$  receives from the area element  $dA_j$  and from the gas located in the path  $s_{jk}$ , respectively. According to the zoning method, the income radiative flux in the zone  $A_k$  can be written as:

$$q_{ik} = \frac{1}{A_k} \left( \sum_{j=1}^N \overline{s_j s_k} q_{oj} + \overline{gs_k} \sigma T_m^4 \right) \quad (4)$$

in which  $\overline{s_j s_k}$  and  $\overline{gs_k}$  are the surface to surface and gas to surface direct-exchange areas, respectively, such that:

$$\overline{s_j s_k} = \int_{A_j} \int_{A_k} \exp(-as_{jk}) \frac{\cos \beta_k \cos \beta_j}{\pi s_{jk}^2} dA_j dA_k \quad (5a)$$

$$\overline{gs_k} = \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \int_{A_k} (1 - \exp(-as_{jk})) \frac{\cos \beta_k \cos \beta_j}{\pi s_{jk}^2} dA_j dA_k \quad (5b)$$

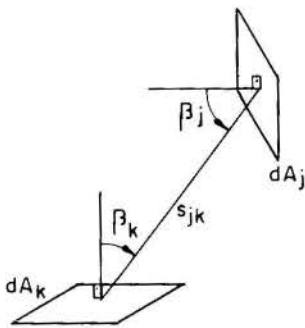


Figure 2 - Radiative heat transfer between  $dA_k$  and  $dA_j$

Note that, because the medium temperature is uniform, all the medium volume can be treated as a single radiative zone. If the medium temperature were non-uniform, the medium volume would have to be divided in volume zones so that their temperatures could be regarded as uniform. From the definitions of the direct exchange areas, it may be shown that:

$$A_k = \sum_{j=1}^N \overline{s_j s_k} + \overline{gs_k} \quad (6)$$

For the surfaces where the radiative heat flux is known, called hereafter as Qk surfaces, an equation for the outcome radiative heat flux in each zone  $A_k$  can be obtained by combining Eqs. (1) and (4):

$$q_{ok} = q_k + \frac{1}{A_k} \left( \sum_{j=1}^N \overline{s_j s_k} q_{oj} + \overline{gs_k} \sigma T_m^4 \right) \quad (7)$$

For the surfaces in which the temperature is known, named Tk surfaces, Eqs. (2) and (4) are combined to give the outcome radiative heat flux in each of their zones  $A_k$ :

$$q_{ok} = \epsilon_k \sigma T_k^4 + \frac{1 - \epsilon_k}{A_k} \left( \sum_{j=1}^N \overline{s_j s_k} q_{oj} + \overline{gs_k} \sigma T_m^4 \right) \quad (8)$$

Equations (7) and (8) constitute a system of  $N$  linear equations and  $N$  unknowns,  $q_{ok}$ . Once  $q_{ok}$  is determined in each zone  $A_k$ , the temperature can be obtained in the Qk zones by Eq. (2) and the radiative heat flux can be determined in the Tk zones by Eq. (1). This is a typical example of direct problem in radiation heat transfer.

In this work, it is considered that in some surfaces both the temperature and the radiative heat flux distributions are presented, while in some surfaces no conditions are imposed, and are to be found in such a way to verify the imposed conditions. These surfaces will be called TQ and Uk surfaces, respectively. In the remaining Tk and Qk surfaces, where only one condition is imposed, the outcome heat flux can be obtained by Eqs. (7) and (8), if the radiative heat flux or the temperature distribution is known, respectively. For the TQ surfaces, where both conditions are prescribed, the outcome heat flux from each of their zones can be determined combining Eqs. (1) and (2):

$$q_{ok} = \sigma T_k^4 - \frac{1 - \epsilon_k}{\epsilon_k} q_k \quad (9)$$

Equations for the outcome heat flux in the zones belonging to Uk surfaces can be obtained by rearranging either Eq. (7) or Eq. (8). From Eq. (7), for example, it follows that:

$$\frac{\overline{s_k s_{k*}}}{A_{k*}} q_{ok} = q_{ok*} - q_k - \frac{1}{A_{k*}} \left( \sum_{j=1}^{k-1} \overline{s_j s_{k*}} q_{oj} + \sum_{j=k+1}^N \overline{s_j s_{k*}} q_{oj} + \overline{gs_{k*}} \sigma T_m^4 \right) \quad (10)$$

where  $k^*$  and  $k$  designate zones belonging to a TQ surface and to a Uk surface, respectively. To obtain a system of linear equations with the same number of unknowns and of equations, the number of TQ zones should be the same as of the Uk zones, such that for each Uk zone  $A_k$  should correspond one and just one TQ zone  $A_{k^*}$ .

Equations for the outcome radiative heat flux are presented next in dimensionless form for each kind of zone:

- Tk zones:

$$Q_{ok} = \varepsilon_k t_k^4 + (1 - \varepsilon_k) \left( \sum_{j=1}^N \overline{S_j S_k} Q_{oj} + \overline{GS_k} t_m^4 \right) \quad (11a)$$

- Qk zones:

$$Q_{ok} = Q_k + \sum_{j=1}^N \overline{S_j S_k} Q_{oj} + \overline{GS_k} t_m^4 \quad (11b)$$

- TQ zones:

$$Q_{ok} = t_k^4 - \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} Q_k \quad (11c)$$

- Uk zones:

$$Q_{ok} = -\frac{1}{S_k S_{k^*}} \left( Q_{ok^*} - Q_k - \sum_{j=1}^{k-1} \overline{S_j S_{k^*}} Q_{ok} - \sum_{j=k+1}^N \overline{S_j S_{k^*}} Q_{ok} - \overline{GS_{k^*}} t_m^4 \right) \quad (11d)$$

where  $t = T / T_{ref}$ ,  $Q = q / (\sigma T_{ref}^4)$ ,  $\overline{S_j S_k} = \overline{s_j s_k} / A_k$  and  $\overline{GS_k} = \overline{g s_k} / A_k$ . For the adopted geometry, the dimensionless surface to surface,  $\overline{S_j S_k}$ , and gas to surface,  $\overline{GS_k}$ , direct-exchange areas are completely defined by the aspect ratio,  $AR = H/W$ , and the optical thickness,  $\tau = aW/2$ , where the characteristic dimension of the enclosure was chosen to be  $W/2$ . Thus, the dimensionless coordinates of Fig. 1 are such that:  $-1 \leq X_1, X_3 \leq 1$  and  $-H/W \leq X_2, X_4 \leq H/W$ .

According to Eq. (6),  $\overline{GS_k}$  can be evaluated from:

$$\overline{GS_k} = 1 - \sum_{j=1}^N \overline{S_j S_k} \quad (12)$$

and only  $\overline{S_j S_k}$  has to be evaluated from the definition, Eq. (5a). When the medium is non-participating, i. e.,  $a = 0$  and  $\overline{GS_k} = 0$ , the summation of all  $\overline{S_j S_k}$  must be equal to one. This result makes up a useful way to check the numerical evaluation of the direct-exchange areas.

## NUMERICAL SOLUTION

The outcome heat fluxes in the TQ zones can be directly obtained from Eq. (11c), since both  $Q_k$  and  $t_k$  are known. Designating the number of TQ zones by  $M$  ( $1 \leq k \leq M$ ), the remaining zones will form a system of  $(N-M)$  linear equations and unknowns. This system is constituted by Eqs. (11a), (11b) and (11d). Among the many prospective methods of solution, two well-known iterative methods were chosen to be employed in this work: the Jacobi and the Gauss-Seidel methods, respectively summarized below:

$$Q_{ok}^{j+1} = Q_{ok}^j + \alpha \left[ f(Q_{oM+1}^j, \dots, Q_{ok-1}^j, Q_{ok}^j, \dots, Q_{oN}^j) - Q_{ok}^j \right] \quad (13a)$$

and

$$Q_{ok}^{j+1} = Q_{ok}^j + \alpha \left[ f(Q_{oM+1}^{j+1}, \dots, Q_{ok-1}^{j+1}, Q_{ok}^j, \dots, Q_{oN}^j) - Q_{ok}^j \right] \quad (13b)$$

for  $M+1 \leq k \leq N$ . In Eqs. (13a) and (13b),  $i$  represents the  $i$ -th iterative step and the functions  $f$  correspond to the right-hand side of Eqs. (11a), (11b) and (11d). Relaxation is provided by the factor  $\alpha$ . Convergence of the solution is considered attended when the maximum relative error,  $e$ , defined as

$$e = \max_{1 \leq k \leq M} \left| \frac{Q_k - Q_k^j}{Q_k} \right| \quad (14)$$

becomes smaller than a given limit,  $e \leq \gamma$ . Equation (14) compares  $Q_k$ , the imposed radiative heat flux in the TQ zones ( $1 \leq k \leq M$ ), with  $Q_k^j$ , which are obtained when the values of the outcome radiative heat fluxes calculated in the  $i$ -th step are introduced in Eq. (11b).

## RESULTS AND DISCUSSION

Initially, the following direct problem will be considered: the dimensionless temperatures in surfaces 1, 2 and 4 are uniform and given by:  $t_1 = 1.0$ ,  $t_2 = t_4 = 1.5$ . In surface 3, the dimensionless temperature varies quadratically from 1.5 at the two extremities,  $|X_3| = 1.0$ , to 3.0 in the center of the surface,  $X_3 = 0$ . The optical thickness of the medium is  $\tau = 0.1$ , the medium dimensionless temperature,  $t_m$ , is 1.0 and the aspect-ratio,  $AR$ , is 0.5. The surfaces of the enclosure are black emitters,  $\varepsilon = 1.0$ . As only one condition is imposed at each surface, the radiative heat flux is calculated as in a case of direct radiative problem, and the solution can be obtained by solving a system consisting of Eqs. (8). Figure 3 shows the dimensionless radiative heat flux distribution in surface 1,  $Q_1$ . Due to the problem symmetry, the radiative heat flux  $Q_1$  is presented only for non-negative values of  $x_1$ ,  $0 \leq x_1 \leq 1$ . The negative values of  $Q_1$  indicate that surface 1 receives energy from the other surfaces, since they are at higher temperatures. At the center line of surface 1, where the effect of surface 3 is more significant, the absolute value of  $Q_1$  reaches a maximum.

The enclosure surfaces were divided in zones with the same width,  $\Delta X = 0.050$ , and so surfaces 1 and 3 were divided in 40 zones, while surfaces 2 and 4 consisted of 20 zones, so that  $N = 120$ . The results obtained from this grid were coincident with

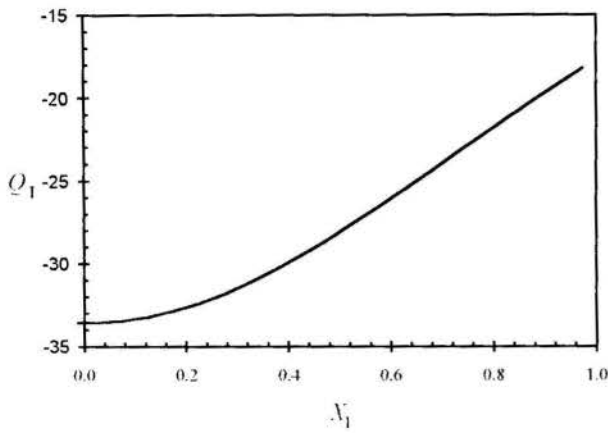


Figure 3 - Radiative heat flux in surface 1.  $\tau = 0.1$ ,  $t_m = 1.0$ ,  $\varepsilon = 1.0$ ,  $AR = 0.5$

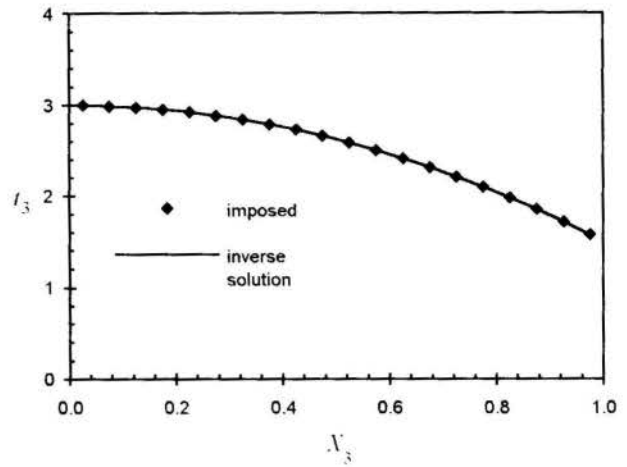


Figure 4 - Temperature in surface 3: imposed and determined from the inverse solution.  $\tau = 0.1$ ,  $t_m = 1.0$ ,  $\varepsilon = 1.0$ ,  $AR = 0.5$

those provided by a more refined grid,  $\Delta X = 0.033$  ( $N = 180$ ). Thus,  $\Delta X = 0.050$  was used in all the following conditions treated.

An inverse problem is considered that: in surfaces 1, 2 and 4 the dimensionless temperatures are the same as in the previous example:  $t_1 = 1.0$  and  $t_2 = t_4 = 1.5$ . Besides these conditions, the dimensionless radiative heat flux distribution in surface 1,  $Q_1$ , is prescribed as the same shown in Fig. 3. The objective now is to obtain the dimensionless temperature distribution at surface 3,  $t_3$ , that attends the above conditions. The resulting  $t_3$  distribution should be obviously the same imposed in the direct problem, that is, varying quadratically from 1.5 at the two extremities to 3.0 at the surface centerline. Following the proposed methodology, the outcome radiative fluxes from each zone of surface 1 were obtained from Eq. (11c). The outcome radiative heat fluxes from surfaces 2, 3 and 4 were determined next by solving the system of Eqs. (11a) and (11d). Figure 4 presents the dimensionless temperature in surface 3 obtained from the inverse solution by the Jacobi method, coincident with the temperature distribution imposed in the direct case. The iterative steps were repeated until the maximum relative error,  $e$ , was found to be smaller than the imposed limit,  $\gamma = 1 \times 10^{-6}$ . Although convergence was also reached by the Gauss-Seidel method, they presented different behavior: the Gauss-Seidel required 512 iterative steps for the optimum relaxation factor,  $\alpha = 1.6$ , while the number of the iterative steps required by the Jacobi method was 918, for an optimum relaxation factor of 0.075. Both surfaces 1 and 3 were divided in the same number of zones,  $M = 40$ , as required by the proposed methodology, and the pairs of zones were chosen frontal to each other.

Figure 5 presents the dimensionless temperature distribution at surface 3 for a different optical thickness,  $\tau$ , set equal to 1.0, instead of 0.1. Four values of  $\gamma$  were imposed:  $\gamma = 5.0 \times 10^{-2}$ ,  $1.0 \times 10^{-2}$ ,  $5.0 \times 10^{-3}$  and  $2.0 \times 10^{-3}$ . For  $\gamma$  smaller than  $1.0 \times 10^{-3}$ , the solution did not converge. It can be observed that  $t_3$  presented oscillatory behavior for values of  $\gamma$  equal or smaller than  $5.0 \times 10^{-3}$ , what would not constitute a suitable solution. This is a characteristic of this problem: it is possible to generate a temperature distribution at surface 3 satisfying the imposed conditions on surface 1 with a small deviation, but difficult to be obtained in practice or without physical meaning. Thus, the solution obtained with  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$  was chosen as the best one,

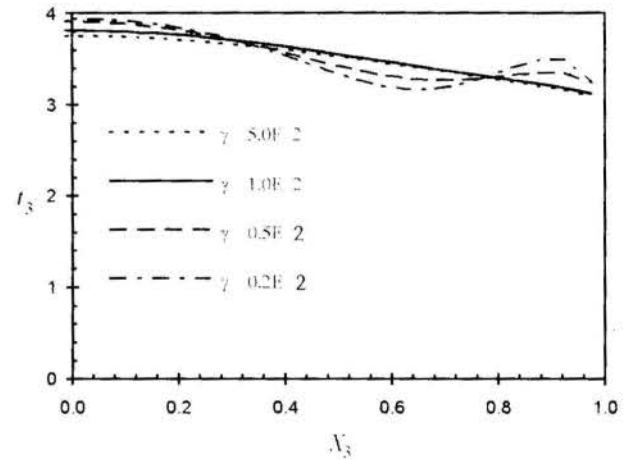


Figure 5 - Temperature in surface 3 for different convergence limits,  $\gamma$ .  $\tau = 1.0$ ,  $t_m = 1.0$ ,  $\varepsilon = 1.0$ ,  $AR = 0.5$

and the radiative heat flux distribution in surface 1 determined from this temperature distribution at surface 3 is compared with the imposed solution in Fig. 6. In Fig. 7,  $t_3$  is shown for a set of different optical thicknesses,  $\tau = 0.0, 0.1, 0.5$  and  $1.0$ . As the optical thickness is increased, the temperature in surface 3 must increase to provide the same radiative heat flux in surface 1, because the medium absorbs a larger amount of energy. In the four cases considered,  $\gamma$  was maintained as  $1.0 \times 10^{-2}$ . Convergence was more easily achieved through the Jacobi method, which always generated the symmetrical temperatures distributions at surface 3, expected for this problem. The same was not possible to attain by the Gauss-Seidel method. Overall, the Jacobi method was found to be more suitable than the Gauss-Seidel in this problem, although required low relaxation factors to make convergence possible (in some cases,  $\alpha = 0.01$ ).

The effect of the medium temperature on the temperature distribution in surface 3 is presented in Fig. 8. Besides the conditions already considered, two other cases are presented:  $t_m = 0.0$  and  $2.0$ . In the first condition, the medium absorbs, but do not emit thermal energy. It can be noted that the temperature in surface 3 becomes smaller when the medium temperature is



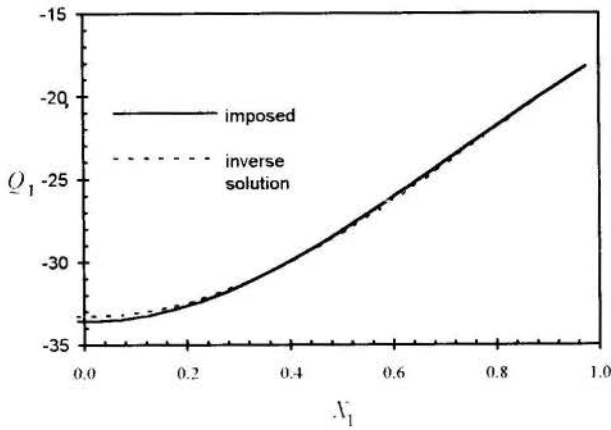


Figure 6 - Radiative heat flux in surface 1: imposed and obtained from the inverse solution for  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$ ,  $\tau = 1.0$ ,  $t_m = 1.0$ ,  $\epsilon = 1.0$ ,  $AR = 0.5$

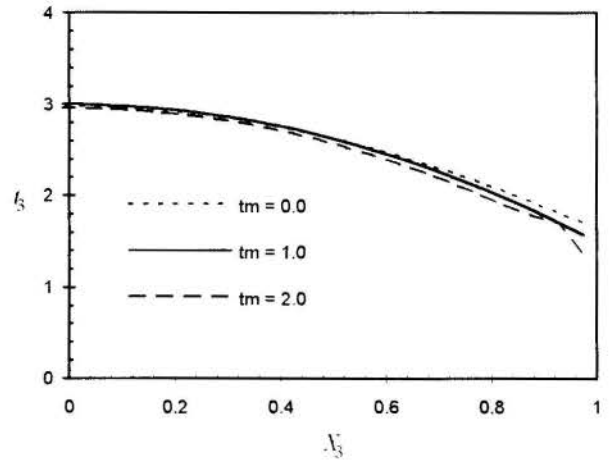


Figure 8 - Temperature in surface 3 for different medium temperatures,  $t_m$ .  $\tau = 0.1$ ,  $\epsilon = 1.0$ ,  $AR = 0.5$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$

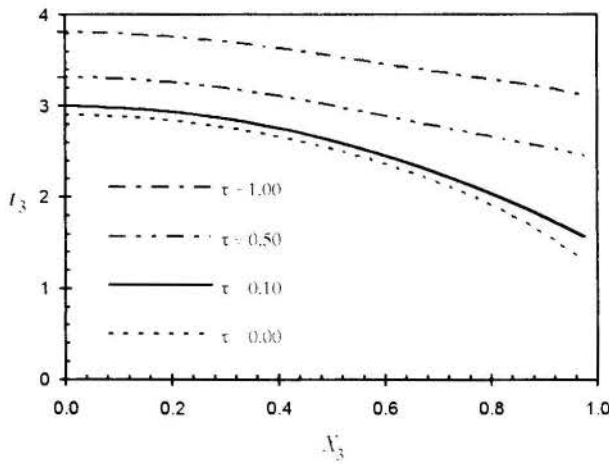


Figure 7 - Temperature in surface 3 for different optical thicknesses,  $\tau$ .  $t_m = 1.0$ ,  $\epsilon = 1.0$ ,  $AR = 0.5$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$

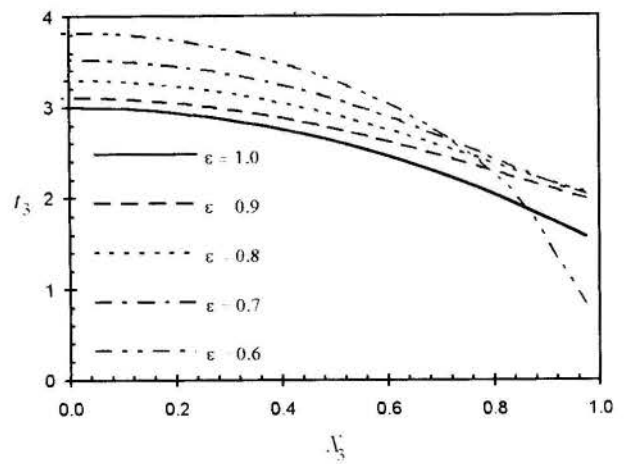


Figure 9 - Temperature in surface 3 for different surface emittances,  $\epsilon$ .  $\tau = 0.1$ ,  $t_m = 1.0$ ,  $AR = 0.5$ ,  $\gamma = 3.0 \times 10^{-2}$

increased, as the medium contributes with a large fraction of the energy that arrives in surface 3. These results were obtained for  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$ .

Figure 9 presents the influence of the enclosure surfaces emittance,  $\epsilon$ , on  $t_3$ . The imposed limit for convergence,  $\gamma$ , was set equal to  $3.0 \times 10^{-2}$  and for emittances equal or smaller than 0.5, the solution did not converge or converged to results with no physical meaning. Actually, to obtain suitable temperature distributions in surface 3 for emittances smaller than 0.5, a greater value of  $\gamma$  should be imposed, reducing the accuracy of the solution. For most of the emittances considered,  $\epsilon \geq 0.7$ , the reduction of its value caused an increase in the temperature of surface 3. For  $\epsilon = 0.6$ , however, the temperature in surface 3 became smaller in the extremity of the enclosure.

Figure 10 presents the temperature distribution in surface 3 for two additional values of the aspect-ratio:  $AR = 0.45$  and  $0.55$ . Although these values were close to the original ratio-aspect,  $AR = 0.50$ , the solution only converged for  $\gamma = 5 \times 10^{-2}$  and the relaxation factor,  $\alpha$ , had to be as small as 0.005. As the aspect-

ratio was increased,  $t_3$  tended to increase at the middle of surface 3, while  $t_3$  decreasing close to the extremities.

## CONCLUSIONS

In this work, the zoning method was applied to a radiative inverse problem. Equations for the outcome radiative heat flux from surfaces where no temperature or radiative heat flux were directly prescribed were determined by rearranging the equations for the surfaces where the two conditions were imposed. The resulting linear system of equations for the outcome radiative heat fluxes were solved by two well-known iterative methods: the Jacobi and the Gauss-Seidel. Convergence was attained more easily by the first method. According to the geometric, medium and surfaces conditions, results with no physical meaning can be obtained, so that careful analysis and interpretation are required.

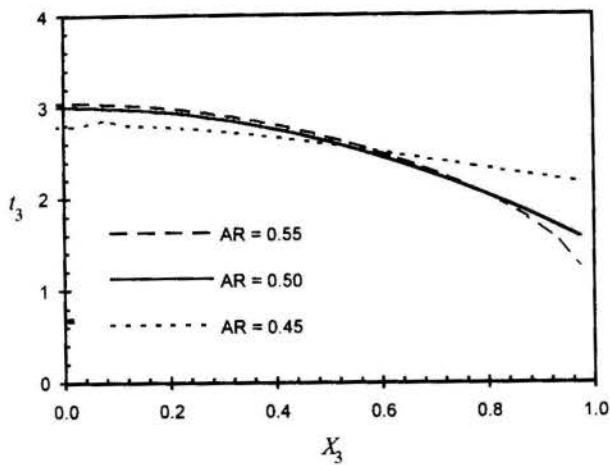


Figure 10 - Temperature in surface 3 for different height-width ratios,  $AR$ .  $\tau = 0.1$ ,  $t_m = 1.0$ ,  $\varepsilon = 1.0$ ,  $\gamma = 5.0 \times 10^{-2}$

### NOMENCLATURE

$a$	medium absorption coefficient
$e$	maximum relative error
$A$	area
$AR$	aspect-ratio
$\overline{gs_k}$	gas to surface direct-exchange area
$\overline{GS_k}$	dimensionless gas to surface direct-exchange area
$H$	height of the enclosure
$N$	total number of zones
$M$	number of TQ zones
$q$	radiative heat flux
$Q$	dimensionless radiative heat flux
$s$	distance between two zones
$\overline{s_j s_k}$	surface to surface direct-exchange area
$\overline{S_j S_k}$	dimensionless surface to surface direct-exchange area
$t$	dimensionless temperature
$T$	temperature
$X$	dimensionless distance of a point to the center of the surface
$W$	width of the enclosure

### **Subscripts**

$i$	income
$j, k$	zone designator
$m$	medium
$o$	outcome

### **Superscripts**

$i$	iterative step designator
-----	---------------------------

### **Greek Symbols**

$\alpha$	relaxation factor
$\varepsilon$	surface emittance
$\gamma$	imposed limit for the maximum relative error
$\sigma$	Stefan-Boltzmann constant
$\tau$	optical thickness

### REFERENCES

- Harutunian, V., Morales, J. C., and Howell, J. R., 1995, "Radiation Exchange Within an Enclosure of Diffuse-Gray Surfaces: The Inverse Problem", *Proc. ASME/AIChE National Heat Transfer Conf.*, Portland, August, quoted by Morales et al. (1995).
- Morales, J. C., Harutunian, V., Oguma, M., Howell, J. R., 1995, "Inverse Design of Radiating Enclosures With an Isothermal Participating Medium", personal communication.
- Oguma, M., and Howell, J. R., 1995, "Solution of Two-Dimensional Blackbody Inverse Radiation Problems by Inverse Monte Carlo Method", *Proc. ASME/JSME Joint Thermal Engng. Conf.*, Maui, March, quoted by Morales et al. (1995).
- Siegel, R., and Howell, J. R., 1981, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company.



**METODO DAS ORDENADAS DISCRETAS ASSOCIADO A INTEGRAÇÃO  
FORMAL DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE RADIAÇÃO EM  
AXISSIMETRIA CILINDRICA**



**Zaqueu Ernesto da Silva<sup>†</sup>**  
**Domenique Doermann ; Michel Laurent**  
CETHIL-INSA de Lyon - Bât 404  
69621 Villeurbanne -France

RESUMO

*Um método de resolução para a equação de transferência de radiação em axissimetria cilíndrica é proposto. O meio participante é absorvente, emissivo e difunde a radiação anisotropicamente e está envolvido por uma cavidade negra. A metodologia é baseada no uso simultâneo do método das ordenadas discretas associado a integração formal da ETR. O método é testado para meios isotérmicos.*

NOMENCLATURA

G	radiação incidente ( $W/m^2$ ).
I	intensidade de radiação ( $kW/m^2;sr$ ).
L	comprimento do cilindro (m).
<b>n</b>	vetor unitário normal à superfície.
N	numero de direções discretas.
q	fluxo de calor ( $W/m^2$ ).
R	raio do cilindro (m)
r, z	coordenadas (m).
S	termo fonte ( $kW/m^2-sr$ ).
W	peso da quadratura

Símbolos gregos

$\beta$	coeficiente de extinção ( $m^{-1}$ ).
$\epsilon$	emissividade.
$\phi$	ângulo azimutal.
$\Phi(\Omega', \Omega)$	função de fase.
$\mu, \xi, \eta$	cossenos diretores em r, z e $\phi$ .
$\theta$	ângulo polar.
$\rho$	refletividade.
$\omega$	albedo.
$\Omega$	direção ( $\mu, \xi, \eta$ ).

Índice inferior

b	corpo negro
e, w, n, s	superfície leste, oeste, norte e sul do volume de controle ( $m^3$ ).
i	valor inicial.
it	ordem de interação
in	valor interpolado
m	direção discreta.
r	direção radial
z	direção axial

Índice superior

*	grandeza adimensional
+	posterior
-	anterior
e, w, n, s	superfície leste, oeste, norte e sul do volume de controle.
P	centro do volume de controle

INTRODUÇÃO

O tratamento exato da transferência de radiação em meios que interagem por difusão, emissão e absorção resulta em uma equação do tipo integro-diferencial (ETR). Este fato representa a principal dificuldade na aplicação desta equação, mesmo em situações idealizadas. Na prática, o problema se acentua porque a radiação pode interagir com outros modos de transferência de energia, por exemplo, condução e/ou convecção.

A radiação é por natureza multidimensional devido a sua dependência direcional. No entanto, a redução de dimensão é uma aproximação utilizada freqüentemente. Neste caso, a seleção do sistema de coordenadas é importante e deve preservar essa característica dos meios finitos. A hipótese de axissimetria cilíndrica permite a redução da dimensão enquanto mantém o caráter finito de determinados tipos de problemas. Isto representa uma vantagem sobre o sistema cartesiano cujo meio finito é sempre tridimensional.

Por sua utilidade prática em projetos de fornos industriais, reatores nucleares e turbinas, por exemplo, a geometria cilíndrica tem merecido atenção. Entre as técnicas de resolução da ETR, para este tipo de geometria, podemos citar: a integração formal e os métodos de fluxos, tais como o das ordenadas discretas ( $S_n$ ) e das harmônicas esféricas ( $P_n$ ). Diversos são os estudos de transferência radiativa em cavidades cilíndricas baseados na forma integral da ETR, entre os quais destacamos, juntamente com os assuntos discutidos: Heaslet e Warming (1966), axissimetria em cilindro infinito e não isotérmico; Dua e Cheng (1975), problema de descontinuidades nas paredes em cilindro finito; Azad e Modest (1981), aplicabilidade da função de fase linear anisotrópica; Crosbie e Farrell (1984), geometria cilíndrica tridimensional com difusão isotrópica; Crosbie e Dougherty (1985), natureza da radiação incidente; Chui e Raithby (1992), implemento do método de volume de controle em cilindros finitos; Hsu e Ku (1994), não homogeneidade do meio e recentemente Pessoa-Filho e Thynell (1995), uma aproximação baseada nas descontinuidades nas paredes e no interior do meio para meios absorventes, emissivos e difusores. Fundamentados na aproximação  $P_n$ , podemos citar: Bayazitoglu e Higenyi (1979), formulação das condições de contornos; Mengüç e Viskanta (1986), problema de axissimetria cilíndrica e Erpelding et al. (1991), distribuição dos fluxos radiativos no interior de vapor formado sobre um metal submetido a irradiação de um laser. Baseados na

<sup>†</sup> UFPB/LES/DTM

aproximação  $S_n$  citamos como estudos: Fiveland (1982), forma discreta da ETR para o caso bidimensional; Jamaluddin e Smith (1988), sensibilidade à densidade do número de partículas nos gases; Tsai e Özisik (1990), dependência espacial das propriedades radiativas; Jendoubi et al. (1993) introduz um esquema de interpolações a pesos variáveis em associado com a aproximação de alta ordem  $S_{14}$ .

A integração formal da ETR largamente utilizada, não é de fácil aplicação. Explicitar as grandezas radiativas resulta em longas e tediosas fórmulas. O método das ordenadas discretas apesar de não ser eficiente do ponto de vista de tempo de CPU e espaço de memória, é um esquema bem elaborado que leva a aproximações de alta ordem. Este trabalho apresenta uma solução para ETR fundamentado no uso simultâneo da integração formal e o método das ordenadas discretas. Expressões explícitas para as intensidade, radiação incidente e fluxos nos contornos são apresentadas. O meio semitransparente é absorvente, emissivo e difusor. Problemas exemplos para o caso de axissimetria cilíndrica são resolvidos. Os resultados são comparados com os disponíveis na literatura.

### EQUAÇÃO INTEGRAL BÁSICA

A base para o estudo quantitativo do transporte de energia radiativa é a equação de transferência de radiação ou ETR dada por Özisik (1973) como :

$$\frac{dI_v(s, \Omega)}{ds} + \beta_v(s)I_v(s, \Omega) = \beta_v(s)S_v(s, \Omega) \quad (1)$$

onde :

$$S_v(s, \Omega) = (1 - \omega_v)I_b(s) + \frac{\omega_v}{4\pi} \int I_v(s, \Omega') \Phi_v(\Omega, \Omega') d\Omega' \quad (2)$$

A equação (1) descreve a variação da intensidade de radiação monocromática  $I_n(s, \Omega)$  ao atravessar um elemento cilíndrico de comprimento  $ds$ , cujo eixo está orientado por um vetor unitário  $\Omega$ . Este elemento está situado em uma posição  $s$  ao longo do trajeto de um feixe de radiação monocromática de intensidade  $I_n(s, \Omega)$ , incidente normalmente na face  $dA_i$ , como mostra a fig. 01. O primeiro termo do lado esquerdo representa o gradiente da intensidade de radiação, o segundo as perdas devido à absorção e a difusão, e o termo a direita representa os ganhos devido à emissão e a difusão.

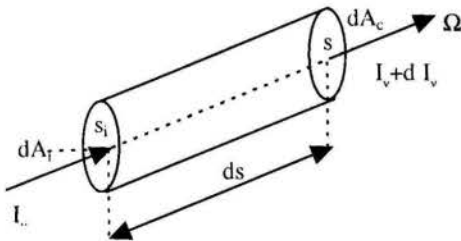


Figura 1 - Variação da intensidade monocromática ao atravessar um elemento cilíndrico.

Na análise que segue, o meio semitransparente é homogêneo, cinzento, emissivo, absorvente e difusor. As propriedades radiativas são constantes no espaço e limitado por superfícies opacas, difusas em emissão e reflexão. Em consequência, as intensidades de radiação nos contornos são dadas por :

$$I(s, \Omega) = \epsilon I_b(s) + \frac{\rho}{\pi} \int_{n \cdot \Omega > 0} I(s, \Omega') (n \cdot \Omega) d\Omega' \quad (3)$$

A integração formal da equação (1) ao longo de uma trajetória  $s$  segundo uma direção  $\Omega$  nos dá :

$$I(s, \Omega) = I_i(s_i, \Omega_a) e^{\exp[-\beta(s-s_i)]} + \int_{s_i}^s S(s', \Omega) e^{\exp[-\beta(s-s')]} \beta ds' \quad (4)$$

$I_i$  é a intensidade de radiação uniforme e isotrópica incidente em  $dA_i$  que é introduzida como condição de contorno. Por conseguinte, o conhecimento de  $I_i$ , assim como do valor do termo fonte  $S$ , nos permite calcular a intensidade  $I(s, \Omega)$  em um ponto qualquer situado ao longo da trajetória.

### AXISSIMETRIA CILÍNDRICA

No sistema de coordenadas cilíndricas a intensidade de radiação depende da posição  $s(r, z, \phi_r)$  e da direção  $\Omega(\theta, \phi)$ . Nesse sistema a derivada total da equação (1) tem a forma :

$$\frac{d}{ds} = \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi_r} + \xi \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5)$$

onde  $\mu$ ,  $\xi$  e  $\eta$  são direções cossenos definidas como :

$$\mu = \sin(\theta) \cos(\phi), \quad \eta = \sin(\theta) \sin(\phi) \quad \text{e} \quad \xi = \cos(\theta) \quad (6)$$

e  $\phi$  e  $\theta$  são os ângulos de revolução em torno do eixo  $\xi$  e polar, respectivamente (figura 2).

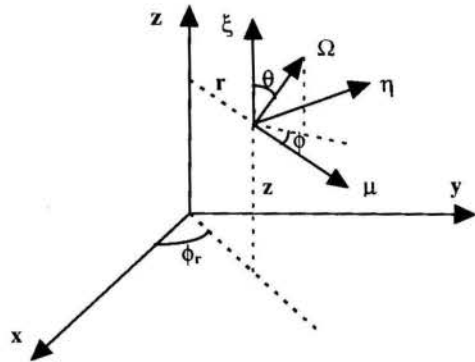


Figura 2 - Sistema de coordenadas cilíndricas e direcional

Se a axissimetria é considerada, a distribuição da intensidade de radiação é por definição independente de  $\phi_r$ , assim, a equação (5) toma a seguinte forma :

$$\frac{d}{ds} = \mu \frac{\partial}{\partial r} + \xi \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (7)$$

Então, a intensidade de radiação é identificada completamente com os parâmetros  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$  e  $\phi$ .



**METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PARA ETR**

Inicialmente, o domínio de cálculo é dividido em volumes elementares finitos ou de controle. No caso da geometria cilíndrica, estes volumes são anéis (figura 3). As faces fictícias de cada volume são aqui representados por :

- leste(e) - face lateral externa do anel,  $r_e, z_s < z < z_n$
- oeste(w) - face lateral interna do anel,  $r_w, z_s < z < z_n$
- norte(n) - base superior do anel,  $z_n, r_w < r < r_e$
- sul(s) - base inferior do anel,  $z_n, r_w < r < r_e$

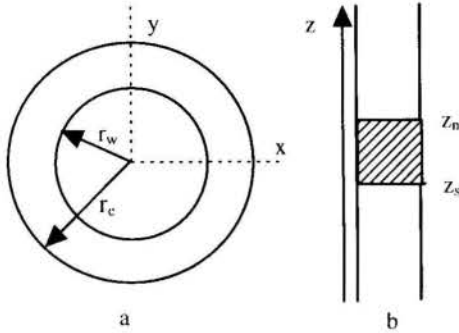


Figura 3 -(a)Vista de topo; ( b) corte no plano z-r

Em seguida, a Eq. 4 é utilizada para estabelecer as leis de variação da intensidade de radiação que se propaga no interior de cada volume de controle. Primeiramente, o espaço angular é discretizado em ângulos sólidos finitos ou direções discretas  $\Omega_m$ . Após a escolha das direções de discretizações, o segundo termo da Eq. 2 é substituído por uma soma quadrática de termos discretizados segundo estas direções e toma a forma :

$$S_m = (1 - \omega)I_b(r, z) + \frac{\omega}{4\pi} \sum_{m=1}^N I_m \Phi_{m,m} w_m \quad (8)$$

Finalmente, considerando que as intensidades de radiação sobre as faces sejam funções somente da direção discreta  $\Omega_m$ , e o termo fonte ( $S_m$ ) constante. A equação (4) pode ser integrada e as leis de variações estabelecidas. Se a intensidade é calculada sobre a base superior e a radiação tem origem na face oeste :

$$I_m^n(r, z_n, \Omega_m) = \bar{I}_m^w(r_w, z, \Omega_m) \exp[\beta \Delta s(r)] + S_m [1 - \exp[\beta \Delta s(r)]] \quad (9)$$

Ou, se a intensidade a ser calculada é sobre a face lateral externa do anel e a radiação tem origem na face sul.

$$I_m^e(r_e, z, \Omega_m) = \bar{I}_m^s(r, z_s, \Omega_m) \exp[\beta \Delta s(z)] + S_m [1 - \exp[\beta \Delta s(z)]] \quad (10)$$

Essas duas leis foram estabelecidas como exemplos. A direção discreta  $\Omega_m$  escolhida é definida pelos cossenos diretores  $\mu_m$  e  $\xi_m$ , ambos positivos. Diversas configurações são possíveis e as intensidades resultantes sobre as faces serão médias ponderadas das contribuições de diferentes origens.

As intensidades dadas pelas equações (9) e (10) são funções da distância percorrida  $\Delta s(r)$  ou  $\Delta s(z)$  e variam ao longo da superfície. Contudo, podemos definir uma intensidade média sobre as faces como :

$$\bar{I}_m^n = \frac{1}{(r_e^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_e} I_m^n 2r dr \quad (11)$$

$$\bar{I}_m^e = \frac{1}{(z_s - z_n)} \int_{z_s}^{z_n} I_m^e dz \quad (12)$$

A variação  $\Delta s$  na posição, ao longo de uma trajetória orientada na direção  $\Omega_m$ , resulta em um decréscimo  $\Delta \phi$  do ângulo de revolução  $\phi$ , enquanto o ângulo polar  $\theta$  permanece constante. Carlson e Lathrop (1968) introduzem um artifício no método das ordenadas discretas para tratar esta dificuldade que aparece no último termo da equação (7) e mantendo a conservação da energia. Nós tratamos este problema introduzindo nas equações (9) e (10) intensidades iniciais de radiação interpoladas linearmente entre duas direções discretas consecutivas, ou seja:

$$\bar{I}_m = c I_{m+1} + (1 - c) I_m \quad (13)$$

onde  $c = \frac{\phi_e - \phi_m}{\phi_{m+1} - \phi_m}$ .

A metodologia de cálculo de  $\phi_e$  será apresentada posteriormente.

A Intensidade do centro de cada volume de controle  $I_m^P$  é calculada a partir da identificação da face que recebe as contribuições de intensidades originárias do centro do volume de controle. Em seguida, a intensidade média desta face é usada como valor inicial no sentido inverso no cálculo da intensidade  $I_m^P$ :

$$I_m^P = \bar{I}_m^n \exp[\beta \Delta s(r)] - S_m [\exp[\beta \Delta s(r)] - 1] \quad (14)$$

se é a base superior ou

$$I_m^P = \bar{I}_m^e \exp[\beta \Delta s(z)] - 1 - S_m [\exp[\beta \Delta s(z)] - 1] \quad (15)$$

se é a face lateral externa.

Para explicitar as expressões da distância percorrida, limite de integração, ângulo de entrada e as intensidades médias sobre as faces, uma configuração particular será considerada :

- os cossenos diretores  $\mu_m$  e  $\xi_m$  são positivos,
- a radiação que chega à base superior são provenientes da face oeste e da face sul;
- a radiação que chega à face leste é proveniente somente da base inferior.

As distâncias percorridas pela radiação  $\Delta s$  são estimadas a cada direção discreta  $\Omega_m$ , seguindo a radiação em sua propagação no interior de cada volume de controle. Consideremos um volume de controle de altura  $\Delta z$ , raio interno  $r_w$ , raio externo  $r$  e que a radiação entra no volume de controle no ponto  $s_1(z_e, r_w)$  e sai no ponto  $s_2(z, r)$  (fig. 4). Considerando as relações entre os lados e ângulos de um triângulo plano, obtemos as seguintes expressões para a distância função de  $z$  ou  $r$ , respectivamente:

$$\overline{s_1 s_2} = \Delta s(z) = \frac{z - z_s}{\cos(\theta_m)} \quad (16)$$

$$\overline{s_1 s_2} = \Delta s(r) = \frac{r \cos(\phi_m) - \sqrt{r_w^2 - r^2 \sin^2(\phi_m)}}{\sin(\theta_m)} \quad (17)$$

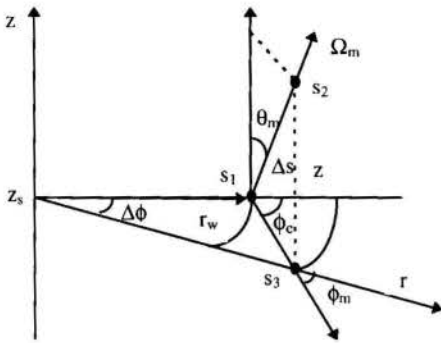


Figura 4 - Coordenadas para simetria cilíndrica.

A figura 5 mostra os pontos de saídas e a origem da radiação que chega à base superior do volume de controle, no caso da configuração exemplo. O segmento  $\overline{de} = r_m$  representa a radiação proveniente da face interna enquanto o segmento  $\overline{bd}$  a radiação proveniente da base inferior. O objetivo é encontrar o limite  $r_m$  das duas contribuições. Procedimentos algébricos com as equações (16) e (17) nos permite encontrar a expressão :

$$r_m = \frac{(z - z_s) \tan(\theta_m) \cos(\phi_m) - \sqrt{[(z - z_s) \tan(\theta_m) \cos(\phi_m)]^2 - [(z - z_s) \tan(\theta_m)]^2 - r_w^2}}{1} \quad (18)$$

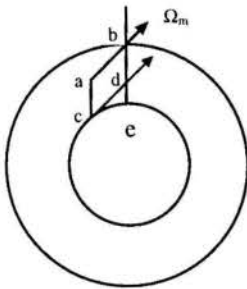


Figura 5 - Configuração exemplo.

O ângulo de entrada  $\phi_e$  é calculado com auxílio da figura 4, como função de  $r$  :

$$\phi_e = \arcsin \left[ \frac{r}{r_w} \sin(\phi_m) \right] \quad (19)$$

ou como função de  $z$  :

$$\phi_e = a \cot \left[ \cot(\phi_m) - \frac{(z - z_s) \tan(\theta_m)}{r_e \sin(\phi_m)} \right] \quad (20)$$

A introdução dos parâmetros geométricos nas respectivas leis de variações nos dar as expressões explícitas de cada contribuição.

Contribuição oeste - norte :

$$I_m^{n1} = I_{in}^w \exp \left[ -\beta \left( \frac{r \cos(\phi_m) - \sqrt{r_w^2 - r^2 \sin^2(\phi_m)}}{\sin(\theta_m)} \right) \right] + S_m \left[ 1 - \exp \left[ -\beta \left( \frac{r \cos(\phi_m) - \sqrt{r_w^2 - r^2 \sin^2(\phi_m)}}{\sin(\theta_m)} \right) \right] \right] \quad (21)$$

A intensidade interpolada  $I_{in}^w$  é dada como :

$$I_{in}^w = I_m^w + \frac{\arcsin \left[ \frac{r}{r_w} \sin(\phi_m) \right] - \phi_m}{\phi_{m+1} - \phi_m} (I_{m+1}^w - I_m^w) \quad (22)$$

Contribuição sul - norte :

$$I_m^{n2} = I_{in}^s \exp \left[ -\beta \left( \frac{z_n - z_s}{\cos(\theta_m)} \right) \right] + S_m \left[ 1 - \exp \left[ -\beta \left( \frac{z_n - z_s}{\cos(\theta_m)} \right) \right] \right] \quad (23)$$

A intensidade interpolada  $I_{in}^s$  é dada por :

$$I_{in}^s = I_m^s + \frac{\text{acot} \left( \cot(\phi_m) - \frac{(z_n - z_s) \tan(\theta_m)}{r \sin(\phi_m)} \right) - \phi_m}{\phi_{m+1} - \phi_m} (I_{m+1}^s - I_m^s) \quad (24)$$

A intensidade de radiação que chega a face leste proveniente da base inferior tem como expressão :

$$I_m^e = I_m^s \exp \left[ -\beta \left( \frac{z - z_s}{\cos(\theta_m)} \right) \right] + S_m \left[ 1 - \exp \left[ -\beta \left( \frac{z - z_s}{\cos(\theta_m)} \right) \right] \right] \quad (25)$$

onde  $I_{in}^s$  é dada por :

$$I_{in}^s = I_m^s + \frac{\text{acot} \left( \cot(\phi_m) - \frac{(z - z_s) \tan(\theta_m)}{r_e \sin(\phi_m)} \right) - \phi_m}{\phi_{m+1} - \phi_m} (I_{m+1}^s - I_m^s) \quad (26)$$

Podemos observar que as expressões explícitas para as intensidades contêm somente parâmetros conhecidos, ou seja, as dimensões da malha e os ângulos da quadratura escolhida.

### PROCEDIMENTO NUMÉRICOS

A precisão da solução depende da escolha da quadratura. Neste trabalho a técnica proposta por Carlson e Lathrop (1968) é utilizada para determinar os pontos e pesos da quadratura.

A solução para a distribuição da intensidade se passa em dois níveis. A nível global uma solução iterativa é necessária porque o termo fonte e as condições de contornos dependem das intensidades. Na primeira iteração o termo fonte contém apenas o termo relativo à emissão e as superfícies de contornos são consideradas negras. Uma primeira solução é assim obtida. Nas interações subsequentes o termo fonte e as intensidades nos contornos são calculados utilizando as intensidades obtidas da iteração precedente. A nível local a solução progride espacialmente seguindo uma direção discreta  $\Omega_m$  onde a intensidade é calculada face à face, assim como a intensidade no centro de cada volume de controle. A integração começa seguindo uma direção na qual os valores das intensidades são conhecidas, ou seja, nos limites do domínio de cálculo. O procedimento continua até que o critério de convergência,  $|I_{it+1}^p - I_{it}^p| \leq 10^{-5}$ , seja estabelecido.

Finalmente, a radiação incidente  $G$  e os fluxos de calor radiativos anterior  $q^-$  e posterior  $q^+$  em um ponto qualquer do domínio de cálculo são determinados pelas relações seguintes :

$$G = \sum_{m=1}^N W_m I_m^p \quad (27)$$

$$q_r^+ = \sum_{\mu_m > 0} \mu_m W_m I_m^p \quad (28)$$

$$q_r^- = \sum_{\mu_m < 0} \mu_m W_m I_m^p \quad (29)$$

$$q_z^+ = \sum_{\xi_m > 0} \xi_m W_m I_m^p \quad (30)$$

$$q_z^- = \sum_{\xi_m < 0} \xi_m W_m I_m^p \quad (31)$$

## RESULTADOS

A performance do método é testada em meios isotérmicos. Os resultados são comparados com técnicas analíticas para meios emissores e absorventes e com a técnica das ordenadas discretas para meios difusores. Os códigos de cálculos foram desenvolvidos e implementados em computador pessoal do tipo Pentium de 133MHz.

O primeiro exemplo é um meio semitransparente não difusor, a temperatura constante, confinado em uma cavidade cilíndrica negra e fria, de  $L/R = 2.0$ . Uma quadratura do tipo  $S_6$  é utilizada para três espessuras óticas ( $\tau_r = 0, 1; 1,0$  e  $5,0$ ). Os resultados para radiação incidente normalizada são comparados à solução formal obtida por Dua e Cheng(1975). A fig. 6 mostra que para os diferentes valores de espessuras óticas radial, os resultados para a radiação incidente média obtidos pelos dois métodos estão em acordo. O erro relativo médio registrado é inferior a 1,0%. Os cálculos foram feitos para uma malha regular de  $30 \times 30$ .

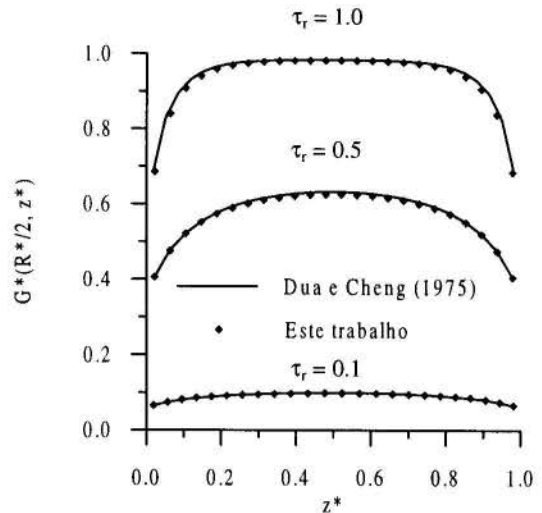


Figura 6 - Radiação incidente para um meio não difusor

No segundo exemplo, os limites são negros e frios enquanto o meio isotérmico é quente, absorve, emite e difunde anisotrópicamente. Quatro valores são considerados para o albedo ( $\omega = 0,0; 0,3; 0,7$  e  $0,9$ ).

O exemplo é resolvido pelo método das ordenadas discretas ( $S_6$ ), como proposto por Jendoubi et al. (1993) e utilizando a técnica proposta neste trabalho. Para o primeiro método, o domínio de cálculo é discretizado em uma malha regular  $30 \times 30$  e para o segundo é associado uma aproximação  $S_4$  com 16 e 20 volumes de controle respectivamente, nas direções  $r$  e  $z$ .

A figura 7 mostra que os resultados obtidos para a radiação média incidente estão totalmente em acordo. O erro relativo máximo verificado é menor que 1,0%. O método dos pesos variados elimina o problema de estabilidade, característico do uso da diferença diamante, mas não reduz o tempo de CPU nem o espaço de memória de armazenagem. No exemplo em discussão, 21.600 intensidades são calculadas a cada iteração. No caso do uso da metodologia proposta, o número de direções é reduzido à metade que associado ao uso de uma malha mais grossa, tem como consequência a redução do espaço de memória para estocagem. Uma redução não significativa no tempo de CPU em torno de 2 segundos é verificada.

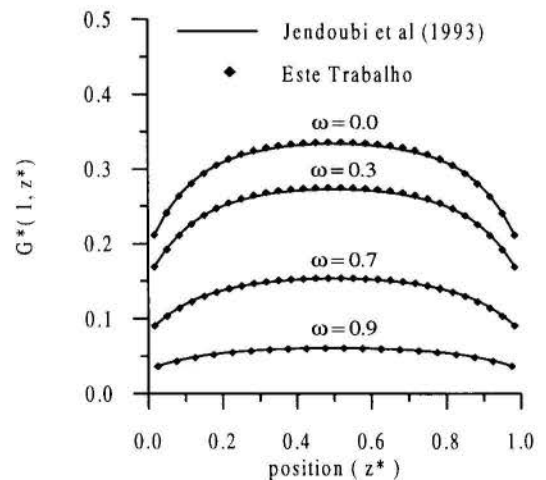


Figura 7 - Radiação incidente para um meio difusor.

## CONCLUSÕES

Uma metodologia de resolução da equação de transferência radiativa em geometria axissimétrica foi apresentada. A técnica fundamentada no uso simultâneo do método das ordenadas discretas e na formal integral da ETR foi aplicada em dois problemas exemplos. Os resultados obtidos para radiação incidente mostram o acordo com outros métodos consagrados na literatura. Para meios difusores linearmente anisotrópicos, o método se apresentou mais eficiente com relação ao item espaço de estocagem e um mesmo desempenho no que diz respeito ao tempo de CPU apesar do uso de técnicas numéricas para os cálculos das integrais.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Azad, F. H. e Modest, M. F., 1981, "Evaluation of the radiative heat flux in absorbing, emitting and linear-anisotropically scattering cylindrical media", ASME Journal of Heat Transfer, vol.103, pp. 350-601.
- Bayazitoglu, Y. e Higeny, J., 1979, "Higher-order differential equations of radiative transfer:  $P_3$  approximation", AIAA Journal, 1979, vol.17, pp. 424-430.
- Carlson, B. G. e Lathrop, K. D., 1968, "Transport Theory - The Method of Discrete Ordinates", In: Computing Methods in Reactor Physics. Edited by H. Greespan, C. N. Kleber and D. Okrent. New York: Gordon and Breach, pp. 171 - 266.
- Chui, E. H. e Raithby, G. D., 1992, "Prediction of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures with the Finite Volume Method", Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 6, pp. 605 - 611.
- Crosbie, A. L. e Dougherty, R. L., 1980, "Two-dimensional radiative transfer in a cylindrical geometry with anisotropic scattering", J. Quant. Radiat. Transfer, vol. 25, pp. 551-569.
- Crosbie, A. L. et Farrell, J. B., 1984, "Exact Formulation of Multiple Scattering in a three-dimensional Cylindrical Geometry", J. Quant. Radiat. transfer, vol. 31, pp. 397-416.
- Dua, S. S. e Cheng, P., 1975, "Multi-dimensional Radiative Cylindrical Media with Non-isothermal Bounding wall", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 18, pp. 254 - 259.
- Erpelding, P., Minard, A. e Bishop, P. J., 1991, "Determination of Radiative Fluxes in an Absorbing, Emitting and Scattering Vapor Formed by Laser Irradiation", ASME Journal of Heat Transfer, vol. 113, pp. 939 - 945.
- Fiveland, W. A., 1982, "A Discrete Ordinate Method for Predicting Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Enclosures", ASME, paper 82-HT-20.
- Heaslet, M. A. e Warming, R. F., 1966, "Theoretical Predictions of Radiative Transfer in Homogeneous Cylindrical Medium", J. Quant. Radiat. transfer, vol.6, pp. 751 - 774.
- Hsu, P. e Ku, J. C., 1994, "Radiative Heat Transfer in Finite Cylindrical Enclosures with Nonhomogeneous Participating Media", Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 8, pp. 434 - 440.
- Jamaluddin, A. S. e Smith, P.J., 1988, "Predicting Radiative Transfer in Axisymmetric Cylindrical Enclosures Using the Discrete Ordinates Method", Combust. Sci. and Tech, vol. 62, pp. 173 - 186.
- Jendoubi, S., Lee, S. H. e Kim, T-K., 1993, "Discrete Ordinates Solutions for Radiatively Participating Media in a Cylindrical Enclosure", Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 7, pp. 213 - 219.
- Lathrop, K. D., 1969, "Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs Accuracy", Journal of Computational Physics, vol.4, pp. 475 - 498.
- Mengüç, M. P. e Viskanta, R., 1986, "Radiative Transfer in Axisymmetric, Finite Cylindrical Enclosure", ASME Journal of Heat Transfer, vol.108, pp. 271 - 276.

Pessoa-Filho, J., e Thynell, S. T., "Approximate Solution to the Equation of Radiative in Cylindrical Participating Media". Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, (in press).

Tsai, J. R. e Özisik, M. N., 1990, "Radiation in Cylindrical Symmetry with Anisotropic Scattering and Variables Properties", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 33, pp. 2651 - 2658.

## ABSTRACT

A solution method of the radiative transfer equation in the two-dimensional  $r - z$  coordinates system is presented. The wall of enclosures is black, and the participating medium absorbs, emits and anisotropically scatters the radiative energy. The formulation is based on the use of discrete ordinates method associated to the formal integration of equation of radiative transfer. The method is tested in the case of isothermal medium bounded by isothermal walls.





COMPARAÇÃO ENTRE DOIS MÉTODOS DE ORDENADAS DISCRETAS  
APLICADOS À FORMA INTEGRAL DA EQUAÇÃO DE  
TRANSFERÊNCIA RADIATIVA



Lúis Mauro Moura<sup>\*</sup>; Zaqueu Ernesto da Silva<sup>\*\*</sup>;

Jean-François Sacadura; Michel Laurent

Insa de Lyon - Cethyl, 20, Avenue Albert Einstein - Bât.404  
69621 - Villeurbanne - France

RESUMO

Dois métodos de solução da Equação de Transferência Radiativa (ETR) são analisados para uma geometria bidimensional cartesiana. O meio é semitransparente, homogêneo, cinzento, emissivo, absorvente e difuso sendo as paredes difusas em reflexão e emissão. Resolve-se a ETR, escrita em sua forma integral, através do método das Ordenadas Discretas associado a um volume de controle. No primeiro caso, calcula-se as intensidades radiativas em cada face considerando-se caminhos médios para a radiação no volume. No segundo caso, estabelece-se leis de variações das intensidades radiativas no interior do volume de controle e calcula-se as intensidades radiativas nas faces através de uma integração.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, vários trabalhos foram dedicados ao estudo da transferência de calor por radiação em diversas geometrias devido ao grande interesse em aplicações como fornos industriais, câmaras de combustão, chamas, problemas atmosféricos, entre outros. Soluções exatas da equação de transferência radiativa (ETR) só são possíveis para um meio considerado cinzento, isotrópico, com propriedades radiativas constantes e com condições de contorno homogêneas. Estas soluções, embora limitadas, são utilizadas como referência para testar a precisão de outros métodos aproximativos. Diferentes métodos numéricos foram desenvolvidos, por exemplo, os métodos de Monte-Carlo, de zonas, de multifluxos, de momentos e de esferas harmônicas. O método de ordenadas discretas (Sn) faz parte dos métodos multifluxos. Ele foi utilizado inicialmente por Chandrasekhar (1960) para a solução de problemas em astrofísica. Em seguida, Carlson e Lathrop (1968) desenvolveram uma solução aplicada à equação de transporte de nêutrons para geometria retangular, cilíndrica e esférica.

O presente trabalho compara dois métodos diferentes de discretização da ETR baseados na chamada formulação integral que consiste em fazer uma discretização da ETR ao longo de um caminho percorrido pela radiação. Esta formulação é mais coerente com a física do problema e evita a ocorrência de valores de intensidades radiativas negativas, como descrito por Carlson e Lathrop (1968). O primeiro método analisado, proposto por Lathrop (1969), consiste em calcular a intensidade radiativa numa face do volume de controle através da integração de todas as intensidades radiativas que chegam a esta face. El Wakil (1991) propôs uma maneira mais simples de calcular a intensidade radiativa na face, ao invés de uma integração de todos os percursos ele considera apenas um caminho médio. Os dois trabalhos calculam também de maneira diferente a intensidade radiativa no centro do volume de controle. Para analisar somente a variação devido ao cálculo das intensidades radiativas nas faces propõe-se uma formulação modificada a de El Wakil sendo a intensidade no centro calculada pela formulação proposta por Lathrop. Resultados são comparados em termos de radiação incidente em função da espessura ótica

do meio para uma quadratura  $S_4$ . Utiliza-se os resultados obtidos analiticamente por Wu (1990) e Crosbie (1984) como soluções de referência.

FORMULAÇÃO

Para um meio semitransparente, homogêneo, cinzento, emissivo, absorvente, difuso, com propriedades radiativas constantes e em equilíbrio termodinâmico local, a ETR é expressa como (Özsisik, 1973):

$$\frac{1}{\beta} \Omega \nabla I(s, \Omega) + I(s, \Omega) = S(s, \Omega) \quad (1)$$

sendo:

$$S(s, \Omega) = (1 - \omega) I_b(s) + \frac{\omega}{4\pi} \int_{4\pi} I(s, \Omega') p(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega' \quad (2)$$

onde  $I(s, \Omega)$  é a intensidade de radiação em um ponto  $s$  segundo uma direção  $\Omega$ ,  $I_b$  é a intensidade radiativa emitida pelo corpo negro a temperatura do meio,  $\beta$  é o coeficiente de extinção,  $\omega$  é o albedo e o termo integral representa o ganho por difusão no meio.

Considera-se como condição de contorno faces opacas, difusas em emissão e reflexão com as intensidades dadas por:

$$I(s, \Omega) = \varepsilon_i I_b(s) + \frac{\rho_i}{\pi} \int_{n_i \cdot \Omega' < 0} I(s, \Omega') (n_i \cdot \Omega') d\Omega' \quad (3)$$

onde  $\varepsilon_i$  e  $\rho_i$  são respectivamente a emissividade e a refletividade da face  $i$  e  $n_i$  o vetor normal a esta face.

A geometria é bidimensional cartesiana (figura 1), isto é, as intensidades radiativas são constantes no eixo  $z$ .

<sup>\*</sup> Bolsista GDE CNPq/Brasil

<sup>\*\*</sup> Professor UFPB, Bolsista GDE CNPq/Brasil

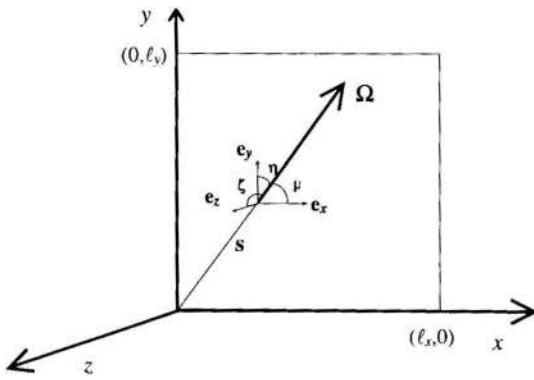


Figura 1 - Sistema de coordenadas.

Devido a natureza integro-diferencial da equação (1), utiliza-se o métodos de ordenadas discretas ( $S_n$ ) para sua solução. A solução é constituída de duas etapas : i) uma discretização angular na qual se escolhe  $2M$  direções. Desta forma, o termo integral é substituído por uma soma quadrática das intensidades radiativas. As equações obtidas são um conjunto de equações diferenciais parciais para cada direção; ii) uma discretização espacial para a solução das equações diferenciais parciais.

Para a discretização angular utilizou-se uma quadratura de vinte e quatro direções ( $S_4$ ) com ponderação constante  $w_m$  (Carlson e Lathrop, 1968). Devido a simetria de direções adotada, somente as direções de  $1/8$  de esfera são listadas na Tabela 1, as outras direções são determinadas pela mudança de sinal dos cossenos diretores ( $\mu, \eta, \xi$ ). A simetria do problema em relação ao plano  $xy$  permite a utilização de somente  $M$  direções no cálculo da eq. (4).

Tabela 1- Quadratura  $S_4$ , (Carlson e Lathrop, 1968).

Direções	$\mu$	$\eta$	$\xi$	$w_m$
1	0.2958758	0.2958758	0.9082483	$\pi/6$
2	0.2958758	0.9082483	0.9082483	$\pi/6$
3	0.9082483	0.2958758	0.2958758	$\pi/6$

Desta forma, as equações (1) e (2) podem ser escritas como:

$$\frac{1}{\beta} \Omega \nabla I_m + I_m = (1 - \omega) I_b(s) + \frac{\omega}{2\pi} \sum_{m'=1}^M w_m p_{m'm} I_{m'} = S(s, m', m) \quad (4)$$

onde o índice  $m$  representa uma direção  $\Omega$ ,  $m'$  uma direção de incidência  $\Omega'$  e o termo  $p_{m'm}$  a função de fase que é expressa como :

$$p_{m'm} = \sum_{j=0}^N a_j P_j(\mu_m \mu_{m'} + \eta_m \eta_{m'} + \xi_m \xi_{m'}) \quad (5)$$

onde o coeficiente  $a_j$  é determinado pela teoria de Mie e  $P_j$  é o polinômio de Legendre.

A condição de contorno, eq. (3), é escrita como :

$$I_m = \varepsilon_i I_{b_i} + \frac{P_i}{\pi} \sum_{n, \Omega_n < 0} p_{m'n} |\mathbf{n} \cdot \Omega_m| I_{m'} \quad (6)$$

Para a discretização espacial, considera-se o termo fonte constante no volume de controle e segue-se uma determinada

direção de propagação da intensidade radiativa. Desta maneira, a eq. (1) é dada por :

$$\frac{d I_m}{d s} + \beta I_m = \beta S_m = Q_m \quad (7)$$

Integrando a equação acima, obtemos :

$$I_m = I_{m_0} e^{-\beta \Delta s} + Q_m (1 - e^{-\beta \Delta s}) \quad (8)$$

sendo  $I_{m_0}$  a intensidade radiativa inicial,  $\Delta s$  a distância percorrida no volume de controle de dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$ .

Definindo um fator geométrico característico do volume  $\lambda$  em função dos cossenos diretores e das dimensões do volume, temos :

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \beta \Delta x / \mu \\ \alpha_y &= \beta \Delta y / \eta \\ \lambda &= \alpha_x / \alpha_y \end{aligned} \quad (9)$$

Desenvolve-se a seguir duas maneiras diferentes de se calcular as intensidades radiativas nas faces. El Wakil (1991) utilizou distâncias médias entre as faces para o cálculo de  $I_m$  na eq. (8). Entretanto, Lathrop (1969) propõe a integração dos caminhos médios percorridos pela intensidade radiativa no interior do volume de controle para o cálculo de  $I_m$  na face, eq. (10).

$$\begin{aligned} I_{e_m} &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} I(\Delta x, y, \mu, \eta) dy \\ I_{n_m} &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} I(x, \Delta y, \mu, \eta) dx \end{aligned} \quad (10)$$

Onde os símbolos  $e$  e  $n$  representam respectivamente a face leste e norte do volume de controle. Considera-se conhecidos as intensidades radiativas nas faces oeste  $w$  e sul  $s$ . Dependendo de  $\lambda$  as intensidades radiativas são calculadas de maneira diferente no volume de controle. As equações apresentadas são para os cossenos diretores positivos, determina-se as outras equações por simetria. Apresenta-se a seguir os três casos possíveis :

#### Caso $\lambda=1$

Neste caso, as intensidades radiativas que chegam à face  $n$  são provenientes somente da face  $w$  e as que chegam na face  $e$  são somente da face  $s$ . As intensidades radiativas nas faces  $w$  e  $s$  são supostas conhecidas. Para o método de El Wakil (1991), a distância percorrida pela intensidade radiativa é igual a  $\alpha_x/2$  (ou  $\alpha_y/2$ ).

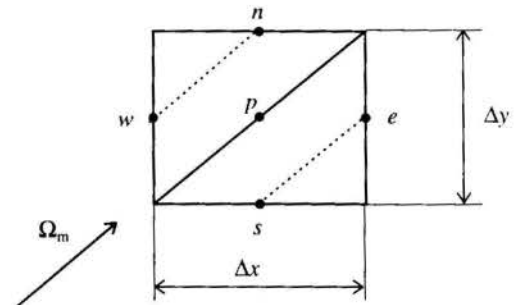


Figura 2 - Representação de um volume de controle para  $\lambda=1$ .

Utiliza-se o expoente \* para diferenciar as intensidades radiativas calculadas pelo método de El Wakil.

- face norte :

$$I_{n_m} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left[ I_{w_m} e^{-\frac{\beta x}{\mu}} + Q_m \left( 1 - e^{-\frac{\beta x}{\mu}} \right) \right] dx \quad (11)$$

$$= Q_m + (I_{w_m} - Q_m) (1 - e^{-\alpha_x}) / \alpha_x$$

$$I^*_{n_m} = Q_m + (I_{w_m} - Q_m) e^{-\alpha_x/2} \quad (12)$$

- face leste :

$$I_{e_m} = \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \left[ I_{s_m} e^{-\frac{\beta y}{\eta}} + Q_m \left( 1 - e^{-\frac{\beta y}{\eta}} \right) \right] dy \quad (13)$$

$$= Q_m + (I_{s_m} - Q_m) (1 - e^{-\alpha_y}) / \alpha_y$$

$$I^*_{e_m} = Q_m + (I_{s_m} - Q_m) e^{-\alpha_y/2} \quad (14)$$

#### Caso $\lambda > 1$

As intensidades radiativas que chegam à face  $e$  são provenientes somente da face  $s$ . A face  $n$  é composta pelas intensidades radiativas das faces  $w$  e  $s$ . O ponto intermediário na face  $n$  é  $x' = \Delta x / \lambda$ . Neste caso, para o cálculo de  $I_{n_m}$ , pelo método de Lathrop (1969), a integração é efetuada em duas etapas. Para o método de El Wakil (1991) utiliza-se uma média ponderada entre  $I^*_{n'_m}$  e  $I^*_{n''_m}$ .

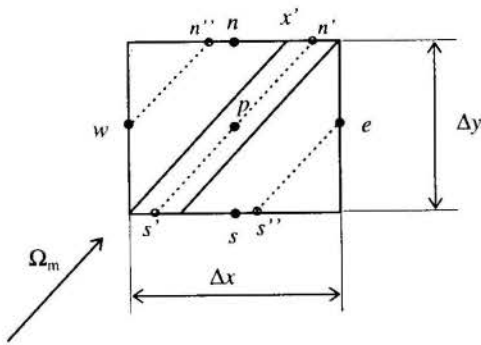


Figura 3 - Representação de um volume de controle para  $\lambda > 1$ .

- face norte

$$I_{n_m} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_0^{x'} \left[ I_{w_m} e^{-\frac{\beta x}{\mu}} + Q_m \left( 1 - e^{-\frac{\beta x}{\mu}} \right) \right] dx + \int_{x'}^{\Delta x} \left[ I_{s_m} e^{-\alpha_y} + Q_m \left( 1 - e^{-\alpha_y} \right) \right] dx \right\} \quad (15)$$

$$= Q_m + (I_{w_m} - Q_m) (1 - e^{-\alpha_x}) / \lambda \alpha_y + (I_{s_m} - Q_m) e^{-\alpha_y} (1 - 1/\lambda)$$

$$I^*_{n_m} = I^*_{n'_m} (1 - 1/\lambda) + I^*_{n''_m} (1/\lambda)$$

$$= Q_m + (I_{s_m} - Q_m) e^{-\alpha_y} (1 - 1/\lambda) + (I_{w_m} - Q_m) e^{-\alpha_x/2} / \lambda \quad (16)$$

- face leste

$$I_{e_m} = \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \left[ I_{s_m} e^{-\frac{\beta y}{\eta}} + Q_m \left( 1 - e^{-\frac{\beta y}{\eta}} \right) \right] dy \quad (17)$$

$$= Q_m + (I_{s_m} - Q_m) (1 - e^{-\alpha_y}) / \alpha_y$$

$$I^*_{e_m} = Q_m + (I_{s_m} - Q_m) e^{-\alpha_y/2} \quad (18)$$

#### Caso $\lambda < 1$

As intensidades radiativas que chegam à face  $n$  são provenientes somente da face  $w$ . A face  $e$  é composta pelas intensidades radiativas das faces  $w$  e  $s$ . O ponto intermediário é  $y' = \Delta y \lambda$ .

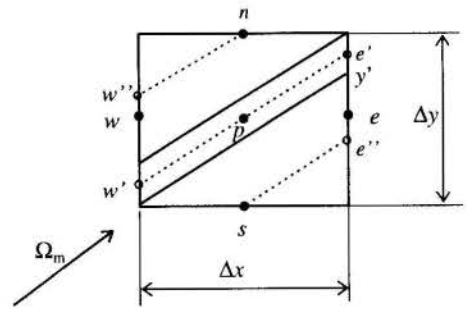


Figura 4 - Representação de um volume de controle para  $\lambda < 1$ .

- face norte

$$I_{n_m} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left[ I_{w_m} e^{-\frac{\beta x}{\mu}} + Q_m \left( 1 - e^{-\frac{\beta x}{\mu}} \right) \right] dx \quad (19)$$

$$= Q_m + (I_{w_m} - Q_m) (1 - e^{-\alpha_x}) / \alpha_x$$

$$I^*_{n_m} = Q_m + (I_{w_m} - Q_m) e^{-\alpha_x/2} \quad (20)$$

- face leste

$$I_{e_m} = \frac{1}{\Delta y} \left\{ \int_0^{y'} \left[ I_{s_m} e^{-\frac{\beta y}{\eta}} + Q_m \left( 1 - e^{-\frac{\beta y}{\eta}} \right) \right] dy + \int_{y'}^{\Delta y} \left[ I_{w_m} e^{-\alpha_x} + Q_m \left( 1 - e^{-\alpha_x} \right) \right] dy \right\} \quad (21)$$

$$= Q_m + (I_{s_m} - Q_m) \lambda (1 - e^{-\alpha_y}) / \alpha_x + (I_{w_m} - Q_m) e^{-\alpha_x} (1 - \lambda)$$

$$\begin{aligned}
 I_{e_m}^* &= I_{e_m}^* \lambda + I_{e_m}^* (1 - \lambda) \\
 &= Q_m + (I_{s_m} - Q_m) e^{-\alpha x/2} \rho \\
 &\quad + (I_{w_m} - Q_m) e^{-\alpha x} (1 - \rho)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Cálculo da intensidade radiativa no centro do volume de controle :

Lathrop (1969) propõe a discretização da eq. (4) na forma de diferenças finitas para o cálculo da intensidade radiativa no centro do volume de controle,  $I_{p_m}$ , desta forma obtém-se :

$$\mu \frac{(I_{e_m} - I_{w_m})}{\Delta x} + \eta \frac{(I_{n_m} - I_{s_m})}{\Delta y} + \beta I_{p_m} = Q_m
 \tag{23}$$

Entretanto, El Wakil (1991), aproxima  $I_{p_m}$  pela intensidade radiativa que chega a uma face que tenha percorrido uma mesma distância que ao ponto  $p$ , para  $\lambda > 1$  e  $\lambda < 1$ , ou considera uma média entre duas faces para  $\lambda = 1$ , que resulta em :

$$\begin{aligned}
 I_{p_m}^* &= \frac{I_{e_m}^* + I_{n_m}^*}{2} ; \lambda = 1 \\
 I_{p_m}^* &= I_{e_m}^* ; \lambda > 1 \\
 I_{p_m}^* &= I_{n_m}^* ; \lambda < 1
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Esta formulação, embora se aproxime do valor  $I_{p_m}^*$  na posição central do volume de controle, não corresponde ao valor médio do volume que é utilizado para o cálculo do termo fonte. Para uma comparação somente da forma de avaliação das intensidades radiativas nas faces do volume de controle entre os métodos, equações (11) a (22), propõe-se uma alteração na forma de estimação de  $I_{p_m}^*$  no método de El Wakil. Utiliza-se a eq. (23) para o cálculo de  $I_{p_m}^*$ , a qual denomina-se El Wakil modificado.

## RESULTADOS

Apresenta-se uma comparação entre os métodos descritos e as soluções analíticas obtidas por Crosbie e Schrenker (1984) e Wu (1990). Para a obtenção da solução analítica se considera o meio isotrópico, cinzento, sem absorção (difusão pura), com  $\ell_x = \ell_y$ . As paredes da cavidade são negras, sendo a parede inferior  $s$  possui uma emissão difusa e unitária e as outras paredes uma emissão nula. Cabe notar entretanto, que as soluções analíticas são obtidas através de funções exponenciais que ocasionam erros de truncagem de termos.

Resultados são expressos em termos da radiação incidente adimensionalizada, definida como :

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(s, \Omega) d\Omega \\
 G_p &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^M w_m I_{p_m} \\
 G_s &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^M w_m I_{s_m}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

onde  $G_p$  é a radiação incidente no centro de um volume  $p$  e  $G_s$  é a radiação incidente na parede inferior  $s$  da cavidade,

correspondendo a  $G(x, y=0)$ .

Define-se a espessura ótica como sendo :

$$\tau_o = \beta \ell_y
 \tag{26}$$

Resultados de radiação incidente na parede inferior da cavidade são listados para três diferentes espessuras óticas ( $\tau_o=0.25$ ;  $\tau_o=1.0$ ;  $\tau_o=4.0$ ) e para um albedo unitário nas Tabelas 2, 3 e 4 e Figura 5. Para estes casos, utilizou-se uma malha com dimensões de volume variável com centros nas coordenadas de  $x/\ell_x$ , perfazendo 23 x 23 volumes. Nota-se uma boa concordância entre os três métodos sendo que os erros aumentam proporcionalmente com a espessura ótica.

Todos os resultados apresentados foram resolvidos com um critério de convergência de  $10^{-8}$  para a radiação incidente em todos os pontos da malha.

Na Tabela 5 e Figura 6, mostra-se a variação da radiação incidente no plano médio vertical da cavidade para um meio isotrópico e espessura ótica igual a 1.0. Os três métodos apresentam solução próxima a obtida por Crosbie (1984). Nota-se um aumento dos erros em relação a solução analítica a medida em que se afasta da parede de emissão ( $y=0$ ). Este fenômeno é devido ao acúmulo de erros no cálculo da propagação das intensidades radiativas numa direção.

Tabela 2 - Comparação entre os métodos de ordenadas discretas ( $S_4$ ) e a solução analítica de Wu (1990), para  $\tau_o = 0.25$ ;  $\omega = 1.0$  e isotrópico.

$x/\ell_x$	analítico (Wu, 1990)	Lathrop	El Wakil	El Wakil modificado
0.0000	0.5249			
0.0061	0.5259	0.5264	0.5264	0.5265
0.0204	0.5274	0.5277	0.5276	0.5277
0.0425	0.5293	0.5294	0.5293	0.5294
0.0722	0.5313	0.5312	0.5311	0.5313
0.1088	0.5333	0.5333	0.5332	0.5333
0.1519	0.5353	0.5352	0.5350	0.5352
0.2008	0.5371	0.5371	0.5369	0.5371
0.2545	0.5386	0.5386	0.5385	0.5386
0.3122	0.5399	0.5400	0.5398	0.5400
0.3731	0.5408	0.5408	0.5407	0.5409
0.4360	0.5414	0.5414	0.5413	0.5415
0.5000	0.5416	0.5415	0.5414	0.5416

Tabela 3 - Comparação entre os métodos de ordenadas discretas ( $S_4$ ) e a solução analítica de Wu (1990), para  $\tau_o = 1.0$ ;  $\omega = 1.0$  e isotrópico.

$x/\ell_x$	analítico (Wu, 1990)	Lathrop	El Wakil	El Wakil modificado
0.0000	0.5664			
0.0061	0.5703	0.5692	0.5692	0.5694
0.0204	0.5765	0.5746	0.5744	0.5748
0.0425	0.5838	0.5819	0.5816	0.5821
0.0722	0.5916	0.5897	0.5895	0.5900
0.1088	0.5993	0.5982	0.5980	0.5985
0.1519	0.6065	0.6060	0.6058	0.6063
0.2008	0.6132	0.6134	0.6133	0.6138
0.2545	0.6190	0.6194	0.6193	0.6198
0.3122	0.6236	0.6246	0.6245	0.6250
0.3731	0.6270	0.6280	0.6279	0.6285
0.4360	0.6291	0.6303	0.6302	0.6308
0.5000	0.6298	0.6309	0.6308	0.6313



Tabela 4 - Comparação entre os métodos de ordenadas discretas ( $S_4$ ) e a solução analítica de Wu, 1990 para  $\tau_0 = 4.0$ ;  $\omega = 1.0$  e isotrópico.

$x/\ell_x$	analítico (Wu, 1990)	Lathrop	El Wakil	El Wakil modificado
0.0000	0.6116			
0.0061	0.6262	0.6204	0.6205	0.6208 <sup>t</sup>
0.0204	0.6477	0.6412	0.6410	0.6417
0.0425	0.6718	0.6663	0.6660	0.6670
0.0722	0.6963	0.6911	0.6910	0.6920
0.1088	0.7193	0.7149	0.7152	0.7160
0.1519	0.7402	0.7352	0.7356	0.7364
0.2008	0.7576	0.7527	0.7534	0.7541
0.2545	0.7725	0.7664	0.7672	0.7678
0.3122	0.7833	0.7773	0.7781	0.7788
0.3731	0.7922	0.7847	0.7856	0.7862
0.4360	0.7962	0.7894	0.7902	0.7909
0.5000	0.7989	0.7907	0.7916	0.7923

Tabela 5 - Comparação entre os métodos de ordenadas discretas ( $S_4$ ) e a solução analítica de Crosbie (1984), para  $\tau_0 = 1.0$ ;  $\omega = 1.0$  e isotrópico.

$y/\ell_y$	Lathrop	El Wakil	El Wakil modificado	analítico (Crosbie, 1990)
0.0000				0.6293
0.0061	0.6264	0.6275	0.6269	
0.0204	0.6160	0.6175	0.6164	
0.0425	0.5996	0.5987	0.6000	
0.0722	0.5767	0.5751	0.5771	
0.1088	0.5371	0.5319	0.5375	0.5108
0.1519	0.4791	0.4708	0.4795	
0.2008	0.4180	0.4121	0.4185	
0.2545	0.3741	0.3722	0.3745	
0.3122	0.3425	0.3428	0.3428	0.3525
0.3731	0.3161	0.3170	0.3163	
0.4360	0.2910	0.2875	0.2910	
0.5000	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
0.5640	0.2140	0.2135	0.2141	
0.6269	0.1972	0.1997	0.1972	
0.6878	0.1821	0.1844	0.1820	0.1768
0.7455	0.1684	0.1706	0.1683	
0.7992	0.1558	0.1579	0.1557	
0.8481	0.1442	0.1461	0.1440	
0.8912	0.1335	0.1353	0.1333	0.1171
0.9278	0.1239	0.1255	0.1237	
0.9575	0.1157	0.1173	0.1156	
0.9796	0.1094	0.1107	0.1092	
0.9939	0.1052	0.1063	0.1051	
1.0000				0.0863

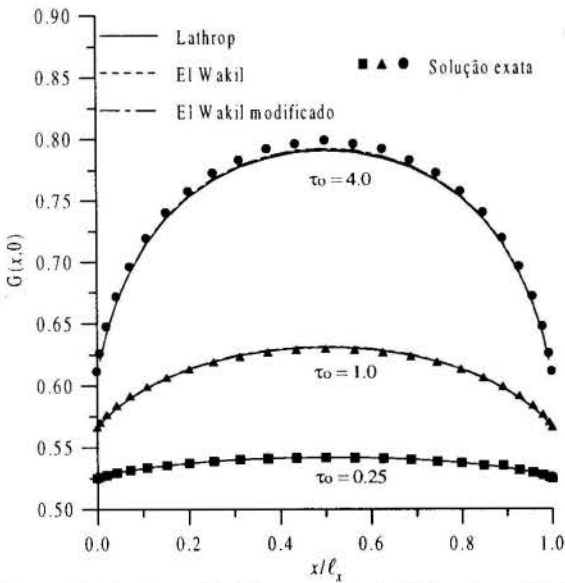


Figura 5 - Radiação Incidente na face inferior da cavidade para diferentes espessuras óticas;  $\omega = 1.0$  e isotrópico.

A Figura 7 apresenta a variação das intensidades radiativas no plano médio vertical da cavidade para diferentes direções. As direções que possuem o valor de  $I_m=1$  em  $y=0$  (correspondente à emissão da parede) são as direções positivas. A malha utilizada para o cálculo é também de  $23 \times 23$ .

Na Figura 8, vê-se a variação dos erros da radiação incidente para um ponto central na parede inferior da cavidade para três casos de espessuras óticas. Nota-se que a formulação de Lathrop converge mais rapidamente que a formulação de El Wakil embora a formulação de El Wakil modificada apresente uma convergência mais rápida. Para este cálculo utilizou-se malhas com dimensões iguais para cada volume.

O número de iterações para a convergência em cada método é praticamente o mesmo, Figura (9). Todavia, o método de Lathrop necessita de um tempo um pouco maior para execução devido ao número maior de operações, eq. (12) à eq. (21). O tempo de execução é para um computador IBM RISC System/6000/3AT.

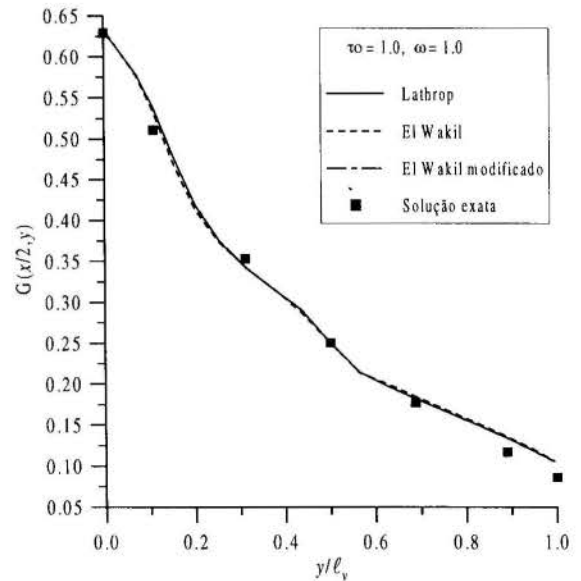


Figura 6 - Variação da Radiação Incidente no plano médio vertical da cavidade.

Embora o método de Lathrop permita uma convergência mais rápida devido a integração nas faces do volume este resultado não aparece por causa da necessidade de uma malha refinada para o cálculo da variação do termo fonte no meio.

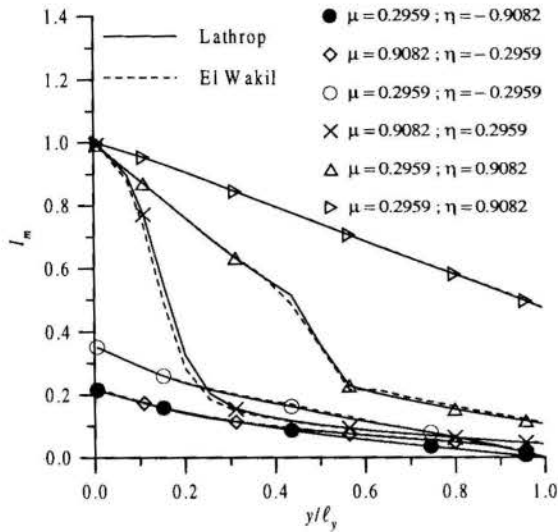


Figura 7 - Intensidades radiativas no plano médio vertical da cavidade,  $\tau_0=1.0$  e  $\omega=1.0$ .

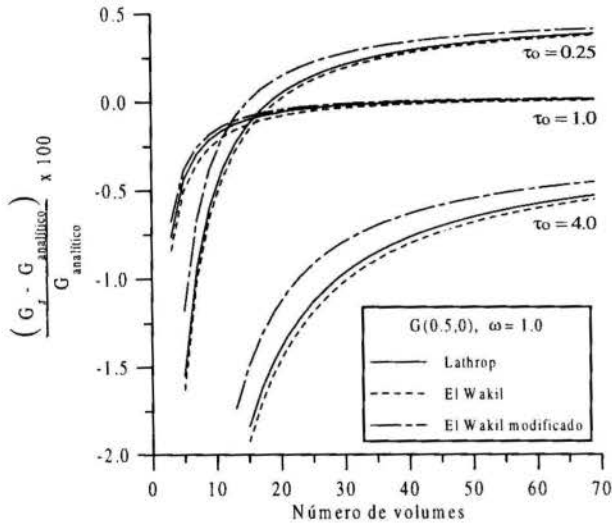


Figura 8 - Convergência em função da malha.

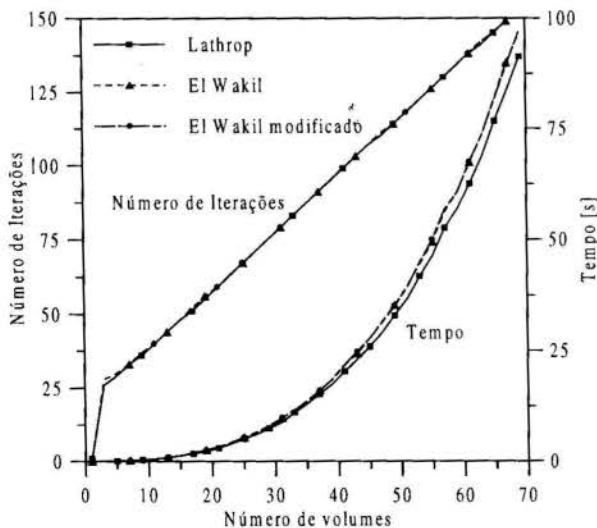


Figura 9 - Número de iterações e tempo de execução.

## CONCLUSÃO

Os resultados obtidos indicam que a utilização do método de Lathrop (1969) embora sendo uma aproximação mais real, pouco contribui para a redução do número de volumes na malha. A necessidade de um número de volumes suficientemente grande de maneira a levar em conta a variação do termo fonte em cada posição do meio não permite esta redução. Em casos onde o termo fonte possua uma influência menos significativa, ou seja, para meios com pouca emissão e difusão, o método de Lathrop deverá apresentar melhores resultados. Nota-se também que a modificação proposta para o método de El Wakil (1991) apresentou melhores resultados de convergência, sobretudo para meios opticamente densos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Carlson, B. G. e Lathrop, K. D., 1968, "Transport Theory the Method of Discrete Ordinates", In: *Computing Methods in Reactor Physics*. Edited by H. Greenspan, C. N. Kleber and D. Okrent. New York : Gordon and Breach, pp. 171 - 266.
- Chandrasekhar, S., 1960, "Radiative Transfer", *Dover Publication, Inc.*, New York, 393p.
- Crosbie, A. L. e Schrenker, R. G., 1984, " Radiative Transfer in a two-dimensional rectangular medium exposed to diffuse radiation", *J. Quant. Radiat. transfer*, vol. 31, pp. 339 - 372.
- El Wakil, N. e Sacadura, J.F., 1992, "Some Improvements of the Discrete Ordinates Method for the Solution of the Radiative Transport equation in multidimensional anisotropically scattering Media", *ASME Developments in Radiative Heat Transfer*, HTD-Vol. 203, pp. 119-127.
- El Wakil N., "Etude de transferts de chaleurs par conduction, convection et rayonnement couples des milieux semi-transparents fluides ou poreux. Elaboration de modeles de simulation en géométrie bidimensionnelle", *Tese de doutorado*, Insituit National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon.
- Lathrop, K. D., 1969, "Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs Accuracy", *Journal of Computational Physics*, vol.4, pp. 475 - 498.
- Özsisik, M.N., 1973, "Radiative Transfer and interaction with conduction and convection", *John Wiley and Sons*, New York, 575p.
- Wu C., 1990, "Radiative Transfer in a rectangular anisotropically scattering medium exposed to diffuse radiation", *J. Quant. Radiat. transfer*, vol. 43, No 3, pp. 217 -224.

## ABSTRACT

This work presents a numerical study for the solution of the Equation of Radiative Transfer (ERT) using two different Discrete Ordinates approaches. In the first one, the radiation intensities in each face are calculated based on the mean paths of radiation. In the second one, the radiation intensities in each face are obtained by integration of a function chosen to approximate the intensity of radiation within the control volume. A two-dimensional rectangular gray medium is exposed to diffuse radiation. The medium absorbs, emits and scatters radiation.



**RADIACION EN UN SISTEMA HETEROGENEO COMPUESTO DE  
PARTICULAS SEMITRANSSPARENTES. ABSORCION, DISPERSION Y  
FUNCION DE FASE EN EL LIMITE INDEPENDIENTE.**



**Enrique D. Negri**

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química  
INTEC - (UNL - CONICET)  
Güemes 3450 - (3000) Santa Fe - Argentina

RESUMEN

*Se modeló el comportamiento de una partícula esférica de diámetro muy superior a las longitudes de onda en consideración usando las técnicas de la óptica geométrica. Se logró así determinar además de la reflexión especular, las distintas refracciones y la dispersión total debida a la partícula. También se obtuvo la función de fase característica del sistema. Se comparan los resultados obtenidos con la teoría y datos experimentales publicados.*

INTRODUCCION

Los sistemas heterogéneos tienen una potencial aplicación muy importante en el campo de la fotocatalisis, en particular en su aplicación a la degradación (hasta la total mineralización) de compuestos orgánicos nocivos en agua. En general el catalizador más utilizado en los desarrollos es el dióxido de titanio ( $\text{TiO}_2$ ) muy finamente dividido, presentando el problema de la necesaria separación del catalizador una vez finalizado el tratamiento. Este problema se puede solucionar de dos maneras: i) aglomerando el catalizador de modo de obtener partículas más grandes y fáciles de separar, o, ii) soportando el catalizador en una base adecuada.

Como una primera aproximación a la consideración del campo radiante en un sistema de este tipo se analiza el comportamiento de una partícula esférica de índice de refracción conocido para determinar su comportamiento en cuanto a la absorción y dispersión de la luz monocromática. En particular se considera el campo de radiación en una suspensión monodispersa diluida de partículas esféricas semitransparentes de diámetros relativamente grandes respecto de las longitudes de onda de interés.

Las propiedades de una partícula única se relacionan con las propiedades del sistema con la suposición de dispersión independiente (Siegel y Howell, 1992). Con este modelo es posible obtener la eficiencia de absorción y dispersión, y las funciones de fase de los distintos procesos considerados que inciden en la dispersión de un haz colimado y monocromático de energía radiante en función de las propiedades y dimensiones de la partícula. Así es posible representar una función de fase realista que conjuga todos los procesos de dispersión, y la importancia relativa de la reflexión especular y las sucesivas refracciones que sufre un rayo monocromático en su trayectoria dentro de la partícula.

Se verifican los resultados del modelo en un rango estrecho de longitudes de onda (UV cercano: 300 nm-400 nm), para esferas de sílice en un medio acuoso. Se compara el modelo completo con resultados utilizando la Teoría de Mie, funciones de fase conocidas (Siegel y Howell, 1992) y datos experimentales publicados (Alfano y otros, 1995).

MODELADO DE LA PARTICULA

El comportamiento de una partícula esférica semitransparente se modeló con las técnicas de la óptica geométrica (ray tracing) en lugar de utilizar la formulación de Mie que para diámetros de partícula ( $d_p$ ) grandes es extremadamente laboriosa (Siegel y Howell, 1992). Definidos los índices de refracción del medio y de las partículas se consideró la reflexión especular en la superficie, las sucesivas refracciones y reflexiones internas y la absorción interna (caracterizada por un coeficiente de absorción proporcional a la parte imaginaria del índice de refracción de la partícula). Para los parámetros de tamaño  $\left(\pi d_p / \lambda\right)$  considerados, los fenómenos de difracción se despreciaron (Tien, 1988; Singh y Kaviany, 1991). La solución de Mie requiere la evaluación de expansiones del orden de dos veces el valor del parámetro de tamaño para obtener convergencia.

Determinación a priori de parámetros ópticos. Utilizando los conceptos de óptica geométrica, se pueden evaluar en función del índice de refracción ( $n_\lambda$ ) de la partícula, las distintas reflexiones y refracciones que sufre un rayo de luz al incidir sobre una banda infinitesimal de partícula. Con la parte imaginaria de  $n_\lambda$  se puede a su vez estimar un coeficiente de absorción para el material, que determinará la eficiencia final de los procesos de dispersión y absorción respectivamente.

La reflexión especular se puede estimar de la expresión de la reflectividad hemisférica total con la expresión:

$$\rho_\lambda^0 = \int_0^{\pi/2} 2 \rho_{\lambda(\omega)}^0 \sin(\omega) \cos(\omega) d\omega \quad (1)$$

donde  $\rho_{\lambda(\omega)}^0$  es la reflectividad direccional que puede obtenerse de la leyes de reflexión,  $\omega$  es el ángulo de incidencia, y se

supone radiación incidente no polarizada. En la Figura 1 se presenta un esquema donde es posible visualizar la distribución angular de un rayo incidente con un ángulo  $\omega$  respecto a la normal a la superficie de la partícula.

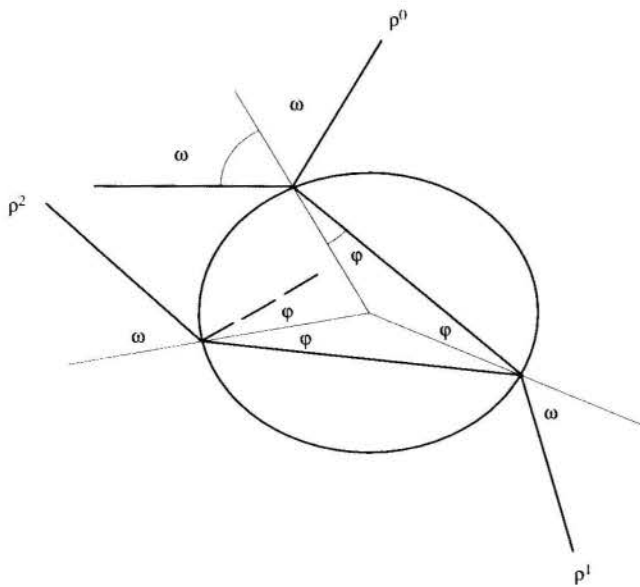


Figura 1 - Evolución de un rayo con ángulo de incidencia  $\omega$  sobre una partícula semitransparente.

Considerando el camino recorrido por el rayo en el interior de la partícula hasta la nueva interfase, la expresión para la fracción de radiación que es dispersada en primera refracción es:

$$\rho_{\lambda}^1 = \int_0^{\pi/2} 2 \left(1 - \rho_{\lambda}^0(\omega)\right)^2 (1 - \alpha_{\lambda}) \text{sen}(\omega) \cos(\omega) d\omega \quad (2)$$

donde  $\alpha_{\lambda}$  es la fracción absorbida de radiación:

$$\alpha_{\lambda} = 1 - \exp(-K_p d_p \cos \varphi) \quad (3)$$

siendo  $\varphi$  el ángulo de refracción intrapartícula

$$\varphi = \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen} \omega}{n_{\lambda}} \right) \quad (4)$$

De la misma manera la segunda refracción se puede evaluar como sigue:

$$\rho_{\lambda}^2 = \int_0^{\pi/2} 2 \rho_{\lambda}^0(\omega) \left(1 - \rho_{\lambda}^0(\omega)\right)^2 (1 - \alpha_{\lambda})^2 \text{sen}(\omega) \cos(\omega) d\omega \quad (5)$$

En general el aporte total de la n-ésima refracción se puede obtener:

$$\rho_{\lambda}^n = \int_0^{\pi/2} 2 \left(\rho_{\lambda}^0(\omega)\right)^{n-1} \left(1 - \rho_{\lambda}^0(\omega)\right)^2 (1 - \alpha_{\lambda})^n \text{sen}(\omega) \cos(\omega) d\omega \quad (6)$$

Sumando todos los aportes dispersivos se puede obtener la fracción total de radiación dispersada ( $\rho_{\lambda}^*$ ) por la reflexión especular y todas las refracciones internas:

$$\rho_{\lambda}^* = \int_0^{\pi/2} 2 \frac{\rho_{\lambda}^0(\omega) + (1 - \alpha_{\lambda}) - 2 \rho_{\lambda}^0(\omega) (1 - \alpha_{\lambda})}{1 - \rho_{\lambda}^0(\omega) (1 - \alpha_{\lambda})} \text{sen}(\omega) \cos(\omega) d\omega \quad (7)$$

En la Tabla 1 se presentan los ángulos de dispersión para la reflexión, primer refracción y sucesivas refracciones según estas sean pares o impares, para una dado ángulo de incidencia  $\theta$ .

En base a las consideraciones anteriores, y suponiendo que el sistema se encuentre en el límite de dispersión independiente (Siegel y Howell, 1992), es decir concentraciones de partículas suficientemente bajas como para que el efecto de dicho parámetro sea simplemente lineal (proporcional al número de partículas por unidad de volumen), se puede estimar a priori el coeficiente de dispersión volumétrico de las partículas ( $\sigma_{\lambda}$ ) y el coeficiente de absorción volumétrica de la fase sólida ( $\kappa_{\lambda}$ ):

$$\sigma_{\lambda} = N_p \pi \frac{d_p^2}{4} (1 + \rho_{\lambda}^*) \quad (8)$$

$$\kappa_{\lambda} = N_p \pi \frac{d_p^2}{4} (1 - \rho_{\lambda}^*) \quad (9)$$

donde  $N_p$  es el número de partículas por unidad de volumen, y la dispersión tiene un sumando unitario que agrega el efecto de la difracción imposible de tener en cuenta con la óptica geométrica y que para esferas grandes adiciona una eficiencia suplementaria (Bohren y Huffman, 1983).

Tabla 1 - Angulos de dispersión para los distintos fenómenos ópticos considerados

Fenómeno	Angulo de dispersión
Reflexión	$\pi - 2 \theta$
Primera Refracción	$2 (\pi + \varphi - \theta)$
Refracción 2 n	$\pi + 2 [(2 n) \varphi - \theta]$
Refracción (2 n - 1)	$2 [(2 n - 1) \varphi - \theta]$

**Funciones de fase.** De la información obtenida y utilizada hasta el momento es posible obtener la expresión de la redistribución de energía radiante provocada por una partícula esférica semitransparente y que para el caso de reflexión total puede obtenerse directamente de (Siegel y Howell, 1992):



$$p_{\lambda(\beta)} = \frac{\rho_{\lambda((\pi-\beta)/2)}^0}{\rho_{\lambda}^0} \quad (10)$$

Tomando en consideración la primera refracción que para partículas de absorción reducida es la fracción francamente mayoritaria de la dispersión radiativa, la función de fase toma la forma:

$$p_{\lambda(\beta)} = \frac{\rho_{\lambda((\pi-\beta)/2)}^0 + \rho_{\lambda(\theta^1(\beta))}^1 \Psi_{(n,\theta^1(\beta))}^1}{\rho_{\lambda}^0 + \rho_{\lambda}^1} \quad (11)$$

donde  $\theta^1(\beta)$  es el ángulo de incidencia para dar en primera refracción un ángulo de dispersión  $\beta$ , el factor  $\Psi^1$  es función de la parte real del índice de refracción ( $n_{\lambda}$ ) y el ángulo de incidencia correspondiente al ángulo de dispersión considerado, y se puede calcular como:

$$\Psi_{(n,\theta)}^1 = \frac{\cos(\theta) \cos(\varphi)}{[\cos(\theta) - \cos(\varphi)/n] \cos(\theta - \varphi)} \quad (12)$$

En la Figura 2 se presentan las formas de las funciones de fase para la reflexión especular únicamente (ec. 10) y para la combinación de reflexión y primera refracción (ec. 11-12). Estas se han obtenido en base a un índice de refracción correspondiente al sistema agua-sílice.

## APLICACION Y RESULTADOS

Se aplican los desarrollos anteriores a un sistema constituido por partículas de sílice suspendidas en agua, para el cual se dispone de resultados experimentales publicados (Alfano y otros, 1995). Las partículas utilizadas tienen un diámetro medio de 58  $\mu\text{m}$ , se analiza un rango de longitudes de onda estrecho entre 295 y 435 nm. En el rango considerado, se puede suponer índices de refracción constantes, para el agua 1.33 y para el sílice 1.44, lo que da un índice de refracción para el sistema de 1.0827. Suponiendo un coeficiente de absorción para la partícula ( $K_p = 1.0 \text{ cm}^{-1}$ ), un valor bajo compatible con la baja absorción de la sílice en las longitudes de onda consideradas, se pueden obtener las distintas contribuciones a la dispersión y la fracción total dispersada (Tabla 2).

Se puede observar que el grueso de la dispersión se debe a la primera refracción, y que la reflexión especular y la segunda refracción comparten un orden relativo muy inferior. Las sucesivas refracciones no afectan ya prácticamente la fracción final de radiación dispersada.

Tabla 2 - Fracciones de radiación dispersada

$\rho_{\lambda}^0$	0.02144
$\rho_{\lambda}^1$	0.95771
$\rho_{\lambda}^2$	0.01391
$\rho_{\lambda}^3$	0.00176
$\rho_{\lambda}^4$	0.00049
$\rho_{\lambda}^5$	0.00019
$\rho_{\lambda}^6$	0.00009
$\rho_{\lambda}^*$	0.99573

En la Figura 2 se presenta la función de fase resultante de considerar juntamente la reflexión especular y la primera refracción, la correspondiente a la reflexión especular únicamente, y la resultante de la aplicación de la teoría de Mie. Estas funciones de fase se han calculado para un diámetro de partícula de 58  $\mu\text{m}$ , diámetro medio de las partículas de Porasil A-B (Waters Associates) utilizadas en las determinaciones experimentales de Alfano et al. (1995). Dada la práctica inexistencia de absorción, el diámetro de la partícula no afecta los resultados de las funciones de fase en base a la óptica geométrica. En esta figura la función propuesta representa el 98 % de la dispersión total. Como se ve, resulta altamente más pronunciado el efecto dispersivo hacia adelante que en el caso simplificado de la reflexión especular. Dado que la primera refracción dispersa únicamente hacia adelante, la incidencia relativa de la dispersión hacia atrás baja más de un orden de magnitud. La función de fase

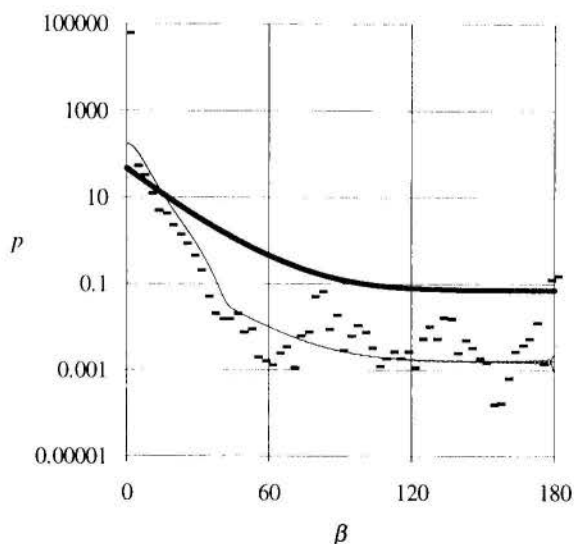


Figura 2- Función de fase para la reflexión especular sola (—), combinada con la primera refracción (· · · · ·), y la correspondiente a la teoría de Mie (—).

completa presentada en este trabajo muestra una mayor aproximación a los resultados de la teoría de Mie.

Los coeficientes de dispersión y absorción máscos correspondientes a los parámetros considerados se pueden estimar según las ecuaciones (8) y (9), para los parámetros característicos del material utilizado (Porasil A-B (Waters)):  $\sigma^* = 288.3 \text{ cm}^2/\text{g}$  y  $\kappa^* = 0.62 \text{ cm}^2/\text{g}$ . El valor de  $\sigma^*$  coincide adecuadamente con los valores experimentales publicados (Alfano y otros, 1995):  $276 \text{ cm}^2/\text{g} \geq \sigma^* \geq 253 \text{ cm}^2/\text{g}$  en el entorno de longitudes de onda de trabajo ( $295 \text{ nm} \geq \lambda \geq 435 \text{ nm}$  respectivamente). Para el modelo que utiliza óptica geométrica, los coeficientes (y la función de fase) no serán función de la longitud de onda ( $\lambda$ ) a menos que se disponga de información sobre la variación del índice de refracción o del coeficiente de absorción de la partícula con ese parámetro.

**Campo de radiación.** La información obtenida puede incluirse en la resolución del campo radiante de un sistema simplificado cartesiano-unidimensional (13) con una condición de contorno difusa (14) y otra con absorción pura (15) (Özsisik, 1973; Alfano y otros, 1995):

$$\mu \frac{\partial}{\partial y} I_{\lambda(y,\mu)} + (\kappa_{\lambda} + \sigma_{\lambda}) I_{\lambda(y,\mu)} = \frac{\sigma_{\lambda}}{2} \int_{-1}^1 P(\mu' \rightarrow \mu) I_{\lambda(y,\mu')} d\mu' \quad (13)$$

$$I_{\lambda(0,\mu)} = I_{\lambda,0} \quad \mu > 0 \quad (14)$$

$$I_{\lambda(L,\mu)} = I_{\lambda,L} = 0 \quad \mu < 0 \quad (15)$$

Esta ecuación integrodiferencial se puede resolver numéricamente por diversos métodos (Siegel y Howell, 1993). La resolución de esta ecuación requiere la representación de la función de fase en polinomios de Legendre, requiriendo, para el caso analizado, órdenes elevados de aproximación. En la Figura 2 se ha superpuesto sobre la función de fase completa una aproximación con polinomios de Legendre de orden 92, en la que se nota una oscilación en el extremo de dispersión hacia atrás. Esto ya fue adelantado para el caso más sencillo de reflexión especular (Alfano y otros, 1995).

## CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo para predecir los parámetros ópticos de un sistema particulado de tamaño grande en relación a las longitudes de onda de interés. A partir de las características macroscópicas del sistema y conociendo el índice de refracción correspondiente, es posible obtener: el coeficiente de absorción volumétrico, el coeficiente de dispersión volumétrico (o sus versiones intensivas) y la función de fase correspondiente.

Los parámetros obtenidos contrastan adecuadamente con la teoría y datos experimentales publicados, y permiten por lo tanto la evaluación de campos radiantes con una adecuada aproximación.

Una posible continuación de este trabajo consiste en la consideración de partículas compuestas, específicamente el caso de una base transparente y una película activa (dióxido de titanio). La obtención de parámetros ópticos para este sistema es de gran interés práctico.

## AGRADECIMIENTOS

Se hace especial mención al aporte de la Lic. en Matemática Raquel S. Cadoche. Este trabajo fue financiado parcialmente con fondos de CONICET, PID-BID 3-0201-1006/92.

## REFERENCIAS

- Alfano O.M., Negro A.C., Cabrera M.I. y Cassano E.A., 1995, "Scattering Effects Produced by Inert Particles in Photochemical Reactors. I. Model and Experimental Verification", *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 34, pp. 488-499.
- Bohren C.F. y Huffman, D.R., 1983, "Absorption and Scattering of Light by Small Particles", John Wiley & Sons, New York.
- Özsisik M.N., 1973, "Radiative Transfer", John Wiley & Sons, New York.
- Siegel R. y Howell J.R., 1992, "Thermal Radiation Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, Bristol, PA.
- Singh B.P. y Kaviany M., 1991, "Independent Theory Versus Direct Simulation of Radiation Heat Transfer in Packed Beds", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 2869-2882.
- Tien C.L., (1988), "Thermal Radiation in Packed and Fluidized Beds", *J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1230-1242.
- van de Hulst H.C., 1981, "Light Scattering by Small Particles", Dover Publications Inc., New York.

## ABSTRACT

### RADIATION IN AN HETEROGENEOUS SYSTEM OF SEMITRANSSPARENT SPHERICAL PARTICLES. SCATTERING, ABSORPTION AND PHASE FUNCTION IN THE INDEPENDENT LIMIT.

The behavior of a single particle of an absorbing material with a diameter greater than the wave length of the radiation considered is modeled using the geometrical optics approximation. The distribution of photons in the different directions was evaluated with the aid of the refraction index and the volumetric absorption of the particle. The fraction of radiation scattered by each reflection and refraction process was determined and the total scattering and absorption coefficients for the particle were determined assuming independent scattering. A compound phase function with reflection and the first refraction process is presented. Results were compared with published experimental results and the Mie theory for a system of silica particles in water and good agreement was found in both cases.

**ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM GASES NÃO-CINZENTOS UTILIZANDO O MÉTODO DAS ORDENADAS DISCRETAS ASSOCIADO AO MODELO ESTATÍSTICO A BANDAS ESTREITAS**

**ABCm**

De Miranda, A. B. <sup>1</sup>, Sacadura, J.-F. <sup>2</sup>, Delmas, A. <sup>2</sup>

1- DEMEC, UFMG, av. Antônio Carlos n° 6627, 31270-901 Belo Horizonte, M G, Brasil

2- CETHIL, URA CNRS 1372, INSA, 20 av. Einstein, bât. 404, 69621 Villeurbanne, France



**RESUMO**

*Neste trabalho é apresentado um modelo preditivo da transferência térmica radiativa em gases moleculares. A presente abordagem simplificada se baseia em uma formulação integral do método das Ordenadas Discretas combinado a um modelo estatístico de bandas estreitas para a descrição das propriedades radiativas do gás. A transferência térmica radiativa em gases não-cinzentos é tratada de maneira que a não consideração das correlações espectrais tem uma incidência limitada sobre os resultados obtidos. O caso de uma geometria cartesiana bidimensional é estudado. Comparações com resultados não-dispersivos obtidos na literatura validam a aplicação da formulação integral ao método das Ordenadas Discretas, como demonstrado pelo bom compromisso entre economia de cálculo e acurácia dos resultados.*

**INTRODUÇÃO**

Em um grande número de aplicações industriais, a transferência térmica radiativa em meios gasosos interage com outros modos de transferência de calor, em particular com a convecção, seja ela natural, forçada ou mista. Esses fenômenos devem ser analisados de maneira precisa para ambientes encontrados frequentemente em equipamentos industriais tais como fornos, câmaras de combustão, reatores nucleares, turbinas a gás, etc. Vários graus de aproximação já foram utilizados para o tratamento da radiação na equação de energia. Hipóteses simplificadoras por demais simplistas, tais como a homogeneidade do meio ou o fato de o considerar como cinzento, podem levar a resultados pouco satisfatórios para a maioria das aplicações. Por outro lado, cálculos mais rigorosos levando em conta o caráter espectral de alta resolução dos meios gasosos podem tornar-se incompatíveis com uma utilização em engenharia, visto o enorme esforço de cálculo requerido. A necessidade de poder tratar os efeitos de acoplamento da transferência radiativa com a convecção em geometrias outras que a unidimensional conduz à procura de um bom compromisso entre a precisão dos resultados e o custo dos cálculos.

Dois aspectos da modelização da transferência de calor por radiação em um sistema contendo gases participantes merecem consideração: de um lado o cálculo do campo de intensidades radiativas, o que implica na escolha de uma técnica de resolução da equação de transferência radiativa (ETR), e de outro lado a descrição das propriedades radiativas dos gases, o que implica na escolha do modelo de bandas. Estes dois aspectos são estreitamente ligados entre si e a escolha das técnicas envolvidas deve levar em conta as particularidades de cada um e a compatibilidade entre ambos. A primeira tentativa para combinar o método das ordenadas discretas Sn com o modelo estatístico à bandas estreitas se deve a Lee e seus colaboradores para o caso unidimensional (Kim et al., 1991a e 1991b e Menart et al., 1993). Em todos os trabalhos supra-mencionados a ETR foi resolvida em sua forma diferencial, e os efeitos de correlação espectral tratados de forma rigorosa, o que torna tais técnicas extremamente custosas em termos de tempo de cálculo e estocagem de dados. Esse esforço computacional é ainda maior quando se trata de paredes refletoras, uma vez que as correlações de parede são tratadas de maneira explícita. Em trabalhos recentes, o método de Monte Carlo mostrou muito

bons resultados para o tratamento de casos unidimensionais (Liu e Tiwari, 1994) e bidimensionais (Liu e Tiwari, 1993), nos quais foram propostas soluções aproximadas no que concerne o rigor no tratamento das correlações espectrais com uma consequente economia de custos computacionais.

No presente trabalho, é proposta uma versão aproximada da técnica Sn que pode ser utilizada com um computador de potência média, do tipo estação de trabalho ou mesmo um PC, o que a torna melhor adaptada a uma utilização industrial do que aquelas propostas até o presente. Esse modelo é uma extensão bidimensional da versão unidimensional anteriormente publicada (De Miranda e Sacadura, 1995).

**FORMULAÇÃO**

Nesta seção é feito o desenvolvimento da formulação da Equação da Transferência Radiativa (ETR) para o caso simplificado onde o gás é puramente absorptivo e emissivo. A forma diferencial da ETR, tomada a média em relação ao número de onda, se apresenta da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{I}_v(\mathbf{s}, \Omega)}{\partial s} + \bar{\kappa}_v(\mathbf{s}) \bar{I}_v(\mathbf{s}, \Omega) = \bar{\kappa}_v(\mathbf{s}) \bar{I}_{bv}(\mathbf{s}) \quad (1)$$

Nesta equação,  $\bar{I}_v(\mathbf{s}, \Omega)$  representa a intensidade radiativa em uma posição  $\mathbf{s}$  segundo uma direção  $\Omega$ ;  $\bar{\kappa}_v(\mathbf{s})$  o coeficiente local de absorção; e  $\bar{I}_{bv}(\mathbf{s})$  a emissão de um corpo negro à mesma temperatura do gás. O subscrito  $v$  indica que se trata de uma grandeza espectral.

As quantidades representadas sob barras são consideradas tomando-se uma média sobre um intervalo espectral. Os termos sob a mesma barra devem ter as médias tomadas como uma só quantidade, para um cálculo que leve em conta rigorosamente as correlações.

A integração da Eq. (1) sobre um caminho  $s_w \rightarrow s$  segundo uma direção  $\Omega$ , sujeita a uma condição de contorno formal nos dá:

$$\bar{I}_v(s, \Omega) = \overline{I_{wv}(s_w, \Omega) \tau_v(s_w \rightarrow s)} + \int_{s_w}^s \overline{\kappa_v(s') \tau_v(s' \rightarrow s) I_{bv}(s') ds'} \quad (2)$$

onde a transmissividade média no intervalo espectral  $\Delta v$  é definida como sendo:

$$\overline{\tau_v(s' \rightarrow s)} \equiv \exp \left[ \int_{s'}^s \overline{\kappa_v(s'')} ds'' \right] \quad (3)$$

O valor médio  $\overline{\kappa_v(s') \tau_v(s' \rightarrow s)}$  na Eq. (2) pode ser modificado procedendo-se à diferenciação em relação à posição  $s$  e usando-se a regra de Liebnitz. A forma integral da ETR assume então a forma seguinte:

$$\bar{I}_v(s, \Omega) = \overline{I_{wv}(s_w, \Omega) \tau_v(s_w \rightarrow s)} + \int_{s_w}^s \frac{\partial \overline{\tau_v(s' \rightarrow s)}}{\partial s'} \overline{I_{bv}(s') ds'} \quad (4)$$

Como pode ser observado tanto na forma integral quanto na forma diferencial da ETR, o termo de emissão pode ter o seu valor médio calculado separadamente, uma vez que a função de Planck tem uma forma espectralmente lisa.

As condições de contorno, representadas pela intensidade radiativa  $\overline{I_{wv}(s_w, \Omega)}$  são calculadas pela expressão:

$$\overline{I_{wv}(s_w, \Omega)} = \epsilon_w \bar{I}_{bwv}(s_w) + \frac{\rho_w}{\pi} \int_{\hat{n}, \Omega' > 0} |\hat{n} \cdot \Omega'| \overline{I_{wv}(s_w, \Omega')} d\Omega' \quad (5)$$

para  $\hat{n} \cdot \Omega' < 0$

onde  $\overline{I_{wv}(s_w, \Omega')}$  designa as intensidades radiativas que partem da parede,  $\epsilon_w$  a emissividade da parede,  $\rho_w$  a reflectividade e  $\bar{I}_{bwv}(s_w)$  a emissão de corpo negro da parede. O vetor normal incidente é representado por  $\hat{n}$ , e a emissividade  $\epsilon_w$  pode ser dada por  $\epsilon_w = 1 - \rho_w$  se a parede é considerada opaca e a lei de Kirchhoff sobre equilíbrio termodinâmico local válida.

A forma discretizada da ETR para a face  $i$  de um volume de controle é a seguinte:

$$\bar{I}_{v,n,i} = \overline{I_{wv,n,i} \tau_{v,i \rightarrow i+1}} + \sum_{k=1}^{i-1} \left[ \overline{I_{bv,n,k+1/2}} (\bar{\tau}_{v,k+1 \rightarrow i} - \bar{\tau}_{v,k \rightarrow i}) \right] \quad (6)$$

onde os índices inferiores  $v$ ,  $n$ , e  $i$  se referem ao número de onda, à discretização angular e à discretização espacial, respectivamente. Uma Equação semelhante pode ser escrita para a face de volume de controle  $i+1$ . A diferença entre estas

duas equações produz uma expressão recursiva para a intensidade  $\bar{I}_{v,n,i+1}$  em função de  $\bar{I}_{v,n,i}$ . Como a presente formulação se baseia no cálculo e armazenagem de um só valor de transmissividade  $\tau_{v,i \rightarrow i+1}$  para cada volume de controle, a adoção de hipóteses simplificadoras se impõe. Isto é feito adotando-se as expressões não-correlacionadas seguintes:

$$\overline{I_{wv,n,i} \tau_{v,i \rightarrow i+1}} = \overline{I_{wv,n,i}} \overline{\tau_{v,i \rightarrow i+1}} \quad (7)$$

$$\overline{\tau_{v,k+1 \rightarrow i+1}} = \overline{\tau_{v,k+1 \rightarrow i}} \overline{\tau_{v,i \rightarrow i+1}} \quad (8)$$

Quando isto é feito, a expressão para a intensidade na face  $i+1$  do volume de controle assume o seguinte aspecto:

$$\bar{I}_{v,n,i+1} = \overline{I_{v,n,i}} + \overline{I_{bv,i+1/2}} (1 - \bar{\tau}_{v,i \rightarrow i+1}) + \left\{ \overline{I_{wv,n,i} \tau_{v,i \rightarrow i+1}} + \sum_{k=1}^{i-1} \left[ \overline{I_{bv,n,k+1/2}} (\bar{\tau}_{v,k+1 \rightarrow i} - \bar{\tau}_{v,k \rightarrow i}) \right] \right\} (\bar{\tau}_{v,i \rightarrow i+1} - 1) \quad (9)$$

Considerando-se que o fator entre chaves no terceiro termo à esquerda do sinal de igualdade é precisamente a expressão para  $\bar{I}_{v,n,i}$  dada pela Eq. (6), obtém-se:

$$\bar{I}_{v,n,i+1} = \overline{I_{v,n,i}} \overline{\tau_{v,i \rightarrow i+1}} + \overline{I_{bv,i+1/2}} (1 - \bar{\tau}_{v,i \rightarrow i+1}) \quad (10)$$

Esta é a forma recursiva da equação integrada da intensidade radiativa para a obtenção de soluções não-correlacionadas em meios gasosos não-cinzentos sem dispersão, confinados entre duas paredes planas infinitas.

A validação da formulação integral para a geometria unidimensional foi feita para perfis de temperatura impostos (De Miranda e Sacadura, 1995) onde resultados obtidos com uma discretização direcional do tipo S-20 são comparados àqueles obtidos com a aplicação do Método dos Fluxos (Menart e Lee, 1993) e do Método das Ordenadas Discretas (Menart et al., 1993), ambos utilizando um tratamento rigoroso das correlações.

As transmissividades médias tomadas sobre um intervalo espectral estreito são calculadas, para cada volume de controle, pelo modelo estatístico a bandas estreitas seguindo uma lei de distribuição exponencial inversa (Malkmus, 1967; Young, 1977), obtida por:

$$\bar{\tau}_v(s' \rightarrow s) = \exp \left[ -\frac{\bar{\beta}_v}{\pi} \left( \sqrt{1 + \frac{2\pi u \bar{k}_v}{\bar{\beta}_v}} - 1 \right) \right] \quad (11)$$

Tais transmissividades são calculadas para uma dada fração molar da espécie participante  $x$  através de uma camada isotérmica e homogênea  $s' \rightarrow s$  submetida à uma pressão  $p$ . Na Eq. (11),  $u$  é o caminho médio de pressão ("pressure-path length"), definido como  $x p(s' \rightarrow s)$ ,  $\bar{\beta}_v = 2\pi \bar{\nu} / \delta_v$  é a relação entre a largura e o espaçamento médio das linhas de absorção e  $\bar{k}_v$  é a intensidade de absorção. Os valores  $\bar{k}_v$  e  $\bar{\nu} / \delta_v$  são parâmetros espectrais obtidos a partir de cálculos



"linha por linha", feitos por Hartmann et al. (1984) e Soufiani et al. (1985). A largura média à meia altura de linha,  $\bar{\gamma}_v$  é dada pela expressão (Zhang et al., 1988):

$$\bar{\gamma}_v = 0,066 \frac{P}{P_s} \left\{ \begin{array}{l} 7,0x_{H_2O} \frac{T_s}{T} \\ + \left[ 1,2(x_{H_2O} + x_{N_2}) \right. \\ \left. + 0,8x_{O_2} + 1,6x_{CO_2} \right] \sqrt{\left( \frac{T_s}{T} \right)} \end{array} \right\} \quad (12)$$

onde  $P_s$  e  $T_s$  são a pressão e a temperatura de referência e  $x_{H_2O}$ ,  $x_{N_2}$ ,  $x_{O_2}$  e  $x_{CO_2}$  são as frações molares das diversas espécies gasosas presentes. Todos os parâmetros têm os seus valores médios tomados sobre uma largura de banda fixada em  $25 \text{ cm}^{-1}$  e os cálculos são feitos para uma gama espectral de  $150$  a  $5675 \text{ cm}^{-1}$ .

**Meios Gasosos Dispersivos.** A introdução do fenómeno de dispersão é feita a partir de uma analogia à Lei de Beer (Siegel and Howell, 1972), resultando em uma técnica híbrida onde o conceito de coeficiente de extinção é combinado ao modelo estatístico a bandas estreitas. A equação espectral do transporte radiativo para um meio gasoso absorptivo, emissivo com dispersão assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{I}_v(s, \Omega)}{\partial s} + \bar{\kappa}_v(s) \bar{I}_v(s, \Omega) + \bar{\sigma}_v(s) \bar{I}_v(s, \Omega) = \bar{S}_v \quad (13)$$

onde  $\bar{\sigma}_v$  é o coeficiente de dispersão espectral e  $\bar{S}_v$  é um termo fonte radiativo contendo os ganhos por emissão e dispersão:

$$\bar{S}_v = \bar{\kappa}_v(s) \bar{I}_{bv}(s) + \frac{\bar{\sigma}_v}{4\pi} \int \bar{\phi}_v(\Omega, \Omega') \bar{I}_v(s, \Omega') d\Omega' \quad (14)$$

Na Eq. (14), o termo  $\bar{\phi}_v(\Omega, \Omega')$ , chamado função de fase, representa a probabilidade que um feixe de radiação incidente em um ângulo sólido  $d\Omega'$  centrado em  $\Omega'$  seja desviado para a direção  $\Omega$ . A solução formal da Eq. (13), consideradas constantes as propriedades do meio no trajeto  $(s' \rightarrow s)$ , assume a forma recursiva seguinte:

$$I_{vs} = I_{vs'} \exp(-\bar{\kappa}_v(s' \rightarrow s)) \exp(-\bar{\sigma}_v(s' \rightarrow s)) + \frac{S_v}{S_v + \bar{\sigma}_v} \left( 1 - \exp(-\bar{\kappa}_v(s' \rightarrow s)) \exp(-\bar{\sigma}_v(s' \rightarrow s)) \right) \quad (15)$$

É interessante notar que para o caso sem dispersão, isto é  $\bar{\sigma}_v = 0$ , e considerando-se válida a Lei de Beer,  $\tau_v(s' \rightarrow s) = \exp(-\bar{\kappa}_v(s' \rightarrow s))$ , esta expressão toma uma forma análoga à Eq. 10 para um percurso  $(s' \rightarrow s)$  no interior de um volume de controle e para uma banda espectral de  $25 \text{ cm}^{-1}$ . A sequência lógica do desenvolvimento consiste na substituição dos termos comportando  $\exp(-\bar{\kappa}_v(s' \rightarrow s))$  na Eq. 15 pela expressão da transmitividade  $\bar{\tau}_v$ , Eq. 11 e na

substituição do termo  $\bar{\kappa}_v$  na Eq. 14 pelo argumento da exponencial desta mesma Eq. 11. A expressão para a forma integral da ETR levando em conta o fenómeno da dispersão é a seguinte:

$$I_{vs} = I_{vs'} \exp(-\bar{\zeta}_v) \exp(-\bar{\sigma}_v) + \frac{\bar{S}_v}{\bar{\zeta}_v} \left( 1 - \exp(-\bar{\zeta}_v) \right) \quad (16)$$

onde:

$$\bar{S}_v = \bar{\omega}_v \bar{I}_{bv}(s) + \frac{\bar{\sigma}_v \cdot (s' \rightarrow s)}{4\pi} \int \bar{\phi}_v(\Omega, \Omega') \bar{I}_v(s, \Omega') d\Omega'$$

$$\bar{\zeta}_v = \bar{\omega}_v + \bar{\sigma}_v \cdot (s' \rightarrow s)$$

$$\bar{\omega}_v = \frac{\beta_v}{\pi} \left( \sqrt{1 + \frac{2\pi u \bar{\kappa}_v}{\beta_v}} - 1 \right)$$

A expressão para a espessura ótica de extinção  $\bar{\zeta}_v$ , integrando os efeitos de absorção e de dispersão correspondente ao caminho percorrido pelo feixe no interior do volume de controle  $(s' \rightarrow s)$ , é calculada uma só vez a cada iteração para um dado conjunto de parâmetros espectrais.

No presente artigo serão mostrados apenas casos sem dispersão, ou seja onde o termo  $\bar{\sigma}_v$  é igual a zero.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para validar a aplicação do método para um caso sem dispersão em geometria bidimensional cartesiana, estudou-se o caso simples de uma camada de vapor d'água confinada entre duas placas paralelas de largura  $L$  e espaçamento  $H$ , com uma profundidade infinita, como representado na Figura 1.

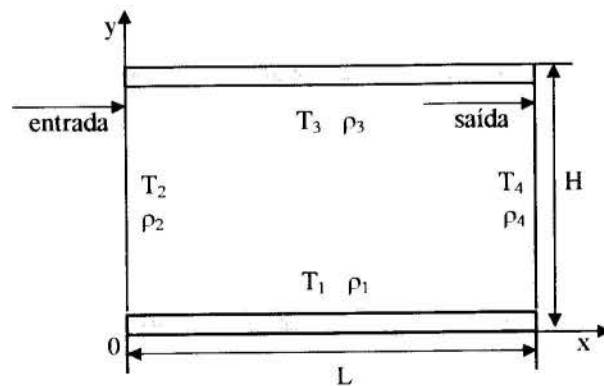


Figura 1 - Configuração estudada

O gás é suposto atravessar o espaço entre as duas placas transversalmente, de maneira que a entrada e a saída do gás sejam localizadas em  $x=0$  e  $x=L$  respectivamente, estando estes planos tratados como pseudo-paredes negras ( $\rho_2 = \rho_4 = 0$ ). As paredes inferior e superior são supostas cinzentas e difusas isotrópicas com reflectividades ( $\rho_1 = \rho_3 = 0,4$ ). A superfície esquerda representando a entrada do gás é suposta a  $800 \text{ K}$ , as duas paredes horizontais são consideradas à esta mesma temperatura e a superfície direita representando a saída do gás

é mantida a 300 K. O perfil de temperatura no interior do gás é dado pela expressão:

$$T(x,y) = 800 + 700 \left[ 1 - \frac{|2y - H|}{H} \right] \frac{x}{L} \quad (20)$$

A pressão e a concentração são supostas constantes em toda a extensão do gás, sendo a primeira considerada como 1 atm e a segunda igual a 100%. A configuração geométrica considerada é a de um retângulo de largura  $L=0,6\text{m}$  e altura  $H=0,3\text{m}$ .

Os resultados obtidos são a distribuição de dissipação radiativa no interior da cavidade formada pelas duas paredes e as duas superfícies de entrada e de saída, e o fluxo radiativo na vizinhança das paredes horizontais. Para obtê-los, utilizou-se uma discretização espacial de  $20 \times 20$  volumes de controle com uma distribuição de malhas ligeiramente mais refinada nas proximidades das paredes, de maneira a obter uma maior precisão dos resultados nestas regiões. Soluções para os campos de divergente do fluxo radiativo no seio da massa gasosa,  $\nabla \cdot \bar{q}_r$ , e de fluxo radiativo nas placas,  $\bar{q}_r$ , foram obtidas utilizando a metodologia descrita acima com um esquema S-6 para a discretização direcional. Essa escolha faz com que a intensidade radiativa seja considerada constante sobre um espaço de  $1/24$  da esfera de raio unitário em volta do nó central de cada volume de controle. As transmissividades médias foram calculadas com base numa largura  $25 \text{ cm}^{-1}$ , sobre uma banda espectral de  $150$  a  $5675 \text{ cm}^{-1}$  para o vapor d'água a 1 atm, totalizando 176 bandas estreitas. Tal configuração geométrica foi escolhida, assim como os perfis de temperatura e características das paredes, de maneira que se possa comparar os resultados obtidos no presente estudo com aqueles publicados por LIU e TIWARI (1993), obtidos pelo método Monte Carlo associado ao modelo estatístico de bandas estreitas. Em seu trabalho, a formulação levando rigorosamente as correlações espectrais (resultados "não-cinzentos") é comparada a uma abordagem simplificada, baseada em considerações sobre a razão entre as dimensões do volume de controle e a energia radiativa que sai deste. Esta técnica permitiu aos autores a obtenção de resultados satisfatórios (chamados resultados "aproximados"), com uma economia significativa do tempo de cálculo quando comparados aos resultados obtidos sem as ditas considerações. No referido artigo, tais técnicas foram comparados resultados "bandas estreitas cinzentas" (não mostrados neste trabalho).

Os resultados deste estudo são apresentados nas figuras 2a, 2b e 2c no que concerne à distribuição do divergente do fluxo radiativo nas posições  $x/L=0,275$ ,  $0,575$  e  $0,875$  respectivamente. Na figura 3 encontra-se a distribuição de fluxo radiativo nas paredes horizontais.

A figura 2a mostra a distribuição de  $-\nabla \cdot \bar{q}_r$  sobre o plano vertical passando pela abscissa  $x/L=0,275$ . Nessa posição, as mudanças de temperatura são menos acentuadas, como pode ser deduzido ao se examinar a Eq. (20). Esse comportamento do campo de temperaturas leva a um comportamento análogo para a distribuição de dissipação radiativa, com variações relativamente pequenas de energia transferida pelo meio à medida em que se afasta das regiões próximas às paredes em direção à região central. A abordagem integral apresenta erros menores nas proximidades do centro do domínio do que aqueles observados nas proximidades das paredes, com uma superestimação de quase 50% da energia absorvida pelo meio perto destas. Tais resultados são portanto semelhantes aos fornecidos pelo o método "não-cinza aproximado", exibindo erros muito inferiores aos fornecidos pela técnica "bandas

estreitas cinzentas", a qual subestima o divergente de fluxo radiativo por fatores indo de 2 a 4, nesse mesmo plano.

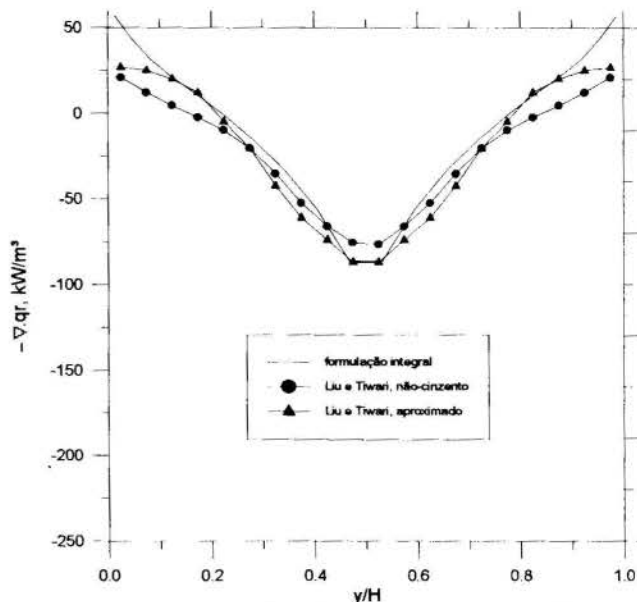


Figura 2a - Dissipação radiativa no plano  $x/L=0,275$

As soluções para o plano passando por  $x/L=0,575$  e  $0,875$  são apresentadas respectivamente nas figuras 2b e 2c. Quando se passa da posição  $0,575$  àquela mais próxima à saída do gás ( $0,875$ ), percebe-se que a maneira pela qual o meio evolui, de um comportamento absorvedor perto das paredes a um comportamento emissor na direção do centro, é muito mais acentuada para  $x/L=0,875$ , onde os gradientes de temperatura são mais pronunciados do que para  $x/L=0,575$ .

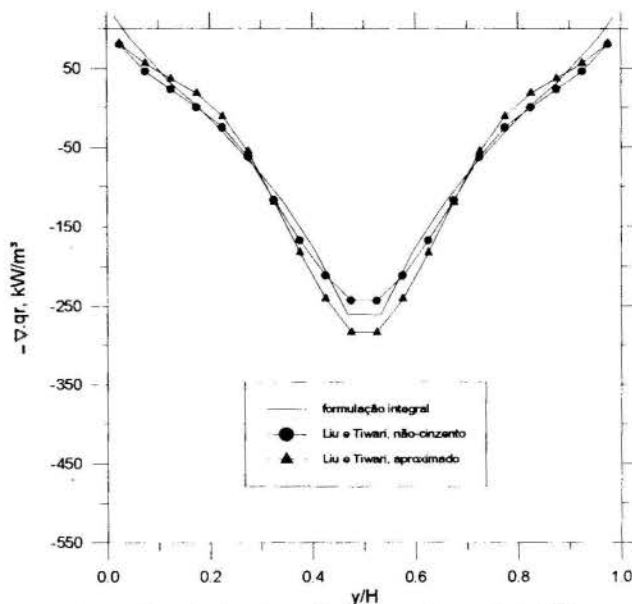


Figura 2b - Dissipação radiativa no plano  $x/L=0,575$

Para essas duas posições, a abordagem proposta produz resultados muito satisfatórios, com erros praticamente nulos no plano passando pela região média das placas, para em seguida se degradar ligeiramente no plano vertical situado perto da saída do gás: 8% de superestimação para a energia emitida pelo meio no centro e 30% nas vizinhanças imediatas das paredes. Novamente, deve ser ressaltado que tais erros são sempre da

mesma ordem ou inferiores aos obtidos com o método “não-cinzento aproximado”.

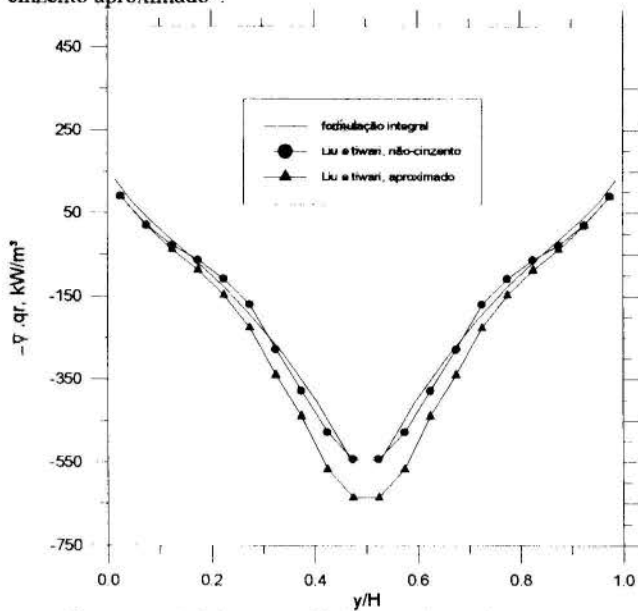


Figura 2c - Dissipação radiativa no plano  $x/L=0,875$

A figura 3 apresenta resultados para o fluxo radiativo ao longo das placas. À medida em que se desloca ao longo destas, desde a entrada até a saída, vê-se aumentar o fluxo radiativo de maneira mais ou menos contínua até atingir-se um máximo nas proximidades da saída, onde as diferenças entre as temperaturas do gás ao centro e aquelas observadas próximo às paredes são maiores; depois os valores de fluxo nas paredes se tornam novamente cada vez menores, devido ao fato da presença de uma fonte fria, representada pela saída a 300 K. Aqui a abordagem integral proposta se comporta de maneira semelhante à solução Monte Carlo “não-cinzenta” até a parte central a partir da qual os erros se tornam maiores, atingindo cerca de 50% em  $x/L=0,8$ .

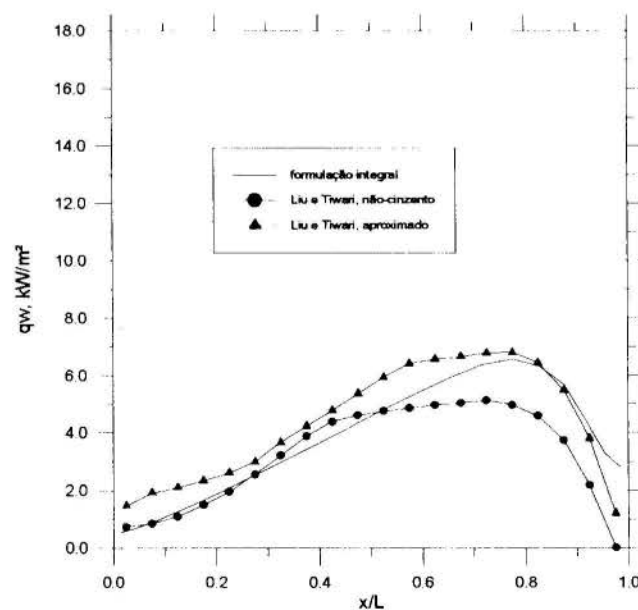


Figura 3 - Fluxo radiativo nas placas

A abordagem integral indica um bom compromisso entre custo de cálculo e precisão dos resultados. Os tempos de cálculo em uma máquina DIGITAL DECstation 5000/125

foram em média de 1,5 minutos para os resultados obtidos com o perfil de temperatura dado pela Eq. (20). Para a mesma tarefa, o método “Monte Carlo não-cinzento” necessitou, segundo LIU e TIWARI (1993), entre 35 e 40 minutos em uma estação de trabalho SUN e a solução “não-cinzento aproximada”, propiciou uma economia de 5 minutos para os mesmos casos estudados.

## CONCLUSÃO

Foi desenvolvido um método de cálculo de transferência térmica radiativa em meios gasosos que alia as vantagens normalmente associadas à técnica das ordenadas discretas àquelas atribuídas ao modelo estatístico de bandas estreitas. A validação do método foi efetuada pela comparação com resultados obtidos por Liu e Tiwari com a técnica Monte Carlo aplicada a situações de geometria bidimensional sem dispersão. Os aspectos positivos da abordagem proposta nesse estudo, notadamente a sua economia de custo e sua capacidade de tratar casos com dispersão, lhe conferem um interessante potencial para uma série de possibilidades. O aspecto economia de tempo de cálculo deixa entrever a facilidade de acoplamento com a convecção térmica natural ou mista utilizando recursos computacionais de porte razoável, normalmente acessíveis ao meio industrial.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- De Miranda, A. B. and Sacadura, J.-F., 1995, "An Alternative formulation of the S-N Discrete Ordinates Method for Predicting Radiative Transfer in Nongray Gases." *ASME Journal of Heat Transfer*. (aceito em 11/95).
- Hartmann, J. M., Levi, D., Leon, R. and Taine, J., 1984, "Line-by-line and Narrow-Band Statistical Model Calculations for H<sub>2</sub>O." *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 32, pp. 119-127.
- Kim, T. K., Menart, J. A. and Lee, H. S., 1991(a), "Nongray Radiative Gas Analyses Using the S-N Discrete Ordinates Method". *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 946-952.
- Kim, T. K., Menart, J. A. and Lee, H. S., 1991(b), "S-N Discrete Ordinates Solutions of Nongray Radiative With Diffusely Reflecting Walls". *Fundamentals of Radiation Heat Transfer, HTD, Vol.*, Vol. 160, pp. 79-87.
- Liu, L., and Tiwari, S.N., 1994, "Investigation of Radiative Transfer in Nongray Gases Using a Narrow Band Model and Monte-Carlo Simulation." *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol.116, pp. 160-166.
- Malkmus W., 1967, "Random Lorentz Band Model with Exponential-Tailed Line-Intensity Distribution Function". *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 57, No. 3, pp.323-329.
- Menart, J. A. and Lee, H. S., 1993, "Nongray Gas Analyses for Reflecting Walls Using a Flux Technique". *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 115, No. 4, pp. 645-652.
- Menart, J.A., Lee, H.S. and Kim, T.K., 1993, "Discrete Ordinates Solutions of Nongray Radiative Transfer with Diffusely Reflecting Walls." *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 115, pp. 645-651.
- Siegel, R and Howell, J. R., 1981, "Thermal Radiation Heat Transfer.", Hemisphere Publishing Corporation, New York.

Soufiani, A., Hartmann, J. M., and Taine, J., 1985, "Validity of Band Model Calculations for CO<sub>2</sub> and H<sub>2</sub>O Applied to Radiative Properties and Conductive-Radiative Transfer.", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 33, pp. 242-257.

Young, S.J., 1977, "Nonisothermal Band Model Theory.", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 18, pp. 1-28.

Zhang, L., Soufiani, A. and Taine, J., 1988, "Radiative Transfer in a Finite Axisymmetric System Containing an Absorbing and Emitting Real Gas-Particle Mixture." *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 18, PP. 2261-2272.

#### **ABSTRACT**

This work aimed at developing a predictive model of radiative heat transfer in molecular gases. The current approach is based on an integral formulation of the discrete ordinates method combined with a narrow band statistical model used to describe the gas radiation properties. In this new approach the radiative heat transfer in nongray gases are treated in such a way that neglecting gas spectral correlations has a limited effect over the results obtained. This integral formulation greatly decreases the computation time when compared to former approaches in which the Radiative Transfer Equation is treated in its differential, correlated form. Moreover the proposed method allows easy incorporation of the scattering effects by using the transmissivity as a main variable. The case of a two-dimensional cartesian geometry is studied. The model can handle isotropic or nonisotropic scattering. Comparison with results available in the literature indicate that it is worthwhile to extend the integral approach of the discrete ordinates method to molecular gases: the computational time and the computer storage requirements are greatly reduced as compared to other techniques.





## CALORIMETRIC DETERMINATION OF THE LONGWAVE EMISSIVITY OF PAINTS

Vicente de Paulo Nicolau  
Saulo Güths  
Luiz Fernandes Lemos

Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC  
88010-970 - FLORIANÓPOLIS - SC - BRAZIL



### SUMMARY

*This work presents an experimental set-up to measure the emissivity, taking into account the exchange of energy between two flat plates at different temperatures. The heat flow rate exchanged is measured by two fluxmeters. With such value and the surfaces temperatures, the calculation of the emissivity is straightforward. The respective calibration procedure and an error analysis are presented.*

### INTRODUCTION

Selective and non-selective paints have a very important number of applications in solar energy, space and buildings and it is necessary to know their radiative properties. As an example, the respective longwave hemispherical emissivity is used to estimate the gain and loss of longwave thermal radiation by the base surface.

Some methods called radiometric, allows to obtain the spectral directional emissivity, but there is a lack of energy in that range of the spectrum at a low (ambient) temperature. One can also measure another variable like the spectral directional-hemispherical reflectivity, using, for example, an integrating sphere. Then, by an interrelation between variables, the spectral directional absorptivity can be determined and finally by the Kirchhoff Law, the spectral directional emissivity is obtained (Sacadura, 1990). However, for high absorptive surfaces, some times there is not enough energy to detect the reflected beam and to measure the spectral reflectivity.

Another way is to consider calorimetric methods for measuring total hemispherical emittance. Some research work have been reported in Sacadura (1990). A calorimetric based apparatus is also presented by Kated and Chevalier (1991), and it is used as a reference method. Some commercial equipments are available, as the one described in Zhang et al. (1994), to obtain the thermal radiation properties of semi-transparent films. Other commercial equipments are also described by Kated and Chevalier (1994) and Kollie et al. (1990). In fact these equipments compare the testing surface with a standard surface with a known emissivity and a certain procedural diligence is necessary to obtain accurate values.

This work presents a calorimetric method, taking into account the exchange of energy between two flat plates at different temperatures. In the following section the equipment is described, followed by the measurement principles. Next section is devoted to the heat fluxmeters calibration, while the following concerns to the measurement errors. Some results and a conclusion are finally presented.

### MEASUREMENTS APPARATUS AND PROCEDURE

The apparatus is based on two plane surfaces, that are disposed parallel and very close to each other. Such surfaces are painted with the material to be tested. Two plane and very thin heat fluxmeters (0,150m x 0,150m and 1mm thick) are used as the support for the paints and give the net heat flow rate between the surfaces. A plane constantan resistance maintains the steady state on the apparatus, which is shown schematically in Figure 1. The lower plate is cooled by recirculating water at a constant temperature. Two T-type thermocouples are used to measure the temperatures on each radiant surfaces. In order to reduce the influence of the lateral energy loss, only the central region of the fluxmeters are used to measure the heat exchanged.

The upper and the lower surface are covered with the same material and it is supposed to have the same behaviour to radiation. Consequently, the net heat transfer between the surfaces, in steady state, is given by the following equation:

$$q_r = \frac{\sigma A (T_s^4 - T_i^4)}{\frac{2}{\epsilon} - 1} \quad (1)$$

where  $q_r$  is the heat flow rate by radiation,  $\sigma$  is the Stefan-Boltzmann constant,  $T_s$  and  $T_i$  are the temperatures of the upper and the lower surfaces, respectively. The emissivity  $\epsilon$  of the painting can be calculated using the previous equation by measuring the heat transfer rate and the temperatures  $T_s$  and  $T_i$ . In order to neglect convection and conduction between the surfaces, the apparatus is placed under vacuum.

### HEAT FLUXMETERS CALIBRATION

The fluxmeters are calibrated using a cooled plate and a constantan electrical resistance. The technique is presented in Güths (1994). Two disposition are used; in the first one, called A, the electrical resistance is placed between the

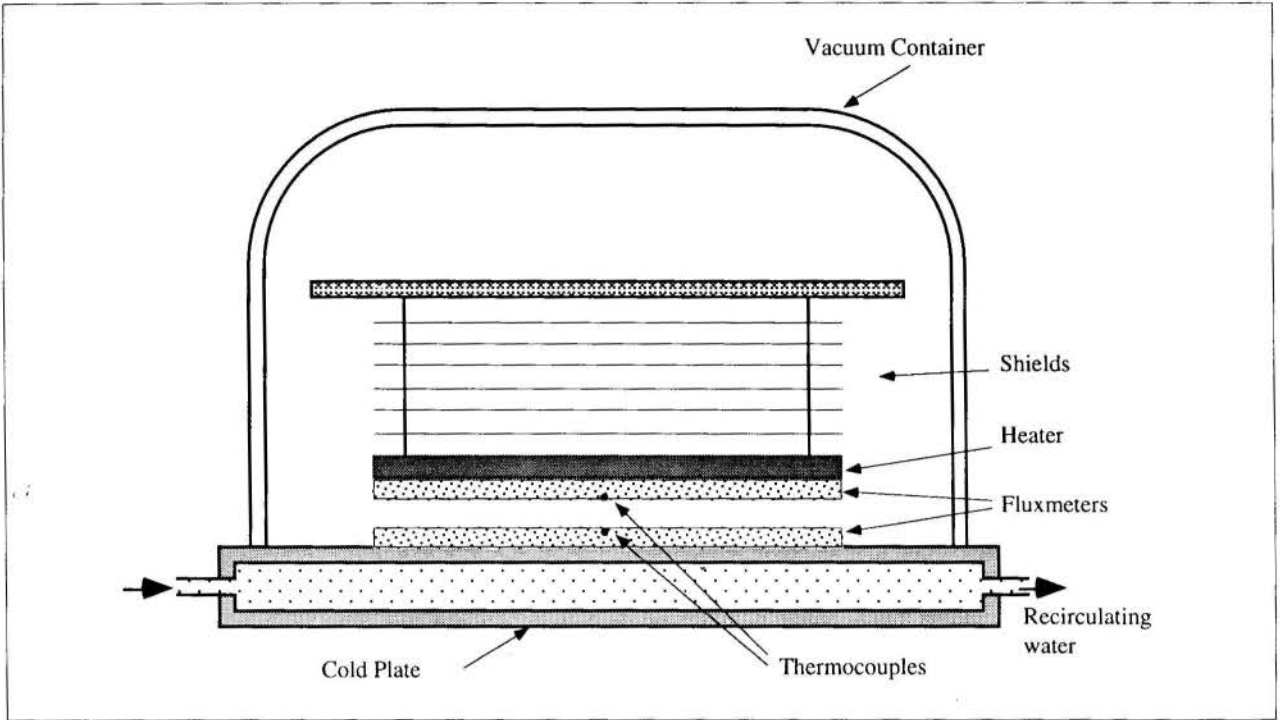


Figure 1: Schematic diagram of the experimental set-up.

fluxmeters (figure 2). These components are disposed on the cooled plate and another thermal sink is placed over them.

The heat flow rate generated by Joule effect,  $q_A$ , is divided by the fluxmeters 1 and 2, given:

$$q_A = C_1 V_{1A} + C_2 V_{2A} \quad (2)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are the calibration constants of fluxmeters 1 and 2 respectively.  $V_1$  and  $V_2$  are the signals of the fluxmeters,

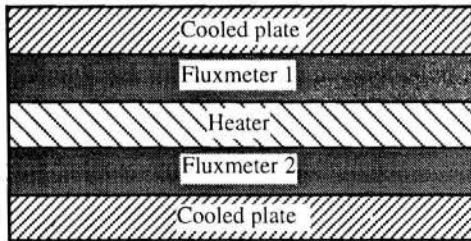


Figure 2 : Fluxmeters calibration - disposition A.

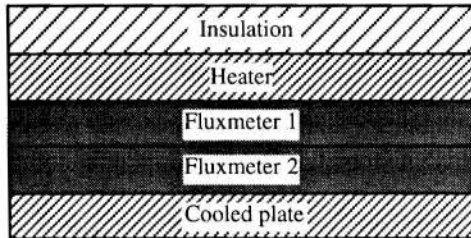


Figure 3 : Fluxmeters calibration - disposition B.

whose are supposed to be linear.

In the second disposition (B), the electrical resistance is placed over the fluxmeters and they are also disposed on the cooled plate. The upper surface of the electrical resistance is insulated (figure 3).

Now the heat flow rate value generated by Joule effect is not directly involved. In this case, the equality between heat flow rates in the fluxmeters gives:

$$C_1 V_{1B} = C_2 V_{2B} \quad (3)$$

where  $V_{1B}$  and  $V_{2B}$  are the signals of the fluxmeters 1 and 2, respectively, in disposition B.

Measuring the fluxmeters voltages and the heat flow rate  $q_A$ , it is possible to obtain the calibration constants  $C_1$  and  $C_2$ . Such constants can be separated from equations (2) and (3):

$$C_1 = \frac{q_A}{V_{1A} + V_{2A} \frac{V_{1B}}{V_{2B}}} \quad (4)$$

$$C_2 = \frac{q_A}{V_{2A} + V_{1A} \frac{V_{2B}}{V_{1B}}} \quad (5)$$

The calibration must be performed approximately on the same values as used during emissivity measurements. Although the fluxmeters are supposed to be linear, some different calibration points are recommended in order to obtain mean values to  $C_1$  and  $C_2$ .

The variable  $q_A$  in equation (4) and (5) is the heat flow rate, generated by Joule effect in the electrical heater (figure 2), and it is given by:

$$q_A = V_A^2/R \quad (6)$$

where  $V_A$  is the voltage and  $R$  is the electrical resistance of the heater.

As a result of the construction process, each fluxmeter has a particular calibration constant, which represents a different sensitivity to the heat flux. Using a  $V_A$  equal to 10.00 Volts and an electrical heater resistance equal to 13.27 Ohms, the equation (3) gives a ratio  $V_{1B}/V_{2B}$  equal to 0.713 in disposition B (figure 3). A voltage of 10.00 Volts is also used in disposition A (figure 2), giving a heat flow rate  $q_A=7.53$  W in the heater. Some values of  $V_{1A}$  and  $V_{2A}$  are measured, giving through equations (4) and (5),  $C_1 = 1.87$  W/mV and  $C_2 = 1.34$  W/mV. Considering the fluxmeters areas, such values represent 83.1 W/m<sup>2</sup>mV and 59.6 W/m<sup>2</sup>mV, respectively.

### ERRORS ANALYSIS

From equation (4) and (5) it is seen that the error of this method in the emissivity determination comes from the error in the fluxmeters calibration ( $C_1$  and  $C_2$  values) and from the temperature and heat flow rate measurements.

The calibration error appears in the determination of the constant  $C_1$  and  $C_2$ , using equation (4) and (5), respectively. The heat flow rate comes from equation (6). Then, for  $i=1,2$ :

$$\Delta C_i = \Delta V_A \frac{\partial C_i}{\partial V_A} + \Delta R \frac{\partial C_i}{\partial R} + \Delta V_{1A} \frac{\partial C_i}{\partial V_{1A}} + \Delta V_{2A} \frac{\partial C_i}{\partial V_{2A}} + \Delta V_{1B} \frac{\partial C_i}{\partial V_{1B}} + \Delta V_{2B} \frac{\partial C_i}{\partial V_{2B}} \quad (7)$$

Table 1 -  $C_1$  and  $C_2$  and typical values of the variables.

$C_1$ [W/mV]	$C_2$ [W/mV]	$V_A$ [V]	$R$ [Ω]	$q_A$ [W]	$V_{1A}$ [mV]	$V_{2A}$ [mV]	$V_{1B}$ [mV]	$V_{2B}$ [mV]
1.87	1.34	10.00	13.27	7.53	2.40	2.26	3.89	5.45

Table 2 - Errors in the measured variables

$\Delta V_A$ [V]	$\Delta R$ [Ω]	$\Delta V_{1A}$ [mV]	$\Delta V_{2A}$ [mV]	$\Delta V_{1B}$ [mV]	$\Delta V_{2B}$ [mV]
0.01	0.01	0.010	0.010	0.010	0.010

Table 3 - Partial derivatives of  $C_i$  ( $i=1,2$ ), to measured variables.

	$\frac{\partial C_i}{\partial V}$	$\frac{\partial C_i}{\partial R}$	$\frac{\partial C_i}{\partial V_{1A}}$	$\frac{\partial C_i}{\partial V_{2A}}$	$\frac{\partial C_i}{\partial V_{1B}}$	$\frac{\partial C_i}{\partial V_{2B}}$
to $C_1$	0.376	-0.142	-0.468	-0.334	-0.194	0.138
to $C_2$	0.268	-0.101	-0.238	-0.334	-0.147	0.206

Table 1 shows the values of the calibration constants  $C_1$  and  $C_2$  of the fluxmeters and the variables involved in their determination.

The errors and partial derivatives values relatives to equations (7) and (8) are shown in table 2 and 3, respectively. Using equations (7), one obtains  $\Delta C_1=0.016$  and  $\Delta C_2=0.013$ . The error on the emissivity is determined from the equation (1), rewritten as:

$$\epsilon = 2 / [1 + \sigma A(T_s^4 - T_r^4)/q_r] \quad (9)$$

Thus,  $\Delta \epsilon$  can be obtained from the following equation:

$$\Delta \epsilon = \Delta A \frac{\partial \epsilon}{\partial A} + \Delta T_s \frac{\partial \epsilon}{\partial T_s} + \Delta T_r \frac{\partial \epsilon}{\partial T_r} + \Delta q_r \frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \quad (10)$$

The involved heat flow rate is measured by fluxmeters 1 and 2, as:

$$q_r = \frac{1}{2}(C_1 V_1 + C_2 V_2) \quad (11)$$

Then, the error  $\Delta q_r$  is established as:

$$\Delta q_r = \frac{1}{2}(\Delta C_1 V_1 + C_1 \Delta V_1 + \Delta C_2 V_2 + C_2 \Delta V_2) \quad (12)$$

Table 4 presents typical values of the variables used in the emissivity measurement. The hot surface is maintained at 100 °C and the cold surface at 20°C. The fluxmeters areas are fixed. According to the surfaces emissivity, a distinct heat flow rate is obtained. The sensitivities of  $\epsilon$  to each variable, shown in equation (10), are placed at table 5, for different  $\epsilon$  values. Considering the errors presented before and the equations (10) and (12), the expected errors in the emissivity measurement are presented in table 6.

As presented in table 5, the absolute error in a low emissivity is smaller than the absolute error in a high emissivity. But the percentual errors show an opposite behaviour. For a low emissivity the error is the biggest one as a consequence of the lowest level of energy involved.

Table 4 - Typical values used for emissivity measurements.

$\epsilon$	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$T_s$ [K]	$T_r$ [K]	$q_r$ [W/m <sup>2</sup> ]
0.1	0.0225	373	293	0.805
0.5	0.0225	373	293	5.10
0.9	0.0225	373	293	12.5

Table 5 - Partial derivatives of  $\epsilon$  according to equation (10).

$\epsilon$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial A}$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial T_s}$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial T_r}$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r}$
0.1	4.222	0.00165	0.00080	0.1180
0.5	16.67	0.00649	0.00315	0.0736
0.9	22.00	0.00857	0.00416	0.0396

Table 6 - Emissivity error for different emissivities values

$\epsilon$	$\Delta A[m^2]$	$\Delta T_s[K]$	$\Delta T_i[K]$	$\Delta q_r$ [W/m <sup>2</sup> ]	$\Delta \epsilon$	$\Delta \epsilon[\%]$
0.1	1.5E-4	0.5	0.5	0.047	0.007	7.00
0.5	1.5E-4	0.5	0.5	0.062	0.012	2.40
0.9	1.5E-4	0.5	0.5	0.260	0.020	2.22

### CONCLUSION

An equipment to measure longwave emissivity of surface has been presented, based on a calorimetric principle. There is no dependence on emissivity standard, but a heat fluxmeter calibration is necessary to perform the measurements. The complete system must be placed under vacuum and a steady state regime is necessary. The estimated errors in the emissivity determination are very reasonable, but some additional progress can be done on the surfaces temperature measurements. Considering the performed analysis and the results presented, one can say that the equipment is viable to measure longwave emissivities.

### REFERENCES

- Doebelin, E.O., 1990, "Measurement systems. Application and design". McGraw-Hill, New York, 4th. ed.
- Guths, S., 1994, "Anémomètre à effet Peltier et fluxmètre thermique: conception et réalisation. Application à l'étude de la convection naturelle", *Doctoral thesis*, Université d'Artois, France, 225p.
- Kateb, T. and Chevalier, J. L., 1991, "Optora et les techniques de mesure de l'émissivité: l'émissomètre calorimétrique de référence", *Cahiers du CSTB*, n. 2524, Paris, 12p.
- Kollie, G.T., Weaver, F.J. and McElroy, D.L., 1990, "Evaluation of a commercial, portable, ambient-temperature emissometer", *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 61(5), pp 1509-1517.
- Sacadura, J.F., 1990, "Measurement techniques for thermal radiation properties", *Ninth International Heat Transfer Conference*, Vol. 1, KN-12, Jerusalem, pp. 207-222.
- Zhang, Y.P., Ge, X.S. and Huang, H.L., 1994, "A method for measuring thermal radiation properties of semi-transparent materials", *Measurement Science Technology*, Vol.5, pp.1061-1064.





**MODELO DE TROCA DE CALOR RADIANTE ENTRE DUAS SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS PELO MÉTODO DE MONTE CARLO**



**Jorge R. Henriquez, Rodolfo J. Rodriguez,  
Musa Mohamed R. e Leonardo Goldstein Jr.  
UNICAMP - FEM - DETF - C.P. 6122  
13083-970 - Campinas - SP - Brasil**

**RESUMO**

Foi estabelecido um modelo matemático para o cálculo de troca de calor radiante entre duas superfícies cilíndricas concêntricas de comprimento finito. A superfície interna é considerada negra e a externa é cinza e a sua refletância é difusa-especular. Por causa das dificuldades de se encontrar uma solução matemática para superfícies cilíndricas finitas, em muitas aplicações práticas o cálculo é realizado considerando as superfícies como sendo cilindros infinitos. Com este modelo é possível investigar quando esta consideração é válida. O modelo é tridimensional e é baseado no método de Monte Carlo.

**INTRODUÇÃO**

Muitos dos problemas que aparecem em transferência de calor apresentam soluções de um alto grau de dificuldade devido principalmente a que as equações usadas na formulação do problema se referem a um balanço de energia num volume de controle diferencial, mas tem de levar em conta simultaneamente a troca termica com todas as demais superfícies e volumes do sistema em consideração. A troca de calor radiante é um exemplo disso.

Diversos métodos numéricos já foram propostos para resolver as equações integro-diferenciais não lineares que resultam dos problemas em que se considera a transferência de calor radiante. O método de Monte Carlo se apresenta como um dos mais adequados para manipular as situações complexas que aparecem neste tipo de problema. Uma extensiva introdução ao uso deste método em problemas de troca de calor é apresentada em Howell (1968), e Siegel e Howell (1992).

Neste trabalho o método foi utilizado para o cálculo do fluxo de calor radiante entre dois cilindros concêntricos de comprimento finito com propriedades superficiais radiantes dependentes da direção, a reflexão sendo considerada difusa-especular, o que, apesar da maior complexidade, melhor descreve o comportamento das superfícies reais.

**MODELO MATEMÁTICO**

O modelo matemático é apresentado em termos de uma metodologia de cálculo, desenvolvida a seguir.

A figura 1 apresenta o esquema do sistema analisado como exemplo, composto de duas superfícies cilíndricas. A superfície 1 é interna, com raio  $R_1$ , temperatura  $T_1=700$  K e considerada negra. A superfície externa 2, de raio  $R_2$ , está a  $T_2=1200$ K, e é de alumínio bronze, com emitância total direcional  $\epsilon_2$  apresentada na Fig. 2. Ela pode ser considerada cinza e sua refletância como 70 % difusa e 30 % especular. Ambas superfícies possuem comprimento  $L$  e o cilindro é aberto ao ambiente em seus dois extremos. Tratando-se de superfícies com altas temperaturas em relação à ambiente não se considera a troca de calor radiante com o mesmo, bem como os efeitos da convecção natural.

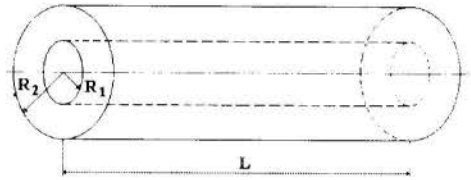


Fig. 1. Esquema do Sistema

**1.-Cálculo da energia contida em cada pacote de energia,  $\phi$  :**

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{N} \tag{1}$$

onde  $N$  é o número total de pacotes  
Energia emitida pela superfície 1,  $\phi_1$  :

$$\phi_1 = \epsilon_{oi} e_{b1} A_1 \tag{2}$$

onde:

$\epsilon_{oi} = 1$ : superfície considerada negra.

$$e_{b1} = \sigma T_1^4$$

$$A_1 = 2\pi R_1 L$$

Energia emitida pela superfície 2,  $\phi_2$  :

$$\phi_2 = \epsilon_{i2} e_{b2} A_2 \tag{3}$$

A emitância da superfície 2 pode ser obtida da seguinte relação

$$\epsilon_{i2} = \frac{e_2}{e_{b2}} = \frac{\int_{\Omega} i_2 \cos\beta_2 dw}{\pi i_{b2}} \tag{4}$$

que, uma vez trabalhada adequadamente, pode ser reescrita como segue:

$$\epsilon_{i2} = 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon_2 \cos\beta_2 \sin\beta_2 d\beta_2 \tag{5}$$

A integração da Eq. (5) pode ser efetuada a partir das equações que descrevem os valores de  $\epsilon$  em função de  $\beta$ , obtidos da Fig. 2.

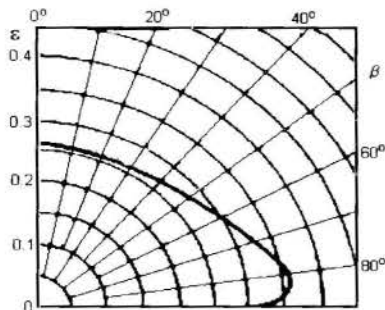


Fig. 2. Variação Direcional de  $\epsilon$  para a Liga Al - Bronze (Eckert e Drake, 1972).

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \beta \leq 30^\circ \dots \epsilon_2 &= 0.26 \\ 30^\circ < \beta \leq 80^\circ \dots \epsilon_2 &= 0.26 + 0.1 \left( \frac{\beta}{0.85141} - 0.61498 \right)^2 \\ 80^\circ < \beta \leq 88^\circ \dots \epsilon_2 &= 0.365 - 0.1 \left( \frac{\beta}{0.23111} - 6.04152 \right)^2 \\ 88^\circ < \beta \leq 90^\circ \dots \epsilon_2 &= 14.76011 - 9.39658\beta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

com  $\beta$  em radianos.

Finalmente, após os cálculos correspondentes, tem-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{int}} &= 0.28304 \\ e_{b,2} &= \sigma T_2^4 \\ A_2 &= 2\pi R_2 L \end{aligned}$$

## 2.- Cálculo do número de pacotes emitidos por cada superfície, $N_1$ e $N_2$ .

Superfície 1:

$$N_1 = \frac{\phi_1}{\phi} N \quad (7)$$

Superfície 2:

$$N_2 = \frac{\phi_2}{\phi} N \quad (8)$$

ou

$$N_2 = N - N_1$$

## 3.- Acompanhamento dos pacotes emitido pela superfície 2

Para conhecer a trajetória de cada pacote emitido pela superfície 2 estabelece-se primeiramente um sistema de referência, adequado para a análise das possibilidades que possui um pacote de ser absorvido (ou refletido) por uma das superfícies da cavidade (volume de controle) ou de ser emitido para o ambiente.

A figura 3 mostra o sistema de referência adotado nesta análise. Para cada pacote de energia emitido pela superfície pode-se definir um plano contendo o raio na direção de emissão. O plano possui um ângulo de inclinação  $\beta$  com respeito ao plano formado pelo eixo  $z$  e a normal ao ponto de origem do pacote a ser emitido. Por outro lado, o plano que contém o raio, forma um ângulo de inclinação  $\gamma$  com respeito a normal a este plano. Desta forma um raio qualquer é definido pelos ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ , sendo este último ângulo dependente da posição do pacote no eixo  $z$ .

Estes ângulos variam de 0 a  $\pi$ , descrevendo assim uma semi-esfera superior com todas as direções possíveis de emissão dos raios.



Fig. 3. Sistema de Referência

Como se pode observar do cálculo da emitância global da superfície 2, a seleção deste sistema de referência não afeta o fato de que a emitância total direcional está em função do sistema de referência convencional para a análise da transferência de energia radiante ( $0 \leq \beta \leq \pi/2$ ;  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ ). A única variação neste sentido é no referente à probabilidade de emissão  $P_\beta$  no ângulo de cone  $\beta_2$ , que se deve calcular como a probabilidade acumulada entre 0 e  $\pi$ .

A figura 4 mostra os ângulos críticos, que definem quando os raios emitidos pela superfície 2 incidem no cilindro interno, no cilindro externo ou são emitidos ao ambiente. Um raio emitido pela superfície 2 com  $\beta < \beta_{cr}$  nunca deve incidir na superfície do cilindro interno, no entanto consegue incidir na superfície 1 quando  $\beta \leq \beta_{cr}$  e  $\gamma \leq \gamma_{cr2}$ .

Se  $\gamma \leq \gamma_{cr3}$ , o raio não tem possibilidade de sair para o ambiente e só poderá incidir na superfície 1 ou na superfície 2, dependendo do ângulo  $\beta$ . Para cada ângulo  $\gamma > \gamma_{cr3}$  existem dois ângulos ( $\beta_{cr1}$  e  $\beta_{cr2}$ ) que definem se o pacote pode ou não sair para o ambiente, como se observa na Fig. 4.A. Os ângulos  $\gamma_{cr1}$ ,  $\gamma_{cr2}$ ,  $\gamma_{cr3}$  definem três regiões onde variam as equações que determinam os ângulos  $\beta_{cr1}$  e  $\beta_{cr2}$ , para cada valor do ângulo  $\gamma$ .

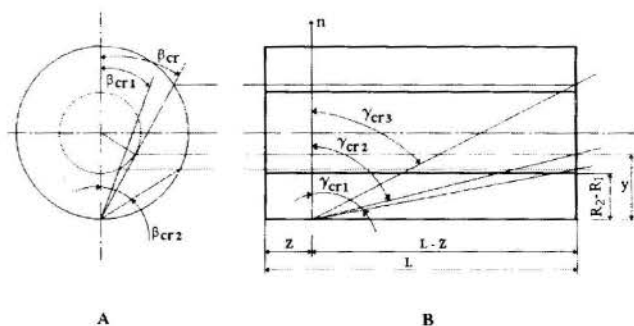


Fig. 4. Determinação dos Ângulos Críticos.



Fig. 5. Regiões de Saída dos Pacotes de Energia.

Na figura 5 pode-se observar os limites para um raio emitido pela superfície 2 sair para o ambiente ou incidir numa

das superfícies. Se a combinação de ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  for tal que o raio incide numa das três regiões, o pacote sai e se contabiliza como uma perda de energia, de valor equivalente à intensidade de energia do pacote.

Da figura 4 são obtidas as seguintes equações para o cálculo dos ângulos críticos:

$$\beta_{cr} = \arcsen\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \quad (9)$$

$$\gamma_{cr1} = \arctan\left(\frac{L-z}{R_2-R_1}\right) \quad (10)$$

$$\gamma_{cr2} = \arctan\left(\frac{L-z}{\cos^2(\beta_{cr})R_2}\right) \quad (11)$$

$$\gamma_{cr3} = \arctan\left(\frac{L-z}{R_2(1+2\cos(2\beta_{cr}))}\right) \quad (12)$$

$$\beta_{cr1} = 0 \dots \dots \dots \gamma > \gamma_{cr1} \quad (13)$$

$$\beta_{cr1} = \beta_{cr} \dots \dots \dots \gamma \leq \gamma_{cr2} \quad (14)$$

$$\beta_{cr1} = \arctan\left(\sqrt{\frac{R_1^2 - R_2^2 + 2R_2d - d^2}{d^2}}\right) \dots \dots \gamma_{cr2} < \gamma \leq \gamma_{cr1} \quad (15)$$

onde,

$$d = \frac{L-z}{\tan(\gamma)}$$

$$\beta_{cr2} = \arccos\left(\frac{L-z}{2R_2 \tan(\gamma)}\right) \quad (16)$$

Quando  $\gamma > \pi/2$  as equações para a determinação dos ângulos críticos estão em função de  $z$  ao invés de  $L-z$ .

Consolidando o procedimento acima descrito, tem-se que a cada um dos pacotes de energia emitidos pela superfície 2 pode caber uma das possibilidades a seguir:

a) O pacote é absorvido pela superfície negra quando o ângulo de emissão  $\beta_2 < \beta_{cr}$ , e o ângulo  $\gamma_2 < \gamma_{cr2}$ . No caso em que  $\gamma_2 < \gamma_{cr2}$ , e  $\beta_2 < \beta_{cr1}$ , o pacote também será absorvido pela superfície 1.

b) O pacote é absorvido pela própria superfície emissora 2. Isto acontece quando  $\beta_2 > \beta_{cr}$  e  $\gamma \leq \gamma_{cr3}$ , e quando  $\gamma > \gamma_{cr3}$  e  $\beta_2 > \beta_{cr2}$ . Neste caso, um numero aleatório sorteado,  $R_\alpha$ , deve ser tal que  $R_\alpha \leq P_\alpha$ , onde  $P_\alpha = \alpha_2(\beta_2)$ , é a função densidade de probabilidade para a absorção da energia incidente.

c) O pacote é refletido especularmente pela própria superfície emissora. Para tanto as condições estabelecidas no caso anterior com respeito aos ângulos se mantém, mas neste caso  $R_\alpha > \alpha_2(\beta_2)$  e  $R_\rho \leq 0.3$ , onde  $R$  é um novo número aleatório sorteado, pois a refletância da superfície 2 é 30% especular e 70% difusa. A direção de saída do raio refletido é definida pela característica especular da superfície.

d) O pacote é refletido difusamente pela própria superfície emissora 2. Para tanto  $R_\rho > 0.3$  e as condições estabelecidas respeito aos ângulos se mantém como nos casos anteriores. Pode-se calcular o ângulo de cone  $\beta$  do pacote refletido como duas vezes a probabilidade de emissão, quando  $0 \leq \beta \leq \pi/2$ :

$$\beta = 2\arcsen\left(\sqrt{R_\rho}\right) \quad (17)$$

No caso em que um dos pacotes é refletido, ele é acompanhado até que seja finalmente absorvido na superfície 1, na superfície 2 ou saia para o ambiente.

e) O pacote sai para o ambiente quando os ângulos  $\beta_2$  e  $\gamma_2$  são tais que o raio incide nas regiões 1, 2 ou 3 da Fig. 5.

Quando o pacote emitido pela superfície 2, incide na própria superfície e é por ela refletido deve-se localizar a posição de reflexão, utilizando para isto as Eqs. (18) ou (19), dependendo da direção do ângulo  $\gamma$ :

$$z = z + \Delta z \quad (18)$$

$$z = z - \Delta z \quad (19)$$

Da Figura 6 pode-se demonstrar que o valor de  $\Delta z$  é determinado por:

$$\Delta z = R_2(1 + \cos(2\beta)) \tan(\gamma) \quad (20)$$

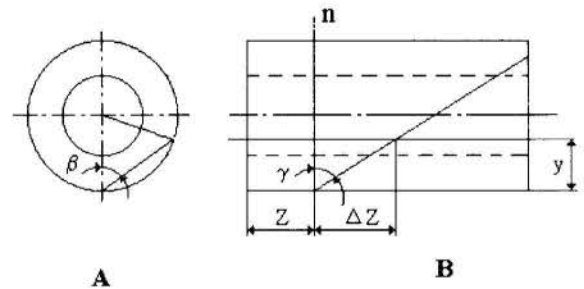


Fig. 6. Determinação de  $\Delta z$ .

No caso que o raio é refletido difusamente determina-se novamente os valores de  $\beta$  e  $\gamma$ , pois a reflexão difusa apaga todo a estória anterior do raio emitido. Neste caso a posição do ponto de reflexão na superfície 2 é determinada pelas eqs. (18) e (19).

Por outro lado, no caso em que o raio é refletido especularmente este mantém os mesmos ângulos de incidência, pelo que pode-se determinar facilmente se o pacote incide novamente na superfície 2, onde será absorvido ou refletido novamente, ou sai para o ambiente. Neste caso o pacote não poderá incidir nunca na superfície 1.

#### 4.- Acompanhamento dos pacotes emitidos pela superfície 1.

Para a análise dos pacotes emitidos pela superfície 1, se mantém o mesmo conceito usado para estabelecer o sistema de referência para os pacotes da superfície 2, com a diferença que a referência agora é a normal aos pontos de emissão sobre a superfície 1.

A cada um dos pacotes emitidos pela superfície 1 pode ocorrer uma das seguintes possibilidades:

a) O pacote é absorvido na superfície 2. Para tanto  $R_\alpha \leq \alpha_2(\beta_2)$ , ou seja  $R_\alpha \leq 0.26$ , pois o maior ângulo com que o pacote consegue incidir na superfície 2 é  $30^\circ$  quando  $R_2/R_1 = 2$  e, de acordo com a Fig. 2,  $\alpha_2 = 0.26$  para  $0 \leq \beta \leq 30^\circ$ . Pode-se demonstrar que, para qualquer ângulo de emissão  $\beta_1$  da superfície 1, o ângulo de incidência  $\beta_2$  na superfície 2 é sempre menor do que  $30^\circ$ , sempre que a relação  $R_2/R_1$  seja maior ou igual a 2.

b) O pacote é refletido especularmente. Para tanto  $R_\rho \leq (0.3)$ , já que a superfície 2 é 30% especular e 70% difusa. Neste caso o pacote tem duas possibilidades em função do ângulo  $\gamma$  de emissão. O pacote refletido incidirá novamente na superfície 1, onde será absorvido, pois a superfície é negra, ou o pacote sai para o ambiente se o  $\Delta z$  produto da reflexão é muito grande, de forma que a nova posição  $z$  estará fora do cilindro.

c) O pacote é refletido difusamente. Isto ocorre quando  $R_p^{***} > (0.3)$ . Neste caso o ângulo de reflexão pode ser calculado como no caso da reflexão difusa para um raio que atinge a superfície 2 proveniente da própria superfície, como se viu anteriormente. O pacote refletido poderá neste caso incidir na superfície 1, na superfície 2 ou sair para o ambiente, dependendo da relação entre o ângulo  $\gamma$  e o ângulo crítico  $\gamma_{cr}$ .

d) O pacote sai para o ambiente sempre que o ângulo de emissão  $\gamma$  é maior do que o ângulo crítico  $\gamma_{cr}$ .

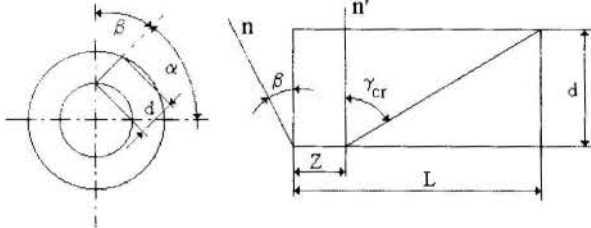


Fig. 7. Determinação dos Ângulos Críticos.

Da Figura 7 pode-se demonstrar que o ângulo crítico  $\gamma_{cr}$  é determinado pela expressão:

$$\gamma_{cr} = \arctan\left(\frac{L-z}{d}\right) \quad (21)$$

$$d = R_2 - R_1 \dots \dots \dots \text{para } \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$d = \frac{-2 \tan(\alpha)R_1 + \sqrt{(2 \tan(\alpha)R_1)^2 - 4(1 + \tan^2(\alpha))(R_1^2 - R_2^2)}}{2(1 + \tan^2(\alpha))\text{sen}(\beta)}$$

com

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \dots \dots \dots \text{para } \beta \neq \frac{\pi}{2}$$

Da Figura 8 pode-se observar que a determinação da posição para o pacote que incidiu na superfície 2 pode ser calculado de:

$$\Delta z = \arctan(\gamma)d \quad (22)$$

onde d é obtido das equações acima.

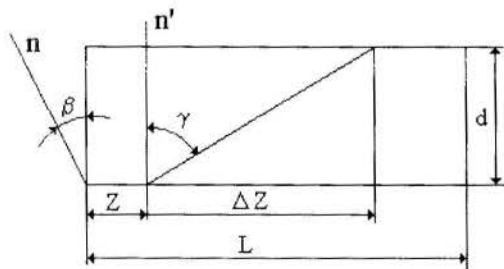


Fig. 8. Determinação de  $\Delta z$ .

É importante notar que, independentemente do pacote ser refletido especular ou difusamente, deve-se calcular a posição de reflexão do mesmo, para obter os novos ângulos críticos e controlar se o pacote sai fora do cilindro.

Para o caso de reflexão especular os ângulos de emissão após a reflexão são os mesmos de incidência, de modo que, para a emissão a partir do cilindro externo, o pacote não consegue atingir a superfície do cilindro interno. No caso da emissão ser

proveniente do cilindro interno o pacote volta à própria superfície interna, se não sair do cilindro, sendo então absorvido nesta superfície.

**5.- Cálculo das Taxas de Transferência de Calor Radiante,  $Q_1$  e  $Q_2$ .**

Os pacotes emitidos pelas superfícies 1 e 2 são acompanhados até serem absorvidos, contabilizando-se os pacotes que são absorvidos na superfície 1,  $N_1'$ , e os pacotes que são absorvidos na superfície 2,  $N_2'$ . A taxa de transferência de calor radiante pode ser então calculada por:

$$Q_1 = C(N_1 - N_1') \quad (23)$$

ou

$$Q_2 = C(N_2 - N_2')$$

sendo:

$$Q_1 + Q_2 + Q_p = 0$$

onde

$$Q_p = \text{Calor perdido}$$

**VALIDAÇÃO DO MODELO.**

A metodologia apresentada no item anterior considera o caso de cilindro finito, no qual os pacotes podem sair do sistema analisado, e o balanço não corresponde ao das soluções analíticas encontradas na literatura. O modelo é, então, validado inicialmente para o caso do cilindro infinito. Para tanto incrementa-se o comprimento do mesmo, até que nenhum pacote saia do cilindro, o que corresponderia ao caso de cilindro infinito. Determina-se assim o calor trocado entre ambas as superfícies e compara-se o resultado obtido com a solução analítica.

A solução analítica disponível é aproximada, e pode ser obtida ponderando o calor trocado entre superfícies cilíndricas difusas  $(Q_1/L)_{dif}$  e entre superfícies cilíndricas especulares  $(Q_1/L)_{esp}$ , ambas infinitas, como se mostra a seguir:

$$(Q_1/L)_{total} = 0.7(Q_1/L)_{dif} + 0.3(Q_1/L)_{esp} \quad (24)$$

onde

$$(Q_1/L)_{dif} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{A_1}{A_2}\right) \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} \quad (25)$$

$$(Q_1/L)_{esp} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (26)$$

Os resultados podem ser observados na Tabela 1. Esta mostra que os resultados obtidos com o modelo proposto, quando se minimiza a energia perdida para fora do cilindro, apresentam boa concordância com a solução analítica para cilindros infinitos.

**Tabela 1.- Validação do Modelo**

L (m)	$\frac{R_2}{R_1}$	$Q_1/L$ Monte Carlo (W/m)	Energia perdida %	$Q_1/L$ analítico (W/m)
100	2	25684,79	1,26	25701,95
	3	31186,95	2,63	30319,37
	4	39333,14	4,10	33523,83
	5	36399,39	5,07	35877,83



## APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A Tabela 2 contém um resumo dos resultados obtidos após várias rodadas do programa de computação, onde se mostra as variações do calor trocado por ambas superfícies e a energia perdida pelo sistema quando variam o comprimento dos cilindros, a relação dos raios dos cilindros e o número de pacotes admitido.

Na parte superior da tabela mostra-se o efeito do comprimento para um número fixo de pacotes e uma relação de raios  $R_2/R_1$  também fixa. Pode-se notar que, para as condições do problema, é conveniente o uso da hipótese de cilindro infinito só quando o comprimento for maior do que 100 m, pois neste caso o erro que se comete é próximo do 1%, ou seja, a energia perdida representa aproximadamente 1% da energia trocada pelas superfícies. No caso de se considerar o comprimento maior do que 100 m, para um valor de raio do cilindro interno igual a 0,1 m e relação entre raios ( $R_2/R_1$ ) igual a 2, a hipótese de cilindros infinitos dependerá muito da exatidão requerida pela aplicação específica. Por exemplo, para 1 m de comprimento o erro seria da ordem de 30 %, fora do intervalo de erro usual para qualquer aplicação.

Na segunda parte da tabela mostra-se que, para um comprimento suficientemente longo, no qual o sistema pode-se considerar infinito ou quase infinito, o número de pacotes utilizado para o cálculo pouco influencia na solução.

Tabela 2.- Resumo dos Resultados ( $R_1 = 0,1$  m)

L (m)	$R_2/R_1$	Nº de pacotes N	Q <sub>1</sub> /L (W/m)	Q <sub>2</sub> /L (W/m)	Energia perdida			
					W/m	%		
1	2	20000	14436,39	31997,38	17560,98	34,88		
2			18861,25	30290,86	11429,61	22,70		
5			21864,00	28211,83	6347,83	12,61		
10			23713,99	27522,18	3808,19	7,56		
100			25684,79	26319,06	634,28	1,26		
100			200	2000	20000	200000	26180,63	26684,03
100	2	2000	20000	200000	25702,40	26306,48	604,08	1,20
100	2	20000	200000	25684,79	26319,06	634,28	1,26	
100	2	200000	25962,91	26607,76	644,85	1,28		
1	2	20000	14436,39	31997,38	17560,98	34,88		
			10476,07	48703,04	38226,98	53,67		
			7835,42	66938,56	59103,15	64,15		
			4358,64	85500,28	81141,64	71,79		
	3	20000	18861,25	30290,86	11429,61	22,70		
			16413,07	43787,99	27374,69	38,43		
			14205,9	60148,91	45943,02	49,87		
			11829,17	76826,11	64996,95	57,51		
	4	20000	21864	28211,83	6347,83	12,61		
			23116,29	39207,74	16091,44	22,59		
			21244,29	50213,16	28968,88	31,44		
			21288,82	64908,32	43619,5	38,60		
5	20000	23713,99	27522,18	3808,19	7,56			
		26104,5	36354,88	10250,37	14,39			
		28296,5	46053,7	17757,2	19,27			
		26945,39	55194,38	28248,98	25,00			
10	20000	25684,79	26319,06	634,28	1,26			
		31186,95	33060,36	1873,42	2,63			
		39333,14	43110,29	3777,15	4,10			
		36399,39	42129,43	5730,04	5,07			

A terceira parte da tabela mostra resultados para uma variação da relação entre raios ( $R_2/R_1$ ) para um conjunto de comprimentos (L). Estes resultados foram plotados no gráfico da Fig. 9. Gráficos similares foram construídos para outros valores de raio interno ( $R_1$ ), como mostram as Fig. 10 e 11. Dos gráficos podemos observar que, para uma dada relação comprimento-raio interno, o aumento entre a relação de raios ( $R_2/R_1$ ), provoca um aumento na fração de energia perdida e este aumento é mais acentuado a medida que a relação comprimento-raio interno diminui. Por outro lado, as figuras também mostram como um aumento da relação comprimento-raio interno provoca uma diminuição na fração de energia perdida.

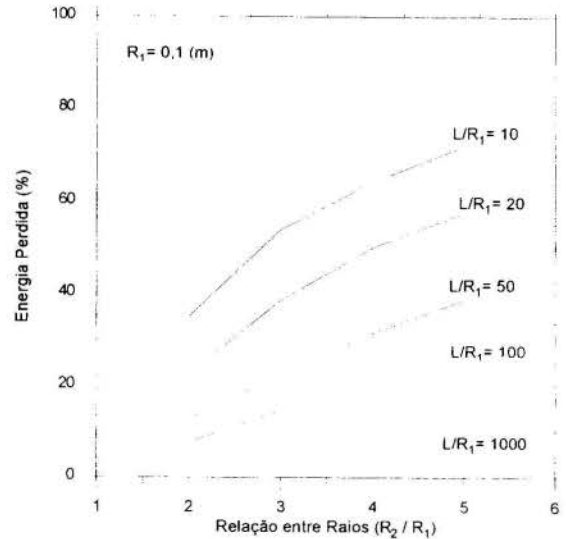


Fig. 9.- Efeitos dos Parâmetros ( $L/R_1$ ) e ( $R_2/R_1$ ) Sobre a Energia Perdida. Raio do Cilindro Interno  $R_1 = 0,1$  m.

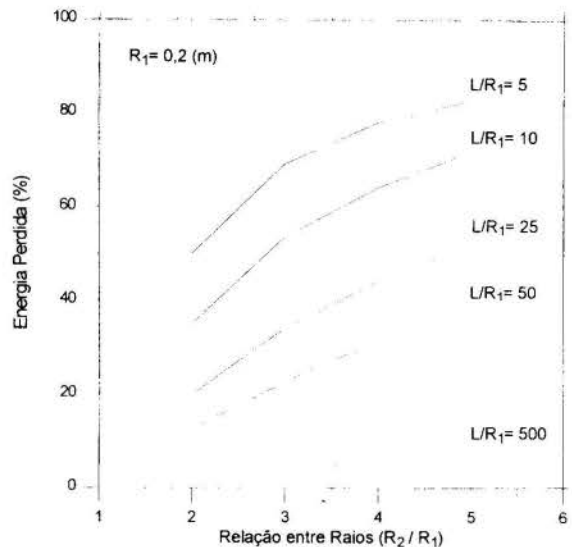


Fig. 10.- Efeitos dos Parâmetros ( $L/R_1$ ) e ( $R_2/R_1$ ) Sobre a Energia Perdida. Raio do Cilindro Interno  $R_1 = 0,2$  m.

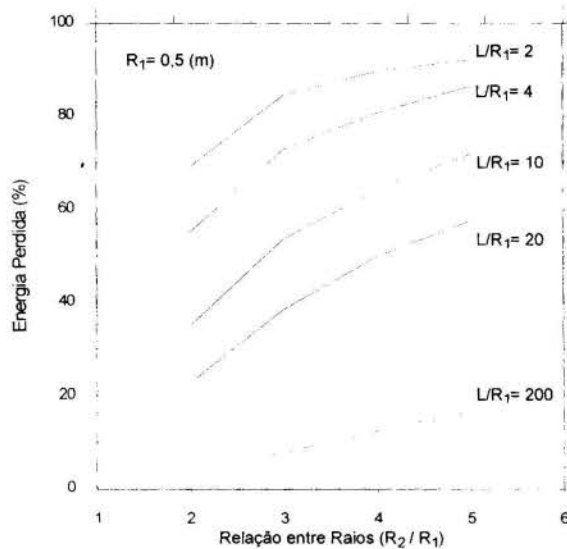


Fig. 11.- Efeitos dos Parâmetros ( $L/R_1$ ) e ( $R_2/R_1$ ) Sobre a Energia Perdida. Raio do Cilindro Interno  $R_1 = 0,5$  m.

Os resultados obtidos mostram também a mesma perda percentual de energia radiante para as geometrias com as mesmas relações ( $L/R_1$ ) e ( $R_2/R_1$ ) como se pode observar, por exemplo, para  $L/R_1 = 10$  e  $R_2/R_1$  variando de 2 a 5.

## CONCLUSÕES

Foi detalhado um modelo matemático baseado no método de Monte Carlo para o cálculo da troca de calor radiante entre duas superfícies cilíndricas concêntricas de comprimento finito, podendo as superfícies serem tanto especulares como difusas, ou uma combinação de ambas. O meio entre as superfícies é não participante. No caso do exemplo analisado a superfície interior é totalmente difusa, enquanto a exterior é 70% difusa e 30% especular, representando o mais exatamente possível o comportamento de uma superfície real.

Foi feita uma análise do calor trocado pelas superfícies e da energia perdida pelo sistema em função dos parâmetros geométricos: comprimento e relação de raios. Concluiu-se que ambos parâmetros são fundamentais para a aplicação da hipótese de cilindros concêntricos infinitos.

Devido à falta de informação disponível e à complexidade do cálculo analítico para abordar o caso analisado - na literatura só se define o fator de forma quando ambas as superfícies são consideradas perfeitamente difusas - a validação do modelo proposto foi feita admitindo um comprimento suficientemente longo para o sistema se comportar como infinito. Os valores obtidos foram comparados com os valores encontrados pelas equações para o cálculo aproximado, obtidos pela ponderação dos fluxos difuso e especular, com boa concordância dos resultados.

Os resultados obtidos mostraram uma mesma perda percentual de energia radiante para as geometrias com as mesmas relações ( $L/R_1$ ) e ( $R_2/R_1$ ).

Tratando-se de superfícies com altas temperaturas em relação à ambiente, o modelo não considerou a troca de calor radiante com o mesmo, bem como os efeitos da convecção natural.

## REFERÊNCIAS

- Campbell, P. M., 1967, "Monte Carlo Method for Radiative Transfer", *Int. J. Heat Mass Transfer*, nº 10, pp.519
- Howell, J. R., 1968, "Application of Monte Carlo to Heat Transfer Problems", *Advances in Heat Transfer*, vol. 5, pp. 1-54.
- Toor, J. S. and Viskanta, R., 1968, "A Numerical Experiment of Radiative Heat Interchange by the Monte Carlo Method", *Int. J. Heat Mass Transfer*, nº 11, pp.883.
- Siegel, R. and Howell, J. R., 1992, "Thermal Radiation Heat Transfer", 3rd ed., *Hemisphere Publ. Co. USA*.

## ABSTRACT

A mathematical model for the calculation of radiative heat flux exchange between two finite concentric cylindrical surfaces was established. The internal surface was considered black and the external surface as gray, reflecting both diffusely and specularly. Because of the difficulty of the mathematical solution for finite cylindrical surfaces, in many practical applications this calculation is performed considering the surfaces as infinite cylinders. With the model obtained in this work it was possible to investigate this assumption validity. This model is three-dimensional and is based on the Monte Carlo Method.



**CALCULO DEL FACTOR DE FORMA ENTRE LA PERSONA (CUYA FORMA SE ASIMILA A UNA ESFERA) Y LAS SUPERFICIES QUE LA RODEAN EN UN AMBIENTE INTERIOR.**



**Alfredo Esteves**

Laboratorio de Ambiente Humano y Vivienda (LAHV)  
 INCIHUSA-CRICYT - C.C. 131 - 5500 Mendoza - R. Argentina  
 Fax: 54-61-287370 - E-mail:ntcricyt@criba.edu.ar

RESUMEN

*En este trabajo se propone una metodología de cálculo del factor de forma, asimilando la forma de la persona a una esfera, con el objeto de determinar la temperatura media radiante en ambientes interiores paralelepípedos.*

*Se presenta la metodología y se compara exhaustivamente con los valores obtenidos experimentalmente por Fanger (1970). Se concluye con que la temperatura radiante media en ambientes interiores puede ser calculada con la metodología propuesta con un excelente nivel de ajuste y con mayor simplicidad de cálculo.*

INTRODUCCION

En ambientes urbanos, las personas viven y trabajan la mayor parte del tiempo en ambientes interiores, a tal punto que aproximadamente el 85 % del tiempo, la vida de las mismas transcurre en el interior, es decir, en viviendas, oficinas, escuelas, etc. En ellos, se crean ambientes artificiales de modo de obtener lugares más confortables que el ambiente exterior, sobretodo en climas templados, donde las condiciones climáticas exteriores reinantes se mantienen fuera de los límites de confort la mayor parte del año.

Desde la década de los años 70, existe una tendencia hacia el ahorro de energía debido a los precios y la escasez primero y en los años recientes debido al aumento de contaminación por emisiones a la atmósfera.

La conservación de energía y los sistemas solares pasivos, implementados a un edificio para transformarlo en bioclimático, aparece como una seria opción para proveer de un ambiente confortable, combinando además, sustanciales ahorros de energía y sin producir emisiones perjudiciales para el medio ambiente.

En los ambientes interiores de las viviendas bioclimáticas se maximizan los intercambios radiantes ya sean de baja longitud de onda (durante el día) como de alta longitud de onda (durante la noche).

Dentro del ambiente interior, el intercambio radiante entre la persona y los elementos sólidos que la rodean se mide a través de la temperatura radiante media (TRM).

El intercambio de radiación entre la persona y los elementos sólidos que la rodean, puede calcularse por medio de la ley de Stefan Boltzman, teniendo en cuenta

que el aire es transparente a este intercambio:

$$R = A_{eff} \epsilon \sigma (T_{cl}^4 - TRM^4) \quad (1)$$

donde:

- A<sub>eff</sub> = area efectiva de radiación del cuerpo vestido
- σ = constante de Stefan Boltzman
- ε = emisividad
- T<sub>cl</sub> = temperatura absoluta de la superficie exterior del cuerpo vestido.
- TRM = temperatura radiante media.

La temperatura realmente percibida por los ocupantes (temperatura operativa, TO), es una combinación lineal de la temperatura de bulbo seco del aire (TBS) y la temperatura radiante media (TRM), que de acuerdo a Audoin et al (1981) tiene la expresión de la Eq. (2).

$$TO = \mu TBS + (1-\mu) TRM \quad (1)$$

El valor de μ depende de la velocidad del aire circundante y se indica en la Tabla I.

Tabla I: variación de μ con la velocidad del aire

V(m/s)	0,05	0,1	0,2	0,3	1,0	4,0
μ	0,43	0,51	0,58	0,63	0,74	0,84

La TRM se define como la temperatura uniforme de un medio ambiente negro, el cual, produce la misma

pérdida de calor radiante que una persona en una postura dada, con un nivel de vestimenta determinado y situada en un punto dado de la habitación.

La postura juega un rol determinado. La TRM no será la misma respecto a una persona sentada o parada. Además es necesario conocer la localización y orientación ya que la TRM variará punto a punto dentro de la habitación y con una orientación acimutal del cuerpo.

### EVALUACION DE LA TEMPERATURA RADIANTE MEDIA

La evaluación de la TRM se dará para una persona ubicada en un ambiente rodeado de N superficies, consideradas isotérmicas, con temperaturas T1, T2, T3, ..., Tn (°K), con emitancias  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  y factores de forma entre la persona y las superficies Fp-1, Fp-2, ..., Fp-n.

. Si alguna de las superficies dadas no son isotérmicas, debería subdividirse en superficies más pequeñas de modo que cada una de las mismas puedan considerarse isotérmicas.

. Se asume que las superficies son grises y además que la radiación emitida y reflejada está difusamente distribuida, esto último es cierto para la mayoría de los materiales no conductores de la electricidad (Incropera, 1981).

Estas consideraciones implican que la radiación emitida y reflejada desde una superficie no sean distinguibles direccionalmente, luego, su suma da lugar a lo que se conoce como "radiosidad", B:

$$B_i = \epsilon \sigma T_i^4 + \Gamma H \quad (3)$$

Para superficies grises tenemos  $\Gamma = 1 - \epsilon_i$  y la radiosidad Bi se distribuye en forma difusa.

Considerando que las N superficies del ambiente tienen radiosidades B1, B2, ..., Bn, la Eq. (4) indica la expresión para calcular la TRM.

$$TRM^4 = (1/\sigma) [B_1 F_{p-1} + B_2 F_{p-2} + \dots + B_n F_{p-n}] \quad (4)$$

El problema consiste en determinar las radiosidades desconocidas teniendo en cuenta que no sólo depende de la temperatura y emitancia de la superficie sino también, de la radiación incidente desde todas las demás superficies. Estas deberán calcularse por medio de un análisis total del campo radiante.

Podría considerarse que, como la mayoría de los materiales de construcción tienen una alta emitancia, despreciar las reflexiones asumiendo que todas las superficies en el recinto son negras no producirá un error apreciable.

Luego:

$$TRM^4 = T_1^4 F_{p-1} + T_2^4 F_{p-2} + \dots + T_n^4 F_{p-n} \quad (5)$$

En otras palabras, la temperatura media radiante se calcula como la media de las temperaturas de los muros elevada a la cuarta potencia y promediadas de acuerdo a la magnitud de los factores de forma respectivos.

Es decir, que se requiere conocer los factores de forma entre el cuerpo humano y las superficies que lo rodean para el cálculo de la TRM a que estará sometida la persona ubicada en el interior de ese local.

### FACTOR DE FORMA

También llamado factor de configuración o factor de vista, es una cantidad geométrica asociada con la cantidad de radiación que abandona una superficie y alcanza otra superficie.

El factor de forma Fij se define como la cantidad de radiación que saliendo de la superficie i es interceptada por la superficie j.

Como el factor de forma es la "fracción" que sale de i y es interceptada por j, tenemos:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (6)$$

Similarmente, el factor de forma Fji se define como la fracción de radiación que saliendo de Aj es interceptada por Ai. Puede ser demostrado que:

$$F_{ji} = \frac{1}{A_j} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (6)$$

Fanger (1970), propone que el factor de forma entre el cuerpo humano y una superficie rectangular a x b tiene la expresión indicada en la Eq. (7). Luego de una serie de experimentos para un relevante número de casos y para ambientes paralelepípedos, obtuvo los valores de estos parámetros y los volcó a un grupo de diagramas.

$$F_{p-1} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \int_b^c \frac{fp \cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dz \quad (7)$$

donde: fp es el factor de área proyectada.

La Eq.(7) se refiere a la Figura N° 1, en la cual, la persona se ubica en el punto P y mira hacia el centro del



sistema de coordenadas. En esta ecuación  $f_p$  se determina en función de alfa y beta donde:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) ; \beta = \tan^{-1} \frac{(z/y)}{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}} \quad (9)$$

Summers, 1983 and Kalisperis, 1985 elaboraron un conjunto de gráficos teniendo en cuenta un método paralelo al de Fanger. El método también requiere el cálculo del "factor de área proyectada" de la persona.

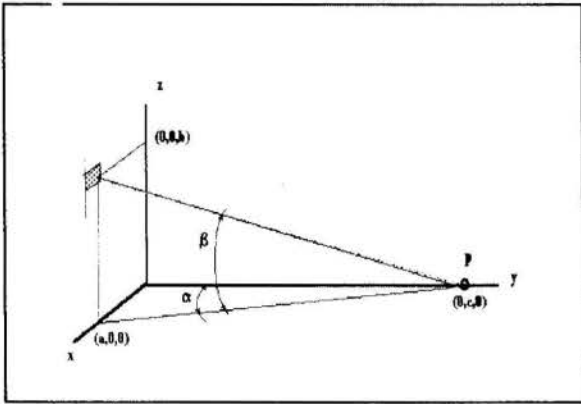


Figura N° 1: esquema para el cálculo del factor de forma s/Fanger.

Steinman, 1991, extiende el método a superficies inclinadas para el caso de posturas de pie.

Cannistraro, 1992 propone su cálculo a partir de funciones exponenciales incorporando parámetros dependientes de las proporciones relativas de las superficies rectangulares. Estas expresiones fueron derivadas a partir de los datos experimentales obtenidos por Fanger. Correctamente observa la limitación de que al elegir la forma esférica, aparecen las diferencias que dependen de la postura de la persona, teniendo en cuenta el trabajo de Bonavita, 1989.

Sin embargo, el cálculo del factor de forma no es el objetivo final del presente estudio, sino de obtener buenos valores de la TRM utilizando un método sencillo para calcular los factores de forma en el ambiente radiante que de por sí es bastante complejo.

Bonavita, 1989 ha indicado que la forma esférica puede utilizarse para el cálculo de los factores de forma y presenta un programa computacional, pero no demuestra en forma exhaustiva en cuánto afecta el cálculo de los factores de forma, respecto de los obtenidos por Fanger.

Asimilar el cuerpo humano a una superficie esférica además de la simplicidad de cálculo, nos permitiría por ejemplo calcular los factores de forma para una superficie inclinada colocando las distancias apropiadas a los planos.

Se propone para el cálculo del factor de forma entre

una esfera y una superficie rectangular, trabajar con la expresión indicada en la Eq.(9), que responde a la Figura N° 2.

$$F_{p-1} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{sen}^{-1} \frac{xy}{[(1+x^2+y^2+z^2)]^{1/2}} \quad (10)$$

donde:

$$x = \frac{a}{c} ; y = \frac{b}{c} \quad (11)$$

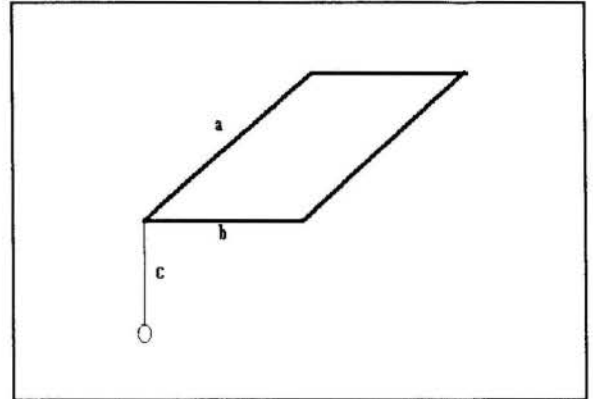


Figura N° 2: esquema para el cálculo del factor de forma en el método propuesto.

## RESULTADOS

Se desarrolló un programa computacional para obtener los factores de forma respectivos y compararlos con los valores obtenidos por Fanger.

Se ha calculado el factor de forma para cada postura adoptando la nomenclatura indicada por Cannistraro, 1992. Los valores de  $a/c$  y  $b/c$  utilizados fueron los siguientes:

- . valores discretos de  $a/c$ : 0,2; 0,5; 1; 1,5; 4; 6 y 10.
- . valores de  $b/c$ : desde 0 hasta 1 con intervalos de 0,1 y desde 1 hasta 10 con intervalos de 1. Estos intervalos cubren todas las situaciones que ocurren en los ambientes interiores.

Las Figuras N° 3 y 4 muestran los resultados de comparar las metodologías y la Tabla I muestra los valores del coeficiente de correlación obtenidos para la metodología propuesta.

Como puede observarse el coeficiente de correlación menor resulta ser de 0,604 para la postura STK1 y de 0,687 para la postura SEK1. Para el resto de las posturas resulta ser mayor de 0,75 y especialmente en el caso de orientación desconocida, mayores de 0,8. Se puede observar que la mayor dispersión aparece cuando tenemos posturas fijas, es decir, la metodología propuesta se aleja de la metodología de Fanger, aunque podría interpretarse que el factor de forma resulta

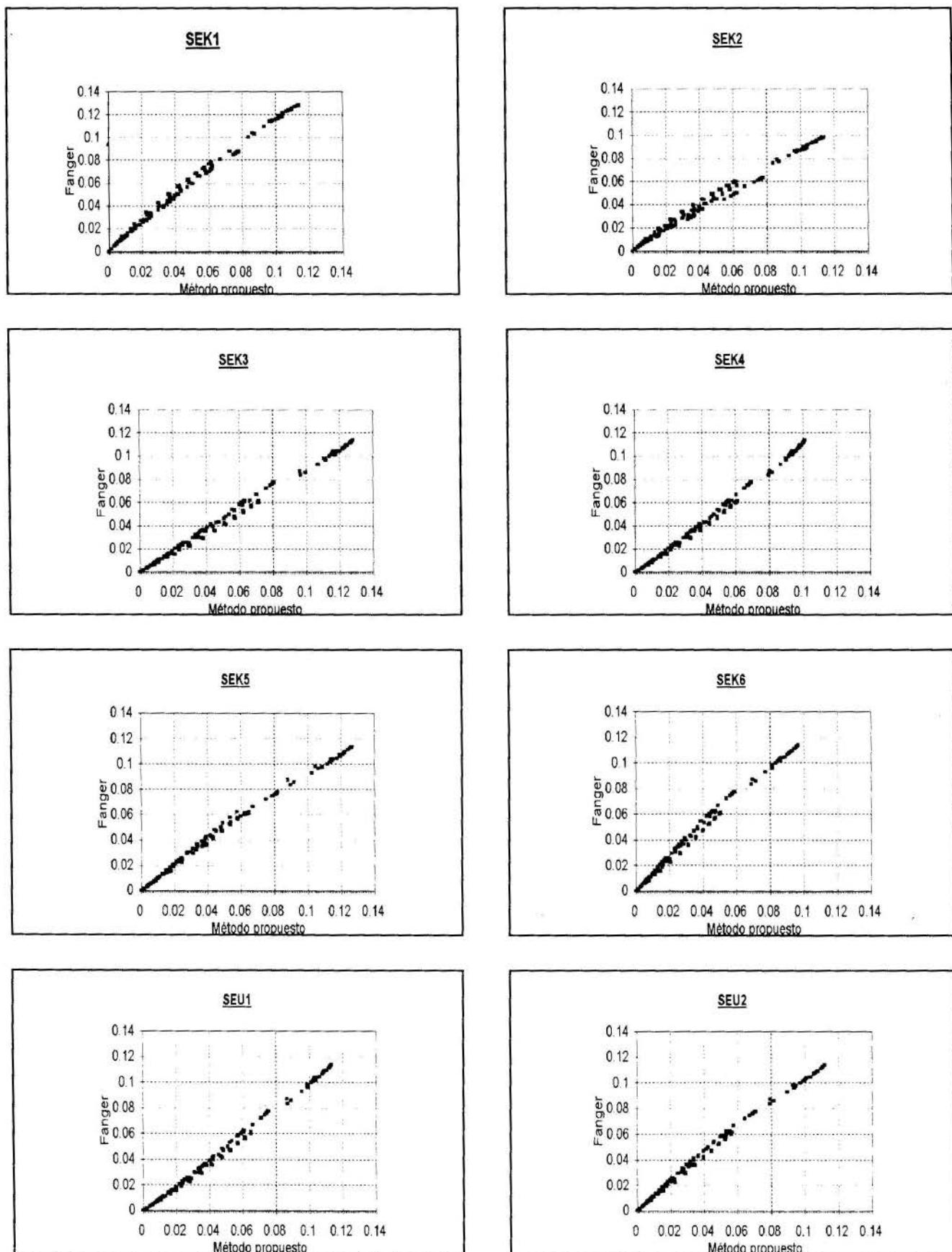
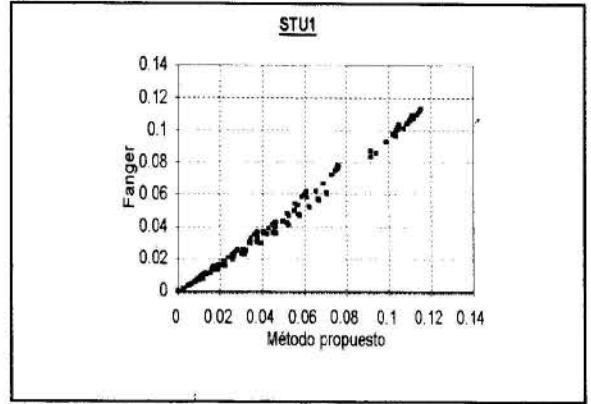
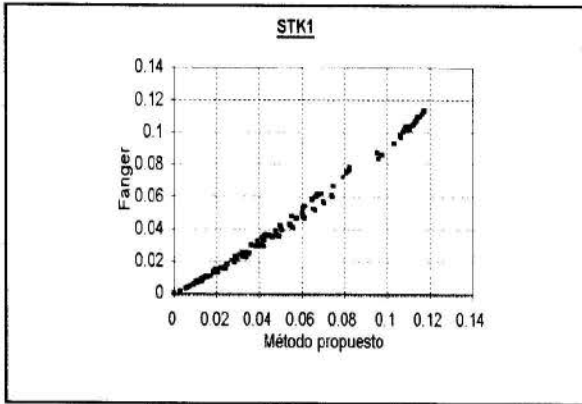


Figura N° 3: comparación entre el método propuesto y la metodología de Fanger para las distintas posturas sentadas.

compensado al calcularse para uno de los elementos opacos que rodea a la persona en toda su extensión.



Figuras N° 4: comparación entre el método propuesto y la metodología de Fanger para las distintas situaciones de pie.

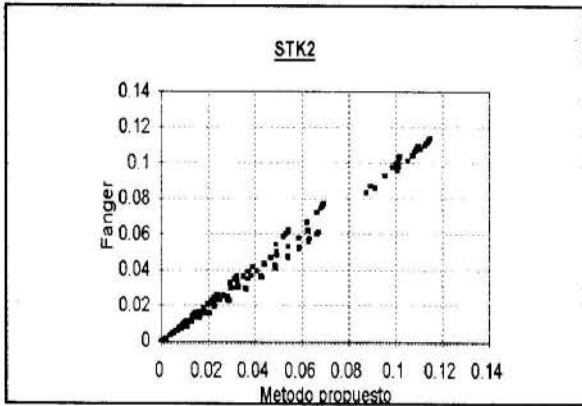
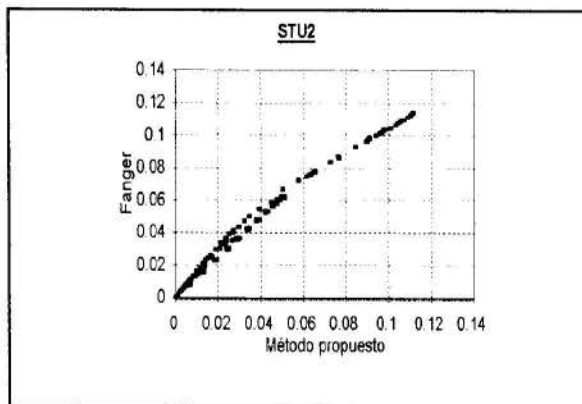
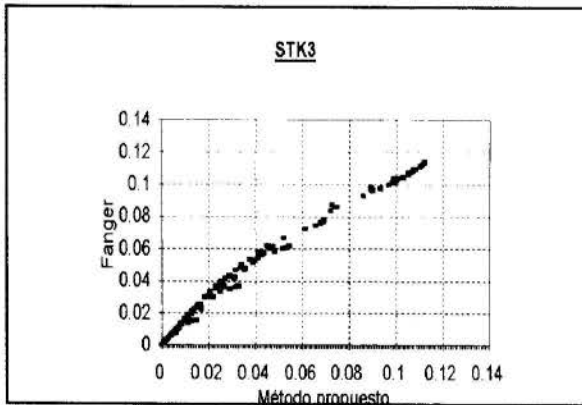


Tabla II: coef. de correlación para las distintas posturas.

Post.	Rmax.	Rmin.
SEK1	0,714	0,909
SEK2	0,904	0,982
SEK3	0,992	0,921
SEK4	0,997	0,978
SEK5	0,990	0,943
SEK6	0,926	0,719
STK1	0,977	0,604
STK2	0,990	0,966
STK3	0,959	0,758
SEU1	0,999	0,930
SEU2	0,996	0,949
STU1	0,992	0,954
STU2	0,978	0,808



Cuando se proyecta un edificio conocer la orientación de la persona de antemano es difícil, no así su postura. Se propone por lo tanto, en este trabajo, calcular la TRM para este último caso, es decir, para la postura STU1 y STU2, SEU1 y SEU2 teniendo en consideración los factores de forma calculados de acuerdo a las dos metodologías, de modo de conocer el error en que se incurre al utilizar la metodología propuesta.

Sea como ejemplo el ambiente indicado en la Figura N° 5. Al calcular la TRM, nos permite conocer la situación radiante en el interior.

Para tomar en consideración una mayor variabilidad en el cálculo se ha trabajado con distintos valores de temperatura en cada uno de los elementos sólidos de manera de simular las temperaturas existentes en edificios solares pasivos, que es el objeto indicado anteriormente.

Las Figuras N° 6 para el caso de la postura de parado y la Figura N° 7 para el caso de la postura sentado, indican la comparación entre las dos metodologías y el coeficiente de correlación lineal. Como puede observarse la correlación es excelente en ambos casos, lógicamente es mayor en el caso de tomar la postura sentado donde la forma se asemeja más a la esfera que la postura de pie.

### CONCLUSIONES

Se ha demostrado la conveniencia de utilizar la metodología propuesta para la determinación de los factores de forma siempre y cuando no se conozca la orientación de tal postura, que es la que ocurre en la mayoría de los casos.

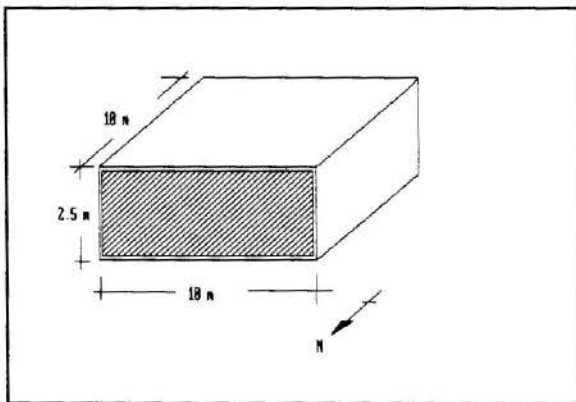


Figura N° 5: ejemplo de local para el estudio de caso.

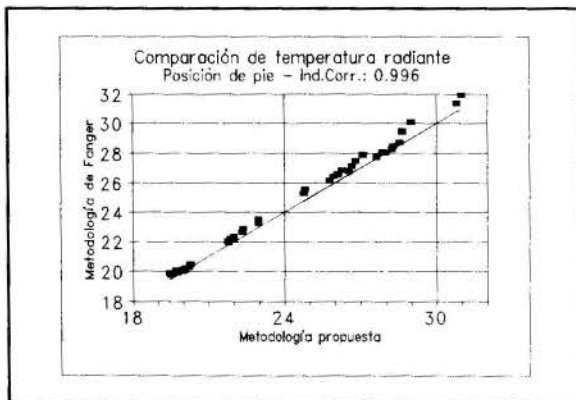


Figura N° 6: Resultados del cálculo de TRM, postura de pie.

El cálculo de la TRM arroja valores que ajustan excelentemente con los obtenidos por Fanger en un amplio rango de situaciones térmicas existentes en edificios solares pasivos. Por lo tanto, constituye una metodología simple y muy práctica para su utilización toda vez que se quiere determinarse la situación térmica radiante en el interior de recintos paralelepípedos.

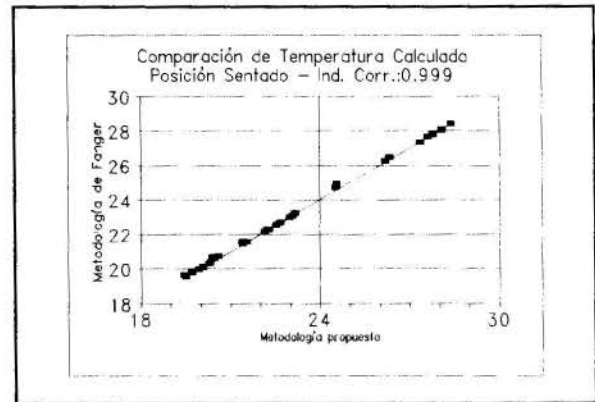


Figura N° 7: resultados del cálculo de la TRM para la postura sentado.

### REFERENCIAS

- Audoin P., Berger X., Schneider M. (1981). "Etude d'ambiances dy Rayonnement". Cahiers du CSTB N° 218.
- Bonavita F., Brunello P., Zecchin R. (1989). "Metodo di calcolo dei fattori di forma tra corpo umano e superfici interne in un ambiente". Condizionamento dell'Aria, Riscaldamento, Refrigerazione, N°2, PEG edn. Milano.
- Canistraro G., Franzitta G., Giaconia G., Rizzo G. (1992). "Algorithms for the calculations of the view factors between human body and rectangular surfaces in parallelepiped environments". Energy and Buildings, 19(1), pp. 51-60.
- Fanger P.O. (1970). "Thermal Comfort- Analysis and Applications in Environmental Engineering". Danish Technical Press, Copenhagen.
- Incropera F., De Witt D. (1981). "Fundamentals of Heat Transfer". Cap.12. Ed. J.Wiley, N.Y.
- Kalisperis L.N., Summers L.H. (1985). "Comfort design patterns for optimal combination surface temperature". Proc. Passive Solar Energy Conf., pp.389-394. ASES, Raleigh, NC.
- Steinman M. Kalisperis L.N., Summers L.H. (1991). "Expanded research on human shape factors for inclined surfaces". Energy Build. 17 (3), pp.283-295.
- Summers, L.H., Steinman M., Ling M.D., Moszcienski J. (1983). "Automated generation of shape factors for mean radiant temperature measurement". Proc. Passive Solar Energy Conf. ASES, pp. 31-36. Albuquerque, NM.





## DETERMINAÇÃO DE UMA CORRELAÇÃO PARA O CÁLCULO DA RADIAÇÃO SOLAR DIFUSA INCIDENTE A PARTIR DA RADIAÇÃO SOLAR GLOBAL



**Enio B. Pereira<sup>1</sup>, Samuel L. de Abreu e Sérgio Colle**  
Universidade Federal de Santa Catarina  
EMC/LABSOLAR, C. Postal 476  
88040-900 - Florianópolis - SC - Brasil

### RESUMO

*Neste trabalho é apresentada uma correlação para estimar a radiação solar difusa a partir de dados experimentais da radiação solar global incidente. O modelo foi ajustado para o Brasil e leva em conta o ângulo de elevação solar e as variáveis climáticas de temperatura do ar e umidade relativa. A validação do modelo foi efetuada empregando-se dados experimentais de radiação difusa medidos entre 1994 e 1995 em Florianópolis (27°36'S - 48°34'W) e apresentou um RMSE relativo global de 0,3.*

### INTRODUÇÃO

O conhecimento da componente difusa da radiação solar incidente na superfície, tem grande importância no estudo do comportamento térmico de edificações e na agrometeorologia. No entanto a medição da radiação difusa é feita com muito menos frequência que a da radiação global, devido ao fato dos equipamentos utilizados com esta finalidade possuírem uma maior complexidade e necessitarem de maiores cuidados quanto a manutenção e operação.

Programas de simulação térmica utilizam correlações estatísticas para determinar a parcela difusa da radiação solar a partir da radiação global. Estas correlações foram desenvolvidas quase que na totalidade utilizando dados medidos no hemisfério norte. Isto aliado a particularidades regionais devido a diversidade climática, faz com que a parcela de erros dos resultados estimados, aumente ainda mais quando a simulação é feita para localidades no hemisfério sul.

A inexistência de dados confiáveis de radiação solar difusa medidos continuamente durante vários anos, fez com que poucas iniciativas tenham sido tomadas no sentido de desenvolver estas mesmas correlações para o Brasil. Melo e Rizatki (1993), determinaram uma correlação a partir de dados de dois anos medidos pelo Laboratório de Energia Solar da Universidade Federal de Santa Catarina (LABSOLAR - EMC - UFSC) mas não fornecem informações sobre os erros associados às estimativas obtidas. O presente trabalho visa apresentar e validar um novo modelo para estimação da radiação difusa, desenvolvido a partir do modelo de Reindl (1990), com dados atualizados, medidos por novos

equipamentos do LABSOLAR e comparar os resultados obtidos com os modelos anteriores.

### MODELOS PARA ESTIMATIVA DA RADIAÇÃO DIFUSA

Os diversos modelos propostos por diferentes autores, procuram correlacionar variáveis climáticas costumeiramente medidas, com a relação entre a radiação difusa e a global  $I_d/I$ .

Os métodos mais conhecidos para estimar a radiação difusa a partir da radiação global medida baseiam-se em, regressões lineares ou não lineares com os dados experimentais (Liu e Jordan, 1960; Ruth e Chant, 1976; Collare-Pereira e Rabl, 1979; Orgill e Hollands, 1977; Erbs, 1980; Iqbal, 1983). Liu e Jordam propuseram um modelo correlacionando o índice de limpeza  $I/I_0 (K_f)$ , da seguinte forma:

$$I_d/I = a_0 + \sum a_i (I/I_0)^i \quad (1)$$

onde,  $I_d$  é a radiação difusa horária,  $I$  é a radiação global horária incidente e  $I_0$  é a radiação solar horária extraterrestre ( $kJ.m^{-2}$ ). As constantes de regressão  $a_i$  são ajustadas com dados experimentais.

O modelo proposto por Reindl et al. (1990), é o mais completo pois inclui a influência de variáveis climáticas, normalmente medidas nas estações solarimétricas, sobre a parcela difusa da radiação. Reindl efetuou um estudo sobre a importância relativa dessas variáveis climáticas sobre as estimativas do modelo e selecionou somente as mais significativas no sentido de diminuir o erro na estimação da radiação difusa. O modelo utiliza além de  $I/I_0$ , o ângulo de

<sup>1</sup> Afastado do INPE, CP515, S.J. Campos, SP 12201-970

elevação solar, a temperatura ambiente e a umidade relativa na seguinte forma:

$$I_d/I = a_0 + a_1(I/I_0) + b.\text{sen}(\alpha) + c.T_a + d.\phi \quad (2)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de elevação solar,  $T_a$  é a temperatura ambiente, ( $^{\circ}\text{C}$ ) e  $\phi$  é a umidade relativa (%). as constantes  $a_0, a_1, b, c, d$  também variam neste caso para diferentes intervalos de  $I/I_0$ . As variáveis adicionais deste modelo são as que mais contribuem para o espalhamento da curva  $I_d/I$  versus  $I/I_0$ . Uma versão simplificada deste modelo utiliza apenas  $I/I_0$  e,  $\alpha$  da seguinte forma:

$$I_d/I = a_0 + a_1(I/I_0) + b.\text{sen}(\alpha) \quad (3)$$

Esta correlação é muito útil quando não se dispõe das variáveis climáticas, pois  $\alpha$ , o ângulo de elevação solar, pode ser sempre determinado por uma expressão analítica que pode ser encontrado em qualquer livro-texto sobre radiação solar (Iqbal, 1983).

Neste trabalho procurou-se determinar a expressão para a radiação difusa empregando-se uma combinação do modelo de Reindl e o modelo típico de Liu e Jordan de regressão não linear.

#### DESCRIÇÃO DO MODELO

Neste trabalho procurou-se obter os coeficientes de regressão e validar o modelo de Reindl para dados de radiação obtidos no Brasil. Além disso, adotou-se uma pequena modificação no modelo de Reindl a fim de levar em conta a não linearidade da curva  $I/I_0$  versus  $I_d/I$  nos diversos intervalos de validação definidos por Reindl. O modelo proposto assume que a radiação difusa pode ser dada pelo seguinte sistema de equações de regressão:

$$I_d/I = a_0 + \sum a_i (I/I_0)^i + b.\text{sen}(\alpha) + c.T_a + d.\phi \quad (4)$$

ajustada para os seguintes intervalos de regressão:

$$1) \quad 0 \leq I/I_0 \leq 0,3 \text{ e } I_d/I \leq 1 \quad \Rightarrow \quad i=1,2$$

$$2) \quad 0,3 \leq I/I_0 \leq 0,78 \text{ e } I_d/I \geq 0,1 \quad \Rightarrow \quad i=1,2,3$$

$$3) \quad I/I_0 \geq 0,78 \text{ e } I_d/I \geq 0,1 \quad \Rightarrow \quad i=1$$

A base de dados para efetuar essas regressões foram os valores de radiação global horárias coletados entre julho de 1994 e outubro de 1995 pelos piranômetros Kipp & Zonen (CM11) da estação solarimétrica do LABSOLAR em Florianópolis, SC ( $27^{\circ}36'S$  -  $48^{\circ}34'W$ ). Os dados climáticos também foram obtidos por instrumentos meteorológicos operando nessa mesma estação. Para fins de cálculo de erros das estimativas foram empregados os dados obtidos por um piranômetro idêntico, dotado de anel de sombreamento. Os dados medidos de radiação difusa não sofreram nenhum tipo de correção.

Os coeficientes de regressão da equação 5 são mostrados na tabela abaixo, junto com os erros-padrão entre parênteses:

Tabela 1. Coeficientes de regressão do modelo.

intervalo	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b$	$c$	$d$
$0 \leq I/I_0 \leq 0,3$	0.977 (0.014)	0.347 (0.080)	-1.76 (0.23)	*****	-0.0121 (0.00475)	-0.00479 (0.0003)	0.0526 (0.012)
$0,3 \leq I/I_0 \leq 0,78$	0.526 (0.182)	2.97 (1.07)	-8.51 (2.05)	5.00 (1.26)	0.198 (0.012)	-0.0036 (0.0006)	0.0429 (0.021)
$I/I_0 \geq 0,78$	-1.58 (1.81)	2.26 (2.23)	*****	*****	-0.348 (0.110)	0.0056 (0.0058)	0.246 (0.210)

A Tabela 2, abaixo, mostra os resultados dos erros quadráticos médios (RMSE) das estimativas relativos às médias dos valores medidos de  $I_d/I$  para os principais tipos de modelos e para o modelo proposto nesse trabalho, ajustados sobre a mesma base de dados.

Tabela 2. Comparação dos erros quadráticos médios (RMSE) relativos para os principais modelos.

modelo	RMSE	observações
Orgill e Hollands, 1977	0.388	$I_d/I$ linear
Collares-Pereira e Rabl, 1979	0.325	tipo Liu e Jordan
Reindl et al., 1990	0.300	equação (2)
este trabalho	0,298	tipo Reindl

\* total de 4222 pontos

Pode-se notar que o ganho introduzido pelo modelo mais complexo (nosso) é relativamente pequeno com relação ao proposto por Reindl, mas pode ser considerado significativo se comparado aos modelos mais simples como o linear de Orgill e Hollands e os não lineares tipo Liu e Jordan.

A Figura 1 mostra a distribuição dos desvios para o nosso modelo. Nota-se que a distribuição é normal e a maior parte dos desvios (> 80%) encontram-se na faixa entre -0,1 e 0,1 com uma ligeira tendência para superestimar os valores de  $I_d/I$ .

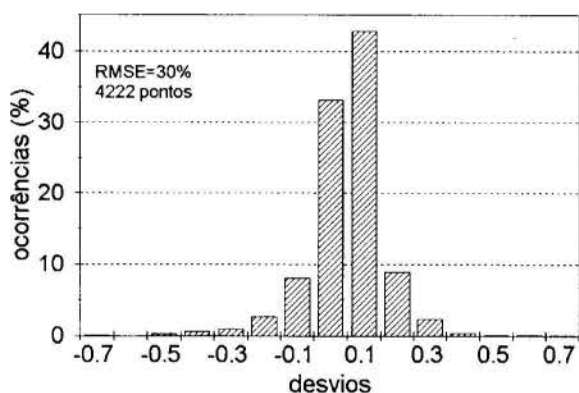


Figura 1. Histograma de distribuição dos desvios entre estimativa e medida de  $I_d/I$ .

Na Figura 2 mostra o gráfico dos desvios em função de  $I_d/I$ . O caracter assimétrico dos pontos mostra que os desvios são preferencialmente negativos (subestima) para  $I_d/I < 0,5$  e positivos (superestima) para valores maiores que 0,5. De uma forma geral, o grande espalhamento dos pontos é principalmente devido a fatores atmosféricos que não puderam ser levados em conta na equação (5), tais como a micro-física das nuvens, os aerossóis atmosféricos e o albedo da superfície. Dentre esses, os aerossóis são, possivelmente os mais significativos pois podem estar presentes em grandes quantidades nas regiões urbanas, industrializadas e durante a seca devido a queima da biomassa. A quantificação desse parâmetro é um assunto que tem despertado grande interesse da comunidade científica devido a sua importância na modulação da intensidade e característica da radiação solar incidente (Pereira et al, 1996).

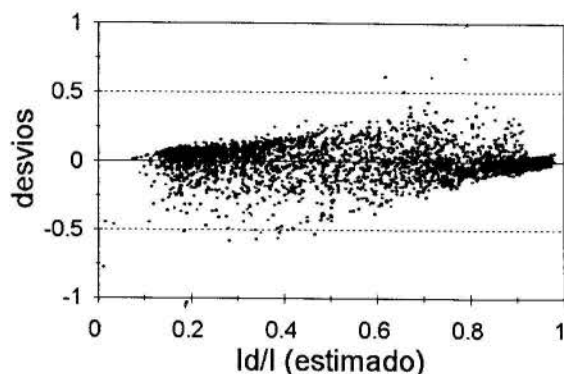


Figura 2. Gráfico dos valores estimados de  $I_d/I$  e dos desvios entre estimativa e medida.

Um estudo dos componentes principais para os quatro parâmetros empregados para a regressão do modelo mostra pesos estatísticos diferentes na variabilidade das estimativas de  $I_d/I$ . Para o primeiro intervalo ( $0 \leq I/I_o \leq 0,3$ ), apenas dois fatores foram indicados, com  $I/I_o$  e a umidade relativa  $\phi$  como primeiro fator e o  $\text{sen}(\alpha)$  como um outro fator isolado - a temperatura do ar é menos importante para a variabilidade dos dados nesse intervalo. Já no segundo intervalo, ( $0,3 \leq I/I_o \leq 0,78$ ), onde ocorre a maior variabilidade de  $I_d/I$ , apenas um fator foi selecionado, com predominância de  $\text{sen}(\alpha)$ ,  $T_a$  e  $\phi$  - a umidade relativa é pouco importante nesse caso. No último intervalo, para  $I/I_o \geq 0,78$ , novamente aparecem dois fatores com  $\text{sen}(\alpha)$  e  $\phi$  no primeiro fator e  $I/I_o$  isolado no segundo fator - a temperatura do ar não parece ter muita importância nesse intervalo.

## CONCLUSÕES

As dificuldades experimentais impostas na obtenção de dados de radiação difusa levam ao emprego de modelos de estimação. Contudo, a grande maioria desses modelos são ajustados para o hemisfério norte e, portanto, não asseguram resultados validos para o Brasil. O modelo apresentado nesse trabalho foi validado com dados brasileiros e leva em conta algumas variáveis climáticas. O erro quadrático médio obtido pelo modelo foi de 0,3 e os desvios entre as estimativas e os valores medidos de  $I_d/I$  ficaram entre -0,1 e + 0,1 em mais de

80% dos casos. A maior parte dos desvios encontrados foram entre  $0,3 \leq I/I_0 \leq 0,78$ , onde todos os modelos também apresentaram a maior dispersão. Esse mesmo modelo deverá ser, em breve, validado a partir de uma base de dados mais completa, incluindo outras estações brasileiras que dispõem de valores medidos para a radiação difusa e empregando dados corrigidos para o anel de sombreamento.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao programa RHA/CNPq e às colaborações dos engenheiros Paulo Couto e Sylvio L.M. Neto.

#### REFERÊNCIAS

- Collares-Pereira, M. e Rabl, A., 1979, "The Average Distribution of Solar Radiation Correlation Between Diffuse and Hemispherical and Between Daily and Hourly Insolation Values". *Solar Energy*, Vol. 22, pp. 155-164.
- Erbs, D.G., 1980, "Methods for Estimating the Diffuse Fraction of Hourly, Daily, and Monthly Global Solar Radiation", MA Thesis, Mechanical Engineering, University of Wisconsin-Madison, Madison, USA.
- Iqbal, M., 1983, "An Introduction to Solar Radiation", pp.272-273, Academic Press, NY.
- Liu, Y.H. e Jordan, R.C., 1960, "The Interrelationship and Characteristic Distribution of Direct, Diffuse and Total Solar Radiation", *Solar Energy*, Vol. 4, 1-19.
- Melo, C. e Rzatki, J.R., 1993, "Estimativa da Radiação Solar na Presença de Nuvens", *Anais: XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, pp. 1149-1152, Brasília, DF.
- Orgill, J.F. e Hollands, K.G.T., 1977, "Correlation Equation for Hourly Diffuse Radiation on a Horizontal Surface", *Solar Energy*, Vol. 19, 357-359.
- Pereira, E.B., Setzer, A.W., Gerab, F., Artaxo, F., Pereira, M.C. e Munroe, G., Accepted in december, 1995, "Airborne Measurements of Aerosols from Burning Biomass in Brazil Related to the "TRACE-A" Experiment", *Jour. Geophysical Res.*
- Reindl, D.T., Beckman, W.A. e Duffie, J.A., 1990, "Diffuse Fraction Correlations", *Solar Energy*, Vol. 45, 1-7.
- Ruth, D.W. e Chant, R.E., 1976, "The Relationship of Diffuse Radiation to Total Radiation in Canada", *Solar Energy*, Vol. 18, 153-154.





**COLETOR E RADIADOR ESPACIAL**

**Ezio C. Garcia**

Laboratório de Integração e Testes - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
12.227-010 - São José dos Campos - S.P. - Brasil

**Sergio M. Saboya**

**Edson L. Zapparoli**

Departamento de Energia - Instituto Tecnológico de Aeronáutica



SUMÁRIO

*Este trabalho descreve a formulação matemática de um modelo computacional elaborado para projetar coletores e radiadores para uso em controle térmico de veículos e satélites espaciais. O coletor/radiador é composto por uma placa absorvedora com aletas retangulares. Sobre o conjunto placa-aletas é montado um vidro ou um plástico seletivo semitransparente no uso do coletor mas para o radiador esta cobertura é eliminada. O conjunto é montado sobre um equipamento eletrônico com temperatura constante. A análise térmica é feita com a radiação acoplada com a condução. É utilizado o modelo de bandas no espectro solar e infravermelho.*

INTRODUÇÃO

Em satélites e veículos espaciais, a energia solar é responsável pela maior parte da carga térmica através da incidência direta ou albedo terrestre, impondo elevados gradientes de temperatura. Um controle térmico se faz necessário para que equipamentos que os compõem operem dentro de faixas de temperaturas preestabelecidas (Cardoso e Garcia, 1989). No controle térmico são usados dispositivos como coletores e radiadores de calor.

O sol emite 98 % de sua radiação em comprimento de onda de 0 a 3  $\mu\text{m}$  (banda solar). Os coletores e radiadores estando em temperaturas abaixo de 400 K emitem 99,8 % em comprimentos de onda superiores a 3  $\mu\text{m}$  (banda infravermelha - I.V.) (Saboya, 1987).

Este trabalho descreve a formulação do modelo computacional desenvolvido para análise de dois dispositivos básicos:

- Coletor Espacial (C.E.): coleta a radiação solar e aquece um determinado equipamento;
- Radiador Espacial (R.E.): resfria um equipamento, liberando o calor para o espaço.

O C.E. apresentado na figura 1 é composto por uma placa absorvedora plana com aletas retangulares. Sobre o conjunto placa-aletas é colocado um vidro ou plástico seletivo (Gama et al., 1986).

O comportamento térmico é analisado com condução e radiação combinados. Na radiação é utilizado o modelo de bandas com análise no espectro solar e I.V.. O vidro seletivo é semitransparente no I.V. e transparente na banda solar. Desta forma obtêm-se um filtro e o "feito estufa" com o aprisionamento de energia térmica. A condução de calor é assumida unidimensional com temperaturas variáveis. Não há convecção. Para o R.E. não é usado o vidro, pois neste o objetivo não é aprisionar e sim liberar energia. A análise é feita em apenas uma "célula" composta por duas aletas, placa e vidro, montado sobre o equipamento com temperatura constante  $T_e$ ; aletas isoladas por simetria; a troca de calor por unidade de área  $q_e''$  entre o equipamento e C.E. ou R.E. é dada por uma condutância de contato prescrita  $h_c$ ; a radiação solar  $H_{sol}$  atravessa o vidro e incide somente e perpendicularmente na placa; o vidro perde calor para o espaço por fluxo  $q_{ex}''$  calculado localmente. As células básicas para o C.E. e R.E. são apresentadas na figura 2.

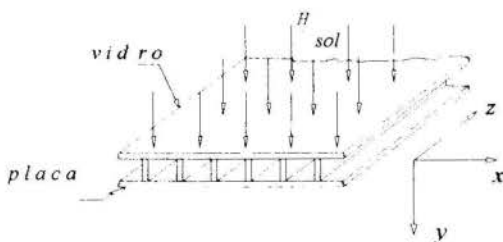


Figura 1 - Configuração básica do Coletor Espacial

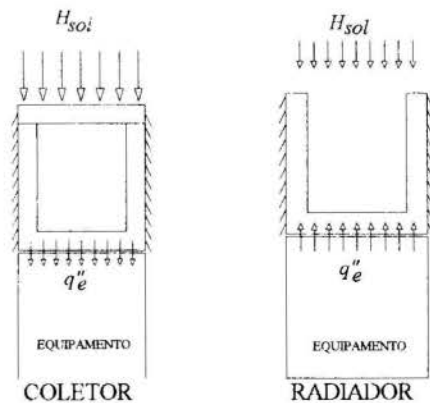


Figura 2 - Célula básica para o C. E. e R.E.

A figura 3 apresenta a seção transversal do dispositivo genérico usado na formulação matemática onde são identificadas as superfícies, dimensões e os eixos usados.

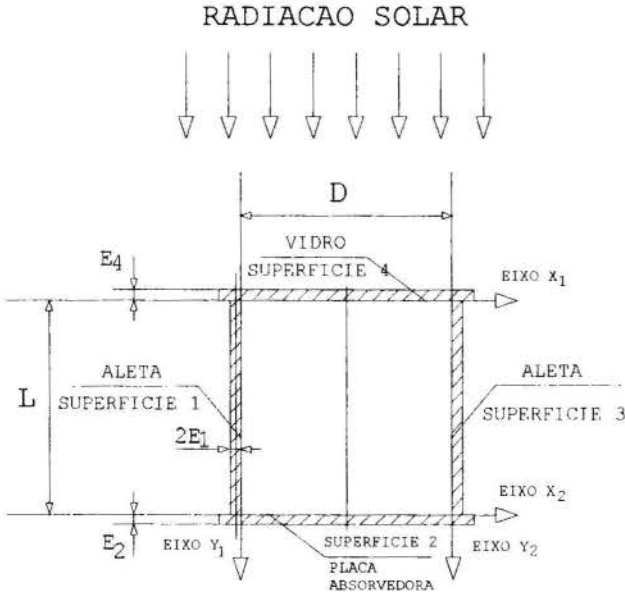


Figura 3 - Identificação para a formulação matemática

As seguintes hipóteses são assumidas: regime permanente; valores médios e constantes de emissividades e refletividades em cada banda; emissão difusa; dimensão infinita com temperaturas constantes no sentido longitudinal. Utilizando a simetria

**Radiosidades.** Como mostra Sparrow and Cess (1978), a radiosidade  $B_i$  de uma dada superfície é dada pela parte emitida mais a refletida das radiosidades das  $n$  superfícies vizinhas  $B_j$ . Fazendo  $\rho_i = 1 - \epsilon_i$ :

$$B_i = \epsilon_i \cdot \sigma \cdot T_i^4 + (1 - \epsilon_i) \cdot \sum_{j=1}^n \int_{A_j} B_j \cdot dF_{dA_i-dA_j}$$

Devido a transparência na banda solar, a radiosidade do vidro  $B_4$  é nula nesta banda. Na placa, a radiosidade  $B_2$  além das contribuições das aletas e do vidro há também a participação solar  $H_{sol}$ . Por simetria, as temperaturas e radiosidades das aletas são idênticas:  $T_1(y_1) = T_3(y_2)$  e  $B_1(y_1) = B_3(y_2)$ . Como o C.E. e R.E. emitem apenas no I.V., a parte de emissão da radiosidade na banda solar é nula. Têm-se então duas equações de radiosidades na banda solar  $B_5$ , respectivamente, para a aleta e placa:

$$B_{S_1}(y_1) = (1 - \epsilon_{S_1}) \cdot \left[ \int_{A_2} B_{S_2}(x_2) \cdot dF_{dA_1-dA_2} + \int_{A_3} B_{S_3}(y_1) \cdot dF_{dA_1-dA_3} \right] \quad (1)$$

$$B_{S_2}(x_2) = (1 - \epsilon_{S_2}) \cdot \left[ \int_{A_1} B_{S_1}(y_1) \cdot dF_{dA_2-dA_1} + \int_{A_3} B_{S_3}(y_1) \cdot dF_{dA_2-dA_3} + H_{sol} \right] \quad (2)$$

e uma a mais no I.V., já que o vidro não é totalmente transparente nesta banda. Assim, respectivamente para a aleta, placa e vidro, as radiosidades no I.V.,  $B_j$ , ficam como:

$$B_{I_1}(y_1) = \epsilon_{I_1} \cdot \sigma \cdot T_1^4(y_1) + (1 - \epsilon_{I_1}) \cdot \left[ \int_{A_2} B_{I_2}(x_2) \cdot dF_{dA_1-dA_2} + \int_{A_3} B_{I_3}(y_1) \cdot dF_{dA_1-dA_3} + \int_{A_4} B_{I_4}(x_1) \cdot dF_{dA_1-dA_4} \right] \quad (3)$$

$$B_{I_2}(x_2) = \epsilon_{I_2} \cdot \sigma \cdot T_2^4(x_2) + (1 - \epsilon_{I_2}) \cdot \left[ \int_{A_1} B_{I_1}(y_1) \cdot dF_{dA_2-dA_1} + \int_{A_3} B_{I_3}(y_1) \cdot dF_{dA_2-dA_3} + \int_{A_4} B_{I_4}(x_1) \cdot dF_{dA_2-dA_4} \right] \quad (4)$$

$$B_{I_3}(x_1) = \epsilon_{I_3} \cdot \sigma \cdot T_3^4(x_1) + \rho_{I_3} \cdot \left[ \int_{A_1} B_{I_1}(y_1) \cdot dF_{dA_3-dA_1} + \int_{A_2} B_{I_2}(x_2) \cdot dF_{dA_3-dA_2} + \int_{A_4} B_{I_4}(y_1) \cdot dF_{dA_3-dA_4} \right] \quad (5)$$

**Balanco de Energia na Parede.** Para placa delgada de espessura  $E_2$  e condutividade térmica  $k_2$ , o balanço de energia é realizado num elemento infinitesimal de acordo com a figura 4.

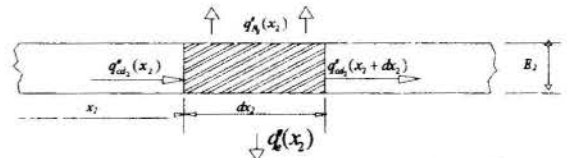


Figura 4 - Balanço de energia na placa

O balanço de energia neste elemento fica:

$$q''_{cd_1}(x_2) \cdot E_2 = q''_{cd_1}(x_2 + dx_2) \cdot E_2 + q''_{r_2} \cdot dx_2 + q''_r \cdot dx_2 \quad (6)$$

Expandindo em série de Taylor o primeiro termo do lado direito da Eq. (6):

$$q''_{cd_1}(x_2 + dx_2) = -k_2 \cdot \frac{dT_2}{dx_2} - k_2 \cdot \frac{d^2T_2}{dx_2^2} \cdot dx_2 \quad (7)$$

O segundo termo do lado direito da Eq. (6) corresponde ao fluxo líquido de energia por radiação, sendo dado por:

$$q''_{r_2}(x_2) = \epsilon_{I_2} \cdot \sigma \cdot T_2^4(x_2) - \alpha_{S_2} \cdot H_{S_2}(x_2) - \alpha_{I_2} \cdot H_{I_2}(x_2) \quad (8)$$

O primeiro termo da Eq. (8) corresponde a energia emitida pelo elemento na aleta. O segundo e o terceiro termos da mesma correspondem a irradiações na banda solar e I.V. respectivamente, sendo dados por:

$$H_{S_2}(x_2) = \frac{B_{S_2}(x_2)}{1 - \epsilon_{S_2}} \quad (9)$$

$$H_{I_2}(x_2) = \frac{B_{I_2}(x_2) - \epsilon_{I_2} \cdot \sigma \cdot T_2^4(x_2)}{1 - \epsilon_{I_2}} \quad (10)$$

Com as Eq. (9) e (10) na Eq. (8) obtêm-se o fluxo líquido de energia por radiação na forma seguinte:

$$q_{R_2}^*(x_2) = \frac{[\sigma \cdot T_2^4(x_2) - B_{I_2}(x_2)] \cdot \varepsilon_{I_2}}{1 - \varepsilon_{I_2}} - \frac{B_{S_2}(x_2) \cdot \varepsilon_{S_2}}{1 - \varepsilon_{S_2}} \quad (11)$$

O terceiro termo do lado direito da Eq. (6) corresponde ao fluxo de calor trocado com o equipamento sendo dado por:

$$q_r^*(x_2) = h_c \cdot [T_2(x_2) - T_e] \quad (12)$$

Combinando as Eq. (7), Eq.(11) e Eq.(12) na Eq. (6), obtêm-se a equação de balanço para a placa:

$$k_2 \cdot E_2 \cdot \frac{d^2 T_2}{dx_2^2} = \frac{[\sigma \cdot T_2^4(x_2) - B_{I_2}(x_2)] \cdot \varepsilon_{I_2}}{1 - \varepsilon_{I_2}} - \frac{B_{S_2}(x_2) \cdot \varepsilon_{S_2}}{1 - \varepsilon_{S_2}} + h_c \cdot [T_2(x_2) - T_e] \quad (13)$$

Como  $T_1(y_1) = T_3(y_2)$ , têm-se as condições de contorno:

$$\left. \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_2 = D \end{matrix} \right\} \Rightarrow T_2 = T_1|_{y_1=L} \quad (14)$$

A figura 5 apresenta um elemento infinitesimal na aleta:

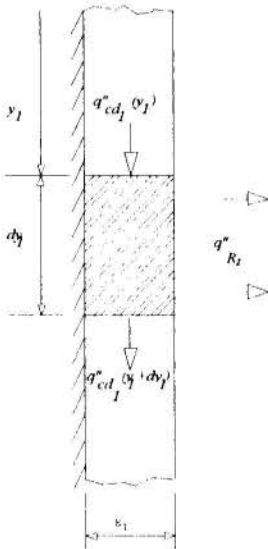


Figura 5 - Balanço de Energia na Aleta

Este balanço fica:

$$q_{cd}^*(y_1) \cdot E_1 = q_{cd}^*(y_1 + dy_1) \cdot E_1 + q_{R_1}^*(y_1) \cdot dy_1 \quad (15)$$

A expressão para  $q_{R_1}^*$  é similar a Eq. (11); assim de maneira análoga ao realizado para a placa, obtêm-se a equação de balanço na aleta na forma:

$$k_1 \cdot E_1 \cdot \frac{d^2 T_1}{dy_1^2} = \frac{[\sigma \cdot T_1^4(y_1) - B_{I_1}(y_1)] \cdot \varepsilon_{I_1}}{1 - \varepsilon_{I_1}} - \frac{B_{S_1}(y_1) \cdot \varepsilon_{S_1}}{1 - \varepsilon_{S_1}} \quad (16)$$

com condição de contorno na base:

$$y_1 = L \Rightarrow T_1 = T_2|_{x_2=0} \quad (17)$$

Outra condição depende do dispositivo em análise. Para o C.E., a temperatura da ponta é igual a da junção com o vidro.

$$y_1 = 0 \Rightarrow T_1 = T_4|_{x_1=0} \quad (18)$$

Para o R.E. a condição para ponta da aleta é especificada por um balanço de energia como:

$$k_1 \cdot \frac{dT_1}{dy_1} \Big|_{y_1=0} = \varepsilon_{I_1} \cdot \sigma \cdot T_1^4(0) - \varepsilon_{S_1} \cdot H_{sol} \quad (19)$$

A figura 6 apresenta o balanço de energia em elemento infinitesimal no vidro:

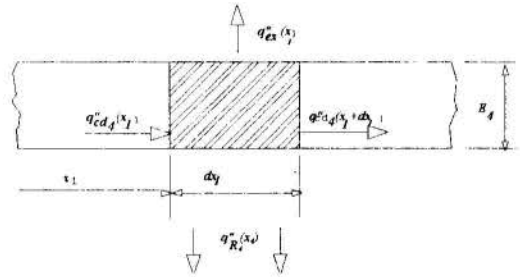


Figura 6 - Balanço de energia no Vidro

O balanço de energia para o elemento do vidro fica:

$$q_{cd}^*(x_1) \cdot E_4 = q_{cd}^*(x_1 + dx_1) \cdot E_4 + q_{R_1}^* \cdot dx_1 + q_{R_2}^* \cdot dx_1 \quad (20)$$

O terceiro termo do lado direito da Eq. (20) corresponde ao fluxo de calor trocado com o espaço:

$$q_{R_1}^*(x_1) = \varepsilon_{I_4} \cdot \sigma \cdot T_4^4(x_1) \quad (21)$$

No vidro somente a irradiação no I.V. deve ser considerada sendo dada por:

$$H_{I_4}(x_1) = \frac{B_{I_2}(x_1) - \varepsilon_{I_4} \cdot \sigma \cdot T_4^4(x_1)}{\rho_{I_4}} \quad (22)$$

E o fluxo líquido obtido na forma:

$$q_{R_2}^*(x_1) = \frac{\varepsilon_{I_4}}{\rho_{I_4}} \cdot \left[ (\varepsilon_{I_4} + \rho_{I_4}) \cdot \sigma \cdot T_4^4(x_1) - B_{I_2}(x_1) \right] \quad (23)$$

Com as Eq. (23) e (21), e fazendo um desenvolvimento análogo ao realizado para a placa, obtêm-se a equação de balanço no vidro na forma:

$$k_4 \cdot E_4 \cdot \frac{d^2 T_4}{dx_1^2} = \frac{\varepsilon_{I_4} \cdot \left\{ (\varepsilon_{I_4} + \rho_{I_4}) \cdot \sigma \cdot T_4^4(x_1) - B_{I_2}(x_1) \right\}}{\rho_{I_4}} + \varepsilon_{I_4} \cdot \sigma \cdot T_4^4(x_1) \quad (24)$$

Como  $T_1(y_1) = T_3(y_2)$ , as condições de contorno ficam em:

$$\left. \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_1 = D \end{matrix} \right\} T_4 = T_1|_{y_1=0} \quad (25)$$

A quarta potência da temperatura  $T^4$  causa não-linearidades nas equações de balanço de energia, Eq. (13), (16) e (24). Esse problema foi resolvido com linearizações usando série de Taylor (Shih, 1984):

$$T^4 = T^4|_{T=T'} + (T - T') \cdot \left. \frac{dT^4}{dT} \right|_{T=T'} \quad (26)$$

sendo  $T'$  um valor da iteração anterior. Realizando a derivada obtêm-se a linearização na forma seguinte:

$$T^4 = 4 \cdot T'^3 \cdot T - 3 \cdot T'^4 \quad (27)$$

**Calor Perdido.** Para o C.E., o fluxo de calor perdido pela emissão é dada por  $q'_{ex}$ . Como o vidro é transparente na banda solar e semitransparente no infravermelho, outras perdas também acontecem. Tais fluxos são dados respectivamente, na banda solar e I.V., por:

$$q'_{P_2}(x_1) = 2 \cdot \int_{A_1} B_{\sigma_1}(y_1) \cdot dF'_{dA_1-dA_1} + \int_{A_1} B_{\sigma_2}(x_2) \cdot dF'_{dA_1-dA_1} \quad (28)$$

$$q'_{P_1}(x_1) = \left[ 1 - (\varepsilon_{I_1} + \rho_{I_1}) \right] \left[ 2 \cdot \int_{A_1} B_{\sigma_1}(y_1) \cdot dF'_{dA_1-dA_1} + \int_{A_2} B_{\sigma_2}(x_2) \cdot dF'_{dA_1-dA_2} \right] \quad (29)$$

Com a integração nas áreas dos fluxos perdidos, as perdas por unidade de comprimento  $q'_{ex}$ ,  $q'_{P_2}$  e  $q'_{P_1}$  são obtidas; desta forma a perda total por unidade de comprimento resulta em:

$$q'_p = q'_{ex} + q'_{P_2} + q'_{P_1} \quad (30)$$

Para o R.E., as equações acima para  $q'_{P_2}$  e  $q'_{P_1}$  são válidas impondo  $\varepsilon_{I_1}$  e  $\rho_{I_1}$  nulos no programa numérico. A perda dada por  $q'_{ex}$  no R.E. é formulada para troca de calor pelas duas pontas das aletas com o espaço. Assim:

$$q'_{ex} = 2 \cdot E_1 \cdot (\varepsilon_{I_1} \cdot \sigma \cdot T_1^4(0) - \varepsilon_{S_1} \cdot H_{sol}) \quad (31)$$

**Balanço de Energia Global.** O balanço de energia é dado por: energia que entra deve ser igual a que sai. Para o C.E.:

$$H_{sol} \cdot D = q'_e + q'_p \quad (32)$$

Para o R.E., o balanço é dado por:

$$H_{sol} \cdot D + q'_e = q'_p \quad (33)$$

O desempenho é dado pela energia trocada com o equipamento sobre a energia que o equipamento estaria trocando sem o C.E. ou R.E.:

$$\omega = \frac{q'_e}{\varepsilon_{I_2} \cdot D \cdot H_{sol} - \varepsilon_{I_2} \cdot D \cdot \sigma \cdot T_e^4} \quad (34)$$

O modelo computacional calcula a temperatura média

$$T_{wm} = \frac{2 \cdot \int_0^L T_1(y_1) \cdot dy_1 + \frac{1}{D} \cdot \int_0^D T_2(x_2) \cdot dx_2 + \frac{1}{D} \cdot \int_0^D T_3(x_1) \cdot dx_1}{4} \quad (35)$$

e o erro obtido pelo resíduo do balanço global de energia. As discretizações foram feitas por diferenças finitas em conjunto

com o método iterativo de Gauss-Seidel combinado com o método direto TDMA (Patankar, 1980). As equações de radiosidades na banda solar são lineares. Na banda I.V. são não-lineares e por isso resolvidas em conjunto com as equações também não-lineares de balanço de energia na parede do dispositivo.

## RESULTADOS

Os resultados são apresentados baseados nas configurações mostradas da tabela 1, que foram os dados de entrada do modelo computacional. A tabela 2 apresenta os resultados correspondentes. As propriedades termo-ópticas foram obtidas do catálogo técnico da MAP (1993).

Tabela 1 - Configurações analisadas no C.E e R.E.

	COLETOR	RADIADOR
Nº de Pontos	61	81
$T_e$ (K)	300	300
L (m)	0,01	0,01
D (m)	0,01	0,01
$E_1$ (m)	0,001	0,005
$E_2$ (m)	0,001	0,005
$E_3$ (m)	0,001	--x--
$H_{sol}$ W/m <sup>2</sup>	500	250
$h_c$ W/m <sup>2</sup> .K	1.800	1.800
$k_1$ W/m.K	1	200
$k_2$ W/m.K	1	200
$k_3$ W/m.K	1	--x--
$\varepsilon_{S_1}$	0,94	0,20
$\varepsilon_{S_2}$	0,94	0,20
$\varepsilon_{I_1}$	0,80	0,80
$\varepsilon_{I_2}$	0,80	0,80
$\varepsilon_{I_3}$	0,10	--x--
$\rho_{I_1}$	0,70	--x--
tolerância	10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-8</sup>

Tabela 2 - Resultados para as configurações da tabela 1

	COLETOR	RADIADOR
$T_{wm}$ (K)	298,07	299,63
$q'_R$ W/m	0,172	1,068
$q'_{R_2}$ W/m	-4,245	1,058
$q'_{R_1}$ W/m	-0,005	--x--
$q'_{ex}$ W/m	0,435	3,155
$q'_{P_2}$ W/m	0,127	1,456
$q'_{P_1}$ W/m	0,881	4,173
$q'_p$ W/m	1,443	8,784
$q'_e$ W/m	3,436	-6,491
Erro (%)	2,4	0,6
$\omega$	3,35	2,05



As figuras 7 e 8 apresentam as distribuições de temperatura no C.E. e R.E., respectivamente, e as figuras 9 e 10 apresentam os fluxos obtidos. As figuras 11 e 12 apresentam as radiosidades das superfícies. Os dados são plotados em função da distância característica adimensional respectiva à superfície analisada, ou seja,  $x/D$  ou  $y/L$ .

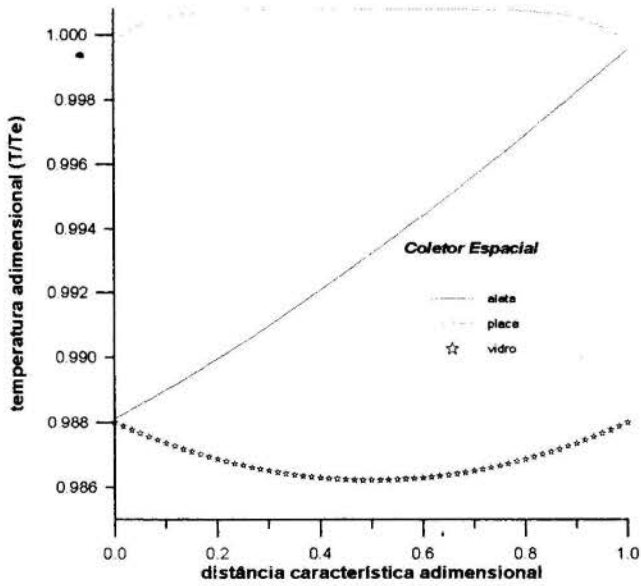


Figura 7 - Temperaturas adimensionais desenvolvidas no Coletor Espacial

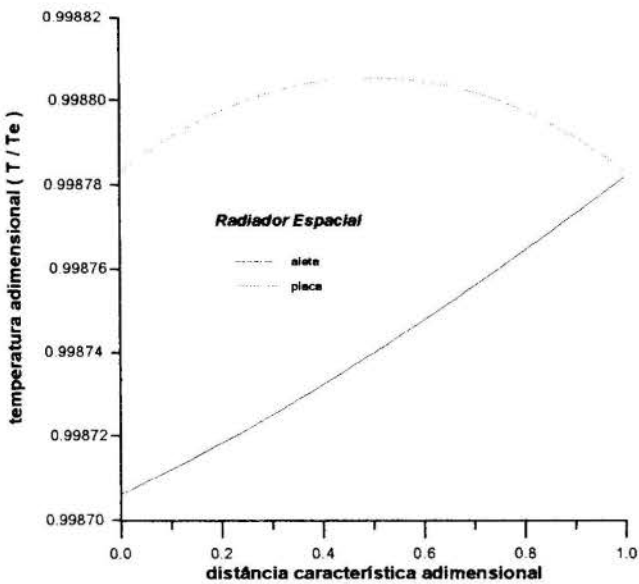


Figura 8 - Temperaturas adimensionais desenvolvidas no Radiador Espacial

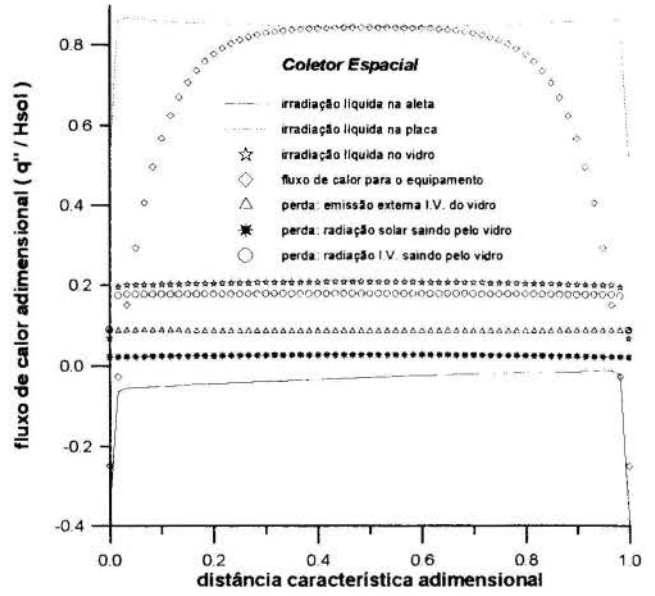


Figura 9 - Fluxos desenvolvidos no Coletor Espacial

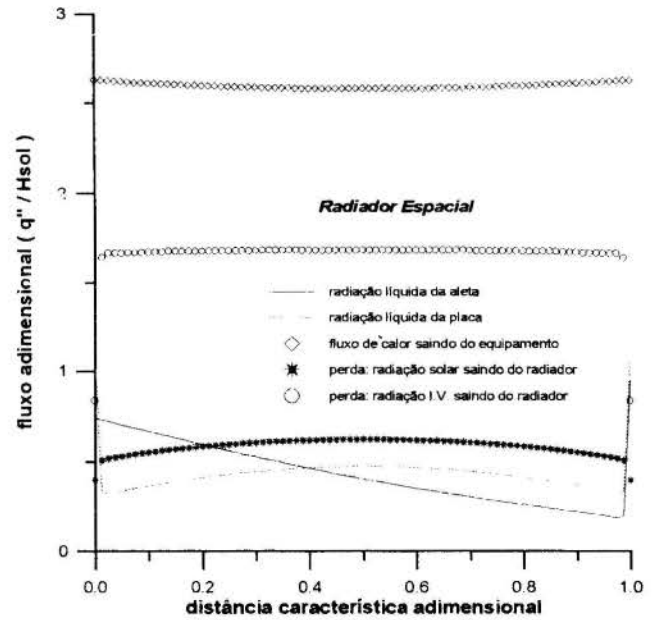


Figura 10 - Fluxos desenvolvidos no Radiador Espacial

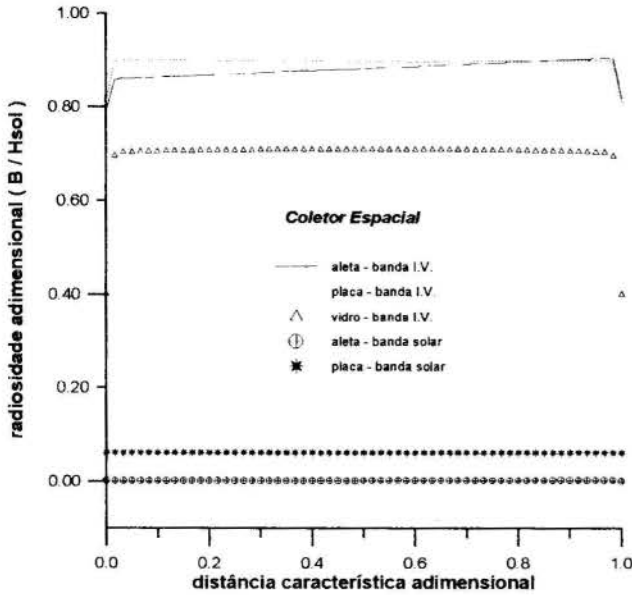


Figura 11 - Radiosidades no Coletor Espacial

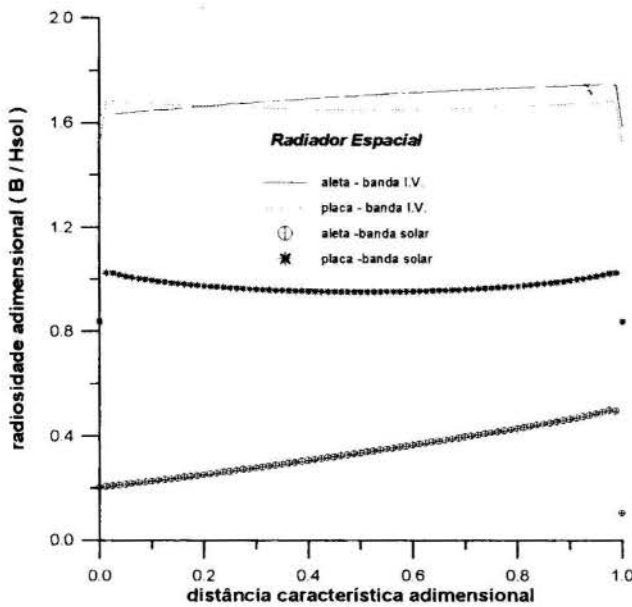


Figura 12 - Radiosidades no Radiador Espacial

**CONCLUSÕES**

Os resultados mostram que este tipo de C.E. alcança bom desempenho. Como dispositivo para controle térmico de satélites ou veículos espaciais, o uso do C.E. pode ser vantajoso em relação a outras técnicas normalmente usadas como controle térmico ativo por resistências elétricas ou "heat pipes". Em superfícies externas de satélites e veículos espaciais, a absorção de energia é limitada pela relação da absorvidade na banda solar com a emissividade no I.V. Usando esta mesma relação, como apresentado, com o uso de C.E. a absorção de calor pode ser aumentada em mais de três vezes. Deve ser salientada a facilidade e o baixo custo de construção de um C.E.. Os mesmos comentários se aplicam ao R.E..

Do ponto de vista matemático, o modelo computacional desenvolvido foi testado em várias outras situações e em todas estas se mostrou consistente, dando assim confiabilidade. O tratamento do acoplamento condução-radiação, o modelo de bandas empregado e o método numérico desenvolvido fornece subsídios para futuros trabalhos.

**AGRADECIMENTOS**

Agradecemos a técnica Angela Akemi Tatekawa pela elaboração dos desenhos.

**REFERÊNCIAS**

Cardoso, H. P. e Garcia, E. C., 1989, "Simulação do Ambiente Espacial do Satélite SDC-01 por Placas Aquecedoras", *Anais, X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Rio de Janeiro, Vol 1, pp. 581-584.  
 Gama, R. M. S., Pessanha, J. A. O., Parise, J. A. R., Saboya, F. E. M., 1986, "Analysis of a V-Groove Solar Collectors with a Selective Glass Cover", *Solar Energy*, Pergamon Press, USA, Vol. 36, pp. 509-519.  
 MAP, 1993, "Revêtements pour l'aéronautique & l'espace", France.  
 Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, Washington.  
 Saboya, S. M., 1987, "Análise Térmica de Coletor Solar com Absorvedor Aletado", Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, S.P.  
 Shih, T. M., 1984, "Numerical Heat Transfer", Hemisphere, Washington.  
 Sparrow, E. M. and Cess, R. D., 1978, "Radiation Heat Transfer", McGraw-Hill, New York.

**SUMMARY**

*This work describes the mathematical formulation of a computational model done to project collectors and radiators to use in thermal control of the space vehicle and satellite. The collector/radiator is composed by a absorbed plate with rectangle fins. Over the plate-fins assembly is set up a semitransparent selective glass or plastic in the collector use but in the radiator this cover is eliminated. The assembly is set up over a equipment with constant temperature. The thermal analysis is done with the radiation coupled with the conduction. The band model in solar and infrared spectral is utilised.*



## ANÁLISE EXPERIMENTAL DA CIRCULAÇÃO NATURAL DE ÁGUA ATRAVÉS DE UM CIRCUITO FECHADO EM REGIME TRANSITÓRIO



**Marcelo de Bastos Lavrador**

**Carlos Valois Maciel Braga**

Departamento de Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
22453-900 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

**Pedro Carajilesco**

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal Fluminense  
24210-240 - Niterói - RJ - Brasil

### RESUMO

*São apresentadas algumas conclusões obtidas através da análise experimental do comportamento termohidráulico de um circuito fechado operando com água por convecção natural. Em prosseguimento às conclusões apresentadas no XIII COBEM (com o trabalho "Análise experimental do comportamento termohidráulico de um circuito fechado operando por convecção natural"), que apresenta o comportamento do modelo em regime permanente, decidiu-se continuar a investigação do fenômeno no regime transitório. Além da importância do estudo devido à criticalidade do sistema quando acionado, é interessante observar as respostas das curvas de temperatura da água em função do tempo durante esta fase transitória.*

### INTRODUÇÃO

Este trabalho baseia-se no conceito de sistemas passivos, ou seja, sistemas que independem de interferência humana ou mecanismos complexos para funcionarem. A motivação do presente estudo é a tendência atual de adotar-se tais sistemas em reatores nucleares refrigerados e moderados a água leve, uma vez que os acidentes ocorridos em Three Mile Island (1979) e Chernobyl (1986) demonstraram vulnerabilidade nos sistemas de segurança utilizados nas usinas atuais.

Uma das maiores dificuldades, em caso de acidente nuclear, é remover o calor residual do núcleo do reator gerado pelos produtos de fissão. Neste caso estuda-se, atualmente, a viabilidade de adotar-se sistemas passivos que utilizam o princípio de circulação natural para a remoção deste calor. Segundo Botelho, (1991) um sistema de remoção de calor residual em um reator PWR de pequeno porte permite dissipar 2% da potência nominal, respeitando-se, deste modo, os limites térmicos dos elementos combustíveis.

Alguns modelos teóricos de circuitos fechados foram elaborados e analisados a partir da hipótese unidimensional, que considera a velocidade do escoamento e temperatura uniformes em qualquer seção transversal do circuito. Estes modelos de circulação natural também adotam a aproximação de Boussinesq, que considera a massa específica do fluido de trabalho constante nas equações de balanço, exceto nos termos associados com o cálculo da diferença de pressão hidrostática.

Zvirin (1981) utilizou um modelo analítico válido para regime permanente e para regimes transitórios lentos. Além disto, desenvolveu um aparato composto por uma fonte quente e dois trocadores de calor bitubulares. As diferenças entre os

resultados obtidos teoricamente em relação ao modelo experimental foram da ordem de 30%.

Através dos mesmos princípios já citados, Huang e Zelaya (1988) estudaram analítica e experimentalmente a circulação natural, em regime permanente, de um termosifão retangular. Para isto utilizaram um valor empírico para o Coeficiente Global de Troca de Calor (U).

Liñan (1993) descreveu, teoricamente, as oscilações ordinárias e caóticas da vazão da água em um modelo de termosifão toroidal, onde relaciona as posições das fontes com a estabilidade da vazão. A transição para o caos foi descrita através de técnicas de perturbação singulares para circuitos de elevado comprimento (sistemas muito dissipativos).

Lavrador et al. (1994) apresentaram um estudo sobre o comportamento transitório de um circuito fechado, de geometria retangular em regime de circulação natural. Tal análise teórica consistiu no desenvolvimento de um modelo numérico unidimensional, baseado no método dos volumes finitos. Os dados experimentais, que comprovaram satisfatoriamente a análise, foram obtidos no mesmo aparato que o utilizado no presente trabalho.

O objetivo do presente trabalho é contemplar diversas situações de operação do circuito experimental no regime transitório (em continuação ao trabalho de Lavrador et al. (1995) que focalizava o regime permanente).

Este estudo, de cunho essencialmente experimental, analisa as respostas fornecidas pelas curvas de temperatura da água em função do tempo durante o regime transitório. Desta forma, pretende-se, com este trabalho, gerar subsídios para futuros estudos teóricos sobre regime transitório em circulação natural, onde seja necessária comprovação por resultados experimentais.

## APARATO EXPERIMENTAL E PROCEDIMENTO

A Figura 1 apresenta o circuito principal (primário) do aparato construído no Laboratório de Termociências da PUC-Rio e consta, principalmente, de um circuito fechado (primário) cujas dimensões básicas estão evidenciadas. Utilizou-se água como fluido de trabalho e o material da tubulação é cobre. O circuito tem diâmetro interno 33,5mm e possui, em seu trajeto, duas fontes térmicas, uma quente e uma fria. Desta forma, o circuito pode ser dividido em dois trechos denominados perna quente e perna fria. A fonte fria encontra-se na parte superior direita do circuito. Trata-se de um trocador de calor formado por um segmento de tubo (com 60 mm de diâmetro) envolvendo um trecho de 0,7 m do circuito, com água corrente escoando em contracorrente na região anular formada (circuito secundário). A fonte quente situa-se na parte inferior esquerda do circuito e consiste em um segmento da tubulação com diâmetro maior que os tubos da linha, formando uma camisa que abriga o conjunto de 3 resistências elétricas (potência nominal máxima de 7,5 kW).

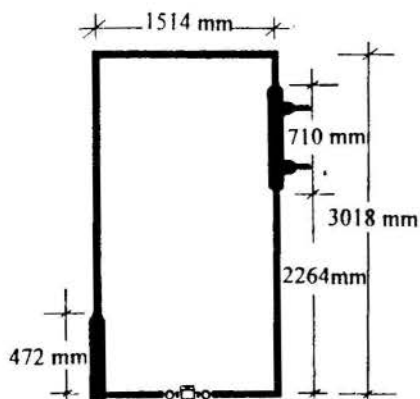


Figura 1 - Dimensões do circuito experimental

Para controlar a potência das referidas resistências (Resiluz, mod. 106) construiu-se um circuito elétrico que possibilitou diversas combinações de ligação entre as mesmas e ainda permitia alternar-se a tensão de 110V para 220V. Desta forma, foi possível obter-se 11 níveis de potência para a fonte quente.

A leitura da potência foi determinada pelo produto  $V \cdot I$ , onde a tensão era medida na saída da fonte, com incerteza de 1 volt e a corrente era obtida através da queda de tensão em um "shunt" (resistividade constante de 2mV/A) com incerteza de 0,5 mV, correspondendo, assim, a 0,25 A. Desta forma, utilizando-se a potência típica de 2200W, obtém-se a incerteza de 50W na leitura da mesma. Estas duas medidas de tensão (na fonte e no "shunt") eram obtidas através de um "datalogger" marca Fluke, modelo 2240B.

As variações de volume da água, devido ao aquecimento, foram controladas por um pressurizador instalado na parte superior do circuito.

Para monitorar a temperatura da água no circuito utilizou-se 9 termopares tipo K (cromel-alumel) dispostos conforme se observa na Figura 2. Também foram instalados 2 termopares tipo T (cobre-constantan) para medir a temperatura da água de resfriamento na entrada e na saída do trocador de calor. Utilizou-se o mesmo "datalogger" citado no parágrafo anterior, para leitura simultânea dos sinais dos termopares.

Estes termopares foram calibrados no Laboratório de Pressão e Temperatura do ITUC/PUC-Rio, utilizando um termômetro padrão PT-100 e um banho de água com temperatura controlada na faixa 25 - 95 °C. Baseando-se no erro médio causado pelo ajuste das curvas de calibração, assim como na incerteza do

aparelho (fornecido pelo fabricante), estimou-se em aproximadamente 0,2 °C a incerteza de medição das temperaturas.

A vazão no circuito secundário foi monitorada através de uma placa de orifício de razão  $\beta = 5/8$ , conectada a um manômetro em "U" contendo mercúrio como fluido manométrico. A relação entre a coluna de mercúrio e a vazão foi obtida experimentalmente, através de cronometragem e pesagem da massa água circulante. Desta forma obteve-se uma curva logarítmica, a partir de 38 pontos lidos. Baseando-se na incerteza de leitura da coluna de mercúrio, associada ao erro médio causado pelo ajuste da referida curva, estimou-se em 0,15 kg/s a incerteza da medição da vazão no circuito secundário. A vazão no circuito primário não foi medida.

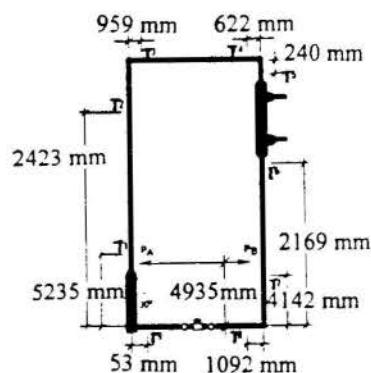


Figura 2 - Disposição das tomadas de temperatura no circuito

Todo o circuito foi isolado termicamente por blocos semi-cilíndricos de silicato de cálcio (termossilica) e ainda envolvidos por cartolina isolante.

Deve-se ainda ressaltar que, a nível de procedimento experimental, todos os testes foram iniciados com o sistema em equilíbrio térmico com o ambiente. No instante  $t = 0$  era então ligado o conjunto de resistências elétricas (fonte quente), já com a água do circuito secundário escoando através do trocador de calor (fonte fria) na vazão desejada.

## RESULTADOS

A Figura 3 ilustra o comportamento das temperaturas obtidas pelos termopares T1 e T2, que são os situados no segmento vertical da perna quente (T1 encontra-se na saída do aquecedor). Os valores da potência térmica da fonte quente e da vazão de água do secundário são apresentadas na própria figura (Q e ms, respectivamente). Nota-se o comportamento oscilatório de ambas as curvas. Tal comportamento pode ser explicado pela seguinte seqüência de fatos (tomando-se como referência o exemplo do termopar T1):

- Aciona-se o aquecedor (fonte quente);
- A temperatura da água na perna quente aumenta em virtude do calor fornecido pela fonte quente. A temperatura registrada por T1 aumenta;
- A diferença de densidades entre as pernas quente e fria (causada pela diferença de temperaturas) resulta na diferença de pressão hidrostática entre as mesmas, ocasionando a movimentação do fluido.
- A temperatura da massa de água, que passa pelo aquecedor, passa a aumentar menos acentuadamente, em virtude desta ter



menos tempo de exposição ao calor. A temperatura registrada por T1 diminui;

e) Nem todo calor fornecido pelo aquecedor é removido pelo resfriador, resultando no aumento de temperatura da perna fria. Em consequência da diminuição da diferença de temperatura entre as pernas quente e fria, diminuindo a diferença de pressão hidrostática, resultando na diminuição da vazão.

f) Com uma menor vazão, a temperatura da massa de água que passa pelo aquecedor aumenta mais, em virtude desta ter mais tempo de exposição ao calor. Portanto, a temperatura registrada por T1 aumenta.

g) Desta forma, ocorre normalmente um acréscimo na diferença de pressão hidrostática entre as pernas quente e fria, aumentando, conseqüentemente, a vazão;

h) Novamente repete-se o fenômeno descrito pelo item "d".

Tais oscilações são amortecidas e, conforme observa-se experimentalmente (Figura 3) tendem a desaparecer, à medida que aumenta-se a temperatura média do circuito.

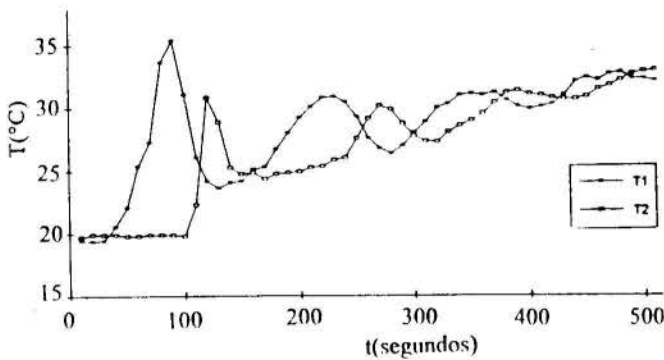


Figura 3 - Variação das temperaturas dos termopares T1 e T2

A Figura 4 compara as curvas de temperatura obtidas por dois termopares típicos da perna quente (T3 e T4), com as curvas fornecidas por dois termopares localizados na perna fria (T8 e T9). Nota-se que as curvas da perna fria têm amplitude de oscilação bem menor do que as curvas da perna quente. Isto porque os "picos", que revelam pontos de temperatura alta, desaparecem na perna fria em virtude da troca de calor com a água de resfriamento.

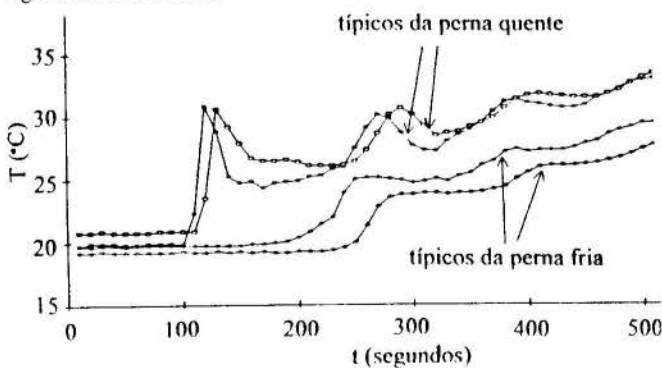


Figura 4 - Comparação entre as curvas da perna quente e perna fria

Foram realizados testes variando-se a vazão da água de resfriamento (circuito secundário) entre 2kg/s, 1kg/s e 0,5kg/s. A Figura 5 apresenta a evolução das temperaturas, em função do tempo, indicadas por um termopar típico da perna quente (T3) para os três casos descritos. Nota-se que, na faixa testada, não houve qualquer influência no comportamento qualitativo das temperaturas no regime transitório (a defasagem entre as curvas se deve exclusivamente às diferenças das temperaturas iniciais).

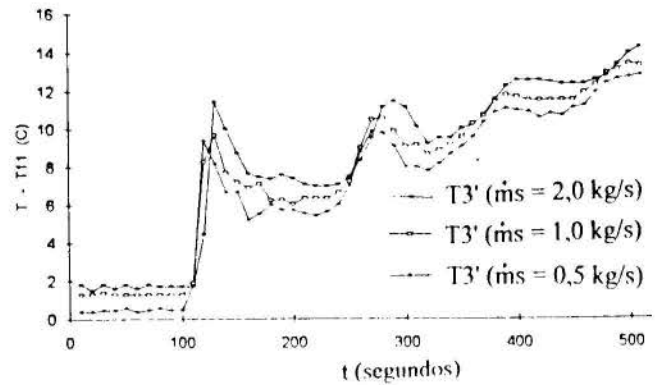


Figura 5 - Evolução da temperatura no termopar T3, para 3 vazões do secundário

A Figura 6 apresenta a evolução das temperaturas das pernas quente e fria (fornecida pelos termopares T3 e T8) em função do tempo, para as potências 183W, 2200W e 4400W. Através de tal figura observa-se que tanto a frequência oscilatória quanto a amplitude de oscilação aumentam com a potência. Nota-se que a defasagem de temperatura, entre as curvas da perna quente e perna fria, também aumenta com a potência.

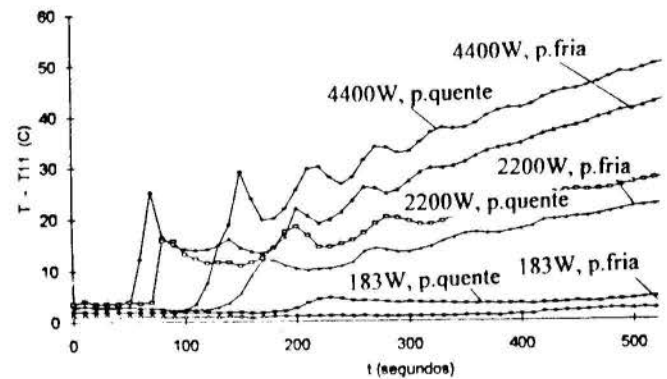


Figura 6 - Variação das temperaturas - 183W, 2200W e 4400W.

A Figura 7 apresenta a diferença de temperaturas entre as pernas quente e fria, registradas respectivamente pelos termopares T3 e T8 no teste realizado a 4400W. Observa-se a convergência para o valor médio de 7,5 C. Convém ressaltar a importância desta diferença de temperaturas que, conforme já citado, influencia diretamente a vazão de água provocada pela circulação natural.

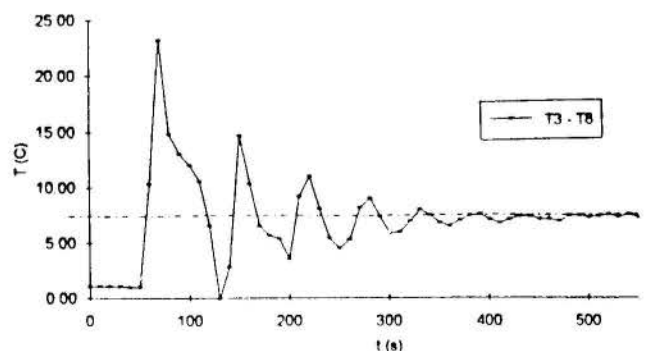


Figura 7 - Diferença de temperatura entre as pernas quente e fria

Foram realizados testes com a finalidade de verificar-se o comportamento das temperaturas do circuito em consequência de variações da potência fornecida durante a execução dos ensaios.

A Figura 8 apresenta a variação da temperatura com o tempo no caso em que a potência foi aumentada de 1100W para 2200W. Observa-se que após a alteração da potência ( $t = 600$  s) é reiniciada a oscilação.

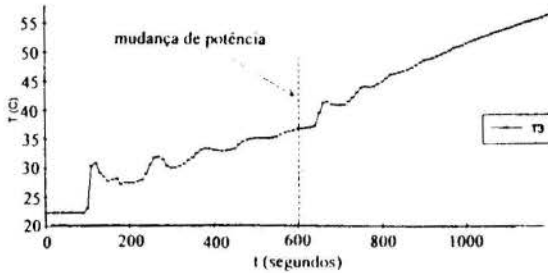


Figura 8 - Variação das temperaturas com aumento da potência em  $t=600$  s

A Figura 9 apresenta, basicamente, o mesmo caso anterior, com a diferença que a potência foi diminuída de 2200W para 1100W. Da mesma forma, a oscilação foi restabelecida. Cabe ressaltar que, neste caso, a oscilação reiniciou invertida em relação à forma inicial, ou seja, na primeira variação de temperatura, a mesma decresceu.

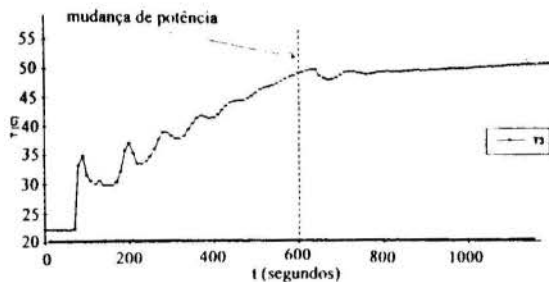


Figura 9 - Variação das temperaturas com redução da potência em  $t = 600$  s

Foi ainda realizado um teste com o objetivo de analisar o comportamento da temperatura na superfície externa da tubulação do circuito principal. Para isto foi instalado outro termopar (tipo K), designado  $T_t$ , na superfície da tubulação, em um trecho próximo ao termopar  $T_2$ . A Figura 10 apresenta uma comparação entre as temperaturas da água e da superfície externa da tubulação (medidas pelos termopares  $T_2$  e  $T_t$ ), para três potências diferentes (1100W, 2200W e 4400W). Nota-se que, apesar da defasagem de tempo entre as curvas de  $T_2$  e  $T_t$ , estas mantêm as mesmas frequências entre si. Por outro lado, é possível observar um aumento da defasagem das temperaturas com o crescimento da potência.

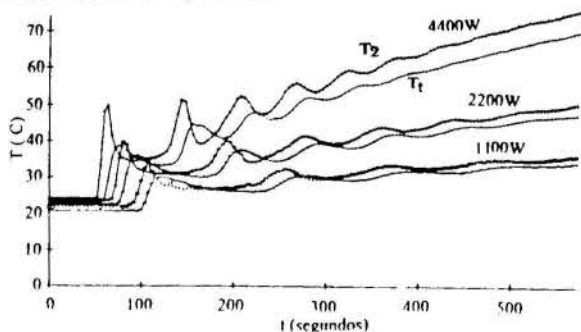


Figura 10 - Comparação entre as variações de temperatura de  $T_2$  e  $T_t$ , para 3 potências

## CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta o modelo experimental utilizado no estudo do fenômeno de circulação natural em um circuito fechado, também denominado termosifão. Além de detalhes a respeito do circuito principal, forneceu-se também informações sobre a instrumentação utilizada.

Este estudo dirigiu-se ao comportamento térmico do circuito em questão durante o regime transitório, justificando, inicialmente, o comportamento oscilatório das curvas de temperatura em função do tempo.

Conforme esperado, as curvas de temperatura da perna fria têm amplitude de oscilação bem menor que as curvas da perna quente. Isto porque os "picos", que revelam pontos de temperatura alta, desaparecem em virtude da troca de calor com a água de resfriamento.

A variação da vazão da água de resfriamento (circuito secundário) não influenciaram (na faixa medida) as curvas de temperatura da água do circuito principal no regime transitório. Por outro lado, variando-se a potência fornecida pela fonte quente, observou-se variação diretamente proporcional da frequência oscilatória, da amplitude de oscilação e da defasagem de temperatura entre as pernas quente e fria.

Quanto às variações forçadas de potência, observa-se que sempre é reiniciada a oscilação e os resultados finais se relacionam com a segunda potência empregada.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro e material da COPESP - Coordenadoria de Projetos Especiais - Ministério da Marinha e também do MCT - Ministério de Ciência e Tecnologia. O Autor Lavrador agradece, ainda, as bolsas de estudo fornecidas pelo CNPq e pela FAPERJ, essenciais à realização do presente trabalho.

## REFERÊNCIAS

- ASME (American Society of Mechanical Engineers), 1971, Application (part II) of Fluid Meters", 6th ed.
- Botelho, D. A., 1991, "Análise Simplificada de Sistemas Passivos de Remoção de Calor Residual de Reatores PWR de Pequeno Porte", Instituto de Engenharia Nuclear - IEN.
- Huang, B.J. e Zelaya, R., 1988., "Heat Transfer Behavior of a rectangular Thermosyphon Loop", Journal of Heat Transfer, vol. 110, pp. 487-493.
- Lavrador, M. B. et al., 1994, "Análise Transitória de um Circuito Fechado em Regime de Circulação Natural Monofásica", Anais do CGEN 94, vol 1, pp. 299-303.
- Lavrador, M. B. et al., 1994, "Análise Experimental do Comportamento Termo-Hidráulico de Um Circuito Fechado Operando por Convecção natural", Anais do XIII COBEM.
- Liñan, A., 1993, "Analytical Description of Chaotic Oscillations in Toroidal Thermosyphon", Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain.
- Zvirin, Y. et al., 1981, "Experimental and Analytical Investigation of a Natural Circulation System with Parallel Loops", Journal of Heat Transfer, vol. 103, pp. 645-652.



## UMA METODOLOGIA PARA ANÁLISE DO SISTEMA DE REMOÇÃO DE CALOR RESIDUAL DE REATORES RÁPIDOS ATRAVÉS DO VASO DE SEGURANÇA

F. A. Braz Filho, E. M. Borges, M. P. Rosa, F. Rocamora, L. Guimarães  
 Instituto de Estudos Avançados - CTA  
 Caixa Postal 6044  
 São José dos Campos, SP - 12231-970



### RESUMO

*Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um modelo e método de cálculo para análise do sistema de retirada de calor de decaimento radioativo através do vaso de segurança de reatores rápidos (LMR). O calor residual gerado é retirado através de uma corrente de ar ascendente que escoar lateralmente ao vaso de segurança devido à convecção natural. Os resultados destes cálculos mostraram uma boa concordância com dados obtidos de fabricantes de reatores (General Electric, Rockwell International).*

### INTRODUÇÃO

Este trabalho faz parte dos estudos do projeto REARA (REAtores RÁpidos), que está sendo coordenado pelo Instituto de Estudos Avançados (CTA).

Em usinas nucleares, uma das principais preocupações com relação à segurança é com a retirada do calor residual gerado pelo decaimento de produtos radioativos após o desligamento do núcleo do reator. Este calor deve ser retirado pelo Sistema Primário de Transporte de Calor (SPTC) com as bombas funcionando a baixa vazão. Em caso de falha do SPTC os sistemas de segurança devem supri-lo para manter a temperatura do núcleo abaixo dos limites de projeto. Os Sistemas Passivos de Segurança (SPS), utilizados nos principais projetos de reatores avançados de todo o mundo (Kwant, 1988; Lancet, 1990; D'auria, 1994), correspondem a estas exigências. Estes são mais simples e independem da ação de operadores da usina e da atuação de equipamentos mecânicos, o que os tornam menos sujeitos a falhas.

Os sistemas passivos são baseados nos fenômenos de convecção natural e irradiação térmica. Estes podem ser classificados em dois tipos para reatores rápidos (LMR) do tipo piscina, como mostra a Figura 1:

- Sistema Direto de Retirada de Calor (SDRC), e
- Sistema de Retirada de Calor do Vaso do Reator (SRCV).

O SDRC é formado por um circuito com um trocador de calor mergulhado na piscina quente do reator. Neste circuito o fluido escoar devido à diferença de densidade entre a fonte quente e fria. O calor absorvido da piscina quente pelo trocador (fonte quente) é retirado por um radiador (fonte fria), que também funciona a convecção natural.

O SRCV consiste do resfriamento da superfície externa do vaso de segurança, através de uma corrente de ar ascendente que escoar devido às forças de empuxo. O calor gerado no reator percorre o seguinte caminho: - condução e convecção no sódio; - condução na parede do vaso do reator; - irradiação entre os vasos do reator e de segurança; - condução no vaso de segurança; - radiação para a parede do coletor e convecção das paredes do vaso e do coletor para o ar.

O SRCV retira uma pequena quantidade de calor do reator em operação normal, pois a temperatura da piscina fria está baixa (~300 °C), com a ocorrência de um acidente, esta temperatura pode aumentar de valor, melhorando a eficiência

deste sistema, já que um dos meios de transferência de calor é por radiação térmica.

Pela pesquisa realizada, vários trabalhos concluídos mostraram o alto grau de segurança dos projetos de reatores avançados como o PRISM, o SAFR e outros com a utilização de sistemas passivos de segurança. Hung (1990) apresenta um dos principais trabalhos nesta área com a análise da remoção do calor de decaimento radioativo pelos sistemas passivos de segurança depois do desligamento dos reatores PRISM e SAFR, utilizando o programa computacional MDSNP. Van Tuyle (1990) utiliza o programa MINET para investigar a segurança do PRISM e SAFR. Lancet (1990) e Dunn (1985) analisam acidentes postulados sem "scram" com o programa SASSYS. Senna (1985) estudou o escoamento do ar entre dutos com um modelo considerando duas dimensões.

O objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento de um modelo e método de cálculo para análise do SRCV. Neste estudo dois tipos de cálculo serão realizados:

- uma vez dada a potência e a temperatura do ar na entrada do canal, obtém-se as temperaturas do ar na saída do canal e do sódio na piscina fria do vaso do reator; ou
- dada a temperatura do sódio na piscina fria e do ar na entrada do canal, calcula-se a temperatura do ar na saída do canal e a potência retirada.

Conhecendo-se a temperatura do sódio e a potência retirada pelo ar, pode-se dizer, em caso de acidente, se o SRCV mantém as temperaturas do núcleo do reator dentro dos limites de normas de segurança. Além disto, como foi dito anteriormente, este sistema permanece atuando o tempo todo, mesmo em operação normal, portanto, é importante conhecer a potência do reator perdida nestas condições, uma vez que isto acarretará em perda de rendimento da usina.

### NOMENCLATURA

- A - área de escoamento
- $A_L$  - área lateral de troca de calor
- $d_h$  - diâmetro hidráulico
- f - fator de atrito
- g - gravidade
- $G_r$  - número de Grashof

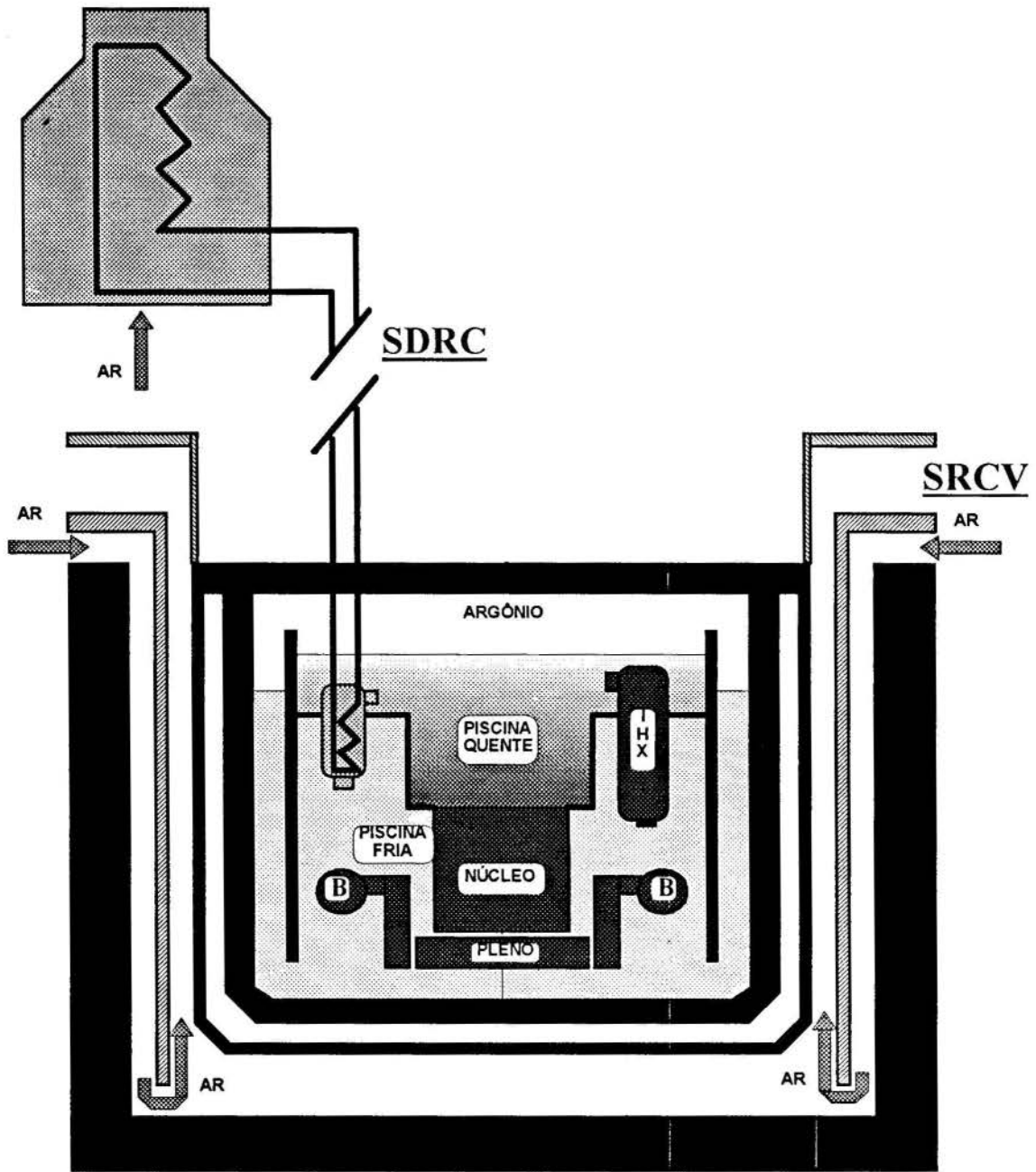


Figura 1 - Esquema dos Sistemas Passivos de Segurança.

$h_a$  - coeficiente de troca de calor  
 $K$  - condutividade térmica  
 $k$  - coeficiente de perda de carga  
 $L$  - comprimento  
 $\dot{m}$  - vazão  
 $P$  - potência  
 $Pr$  - número de Prandtl  
 $q''$  - fluxo de calor  
 $R$  - raio dos vasos  
 $Re$  - número de Reynolds  
 $T$  - temperatura  
 $T_w$  - temperatura da parede  
 $T_a$  - temperatura do ar  
 $\delta$  - espessura  
 $\epsilon$  - emissividade térmica

$\sigma$  - constante de Stefan - Boltzmann  
 $\rho$  - massa específica

#### MODELOS ADOTADOS

Para analisar este problema, supõe-se que toda a potência gerada no núcleo pelo decaimento radioativo dos produtos de fissão será retirada pelo escoamento do ar devido à convecção natural. Uma vez fornecida a potência que deve ser retirada pelo ar e a sua temperatura de entrada, resolvendo-se as equações de conservação para o volume compreendido entre o vaso de segurança e o coletor, pode-se calcular a temperatura média e a vazão do gás. Com esta temperatura e as condições do escoamento, fazendo-se um balanço de energia nas paredes do coletor e do vaso de segurança, obtém-se as temperaturas nas



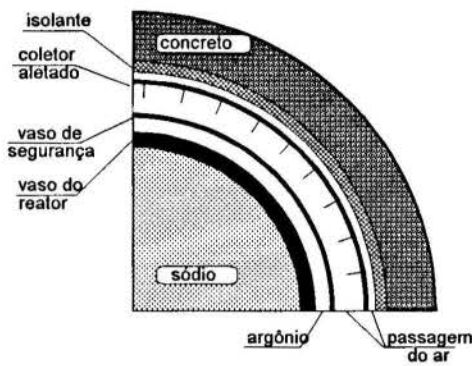
superfícies destas paredes. A partir destas temperaturas, a potência fornecida e as resistências térmicas conhecidas, determina-se a temperatura da piscina fria do sódio do reator. A Figura 2 apresenta a geometria do problema analisado.

**Modelo de Convecção Natural** Para o modelo de convecção natural do ar, considera-se escoamento numa única direção e estado estacionário no balanço das equações de conservação.

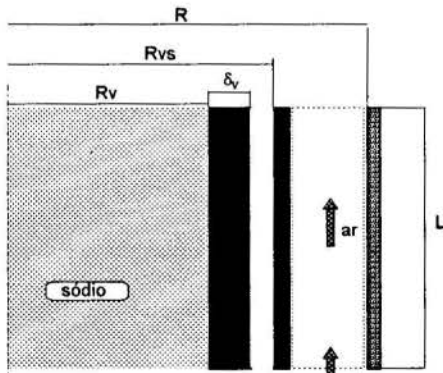
Desta forma, o balanço de energia pode ser escrito:

$$P = \dot{m} c_p \Delta T ; \quad (1)$$

ou seja, a potência fornecida resulta no aumento de entalpia do ar.



(a) Seção transversal



(b) Seção longitudinal

Figura 2 - Geometria do problema.

No balanço da quantidade de movimento, considera-se, apenas, que a força de empuxo é igual à das perdas por atrito nas paredes. Portanto, obtém-se:

$$(\rho - \rho_f) g dz = \frac{f \dot{m}^2 dz}{2 \rho_m d_h A^2} \quad (2)$$

Integrando-se a equação (2) e supondo-se um perfil linear na variação de  $\rho$ , obtém-se:

$$\frac{\Delta \rho}{2} g L = \frac{f L \dot{m}^2}{2 \rho_m d_h A^2} ; \quad (3)$$

onde,  $\Delta \rho$  é a diferença entre as massas específicas da entrada e da saída.

Somando-se os efeitos de chaminé ( $L_{ch} \Delta \rho$ ) às forças de empuxo e de perdas localizadas ( $k$ ) ao atrito nas paredes, pode-se reescrever a equação (3):

$$\left( L \frac{\Delta \rho}{2} + L_{ch} \Delta \rho \right) g = \left( \frac{f_1 L}{d_{h1}} + k_1 \right) \frac{\dot{m}^2}{2 \rho_m A_1^2} + \left( \frac{f_2 L_{ch}}{d_{h2}} + k_2 \right) \frac{\dot{m}^2}{2 \rho_m A_2^2} \quad (4)$$

O coeficiente de atrito ( $f$ ) é dado pela seguinte correlação (Hung, 1990):

$$f = \begin{cases} 0,184 Re^{-0,2} & , Re > 1500; \\ 64 / Re & , Re \leq 1500. \end{cases} \quad (5)$$

**Balanço de Energia nas Paredes** As seguintes hipóteses serão adotadas para se formular o balanço de energia nas paredes:

- estado estacionário; - os termos relativos ao acúmulo não são considerados, porém, esta é uma hipótese conservativa, ou seja, parte do calor gerado será gasto para aquecer toda a estrutura;
- os cilindros são considerados concêntricos e infinitos no cálculo dos fatores de forma;
- as superfícies são difusas cinza e as propriedades constantes;
- a irradiação do gás é negligenciada;
- não existe condução através da parede do coletor, ou seja, perfeitamente isolada;
- o gradiente de temperatura é considerado apenas na direção radial.

Desta forma, o balanço de energia nas superfícies do canal por onde escoo o ar, como mostra a Figura 3, pode ser escrito:

$$\begin{cases} P = A_{L3} q''_{h,3} + A_{L3} q''_r \\ A_{L4} q''_{h,4} = A_{L3} q''_r \end{cases} \quad (6)$$

Os fluxos de calor são dados por (Ozisik, 1985):

$$q''_h = h_a (T_w - T_a) \quad (\text{convecção}); \quad \text{e} \quad (7)$$

$$q''_r = \frac{\sigma (T_{w3}^4 - T_{w4}^4)}{\frac{1}{\epsilon_3} + \left( \frac{A_{L3}}{A_{L4}} \right) \left( \frac{1}{\epsilon_4} - 1 \right)} \quad (\text{radiação - líquido}). \quad (8)$$

Com isso, pode-se escrever na superfície externa do vaso de segurança:

$$P = A_{L3} h_{a3} (T_{w3} - T_a) + \frac{A_{L3} \sigma (T_{w3}^4 - T_{w4}^4)}{\frac{1}{\epsilon_3} + \left( \frac{A_{L3}}{A_{L4}} \right) \left( \frac{1}{\epsilon_4} - 1 \right)} ; \quad (9)$$

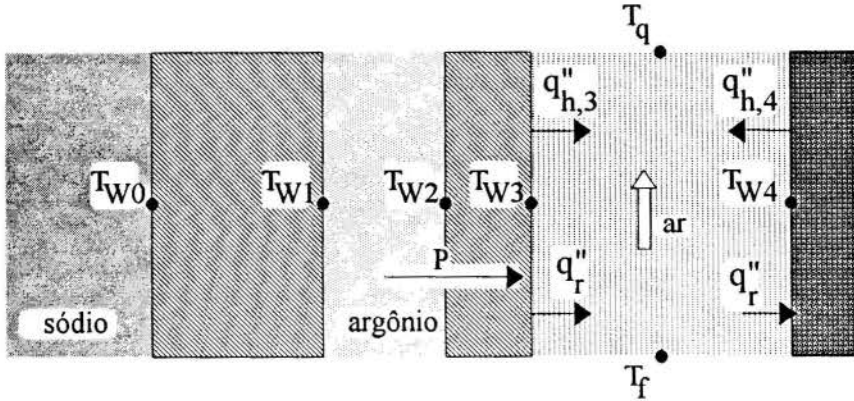


Figura 3 - Balanço de Energia nas paredes.

ou seja, a potência total a ser removida é igual ao calor transferido por convecção natural ao ar e irradiado à superfície do coletor.

O coeficiente de transferência de calor ( $h_a$ ) é dado pela seguinte correlação (Ozisik, 1985):

$$h_a = \begin{cases} 1,42 \left( \frac{T_W - T_a}{L} \right)^{1/4}, & 10^4 < Gr_L Pr < 10^9; \\ 1,31 (T_W - T_a)^{1/3}, & 10^9 \leq Gr_L Pr < 10^{13}; \end{cases} \quad (10)$$

onde, a dimensão característica ( $L$ ) é o comprimento aquecido do canal.

Na superfície do coletor, pode-se escrever que:

$$A_{L4} h_{a4} (T_{W4} - T_a) = \frac{A_{L3} \sigma (T_{W3}^4 - T_{W4}^4)}{\frac{1}{\epsilon_3} + \left( \frac{A_{L3}}{A_{L4}} \right) \left( \frac{1}{\epsilon_4} - 1 \right)}; \quad (11)$$

ou seja, a quantidade de calor irradiada da outra superfície é igual ao calor transferido por convecção ao ar.

**Modelo de Resistências Térmicas** Considerando-se as mesmas hipóteses da seção anterior e conhecendo-se a temperatura da parede externa do vaso de segurança ( $T_{W3}$ ), pode-se obter as temperaturas das outras paredes e do sódio na piscina fria do reator:

$$T_{W2} = T_{W3} + \frac{P}{A_{L3} K \left[ (R_{vs} + \delta_{vs}) \ln \left[ \frac{(R_{vs} + \delta_{vs})}{R_{vs}} \right] \right]}; \quad (12)$$

$$T_{W1} = \sqrt[4]{T_{W2}^4 + \frac{P}{\sigma A_{L1} \left[ \frac{1}{\epsilon_1} + \left( \frac{A_{L1}}{A_{L2}} \right) \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) \right]}}; \quad (13)$$

$$T_{W0} = T_{W1} + \frac{P}{A_{L1} K \left[ (R_v + \delta_v) \ln \left[ \frac{(R_v + \delta_v)}{R_v} \right] \right]}; \quad e \quad (14)$$

$$T_{sodio} = T_{W0} + \frac{P}{h_s A_{L0}}. \quad (15)$$

#### MÉTODO DE SOLUÇÃO

Inicialmente, calcula-se a diferença de temperatura ( $\Delta T$ ) entre a entrada e a saída do ar e a sua vazão através de um procedimento iterativo de cálculo, utilizando-se as equações (1) e (4).

A temperatura média do ar é dada por:

$$T_a = T_f + \frac{\Delta T}{2}. \quad (16)$$

Novamente, um método iterativo é usado para se obter as temperaturas das superfícies das paredes  $T_{W3}$  e  $T_{W4}$  uma vez que o coeficiente de transferência de calor do ar ( $h$ ) depende destas temperaturas, utilizando-se as equações (9) e (11). O sistema de equações não lineares, formado pelas equações (9) e (11), é resolvido pelo método da secante a cada iteração.

Finalmente, com  $T_{W3}$  e resolvendo-se as equações de (12) a (15), pode-se calcular a temperatura do sódio ( $T_{sodio}$ ).

Caso seja dada, como condição de contorno, a temperatura do sódio ( $T_{sodio}$ ) e se queira obter a potência, o método iterativo inverso é considerado.

Utilizando-se estes métodos iterativos, foi escrito um programa computacional, denominado *SIRC* (**S**istema de **R**etirada de **C**alor). Este programa foi escrito em linguagem de programação C++ para microcomputadores.

#### RESULTADOS

Os resultados obtidos com o programa *SIRC* foram comparados com dados de outros trabalhos teóricos e do fabricante (projetista), simulando-se dois reatores: o SAFR (Lancet, 1990) e o PRISM (Kwant, 1988).

**Simulação do reator SAFR** O SAFR é um projeto conceitual de reator rápido refrigerado a metal líquido de 900 MW (térmico) que foi desenvolvido, principalmente, pela Rockwell International (RI) como parte do programa americano de reatores rápidos avançados. Este reator utiliza dois sistemas diversos e passivos de remoção de calor de decaimento radioativo, para o caso em que o sistema principal de transporte de calor (primário, intermediário e secundário) estejam impossibilitados de atuar. Os dois conceitos de sistemas passivos, utilizados no SAFR, são o SDRC e o SRCV. Os parâmetros de referência relativos a este reator encontram-se descritos na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros de referência do SAFR.

•	diâmetro interno do vaso do reator [m] : 12,5
•	espessura do vaso do reator [m] : 0,1
•	diâmetro do vaso de segurança [m] : 13,51
•	espessura do vaso de segurança [m] : 0,025
•	diâmetro do coletor [m] : 14,63
•	comprimento do vaso de segurança [m] : 9,21
•	comprimento da chaminé [m] : 17,07
•	área de escoamento do ar [m <sup>2</sup> ] : 23,41
•	área de escoamento do ar na chaminé [m <sup>2</sup> ] : 5,95
•	temperatura de entrada do ar [°C] : 37,8

As Figuras 4 e 5 apresentam comparações deste trabalho (programa SIRC) com os resultados do programa MDSNP (Hung,1990), utilizando os dados da Tabela 1 e variando o comprimento da chaminé. A condição de contorno adotada foi a temperatura do sódio na piscina fria de 400 °C. Os valores calculados do calor retirado pelo ar com o programa SIRC foram aproximadamente 25% inferiores aos do programa MDSNP, como mostra a Figura 4. Isto se deve ao fato do programa MDSNP considerar em sua modelagem aletas na superfície do coletor, aumentando a eficiência de rejeição do calor, além disto, o valor do coeficiente de convecção utilizado por Hung é maior que o deste trabalho. Hung(1990) adotou a fórmula de Dittus-Boelter que é adequada para convecção forçada. Consequentemente, a diferença de temperatura do ar entre a entrada e a saída também é menor, quase na mesma proporção (30%), como indica a Figura 5.

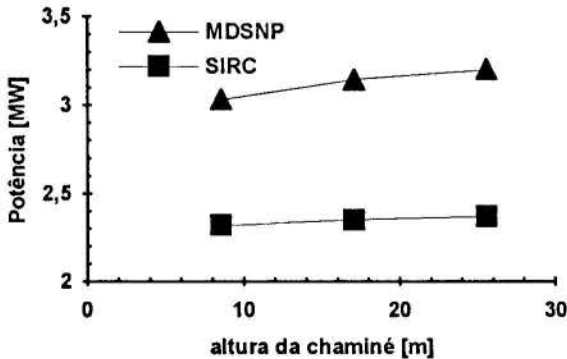


Figura 4 - Potência removida pela circulação do ar em função da altura da chaminé.

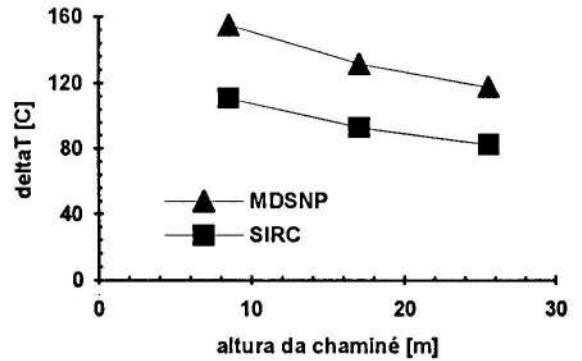


Figura 5 - Diferença de temperatura do ar entre a entrada e a saída em função da altura da chaminé

A Tabela 2 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pela Rockwell(Van Tuyle,1990), pelo modelo de Van Tuyle(1990) e por este trabalho (SIRC). Nesta simulação, utilizou-se como condição de contorno a potência de 3,90 MW, que é o valor onde o calor retirado iguala-se ao gerado pelo decaimento radioativo. Os dados mostram uma boa concordância entre os resultados da Rockwell e os deste trabalho, com uma diferença percentual menor que 10%, tanto na vazão de ar como na diferença de temperatura entre a entrada e a saída do canal.

Tabela 2 - Diferença de temperatura e vazão de ar do sistema de remoção de calor.

	$\Delta T$ (°C)	vazão (kg/s)
Rockwell	99,4	39,0
Van Tuyle	102,5	37,2
SIRC	94,4	36,8

Para se conhecer o calor perdido em operação normal do SAFR, utiliza-se como condição de contorno a temperatura da piscina fria, que é de 427 °C. Nesta situação o calor removido foi de 1,2 MW, o que corresponde a menos de 0,2% da potência térmica do reator.

**Simulação do reator PRISM** O PRISM é um projeto conceitual de reator rápido refrigerado a metal líquido de 471 MW (térmico) que está sendo desenvolvido, principalmente, pela General Electric (GE) como parte do programa americano de reatores rápidos avançados. Este reator apresenta um único sistema passivo de remoção de calor de decaimento radioativo. O conceito de sistema passivo utilizado no PRISM é o SRCV. Os parâmetros de referência relativos a este reator encontram-se descritos na Tabela 3.

A Tabela 4 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pela GE(Van Tuyle,1990), pelo modelo de Van Tuyle,1990 e por este trabalho (SIRC). Nesta simulação, utilizou-se como condição de contorno a potência de 2,42 MW, que é o valor onde o calor retirado iguala-se ao gerado pelo decaimento radioativo. Os dados mostram uma boa concordância entre os resultados da GE e os deste trabalho, com uma diferença percentual menor que 15%, tanto na vazão de ar como na diferença de temperatura entre a entrada e a saída do canal.

Tabela 3 - Parâmetros de referência do PRISM.

• diâmetro interno do vaso do reator [m] : 5,64
• espessura do vaso do reator [m] : 0,051
• diâmetro do vaso de segurança [m] : 5,95
• espessura do vaso de segurança [m] : 0,051
• diâmetro do coletor [m] : 6,56
• comprimento do vaso de segurança [m] : 18,0
• comprimento da chaminé [m] : 15,0
• área de escoamento do ar [m <sup>2</sup> ] : 5,044
• área de escoamento do ar na chaminé [m <sup>2</sup> ] : 4,0
• temperatura de entrada do ar [°C] : 20,0

Tabela 4 - Diferença de temperatura e vazão de ar do sistema de remoção de calor.

	$\Delta T$ (°C)	vazão (kg/s)
fabricante (GE)	92,2	25,9
Van Tuyle	91,7	26,0
SIRC	100,1	21,9

Para se conhecer o calor perdido em operação normal do PRISM, utiliza-se como condição de contorno a temperatura da piscina fria, que é de 329 °C. Nesta situação o calor removido foi de 0,7 MW, o que corresponde a menos de 0,2% da potência térmica do reator.

### CONCLUSÃO

Com base nos resultados dos fabricantes dos reatores PRISM e SAFR, pode-se dizer que os resultados apresentam uma boa concordância (diferenças inferiores a 15%), levando-se em conta as incertezas com relação aos coeficientes de transferência de calor e de perda de carga devido às singularidades.

O programa SIRC é executado rapidamente, permitindo ao usuário realizar vários tipos de análises paramétricas num ambiente computacional interativo.

A potência utilizada na condição de contorno dos problemas estudados é um valor fornecido pelo fabricante, onde o calor de decaimento radioativo torna-se igual ao retirado pelo SRCV. Neste ponto as temperaturas do sódio atingem seus limites máximos, a partir deste momento, estas decrescem exponencialmente. Para se ter uma análise completa do SRCV e obter este ponto limite, é necessário o estudo deste problema ao longo do transitório, o que será objeto da próxima etapa, na continuação deste trabalho.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Kwant, W. et al. ,1988, “ PRISM - Reactor Design and Development”, **Proceedings of the International Topical Meeting on SAFETY OF NEXT GENERATION POWER REACTORS**, Washington, USA, May 15.
- Lancet, R. T. et al. ,1990, “Safety and Licensing of SAFR - An Advanced Liquid-Metal Reactor”, **Nuclear Technology** 91(2): 203 - 214.

- D'auria, F. et al ,1994, “ AP600 -Thermal Hydraulic Performance: A RELAP5/MOD2 Model Simulation”, **Proceedings of ANS'94 International Topical Meeting on Advanced Reactor Safety**, Pittsburg, PA, USA, April 17-2.

- Hung, T. C. and Dhir, V. K. ,1990, “Decay Heat Removal in the Sodium Advanced Fast Reactor with the MDSNP Code”, **Nuclear Technology** 91(1): 51 - 60.

- Van Tuyle, G. J. et al. ,1990, “Examining the Inherent Safety of PRISM, SAFR, MHTGR”, **Nuclear Technology** 91(2): 185 - 202.

- Dunn, F. E. ,1985, “SASSYS-1 Modeling of RVACS/RACS Heat Removal in an LMR”, **Transactions**.

- Senna, J. G. ,1985, “**Thermal-Hydraulic Analysis of a Passive Energy Removal System for Advanced Nuclear Reactors**”, Master of Science in Nuclear Engineering, MIT, Massachusetts, USA.

- Ozisik, M. N. ,1985, “**Heat Transfer- A Basic Approach**”, MacGraw-Hill.

### SUMMARY

This work concerns with the modeling and calculation method for analysis of the reactor vessel air cooling system in pool type LMFBR. The generated residual heat is removed through the air flow upward due to the buoyancy forces. The results from this procedure showed a good agreement with reactors manufacturer's data( General Electric, Rockwell Internacional).





## BOMBA ELETROMAGNÉTICA DE CORRENTE CONTÍNUA COM IMÃS DE TERRAS RARAS PARA O CONTROLE DE ESCOAMENTO DE METAIS LÍQUIDOS



E. M. Borges; F. Sircilli Neto; A. Passaro; F. A. Braz Filho  
 Instituto de Estudos Avançados (IEAv - CTA)  
 Caixa Postal 6044  
 São José dos Campos, SP - 12231-970

### RESUMO

Em um reator rápido refrigerado a metal líquido são utilizadas bombas eletromagnéticas para o controle do escoamento nos circuitos de refrigeração. O princípio de funcionamento de bombas eletromagnéticas está baseado na lei de Faraday. A força resultante da interação entre a corrente elétrica e o campo magnético pode ser calculada considerando suas amplitudes e sentidos de direção. Neste trabalho apresenta-se o esquema de otimização de um protótipo de bomba, substituindo o magneto tipo "C", que gera o campo magnético, por ímãs de terras raras. Os resultados de simulações computacionais de campo magnético e pressão estática, são comparados a dados dos ensaios experimentais.

### INTRODUÇÃO

Sistemas de refrigeração, que utilizam metal líquido como fluido de trabalho, podem resfriar núcleos com altas densidades de potência. Este é o caso, por exemplo, de reatores rápidos, que utilizam bombas centrífugas ou eletromagnéticas para o controle do escoamento dos circuitos de refrigeração. No reator rápido experimental norte americano EBR-II o escoamento de sódio líquido do circuito secundário é controlado por bombas eletromagnéticas de corrente contínua (Lentz et al., 1985).

As bombas eletromagnéticas não têm partes móveis, são completamente seladas, apresentam alta confiabilidade e permitem a utilização de fluido radioativo à alta temperatura. Estas características as tornam interessantes para utilização no reator rápido experimental do projeto REARA (Prati et al., 1994), que está sendo desenvolvido no Instituto de Estudos Avançados (IEAv/CTA). Uma etapa deste projeto consiste na construção, caracterização e otimização de bombas eletromagnéticas (EM) de corrente contínua, que são componentes importantes para qualquer sistema de transporte de calor a metal líquido.

Atualmente, já se projetou e ensaiou a primeira bomba eletromagnética de corrente contínua nacional (com magneto tipo "C" em aço SAE1020 e bobinas para se obter o campo magnético desejado), que funcionou satisfatoriamente em ensaios estáticos, em circuito fechado a mercúrio (Borges et al., 1995). Neste trabalho apresenta-se o esquema de otimização da bomba eletromagnética, utilizando o programa computacional LMAG2D (Abe et al., 1996) para o projeto de dimensionamento de magnetos permanentes de Samário-Cobalto a serem utilizados para geração de campo magnético em substituição ao magneto "C" e bobinas. Apresenta-se, ainda, o princípio de funcionamento e as medidas experimentais de distribuição de campo magnético no centro do entreferro e de ensaios de pressão estática em circuito a mercúrio, para diferentes valores de corrente principal, visando definir os limites de operação da bomba eletromagnética de corrente contínua otimizada. Os resultados obtidos experimentalmente tanto de campo magnético, como de pressão estática apresentam desvios sistemáticos em relação aos das simulações computacionais. Estes dados são muito importantes no desenvolvimento de

modelos matemáticos para simulação confiável de bombas eletromagnéticas de corrente contínua.

### PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DA BOMBA

Em uma bomba EM de corrente contínua a lei de Faraday define a intensidade e a direção da força exercida no fluido condutor sob influência da corrente elétrica e do campo magnético imposto. Observa-se, na Figura 1 o princípio de funcionamento de uma bomba eletromagnética de corrente contínua. Admitindo-se o entreferro (d), a altura do canal da bomba (a), a largura do canal (b) e o comprimento útil (c), monta-se o equacionamento para a avaliação do seu desempenho (Borges, 1991).

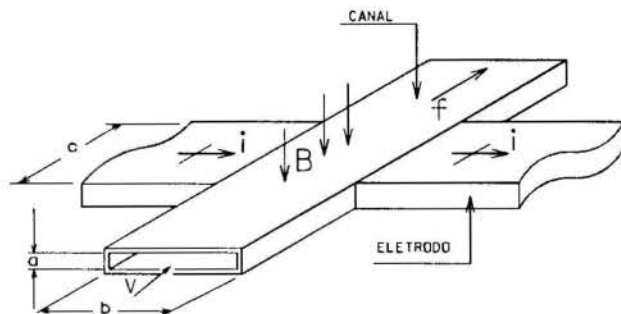


Figura 1: Princípio de funcionamento de uma bomba eletromagnética.

Considerando-se a perfeita perpendicularidade entre o campo magnético  $B$  [ $\text{Wb/m}^2$ ], a corrente elétrica imposta e a direção do escoamento do fluido, a força resultante da interação entre campo e corrente pode ser calculada pela equação:

$$F = B \cdot I_e \cdot b \quad (1)$$

A corrente elétrica útil ( $I_e$ ) é um parâmetro muito importante no projeto da bomba EM e pode ser calculada com

base no circuito elétrico equivalente, apresentado na Figura 2, onde a corrente total  $I$  fornecida por fonte externa é subdividida em:

- $I_e$  corrente útil que atravessa o canal da bomba pelo fluido condutor sob o efeito do campo magnético;
- $I_w$  corrente de fuga pela parede do canal; e
- $I_b$  corrente de "bypass", que é a corrente de fuga pelo líquido onde não há interação com o campo magnético.

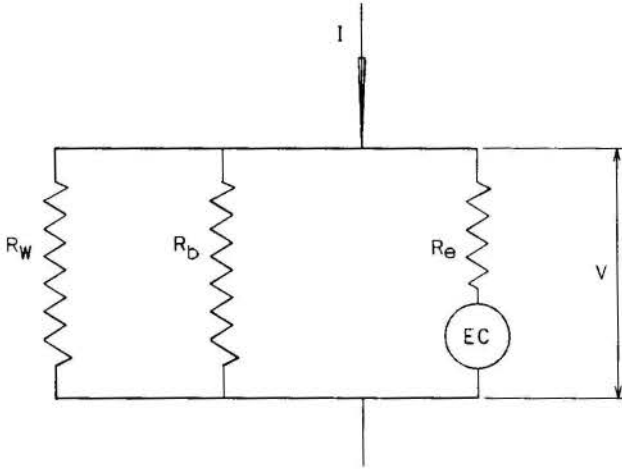


Figura 2: Circuito elétrico equivalente da bomba EM de corrente contínua.

$R_e$ ,  $R_w$  e  $R_b$  são respectivamente as resistências elétricas do fluido no canal da bomba, da parede do canal (perpendicular ao campo magnético, na direção da corrente elétrica) e a resistência de "bypass". Esta é calculada multiplicando-se a resistência elétrica útil ( $R_e$ ) por um fator empírico que está relacionado com as geometrias envolvidas.

A tensão elétrica da bomba é dada por:

$$V = I_e \cdot R_e + E_c = I \cdot R_t \quad (2)$$

onde:

$R_t$  é a resistência elétrica equivalente do circuito; e

$E_c$  é a força contra-eletromotriz resultante do deslocamento do fluido no campo magnético. Esta voltagem induzida pode ser calculada pela expressão:

$$E_c = B \cdot w / a \quad (3)$$

Nota-se que a corrente  $I_e$  é uma função da vazão volumétrica ( $w$ ). Logo para vazão nula  $E_c$  vale zero.

Pode-se definir a pressão manométrica desenvolvida pela bomba como:

$$P = F / (a \cdot b) \quad (4)$$

Substituindo a Eq. (1) na Eq. (4) tem-se:

$$P = B \cdot I_e / a, \text{ em } [N/m^2]; \text{ e} \quad (5)$$

$$P = B \cdot I_e / (a \cdot 1360), \text{ em } [cm \text{ Hg}], \quad (6)$$

$$\text{onde, } I_e = \frac{I}{1 + R_e \left( \frac{R_w + R_b}{R_w \cdot R_b} \right)} \quad (7)$$

## PROJETO DE OTIMIZAÇÃO DA BOMBA

Em substituição ao magneto tipo "C" e bobinas pretende-se otimizar a bomba EM utilizando ímãs permanentes de Samário-Cobalto. Para o dimensionamento destes ímãs foi realizado um estudo, por meio de simulações computacionais com o programa LMAG2D, do comportamento de campo magnético gerado pelos ímãs. A dificuldade principal para a especificação dos ímãs é o efeito de borda, minimizado no caso do eletromagneto que é um circuito magnético fechado, que confina as linhas de campo. No caso de ímãs permanentes, nas proximidades de suas bordas o campo magnético varia rapidamente, chegando a apresentar inversão de sentido na região externa próxima a seu contorno.

Pretende-se colocar os ímãs em contato com o canal da bomba, separados apenas por finas camadas isolantes. Deste modo, define-se a distância entre os ímãs somando-se a altura ( $a$ ) do canal com duas vezes a espessura da parede de aço (1 mm), obtendo-se um entreferro de 12 mm. Outro parâmetro geométrico importante é o comprimento ativo da bomba, que neste caso admite-se igual ao do barramento de cobre, ou seja, 70 mm. Por fim a largura útil do canal de 30 mm complementa os dados geométricos necessários à definição dos magnetos permanentes.

Para uma avaliação adequada e especificação dos magnetos permanentes o estudo é dividido em quatro partes:

- estudo da dispersão de corrente elétrica no fluido condutor;
- estudo do comportamento de campo magnético gerado, em função das dimensões dos magnetos permanentes;
- cálculo da força magnetomotriz resultante da interação entre corrente elétrica e campo magnético, no fluido condutor; e
- definição das dimensões dos magnetos, em função dos dados anteriores e das limitações práticas.

Estudo da dispersão de corrente Considerando as dimensões do canal da bomba EM e do barramento de cobre por onde passa a corrente elétrica principal fez-se a análise de dispersão de corrente utilizando o programa LMAG2D. A Figura 3 mostra o modelo geométrico e as condições de contorno adotadas neste estudo e a Figura 4 apresenta a malha de elementos finitos gerada.

Na Figura 5 pode-se observar a curva de densidade de corrente elétrica normalizada no centro do canal em função do comprimento na direção do fluxo do fluido condutor. Nota-se um decréscimo de 80% do valor de pico a partir de 40 mm do centro, e que a 50 mm do centro da bomba a densidade de corrente ainda é superior a 10% do seu valor de pico.

Integrando a curva de densidade de corrente elétrica no canal da bomba (Figura 5) na região de interesse (ou seja, onde há campo magnético contribuindo positivamente para a força magnetomotriz, para os ímãs escolhidos), obtêm-se o valor da corrente total que realmente contribui para a definição do cálculo da força magnetomotriz gerada pela bomba. Nota-se ainda, que os ímãs devem ser especificados de modo a se aproveitar ao máximo a corrente principal fornecida.

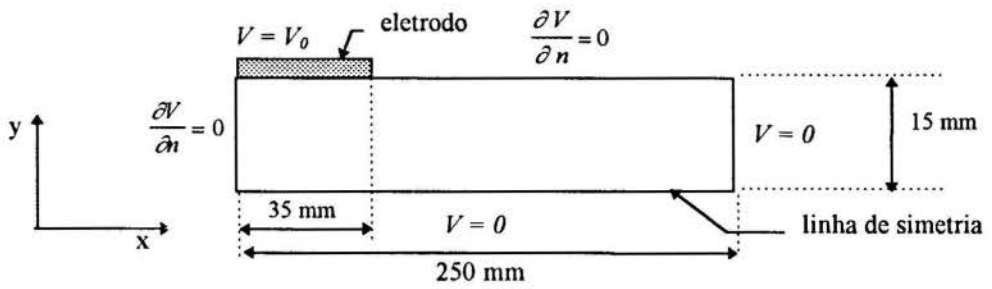


Figura 3: Modelo bidimensional usado no estudo de dispersão de corrente.

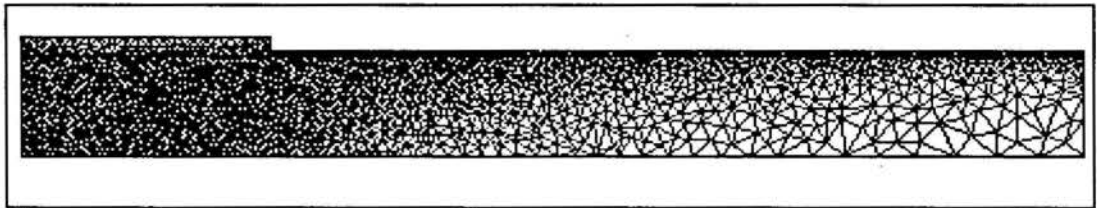


Figura 4: Malha de elementos finitos gerada pelo Lmag2D.

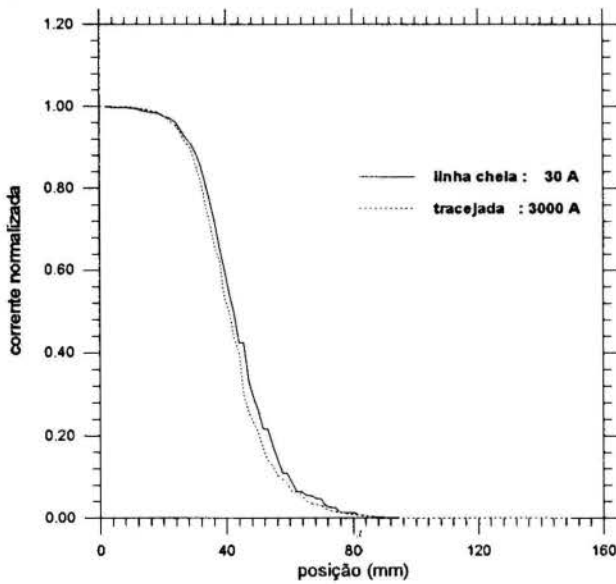


Figura 5: Curva de densidade de corrente elétrica normalizada, calculada no centro do canal da bomba EM.

**Estudo de campo magnético** Adotou-se como estratégia a simulação de um quarto do sistema estudado ou seja, metade de um dos ímãs, e metade do entreferro, já que as condições de contorno permitem este tipo de simulação computacional, aumentando a precisão do cálculo, sem aumento do tempo de processamento e memória computacional consumida.

Considerando-se o entreferro definido (12 mm) e ímãs de comprimento igual ao útil da bomba (70 mm), variou-se suas espessuras entre 10 e 70 mm e obteve-se as curvas apresentadas na Figura 6. Nota-se um aumento crescente do valor de campo máximo obtido, proporcional ao aumento da espessura do

magneto permanente. Nota-se ainda, que os ímãs de 70 mm de espessura apresentaram um acréscimo percentual de campo magnético muito pequeno em relação aos de 60 mm, sendo este, aparentemente, o mais interessante nesta análise.

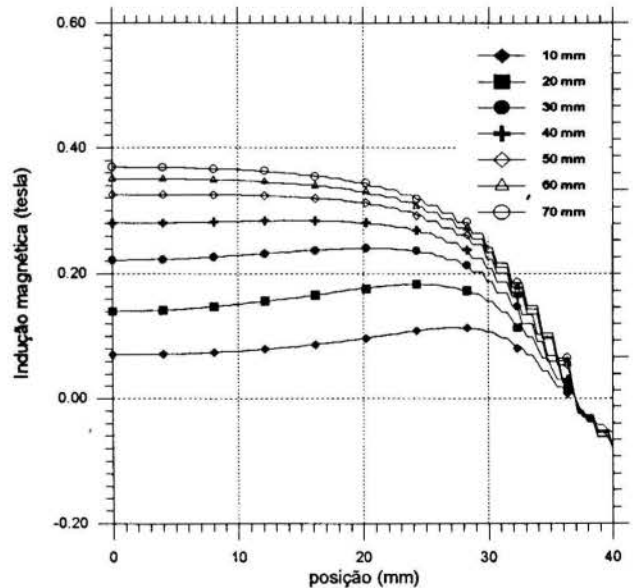


Figura 6: Indução magnética em função da espessura dos ímãs.

Na Figura 7 apresenta-se para magnetos de espessura de 60 mm, curvas de indução magnética para alguns comprimentos. Nota-se que quanto maior o comprimento dos magnetos maior é a área de campo constante, mas o seu valor máximo é menor, observa-se ainda, uma grande variação percentual de campo entre os vários comprimentos de magnetos simulados.

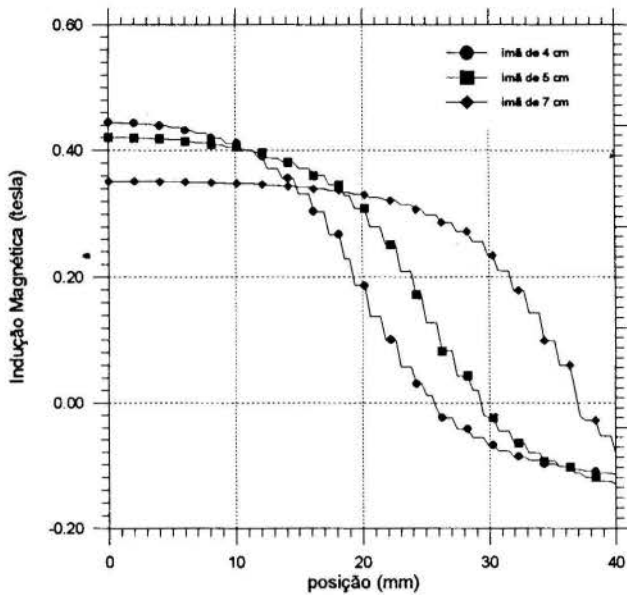


Figura 7 Distribuição de campo para ímã de 60 mm de espessura e diversos comprimentos.

Cálculo da força magnetomotriz gerada Como já apresentado no equacionamento da bomba eletromagnética, pode-se calcular a força pontual exercida no fluido, considerando-se as geometrias envolvidas além das densidades de corrente principal e de campo magnético em um dado ponto do canal da bomba. Deste modo, considerando-se os magnetos permanentes com 60 mm de espessura e 70 mm de comprimento e sua respectiva curva de distribuição de campo magnético (Figura 7), a curva de densidade de corrente elétrica normalizada (Figura 5) e o valor da corrente elétrica útil ( $I_e$ ), obtém-se a curva de densidade de força exercida no canal da bomba EM, como apresentado na Figura 8.

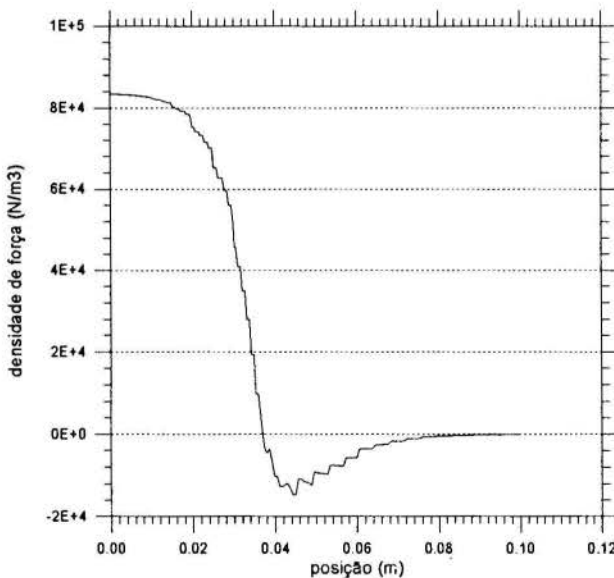


Figura 8: Densidade de Força magnetomotriz obtida na bomba.

Dimensionamento dos magnetos Considerando-se os resultados apresentados até o momento, concluiu-se pela necessidade de se utilizar magnetos de comprimentos superiores a 80 mm para tentar eliminar a força magnetomotriz em sentido

contrário ao do fluxo do fluido condutor. A inversão de força magnetomotriz constatada em simulações computacionais é devido ao campo magnético negativo resultante do efeito de borda, para ímãs de 70 mm ou menores, ainda em uma faixa do canal onde a corrente elétrica principal é relativamente elevada (como se observa nas Figuras 5 e 7).

Com base nos dados geométricos obtidos neste estudo fez-se uma cotação dos magnetos permanentes de Samário-Cobalto, junto a firma ERIEZ.

A prensa usada por esta firma especializada só permite a obtenção de ímãs com dimensões máximas úteis de 12 mm por 23 mm por 30 mm, (Figura 9) o que torna necessário a aquisição de vários ímãs para se compor os magnetos permanentes necessários ao desenvolvimento experimental. Neste trabalho foram usados ímãs ERIMAX-1 (ERIEZ Ltda).

Após a magnetização individual dos ímãs na direção desejada (12 mm), estes deverão ser justapostos, em um total de cinco ímãs (totalizando 60 mm) para se compor os blocos construtivos, que por sua vez deverão ser colocados lado a lado, de modo a se obter os magnetos nas dimensões desejadas.

Nota-se que devido a força de repulsão, existente entre dois ou mais ímãs de mesma polaridade, quando colocados lado a lado, decidiu-se montar os magnetos da bomba EM com a largura máxima útil de um único ímã (30 mm), que corresponde a largura do canal, deste modo o comprimento total dos magnetos é definido pelo número total de blocos construtivos colocados lado a lado. Para manter todos os ímãs que formam um magneto encostados, apesar das forças contrárias, e facilitar o controle do entreferro desejado entre os dois magnetos montados, foi necessário utilizar um dispositivo especialmente projetado para este fim (Borges et al., 1996).

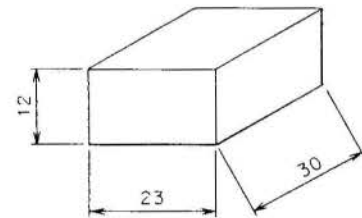


Figura 9: Geometria de um ímã de Samário-Cobalto.

Na Figura 10, como exemplo, pode-se observar o resultado da montagem final de um magneto, com quatro blocos construtivos,

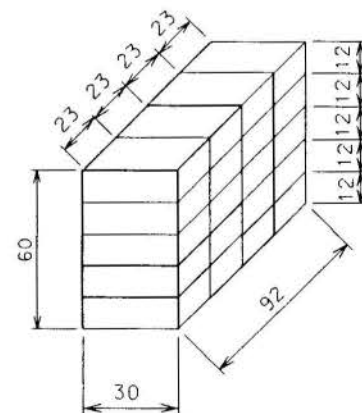


Figura 10: Dimensionamento final de um magneto de Samário-Cobalto com quatro blocos construtivos.



## AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Os dados experimentais e cálculos teóricos de pressão manométrica da bomba EM e de campo magnético no centro do entreferro dos magnetos permanentes devem ser comparados para avaliação e definição de fatores de ajuste para programas de simulação em desenvolvimento.

**Campo magnético** Foi utilizado um sensor transversal de área ativa de 1,8 mm de diâmetro, acoplado a um Gaussímetro digital, para a medida da distribuição da densidade de campo magnético no centro do entreferro dos magnetos permanentes. Observa-se que há a necessidade de se calibrar as leituras, zerando o Gaussímetro com a câmara de campo nulo, antes de se iniciar o levantamento experimental de campo. Na Figura 11 apresenta-se a curva de campo em função do comprimento do canal para montagens experimentais de magnetos de dois a cinco blocos construtivos. Nota-se vários picos de campo, nas posições que correspondem aos centros dos blocos construtivos, observa-se ainda, que nas posições correspondentes às bordas o valor de campo magnético resultante é menor, devido ao efeito de borda dos ímãs.

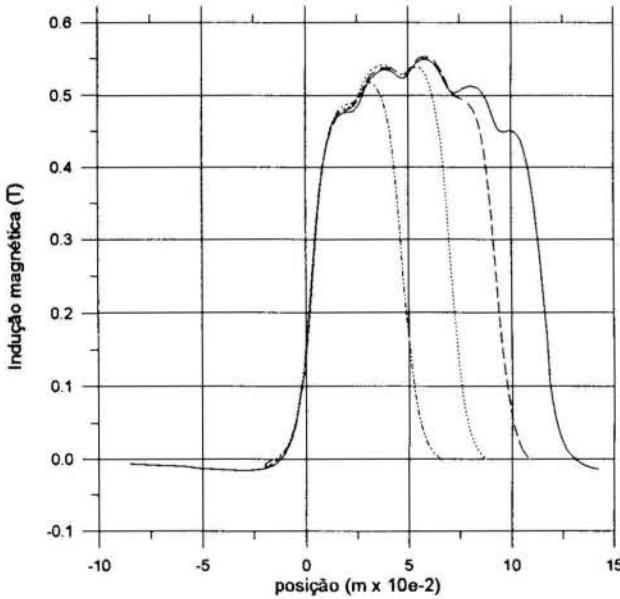


Figura 11: Campo magnético experimental no centro do canal.

Na Figura 12 são comparadas as curvas de densidade de campo magnético obtidas por simulação computacional com o programa LMAG2D e por ensaio experimental para magnetos com quatro blocos construtivos, nota-se que o campo médio na região de interesse é aproximadamente o mesmo. Neste caso  $0,52 \text{ [Wb/m}^2\text{]}$ . Pode-se, portanto utilizar este valor nos cálculos teóricos de pressão manométrica da bomba EM.

**Pressão estática da bomba EM** Para se poder avaliar a pressão manométrica de bombas eletromagnéticas de corrente contínua com vazão nula foi projetado e construído um circuito experimental fechado em aço e vidro, para mercúrio, cujo esquema é apresentado na Figura 13. Nota-se as tubulações verticais em vidro, onde se pode verificar o deslocamento de mercúrio e o desnível total  $\Delta L$  (pressão estática) produzido na bomba EM, em função da corrente principal e do campo magnético fornecido; as demais partes do circuito são feitas em aço.

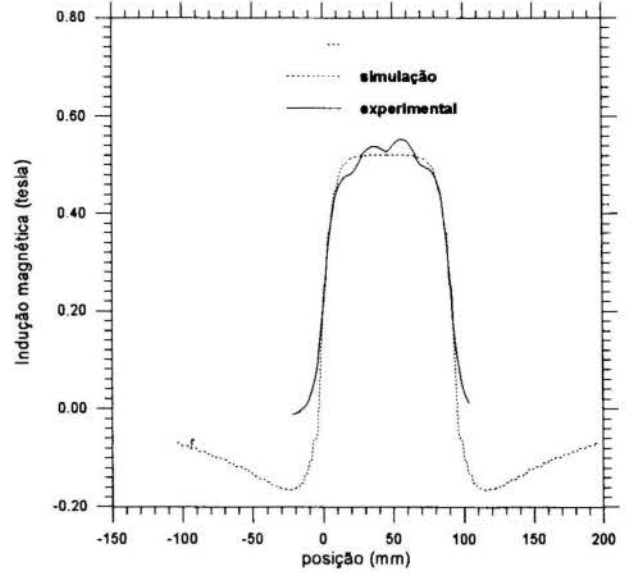


Figura 12 Comparação de distribuição de campo teórico e experimental.

Os dados experimentais de pressão estática da bomba EM em desenvolvimento são obtidos variando-se o valor da corrente principal e medindo-se o desnível de mercúrio total ( $\Delta L$ ) apresentado entre as duas tubulações de vidro.

Observa-se que os ensaios experimentais de pressão estática da bomba EM otimizada, apresentados neste trabalho, utilizam dois magnetos permanentes de Samário-Cobalto ERIMAX-1, com quatro blocos construtivos cada, colocados encostados ao canal da bomba e separados somente por finas camadas isolantes.

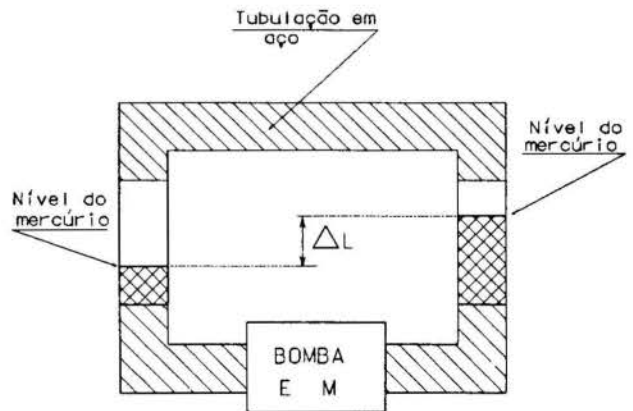


Figura 13: Esquema do circuito experimental a mercúrio.

Na Figura 14 são apresentados os dados experimentais e teóricos de pressão estática da bomba EM em função da corrente elétrica principal. Nota-se que os valores teóricos são obtidos em função da corrente média útil ( $I_e$  [A]), da geometria do canal da bomba ( $a=0,01 \text{ m}$ ) e do campo magnético médio para quatro blocos construtivos simulados pelo programa LMAG2D ( $0,52 \text{ Wb/m}^2$ ), utilizando a Eq. (6).

Observa-se que a corrente principal ( $I$ ) lida no Amperímetro é a total e não a corrente útil ( $I_e$ ) a ser utilizada no equacionamento. Para o cálculo da corrente útil deve-se considerar as resistividades elétricas na temperatura de trabalho e as dimensões dos materiais envolvidos. Utiliza-se a Eq. (7)

para esta correção. Considerando-se a geometria da bomba EM e a espessura da parede do canal (1 mm), tem-se:  $R_w = 15,0 \cdot 10^{-5}$  Ohms e  $R_e = 4,0 \cdot 10^{-5}$  Ohms. Admitindo-se que  $R_b = 15,0 \cdot R_e$ , obtêm-se  $I_e = 0,75 \cdot I$ .

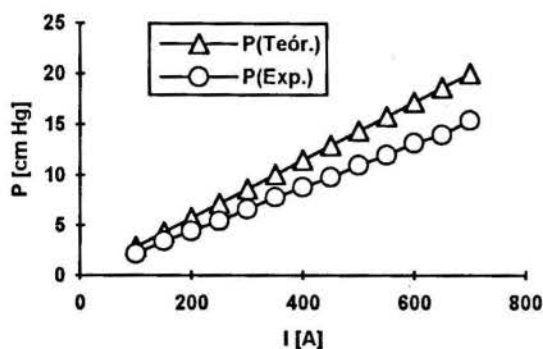


Figura 14: Curvas de pressão estática teórica e experimental.

## CONCLUSÃO E COMENTÁRIOS

Para se ter um campo magnético médio no centro do canal, compatível com a necessidade de operação da bomba eletromagnética de corrente contínua, gerado por ímãs permanentes, foi necessário a utilização de vários ímãs de Samário-Cobalto ERIMAX-1, devido às suas reduzidas dimensões, obtendo-se ímãs na geometria desejada.

O programa LMAG2D mostrou-se bastante versátil, rápido e confiável face as várias situações simuladas, incluindo os estudos de dispersão de corrente elétrica no fluido condutor e de distribuição de campo magnético no centro do entreferro.

As simulações e ensaios experimentais de campo magnético apresentaram resultados similares, com os mesmos valores médios na região central, mas com considerável discrepância na região externa aos ímãs (Figura 12). As pequenas oscilações de campo máximo observadas experimentalmente (Figura 11) para vários blocos construtivos estão associadas ao efeito de borda dos ímãs. Novas configurações de ímãs devem ser estudadas para se diminuir os efeitos de borda observados.

Outros resultados relevantes são: esta bomba não necessita de duas fontes de corrente contínua para seu controle, e obteve-se considerável redução nas dimensões finais do ímã usado para a geração de campo, diminuindo sensivelmente seu custo final.

Os dados de pressão estática da bomba EM teóricos e experimentais apresentaram desvio considerável e constante (aproximadamente 23%). Nota-se que no estudo teórico considerou-se campo magnético constante e máximo em toda a largura do canal da bomba, apesar de se usar ímãs de apenas 30 mm de largura e não se levou em conta a força contrária ao deslocamento do fluido resultante do campo magnético negativo, devido ao efeito de borda dos ímãs, próximo aos barramentos.

Os dados obtidos nos ensaios experimentais demonstraram a importância de se desenvolver modelos matemáticos específicos para cada fenômeno estudado. Além disto, a comparação teórico-experimental determina os fatores de ajuste dos programas computacionais de simulação em desenvolvimento.

Os ensaios de pressão manométrica da bomba EM com vazão nula apresentaram resultados relevantes. É necessário, no entanto, que sejam realizados os ensaios dinâmicos da bomba EM, de modo a se obter suas curvas características.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq e ao Instituto de Estudos Avançados (IEAv-CTA) pelo apoio financeiro dado a este projeto.

A ERIEZ Ltda pela doação dos ímãs de Samário-Cobalto ERIMAX-1 utilizados nos ensaios experimentais apresentados neste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abe, N. M.; et al., 1996, "LMAG-2D: A Software Package To Teach FEA Concepts". VII IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, Okayama, Japan.

Borges E. M., 1991, "Desenvolvimento e Simulação Computacional de Bombas Eletromagnéticas Termoeletricas para o Controle do Escoamento em Reatores Nucleares Espaciais Refrigerados a Metal Líquido". Tese de Doutorado ITA, São José dos Campos, SP, Brasil.

Borges, E. M.; et al., 1995, "Ensaio de Pressão Estática de Bomba Eletromagnética de Corrente Contínua". II Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Borges E. M.; et al., 1996, "Projeto do suporte de montagem e espaçamento de ímãs". REARA/IT-0001/96, Instituto de Estudos Avançados (IEAv-CTA), São José dos Campos, SP, Brasil.

ERIEZ Ltda, Catalogo ERIMAX - ímã Samário-Cobalto ERIMAX-1.

Lentz, G. L.; et al., 1985, "EBR-II - Twenty Years of Operation Experience". Symposium on Fast Breeder Reactors: Experience and Trends, Lyon, France.

Prati, A.; et al., 1994, "Concepção de um Reator Rápido Experimental para o Brasil". V Congresso Geral de Energia Nuclear, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

## ABSTRACT

Electromagnetic pumps are used for controlling the flow in "LMFBR" cooling systems. The electromagnetic pump's working principle is based upon Faraday's law. The resulting force due to the interaction between the main electric current and the magnetic field can be calculated considering their amplitudes and orientations. In this paper it shows the pump prototype optimization scheme, substituting the C-type magnet by rare-earth magnets. The results of magnetic field and static pressure computational simulations are compared with experimental measurements data and they show good agreement.



## CIRNAT - A CODE FOR ONE AND TWO-PHASE NATURAL CIRCULATION



José Luís Ferraz Bastos  
 Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares - IPEN/CNEN  
 Diretoria de Reatores  
 Travessa R - 400 - Cidade Universitária  
 05508-900 - São Paulo - SP

## SUMMARY

*This paper presents the CIRNAT code developed for one and two-phase natural circulation analysis. An one-dimensional approach of the conservation equations was adopted with an homogeneous model for the two-phase flow representation. Several heat transfer regimes were included as subcooled boiling, condensation, laminar and turbulent one-phase liquid and vapor, pool boiling, nucleate boiling, etc... The results of two studies are presented: transient behavior of a boiling/condensing system and a "Loss of Flow Accident" in a pool research reactor core.*

## INTRODUCTION

Termosyphon is an opened or closed loop with a heat source, at a lower level, connected to a heat sink by tubes (Huang and Zelaya, 1988). These devices transport heat by the natural convection mechanism and are widely used in solar systems, geothermal energy, cooling of electronic components, nuclear reactors, boiler design, etc....

The fluid flow, for a single phase termosyphon, is generated by the density differential due to the thermal expansion of the working fluid (Zvirin et alii, 1981). In boiling systems, the difference in density between the liquid and vapor phases provides the driving force for the fluid circulation (Lee, 1990). In both cases heat is added to the fluid at the heat source and extracted at the heat sink.

To analyse the performance of natural circulation systems operating in one and two-phase flows, a code, CIRNAT, based on a one-dimensional formulation of the conservation laws is in development. The Homogeneous approach of the two-phase flow was implemented and different heat transfer regimes are considered: laminar / turbulent liquid and vapor flows, pool boiling, flow boiling and condensation. Thermal properties of water and vapor are estimated by correlations in a wide range of temperatures and pressures. Features like parallel loops, variable boundary conditions, reversal flows give to this code the capability to treat a large variety of systems.

In order to validate the code, experiments, for one phase flow, were held, first at a simple square loop (Lavrador et al, 1994) and afterwards in an integral test facility (Bastos, 1993) which simulates the primary circuit of a pressurised water reactor. The agreement between numerical and experimental results were good. Two phase flow analysis in a boiling/condensing system were performed recently. A closed square glass circuit was built at the Chemical Engineering Department of USP, and several experiments were held with different heat source levels and cooling flow rates. The results were also encouraging although the simplicity of the two phase model adopted.

This work is a description of the code and presents some results obtained for the IEA-R1, a nuclear research reactor

from IPEN and the boiling/condensing system mentioned in the previous paragraph.

## CONSERVATION EQUATIONS

The code is based on the "Finite Volume Technique" and the conservation equations are considered as one-dimensional. Two equations, momentum and energy, are associated to the fluid nodes and one equation, heat balance, to the structural nodes.

The integrated energy conservation equation for the fluid, has the form:

$$C_p \frac{\partial h_p}{\partial t} = Gf(h_s - h_p) + Gc_1(c_p T_w - h_p) + Gc_2(c_p T_{w2} - h_p) + S \quad (1)$$

where:

$C_p$  is the thermal capacitance of node P,

$$C_p = \rho c_p v \quad (2)$$

$Gf$  is the the enthalpy transport conductance,

$$Gf = M c_p \quad (3)$$

$Gc_1$  and  $Gc_2$  are the thermal conductances,

$$Gc_i = \frac{G_{cond} G_{conv}}{G_{cond} + G_{conv}} \quad (4)$$

$G_{cond}$  and  $G_{conv}$  are the conduction and convection conductances respectively;

The energy added to node P is placed at the source term S. This energy can be the heat flux dissipated by an external device (electrical heater, nuclear rod, etc...), generated by chemical reaction or due to the connection of node P to a surge line node.

Figure 1 shows a scheme of the heat flux exchanges between node P and its neighbours where "S" is the preceding fluid node which depends on the flow direction, and "W1" and "W2" are structural nodes.

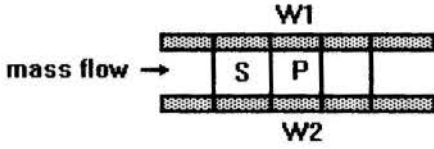


Figure 1 - Schematic Nodal Representation

Notice that the thermal capacitance and the conductances are not constant but they depend on the enthalpy of node P due to the variation of the thermal properties. In this way, equation (1) is non linear requiring an iterative procedure to be solved.

Integrating the momentum equation around the loop, equation (5) is obtained:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\Gamma} \left[ \Delta p - \frac{1}{2} \frac{M^2 R}{\rho} + g \xi - \frac{1}{2} \frac{M^2 \eta}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{M^2 R_c}{\rho} - \Gamma_c \frac{dM_c}{dt} \right] \quad (5)$$

in this equation,

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \frac{z2(i) - z1(i)}{A(i)} \quad (6)$$

where  $z2(i)$  and  $z1(i)$  are the final and initial spatial co-ordinates and  $A(i)$  the cross sectional area;

$$\Delta P = P_{out} - P_{in} \quad (7)$$

$P_{out}$  and  $P_{in}$  are the outlet and inlet pressures for an opened loop, for a closed loop this term vanishes;

$$R = \sum_{i=1}^n \left( f \frac{z2(i) - z1(i)}{d(i) A^2(i)} + \frac{K(i)}{A^2(i)} \right) \quad (8)$$

where  $f$  is the friction factor,  $K(i)$  the form loss coefficient and  $d(i)$  the diameter ;

$$\xi = \sum_{i=1}^n \rho(i) \bar{e}_z \bar{e}_g (z2(i) - z1(i)) \quad (9)$$

$$\eta = \frac{1}{A_{out}^2 - A_{in}^2} \quad (10)$$

$A_{out}$  and  $A_{in}$  are the outlet and inlet flow areas for an opened loop, and is null for a closed loop.

The last two terms are related to parallel loops. The parameters with the subscript "c" represent the portion of the loop belonging to more than one loop:

$$M_c = \sum_{j=1}^l M_j \quad (11)$$

$M_j$  is the mass flow rate for the  $j$  loop.

The heat balance equation for the structure nodes is shown in (12).

$$C_l \frac{dT_l}{dt} = Gc_l (T_K - T_l) + Gc_2 (T_L - T_l) + Q \quad (12)$$

In this equation nodes "K" and "L" are structural or fluid nodes in the radial direction. If "K" is a structural node,  $Gc_l$  is a simple conduction conductance. If it is a fluid node  $Gc_l$  is a conduction/convection conductance.

In two-phase flows the fluid presents high volume variations entraining pressure changes as it expands or contracts. To consider this effect, an expansion tank model was developed. An expansion tank is an reservoir connected to the loop by a surge line. The flow rate at the surge line is estimated by the continuity equation:

$$M_s = -V \frac{d\bar{\rho}}{dt} \quad (13)$$

where  $M_s$  is the mass flow at the surge line,  $V$  the total volume of the loop and  $\bar{\rho}$  the volume average density of the loop fluid.

So, if  $d\bar{\rho}/dt$  is negative ( $M_s > 0$ ), the fluid at the loop is contracting and there is a fluid flow from the expansion tank to the loop. On the other side, if  $d\bar{\rho}/dt$  is positive there is a fluid flow from the loop to the expansion tank. The energy conservation equation (1) is also valid for the surge line nodes and reservoir nodes.

In natural circulation the driving force for the flow is the density variation. This force,  $g\xi$ , is a function of the temperature field. On the other side, the temperature field depend on the flow velocity and the structure temperatures. It is clear that equations (1), (5), (12) and (13) must be solved simultaneously.

## TWO-PHASE MODEL

As a first approach a simple homogeneous model was adopted. The idea of the homogeneous model is to replace the two-phase fluid by a one phase pseudo-fluid. The physical properties of the pseudo-fluid are estimated as an average of the liquid and vapor properties.

Considering both phases at the same velocity and in thermodynamic equilibrium, expression (13) gives the quality of the mixture.

$$x = \frac{h - h_L}{h_{LG}} \quad (13)$$

where  $h$  is the enthalpy of the two-phase mixture,  $h_L$  the enthalpy of the saturated liquid and  $h_{LG}$  the heat of vaporisation. The density is estimated by expression (14).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x}{\rho_v} + \frac{1-x}{\rho_L} \quad (14)$$

The void fraction and other properties as viscosity, specific heat and thermal conductivity are calculated by expressions (15) to (18)

$$\alpha = \frac{x\rho}{\rho_v} \quad (15)$$



$$\frac{1}{\mu} = \frac{x}{\mu_V} + \frac{1-x}{\mu_L} \quad (16)$$

$$cp = \alpha cp_V + (1-\alpha)cp_L \quad (17)$$

$$K = \alpha K_V + (1-\alpha)K_L \quad (18)$$

The second term on the right hand side of equation (5),  $-\frac{1}{2} \frac{M^2 R}{\rho}$ , represent the frictional pressure drop. R is called "Hydraulic Resistance" and is calculated by expression (8) as a function of the friction factor and the form losses. For a one-phase flow the friction factor is estimated by the Churchill correlation (Churchill, 1977) for laminar and turbulent flows. For a two-phase flow, a multiplier factor is used:

$$f = \phi_{LO}^2 f_{OP} \quad (19)$$

where  $f_{OP}$  is the one phase friction factor and  $\phi_{LO}^2$  is estimated by expression (20).

$$\phi_{LO}^2 = \left[ 1 + x \left( \frac{\rho_L - \rho_V}{\rho_V} \right) \right] \left[ 1 + x \left( \frac{\mu_L - \mu_V}{\mu_V} \right) \right]^{1/4} \quad (20)$$

The conservation equations involve certain thermodynamic properties of the fluid. In CIRNAT, these properties are estimated by the ASME formulation. The subroutines are those of the International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS).

### HEAT TRANSFER REGIMES

A wide range of heat transfer regimes may be encountered in a natural circulation system with phase change. The logic for selecting the heat transfer regimes is shown in Figure 2. Initially some numerical problems, related to a sudden variation of the heat transfer coefficients were detected. This problem was treated estimating, for a certain regime, the heat transfer coefficient with different correlations and taking the largest among them. The condensing regime has three correlations: laminar film condensation in inclined surfaces, film condensation in tubes with stratified flow and turbulent film condensation in tubes. For the one phase liquid or vapor different correlations are available, figure 3. The adimensional  $Gr/Re^2$  evaluates if the heat transfer regime is mainly a forced convection regime or a natural convection regime.

### GENERAL CODE STRUCTURE

CIRNAT was developed in FORTRAN77 for SUN workstations and PC computers using a structured philosophy of programming. Three programs constitutes the heart of the code:

PREPRO - is the pre-processor for the geometric and nodal description. The connectivity table and boundary conditions are automatically generated with a small number of instructions;

LOOP - is the integrator of the coupled algebro-differential equations. A semi-implicit procedure (Crank-Nicholson) was implemented with automatic adjustable time step to reduce time consuming;

INTIG - generates files for common use graphic programs.

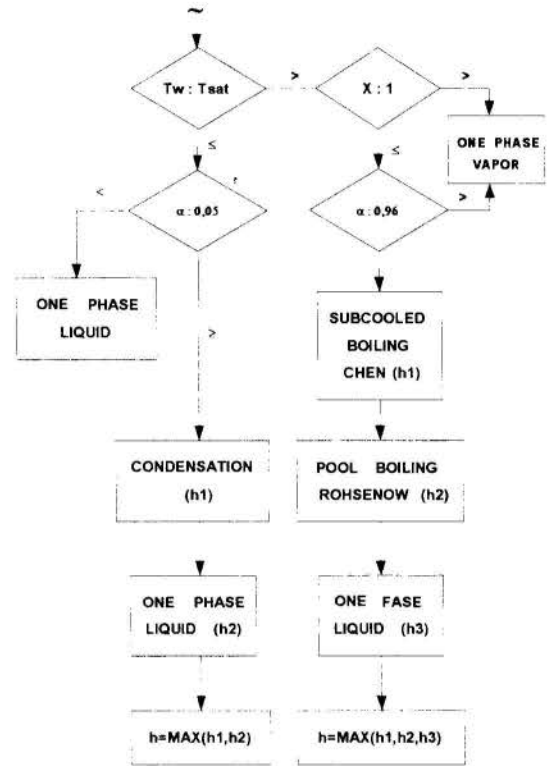


Figure 2 - Heat Transfer Regimes

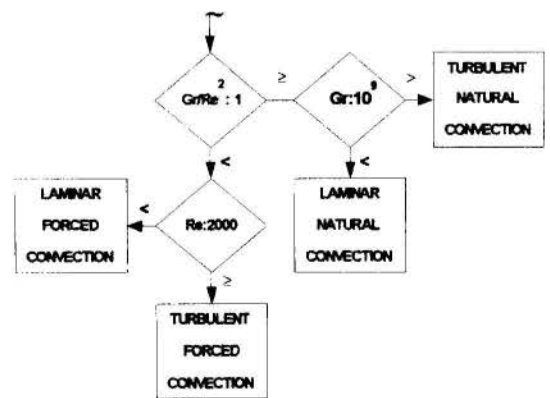


Figure 3 - One Phase Liquid or Vapor

To simulate a complex system like a multi loop nuclear reactor, different entities helps the geometric description:

Node - the smallest entity of a model. There are two kinds of nodes: fluid and solid. They are classified as "diffusive nodes", associated to the conservation equations, and "boundary nodes";

Bloc - is a group of nodes with a common geometric characteristic. There are solid and fluid blocs. This entity was created to reduce the number of instructions for the geometric description in the pre-processing phase;

Loop - is an opened or closed path for the fluid flow and it is formed by a series of fluid blocs;

Component - is a series of blocs (nodes) associated to special equations like a pressuriser or an expansion tank;

System - is formed by all loops and components of a model.

### ANALYSIS OF A BOILING/CONDENSING SYSTEM

To generate data for the code validation, a series of experiments were held at a boiling/condensing loop built in Pyrex. Since the interest is a parametrical analysis, a small rectangular glass loop was designed with an electrical heat source and a coil cooler. The main dimensions of the circuit are indicated in figure 4. The heater is a 75 mm cylindrical glass tube with two resistances. The power applied is controlled in the range of 0 to 7000 W. The cooler is all made in glass with 33 mm internal diameter, 610 mm high and 2 parallel coils. The coolant is tap water at ambient temperature. An expansion tank is connected to the loop at the horizontal section of the cold leg to prevent vapor entrainment.

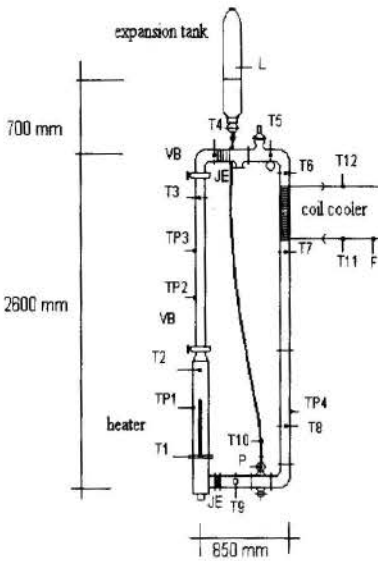


Figure 4 - Schematic View of the Loop

The experiment starts with the primary circuit filled with water at rest and the heater turned off. The fluid temperature is completely homogeneous and equal to the ambient temperature all along the loop. The heater is turned on with a constant heating power. The flow rate and the inlet temperature at the coil cooler are also kept constant. The nodal description of the system is presented in figure 5. The coil cooler was divided in 30 slices of the same size. Figure 6 shows the results for the hot and cold legs. At the beginning of the transient, from 0 to 1000 s, there is no phase change. For this part of the experiment, the model presents very good results for both temperatures. The hot leg temperature is very well

estimated and the cold leg is slightly overestimated. At the phase change region, the loop presents a very complex thermal-hydraulic behavior with sustained oscillations due to chugging instabilities observed at the heater. The model is not able to predict the cyclic behavior of the system but the variables are "macroscopically" well estimated. It seems that the pressure, which is constant at the model, play an important role in the prediction of the oscillations.

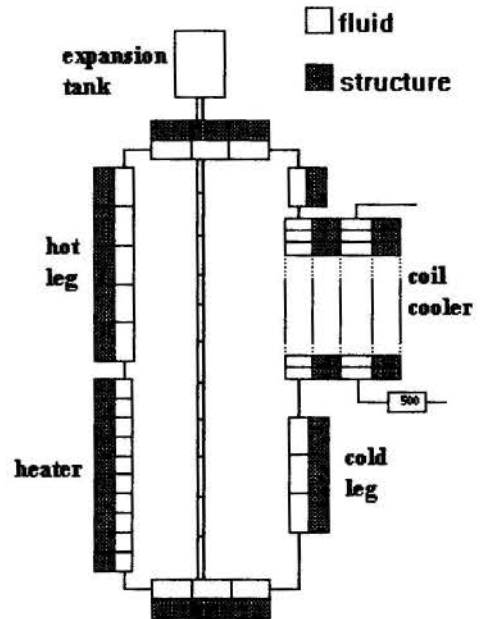


Figure 5 - Nodal Description of the Circuit

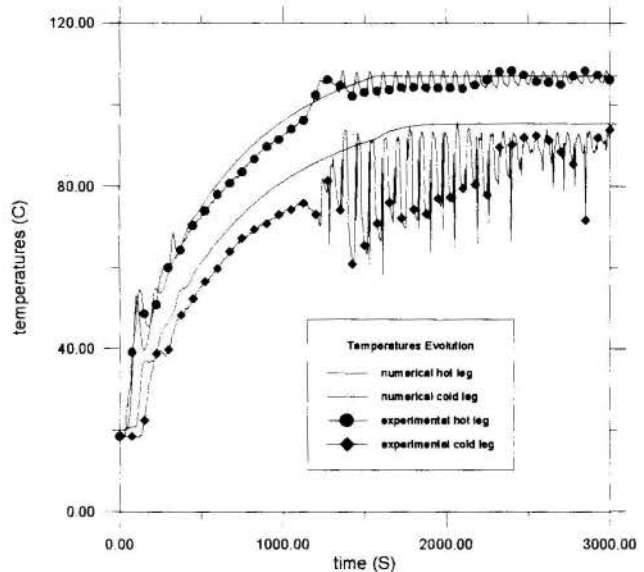


Figure 6 - Hot and Colg Leg Temperatures Evolution

### ANALYSIS OF THE IEA-RI RESEARCH REACTOR

In nuclear reactors, the understanding of natural circulation is one of the major steps in designing more reliable

systems to maintain the integrity of the core in accidental conditions. The reactor shall be conceived in such a way that natural circulation remains cooling the core, removing the residual heat generated by the decay products. The analysis presented here is a loss of flow accident for the IEA-R1 research reactor.

IEA-R1 is a pool nuclear research reactor built at IPEN in 1957. The analysis presented here is part of the project to increase the power of the reactor from 2 to 5 MW. The reactor core is an assembly of fuel and control elements. Figure 7 presents a typical control element with 12 fuel plates and 2 neutron absorber plates. In normal conditions, the refrigerant flows from top to bottom through the channels formed by the fuel plates, region C. All elements are fixed at a matrix plate which is connected to the primary pump by a natural convection valve, "header". This study postulates the loss of the pump energy supply and as a consequence the loss of the flow rate through the core. Figure 8 shows the time variation of the normalised flow rate obtained experimentally. Due to the inertial disk coupled to the rotor axis, the flow rate varies from its nominal value to 0.20 in 27 seconds. After that time, the header is decoupled and the fuel elements are no longer connected to the primary pump and tubes. At this stage the only way to refrigerate the fuel plates is by natural convection.

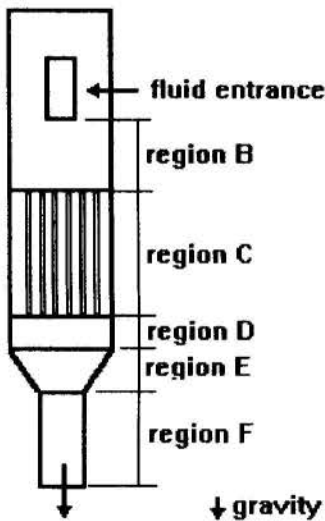


Figure 7 - Control Element Geometry

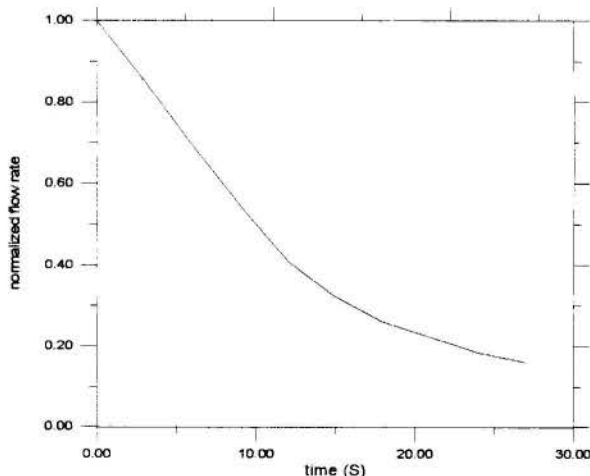


Figure 8 - Flow Rate Time Variation

Figure 9 presents the evolution of the heat flux generated by the decay of the fission products and figure 10 the nodal description of the control element. The fuel elements region is divided in 30 slices of the same dimensions. The notion of "equivalent nodes" was used to represent the 12 plates and 13 channels by a singular equivalent plate and channel.

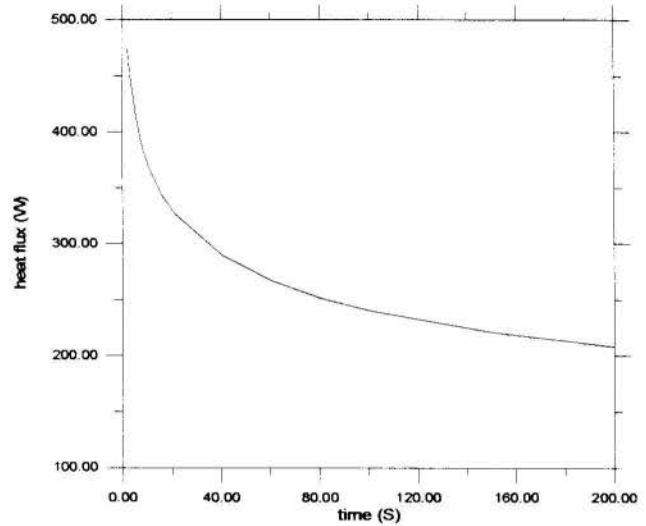


Figure 9- Decay Heat Flux Evolution

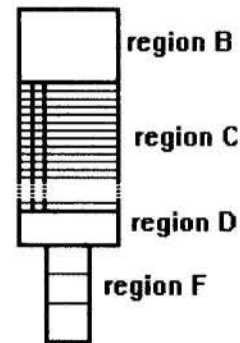


Figure 10 - Control Element Nodal Description

Figure 11 shows the temperatures and the mass flow rate evolution. The temperatures at the top and bottom of the control element is presented due to the flow reversal. The first part of the transient is a forced flow problem with a decreasing mass flow rate. It is observed that, at the beginning, the temperature at the bottom of the element increases but there is no phase change. At time  $t=27$  s, the header decouples the core from the primary circuit and a natural circulation regime starts. At  $t=30$  s there is a flow reversal and the temperature at the top of the element rises gradually to 57 C approximately. After 60 seconds temperature and mass flow rate are nearly in equilibrium.

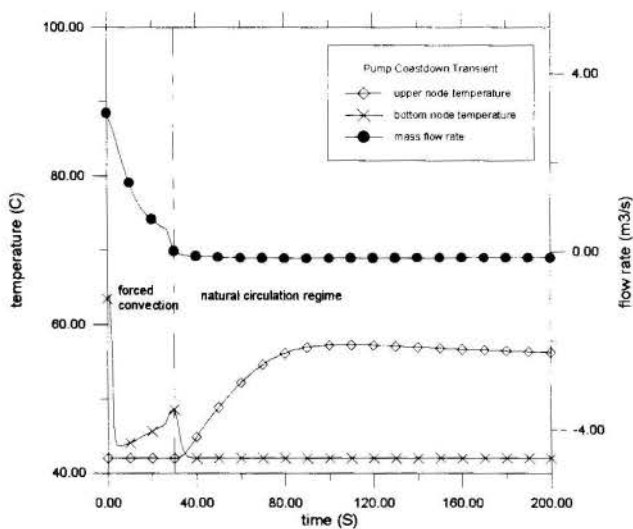


Figure 11 - Temperature and Mass Flow Rate Evolution

## CONCLUSION

CIRNAT, a one-dimensional code for natural circulation analysis, was described. The homogeneous approach was adopted for the two-phase flow regime and different heat transfer regimes were considered. The code was exhaustively tested for one-phase flow systems. For two phase flows a boiling/condensing system was simulated. The results are qualitatively correct but the oscillations observed at the system were not captured by the model. Other two-phase flow tests must be done to show the limits of the homogeneous approach before the introduction of a more complex model.

## REFERENCES

- Huang, B.; Zelaya, R., Heat Transfer Behavior of a Rectangular Thermosiphon Loop, *Journal of Heat Transfer*, May 1988, Vol. 110 p. 487-493.
- Zvirin, Y.; Jeuck III, P.R.; Sullivan, C.W., "Experimental and Analytical Investigation of a Natural Circulation System with Parallel Loops", *Journal of Heat Transfer*, 1981, Vol. 103 p. 645-652.
- Sang Yong Lee, 1990, "Thermally Induced Flow Oscillation in Vertical Two-Phase Natural Circulation Loop", *Nuclear Engineering Design*, 1990, 122, p. 119-132.
- Lavrador, M. B., et al., 1994, "Análise Transitória de um Circuito Fechado em Regime de Circulação Natural Monofásica", V Congresso Geral de Energia Nuclear, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 299-303.
- Bastos, J. L. F., Loureiro, L. V., 1993, "Experimental Transient Analysis of Natural Circulation in a Complex Geometry", *Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*, Honolulu, Hawaii, pp. 801-806.
- Churchill, S. W., 1977, "Friction Factor Equation Spans all Fluid Flow Regimes", *Chemical Engineering*, pp. 91-92.





## ANÁLISE DE CORRELAÇÕES DE FLUXO CRÍTICO DE CALOR PARA REATORES PWR COM BAIXO FLUXO DE MASSA

Pedro Carajilescov

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal Fluminense  
24210-240 Niterói, RJ



### SUMÁRIO

*O principal limite do projeto termohidráulico de reatores nucleares do tipo PWR consiste na ocorrência de fluxo crítico de calor, cuja verificação deste limite é efetuada através de correlações empíricas de largo espectro. No presente trabalho, as principais correlações de projeto, adotadas pelos projetistas, foram analisadas, através de comparações com dados experimentais, para utilização em reatores PWR com baixo fluxo de massa no núcleo. Os resultados obtidos demonstram que a correlação EPRI, sem modificações, fornece resultados conservadores, do ponto de vista de segurança, e com menor espalhamento dos dados observados, sendo, portanto, a mais indicada para o projeto térmico do reator.*

### INTRODUÇÃO

Um reator a água leve pressurizada (PWR - Pressurized Water Reactor) é um reator refrigerado a água, a qual é mantida sob elevada pressão para evitar a geração líquida de vapor à saída do núcleo. A Usina Nuclear Almirante Álvaro Alberto (Usina Angra I) é do tipo PWR, assim como são deste tipo as usinas incluídas no Acordo Nuclear Brasil-Alemanha (Angra II e Angra III), que se encontram em construção na Praia de Itaorna, em Angra dos Reis, RJ. Ainda, o reator sendo desenvolvido pelo CTM/SP, órgão ligado ao Ministério da Marinha do Brasil, para propulsão de um submarino, também será do tipo PWR.

Desta forma, pode-se observar que reatores deste tipo representam a opção brasileira para geração núcleo-elétrica.

O principal limite do projeto termohidráulico de reatores nucleares do tipo PWR consiste na ocorrência de fluxo crítico de calor (FCC), usualmente conhecido como DNB (Departure from Nucleate Boiling). A verificação deste limite é, usualmente, efetuada através de correlações empíricas e a Margem de Projeto, estabelecida pela Mínima Razão de DNB (MDNBR), é fortemente influenciada pela correlação de projeto adotada.

Objetivamente, deve-se garantir que, em quaisquer condições operacionais:

$$\frac{q''_{DNB}}{q''_{local}} > 1,0 \quad (1)$$

onde  $q''_{local}$  é o fluxo de calor local de operação e  $q''_{DNB}$  é o fluxo de calor que causaria uma crise de ebulição, nas condições locais do fluido. Considerando-se  $q''_{DNB,COR}$  como sendo a estimativa de  $q''_{DNB}$ , através de uma correlação empírica, deve-se impor:

$$DNBR = \frac{q''_{DNB,COR}}{q''_{local}} > \gamma > 1,0 \quad (2)$$

com o valor de  $\gamma$  dependente da qualidade da correlação empregada, na faixa de operação do reator, e do nível de segurança desejado.

Considere uma dada correlação empírica e sejam  $\mu$  e  $\sigma$ , respectivamente, o valor médio e o desvio padrão da razão entre os valores experimentais do fluxo crítico de calor, disponíveis na faixa de interesse do projeto, e aqueles fornecidos pela correlação.

Considerando-se as condições de operação em um dado local do reator, a relação entre o valor do fluxo crítico de calor que, efetivamente, poderia ocorrer e o valor previsto pela correlação adotada irá se situar na faixa:

$$\mu - n\sigma < \frac{q''_{DNB}}{q''_{DNB,COR}} < \mu + n\sigma \quad (3)$$

com  $n$  estabelecido pelo nível de confiança adotado no projeto.

Considerando-se a Eq. 3, o valor mínimo do DNBR, dado pela Eq. 2, sobre todo o núcleo do reator, deve obedecer a relação:

$$\text{Limite de MDNBR} > \frac{1}{\mu - n\sigma} \quad (4)$$

A questão de análise de fluxo crítico de calor em reatores do tipo PWR foi amplamente debatida por Tong (1967a).

As correlações empíricas são usualmente estabelecidas com base em dados experimentais, obtidos em seções de testes que procuram simular as condições geométricas e operacionais dos elementos combustíveis. Na literatura, pode-se encontrar um grande número de correlações empíricas. Tradicionalmente, no projeto de reatores PWR de grande porte, tem sido utilizada a correlação W-3 (Tong, 1967b) que, para um nível de confiança de 95%, adotado em projetos nucleares e correspondente a  $n=1.65$ , fornece

$$MDNBR > 1,30 \quad (5)$$

Este limite para o MDNBR tem sido utilizado, de forma generalizada, pelos projetistas nucleares, no país. Entretanto, trata-se de uma margem de segurança estabelecida para a correlação W-3. Outras correlações exigirão o estabelecimento de valores diferentes para o MDNBR.

Além da W-3, pode ser mencionada a correlação EPRI (Reddy and Fighetti, 1983), sendo esta última adotada na forma inicialmente concebida ou com a modificação sugerida por Pei et al. (1986), a qual será aqui chamada de EPRI\_MOD.

A utilização destas correlações exige o preciso conhecimento das condições térmicas e hidráulicas locais do refrigerante, nas condições operacionais do elemento combustível. A obtenção destas condições locais é, usualmente, feita através de programas

computacionais de projeto que utilizam a técnica conhecida como "análise de subcanais". Entre os programas adotados se encontram os programas da linha COBRA (Rowe, 1971 e Stewart et al, 1977), os quais tem sido adotados de forma generalizada, e os da linha THINC (Chelemer et al., 1967), de propriedade da Westinghouse.

Embora as correlações mencionadas sejam utilizadas para escoamento em feixes de varetas, tratam-se de correlações de largo espectro, isto é, estas correlações procuram abranger uma faixa larga de dados geométricos e operacionais, utilizados em experimentos em seções de testes. Assim sendo, os desvios-padrão, mencionados na literatura para estas correlações, foram estabelecidos para uma faixa bastante larga de condições operacionais e geométricas. Para faixas mais estreitas e particulares de condições de operação, tais desvios poderão ser maiores ou menores que os valores fornecidos. Além disso, a média da razão entre o FCC experimental e o FCC fornecido pela correlação pode não ser a unidade. Desta forma, ao se desenvolver um projeto específico de reator, torna-se necessário verificar a aplicabilidade delas para faixas estreitas e específicas de parâmetros de interesse. Esta verificação está vinculada à comparação de suas predições, obtidas com o programa de subcanais adotado para o projeto, com o maior volume possível de corridas experimentais, na faixa de dados geométricos e operacionais para os quais elas se destinam.

Utilizando-se os dados experimentais referentes a reatores do tipo PWR, disponíveis em Reddy and Fighetti (1982), foi desenvolvido um banco de dados (Carajilescov et al, 1994a,b) e um sistema de análise de FCC, conforme descrito em Carajilescov et al, (1994c), com o objetivo de facilitar a tarefa do usuário, tendo em vista que a validação de uma dada correlação de FCC envolve diversas atividades tediosas. Tabela 1 apresenta dados gerais sobre as informações contidas no Banco de Dados.

TABELA 1. Informações gerais sobre o Banco de Dados

PARÂMETROS	TOTAL
Fabricantes	7
Tipos de seções transversais, STRAD	19
Tipos de aquecimento axial, STAXI	16
Número de seções de testes	210
Número de corridas	10790

Tabela 2 apresenta a faixa de valores dos parâmetros geométricos e operacionais referentes aos ensaios tabelados no Banco de Dados.

TABELA 2. Faixa de valores dos parâmetros

PARÂMETRO	VALOR MÍNIMO	VALOR MÁXIMO
Diâmetro das varetas, mm	8,81	14,30
Passo do feixe, mm	12,60	18,75
Comprimento aquecido, m	0,76	4,27
Fluxo de massa, kg/s/m <sup>2</sup>	34	6046
Pressão, MPa	1,3	17,0
Temperatura de entrada, °C	10	342

O número de corridas em função do fluxo de massa da água, para todo o conjunto de dados, é apresentado na Figura 1. Desta figura, pode-se observar que o número de pontos experimentais, disponível para se validar uma correlação de FCC, para reatores PWR com fluxo de massa no núcleo abaixo de 800 kg/s/m<sup>2</sup> (0,58 Mlbm/hr/ft<sup>2</sup>), do tipo sendo desenvolvido no país, é reduzido comparado com o número total de pontos utilizado no

estabelecimento das correlações de largo espectro, como, por exemplo, a correlação EPRI.

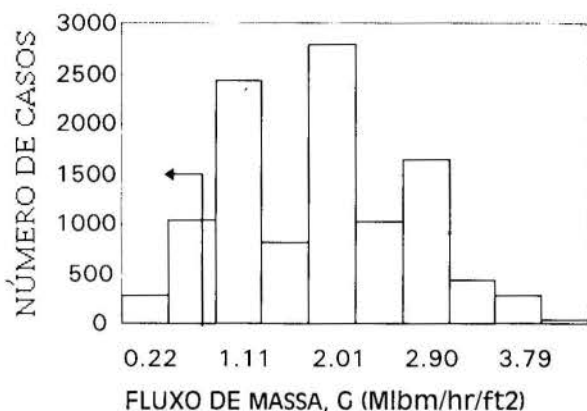


Figura 1. Histograma do número de corridas em função do fluxo de massa (1 Mlbm/hr/ft<sup>2</sup>=1356 kg/s/m<sup>2</sup>)

O presente trabalho consiste, inicialmente, na seleção de dados experimentais, disponíveis no Banco de Dados desenvolvido, em uma faixa de valores operacionais típicos de reatores PWR de baixo fluxo de massa. As condições geométricas e operacionais dos casos selecionados são utilizadas para a simulação do fluxo crítico de calor, utilizando o programa COBRA-IV-I, considerando-se as correlações W-3, EPRI e EPRI\_MOD. Finalmente, é feita uma comparação entre os dados experimentais e o valores previstos pelas diversas correlações.

#### ANÁLISE DOS CASOS

Tabela 3 apresenta a faixa de valores de parâmetros geométricos e operacionais em torno de dos parâmetros nominais típicos do reator considerado.

TABELA 3. Faixas típicas de parâmetros do reator considerado

PARÂMETROS	MÍNIMO	MÁXIMO
Diâmetro da vareta, mm	8,81	14,30
Passo entre as varetas, mm	12,60	18,75
Pressão, MPa	1,3	17,0
Fluxo de massa, kg/s/m <sup>2</sup>	34	950
Temperatura de entrada, °C	150	342

Com exceção das faixas de valores para fluxo de massa e temperatura de entrada do refrigerante, os demais parâmetros representam todos os valores disponíveis no Banco de Dados.

Para estas condições, foram obtidos os casos apresentados na Tabela 4.

TABELA 4. Casos selecionados para análise.

Tipos de casos	Número de corridas	Observações
a	532	Aquecimento uniforme, sem parede fria
b	65	Aquecimento uniforme, com parede fria
c	15	Aquecimento não uniforme, sem parede fria

**Caso a:** Aquecimento uniforme, sem parede fria

Os resultados da análise com as correlações são apresentados nas Figs. 2, 3 e 4, comparados com os valores experimentais do fluxo crítico de calor.

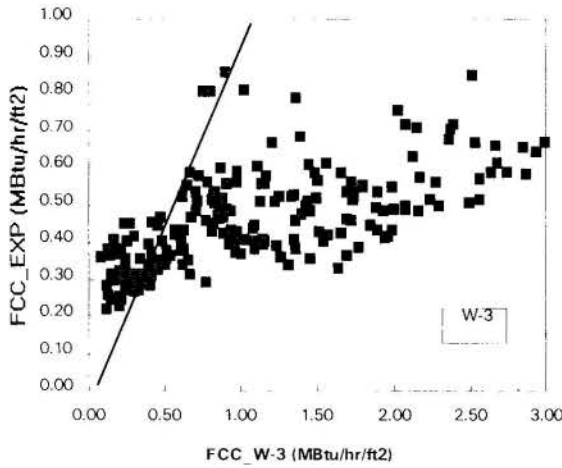


Figura 2. Comparação entre dados teóricos e experimentais. (1 MBtu/hr/ft<sup>2</sup> = 315 w/cm<sup>2</sup>)

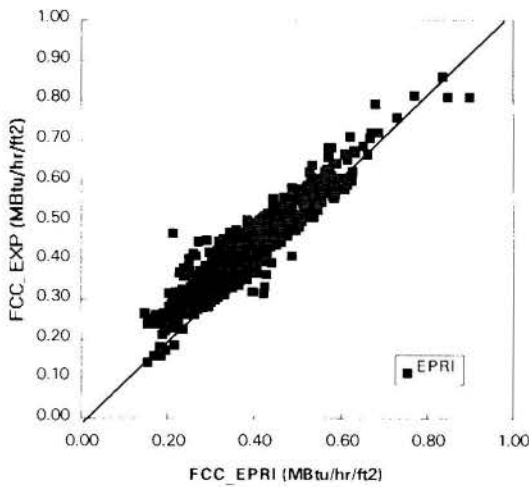


Figura 3. Comparação entre dados teóricos e experimentais.

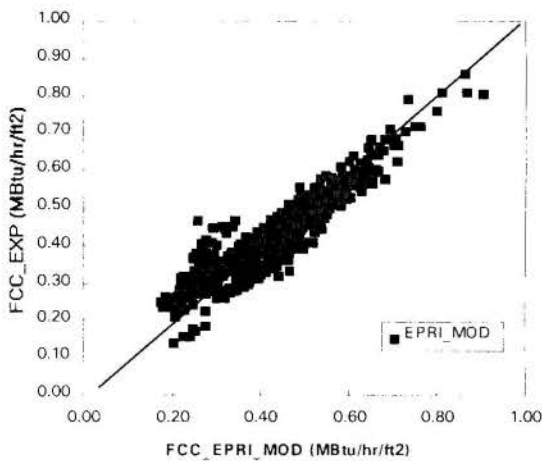


Figura 4. Comparação entre dados teóricos e experimentais.

Destas figuras, pode-se observar que:

- nas condições operacionais de fluxo de massa e temperatura de entrada, no local de ocorrência de FCC, o título termodinâmico local será, geralmente, elevado, fazendo com que a correlação W-3 não seja apropriada. Esta situação pode ser observada com clareza na Fig. 5, onde se verifica que a correlação W-3 fornece resultados razoáveis para baixos valores do título local, com os resultados se tornando cada vez mais discrepantes à medida que o título local vai aumentando;
- para muitos dos casos selecionados, a correlação W-3 forneceu valores absurdos, os quais foram descartados;
- as correlações EPRI e EPRI\_MOD fornecem resultados satisfatórios para a faixa de parâmetros selecionada, com a correlação EPRI gerando resultados ligeiramente mais conservadores do que a versão modificada.

Com base nas observações do desempenho inadequado da correlação W-3, a mesma não foi utilizada na análise dos demais casos (b e c) considerados.

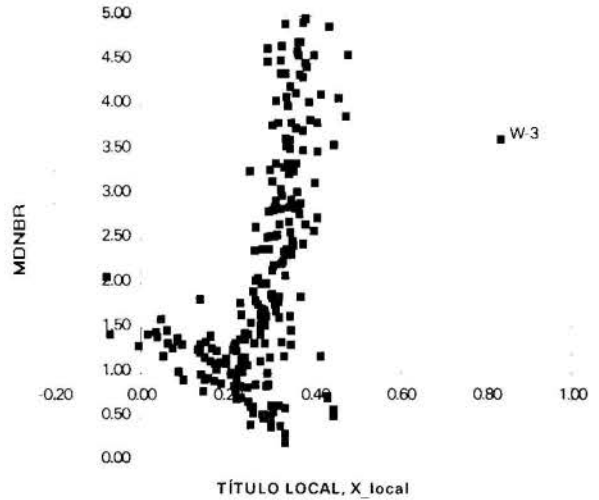


Figura 5. Influência do título local no MDNBR fornecido pela correlação W-3.

A modificação da correlação EPRI, sugerida por Pei et al (1986), implica na divisão do MDNBR, dado pela correlação original, pelo fator

$$F_x = 1,0305 - 0,3647 X_i \tag{6}$$

o qual leva em consideração o efeito do título local,  $X_i$ , no MDNBR. Na faixa dos parâmetros considerada, esta dependência do MDNBR, dado pela correlação EPRI, com o título local não foi observada claramente, conforme pode ser observado na Fig. 6. Por outro lado, pode-se observar que esta modificação faz com que a média da razão entre os valores experimentais e os valores teóricos se aproxime da unidade, embora com um ligeiro aumento no desvio padrão do espalhamento dos dados, conforme mostrado na Tabela 5.

TABELA 5. Parâmetros estatísticos da razão  $q''_{DNB,EXP}/q''_{DNB,COR}$  para aquecimento uniforme, sem varetas frias.

Correlação	No.Pontos	Média	Desvio Padrão
EPRI	532	1,131	0,149
EPRI MOD	532	1,005	0,153

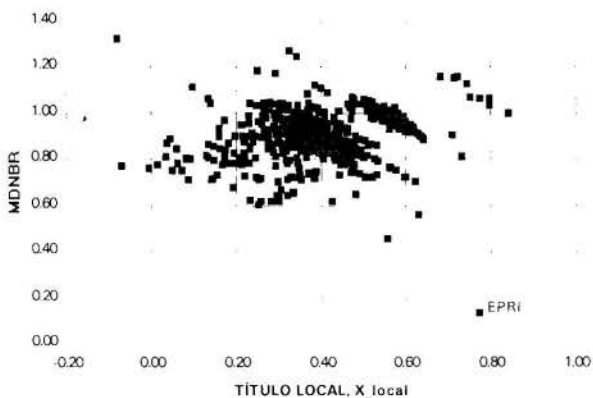


Figura 6. Influência do título local no MDNBR dado pela correlação EPRI.

Observou-se, também, a influência do fluxo de massa no MDNBR, mostrada na Fig. 7. Verifica-se que o aumento do fluxo de massa tende a fazer com que a correlação EPRI gere menores valores do MDNBR. No entanto, o reduzido número de pontos experimentais, para baixos valores do fluxo de massa, impede a correta consideração desta influência. Por outro lado, foi observado que a modificação de Pei faz com que estas distorções tendam a se agravar.

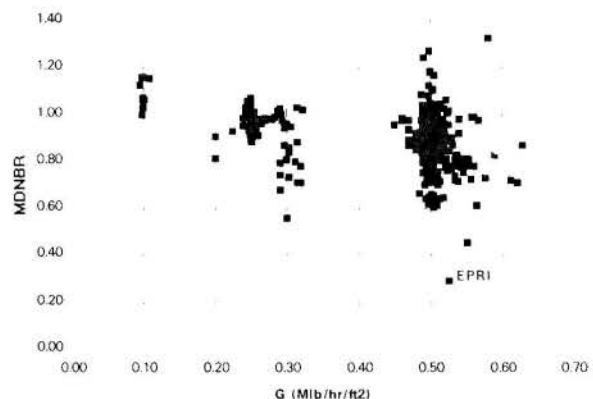


Figura 7. Influência do fluxo de massa no MDNBR.

**Caso b:** Aquecimento uniforme, com a presença de varetas frias

Os resultados são apresentados na Fig. 8. Neste caso, pode-se observar que os valores de fluxo crítico de calor, fornecidos pelas correlações EPRI e EPRI\_MOD são, de forma geral, superiores que os valores experimentais observados. Os parâmetros estatísticos desta comparação são mostrados na Tabela 6.

TABELA 6. Parâmetros estatísticos da razão  $q''_{DNB,EXP}/q''_{DNB,COR}$  para aquecimento uniforme, com varetas frias.

Correlação	No.Pontos	Média	Desvio Padrão
EPRI	65	1,370	0,195
EPRI MOD	65	1,283	0,203

Estes resultados demonstram que o “Fator de Parede Fria”, utilizado nestas correlações para corrigir o efeito provocado pela presença de varetas sem aquecimento elétrico, nas seções de testes utilizadas nos ensaios, não corrige adequadamente o valor do fluxo crítico de calor, na faixa de parâmetros considerada.

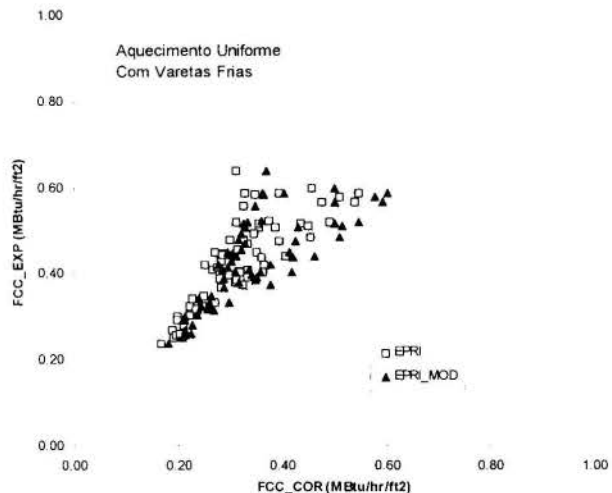


Figura 8. Comparação entre dados teóricos e experimentais.

**Caso c:** Aquecimento não uniforme, sem varetas frias

O número de corridas experimentais, existente no Banco de Dados, é extremamente reduzido para este caso. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 9.

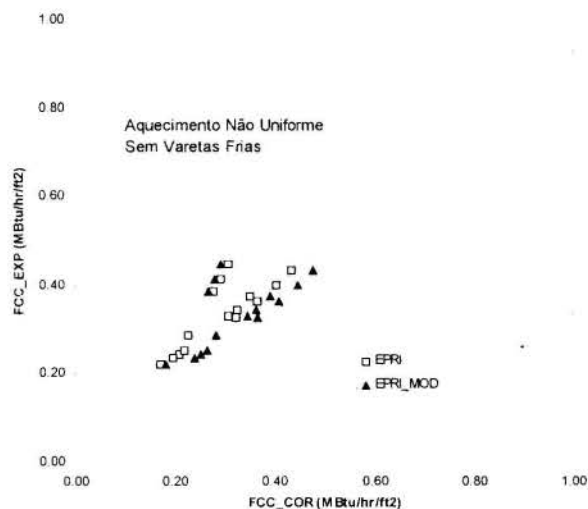


Figura 9. Comparação entre dados teóricos e experimentais.

Os parâmetros estatísticos desta comparação são mostrados na Tabela 7.

TABELA 7. Parâmetros estatísticos da razão  $q''_{DNB,EXP}/q''_{DNB,COR}$  para aquecimento não uniforme, sem varetas frias.

Correlação	No.Pontos	Média	Desvio Padrão
EPRI	15	1,160	0,160
EPRI MOD	15	1,062	0,228

Observe que não houve alterações sensível na média e no desvio padrão observados no caso de aquecimento uniforme, demonstrando que o “Fator de Aquecimento Não-Uniforme”, utilizado nas correlações, tende a corrigir o fluxo crítico de calor, adequadamente, para este efeito.

Tabela 8 apresenta os parâmetros estatísticos do espalhamento dos dados experimentais, em relação aos valores teóricos, fornecidos pelas correlações, considerando-se todos os pontos experimentais disponíveis, envolvendo os casos a, b e c.



TABELA 8. Parâmetros estatísticos da razão  $q''_{DNB,EXP}/q''_{DNB,COR}$  para todos os casos analisados.

Correlação	No.Pontos	Média	Desvio Padrão	Limite de MDNBR
EPRI	612	1,157	0,171	1,143
EPRI_MOD	612	1,036	0,182	1,359

Os resultados apresentados demonstram que, na faixa de parâmetros analisada, a correlação EPRI fornece valores conservadores para o fluxo crítico de calor, isto é, os valores fornecidos pela correlação são, de maneira geral, menores do que aqueles observados nos experimentos. No entanto, apesar deste desvio sistemático da média, o desvio padrão do espalhamento dos dados experimentais é menor do que aquele fornecido pela correlação EPRI\_MOD. Este fato fica mais evidente se os valores da razão  $q''_{DNB,EXP}/q''_{DNB,COR}$  forem normalizados para que sua média seja unitária, o que corresponde a se introduzir um fator multiplicativo nas correlações EPRI e EPRI\_MOD equivalentes às médias observadas. Neste caso, o desvio padrão, apresentado pela correlação EPRI, será igual a 0,148, enquanto a correlação EPRI\_MOD fornecerá um desvio padrão de 0,176. Ainda, utilizando-se as correlações com os fatores mencionados, os limites de MDNBR serão iguais a 1,323 e 1,409, respectivamente.

#### CONCLUSÕES

Considerando-se a análise de fluxo crítico de calor, efetuada para os casos de reatores PWR com baixo fluxo de massa no núcleo, envolvendo seções de testes com aquecimento uniforme, sem e com a presença de varetas frias, foram obtidas as seguintes conclusões:

- para a obtenção de fluxo crítico de calor, na maioria dos casos experimentais, tomou-se necessária a utilização de título termodinâmico local do escoamento elevado, sendo acima da faixa de validade da correlação W-3;
- com tais títulos termodinâmicos elevados, a correlação W-3 se mostrou inadequada para a utilização no projeto termohidráulico deste tipo de reator;
- a razão  $q''_{DNB,EXP}/q''_{DNB,COR}$  fornecida pela correlação EPRI, apresentou menor espalhamento dos dados, embora seu valor médio tenha apresentado um desvio em relação à unidade;
- a correção de Pei et al., para a correlação EPRI, gerando a correlação EPRI\_MOD, corrige o desvio do valor médio da razão  $q''_{DNB,EXP}/q''_{DNB,COR}$ , porém provoca um aumento do espalhamento, estabelecido através do valor do desvio padrão;
- o fator de correção para aquecimento não uniforme das varetas, na correlação EPRI, não provoca alterações sensíveis nas simulações, tanto no valor médio, quanto no desvio padrão.

Finalmente, convém salientar que o limite de MDNBR apresentado não representa o MDNBR de projeto, a ser utilizado pelo projetista. Para o estabelecimento do MDNBR de projeto, deve-se levar em consideração as incertezas associadas com a obtenção do valor local nominal do fluxo crítico de calor.

#### AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado como parte do Projeto FCC, Contrato No. 752/91-113/02, entre a Fundação Padre Leonel Franca e o Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo. O autor agradece o apoio concedido.

#### REFERÊNCIAS

Carajilescov, P. et al., 1994a, "Banco de dados de fluxo crítico de calor", Relatório Final, Projeto FCC, COPESP.

Carajilescov, P. et al., 1994b, "Compilação de dados experimentais de fluxo crítico de calor", Relatório Final, Projeto FCC, Vol. 1, 2 e 3, COPESP.

Carajilescov, P. et al., 1994c, "Descrição do sistema de análise de fluxo crítico de calor", Relatório Final, Projeto FCC, COPESP.

Carajilescov, P., 1994d, "Análise de correlações de fluxo crítico de calor para o reator INAP-11", Relatório Final, Projeto FCC, COPESP.

Chelemer, H. et al., 1967, "Subchannel thermal analysis of rod bundle core", Report WCAP-7015, Rev. 1.

Pei, B.S. et al., 1986, "Evaluations and modifications of the EPRI-1 correlation on PWR critical heat flux predictions under normal and abnormal fuel conditions", Nuclear Technology, V.75, pp.134-147.

Reddy, D.G. and Fighetti, C.F., 1982, "Parametric study of CHF data-Vol.3: Critical heat flux data", Report EPRI NP-2609, Vol.3.

Reddy, D.G. and Fighetti, C.F., 1983, "Parametric study of CHF data-Vol.2: A generalized subchannel CHF correlation for PWR and BWR fuel assemblies", Report EPRI NP-2609, Vol.2.

Rowe, D.S., 1971, "COBRA-III: A digital computer program for steady state and transient thermal-hydraulic analysis of rod bundle fuel elements", Report BNWL-B-82, Battelle.

Stewart, C.W. et al., 1977, "COBRA-IV: The model and the method", Report BNWL-2214, Battelle.

Tong, L.S., 1967a, "Prediction of departure from nucleate boiling for an axially non-uniform heat flux distribution", J.Nucl.Energy, V.21, pp. 241-248.

Tong, L.S., 1967b, "Heat transfer in water-cooled nuclear reactors", Nuclear Eng.Des., V.6, pp.301-324.

#### SUMMARY

*The major limit in the thermalhydraulic design of water cooled reactors consists in the occurrence of critical heat flux, which is verified by correlation of large range of validity. In the present work, the major design correlations were analyzed, through comparisons with experimental data, for utilization in PWR with low mass flux in the core. The results show that the EPRI correlation, with modifications, gives conservative results, from the safety point of view, with lower data spreading, being the most indicated for the reactor thermal design.*



**INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE APPLIED TO THE IDENTIFICATION OF SOLID'S THERMAL DIFFUSIVITY**



**Zaqueu Ernesto da Silva<sup>†</sup>**  
**Martin Raynaud**  
**Michel Laurent**  
 Cethyl-ESA CNRS 5008 - INSA de LYON  
 69621 Villeurbanne - FRANCE

*Summary*

*The integral transform technique is used to calculate the temperature field in a one dimensional slab subjected to time varying boundary conditions. Then a least squares procedure is used to estimate the thermal diffusivity from internal temperature variations. This methodology is applied to experimental data. The results show the feasibility of such an approach to determine thermal diffusivity of solid.*

NOMENCLATURE

$f_i$	functional temperature
$L$	length, m
$M$	number time step
$N$	number of measurements
$T$	temperature, K
$T_0$	initial temperature, K
$T_{max}$	maximal temperature, K
$t$	dimensional time, s
$t_{max}$	dimensional maximal time, s
$x$	dimensional coordinate, m

Symbol Greek

$a$	thermal diffusivity, $m/s^2$
$a^*$	dimensionless thermal diffusivity
$q$	dimensionless temperature

Superscripts

*	dimensionless variables
'	order for the derivative

Subscript

$j$	measurement location
$k$	current time step

**INTRODUCTION**

The increasing used of numerical methods to predict the thermal behavior of systems necessitate the knowledge of many thermal parameters. Among these, the thermal diffusivity of solids is one of the most frequently needed. Consequently, there are many works devoted to the direct measurements or to the development of inverse methods to determine thermal diffusivity. For example, Polezhaev and Narozhnyi (1973), Omelchenko and Pchelkina (1975), Serra and al. (1983), Degiovanni and Laurent (1986), Amazouz and al. (1987), Raynaud and al. (1989) and Tervola (1989) have all used different techniques.

This work concerns the identification of the thermal diffusivity of an opaque homogenous isotropic solid. The method is developed first, then the experimental set-up used to validate the identification process is described and the results of the identification are discussed.

ANALYSIS

The case of a one dimensional transient regime is considered. It is supposed that a minimum of three temperature histories,  $f_i(t)$ , are known at different locations within the slab,  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  as shown figure 1. The heat propagation process is governed by the linear heat diffusion equation in the one dimensional  $x$  coordinate system :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{in } 0 \leq x \leq L, t > 0 \quad (1)$$

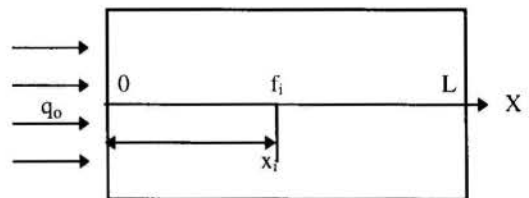


Figure 1.

The initial and boundary conditions necessary to solve equation (1) should be known. The temperature histories measured at  $x_1$  and  $x_n$  can be used as boundary conditions unless the temperature on the real boundaries are known. We assume that the temperature in the slab is initially constant :

$$T(x,0) = T_0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (2)$$

and we use the measured temperatures at  $x_1$  and  $x_n$  as boundary conditions :

$$T(x_1,t) = f_1(t) \quad (3)$$

<sup>†</sup> UFPB/LES/DTM

$$T(x_n, t) = f_n(t)$$

The following dimensionless variables are introduced :

$$\alpha^* = \frac{L^2}{t_{\max}}, \quad (5)$$

$$\alpha^+ = \frac{\alpha^*}{\alpha}, \quad (6)$$

$$t^* = \frac{\alpha^* t}{L^2} = \frac{t}{t_{\max}}, \quad (7)$$

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad (8)$$

$$\theta = \frac{T(x, t) - T_0}{T_{\max} - T_0}, \quad (9)$$

$$f_1^*(0, t^*) = \frac{f_1(x_1, t) - T_0}{T_{\max} - T_0}, \quad (10)$$

$$f_n^*(1, t^*) = \frac{f_n(x_n, t) - T_0}{T_{\max} - T_0}, \quad (11)$$

note that  $0 \leq t^* \leq 1$ . This will be useful later for fitting the  $f_1^*$  and  $f_n^*$  function by a 4th order polynomial. In dimensionless form the equations 1 to 4 are now :

$$\frac{\partial^2 \theta(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} = \alpha^+ \frac{\partial \theta(x^*, t^*)}{\partial t^*} \quad \text{in } 0 \leq x^* \leq 1, t^* > 0 \quad (12)$$

initial condition

$$\theta(x^*, 0) = 0 \quad 0 \leq x^* \leq 1 \quad (13)$$

boundary conditions :

$$\theta(0, t^*) = f_1^*(t^*) \quad (14)$$

$$\theta(1, t^*) = f_n^*(t^*) \quad (15)$$

then the solution is splitted into a fictitious steady-state problem for  $\theta_s(x^*, t^*)$  :

$$\frac{\partial^2 \theta_s(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} = 0 \quad 0 \leq x^* \leq 1 \quad (16)$$

boundary conditions :

$$\theta_s(0, t^*) = f_1^*(t^*) \quad (17)$$

$$\theta_s(1, t^*) = f_n^*(t^*) \quad (18)$$

and to a homogeneous problem for  $\theta_h(x^*, t^*)$  given by

$$\frac{\partial^2 \theta_h(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} = \alpha^+ \frac{\partial \theta_h(x^*, t^*)}{\partial t^*} + \theta_s(x^*, t^*) \quad (19)$$

$$\text{in } 0 \leq x^* \leq 1, t^* > 0$$

with the initial condition :

$$\theta_h(x^*, 0) = 0 \quad 0 \leq x^* \leq 1 \quad (20)$$

and with the following boundary conditions :

$$\theta_h(0, t^*) = 0 \quad (21)$$

$$\theta_h(1, t^*) = 0 \quad (22)$$

then, the solution for the original problem (12 - 15) is determined from:

$$\theta(x^*, t^*) = \theta_s(x^*, t^*) + \theta_h(x^*, t^*) \quad (23)$$

The solution of the fictitious steady-state problem (16 - 18) is given by Incropera and Witt (1981) :

$$\theta_s(x^*, t^*) = f_1^*(t^*) + [f_n^*(t^*) - f_1^*(t^*)] x^* \quad (24)$$

The procedures of the integral transform technique described by Özisik and Mikhailov (1984) are used in the solution of the homogeneous problem (19 - 22), thus, we have :

$$\begin{aligned} \theta_h(x^*, t^*) = & 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x^*)}{m\pi} \int_0^{t^*} (-1)^j e^{-\frac{(m\pi)^2}{\alpha^+}(t-t^*)} f_n^*(t) dt \\ & - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j\pi x^*)}{j\pi} \int_0^{t^*} e^{-\frac{(j\pi)^2}{\alpha^+}(t-t^*)} f_1^*(t) dt \end{aligned} \quad (25)$$

The solution  $\theta(x^*, t^*)$  of the original problem is obtained by introducing equations (25) and (24) into equation (23). We find:

$$\begin{aligned} \theta(x^*, t^*) = & f_1^*(t^*) + [f_n^*(t^*) - f_1^*(t^*)] x^* + \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j\pi x^*)}{j\pi} \int_0^{t^*} (-1)^j e^{-\frac{(j\pi)^2}{\alpha^+}(t-t^*)} f_n^*(t) dt \\ & - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j\pi x^*)}{j\pi} \int_0^{t^*} e^{-\frac{(j\pi)^2}{\alpha^+}(t-t^*)} f_1^*(t) dt \end{aligned} \quad (26)$$

This solution satisfies the boundary condition functions  $f_1(t^*)$  and  $f_n(t^*)$  at  $x^*=0$  and  $x^*=1$ , respectively.

$\theta_s(x^*, t^*)$  is called fictitious steady-state since it does not correspond to a real steady-state problem. It is only the solution of the steady-state heat diffusion equation at a particular time  $t^*$ , i.e., when the temperatures at  $x_1$  and  $x_n$  have particular values. This splitting technique is used rather than applying the integral transform technique directly to Eq. 12 (Iordanov, 1984), since it leads to a solution (Eq. 26) which involves series that always converge well.

However, in order to calculate the temperature distribution from Eq. 26, analytical expression of the two boundary condition histories are needed. The function  $f_1^*$  and  $f_n^*$  must be continuous since their derivatives are involved in Eq. 26. Moreover, the two integrals are calculated by parts which necessitate the knowledge of higher order derivatives. Practically, the number of integration by part is done until the highest non continuous derivative is reached. In our case, a 4th order polynomial is used to fit the experimental data.

The equation above allows to calculate the temperature within the slab at any time. It is evidently a function of the solid's thermal diffusivity. The identification problem is then solved by minimizing the difference over the whole time domain between the measured temperature at several internal points and the calculated temperature at the same points. Herein, the least square procedure is used :

$$\sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=1}^M [\theta_{jk} - \theta(\alpha^+)]^2 = 0 \quad (27)$$

where  $\theta(\alpha^+)$  is the calculated temperature at the same location and time than the measured ones. The calculation of the derivative used to find the minimum of Eq. (27) leads to a transcendental equation and the bisection method is used to find the roots.

#### EXPERIMENTAL SET-UP

The experimental set-up has been designed to obtain a one-dimensional heat transfer. The sketch of the set-up is shown figure 2. It consists of a parallelepipedic specimen made of PMMA. Its thickness,  $E=15.01$  mm, is small compared with the other dimensions (140 x 140 mm). The specimen is placed between two brass plates whose temperatures are regulated by two circulation of water. A heat-guard also made of PMMA surrounds the specimen but there is a 2 mm thick air layer between the specimen and the guard to minimize the circumferential heat losses. With such a guard and the thickness to width ratio, the heat transfer is one-dimensional within the specimen thickness.

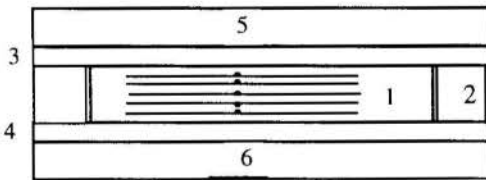


Figure 2 - Experimental set-up

(1 - specimen, 2 - guard, 3 and 4 - brass plate, 5 and 6 - controlled flow of water).

Five 0.08 mm in diameter chromel-alumel thermocouples have been placed within the specimen at 2.49, 4.75, 7.41, 9.79 and 12.52 mm from the top surface. These thermocouples have been stretched in a polyethylene mold where the PMMA has been poured. The contact between the thermocouple and the PMMA is after polymerization very good. The thermal resistance can be neglected. Moreover, the perturbation of the thermocouples on the heat transfer distribution within the specimen is negligible since they are very thin and placed as shown figure 3. The sensor locations were measured after polymerization with an enlarged X-ray photography. The uncertainty on the thermocouple location is 0.1 mm. Every thermocouple was calibrated over the temperature range of the

experiments. A Keithley 705 multiplexer and a Keithley 181 nanovoltmeter (resolution 0.1 mV on the 20 mV range) connected to a PC are used to record the thermocouple signals.

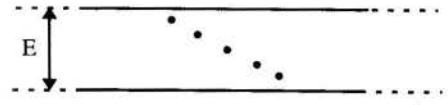


Figure 3 - The sensor locations.

#### EXPERIMENTAL RESULTS

The experiment starts at steady state when the specimen temperature is uniform, i.e., the temperatures of the two water flow do not differ more than 0.2 K. Then the water temperatures are varied and the temperature are recorded every 10 s. The temperature histories at the five thermocouple locations are shown figure 4. The quality of the measurements is excellent since the noise is less than 0.4 mV, i.e., less than 0.01 K.

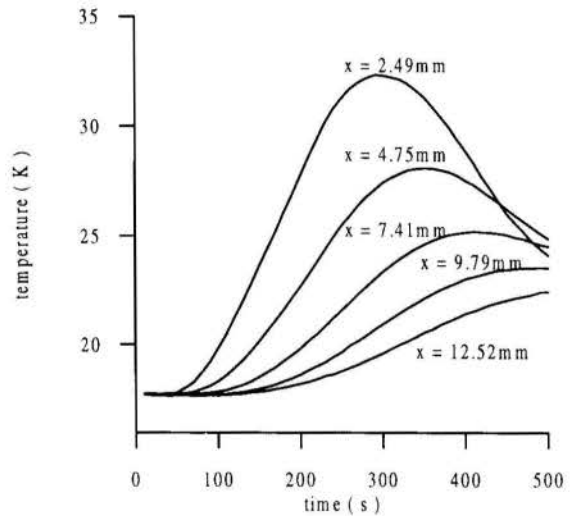


Figure 4 : Measured temperatures.

The fitting procedure is done on the dimensionless variables. Since it was difficult to fit with a good accuracy the temperature history of the last thermocouple (because the temperature is constant for  $0 < t < 120$  s) the thermocouple at  $x= 2.49$  and  $x= 9.79$  mm are used as boundary conditions. Then with the notation used in this paper,  $n=4$ ,  $x_1= 0.0$ ,  $x_2= 2.26$ ,  $x_3= 4.92$  and  $x_4=7.30$  mm. Similarly, the first five time measurements which correspond to steady state are not used to estimate the thermal diffusivity. This is in fact not important at all since these measurements do not contain any information on the thermal diffusivity (the temperature is constant). The time domain of interest is  $5 < t < 500$  s. Thus there are  $2 \times 45$  measurements to estimate the thermal diffusivity. The ratio of number of measurements to number of parameter to be identified is thus 90, which large enough to justify the use of a least square procedure. Figure 5 shows in dimensionless form, the temperature variations at  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  and  $x_4$ , and the two polynomials used to fit the temperature variations at  $x_1$  and  $x_4$ .



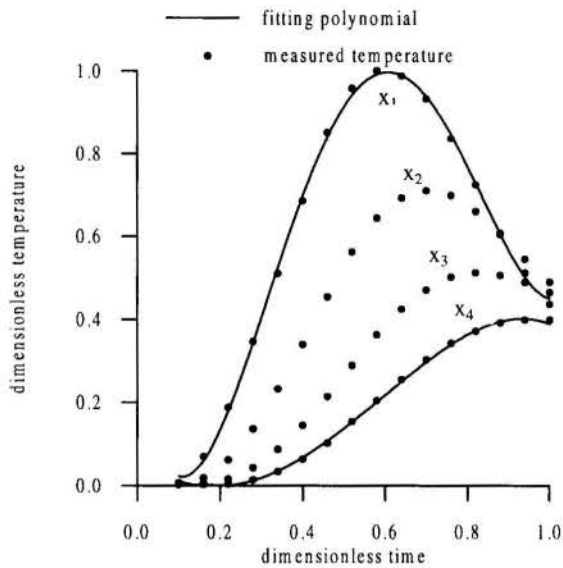


Figure 5 : Dimensionless temperature histories.

The results of the identification are summarized table 1. Three cases have been tested. In the first one, only temperature history measured at  $x_2$  is used to determine the thermal diffusivity. In the second one, this is the temperature at  $x_3$  which is used and in the third one, both temperature measurements are used. The results are in good agreement since there is a 1.7% difference between the values estimated by cases 1 and 2. Nevertheless, it is important to examine the residuals, i.e., the difference between the measured temperature and the temperature calculated with the model. These residuals are shown figure 6 for case 3. Ideally, the residual should oscillate around zero and should not be correlated. This is not the case here which indicate that the thermal analytical model does not correspond exactly to the reality.

Table 1 : Estimation of the thermal diffusivity.

case	1	2	3
thermal diffusivity ( $m^2/s$ )	$0.1634 \cdot 10^{-6}$	$0.1662 \cdot 10^{-6}$	$0.1643 \cdot 10^{-6}$

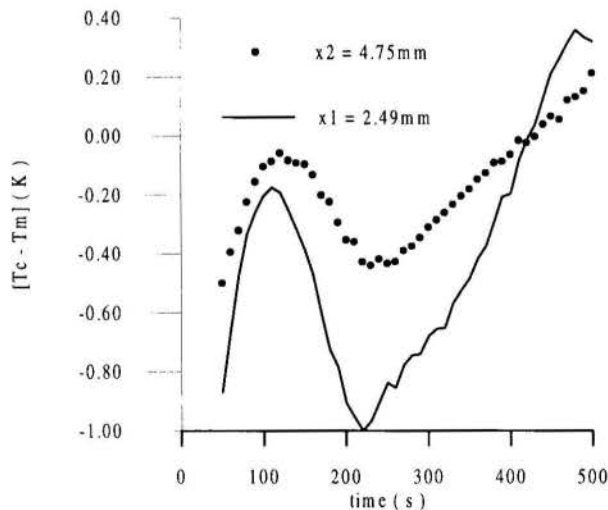


Figure 6 : Residuals at the two measurement locations.

What is called sequential estimation can be also used to appreciate the quality of the model. This procedure uses one

measurement at a time to determine the parameter. The parameter being a constant, the results of the identification when 1, 2, ..., M time measurements are used should lead to the same value. If it is not the case, then it indicates that there is a conflict between the measurements and the model. The thermal diffusivity estimated by using the measurements at  $x_2$  and  $x_3$  for 3 time domains are given table 2. There is only a 1.5% decrease of the identified thermal diffusivity when the measurements for  $300 < t < 500$  are added to the previous one which shows that the model is not too far from the reality.

Table 2 : influence of the time domain on the identification.

time (s)	$5 < t < 300$	$5 < t < 400$	$5 < t < 500$
diffusivity ( $m^2/s$ )	$0.1668 \cdot 10^{-6}$	$0.1650 \cdot 10^{-6}$	$0.1643 \cdot 10^{-6}$

Thus it is believed that the fitting procedure which was limited to a 4th order polynomial is responsible for the correlated and large residuals. This can be improved by increasing the order of the polynomial or by using another type of function to fit the data. This will be done as well as other experiments in the future.

## CONCLUSIONS

An analytical method has been used to calculate the temperature field in a one dimensional slab subjected to time varying boundary conditions. Then a least squares procedure was used to estimate the thermal diffusivity from internal temperature variations. This methodology was applied to experimental data. The results were not perfect but showed the feasibility of such an approach to determine thermal diffusivity of solid. The thermal diffusivity estimated from this one single experiment is in agreement with the values found in literature for this type of material. However, the method still need to be improved. The advantage of such an approach is the computational time which very small compared to the one that would be necessary if a numerical solution was used to calculate the slab internal temperature.

## REFERENCES

- Incropera, F. P. and Witt, D. P., 1981, "Fundamentals of Heat Transfer", John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Iordanov, V. I. and Steward, A. P., 1984, "A Method and a Computer Program for Determining the Thermal Diffusivity a Solid Slab", Appl. Math. Modeling, vol. 8, June, pp. 169 - 178.
- Murphy, J. and Bayazitoglu, Y., 1992, "Laser Flash Thermal Diffusivity Determination Procedure for High-Temperature Liquid Metals", Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 22, pp. 109 - 120.
- Omel'chenko, K. G. and Pchelkina, V. G., 1975, "Solution of an Inverse Problem of Nonlinear Heat Conduction to Determine Thermophysical Characteristics", Translated from Inzhenerno - Fizicheskii Zhurnal, vol. 29, pp. 95 - 98.
- Özisik, M. N., 1980, "Heat Conduction", John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Özisik, M. N. and Mikhailov, M. D., 1984, "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Polezhaev, Y. V. and Narozhnyi, Y. G., 1973, "A Method for Determining the Thermal Conductivity Coefficient of High-temperature Material During their Unsteady Heating", Translated from Teplofizika Vysokikh Temperature, vol. 11, pp. 606 - 615.
- Tervola, P., 1989, "A Method to Determine the Thermal Conductivity from Measured Temperature Profiles", Int. Journal Heat Transfer, vol. 32, pp. 1426 - 1430.



## DETERMINAÇÃO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO URUCUM

Lucianna Gama Vieira<sup>1</sup>, Odelsia Sanchez de Alsina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Tecnologia Rural - CFT

<sup>2</sup>Departamento de Engenharia Química - CCT

Universidade Federal da Paraíba - UFPB

58109-970- Campina Grande - PB - Brasil



### SUMARIO

*Este trabalho tem como objetivo a determinação da difusividade e condutividade térmicas efetivas do urucum (Bixa Orellana L.) em regime transitório, utilizando a solução analítica das equações do regime regular. Foi observado que a temperatura exerce pouca influência nesse parâmetro. Com relação ao efeito da umidade, quanto maior a umidade, maior é a condutividade térmica.*

### INTRODUÇÃO

O Brasil tem se destacado como maior produtor mundial de urucum (*Bixa Orellana L.*) e de seus derivados. As condições climáticas favorecem o cultivo dessa cultura, cujo principal interesse econômico é o de possuir em suas sementes alto teor de substâncias corantes. Seu cultivo tem sido impulsionado pela crescente proibição na utilização de corantes sintéticos, considerados cancerígenos, nas indústrias de alimentos como também de cosméticos. Em seu beneficiamento, se não for feito em condições apropriadas, haverá a perda do seu principal corante, a bixina, que acarretará na sua desvalorização econômica.

A secagem do urucum é realizada para que a semente possa ser armazenada em boas condições, evitando-se o desenvolvimento de fungos e microorganismos, além de evitar a exposição descontrolada a luz e calor, que é o que acontece quando o grão é seco naturalmente, favorecendo a degradação da bixina uma vez que essa secagem natural ocorre em camadas expostas ao sol e portanto sem controle adequado.

No projeto de equipamentos de transferência de calor, é necessário o conhecimento das propriedades térmicas dos produtos envolvidos. O valor da condutividade térmica é um parâmetro fundamental para qualquer processo térmico, tanto no que diz respeito ao dimensionamento de equipamentos, sua otimização e conservação de energia, quanto à caracterização de substâncias. Se constitui numa importante propriedade de transporte (Pietrobon et al., 1987) e é fortemente dependente da água contida no material (Sweet & Haugh, 1974).

A determinação de propriedades térmicas apresenta grandes dificuldades (Silva & Alsina, 1995). Os métodos existentes podem ser divididos em dois grupos: os de regime permanente, onde o fluxo de calor que passa através do corpo permanece constante em magnitude e direção e o campo de temperatura é estacionário, e os de regime transitório. No regime permanente, Gubulin (1984) estudou a condutividade térmica aparente para materiais sólidos como arenito, calcário, brita. Silva & Alsina (1987) determinaram a condutividade térmica na estagnação para o sistema ar/feijão pelo método de perfil radial em regime permanente. São experimentos com longa duração e feitos com aparelhos de medida muito complexos (Luikov, 1966). Pela simplificação experimental, muitos experimentos são realizados em regime transitório, dentre os quais citam-se os trabalhos de

Silva & Alsina (1995), Corrêa & Freire (1987), Pietrobon et al. (1987) etc. Neste trabalho, foram realizados experimentos no regime transitório, em que há aquecimento do material. Foi considerado que a transferência de calor se dá em uma fase pseudo-homogênea, ou seja, que a fase sólida e a fase fluida são a única pseudo-fase e que a temperatura dessa fase é homogênea. O valor da condutividade térmica estimado é considerado efetivo entre o sólido e o fluido (Freire & Gubulin, 1986).

Em geometria cilíndrica, considerando fluxo de calor apenas na direção radial e desprezando-se a resistência térmica do material que constitui a célula de medida, o balanço de energia em regime transitório é dado por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

cujas condições inicial e de contorno são:

$$C.I.: T_{(r,0)} = T_0 \quad (2)$$

$$C.C.1.: - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (3)$$

$$C.C.2.: K \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = h (T_{(R,t)} - T_\infty) \quad (4)$$

A solução, mostrada em Luikov (1966), para essas condições limites é:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n r/R)}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))} \exp \frac{-\mu_n^2 \alpha t}{R^2} \quad (5)$$

Que pode ser ainda representada como:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot J_0(\mu_n r/R) \exp \frac{-\mu_n^2 \alpha t}{R^2} \quad (6)$$

O valor da raiz característica sucessiva  $\mu_n$ , mostrado em tabelas por Luikov (1966), é sempre maior do que o valor que a

precede, isto é:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n$$

Observando que  $\mu_n^2$  é um expoente da curva exponencial, o valor da série descrita na equação 2.16, para tempo suficientemente longo, será pequeno em comparação com o valor do primeiro termo. Por causa disso, a estimativa do valor da condutividade térmica, tomando-se só esse primeiro termo da equação 2.16, não apresentará erros consideráveis, podendo ser escrita:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = A_1 \cdot J_0(\mu_1 r/R) \exp \frac{-\mu_1^2 \alpha t}{R^2} \quad (7)$$

A mudança de temperatura com o tempo será descrita por uma curva exponencial simples e se diz que se desenvolve o regime regular.

### MATERIAL E MÉTODOS

**Material Utilizado.** O material utilizado para o estudo da secagem em camada fina, em leito fixo, foi o urucum da região nordeste. As propriedades físicas dos grãos estão representados na tabela 1.

Tabela 1 - Propriedades físicas de grãos de urucum.

PROPRIEDADE	VALOR	MÉTODO DE DETERMINAÇÃO
Esfericidade $\phi$ (%)	69,7	
Densidade do Sólido $\rho_s$ (g/cm <sup>3</sup> )	1,487	Picnometria de ar
Diâmetro $d_p$ (cm)	0,346	Esfera de igual volume
Capacidade Calorífica $C_{ps}$ (cal/g°C)	0,513	Misturas calorimétricas
Porosidade do leito, $\epsilon$ (%)	55,0	Picnometria de ar

Fonte: Silva (1991)

**Equipamentos.** O sistema utilizado para obtenção dos dados de aquecimento de urucum para cálculo da condutividade é mostrado na figura 1. Consiste de uma coluna cilíndrica de 17,80 cm de diâmetro e 60 cm de altura. Possui uma seção transversal tronco-cônica com esferas de vidro que funciona como um distribuidor de ar. Consiste ainda de um compressor radial, rotâmetro, aquecedor de ar elétrico, chaves seletoras para termopares, controlador de temperatura e um milivoltímetro como auxiliar nas medições das temperatura de entrada e saída.

**Célula de medida de condutividade.** A célula de medida descrita na figura 2, consiste de um cilindro de alumínio, com diâmetro de 6 cm e altura de 24,7 cm, com espessura de parede suficientemente fina, de tal modo que se possa desprezar a

resistência térmica da mesma. As extremidades são fechadas com borrachas isolantes, e numa das extremidades a borracha apresenta dois orifícios: um no centro e outro na metade do raio, para inserção dos termopares de ferro-constantan. A célula de medida possui ainda alças de sustentação que permitem sua introdução na câmara de secagem para obtenção dos dados experimentais. Após a estabilização da temperatura do ar de aquecimento, a célula de medida, já cheia de grãos e com os termopares inseridos, é colocada cuidadosamente na coluna de aquecimento e de 2 e 2 minutos são lidas as temperaturas dos dois termopares, para construção do gráfico de evolução da temperatura no tempo.

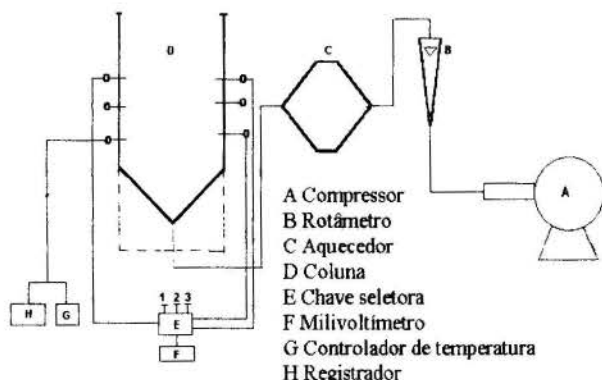


Figura 1 - Esquema dos equipamentos

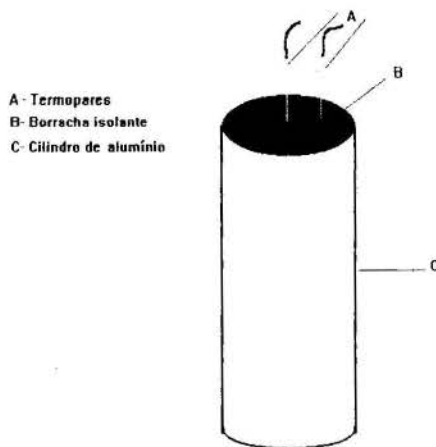


Figura 3 - Célula de medida de condutividade

Para obtenção dos valores da condutividade térmica foram seguidas as seguintes etapas:

- 1- Construção do gráfico ( $\ln T^*$  versus  $t$ ), e aplicação de regressão linear dos pontos para ambas as curvas do gráfico na região de regime regular.
- 2- Observando a equação 7, temos:

$$\frac{-\mu_1^2 \alpha}{R^2} = \text{inclinação} \quad (8)$$

$$\ln(A_1 \cdot J_0(\mu_1 r/R)) = \text{intersecção} \quad (9)$$

2.1 - Quando  $r/R = 0,0$ , ou seja, a medida no centro da célula.

temos:

$$\ln A_1 = \text{intersecção} \quad (10)$$

2.1.a- Com o valor de  $A_1$ , a partir das raízes características tabeladas por Luikov (1966), calcula-se  $Bi_1$  e daí se encontra  $\mu_1$ .

2.1.b- Com o valor de  $\mu_1$ , encontra-se a partir da equação 8, o valor da difusividade térmica efetiva  $\alpha_1$ .

2.1.c- Sabendo-se que:

$$\alpha_1 = \frac{K_{a1}}{\rho_a C p_a} \quad (11)$$

se pôde calcular a condutividade térmica efetiva  $K_{a1}$  entre o meio sólido e o fluido.

Para cálculo das condutividades térmicas efetivas, foram utilizados os valores de capacidade calorífica e densidade aparentes correlacionadas pelas seguintes fórmulas, respectivamente:

$$Cp_a = \varepsilon Cp_f + (1-\varepsilon)Cp_s \quad (12)$$

$$\rho_a = \varepsilon \rho_f + (1-\varepsilon)\rho_s \quad (13)$$

2.2 - quando  $r/R = 0,5$ , ou seja, a medida de temperatura se dá na metade do raio da célula, a obtenção de  $A_1$  e consequentemente  $\mu_1$  se faz de forma iterativa, de tal modo que a diferença dos valores de  $\mu_1$  proposto e calculado seja menor que uma tolerância pré-fixada. A partir daí, se calcula  $\alpha_2$  e  $K_{a2}$  como descrito nos itens 2.1.b e 2.1.c.

Essas etapas podem ser resumidas no algoritmo proposto por Silva e Alsina (1995), apresentado na figura 4.

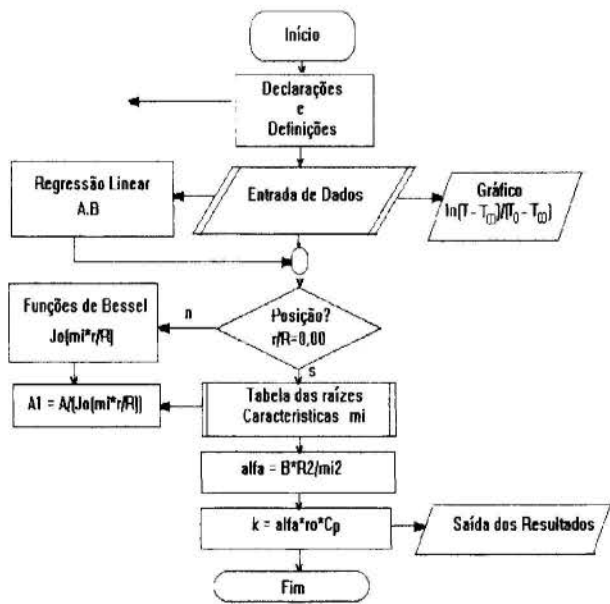


Figura 4 - Algoritmo para determinação da condutividade térmica

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foram realizadas experiências na célula de condutividade nas temperaturas de 65°C, 75°C e 80°C, para determinação da condutividade térmica efetiva do urucum. A vazão do ar de aquecimento na coluna foi de 200 m<sup>3</sup>/h em todos os ensaios.

Para cálculo da condutividade, foram feitos gráficos de  $\ln$  de  $T^*$  versus tempo como mostra a figura 5:

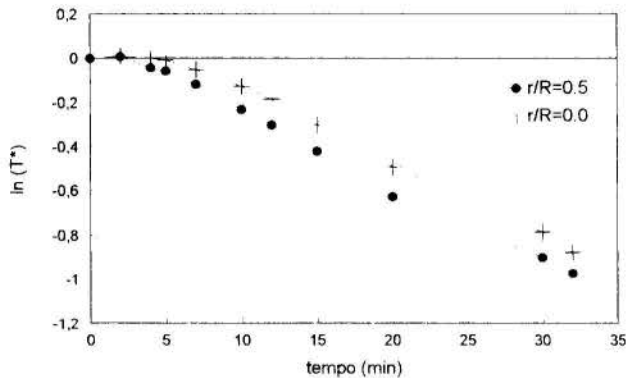


Figura 5 - Evolução da temperatura de aquecimento do urucum - Exp. 01 ( $T_\infty = 80^\circ\text{C}$ )

Tanto as curvas para as temperaturas medidas no centro como as medidas tomadas na metade do raio apresentam uma região de regime regular bem definida, como mostrado na figura 6. Nela, podemos constatar um bom ajuste do modelo, com coeficiente de correlação 0,99 e desvios padrões menores que 0,2.

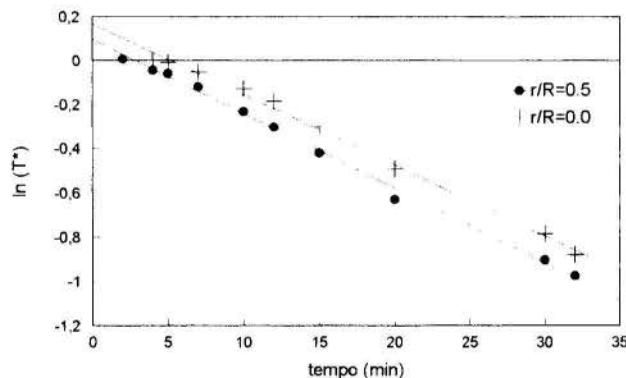


Figura 6 - Aplicação de regressão linear na região de regime regular Exp. 01 -  $T_\infty = 80^\circ\text{C}$

As curvas obtidas para as outras temperaturas apresentaram comportamento semelhante. De acordo com o método de identificação paramétrica de trabalho descrito na figura 4, foi determinada a condutividade térmica efetiva do urucum.

Para a análise da reprodutibilidade dos resultados obtidos, foram realizados três experimentos na temperatura de 80°C, na mesma vazão de 200m<sup>3</sup>/h. A umidade inicial dos grãos nos experimentos estavam na faixa de 15%. Os resultados se encontram na tabela 2:

Ensaio	$\alpha_1 \cdot 10^7$ (m <sup>2</sup> /s)	$\alpha_2 \cdot 10^7$ (m <sup>2</sup> /s)	$K_{a1} \cdot 10^1$ (W/m.°C)	$K_{a2} \cdot 10^1$ (W/m.°C)
01	1,98	2,12	2,03	2,18
02	2,00	2,01	2,05	2,06

<sup>1</sup> determinado a partir de medidas em  $r/R=0,0$

<sup>2</sup> determinado a partir de medidas em  $r/R=0,5$

Pode-se observar que os resultados foram bem reproduzidos, tendo em vista a complexidade do modelo empregado. O desvio médio na condutividade térmica entre os dois experi-



mentos, com medidas de temperatura no centro do cilindro ( $r/R=0,0$ ), foi na ordem de 1%. Quando se compara os resultados dos experimentos realizados com medidas na metade do raio ( $r/R=0,5$ ), observa-se que esse desvio sobe para 7,4%, no primeiro experimento. A explicação para essa diferença se deve ao fato de que quando se está enchendo a célula de medida com os grãos, ou mesmo quando se vai inserir a célula na coluna de aquecimento, os termopares tendem a se deslocar no interior da célula. Isso leva a erros de medida e, conseqüentemente, a erros de cálculo, o que provoca desvios entre os valores. Considerando-se que os erros são maiores nas medidas feitas com o termopar na metade do raio, pode-se concluir que essa medida é menos confiável, o que nos levou a desconsiderá-la, sem prejuízo para o cálculo da condutividade de térmica do material em estudo.

Para o estudo do efeito da temperatura na condutividade térmica efetiva do urucum, foram feitos experimentos nos quais a temperatura do ar variou de 60°C a 80°C, com umidade inicial dos grãos em torno de 15%. Os resultados são mostrados na figura 7:

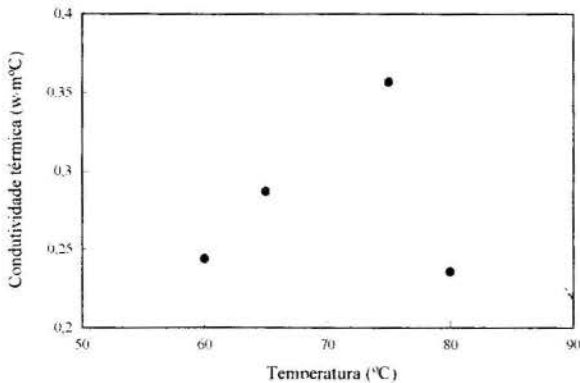


Figura 7 - Efeito da temperatura do ar na condutividade térmica -  $U \cong 15\%$

Como se pode observar, a temperatura tem influência na condutividade térmica efetiva do urucum, dentro da faixa de temperatura observada, aumentando com o aumento da temperatura, atingindo um máximo em torno de 75°C e decaindo após isso. Uma possível explicação para a presença do máximo é que poderia estar relacionado com o fato de que, a altas temperaturas, uma fração importante do conteúdo de água no interior do grão se encontra na forma de vapor.

Para se observar o efeito da umidade dos grãos na condutividade térmica efetiva do urucum, foram feitos experimentos com umidades variando de 0,17% b.s. até 18,5% b.s.. O resultado é mostrado na figura 8.

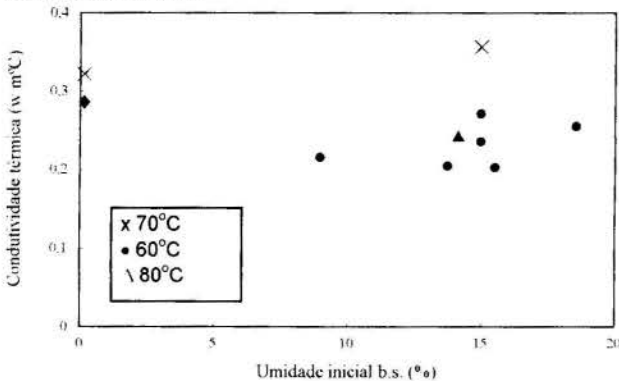


Figura 8 - Variação da condutividade térmica efetiva do urucum com umidade.

Se pode concluir que há uma tendência de aumento da condutividade com o aumento da umidade dos grãos, dentro da faixa de temperatura observada, que foi de 60 a 80°C. Resultados semelhantes se encontram em Brooker et al. (1974) para outros grãos e Silva & Alsina (1987), para feijão.

## CONCLUSÕES

Os experimentos realizados, como também o modelo proposto para cálculo da condutividade térmica, tiveram boa reprodutibilidade, principalmente nas medidas feitas no termopar central na célula de medida.

A condutividade aumenta com o aumento da temperatura, dentro da faixa de 60 a 75°C. A partir de 75°C, há um decréscimo devido provavelmente à vaporização parcial da água no interior do grão.

A condutividade térmica é influenciada pela umidade dos grãos, havendo, dentro da faixa observada, uma tendência de aumento da condutividade aparente com o aumento da umidade.

## SIMBOLOGIA

- $\epsilon$  - Porosidade do leito de urucum (%)
- $\alpha$  - Difusividade térmica efetiva ( $m^2/s$ )
- $\alpha_1$  - Difusividade térmica efetiva para  $r/R=0,0$  ( $m^2/s$ )
- $\alpha_2$  - Difusividade térmica efetiva para  $r/R=0,5$  ( $m^2/s$ )
- $\rho_f$  - Densidade do ar ( $Kg/m^3$ )
- $\rho_s$  - Densidade real do urucum ( $Kg/m^3$ )
- $\rho_{sa}$  - Densidade aparente do urucum ( $Kg/m^3$ )
- $\mu_1$  - Raiz característica da equação
- $\mu_n$  - Raízes características da equação
- $A_n$  - Parâmetro da equação 2.21
- $B_i$  - Número de Biot
- $Cp_a$  - Capacidade calorífica aparente do sólido ( $cal/g^\circ C$ )
- $Cp_f$  - Capacidade calorífica do ar ( $cal/g^\circ C$ )
- $Cp_s$  - Capacidade calorífica dos grãos ( $cal/g^\circ C$ )
- $h$  - Coeficiente de troca térmica ( $W/m^2^\circ C$ )
- $J_0$  - Função de Bessel de ordem zero
- $J_1$  - Função de Bessel de primeira ordem
- $K_a$  - Condutividade térmica efetiva ( $W/m^\circ C$ )
- $K_{a1}$  - Condutividade térmica efetiva para  $r/R=0,0$  ( $W/m^\circ C$ )
- $K_{a2}$  - Condutividade térmica efetiva para  $r/R=0,5$  ( $W/m^\circ C$ )
- $r$  - Vetor radial da célula (m)
- $R$  - Raio da célula de medida (m)
- $t$  - Tempo (min)
- $T$  - Temperatura variável ( $^\circ C$ )
- $T_x$  - Temperatura do fluido de aquecimento ( $^\circ C$ )
- $T^*$  - Relação de temperaturas  $(T-T_x)/(T_0-T_x)$
- $T_0$  - Temperatura inicial do grão ( $^\circ C$ )

## REFERÊNCIAS

- BROOKER, D.B., BAKER-ARKEMAR, F.W., HALL, C. W., 1974, "Drying Cereal Grains", Westport, Cown, AVI.
- CORRÊA, R.G., FREIRE, J.T., 1987, "Determinação da Condutividade Térmica II. Análise Numérica", *Anais do XV ENFEMP*, vol. 1, 172-179, Uberlândia, Mg.
- FREIRE, J. T., GUBULIN, J.C., 1986, "Tópicos Especiais de Sistemas Particulados", DEQ / UFSCar, Volume II, São Carlos, SP.

GUBULIN, J.C., 1984, "Transferência de Calor em Meios Porosos: Condutividade Térmica Efetiva na Estagnação", *Anais do XII ENEMP*, vol. II, pag. 259-265, Maringá-Pr.

LUIKOV, A.V., 1966, "Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Bodies", Pergamon Press, Nova York.

PIETROBON, C.L.R., PEREIRA, N.C., FREIRE, J.T., 1987, "Determinação da Condutividade Térmica I. Análise Experimental", *Anais do XV ENEMP*, vol. I, pag. 150-161, Uberlândia, Mg.

SILVA, G.F., ALSINA, O.L.S., 1995, "Determinação de Propriedades Térmicas do Feijão Preto", *Anais do XXIII ENEMP*, Maringá, no prelo.

SILVA, S.L., ALSINA, O.L.S., 1987, "Condutividade Térmica na Estagnação de um Leito de Feijão", *Anais do XV ENEMP*, vol. I, pag. 172-179, Uberlândia-Mg.

SWEAT, V.E., HAUGH, C.G., 1974, "A Thermal Conductivity Probe for Small Food Samples", *Transactions of the ASAE*.

## ABSTRACT

The objective of this work is to determine the thermal conductivity of annatto seeds (*Bixa Orellana* L.). Transient regime was used and the analytical solution in the regular regime to calculate the apparent thermal diffusivity and conductivity. It was observed that temperature influences these properties: the thermal conductivity increases with temperature in the range 60 to 75°C and with the moisture content between 12 and 18%.



## UM NOVO MÉTODO PARA ESTIMAÇÃO SIMULTÂNEA DE PROPRIEDADES TÉRMICAS *IN SITU*.



Sandro M. M. Lima e Silva\* e Gilmar Guimarães

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Uberlândia  
38400-902 - Uberlândia - Mg - Brasil

### RESUMO

Apresenta-se neste trabalho um método para a determinação simultânea da condutividade térmica,  $\lambda$ , e da difusividade térmica,  $\alpha$ , de materiais não metálicos, usando-se somente dados experimentais provenientes de uma face de acesso. A estimação de  $\alpha$  baseia-se na adoção de um modelo térmico unidimensional de um meio submetido a um fluxo de calor transiente na superfície frontal e isolado na superfície oposta. Os mesmos dados experimentais das evoluções de fluxo de calor e temperatura na superfície frontal são usados para a obtenção de  $\lambda$ . Nesse caso, o modelo térmico usado é o de um meio semi-infinito. Para isso, estima-se também, um parâmetro definido como efusividade térmica, ( $b = \sqrt{\alpha/\lambda}$ )

### Introdução

A medição de propriedades térmicas em meios já construídos requer algumas condições restritivas do ponto de vista do desenvolvimento de técnicas experimentais. Nesse caso, um requisito básico deve ser a característica não destrutiva do método. Em outras palavras qualquer inserção de sensores de medição deve ser evitada. Outra restrição reside no próprio acesso às superfícies do meio. Ou seja, a maioria dos meios existentes (e.g., edificações), tem normalmente apenas uma superfície de trabalho. Assim a excitação térmica para o estabelecimento do problema térmico e, ainda, as aquisições de dados experimentais só devem se realizar em uma superfície.

A maioria das técnicas experimentais existentes para a obtenção simultânea de  $\lambda$  e  $\alpha$  usam sensores no interior do meio ou em duas superfícies. Técnicas experimentais que usam dados oriundos de uma superfície somente permitem em sua maioria a obtenção de apenas uma propriedade térmica. Cita-se como exemplo, a medição da difusividade térmica pelo método Flash (Parker et al, 1961), ou a medição de  $b = \sqrt{\alpha/\lambda}$ , definido por alguns autores como efusividade térmica (Log, 1993). A obtenção simultânea de  $\lambda$  e  $\alpha$  usando somente uma superfície de acesso é o objetivo e a principal contribuição desse trabalho.

Qualquer método que determine parâmetros físicos deve propor um modelo teórico. Esse modelo, por sua vez, deve ser simulado experimentalmente com a maior fidelidade possível. Como os parâmetros físicos investigados são as propriedades térmicas  $\lambda$  e  $\alpha$  de um meio ou amostra, o modelo térmico deve ser tal que contemple a equação da difusão de calor transiente e que permita o conhecimento a cada instante do fluxo de calor e da temperatura na superfície de medição.

Devido às grandes espessuras dos meios *in situ* (meios já construídos), duas hipóteses surgem naturalmente: i) meio semi-infinito, ii) meio finito, com espessura  $L$  e isolado na face oposta ao acesso. O uso desses dois modelos físicos a partir de um mesmo conjunto de dados experimentais é a principal novidade da metodologia proposta nesse trabalho. Assim, para a obtenção das propriedades térmicas, dois domínios de cálculo são usados. Inicialmente usa-se o domínio da frequência no modelo semi-infinito (Guimarães et al, 1995) para a obtenção do

parâmetro,  $b$ , e o domínio do tempo para a obtenção de  $\alpha$ . O conhecimento desses parâmetros permite, por sua vez, a determinação de  $\lambda$ .

### Fundamentos teóricos e simulação experimental

O desenvolvimento do método será apresentado em duas fases separadamente. Inicialmente a abordagem do conjunto de sinais de fluxo de calor e temperatura na superfície de uma amostra de Polythene de 300x300x50 mm é feita através de um modelo semi-infinito, no domínio da frequência. O resultado desse procedimento é a obtenção do parâmetro ( $b = \sqrt{\alpha/\lambda}$ ). Posteriormente, o mesmo conjunto de dados (fluxo de calor e temperatura) são tratados, diferentemente, no domínio do tempo, resultando na estimação da difusividade térmica.

Observa-se, entretanto, que os dados experimentais usados nesse trabalho são simulados numericamente. Para isso, impõe-se uma evolução típica de fluxo de calor,  $\phi_1(t)$  - *usualmente obtida por efeito Joule através de resistência elétrica (Guimarães, 1993)* - na amostra. A solução da equação da difusão de calor, considerando-se a amostra finita e isolada é usada para a obtenção da temperatura experimental simulada,  $y_1(t)$ , ou seja

$$y_1(t) = T(0,t) + \varepsilon(t) \quad (1)$$

onde  $\varepsilon(t)$  é uma função erro aleatório que simula as incertezas presentes numa medição experimental. Salienta-se, assim, que o valor de  $\varepsilon(t)$  situa-se na região de incerteza  $-0,25K < \varepsilon(t) < 0,25K$ , normalmente encontradas em medições de temperatura através do uso de sensores como termopares.

A equação que define  $T(0,t)$  bem como a implicação do uso de  $y_1(t)$  indistintamente nos modelos finito e semi-infinito são apresentadas nas próximas seções.

Cumpra-se, ainda, observar que o êxito da técnica de estimação proposta é estabelecido se diferentes valores iniciais de  $b$  (*modelo semi-infinito*) e  $\alpha$  (*modelo finito*) no processo de estimação convergirem aos valores exatos de  $b$  e  $\alpha$  da amostra de Polythene. Assim, a curva experimental simulada,  $y_1(t)$ , é obtida a

(\*) O Eng. Sandro M.M.L. Silva é atualmente aluno de doutorado do Curso de P.G. em Eng. Mec. da Univ. Fed. Uberlândia.

partir da solução da equação da difusão, da geometria da amostra, da evolução do fluxo de calor imposto e das propriedades térmicas da amostra previamente fixadas.

### Modelo semi-infinito

O problema térmico, como dito anteriormente, é formulado a partir da imposição de um fluxo de calor na superfície frontal da amostra (Figura 1a).

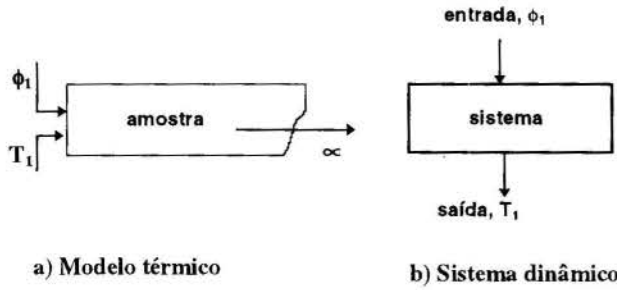


Figura 1 - Modelo proposto para estimação de  $b$

O modelo físico nesse caso é o de um meio semi-infinito, homogêneo com propriedades constantes, sujeito a evolução do fluxo de calor ( $\phi_1$ ) e a conseqüente evolução da temperatura ( $T_1$ ) na superfície de acesso ( $x=0$ ). Esse modelo pode ser representado pela equação da difusão de calor.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2)$$

com as suas respectivas condições de contorno

$$\theta(0, t) = T_1(t) - T_0 = \theta_1(t) \quad (3)$$

$$\theta(x, t) \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (4)$$

$$\phi(0, t) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (5)$$

e condição inicial

$$\theta(x, 0) = 0 \quad (6)$$

onde  $\theta$  é definido por

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 \quad (7)$$

Aplicando a transformada de Laplace  $t, x \rightarrow p, x$  nas Eqs. (2)-(6), obtém-se:

$$\frac{\Theta_1}{\Phi_1} = \frac{1}{\lambda \sqrt{p/\alpha}} \quad (8)$$

onde

$\Theta_1 = \Theta(0, p)$  e  $\Phi_1 = \Phi(0, p)$  sendo que  $\Theta$  e  $\Phi$  são, respectivamente, a temperatura e o fluxo de calor no plano transformado  $p-x$ . Dessa forma o problema é reduzido a uma análise de sistema tipo entrada/saída com entrada  $X$ , definida por

$$X(p) = \Phi_1 \quad (9)$$

e saída  $Y$ , definida por

$$Y(p) = \Theta_1 \quad (10)$$

A Figura 1b apresenta o modelo dinâmico equivalente. Assim, usando-se as Eqs (8) - (10) define-se uma Impedância de entrada como sendo

$$Z(p) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{b}{\sqrt{p}} \quad (11)$$

Obtém-se a inversa  $Z(t) = [Z(p)]^{-1}$  usando-se as propriedades da transformada de Laplace (Abramovitz e Stegun, 1968).

$$Z_c(t) = \frac{b}{\sqrt{\pi t}} \quad (12)$$

Nesse ponto o método de estimação de parâmetros (Beck e Blackwell, 1990), pode ser aplicado no domínio do tempo. Nesse caso  $\lambda$  e  $\alpha$  seriam estimados através da minimização do quadrado da diferença entre os valores teóricos e experimentais de  $Z(t)$ . Este método, no entanto, é de difícil execução devido ao baixo valor da impedância de entrada.

Uma solução desse problema é a transformação do estado das variáveis para o domínio da frequência ( $f$ ), ou seja, a obtenção de  $Z(f)$ . Para isso dois caminhos podem ser seguidos. Primeiro, a variável  $p$  pode ser simplesmente trocada na Eq. (11) pelo parâmetro complexo ( $j2\pi f$ ), onde  $j^2 = -1$ . De outra forma, pode-se obter  $Z(f)$  aplicando-se a transformada de Fourier em  $Z(t)$ . A escolha do último procedimento se deve às características de  $Z(f)$ . Como a função resposta em frequência é uma quantidade complexa ela pode ser convenientemente colocada em termos do módulo e da fase. Nesse sentido, a aplicação da transformada de Fourier é o caminho mais rápido para a separação desses termos. Assim,

$$Z(f) = \int_0^{\infty} Z(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (13)$$

Nesse caso o valor de  $b = \sqrt{\alpha}/\lambda$  será o melhor valor no qual se minimiza a função

$$S_1 = \sum_{k=1}^N \left( |Z_e(f_k)| - |Z_t(f_k)| \right)^2 \quad (14)$$

onde  $|Z_e(f_k)|$  e  $|Z_t(f_k)|$  são, respectivamente, os valores discretos teóricos e experimentais do módulo de  $Z$ . O índice  $k$  corresponde a frequência discreta  $f$  e  $Nf$  é o número total de amostragem de  $Z$ . Por simplicidade na notação a frequência  $f_k$  será substituída por  $f$  nas próximas seções.

### Identificação da impedância de entrada teórica, $Z_t(f)$

Substituindo a Eq.(12) na Eq. (13) tem-se

$$Z_t(f) = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-j2\pi f t}}{\sqrt{t}} dt \quad (15)$$



onde os intervalos variam de  $(0+\eta) \leq t \leq \infty$ , sendo  $\eta$  um infinitésimo. Nesse caso o valor de tempo tendendo a infinito é  $T=6379,00s$  que é o tempo total de medição.

Integrando numericamente a Eq. (15) obtém-se

$$|Z_t(t)| = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot b \left( \operatorname{erf}(\sqrt{j2\pi f T}) - \operatorname{erf}(\sqrt{j2\pi f (0+\eta)}) \right)}{\pi \sqrt{j \cdot f}} \quad (16)$$

onde  $\operatorname{erf}$  é a função erro definida como (Abramowitz & Segun, 1968)

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \quad (17)$$

### Identificação da impedância de entrada experimental, $Z_e(f)$

A saída  $Y(t)$  pode também ser computada pela integral de convolução

$$Y(t) = \int_0^\infty Z_e(\tau) X(t-\tau) d\tau \quad (18)$$

onde  $X(t-\tau)$  é o sinal de entrada com uma defasagem de tempo  $\tau$ . Observa-se que se o sistema é linear com parâmetros constantes e fisicamente realizável  $Z_e(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$  (Bendat & Pierson, 1986).

Usando o teorema de convolução (Bendat & Pierson, 1986), a impedância de entrada  $Z_e(f)$  pode ser identificada no domínio da frequência

$$Z_e(f) = Y(f)/X(f) \quad (19)$$

onde  $Y(f)$  e  $X(f)$  são a saída e a entrada respectivamente, no plano transformado  $f$ . Seus valores são encontrados aplicando-se a transformada de Fourier nos sinais de  $X(t) = \phi_1(t)$  e  $Y(t) = \theta_1(t)$ . Uma vez que os dados  $X(t)$  e  $Y(t)$  são valores discretos as transformadas de Fourier são realizadas numericamente usando-se o algoritmo de Cooley-Tukey (Discrete Fast Fourier Transform) (Bendat & Pierson, 1986). Multiplicando-se a Eq. (19) pelo conjugado complexo de  $X(f)$ , obtém-se

$$Z_e(f) = \frac{X^*(f) Y(f)}{X^*(f) X(f)} = \frac{S_{xy}(f)}{S_{xx}(f)} \quad (20)$$

onde  $S_{xy}$  é a densidade espectral cruzada de  $X(t)$  e  $Y(t)$  e  $S_{xx}$  é a densidade auto-espectral de  $X(t)$ . A Eq.(20) é mais adequada para o cálculo de  $Z(f)$  devido à maior estabilidade no comportamento com a frequência das densidades espectrais.

### Estimação de $b$

Como o módulo da resposta em frequência é função apenas da efusividade térmica, minimiza-se a função mínimos quadrados  $S_{mod}$ , derivando-a em relação a  $b$  e igualando seu resultado a zero. Usando-se esse procedimento e aplicando a linearização de Gauss (Beck & Arnold, 1977) obtém-se a equação de recorrência para  $b$ , ou seja,

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\sum_{i=1}^{Nt} X_i (|Z_e| - |Z_t|)}{\sum_{i=1}^{Nt} X_i^2} \quad (21)$$

onde  $X_i$  é o coeficiente de sensibilidade de  $|Z_t|$ ,  $i$  é o inteiro  $i=1,2,3,\dots$ ,  $Nt$  o número de medições usadas na estimação e  $n$  o número de iterações. Observa-se que  $X_i$  pode ser obtido tomando-se a derivada de  $|Z_t|$  em relação a  $b$ ,

$$X_i = \partial |Z_t| / \partial b = |Z_t| / b \quad (22)$$

Encerra-se o processo iterativo quando a diferença entre o valor atual e o valor da última iteração for inferior a 0.0001.

### Análise de resultados na estimação de $b$

As Figuras 2 e 3 apresentam sinais típicos de entrada e saída. A duração do tempo do aquecimento simulado foi de aproximadamente 120 segundos com um pulso de calor gerado da ordem de 60 V (DC). Foram tomados para cada experimento 1024 pontos com um intervalo de medição de 6,243s.

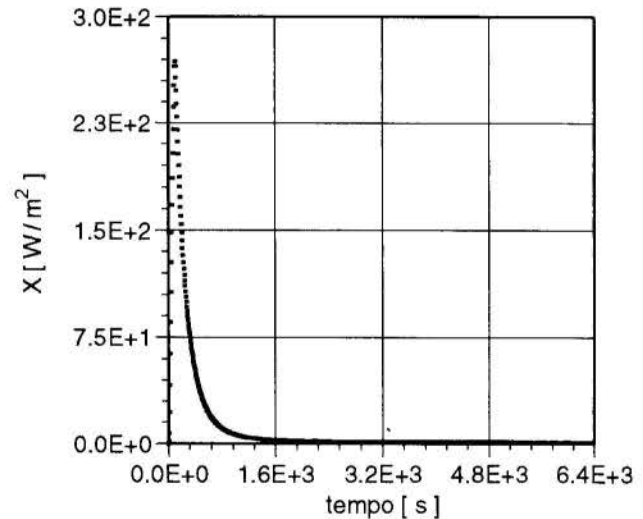


Figura 2 - Perfil típico de um sinal de entrada,  $X(t)$

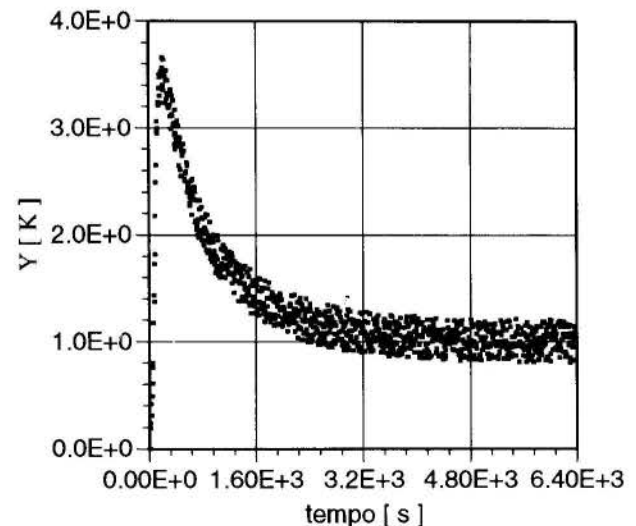


Figura 3 - Perfil típico de um sinal de saída,  $Y(t)$

A componente real da densidade espectral cruzada é mostrada na Figura 4. O gráfico apresenta valores médios da densidade usando-se 20 simulações de experimentos. Observa-se na Figura 4 que a densidade espectral cruzada torna-se desprezível para valores maiores que  $1,6 \times 10^{-3}$  Hz. Dessa forma, a região de frequência de interesse da impedância de entrada situa-se numa faixa inferior a esse valor. Este é um resultado importante, uma vez que estabelece o intervalo de amostragem e o número total de pontos interesse na frequência.

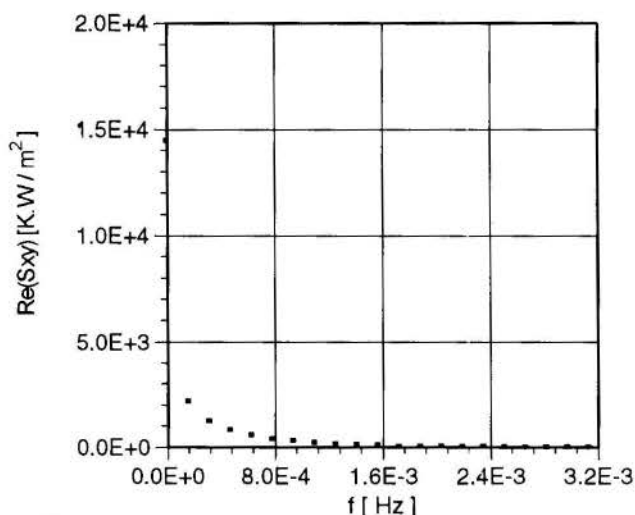


Figura 4 - Componente real da densidade espectral cruzada

Os valores experimentais e estimados do módulo da impedância de entrada é apresentado na Figura 5.

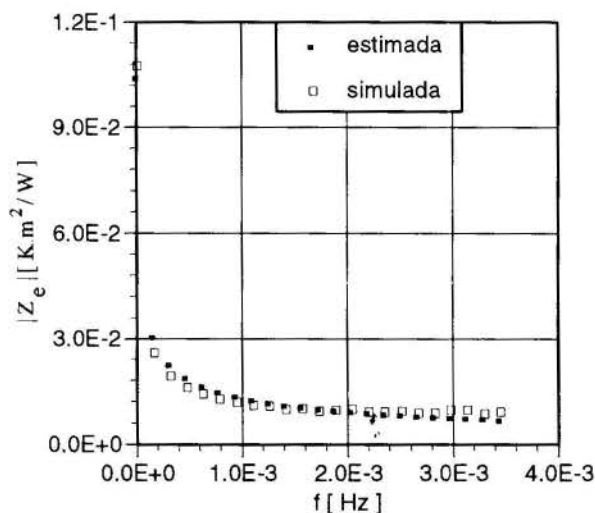


Figura 5 - Módulo da impedância de entrada, Z

A efusividade térmica para a amostra de polythene foi estimada em  $b=1,1610^{-03} \pm 3.25\%$  [ $m^2 K W^{-1} s^{-1/2}$ ], avaliada a uma temperatura média de 302K. Os valores iniciais para o processo de estimação variaram entre  $1,0 \times 10^{-02} < b_0 < 1,0 \times 10^{-01}$  [ $m^2 K W^{-1} s^{-1/2}$ ].

A partir do conhecimento da efusividade térmica e de um novo tratamento nos sinais da evolução do fluxo de calor e da temperatura, agora no domínio do tempo é possível a estimação da difusividade térmica e conseqüentemente a determinação da condutividade térmica. Este procedimento é apresentado na próxima seção.

## Modelo finito

Resta portanto, como proposto, a obtenção da difusividade térmica. Entretanto, a estimação de  $\alpha$  a partir do modelo semi-infinito é de difícil execução uma vez que  $\lambda$  e  $\alpha$  são diretamente proporcionais à impedância. Nesse caso,  $\lambda$  e  $\alpha$  não poderiam ser estimados simultaneamente, já que segundo os critérios de identificação (Beck e Arnold, 1977) os coeficientes de sensibilidade definidos a partir da impedância e dos parâmetros ( $\lambda$  e  $\alpha$ ) seriam linearmente dependentes.

Uma solução para esse problema seria o estabelecimento de um modelo teórico que contemplasse a difusividade térmica como a única variável dependente desconhecida. Observa-se, todavia, que esse modelo deve simular de forma satisfatória o comportamento experimental do fluxo de calor e das temperaturas superficiais usados no modelo anterior (semi-infinito).

Ocorre que o comportamento térmico superficial de um meio finito, de espessura L, sob certas condições de tempo pode ser considerado idêntico ao de um meio semi-infinito (Beck et al, 1992). Ainda, esse comportamento tende a ser o mesmo quanto maior a espessura do meio e menor o tempo de difusão de calor. Assim, a adoção do modelo finito e isolado na face oposta ao aquecimento, considerando-se a espessura do material e tempo de difusão, é o procedimento proposto para a obtenção da difusividade térmica.

Uma simulação prévia em relação à espessura e o tempo de difusão de calor para diversos tipos de materiais deve, portanto, ser feita antes da elaboração do projeto experimental. Nesse trabalho, uma simulação da evolução da temperatura superficial considerando-se os modelos finito e semi-infinito para diversas espessuras em relação ao material investigado é apresentado. Seus resultados, todavia, são mostrados em seção seguinte (Figura 8).

A Figura 6 apresenta o modelo proposto, uma amostra homogênea de espessura L e temperatura inicial  $T_0$  sujeita a um fluxo de calor transiente e unidimensional,  $\phi_1(t)$ , num instante  $t = 0$  na superfície frontal e isolada na superfície oposta.

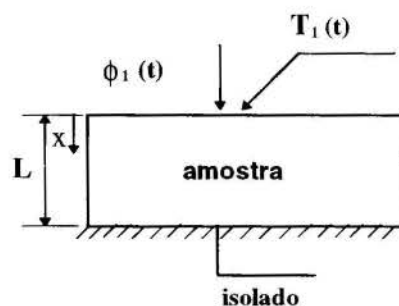


Figura 6 - Amostra sujeita a uma evolução de um fluxo de calor

Sob essas condições, o problema térmico pode ser escrito por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

sujeito as condições de contorno

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (25)$$

e à condição inicial

$$T(x,0) = T_0 \quad (26)$$

### Identificação da temperatura teórica, $T(0,t)$

A solução do problema dado pelas Eqs. (23)-(26) pode ser obtida através do uso da de funções de Green (Lima e Silva, 1995). Nesse caso,  $T(0,t)$  pode ser escrito como sendo,

$$T(0,t) = T_1(t) = T_0 + \frac{b\sqrt{\alpha}}{L} \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau + \frac{2b\sqrt{\alpha}}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t} \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau} \phi_1(\tau) d\tau \quad (27)$$

onde  $\beta_m$  são os autovalores definidos por  $\beta_m = m\pi/L$ , com  $m=1,2,3,\dots,\infty$ . Observa-se na Equação (26) que a forma de  $\phi_1(t)$  deve ser conhecida para que as integrais envolvidas possam ser resolvidas analiticamente. Nesse caso, a evolução do fluxo de calor, (Figura 2), permite uma aproximação polinomial seccionada de 5ª ordem, com uma correlação de 0.999 (Lima e Silva, 1995).

Observa-se ainda, da Eq.(27), que a temperatura na superfície frontal  $T_1(t)$  é função exclusiva de  $\alpha$ , uma vez conhecido o valor de  $b$ . Assim, analogamente à efusividade térmica, estima-se  $\alpha$  através da técnica de estimação de parâmetros. Entretanto, a minimização se dá nesse caso, em relação à função mínimos quadrados  $S_2$  definida como,

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [y_1(i) - T_1(i)]^2 \quad (28)$$

onde  $y_1(i)$  representa a temperatura experimental e  $T_1(i)$  a temperatura calculada pelo modelo teórico, Eq. (27) e  $i$  o tempo discreto. De forma análoga a  $b$ , a equação de recorrência para  $\alpha$  é dada por (Lima e Silva, 1995).

$$\alpha^{m+1} = \alpha^m + \sum_{i=1}^N X_2(i) [y_1(i) - T_1(i)]^2 / \sum_{i=1}^N [X_2(i)]^2 \quad (29)$$

onde  $X_2$  é o coeficiente de sensibilidade que é obtido derivando-se a temperatura em relação a  $\alpha$ .

$$X_2 = \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} \quad (30)$$

### Identificação da temperatura experimental, $y(i)$

Assim, a partir da  $T(0,t)$  dado pela Eq. (27) e da Eq.(1) obtém-se os dados experimentais da evolução de temperatura  $y_1(t)$ , na superfície. Salienta-se aqui, que os dados experimentais  $y_1(t)$  são os mesmos usados na obtenção dos valores de  $\theta(t)$  experimentais através da definição da Eq.(7), ou seja,  $\theta(t) = y_1(t) - T_0$

Uma vez que a técnica de estimação de parâmetros é utilizada, torna-se interessante uma análise do comportamento do coeficiente de sensibilidade  $X_2$ . A Figura 7 apresenta essa evolução.

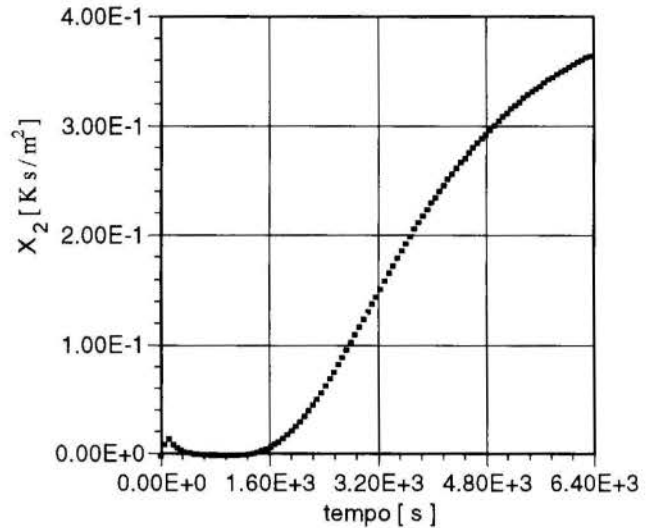


Figura 7 - Coeficiente de sensibilidade,  $X_2$

Observa-se que para a estimação de  $\alpha$  os valores de  $X_2$  aumentam com o tempo. Todavia, tempos muito grandes podem causar problemas quanto ao uso simultâneo dos dois modelos teóricos. Isso se deve à evolução da temperatura superficial de um meio finito desviar-se do modelo semi-infinito. Esse fato pode ser constatado através de uma simulação do comportamento térmico para os dois modelos. Apresenta-se essa simulação na Figura 8.

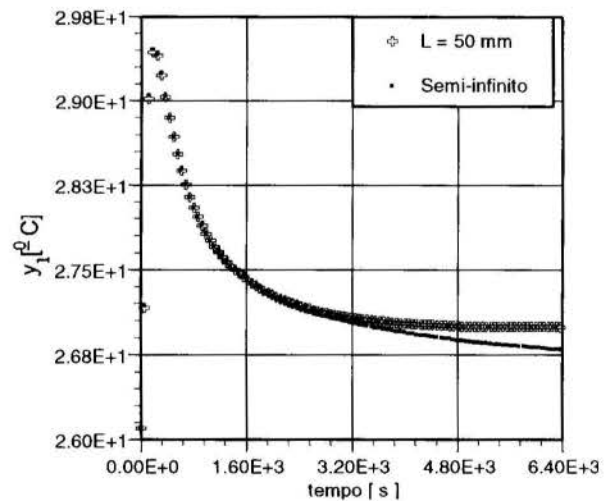


Figura 8 - Evolução das temperaturas experimentais simuladas

Assim existe um intervalo de tempo de medição ótimo no qual as temperaturas experimentais devem ser tomadas. Todavia, nesse trabalho a otimização do tempo total de medição não foi tratada. O procedimento, nesse caso, foi usar os dados de temperatura e fluxo de calor adquiridos durante toda a medição.

A Tabela 1 apresenta um processo típico de simulação para a estimação de  $\alpha$  e a conseqüente determinação de  $\lambda$ . Nesse caso, o valor de  $b$  usado no modelo é aquele determinado no domínio da frequência, ou seja  $b = 1,1610^{-03} [m^2 K W^{-1} s^{-1/2}]$ .

Tabela 1 Processo de estimação de  $\alpha$  e  $\lambda$  para um experimento típico

iterações	$\alpha \times 10^7$ [m <sup>2</sup> /s]	$\lambda \times 10^1$ [W/mK]
0	1,00	2,72370
1	4,28542	5,63850
2	2,46681	4,27795
3	2,46681	4,27795

### Resultados da Estimação de $\alpha$ e $\lambda$ para a Amostra de Polythene

A amostra de polythene com espessura de 50 mm e área de 30 x 30 cm<sup>2</sup> apresenta o valor de difusividade térmica estimado e condutividade térmica calculada em

$$\alpha = 2,47530 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \text{ e } \lambda = 0,42853 \text{ W/m.K}$$

avaliados a uma temperatura média de 302K. Observa-se que os valores da condutividade térmica e difusividade térmica fixados para a obtenção das temperatura experimentais simuladas foram de 0,40 W/m.K e 2.3x10<sup>-07</sup>. Assim o valor de  $\lambda$  estimado apresentou um desvio de 7,13% enquanto o encontrado para a difusividade térmica foi de 7,62%. Observa-se ainda que a dispersão entre os valores estimados de  $\lambda$  e  $\alpha$  foram inferiores a 7%.

### Conclusão

A união entre os domínios do tempo e da frequência permitiram, a obtenção de  $\lambda$  e  $\alpha$ . A partir dos dados de fluxo de calor e temperatura fez-se um tratamento diferente para os dois domínios. Partiu-se da definição de um corpo semi-infinito com fluxo de calor imposto na superfície frontal, para a construção do modelo térmico a ser usado na determinação de  $b = \sqrt{\alpha/\lambda}$  no domínio da frequência. Um outro modelo térmico, *um meio finito e isolado em x=L*, foi adotado para a determinação de  $\alpha$  no domínio do tempo. Seu uso deveu-se a possibilidade de se variar a espessura da amostra até a obtenção de uma solução, cujo perfil de temperatura na superfície frontal fosse idêntica ao perfil do modelo semi-infinito. A definição desta espessura permite então o uso simultâneo dos dados experimentais nos dois domínios. Salienta-se, que o valor de  $\alpha$  é extremamente sensível à obtenção precisa do valor de  $b$ . Esse fato implica que a incerteza no valor de  $b$ , deve ser minimizada para que haja sucesso na estimação do parâmetro  $\alpha$ .

### AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer as Agências Governamentais CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1968, "Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", 5th ed., Dover.
- Beck, J. V., and Arnold, K. J., 1977, "Parameter Estimation in Engineering and Science", Wiley, N. Y.
- Beck, J. V., Cole, K. D., Haji-Sheikh, A. and Litkouhi, B., 1992, "Heat Conduction Using Green's Function", Hemisphere Publishing Corporation, USA, 523p.
- Bendat, J. S. And Pierson, A. G., 1986, "Analysis and Measurement Procedures", Wiley - Interscience, 2nd Ed, USA, 566p.
- Guimarães, G., 1993, "Estimação de Parâmetros no Domínio da Frequência para a Determinação Simultânea da Condutividade e Difusividade Térmica." Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 123p.
- Guimarães, G., Philippi, P. C. And Thery, P.; 1995, "Use of Parameters Estimation Method in the Frequency Domain for the Simultaneous Estimation of Thermal Diffusivity and Conductivity", *Review Scientific Instrument*, vol. 66, pp. 2582-2587
- Lima e Silva S. M. M., 1995, "Determinação Simultânea de Propriedades Térmicas Usando Apenas uma Superfície de Acesso Estimação nos Domínios do Tempo e da Frequência". Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 90p.
- Log, T.; 1993, "Transient One-Dimensional Heat Flow Technique for Measuring Thermal Conductivity of Solids", *Review Scientific Instrument*, vol 64, pp 1956-1960
- Parker, W. J., Jenkins, R. J., Butler, C. P. and Abbott, G. L., 1961, "Flash method of determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity", *Journal of Applied Physics*, vol 32, pp 1679-1684

### ABSTRACT

A new method for simultaneous determination of thermal conductivity,  $k$ , and diffusivity,  $\alpha$  of the non-metallic materials is presented. The use of experimental data from only one surface access is the main novelty of the technique. For the thermal diffusivity estimation an one-dimensional thermal model is used. A heat flux history is imposed at the frontal surface of a sample with the other surface isolated. The same experimental data are used to thermal conductivity determination. However, at this case, the heat flux and temperature evolution at the frontal surface are used in a semi-infinite thermal model. In this sense, the thermal effusivity is also estimated





## IMPLEMENTAÇÃO E PROJETO DE UM APARELHO DE DICKERSON PARA DETERMINAÇÃO DE DIFUSIVIDADE TÉRMICA EM PRODUTOS HETEROGÊNEOS

Claudio Luis C. Frankenberg e Simone Bastos

Departamento de Engenharia Química  
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul  
90619-900 - Porto Alegre - RS - Brasil



### SUMÁRIO

*No dimensionamento de processos térmicos, a obtenção das propriedades relativas aos alimentos processados é um grande problema. Na literatura os parâmetros são normalmente aproximações, não refletindo as reais características do alimento. Dentre as propriedades térmicas dos alimentos, a difusividade é a mais usual, pois é um parâmetro que relaciona diretamente outros (massa específica, calor específico e condutividade térmica). O problema na determinação da difusividade térmica em produtos alimentícios é a heterogeneidade dos mesmos. A solução para isto foi a implementação de um Aparelho de Dickerson, que é de fácil construção, operação e requer um tempo pequeno para aquisição de resultados.*

### INTRODUÇÃO

A transferência de calor é o principal fenômeno de transferência utilizado nas operações unitárias da maioria dos processos de conservação de alimentos. O objetivo primordial do tratamento térmico nos alimentos é assegurar a destruição ou inativação dos organismos vivos capazes de deteriorá-los ou prejudicar a saúde do consumidor. Segundo Hersom e Hulland (1974), o tratamento térmico a ser adotado depende de diversos parâmetros e fatores.

Um grande problema na determinação dos parâmetros térmicos na Engenharia de Alimentos é a heterogeneidade dos produtos. Devido a este fato, Dickerson e Read (1975) confeccionaram um equipamento capaz de determinar a difusividade térmica destes produtos.

Propriedades como a condutividade térmica, calor específico e massa específica desempenham um papel importante nas análises e projetos de equipamentos, relacionados com o processamento térmico de alimentos. Em situações onde a transferência de calor ocorre em estado transiente, isto é, há variação da temperatura com o tempo de processamento, a propriedade chamada difusividade térmica torna-se muito útil.

O projeto aqui descrito, surgiu da dificuldade de serem encontrados na literatura os valores de determinadas propriedades necessárias aos cálculos pertinentes ao Processamento Térmico de diferentes tipos de alimentos. Assunto este, estudado nas disciplinas de Engenharia Bioquímica do curso de Engenharia Química da Escola Politécnica da PUCRS. Surgiu, então, a necessidade de implementação de um Aparelho de Dickerson, pois este equipamento, como será descrito, é de fácil construção, operação e requer um tempo relativamente pequeno para obtenção de resultados.

### DIFUSIVIDADE TÉRMICA

Os componentes de uma mistura são parcialmente separados quando esta está sujeita a um gradiente de temperatura, recebendo o nome de difusão térmica ou termodifusão. Devido ao fato da termodifusão ser muito lenta em sólidos, sua aplicabilidade é mais estudada, portanto, em líquidos e gases,

existindo na literatura mais de um milhão de referências à separação de misturas por este método (Perry e Chilton, 1982).

Tais referências incluem-se nas seguintes categorias:

- Experimentos em estágio simples: como a separação é muito pequena, tais experiências são realizadas com o único intuito da determinação da difusividade térmica, existindo métodos para a determinação em misturas líquidas e gasosas.
- Experiências em coluna ou cascata: a mistura fluida é submetida a um gradiente de temperatura horizontal. Este dispositivo foi testado para verificação da teoria da coluna ou separação de uma substância desejada. Também serve a misturas líquidas e gasosas.
- A capacidade que um determinado corpo possui de conduzir calor às suas moléculas adjacentes, servindo como uma medida da quantidade de calor absorvida a um dado gradiente de temperatura, pode ser definida como difusividade térmica.

Teoricamente a difusividade térmica, de um determinado material, é expressa através da Eq. (1) que representa a relação entre a massa específica deste material ( $\rho$ ), a condutividade térmica ( $k$ ) e o calor específico ( $C_p$ ) deste mesmo material.

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C_p} \quad (1)$$

Como pode ser visto, o cálculo da difusividade térmica pela Eq. (1) requer o conhecimento de outras três propriedades, o que torna sua utilização um tanto quanto restrita. Assim sendo, foram desenvolvidos alguns métodos para determinação da condutividade térmica tais como: o método do arame quente (Vos, 1955), método transitório pelo qual a medida pode ser tomada em

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

10 minutos ou quem sabe o desenvolvimento do aparelho da condutividade térmica da chapa quente (Pelanne e Bradley, 1962) que revela somente uma medida de condutividade térmica, porém requer medidas simultâneas de massa específica e calor específico para permitir a evolução da difusividade térmica.

Difusividade Térmica em Alimentos. O conhecimento da difusividade térmica de um alimento é de grande importância na previsão das curvas de aquecimento e resfriamento do seu

processamento, como também na determinação da taxa de letalidade, que é um parâmetro relacionado com a morte ou inativação dos organismos presentes nos produtos alimentícios (Leonhardt et al., 1983).

Dickerson (1968), Hill et al. (1967), Reidy (1968) e Woodman e Nowrey (1968) compilaram os dados experimentais existentes na literatura para a condutividade térmica e a difusividade térmica de vários alimentos e produtos acabados.

A difusividade térmica de um alimento é afetada pelo conteúdo de água, temperatura, composição química e bioquímica e também pela porosidade. Muitos produtos alimentícios são heterogêneos, acarretando em uma variação deste parâmetro de um ponto para outro no produto a ser analisado.

Características físicas inerentes aos alimentos fazem com que durante o tratamento térmico a condução de calor se dê em uma única direção (unidirecionalmente). Estes alimentos apresentam uma alta resistência térmica, pois seu "corpo" funciona como isolante entre o centro do próprio alimento e a fonte de calor. (onde a incidência de calor é menor.)

### APARELHO DE DICKERSON

A falta de dados sobre as propriedades térmicas dos alimentos é um dos maiores obstáculos aos cálculos de processamento térmico. A difusividade térmica é uma destas propriedades e pode ser determinada, em alimentos, de inúmeras maneiras. Os principais métodos de determinação desta propriedade foram descritos por Woodams and Nowrey (1968) e Qashou et al (1970). Basicamente a difusividade térmica é determinada para alimentos, à partir da Eq. (1), ou do Aparelho de Dickerson (figura 1).

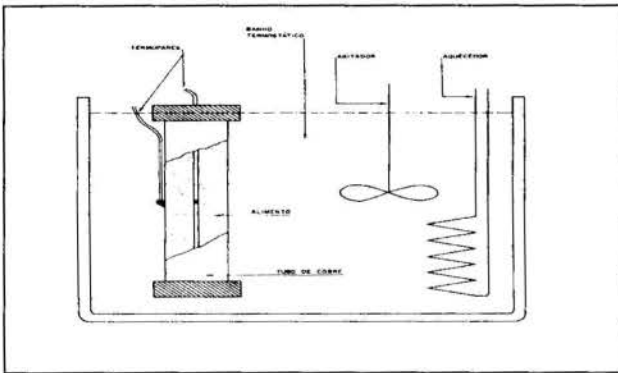


Figura 1 - Esquema de um Aparelho de Dickerson (Dickerson, 1968)

Esta segunda maneira de determinação da difusividade térmica é chamada de método direto. Este equipamento é constituído basicamente de um banho termostático com água, onde se coloca um cilindro infinito (comprimento significativamente superior ao diâmetro). São utilizados também dois termopares, um fixo à superfície do cilindro medindo assim a temperatura da superfície ( $T_s$ ) que inicialmente é aproximadamente igual à temperatura do banho ( $T_b$ ) e o outro encontra-se dentro do cilindro, onde é colocada a amostra, mais precisamente no centro, medindo assim a temperatura central ( $T_c$ ).

O sistema, inicialmente em equilíbrio ( $T_b = T_c$ ), é submetido a um aquecimento constante. A partir deste momento são determinadas as temperaturas do banho e do centro do cilindro em tempos pré-estabelecidos. Considera-se que a temperatura da

superfície do cilindro (onde encontra-se um dos termopares) aumenta igualmente com a temperatura do banho e a temperatura no centro do cilindro aumenta, também, porém com uma diferença temporal entre elas.

A figura 2, apresenta o comportamento da temperatura do banho e do centro do cilindro em função do tempo.

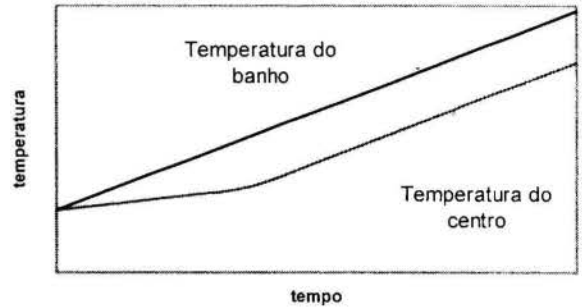


Figura 2 - Relação tempo versus temperatura em um Aparelho de Dickerson

A partir dos dados obtidos da figura 2, plota-se a diferença das duas temperaturas ( $T_b$  e  $T_c$ ) em função do tempo, obtendo-se assim o gráfico apresentado na figura 3. Este segundo gráfico apresenta uma curva onde observa-se que posterior a um determinado tempo a diferença de temperatura ( $\Delta T$ ) se mantém constante. Este  $\Delta T$  é chamado de diferença de temperatura no equilíbrio ( $\Delta T_{eq}$ ). O comportamento da curva na figura 3, é decorrente do fato de que no início do aquecimento do banho existirá uma lacuna temporal entre a superfície e o centro do cilindro, ou seja, o tempo necessário para observarmos a condução do calor da superfície ao centro do cilindro.

A transferência de calor no sistema em estudo ocorre de forma transiente, isto é, os parâmetros em estudo variam com o tempo. A Eq. (2) representa este tipo de transferência.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

Entretanto, como o volume de controle do sistema que compõe o Aparelho de Dickerson é um cilindro o uso da Eq (2) não é pertinente, pois esta representa um sistema cartesiano (x, y e z). Logo é necessária a transformação desta equação para coordenadas cilíndricas (r,  $\theta$  e z), obtendo-se a Eq. (3).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

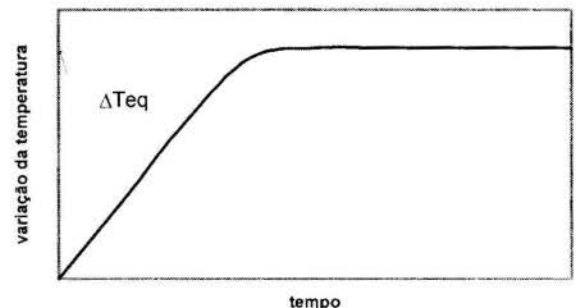


Figura 3 - Relação entre a diferença de temperatura entre o centro e a superfície do cilindro versus o tempo de operação do Aparelho de Dickerson

Desconsiderando-se a temperatura graduada paralela ao eixo do cilindro e também levando-se em conta a falta de temperaturas diferentes ao redor da circunferência, tem-se que,:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4)$$

Logo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5)$$

Considerando-se o  $\Delta T_{eq}$  obtido da figura 3 e utilizando-se as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} r = 0 & \quad T = T_c \\ r = R & \quad T = T_s = T_b \end{aligned}$$

onde:  $r$  = variação da distância radial;

$R$  = raio do cilindro utilizado na confecção do Aparelho de Dickerson.

obtem-se a Eq. (6):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{4\alpha(T_b - T_c)}{R^2} \quad (6)$$

Isolando-se  $\alpha$  (difusividade térmica) da Eq. (6) chega-se à Eq. (7), que é a equação geral para o método direto de determinação deste parâmetro.

$$\alpha = \frac{\left( \frac{dT}{dt} \right) R^2}{4 \Delta T_{eq}} \quad (7)$$

Comparando-se a Eq. (7) com a Eq. (1), nota-se que esta última necessita apenas poucos dados e estes, por sua vez são obtidos em um único experimento.

## MATERIAIS E MÉTODOS

Este projeto, como já citado, está em fase de implementação, sendo que até o momento foram realizados apenas 5 ensaios para verificar a repetibilidade dos dados. Para isto foi utilizado como amostra: um creme de cenoura.

A montagem do equipamento seguiu as especificações dadas por Dickerson (1965). As temperaturas foram registradas em função do tempo com o auxílio de um registrador especialmente calibrado para termopares de cobre-constantan. O meio de aquecimento empregado foi um banho com agitação suficiente para fornecer uma boa homogeneidade ao sistema. O cilindro foi construído em aço inox com diâmetro interno de 3 cm.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A tabela 1 apresenta os dados médios obtidos no experimento de padronização. Na última coluna da tabela está

representada a diferença entre as temperaturas do banho e do centro do cilindro.

Tabela 1 - Parâmetros médios obtidos em um Aparelho de Dickerson

tempo (minutos)	T <sub>b</sub> (°C)	T <sub>c</sub> (°C)	$\Delta T$ (°C)
0	21,0	21,0	0,0
10	29,4	23,0	6,4
20	37,7	26,2	11,5
30	46,2	29,1	17,1
40	54,6	37,5	17,1
50	63,1	45,8	17,3
60	71,5	54,3	17,2
70	79,7	62,5	17,2

Com os dados da tabela 1, pode-se obter:

$$\Delta T_{eq} = 17,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$dT/dt = (79,7-46,2)/(70-30) = 0,8375 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{min}$$

Sabendo-se que  $R = 1,5$  cm e aplicando-se a Eq. (7), calcula-se a difusividade para o alimento em estudo:

$$\alpha = (0,8375 \cdot 1,5^2)/(4 \cdot 17,2) = 0,02738 \text{ cm}^2/\text{min}$$

Comparando-se este valor com os dados encontrados na literatura (Leonhardt et al., 1983) observa-se uma variação de 34%. Conforme Dickerson (1975) o aparelho pode ser usado para determinar a difusividade térmica dos alimentos com exatidão de 5%, e que os dados devem ser obtidos em um tempo máximo de 2 horas de teste, sendo que o aparelho também detecta pontos de descontinuidade, assim como mudanças de estado.

Em todos os 5 ensaios realizados, foi mantida a temperatura inicial do experimento (21 °C). O desvio máximo encontrado foi de 0,5 °C, o que ocorreu nos tempos de 10 e 20 min.

## CONCLUSÃO

Este projeto, como salientado anteriormente, está em fase de implementação, entretanto algumas observações importantes já foram realizadas. O ponto chave, desta fase, foi a confirmação da repetibilidade dos ensaios.

Em relação às limitações e margens de erro, os pontos críticos são: o comprimento finito do cilindro, o transitório inicial, a razão constante de aquecimento (em função do fluxo de água), a diferença de temperatura através da parede do tubo de difusividade, o alinhamento do centro do par termelétrico e a temperatura inicial da amostra.

Atualmente, estamos elaborando um banco de dados com informações de difusividade térmica em diferentes alimentos, para posteriormente usarmos como parâmetro de calibração do equipamento.

## SUMMARY

In the project of thermal processes used in food industry, it is a great problem to obtain the properties related to the preservation of food. The parameters found in literature are usually approaches and do not reflect the real traits of food. The diffusivity is the most common property among the thermal

properties of food, because it is a established limit where density, specific heat and thermal conductivity are related. The problem in the determination of the thermal diffusivity in food products lies in the heterogeneity of the latter. The solution for this was the implementation of a Dickerson apparatus, which is easy to be built up, operated and requires a rather short time for acquisition of results.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dickerson, R.W.Jr 1965. "An Apparatus for the Measurement of Thermal Diffusivity of Foods". *Food Technology*. 19, 198.

Dickerson, R.W. Jr., 1968, "Thermal properties of foods", In: *The freezing preservation of foods*, Vol. 2, AVI Publishing Co., Westport.

Dickerson, R.W.Jr. and Read, R.B.Jr., 1975, "Thermal diffusivity of meats", *ASHRAE Trans.*, Vol. 81, pp. 356-361.

Hersom, A. C., and Hulland, E. D., 1963, "Canned Foods-an Introduction to their Microbiology", 5<sup>th</sup> ed.

Leonhardt, G.F., Vessoni Penna, T.C., Baruffaldi, R. e Colombo, A.J., 1983, "Determinação da difusividade térmica da cenoura (*Daucus carota* L.)", *Ciênc. Tecnol. Aliment.*, Vol. 3, pp. 68-74.

Hill, J.E., Leitman, J.D. and Sunderland, J.E., 1967, "Thermal conductivity of various meat", *Food Technol.*, Vol. 23, pp. 1473-1482.

Pelanne, C.M. and Bradley, C.B., 1962, "A rapid heat-flow meter thermal conductivity apparatus", *Materials Research and Standards*. Vol. 2, pp. 549-553.

Perry, R.H. e Chilton, C.H., 1982, "Manual de Engenharia Química", 5<sup>a</sup> ed., pp. 43-45.

Qashou, M., Nix, G.H., Vachon, R.I. and Lowery, G. W. 1970. "Thermal conductivity values for ground beef and chuck." *Food Technol.* Vol. 24, pp. 493.

Reidy, G.A. 1968, "Methods for determining thermal conductivity and thermal diffusivity of foods", Dept. of Food Science, College of Agriculture & Nature Resources, Michigan State University, East Lansing, Mich.

Vos, B.H., 1955, "Measurements of thermal conductivity by a non steady-state method", *Appl. Sci. Research*, Haghe, Vol. A5, pp. 425-428.





## THERMODYNAMIC PROPERTIES OF WATER AND THEIR MAIN FIRST PARTIAL DERIVATIVES

Marcelo A. Veloso

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear - CDTN  
Comissão Nacional de Energia Nuclear - CNEN  
30161-970 - Belo Horizonte - MG - Brazil



### SUMMARY

*The aim of this work is to present a set of relations to calculate thermodynamic properties of ordinary water substance and their first partial derivatives over wide ranges of pressure and temperature. Starting from approximated equations for temperature and specific volume in function of pressure and specific enthalpy, all the other most relevant properties are evaluated on the basis of the IAPS-84 formulation. Bridgman's table, in conjunction with the IAPS-84 formulation, is used to obtain the first partial derivatives of the thermodynamic properties.*

### INTRODUCTION

The solution of problems related to the thermal-hydraulic design and analysis of boilers, steam turbines, heat exchangers, and any other thermal units requires the knowledge of the thermophysical properties of ordinary water substance over a wide range of parameters.

Two formulations to calculate the thermodynamic properties of water and steam have been recommended in release form by the International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS): the IFC-67 formulation and the IAPS-84 formulation.

The IFC-67 formulation was officially adopted in 1967 by the International Formulation Committee under the name "The 1967 IFC Formulation for Industrial Use". This formulation is divided into several subformulations. The subcritical water and steam regions are separately described by means of Gibbs functions, which have pressure and temperature as independent variables. The supercritical regions are formulated in terms of Helmholtz functions, for which the specific volume and temperature are chosen as the independent variables.

Given international recognition over nearly 30 years ago, the IFC-67 formulation is still in use today and constitutes the basis of steam tables used in many areas of industry throughout the world. The well known 1967 ASME Steam Tables, prepared by Meyer et al. (1968), and Properties of Water and Steam in SI-Units, prepared by Schmidt (1981), are based on the IFC-67 formulation.

The International Association for the Properties of Steam (IAPS), recently renamed IAPWS, replaced in 1984 the IFC-67 formulation by "The IAPS Formulation 1984 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for Scientific and General Use", here abbreviated to IAPS-84 formulation. A single Helmholtz-type equation describes the thermodynamic properties over wide ranges of pressure and temperature, well beyond those of current industrial interest. Temperature and density are the independent variables of this formulation. The NBS/NRC Steam Tables, prepared by Haar, Gallagher and Kell (1984), uses the IAPS-84 formulation.

Even though the calculation speed of computers has been increasing drastically in recent years, there is still need to develop faster algorithms to calculate the thermodynamic properties of water and steam. This applies mainly to computer codes for safety analysis and real-time simulations of large thermal units, such as water-cooled nuclear reactors.

Since temperature and density are rarely found as independent variables, iterative algorithms are required to a much greater extent with computing routines written on the basis of the IAPS-84 formulation.

From the computer time viewpoint, the IFC-67 formulation is more convenient than the IAPS-84 formulation, when the thermodynamic properties are to be evaluated as a function of pressure and temperature in the water and steam regions of primary industrial interest. In this case, the remaining thermodynamic properties are obtained by direct substitution of the values for pressure and temperature into the partial derivatives of the Gibbs functions.

Besides (p, T), the pair pressure and specific enthalpy has also great importance as independent variables in innumerable thermal-hydraulic simulations, specially for those problems in which the energy balance equation is solved in terms of specific enthalpy. Because of this, a set of equations describing the temperature and the specific volume of water and steam as a function of pressure and specific enthalpy have been developed and are presented in this work. Such equations are simple polynomials which reproduce the International Skeleton Tables 1985 (IAPWS, 1994) within acceptable tolerances. Knowing the temperature and the specific volume (or density), the other thermodynamic properties are obtained from the IAPS-84 formulation. Furthermore, the present work is also intended to present a method to calculate the first partial derivatives of thermodynamic properties by using the IAPS-84 formulation and the table for first partial derivatives proposed by Bridgman (1914).

Computing routines written in Fortran 77 language for Personal Computer are available from the author to calculate the thermodynamic properties of water substance and their first partial derivatives in the light of the formulations presented in this paper.

### SOME THERMODYNAMIC RELATIONS FOR A PURE SUBSTANCE

A pure substance is one that has a homogeneous and invariable chemical composition. It may exist in more than one phase, but the chemical composition is the same in all phases. Thus, liquid water and its steam, or a mixture of ice and liquid water are all pure substances, once every phase has the same chemical composition.

The properties of a pure substance are conveniently represented in terms of four functions:

Specific internal energy,  $u$

Specific enthalpy,  $h = u + pv$

Specific free energy (Helmholtz function),  $f = u - Ts$

Specific free enthalpy (Gibbs function),  $g = h - Ts$ .

Thermodynamic variables  $p$ ,  $T$ ,  $v$ , and  $s$  denote the pressure, absolute temperature, specific volume and specific entropy, respectively. Any one of the eight quantities  $p$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $u$ ,  $h$ ,  $s$ ,  $f$ , and  $g$  may be expressed as a function of any two others.

**Maxwell Equations.** For a pure substance which undergoes an infinitesimal reversible process from one equilibrium state to another, fundamental thermodynamics provides the following differential equations:

$$du = Tds - pdv \quad (1)$$

$$dh = Tds + vdp \quad (2)$$

$$df = -sdT - pdv \quad (3)$$

$$dg = -sdT + vdp \quad (4)$$

These four differential equations are exact differentials of the form

$$dz = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

where

$$M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \quad \text{and} \quad N = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x,$$

since the differential of a function  $z(x, y)$  is given by

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy.$$

Partially differentiating  $M$  with respect to  $y$  and  $N$  with respect to  $x$  yields

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{and} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Since the order of differentiation is immaterial, it follows that

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y.$$

This is known as the condition for an exact differential.

Applying the properties of exact differentials to the thermodynamic differential equations, Eqs. (1) to (4), the following relations may be obtained:

1) For  $du = Tds - pdv$

$$T = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v \quad p = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s \quad \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \quad (5)$$

2) For  $dh = Tds + vdp$

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p \quad v = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \quad (6)$$

3) For  $df = -sdT - pdv$

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v \quad p = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \quad (7)$$

4) For  $dg = -sdT + vdp$

$$s = -\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p \quad v = \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad (8)$$

The four equations on the right are known as the Maxwell equations for a pure substance. Maxwell's equations are enormously useful, because they provide relationships between measurable quantities and those which either cannot be measured or are difficult to measure.

**Specific Heat Capacities.** The specific isochoric heat capacity, or specific heat at constant volume, is defined as

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \quad (9)$$

The definition of the specific isobaric heat capacity, or specific heat at constant pressure, is

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \quad (10)$$

An important relation involving  $c_p$  and  $c_v$ , which may be derived from specific entropy  $s = s(T, v)$ , is given by

$$c_p = c_v + T \frac{(\partial p / \partial T)_v^2}{(\partial p / \partial v)_T} \quad (11)$$

**Volume Expansivity and Isothermal Compressibility.** The coefficient of volume expansion, also called the volume expansivity, is an indication of the change in volume that results from a change in temperature while the pressure remains constant. The definition of the volume expansivity is

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad (12)$$

The isothermal compressibility is an indication of the change in volume that results from a change in pressure while the temperature remains constant. The isothermal compressibility is defined by

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \quad (13)$$

**Clapeyron Equation.** In the phase transitions – melting, vaporization, and sublimation – the pure substance is converted reversibly, isothermally, and isobarically from an initial phase (i) to a final phase (f). During the phase transition, the pressure and

temperature remain constant while the entropy and specific volume change. Considering that the various pressures and temperatures at which a phase transition occurs obey a relation in which  $p$  is a function of  $T$  only, the Maxwell relation given by Eq. (6) yields

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_f - s_i}{v_f - v_i} = \frac{h_f - h_i}{T(v_f - v_i)}, \quad (14)$$

since  $T(s_f - s_i) = h_f - h_i$ . This relation, known as Clapeyron's equation, applies to any change of phase or transition that can take place at constant pressure and constant temperature.

In the case of a phase transition from saturated liquid to saturated vapor of a pure substance, the Clapeyron equation may be written as

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{sat}} = \frac{\lambda}{T(v_g - v_l)}, \quad (15)$$

where  $\lambda = h_g - h_l$  is the latent heat of vaporization, and subscripts  $l$  and  $g$  denote the saturated liquid and saturated vapor, respectively.

**First Partial Derivatives.** The table of Bridgman (1914), reproduced in Table 1, is extremely useful when one desires to express - in terms of  $c_p$ ,  $\beta$ , and  $\kappa$  - the first partial derivatives of the eight most frequently used thermodynamic properties, namely  $p$ ,  $T$ ,  $v$ ,  $u$ ,  $h$ ,  $s$ ,  $f$ , and  $g$ .

Because every first partial derivative involves three different variables, the permutations of the eight thermodynamic quantities yield a total of 336 ( $= 8 \times 7 \times 6$ ) of such derivatives. These 336 derivatives are divided into groups identified by the variable kept constant during differentiation. The property enclosed in square brackets,  $[x]$ , indicates that the respective group of relations is either for  $\partial(y)_x$  or  $-\partial(x)_y$ . Notice in general that  $\partial(y)_x = -\partial(x)_y$ .

The Bridgman table does away with the need for tedious algebraic manipulation of thermodynamic relations. For instance, consider the problem of deriving the relationship for the square sound velocity. Using Bridgman's shorthand notation, the relation for this quantity may be written as

$$w^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = -v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -v^2 \frac{(\partial p)_s}{(\partial v)_s}.$$

The expressions for  $(\partial p)_s$  and  $(\partial v)_s$  are given on the third and fourteenth lines of Table 1. Substituting the appropriate expressions, it follows that

$$w^2 = -v^2 \frac{-c_p / T}{-(\beta^2 v^2 - c_p \kappa v) / T} = \frac{vc_p}{c_p \kappa - \beta^2 v}.$$

The derivatives for the coexisting phases of saturated liquid and saturated vapor are obtained by simply introducing either the subscript  $l$  for saturated liquid or the subscript  $g$  for saturated vapor into the equations for single-phase derivatives. Along the saturation line, the vapor pressure is a function of temperature only. A change  $dp$  in the vapor pressure that results from a change  $dT$  in temperature may be determined from the Clapeyron equation, Eq. (15),

$$p' = \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_g - v_l)}, \quad (16)$$

Table 1 - Bridgman's table for first partial derivatives.

[p]	$(\partial T)_p = -(\partial p)_T = 1$ $(\partial v)_p = -(\partial p)_v = \beta v$ $(\partial s)_p = -(\partial p)_s = c_p / T$ $(\partial u)_p = -(\partial p)_u = c_p - \beta p v$ $(\partial h)_p = -(\partial p)_h = c_p$ $(\partial f)_p = -(\partial p)_f = -s - \beta p v$ $(\partial g)_p = -(\partial p)_g = -s$
[T]	$(\partial v)_T = -(\partial T)_v = \kappa v$ $(\partial s)_T = -(\partial T)_s = \beta v$ $(\partial u)_T = -(\partial T)_u = \beta T v - \kappa p v$ $(\partial h)_T = -(\partial T)_h = -v + \beta T v$ $(\partial f)_T = -(\partial T)_f = -\kappa p v$ $(\partial g)_T = -(\partial T)_g = -v$
[v]	$(\partial s)_v = -(\partial v)_s = \beta^2 v^2 - c_p \kappa v / T$ $(\partial u)_v = -(\partial v)_u = \beta^2 T v^2 - c_p \kappa v$ $(\partial h)_v = -(\partial v)_h = \beta^2 T v^2 - \beta v^2 - c_p \kappa v$ $(\partial f)_v = -(\partial v)_f = \kappa s v$ $(\partial g)_v = -(\partial v)_g = \kappa s v - \beta v^2$
[s]	$(\partial u)_s = -(\partial s)_u = \beta^2 p v^2 - c_p \kappa p v / T$ $(\partial h)_s = -(\partial s)_h = -c_p v / T$ $(\partial f)_s = -(\partial s)_f = \beta s v + \beta^2 p v^2 - c_p \kappa p v / T$ $(\partial g)_s = -(\partial s)_g = \beta s v - c_p v / T$
[u]	$(\partial h)_u = -(\partial u)_h = \beta p v^2 + c_p \kappa p v - c_p v - \beta^2 p T v^2$ $(\partial f)_u = -(\partial u)_f = \beta s T v + \beta^2 p T v^2 - c_p \kappa p v - \kappa p s v$ $(\partial g)_u = -(\partial u)_g = \beta p v^2 + \beta s T v - c_p v - \kappa p s v$
[h]	$(\partial f)_h = -(\partial h)_f = -(s + \beta p v)(v - \beta T v) - c_p \kappa p v$ $(\partial g)_h = -(\partial h)_g = \beta s T v - (c_p + s)v$
[g]	$(\partial f)_g = -(\partial g)_f = v(s + \beta p v) - \kappa p s v$

#### EQUATIONS FOR THE THERMODYNAMIC PROPERTIES OF WATER AND STEAM

**IAPS-1984 Formulation.** Values of thermodynamic properties of many substances listed in tables are in general calculated from fundamental analytic functions which describe the Gibbs function or the Helmholtz function. The Gibbs function is usually expressed in terms of the independent variables pressure and temperature. The specific volume (or density) and temperature are in general the independent variables of the Helmholtz function. Such functions are derived from the fitting of theoretical models to selected experimental data. Knowing the Gibbs function or the Helmholtz function of a pure substance, all the other thermodynamic properties may be directly derived by partial differentiation of the fundamental function.

The IAPS-1984 formulation (IAPS, 1984) describes the thermodynamic properties of water and steam through a fundamental equation which expresses the Helmholtz free energy in terms of independent variables density and temperature.

All equations in the IAPS-1984 formulation are presented in non-dimensional form. Let the thermodynamic quantities be defined as follows:

$\delta = \rho/\rho_r$	dimensionless density
$\pi = p/p_r$	dimensionless pressure
$\theta = T/T_r$	dimensionless temperature
$\chi = v/v_r = \rho_r/\rho = 1/\delta$	dimensionless specific volume
$\varepsilon = h/(v_r p_r)$	dimensionless specific enthalpy
$\sigma = s/(v_r p_r/T_r)$	dimensionless specific entropy
$\zeta = g/(v_r p_r) = \varepsilon - \theta\sigma$	dimensionless free enthalpy (Gibbs function)
$\psi = f/(v_r p_r) = \zeta - \pi\chi$	dimensionless free energy (Helmholtz function)

Values for the reference constants are

$$\rho_r = 317.763 \text{ kg/m}^3 \quad p_r = 22.115 \times 10^6 \text{ Pa} \quad T_r = 647.27 \text{ K}$$

These three reference constants are close but not identical to the parameters of the critical point.

The fundamental equation may be written as

$$\psi(\delta, \theta) = \psi_0(\theta) + \psi_1(\delta, \theta) + \psi_2(\delta, \theta) + \psi_3(\delta, \theta) + \psi_4(\delta, \theta) \quad (17)$$

where

$$\psi_0(\theta) = (A_1 + A_2 \theta) \ell n \theta + \sum_{i=3}^{18} A_i \theta^{i-5}$$

$$\psi_1(\delta, \theta) = \delta \sum_{i=1}^5 B_i (1/\theta)^{i-2}$$

$$\psi_2(\delta, \theta) = K \theta \left[ \ell n \left( \frac{\delta}{1-y} \right) - \frac{130}{3(1-y)} + \frac{169}{6(1-y)^2} - 14y \right]$$

$$\psi_3(\delta, \theta) = \sum_{i=1}^{36} D_i (1/\theta)^{m(i)} (1 - e^{-k\delta})^{n(i)}$$

$$\psi_4(\delta, \theta) = \sum_{i=1}^4 E_i \alpha_i^{\mu(i)} \exp(-a_i \alpha_i^{v(i)} - b_i \beta_i^2)$$

with

$$y = \delta(C_1 + C_2 \ell n \theta + C_3 \theta^{-3} + C_4 \theta^{-5})$$

$$\alpha_i = \frac{\delta - \delta_i}{\delta_i} \quad \beta_i = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_i}$$

Due to space limitation, numerical values for the coefficients and parameters of Eq. (17) are not given here; they can either be found in the original source or be obtained from the author.

The IAPS-84 formulation describes the thermodynamic properties of ordinary water substance over the temperature range from 273.15 K to 1273.15 K and over the pressure range defined by the following conditions:

$$0 \leq p \leq 1500 \text{ MPa} \quad \text{for } 423.15 \leq T \leq 1273.15 \text{ K}$$

$$0 \leq p \leq p_{\max} \text{ MPa} \quad \text{for } 274.15 \leq T \leq 423.15 \text{ K}$$

where

$$p_{\max} = 100 \left( 5 + \frac{T - 273.15}{15} \right)$$

A small region around the critical point, bounded by

$$|T - T_r| \leq 1 \text{ K} \quad \text{and} \quad |\rho/\rho_r - 1| \leq 0.3,$$

is excluded.

The main relations for the thermodynamic properties,

$$p = -(\partial f / \partial v)_T \quad s = -(\partial f / \partial T)_v$$

$$h = f + pv + Ts \quad g = f + pv$$

when expressed in terms of the Helmholtz function and its partial derivatives become

$$\pi = \delta^2 \psi_\delta \quad \sigma = -\psi_\theta$$

$$\varepsilon = \psi + \delta \psi_\delta - \theta \psi_\theta \quad \zeta = \psi + \delta \psi_\delta$$

In order to simplify the presentation of thermodynamic relations, the following shorthand notations have been used to denote the partial derivatives of the Helmholtz function:

$$\psi_\delta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \right)_\theta \quad \psi_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_\delta \quad \psi_{\delta\theta} = \left[ \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_\delta \right]_{\theta}$$

Invoking Eqs. (9) and (11), the dimensionless specific heat capacities may be written as

$$\frac{c_v \rho_r T_r}{p_r} = -\theta \psi_{\theta\theta} \quad \text{and} \quad \frac{c_p \rho_r T_r}{p_r} = \frac{\delta \theta \psi_{\delta\theta}^2}{2\psi_\delta + \delta \psi_{\delta\delta}} - \theta \psi_{\theta\theta}$$

The volume expansivity and the isothermal compressibility, defined by Eqs. (12) and (13), expressed in non-dimensional form are given by

$$\beta T_r = \psi_{\delta\theta} [2\psi_\delta + \delta \psi_{\delta\delta}]^{-1} \quad \text{and} \quad \kappa p_r = [\delta^2 (2\psi_\delta + \delta \psi_{\delta\delta})]^{-1}$$

**Saturation Properties.** The equations for the thermodynamic properties of ordinary water substance at saturation are presented here in accordance with an official release issued by the International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS, 1992). The numerical values for the critical parameters which appear in the equations are  $p_c = 22.064 \text{ MPa}$ ,  $T_c = 647.096 \text{ K}$ , and  $\rho_c = 322 \text{ kg/m}^3$ .

The vapor pressure as a function of temperature is given by

$$\ln \left( \frac{p}{p_c} \right) = \frac{T_c}{T} (a_1 \tau + a_2 \tau^{3/2} + a_3 \tau^3 + a_4 \tau^{7/2} + a_5 \tau^4 + a_6 \tau^{15/2}) \quad (18)$$

with  $\tau = 1 - T/T_c$  and

$$a_1 = -7.85951783 \quad a_3 = -11.7866497 \quad a_5 = -15.9618719$$

$$a_2 = 1.84408259 \quad a_4 = 22.6807411 \quad a_6 = 1.80122502$$

The density of the saturated liquid is obtained from

$$\frac{\rho_l}{\rho_c} = 1 + b_1 \tau^{1/3} + b_2 \tau^{2/3} + b_3 \tau^{5/3} + b_4 \tau^{16/3} + b_5 \tau^{43/3} + b_6 \tau^{110/3} \quad (19)$$



where

$$b_1 = 1.99274064 \quad b_3 = -0.510839303 \quad b_5 = -45.5170352$$

$$b_2 = 1.09965342 \quad b_4 = -1.75493479 \quad b_6 = -674694.450$$

The density of the saturated vapor is given by

$$\ln\left(\frac{\rho_g}{\rho_c}\right) = c_1\tau^{2/6} + c_2\tau^{4/6} + c_3\tau^{8/6} + c_4\tau^{18/6} + c_5\tau^{37/6} + c_6\tau^{71/6} \quad (20)$$

with

$$c_1 = -2.03150240 \quad c_3 = -5.38626492 \quad c_5 = -44.7586581$$

$$c_2 = -2.68302940 \quad c_4 = -17.2991605 \quad c_6 = -63.9201063$$

The specific enthalpies of the saturated liquid and vapor are calculated from the following equations:

$$h_f = \alpha + \frac{T}{\rho_f} \left( \frac{dp}{dT} \right) \quad (21)$$

$$h_g = \alpha + \frac{T}{\rho_g} \left( \frac{dp}{dT} \right) \quad (22)$$

where

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = d_\alpha + d_1\theta^{-19} + d_2\theta + d_3\theta^{9/2} + d_4\theta^5 + d_5\theta^{109/2}$$

with  $\theta = T/T_c$ ,  $\alpha_0 = 1000$  J/kg, and

$$d_\alpha = -1135.905627715 \quad d_3 = 127.287297$$

$$d_1 = -5.65134998 \times 10^{-8} \quad d_4 = -135.003439$$

$$d_2 = 2690.66631 \quad d_5 = 0.981825814$$

Eqs. (21) and (22) should be used in conjunction with Eqs. (18), (19), and (20).

**Temperature and Specific Volume of Water and Steam.** The entire surface illustrated on the pressure-enthalpy diagram in Fig. 1 covers a pressure range from 0.1 MPa to 100 MPa and a temperature range from 273.15 K to 1073.15 K. This surface was divided into five regions for which separate equations for temperature and specific volume as a function of pressure and specific enthalpy were developed.

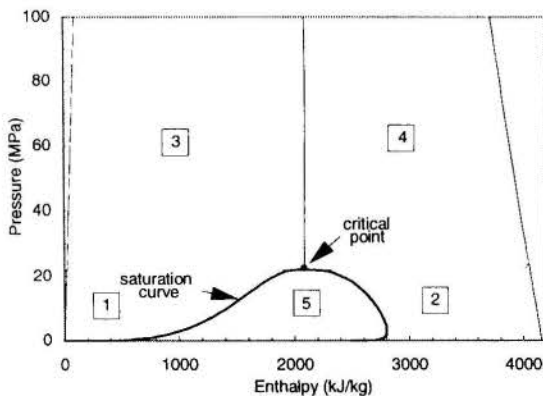


Figure 1 - Regions for Water and Steam

Regions 1 and 2 refer to subcritical liquid water and subcritical vapor, respectively. The supercritical states are represented by regions 3 and 4. The fifth region bounded by the saturation curve is the two-phase region. The boundary between regions 3 and 4 is defined by a vertical line passing through the critical point. The left side boundary of regions 1 and 3 is defined by the 273.15 K isothermal. The 1073.15 K isothermal defines the right side boundary of regions 2 and 4.

The simplified equations presented herein were obtained by applying the general least-squares regression method to property data generated with the IAPS-84 formulation.

The temperatures in the regions shown in Fig. 1 are approximated by the following equations:

*Region 1* -  $0.1 \text{ MPa} \leq p \leq p_c$  and  $h \leq h_f(p)$

$$T/T_c = \sum_{k=1}^9 A1(k)(1-p/p_c)^{11(k)}(1-h/h_c)^{11(k)} \quad (23a)$$

*Region 2* -  $0.1 \text{ MPa} \leq p \leq p_c$  and  $h \geq h_g(p)$

$$T/T_c = \sum_{k=1}^{21} A2(k)(1-p/p_c)^{12(k)}(h/h_c - 1)^{12(k)} \quad (23b)$$

*Region 3* -  $p_c < p \leq 100 \text{ MPa}$  and  $h \leq h_c$

$$T/T_c = \sum_{k=1}^{11} A3(k)(\sqrt{p/p_c})^{13(k)}(h/h_c)^{13(k)} \quad (23c)$$

*Region 4* -  $p_c < p \leq 100 \text{ MPa}$  and  $h > h_c$

$$T/T_c = \sum_{k=1}^{21} A4(k)(p/p_c)^{14(k)}(h/h_c)^{14(k)} \quad (23d)$$

*Region 5* -  $0.1 \text{ MPa} \leq p \leq p_c$  and  $h_f(p) < p < h_g(p)$

$$T/T_c = \sum_{k=1}^9 A1(k)(1-p/p_c)^{11(k)}[1-h_f(p)/h_c]^{11(k)} \quad (23e)$$

Values for the critical parameters are  $p_c = 22.064$  MPa,  $T_c = 647.096$  K, and  $h = h_f(p_c) = h_g(p_c) = 2086.57$  kJ/kg. The saturated enthalpies  $h_f(p)$  and  $h_g(p)$  are obtained from Eqs. (21) and (22), respectively. Numerical values for coefficients and exponents are available from the author. Notice that in the two-phase region (region 5) the temperature is constant along lines of constant pressure. Alternatively, the temperature in this region should also be obtained from Eq. (18). In this case, the Newton-Raphson iterative method should be used to solve the resultant implicit equation.

The equations for the specific volume as a function of pressure and specific enthalpy are the following:

*Region 1* -  $0.1 \text{ MPa} \leq p \leq p_c$  and  $h \leq h_f(p)$

$$\frac{v}{v_c} = \sum_{k=1}^{16} B1(k) \left( 1 - \frac{p}{p_c} \right)^{M1(k)} Y^{N1(k)} \quad (24a)$$

with  $Y = \exp(-1) - \exp(-h/h_c)$ .

*Region 2* -  $0.1 \text{ MPa} \leq p \leq p_c$  and  $h \geq h_g(p)$

$$\frac{v}{v_c} = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{14} B2(k) \left[ \ln \left( \frac{p}{p_c} \right) \right]^{M2(k)} \left[ \ln \left( \frac{h}{h_c} \right) \right]^{N2(k)} \right\} \quad (24b)$$

Region 3 -  $p_c < p \leq 100$  MPa and  $h \leq h_c$

$$\frac{v}{v_c} = \exp \left[ - \sum_{k=1}^{16} B3(k) \left( \frac{p}{p_c} \right)^{2M3(k)} \left( \frac{h}{h_c} \right)^{3N3(k)/4} \right] \quad (24c)$$

Region 4 -  $p_c < p \leq 100$  MPa and  $h > h_c$

$$\frac{v}{v_c} = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{15} B4(k) \left[ \ln \left( \frac{p}{p_c} \right) \right]^{M4(k)} \left[ \ln \left( \frac{h}{h_c} \right) \right]^{N4(k)} \right\} \quad (24d)$$

Region 5 -  $0.1$  MPa  $\leq p \leq p_c$  and  $h_f(p) < p < h_g(p)$

$$v = v_f(p) + x[v_g(p) - v_f(p)] \quad (24e)$$

where  $x$  is the steam quality, given by  $x = (h - h_f)/(h_g - h_f)$ . The specific volume for saturated liquid and vapor,  $v_f(p)$  and  $v_g(p)$ , may be calculated from Eqs. (19) and (20), respectively. Values for the critical parameters are  $p_c = 22.064$  MPa,  $v_c = 1/322$  m<sup>3</sup>/kg, and  $h = h_f(p_c) = h_g(p_c) = 2086.57$  kJ/kg. Numerical values for coefficients and exponents are available from the author.

The maximum deviations in temperature and specific volume between values calculated by the previous equations and values of the International Skeleton Table 1985 (IAPWS,1994) are summarized in Table 2.

Table 1 - Maximum deviations (in %) in temperature and specific volume.

	Temperature	Specific Volume
Region 1	0.18	0.29
Region 2	0.32	0.43
Region 3	0.22	0.38
Region 4	0.18	0.65
Saturation Curve	0.44	0.36

## COMPUTING ROUTINES

On the basis of the formulations presented in this work, the following routines were written in Standard Fortran 77 language for Personal Computer:

**FUNCTION PSAT.** This routine calculates the vapor pressure as a function of temperature according to Eq. (18).

**FUNCTION TSAT.** For a given value of pressure, this routine computes the saturation temperature by using the Newton-Raphson iterative method to find the root of Eq. (18).

**FUNCTION VSLIQ.** Routine VSLIQ calculates from Eq. (19) the specific volume of saturated liquid water as a function of temperature.

**FUNCTION VSVAP.** For a given temperature, this routine calculates the specific volume of saturated vapor by using Eq. (20).

**FUNCTION HSLIQ.** Routine HSLIQ computes from Eq. (21) the specific enthalpy of saturated liquid water in function of temperature.

**FUNCTION HSVAP.** Routine HSVAP makes use of Eq. (22) to calculate the specific enthalpy of saturated vapor as a function of temperature.

**SUBROUTINE TDEPEH.** This routine calculates from Eq. (23) the temperature in function of pressure and specific enthalpy for the regions illustrated in Fig. 1.

**SUBROUTINE VDEPEH.** This routine determines from Eq. (24) the specific volume in function of pressure and specific enthalpy for the regions shown in Fig. 1.

**SUBROUTINE HELM.** Routine HELM calculates non-dimensional values for the Helmholtz function and its first and second partial derivatives in accordance with the IAPS-84 formulation. The independent variables are dimensionless density and dimensionless temperature.

**SUBROUTINE DERIV.** Computes first derivatives of thermodynamic properties in function of temperature and specific volume by using the Bridgman table in conjunction with the IAPS-84 formulation.

## CONCLUSIONS

The backward equations for temperature and specific volume in function of pressure and specific volume reproduce the International Skeleton Tables values with deviations that do not exceed  $\pm 0.7\%$ . This error margin could be reduced by considering more consistent regions and corresponding functional relations on the pressure-enthalpy diagram, and by using advanced methods for property data regression. The proposed algorithm has a simple mathematical structure and represents an interesting alternative to evaluate thermodynamic properties of water and steam, without the need for complex iterative schemes.

## REFERENCES

- Bridgman, P. W., 1914, "A Complete Collection of Thermodynamic Formulas", Physical Review, Vol. III, No. 4, pp. 273-281.
- Haar, L., Gallagher, J. S., and Kell, G. S., 1984, "NBS/NRC Steam Tables", Hemisphere Publishing Corp., New York, NY.
- International Association for the Properties of Steam, 1984, "Release on the IAPS Formulation 1984 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for Scientific and General Use", IAPWS Secretariat, National Bureau of Standards, Gaithersburg, MD.
- International Association for the Properties of Water and Steam, 1992, "Revised Supplementary Release on Saturation Properties of Water and Steam", IAPWS Secretariat, National Bureau of Standards, Gaithersburg, MD.
- International Association for the Properties of Water and Steam, 1994, "IAPWS Release on the Skeleton Tables 1985 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance", IAPWS Secretariat, National Bureau of Standards, Gaithersburg, MD.
- Meyer, C. A., 1968, "1967 ASME Steam Tables", The American Society of Mechanical Engineers, New York, NY.
- Schmidt, E., 1981, "Properties of Water and Steam in SI-Units", Springer-Verlag, München, Germany.



## OOP APPROACH FOR CALCULATING THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF HIGH-TEMPERATURE GAS MIXTURES

Jorge Koreeda and José Nivaldo Hinckel

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE/DMC

Av. dos Astronautas 1758, São José dos Campos - SP 12201-970 Brazil

Hélio Engholm Jr.

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

CTA/ITA/IEA, São José dos Campos - SP 12228-900, Brazil



### SUMMARY

*The basic mechanisms of the object-oriented programming languages are applied in the computational modelling of high-temperature gas mixtures. The code structure is presented, including a data type that contains the properties, and the behavior of gaseous species. An structured spectroscopic data base for atomic, diatomic and polyatomic species is introduced. Thermophysical properties are evaluated using the methods of statistical mechanics. For diatomic molecules, a formulation is introduced to account for multiple temperature models (with translational, rotational, vibrational, and electronic temperatures).*

### INTRODUCTION

The evaluation of thermodynamic and transport properties of high-temperature chemically reacting gases has been investigated during the last three decades. In particular, in the 60's and beginning of the 70's several related computational codes appeared. Among them, the most utilized one was that developed by Gordon and McBride (1971), later enhanced with the inclusion of transport properties evaluation (Svehla and McBride, 1973). Many other works have been made specifically for equilibrium and nonequilibrium calculations in air (for example, Gupta et al., 1991). The methods of calculation are well known, and comes from statistical mechanics and kinetic theory of gases. However, the existing computational codes do not have a structure that mimics the physical processes. These codes are a straight placement of calculation procedures. This top down approach is typical of procedural programming languages, and have their inherent problems. In a procedural language, functions are created to operate on the data. A program to calculate thermophysical properties of gases is one case where procedural languages can produce large, and complex programs, with difficult maintenance. Object-oriented programming (OOP) languages have been used for some time for system, graphical user interface, and other complex programming tasks. However, OOP merits have been barely exploited in scientific/engineering applications. Examples of works in the OOP direction are given by Hinckel (1995) and Koreeda and Hinckel (1996). In this paper we describe how the principles of object-oriented programming can be applied to create a type that describes the properties, and the behavior of a gaseous species, and how this type can be applied in mathematical models of physical phenomena involving gaseous species. In the sequence, OOP fundamentals and modelling, the species data base, and the evaluation of thermophysical properties (including a simplified multi-temperature modelling) are discussed.

ted programming is a widely used terminology, and to a certain extent means quite different different things to different people. Nonetheless, it is generally accepted that this programming style should support data encapsulation, inheritance and polymorphism. An introduction to OOP concepts is found in many textbooks (for example, Cantù and Tendon, 1992).

By data encapsulation we understand a mechanism that permits the centralization of all data under the control of a type manager. Access to these data is granted by the type manager, only to those special purpose program segments, expressly designed to operate on them. By restricting the access to the program data, it is easier to avoid undesirable side-effects that can occur when data are globally accessible.

The inheritance mechanism supports the creation of new data types based on previously defined ones. The main task of programming in this environment is the definition and creation of the types that will be used to describe the phenomenon, or the physical model we want to simulate. The new type inherits the data and functionality of the parent type. The distinctive characteristics of the new type is implemented by adding new data, and adding or changing functionality.

Polymorphism is the mechanism that allows a uniform treatment of objects of different types, each one responding according to its own nature. We can, for example, compare to real numbers, complex numbers, or matrices using the same syntax statement, ( $a == b$ ). If  $a$  and  $b$  are real, this statement will inform the computer to compare the value of  $a$  and  $b$ ; if  $a$  and  $b$  are complex numbers, both the real and the complex parts of  $a$  and  $b$  will be compared. Similarly, in the third case, the size and the values of the two matrices will be compared.

Many programming languages offer support for object-oriented programming: Ada, C++, Eiffel, and Smalltalk are among them. In particular, C++ and other languages, support object-oriented programming through the mechanism of classes. The class mechanism permits the definition of types that emulate a problem, a piece of equipment, or the behavior of a system by means of an abstract description. Some classes of problems or applications are better suited

### THE OOP APPROACH

What Is Object-Oriented Programming? Object-orient-

for the use of the object-oriented programming paradigm. Notably in the graphical user interface programming, the object-oriented style is used extensively. Objects like windows, fonts and an enormous quantity of widgets are described by the class mechanism or other class-like structures.

In some engineering problems, it is not always clear what kind of class can be defined, or what is the nature of the types involved. This is especially true if the programmer was trained in the traditional procedural languages, where a very limited number of types are available, and the creation of new types is not supported. The effective use of the object-oriented programming requires significant change in the approach we use to solve a problem, or to model a system. Instead of declaring a great number of variables, and devising algorithms that operate on them, we must look for abstractions that describe the behavior of the system, what are the "loads" applied to the system, and what is the response of the system to these loads.

Application To Gas Modelling. Gaseous species are present in a great number of practical interest processes, in different engineering disciplines. In some applications, a perfect gas model is used. In other applications, a more complex gas model taking into account the excitation of electronic, vibrational, and rotational energy states is required. In this article, we describe the implementation of a gaseous species type, with the functionality required by applications involving thermodynamic processes.

At the top of our derivation list is an abstract class describing the functionality required by gaseous species, independently of the gas model used. All objects of the type gas have properties like molar mass, thermodynamic properties (internal energy, enthalpy, etc.), and transport properties (viscosity, thermal conductivity, diffusivity, etc.).

The molar mass does not depend on the gas model used. The thermodynamic and transport properties depend on the gas model used. For perfect gases the thermodynamic properties are simple functions of the temperature and pressure. For "thermally active gases" the thermodynamic properties are obtained from calculations that take into account the distribution of energy over the internal energy levels.

Figure 1 illustrates the definition of our abstract gaseous species class. The main characteristics of the class mechanism of C++ are illustrated in this figure:

```
class Tspecies {
public:
    Tspecies()
    Tspecies( char *name );
    Tspecies( Tspecies & );
    ~ Tspecies();
    virtual double Energy( double ) = 0;
    virtual double Enthalpy( double ) = 0;
    virtual double Cv( double ) = 0;
    . . .
    char *Name() { return fname; }
protected:
    char *fname;
    double fmolMass;
    static double frUniv;
};
```

Figure 1 - Abstract gaseous species class

```
class TperfectSpecies: public Tspecies {
public:
    TperfectSpecies();
    TperfectSpecies( char *name );
    TperfectSpecies( TperfectSpecies & );
    ~ TperfectSpecies();
    double Energy( double );
    double Enthalpy( double );
    double Cv( double );
    . . .
protected:
};
```

Figure 2 - Class for perfect gases

- The class has a public and a protected (private) section. In the public section, those functions and data members that are intended to be used by the client programs are declared. The statements `Tspecies()` and `Tspecies(char *name)` are constructors for class objects. The function `Energy(Temperature)`, returns the value of the gas species energy for a given temperature. The function `Name` is an access function that permits read-access to the data member `fname`. Default values are given to the functions.
- In the protected section, we declare those data members and functions intended for use only by other member functions. In Fig. 1, we are stating that all gaseous species objects will have a name and a molar mass, which can be different for the class objects. The universal gas constant is declared static: it has the same value for all objects.
- This is an abstract class. We state in a general way what are the data and functionality of the class, i.e., we say that every object of this class must have a member function that calculates its energy, and that the energy is a function of the temperature. The exact form of this function will depend on the gas model used, and will be given when we define a concrete class, like a perfect gas class, or a thermally active gas class.

Figures 2 and 3 illustrate the declarations of the concrete gas types, the perfect gas `TperfectGas` and the thermally active gas `TthermoGas`.

```
class TthermoSpecies: public Tspecies {
public:
    TthermoSpecies();
    TthermoSpecies( char *name );
    TthermoSpecies( TthermoSpecies & );
    ~ TthermoSpecies();
    double Energy( double );
    double Enthalpy( double );
    double Cv( double );
    . . .
protected:
    double *vibLevels;
    double Ix, Iy, Iz;
    . . .
};
```

Figure 3 - Class for thermally active gases



```
TperfecSpecies gas1("N2");
TthermoSpecies gas2("N2");
Energy1 = gas1.Energy(3000);
Energy2 = gas2.Energy(3000);
```

Figure 4 - Example showing how to use the classes

Both concrete types inherit all data and function members from Tspecies. The functions declared virtual in the base class, are defined in each derived class, each one according to the gas model used.

The class ThermoSpecies also needs some additional data members to store the vibrational energy levels for the species and inertia moments. The inertial moment will only be used if the species is a molecular species with two or more atoms.

Having these new types available we can now use the programming style shown in Figure 4.

Variable Energy1 receives the value of the internal energy of the gas species N2 at 3000 K computed from a perfect gas model. Variable Energy2 receives the value of the internal energy of gas species N2, computed from a thermally active gas model.

Structured Data Base A structured data base containing the spectroscopic and physical constants of the chemical species was built to allow profitable changes and updates. There

are 19 chemical species including atomic, diatomic and polyatomic species, usually found in the combustion processes of liquid rocket engines and aerothermodynamics. The following species are included in the data base: H, N, O, Ar, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, NO, CO, OH, H<sub>2</sub>O, CO<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>, N<sup>+</sup>, O<sup>+</sup>, Ar<sup>+</sup>, N<sub>2</sub><sup>+</sup>, O<sub>2</sub><sup>+</sup> and NO<sup>+</sup>. Further species data can be added.

The data base is illustrated in Fig. 5, where molecular nitrogen data are shown. Other species have similar data structures. To allow the data base reading, The standard input stream is redefined conveniently in the private part of the classes, For example, in the TthermoSpecies class, reading of spectroscopic data, like vibrational and rotational constants, can be easily handled. Some characteristics of the redefined input stream are:

- Use of keywords to identify the species data (for example, SPECIES NAME). The input data is searched after the keyword (N2).
- There is not a rigid record structure to place data. Keywords followed by the respective data can be placed in any order of appearance. This avoids the possibility of having undesirable results by misplacing data.
- An error message identifies the missing data, if this is the case. This avoids the possibility to have variables with "empty data".
- The "#" mark can be used to place comments.

```
SPECIES NAME = N2 # Name of species: molecular nitrogen
GEOMETRY = 2 # Species geometry; atom:0; linear molecule:2; 3D molecule:3
MOLAR MASS = 28.0 # [g/mol] 4.6517509e-26 [kg] {4}
DELTAHO = 0 # Enthalpy of formation defined at 0 K {2}
DI = 1.132520e5 # Dissociation energy [K] {1}
IO = 1.808066e5 # Ionization energy [K] {1}
F = 0.5 # Rotational symmetry number
NE = 4 # Truncated energy levels

# Electronic energies
Eele degen # Electronic energy of level |1>, and degeneracy g
0 1 # X 1SIGMA+ {2} level 0
72231.417 3 # A 3SIGMAu+ {2} 1
85778.461 6 # B 3PIg {2} 2
86049.885 6 # W 3DELTAu {2} 3

# Vibrational constants
we wexe weye weze # {1,1,1,1} level 0
3393.437 20.6089 -0.003252 -3.45e-4

# Rotational constants
Be alphax alphay alphaz # {2,1,7,7} level 0
2.8750068 2.49166e-02 0 0

# Maximum vibrational quantum number before dissociation
vmax # {3} level 0
50

:::
```

Figure 5 - Part of the species data base

Another redefined input stream is made for the perfect gas model class. (TperfectSpecies). Similarly, redefined output streams are implemented in different classes. Different physical modelling for the same species will produce different data input and output. This constitutes another example of polymorphism, i.e., data input and output behave differently according to the gas model.

## THERMOPHYSICAL MODELLING

**Thermodynamic Properties.** The calculation of thermodynamic properties of atoms and diatomic molecules follows Koreeda's (1990), and Koreeda and Hinckel's work (1989, 1991, 1992). The extensions to include polyatomic species follows Pimentel's work (1995). The present code is valid for temperatures from 300 to 4000 K, and pressures from  $10^{-4}$  to 1000 bar. In case of air, the temperature range is from 300 to 15000 K. The thermodynamic properties are evaluated using the methods of statistical mechanics, and detailed derivations can be found in Koreeda's work (1990). In this reference, properties like energy, enthalpy, entropy, specific heats, speed of sound, etc. are evaluated for equilibrium air. Also in this reference, the chemical composition is calculated by means of the equilibrium constant method. On the other hand, Pimentel uses the maximization of entropy method, which is called "minimization of free energy" method in many references (Gordon and McBride, 1971). Pimentel also uses functions derived directly from statistical mechanics. The present code is currently based on the equilibrium constant method, however, implementation on the the maximization of entropy method is on the way. Here, only the treatment for multi-temperature models for diatomic molecules is discussed, since it was not found in the current literature.

### Multi-Temperature Model For Diatomic Molecules.

The statistical mechanics equations for evaluating properties of diatomic molecules are modified to include the simulation of multi-temperature models. Consequently, the present code allows the inclusion of thermal nonequilibrium among the translational and the internal modes of energy (electronic, vibrational, and rotational modes).

First, it is necessary to generalize the partition function to include electronic, vibrational, and rotational temperatures, respectively,  $T_{ele}$ ,  $T_{vib}$ ,  $T_{rot}$ . The translational partition function related to the translational temperature  $T_{trans}$  is not modified. The generalization of the coupled partition function for diatomic molecules used by Koreeda (1990) and Pimentel (1995) is,

electronic contribution:

$$q_i^{int}(T_{rot}, T_{vib}, T_{ele}) = \sum_{l=0}^{l_{trunc}} g_l^l q_i^{vib} \exp(-\epsilon_{ele}^l / kT_{ele}) \quad (1)$$

vibrational contribution:

$$q_i^{vib}(T_{rot}, T_{vib}) = \sum_{v=0}^{v_{max}} q_i^{rot} \exp(-\epsilon_{vib}^v / kT_{vib}) \quad (2)$$

rotational contribution:

$$q_i^{rot}(T_{rot}) = f(b_v T_{rot} + d_v T_{rot}^2 + f_v T_{rot}^3 + h_v T_{rot}^4 + m_v T_{rot}^5); \quad (3)$$

where  $q_i^{int}$ ,  $q_i^{vib}$ , and  $q_i^{rot}$  are, respectively, internal (electronic), vibrational and rotational partition functions,  $k$  is

Boltzmann constant,  $\epsilon_{ele}^l$  and  $\epsilon_{vib}^v$  are, respectively, electronic and vibrational molecular energies,  $g_l^l$  is electronic degeneracy,  $f$  is rotational symmetry number, and  $b_v$ ,  $d_v$ ,  $f_v$ ,  $h_v$  and  $m_v$  are spectroscopic constants.

The internal energy per molar unit of the species  $i$  is given by

$$e_i^{int} = \mathcal{R} T_{int} \frac{T_{int}}{q_i^{int}} \frac{dq_i^{int}}{dT_{int}} \quad (4)$$

where  $\mathcal{R}$  is the universal gas constant, and  $T_{int}$  is a temperature associated to the internal molecular energy.

We define  $dq_i^{int}/dT_{int}$  as

$$\frac{dq_i^{int}}{dT_{int}} = \frac{\partial q_i^{int}}{\partial T_{rot}} + \frac{\partial q_i^{int}}{\partial T_{vib}} + \frac{\partial q_i^{int}}{\partial T_{ele}} \quad (5)$$

It can be verified that Eq. 5 is correct in the one-temperature model, or equilibrium case, i.e.,  $T = T_{int} = T_{ele} = T_{vib} = T_{rot}$ . However, Eq. 5 is an approximation in the nonequilibrium case, and may not hold in a situation of high nonequilibrium.

The specific heat at constant pressure and constant volume for a single species, respectively, are given by,

$$c_p = c_p^{trans} + c^{int} \quad (6)$$

$$c_v = c_v^{trans} + c^{int} \quad (7)$$

where the contributions from translational energy are

$$c_p^{trans} = \frac{5}{2} \mathcal{R} \quad \text{and} \quad c_v^{trans} = \frac{3}{2} \mathcal{R} \quad (8)$$

The contribution from the internal energy is given by

$$c_i^{int} = \left( \frac{\partial e_i^{int}}{\partial T_{int}} \right) \quad (9)$$

Using definition 5, Eq. 9 becomes

$$c_i^{int} = c_i^{rot} + c_i^{vib} + c_i^{ele} + c_i^{coup} \quad (10)$$

where  $c_i^{ele}$ ,  $c_i^{rot}$ ,  $c_i^{vib}$  and  $c_i^{coup}$  are given by

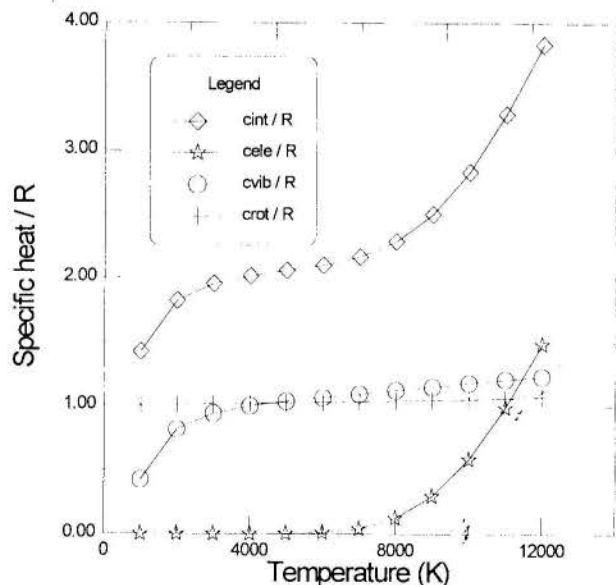


Figure 6 - Contributions for the internal specific heat of  $N_2$

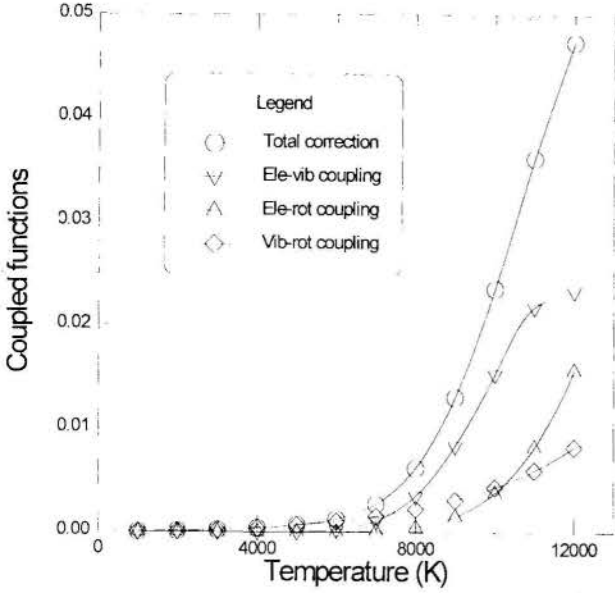


Figure 7 - Contribution of coupling among the internal modes of energy of N<sub>2</sub>

rotational contribution:

$$c_i^{\text{rot}} = \mathcal{R} \left[ 2 \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{rot}}} - \left( \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{rot}}} \right)^2 + \frac{T_{\text{int}}^2}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial^2 q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{rot}}^2} \right] \quad (11)$$

vibrational contribution:

$$c_i^{\text{vib}} = \mathcal{R} \left[ 2 \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{vib}}} - \left( \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{vib}}} \right)^2 + \frac{T_{\text{int}}^2}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial^2 q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{vib}}^2} \right] \quad (12)$$

electronic contribution:

$$c_i^{\text{ele}} = \mathcal{R} \left[ 2 \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{ele}}} - \left( \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{ele}}} \right)^2 + \frac{T_{\text{int}}^2}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial^2 q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{ele}}^2} \right] \quad (13)$$

The last term in Eq. 10,  $c_i^{\text{coup}}$ , refers to the coupling effect among the internal modes of energy in the partition function. This coupling term itself is composed by three parcels reflecting the interaction between electronic-vibrational, electronic-rotational, and vibrational-rotational interactions, respectively,  $c_i^{\text{ele-vib}}$ ,  $c_i^{\text{ele-rot}}$ , and  $c_i^{\text{vib-rot}}$ . The coupling term is given by

$$c_i^{\text{coup}} = c_i^{\text{ele-vib}} + c_i^{\text{ele-rot}} + c_i^{\text{vib-rot}} \quad (14)$$

where the specific coupling parcels are

$$c_i^{\text{ele-vib}} = 2\mathcal{R} \left[ \frac{T_{\text{int}}^2}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial^2 q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{ele}} \partial T_{\text{vib}}} - \left( \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \right)^2 \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{ele}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{vib}}} \right] \quad (15)$$

$$c_i^{\text{ele-rot}} = 2\mathcal{R} \left[ \frac{T_{\text{int}}^2}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial^2 q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{ele}} \partial T_{\text{rot}}} - \left( \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \right)^2 \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{ele}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{rot}}} \right] \quad (16)$$

$$c_i^{\text{vib-rot}} = 2\mathcal{R} \left[ \frac{T_{\text{int}}^2}{q_i^{\text{int}}} \frac{\partial^2 q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{vib}} \partial T_{\text{rot}}} - \left( \frac{T_{\text{int}}}{q_i^{\text{int}}} \right)^2 \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{vib}}} \frac{\partial q_i^{\text{int}}}{\partial T_{\text{rot}}} \right] \quad (17)$$

```
TthermoSpecies gas("N2");
double CvOneTempModel = gas.Cv(3000);
double CvTwoTempModel = gas.Cv(3050,3000);
double CvThreeTempModel
    = gas.Cv(3100,3050,3000);
double CvFourTempModel
    = gas.Cv(3150,3100,3050,3000);
```

Figure 8 - Example showing how to use multi-temperature models

Although the internal specific heat is divided in electronic, vibrational, and rotational parcels (Eq. 10), these contributions are not totally decoupled. The advantage of the present procedure is to allow the calculation of electronic, vibrational and rotational specific heats, independently, not loosing the coupling effect among the internal modes of energy. In particular, in the present paper, vibrational and rotational specific heats are used to calculate the heat conductivity. As an illustration, the contributions of the internal modes of energy to the molar specific heat of the nitrogen molecule, in equilibrium, is shown in Fig. 6. The corresponding coupling parcels, Eqs. 14 - 17, are illustrated in Fig. 7. The mathematical expressions of the present section are implemented in the `TthermoSpecies` class, in such a way to allow transparent use of different multi-temperature models. The generalization of the code in Fig. 3 is made by declaring the public functions with four `double` arguments. For example, we declare `double Cv( double T, double Tele, double Tvib, double Trot )` instead of `Cv( double T )`. A C++ piece of code using multitemperature models looks like Fig. 8. The polymorphic characteristic of C++ is exploited in these examples. The following temperature models are used:

- One-temperature model (equilibrium). The specific heat at constant volume `CvOneTempModel` is calculated with temperature  $T_{\text{trans}} = T_{\text{ele}} = T_{\text{vib}} = T_{\text{rot}} = 3000$  K.
- Two-temperature model. The specific heat at constant volume `CvTwoTempModel` is calculated with temperature  $T_{\text{trans}} = T_{\text{rot}} = 3050$  K, and  $T_{\text{ele}} = T_{\text{vib}} = 3000$  K.
- Three-temperature model. The specific heat at constant volume `CvThreeTempModel` is calculated with temperature  $T_{\text{trans}} = T_{\text{rot}} = 3100$  K,  $T_{\text{ele}} = 3050$ , and  $T_{\text{vib}} = 3000$  K.
- Four-temperature model. The specific heat at constant volume `CvFourTempModel` is calculated with temperature  $T_{\text{trans}} = 3150$ ,  $T_{\text{ele}} = 3100$  K,  $T_{\text{vib}} = 3050$ , and  $T_{\text{rot}} = 3000$  K.

Transport Properties. The transport properties model is based on Engholm's work (1996). As an illustration, the thermal conductivity of equilibrium air, for pressure of 1 atm, is shown in Fig. 9. In this figure, present calculation is compared with other modelling results (Hansen, 1959; Gupta et al., 1991). The equilibrium and chemically frozen curves are results from the present analysis. To simplify the calculations, in Fig. 9 the present calculation does not include ions influence in the reaction parcel of the thermal conductivity, although ionization is considered in the calculation of the chemical equilibrium composition. Even with this simplification, reasonable agreement is seen in Fig. 9.

However, in the viscosity calculations, it is necessary to consider ionized species, since their presence greatly affects the viscosity, even at small concentrations.

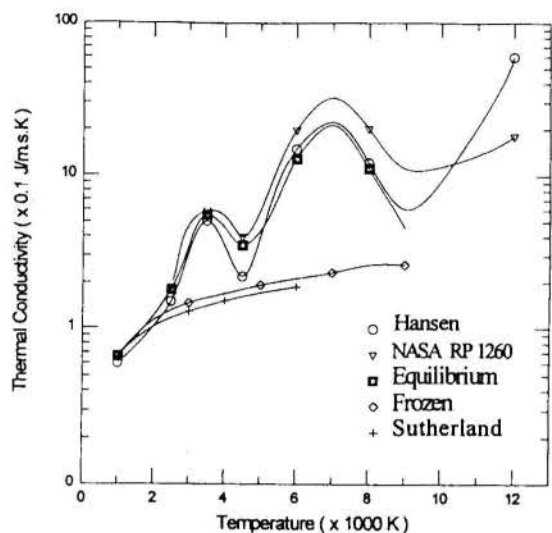


Figure 9 - Comparison of thermal conductivity of equilibrium air calculated with different air models. Pressure is 1 atm.

#### FINAL REMARKS

In this paper, it was shown how the mechanisms of the object-oriented approach can be used in the computational modelling of gaseous species. OOP approach is a programming alternative to many engineering problems, although it is not so employed yet. The idea is to build classes that mimics, and emulate the physics of the problem, or objects themselves. In particular, a computational type was created in C++, to model the properties and behavior of gaseous species. Among the main characteristics of OOP languages are the data encapsulation, the inheritance mechanism and the polymorphism. Applications of the present code has been planned to take advantage of the OOP merits. This would simplify the programming and produce more "readable" codes.

Mathematical expressions were developed to incorporate different multi-temperature models. Such modelling can be applied in problems that do not require a precise simulation of the nonequilibrium characteristics.

#### REFERENCES

- Cantù, M. and Tendon, S., 1992, *Borland C++ 3.1 Object-Oriented Programming*, Bantam Books, pp. 35-64.
- Engholm, H. E. Jr., 1996, "Transport Properties Calculation of High-Temperature Gas Mixtures," Master Thesis, Technological Institute of Aeronautics - ITA, São José dos Campos, Brazil. (In Portuguese)
- Gordon, S. and McBride, B., 1971, "Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks, and Chapman-Jouguet Detonations," *NASA SP-273*.
- Gupta, R. N., Yos, J. R., Thompson R. A., and Lee K. P., 1991, "Calculations and Curve Fits of Thermodynamics and Transport Properties for Equilibrium Air up to 30,000 K," *NASA RP 1260*.
- Hansen, C. F., 1959, "Approximation for the Thermodynamic and Transport Properties of High-Temperature Air," *NASA TR R-50*.
- Hinckel, J. N., 1995, "An Object-Oriented Approach to Launch Vehicle Performance Analysis," 31st AIAA Joint Propulsion Conference and Exhibit, San Diego, *AIAA Paper 95-3094*.
- Koreeda, J. and Hinckel, J. N., 1989, "Calculation of Thermodynamic Properties of Air at High Enthalpies," *Proceedings of the 10<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Vol. I, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 121-124. (In Portuguese)
- Koreeda, J., 1990, "Thermodynamic Properties of Air in Equilibrium at High Enthalpies and Their Utilization in Flows through Normal and Oblique Shock Waves and Quasi-One-Dimensional Nozzles," Master Thesis, Technological Institute of Aeronautics - ITA, São José dos Campos, Brazil. (In Portuguese)
- Koreeda, J. and Hinckel, J. N., 1991, "Inviscid Flows through Normal and Oblique Shock Waves in Equilibrium Air, Including Thermodynamic Properties Evaluated from Scratch," in *Proceedings of the International Workshop on Strong Shock Waves*, H. Honma and K. Maeno (eds.), Chiba, Japan, pp. 189-205.
- Koreeda, J. and Hinckel, J. N., 1992, "A Computational Code to Calculate Thermodynamic Properties of Equilibrium Air in High-Temperature Flows," in *Proceedings of the Symposium on Shock Waves*, Tokyo, Japan, pp. 447-450.
- Koreeda, J., Hinckel, J. N., and Engholm, H. E. Jr., 1996, "An Object-Oriented Model for High-Temperature Gaseous Mixtures," *Proceedings of the Japanese Symposium on Shock Waves*, Tokyo, Japan.
- Pimentel, C. A. R., 1995, "Thermochemistry of Chemical Rocket Engine Using Thermodynamic Properties Obtained via Statistical Mechanics," Master Thesis, Technological Institute of Aeronautics - ITA, São José dos Campos, Brazil. (In Portuguese)
- Svehla, R. A. and McBride, B. J., 1973, "Fortran IV Computer Program for Calculation of Thermodynamic and Transport Properties of Complex Chemical Systems," *NASA TN D-7056*.





## PESQUISA DAS PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS E TERMOFÍSICAS DOS PRODUTOS DE COMBUSTÃO DE BIOMASSAS

Cleusa M. Auth, Raísa L. Iskhakova

Departamento de Física, Estatística e Matemática  
Universidade de Ijuí  
Caixa Postal 560 - 98.700-000 - Ijuí - Rs - Brasil



### RESUMO

O trabalho destina-se a pesquisa das propriedades termodinâmicas e termofísicas dos produtos de combustão de vários combustíveis de biomassa. Para calculá-las aplica-se o modelo dos processos quimicamente equilibrados (Alemassov, et al., 1971) com o método das "grandes moléculas". Foram obtidas informações sobre as propriedades dos produtos de combustão "com ar" para alguns tipos de lixos municipais, de papéis e de madeiras. Para as misturas ricas ( $\alpha_{ox} \ll 1$ ) foram pesquisadas as propriedades termodinâmicas dos produtos de combustão para várias temperaturas.

### INTRODUÇÃO

Os combustíveis de biomassa são utilizados em várias instalações, entre elas destacamos: fomalhas para secagem de grãos, fornos para cozimento de tijolos e telhas, etc. É necessário determinar as características destes tipos de combustíveis incluindo as energéticas e termofísicas. Por isso é necessário pesquisá-los com mais atenção.

Os métodos de cálculo, como regra, não são universais. Habitualmente pesquisa-se as propriedades para coeficiente de excesso do oxidante ( $\alpha_{ox}$ ) > 1 e sem considerar a dissociação e a fase condensada dos produtos de combustão. Ao mesmo tempo existem modelos e métodos matemáticos (Alemassov, et al., 1971; Gordon e McBride, 1971) mais produtivos e que já mostraram sua efetividade na determinação das propriedades dos produtos de combustão em motores de combustão interna, turbomotores, propulsores, etc. Eles são universais e podem ser aplicados para combustíveis complexos; levam em conta a dissociação, a fase condensada e determinam as propriedades para qualquer intervalo do  $\alpha_{ox}$ . Essas propriedades são: composição dos produtos de combustão ( $r_i$ ), temperatura (T), calor específico ( $C_p$ ), massa molecular média ( $\mu_M$ ), viscosidade ( $\eta$ ), condutibilidade térmica ( $\lambda$ ), coeficientes térmicos ( $\alpha_T$ ,  $\beta_P$ ), etc. Mas estes modelos não possuem ampla difusão para a classe dos combustíveis de biomassa: lixo municipal, papelão, palhas, etc.

O presente trabalho é continuação da pesquisa (Spilimbergo, et al., 1995a, b) e tem como objetivo determinar as características de alguns combustíveis de biomassa.

### MODELO MATEMÁTICO

Os combustíveis de biomassa caracterizam-se por vários tipos de fórmulas: fórmula elementar, aproximada e condicional (Tillman, et al., 1981). Entre as noções básicas dos modelos que utilizam fórmulas condicionais (Alemassov, et al., 1971; Gordon e McBride, 1971) estão:

a) Combustível e oxidante: caracterizam-se pelo número relativo de átomos que cada componente contém, por exemplo:

Combustível: [ C<sub>4,02</sub> H<sub>5,92</sub> O<sub>2,80</sub> N<sub>0,04</sub> Si<sub>0,02</sub> ]

Oxidante: [ N<sub>52</sub> O<sub>14</sub> Ar<sub>0,31</sub> ]

b) Coeficientes  $\kappa_o$  (Kmol(OX)/Kmol(Comb)) e  $K_m^o$  (Kg(OX)/Kg(Comb)): caracterizam uma relação estequiométrica molar e mássica entre os componentes; em particular  $K_m^o$  varia

de 4 a 6 Kg(ar) / Kg(lenha) para o bipropelente "lenha + ar". Para o processo concreto de combustão existe uma relação real entre combustível e oxidante que se chama relação dos componentes ( $\kappa$  e  $K_m$ ).

c) Coeficiente de excesso do oxidante: determina-se pela fórmula:  $\alpha_{ox} = \kappa / \kappa_o = K_m / K_m^o$  (1)

Se  $\alpha_{ox} < 1$  existe excesso de combustível e se  $\alpha_{ox} > 1$  existe excesso de oxidante. Nos processos de combustão de biomassa há lugar para vários valores de  $\alpha_{ox}$  que pode ficar no intervalo de 0,5 a 20.

d) Bipropelente: modelos do tipo (Alemassov, et al., 1971; Gordon e McBride, 1971) utilizam o conceito de bipropelente, que é uma substância que se forma no resultado da união do combustível e do oxidante e pode ser apresentada também pela fórmula condicional [ $b_{1p} b_{2p} \dots b_{ip} \dots b_{kp}$ ] e entalpia ( $I_p$ ) que se determinam pelas correlações:

$$b_{ip} = b_{ic} + \alpha_{ox} \cdot \kappa_o \cdot b_{iox} \quad (2)$$

$$I_p = \frac{I_c + I_{ox} \cdot \alpha_{ox} \cdot K_m^o}{1 + \alpha_{ox} \cdot K_m^o} \quad (3)$$

e) Produtos de combustão: formam-se no resultado da queima do combustível contendo algumas substâncias gasosas (CO<sub>2</sub>, CO, H<sub>2</sub>O, OH, H, O, etc) e condensadas (SiO<sub>2</sub>\*, C\*, etc). Estas substâncias possuem entalpias e entropias (P = 1atm) que são funções de T.

O modelo (Alemassov, et al., 1971) está baseado nas seguintes suposições:

- todas as substâncias ficam em equilíbrio químico entre elas e com T e P;

- a priori está escrito o conjunto das substâncias, que inclui "m" tipos de moléculas e radicais (j=1,...,m) e "n" tipos de átomos (i=1,...,n);

- para cada substância "q" são conhecidas as dependências:  $H_q = f(T)$  e  $S_q^o = f(T)$ ;

- é válida a equação de estado do gás ideal para cada substância reagente gasosa incluindo substâncias vaporizadas.

Este modelo inclui algumas equações termoquímicas:

1) Equações de dissociação para cada substância molecular tipo-'j' nos átomos tipo-'i':

$$\sum_i a_{ij} \cdot \ln P_i - \ln P_j - \ln K_j = 0 \quad (4)$$

onde  $K_j$  - é a constante de dissociação da substância- $j$  nos átomos;  $P_i$  e  $P_j$  - são as pressões parciais das substâncias moleculares- $j$  e substâncias átomos- $i$ ;  $a_{ij}$  - é a quantidade de átomos tipo- $i$  numa molécula- $j$ .

2) Equações de conservação dos átomos nos produtos de combustão:

$$\ln(\sum_j a_{ij} \cdot P_j + P_i) - \ln M_c - \ln b_{ip} = 0 \quad (5)$$

onde  $M_c$  é a quantidade de moles do bipropelente que são necessárias para assegurar a igualdade  $P_q = N_q$ , onde  $N_q$  é a quantidade dos moles "q" substâncias nos produtos de combustão.

3) Equação de Dalton:

$$\ln(\sum_q P_q) - \ln P = 0 \quad (6)$$

onde:  $q = 1, \dots, k$  sendo  $k = m + n$ ;  $m =$  número de tipos de moléculas;  $n =$  número de tipos de átomos.

4) Equação da conservação de energia:

$$I_p - I_{pc} = 0 \quad (7)$$

$$\text{onde: } \frac{\sum I_i \cdot P_j + \sum I_i \cdot P_i}{\sum \mu_q \cdot P_q} = I_{pc} \quad (8)$$

e  $I_q$  e  $\mu_q$  são respectivamente entalpia e massa molecular da substância "q" e  $I_{pc}$  a entalpia dos produtos de combustão.

Forma-se então um sistema de  $m+n+2$  equações de mesmo número de incógnitas:  $P_i$  ( $i=1, \dots, n$ ),  $P_j$  ( $j=1, \dots, m$ ),  $M_c$  e  $T$ . Na base dessas equações determinamos a composição dos produtos de combustão.

Depois da resolução é necessário calcular as derivadas parciais de funções termodinâmicas  $\frac{\partial \ln P_q}{\partial \ln T}$ ;  $\frac{\partial \ln P_q}{\partial \ln P}$ ;  $\frac{\partial \ln M_c}{\partial \ln T}$ ;  $\frac{\partial \ln M_c}{\partial \ln P}$ , que são necessárias para a determinação das propriedades dos produtos de combustão.

Usando as derivadas e a composição determina-se as propriedades termodinâmicas e termofísicas:  $r_q$  - partes molares dos produtos de combustão;  $\mu_M$ ;  $\alpha_p$ ;  $\beta_T$ ;  $C_{Pf}$  - calor específico "frio";  $C_{Pe}$  - calor específico "equilibrado", etc.

O modelo (Alemassov, et al., 1971), foi apresentado mais detalhadamente na língua portuguesa em (Spilimbergo, et al., 1995a, b). Este modelo para calcular substâncias condensadas utiliza duas grandezas:  $P_{st}$  (pressão do vapor saturado) e  $n_{cn}$  (número de moles da fase condensada) que são incluídas na equação da conservação dos átomos. Por exemplo, para um meio reagente que contém as substâncias (entre outras)  $CO_2, CO, C^*, C_s$  (vapor) a equação da conservação dos átomos C é:

$$\ln(P_{CO_2} + P_{CO} + P_{C_s} + P_{cn}) - \ln M_c - \ln b_{cp} = 0 \quad (9)$$

Além disso no sistema de equações é necessário incluir mais uma equação (Rey, A. Bravo, 1970):

$$\ln P_{C_s} = \frac{S_{C_s}^o - S_{C^*}^o}{R_o} - \frac{H_{C_s} - H_{C^*}}{R_o T} \quad (10)$$

Esta distingue-se da equação típica da dissociação (4) e ocasiona dificuldades no algoritmo (piora a convergência e complica-o). Mas a utilização do método das "grandes moléculas" (GM) pode eliminar estas dificuldades. Este método é um bom exemplo da aplicação da metodologia da modelagem matemática. Para não piorar a convergência e não complicar o algoritmo, seria bom se a equação (10) se apresentasse na forma correspondente das equações de dissociação.

Imaginemos que uma fase condensada (esta fase possuindo os valores  $H^*$  e  $S^*$ ) está no "estado gasoso"  $C_1^*$  (ou seja as moléculas separam-se uma da outra) e esta "fase" fica em equilíbrio com a fase gasosa real ( $C_s$ ). Neste caso podemos escrever formalmente uma equação "da dissociação" da fase  $C_1^*$  na fase  $C_s$ :

$$\ln P_{C_s} - \ln P_{C_1^*} = \ln K_{C_1^*} = \frac{S_{C_s} - S_{C_1^*}}{R_o} - \frac{H_{C_s} - H_{C_1^*}}{R_o T} \quad (11)$$

onde  $H, S$  são respectivamente a entalpia e entropia molares das substâncias.

Esta equação corresponde completamente as regras de formação das equações de dissociação e assegura boa convergência dos cálculos e invariância do modelo em relação as substâncias condensadas. Mas se substituirmos (10) na equação (11) obteremos um erro considerável nos resultados, porque o valor de  $\ln P_{C_1^*}$  é grande.

Agora admitamos que cada molécula condensada consiste de  $n$ -moléculas do tipo  $C^*$  (ou seja a fase condensada é representada pelas moléculas do tipo  $C_n^*$ ) por isso  $H_{C_n^*} = n \cdot H_{C^*}$ ;  $S_{C_n^*}^o = n \cdot S_{C^*}^o$ , e a equação de dissociação  $C_n^*$  pode ser escrita na forma:

$$n \ln P_{C_s} - \ln P_{C_n^*} = \frac{n S_{C_s}^o - n S_{C^*}^o}{R_o} - \frac{n H_{C_s} - n H_{C^*}}{R_o T} \quad (12)$$

e depois de dividida por  $n$ , obtemos:

$$\ln P_{C_s} - \frac{\ln P_{C_n^*}}{n} = \frac{S_{C_s}^o - S_{C^*}^o}{R_o} - \frac{H_{C_s} - H_{C^*}}{R_o T} \quad (13)$$

Se  $n \rightarrow \infty$  a equação (12) será idêntica a equação (10).

Pesquisas numéricas mostram que para  $n=1000$  a diferença nos resultados obtidos por (10) e por (13) praticamente não é visível. Então em virtude do método das GM, a equação para o vapor saturado transforma-se em uma equação do tipo "da dissociação", conseguindo a simplificação e a estabilidade do algoritmo de cálculo para misturas heterogêneas.

O algoritmo do modelo e software correspondente foram descritos em (Spilimbergo et al., 1995a,b).

## PESQUISA NUMÉRICA

Utilizando o software realizamos vários cálculos para determinar as propriedades dos produtos de combustão dos diversos combustíveis de biomassa. As informações necessárias sobre os combustíveis foram obtidas de (Jenkins, 1990 e Tillman, et al., 1981). Nestes trabalhos, para cada combustível estão apresentados os dados:  $\Delta H_s$  (poder calorífico superior),  $g_i$  (partes mássicas dos elementos),  $g_r$  (partes mássicas dos restos). Por exemplo:

Comb.	$\Delta H_s$	$g_c$	$g_H$	$g_O$	$g_N$	$g_r$
Lenha1	19.23	48.18	5.92	44.18	0.39	1.12

onde Lenha1 = Lenha (eucalipto).

Estes dados são suficientes para serem realizados os cálculos, mas para serem aplicados no software é necessário cumprir previamente algumas transformações e utilizar uma suposição, porque o software utiliza a fórmula condicional em que deve ser introduzida a "cinza" e a entalpia do combustível ( $I_c$ ) na escala que se utiliza em (Alemassov, et al., 1971; Gordon e McBride, 1971). Então admitamos que a "cinza" inclui somente uma substância condensada:  $SiO_2$  e o  $O_2$  desta substância foi retirado do mesmo combustível. Para obter a fórmula condicional utilizamos:

$$g_{(O)}^r = \frac{\mu_{(O_2)} \cdot g_r}{\mu_{(SiO_2)}}; \quad g_{(Si)} = \frac{\mu_{(Si)} \cdot g_r}{\mu_{(SiO_2)}}; \quad b_i(C) = \frac{g_i}{\mu_i}$$

$$b_C(O) = \frac{g_{(O)} + g_{(O)}^r}{\mu_{(O)}} \quad \text{para } i = C, H, N, Si; \quad (14)$$

Para obter  $I_c$  é necessário:

- determinar  $I_c^P$  quando  $\alpha_{ox} = 1$  e a temperatura dos produtos de combustão  $T_{pc} = 298$  K. Neste caso é preciso atribuir à  $I_c$  qualquer valor, depois do cálculo pelo software obtemos algum  $T_{pc}$ . Se  $T_{pc} > 298$  K é necessário diminuir  $I_c$  até obter  $T_{pc} = 298$  K. No último cálculo é necessário lembrar o valor de  $r(H_2O)$ ;

- calcular o valor de  $\Delta H_b$  (capacidade calorífica baixa):

$$\Delta H_b = \Delta H - h_a \cdot r(H_2O)(1 + K_m^O) \quad (15)$$

onde  $h_a$  é o calor de evaporação da água;

- cálculo da entalpia:  $I_c = \Delta H_b - I_c^P$  (16)

Na tabela 1 estão apresentadas as entalpias e as fórmulas condicionais para vários combustíveis indicados no trabalho (Jenkins, 1990):

Comb.	I	C	H	O	N	Si
Lixo 1	-6546	3.96	6.00	2.45	0.11	0.2
Lixo 2	-10612	2.83	4.60	2.66	0.08	0.63
Papel 1	-6961	3.73	6.10	2.85	0.02	0.12
Papel 2	-6223	4.93	9.25	1.93	0.02	0.02
Cedro	-7719	4.06	6.4	2.79	-----	0.006
Lenha1	-4123	4.02	5.92	2.80	0.04	0.02
Bagaço	-5437	3.73	5.35	2.80	0.04	0.16
Casca	-5403	3.41	4.30	2.85	0.04	0.31
Lenha2	-7805	3.21	6.96	3.35	0.03	0.01

Tabela 1

onde Bagaço = Bagaço de cana, Casca = casca de cana e Lenha2=Lenha (eucalipto) com umidade de 20%.

Foram computadas as propriedades dos produtos de combustão destes combustíveis com "ar" e algumas entre eles discutidas abaixo. Todos os cálculos foram realizados para as seguintes condições:  $P=1$ atm,  $\alpha_{ox} = 0,1 - 2$  e para combustíveis secos.

1. **Lixos Municipais:** Nas figuras 1, 2 e 3 estão apresentados os resultados dos cálculos para combustíveis do tipo lixo municipal (L1- $K_m^O = 6,08$ ) e lixo municipal (L2- $K_m^O = 4,52$ ).

As temperaturas dos produtos de combustão são próximas ( $\Delta T(\alpha_{ox}=1) = 100$  K) porque  $K_m^O(L1) > K_m^O(L2)$  e a capacidade calorífica do L1 é maior do que do L2. A diferença  $\Delta T$  aumenta com a diminuição de  $\alpha_{ox}$  (em particular quando  $\alpha_{ox} \approx 0,1$ ) devido a falta de oxigênio dentro do combustível L2. É evidente que sem a considerável ação interior, a combustão não vai se realizar (para  $\alpha_{ox} < 0,2$ ), principalmente para o combustível L2.

O combustível L2 também possui o maior conteúdo de fase condensada ( $C^* + SiO^*$ ). A alteração das massas moleculares médias não são habituais, isso se explica pela mudança incomum da composição na zona de  $\alpha_{ox} = 0,1 - 0,5$ . Pelos mesmos fatores é possível explicar a grande diferença entre  $C_{Pe}$  e  $C_{Pf}$  (para ambos tipos de produtos de combustão). Além disso para o combustível L1 existe um segundo máximo para o  $C_{Pe}$  condicionado à temperaturas altas. Ao mesmo tempo os produtos de combustão do L2 não apresentam este fenômeno.

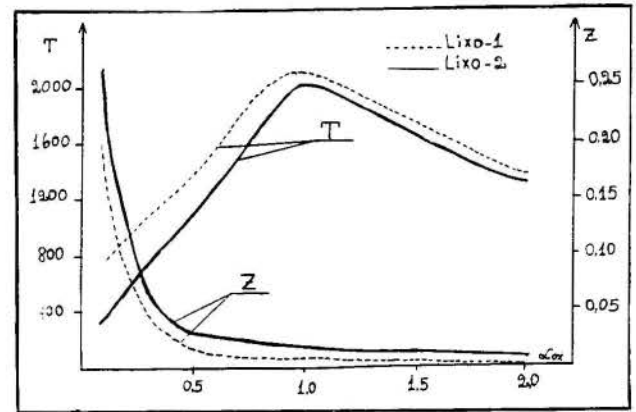


Figura 1 - Dependência da temperatura T(K) e partes mássicas dos produtos de combustão (Z) em função de  $\alpha_{ox}$

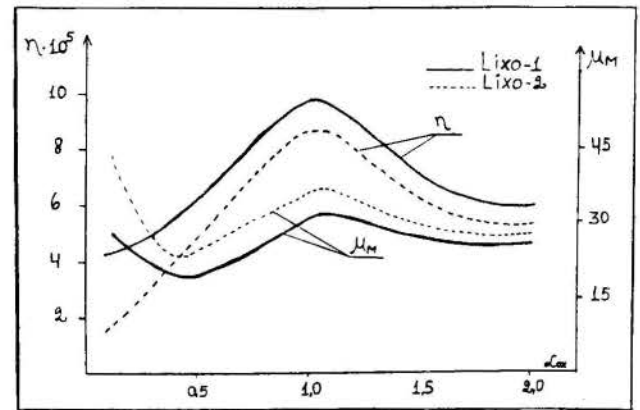


Figura 2 - Viscosidade e massa molecular média dos produtos de combustão em função de  $\alpha_{ox}$

Em (Spilimbergo, et al., 1995a, b) foram descobertos grandes valores de  $C_{Pe}$  na área de  $\alpha_{ox} \ll 1$  para os bipropelentes: eucalipto + "ar", bagaço de cana + "ar" e casca de arroz + "ar". Este fenômeno ocorre para os bipropelentes pesquisados neste trabalho. De acordo com a fórmula:

$$C_{Pe} = C_{Pf} + \frac{1}{M_c \cdot T} \left[ \sum_q P_q \cdot I_q \cdot \left( \frac{\partial \ln P_q}{\partial \ln T} \right)_P \right] - \frac{1}{T} \cdot \left( \frac{\partial \ln M_c}{\partial \ln T} \right)_P \quad (17)$$

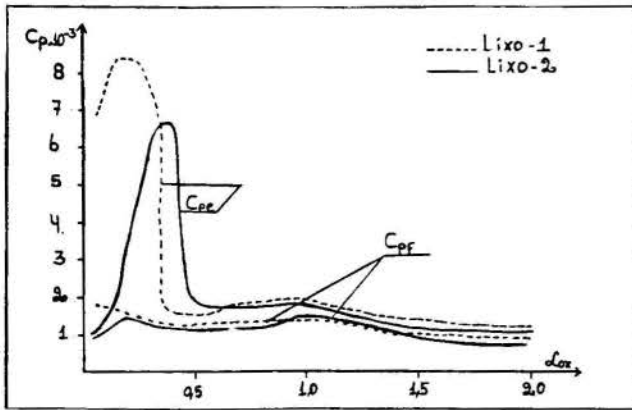


Figura 3 - Variação de  $C_{Pe}$  e  $C_{Pf}$  (J / Kg.K) em função de  $\alpha_{ox}$

a diferença entre  $C_{Pe}$  e  $C_{Pf}$  está condicionada nos termos da mudança da composição pela temperatura que está ligada com  $\alpha_{ox}$ . Nas figuras 4 e 5 estão mostradas as alterações das principais substâncias nas frações molares dos produtos de combustão em função de  $\alpha_{ox}$  para o L1 e L2.

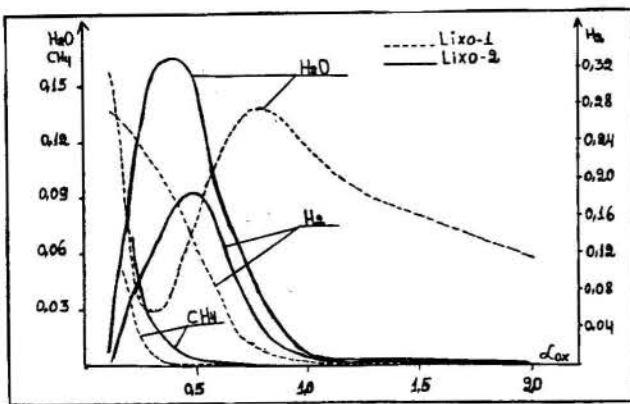


Figura 4 - Alteração da composição dos produtos de combustão ( $H_2O$ ,  $H_2$  e  $CH_4$ ) em função de  $\alpha_{ox}$

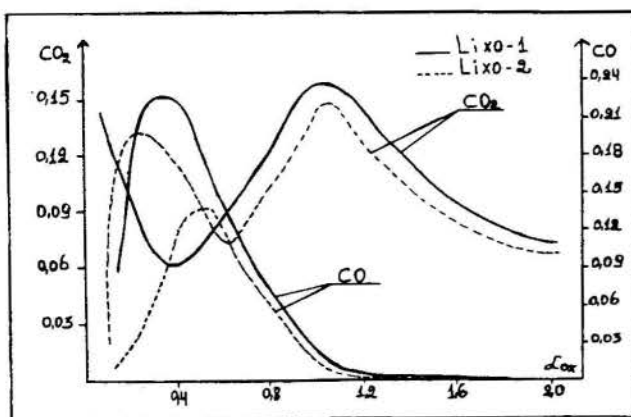


Figura 5 - Alteração da composição dos produtos de combustão ( $CO_2$ ,  $CO$ ) em função de  $\alpha_{ox}$

É evidente que na área de  $0,1 < \alpha_{ox} < 0,4$  existe uma alteração considerável das substâncias  $H_2O$ ,  $H_2$ ,  $CO$ ,  $CO_2$ . Entre

as composições dos combustíveis L1 e L2 observa-se uma diferença visível. Pela diferença do  $CO_2$  e  $H_2O$  entre L1 e L2 pode-se explicar a distinção nas massas moleculares. Para ambas variantes tem-se o máximo de  $r(CO)$  na área  $\alpha_{ox} = 0,3 - 0,4$ . Observamos que com o aumento de  $\alpha_{ox}$  muda a distribuição de  $O_2$  entre as três substâncias  $H_2O$ ,  $CO$ ,  $CO_2$  que está condicionada pela reação do "vapor de água".

É evidente que os bipropelentes dos vários tipos de lixo municipal formam produtos de combustão diferentes. Por isso para determinar as suas propriedades para cada tipo concreto é necessário realizar cálculos pelo software do tipo (Alemassov, et al., 1971 ; Gordon e McBride., 1971 e Spilimbergo, et al., 1995b).

2. **Papelões:** Cálculos análogos foram realizados para o papelão (P1) e papelão encerado (P2). Alguns resultados estão apresentados nas figuras 6, 7, 8, 9 e 10. Os cálculos foram realizados para as mesmas condições do item 1. Os produtos de combustão desses combustíveis contém uma pequena fase condensada diferenciando-os dos combustíveis do tipo lixos. Existem mínimos visíveis para a massa molecular dos produtos de combustão em  $\alpha_{ox} = 0,4$ , que estão condicionados à mudança de  $r(CO_2)$ .

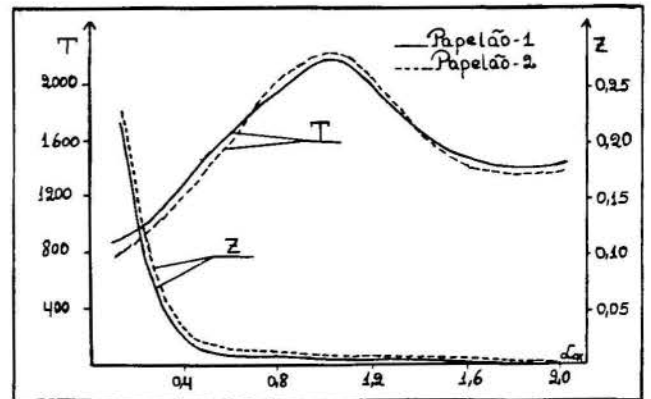


Figura 6 - Dependência da temperatura  $T$ (K) e partes mássicas ( $Z$ ) dos produtos de combustão em função de  $\alpha_{ox}$

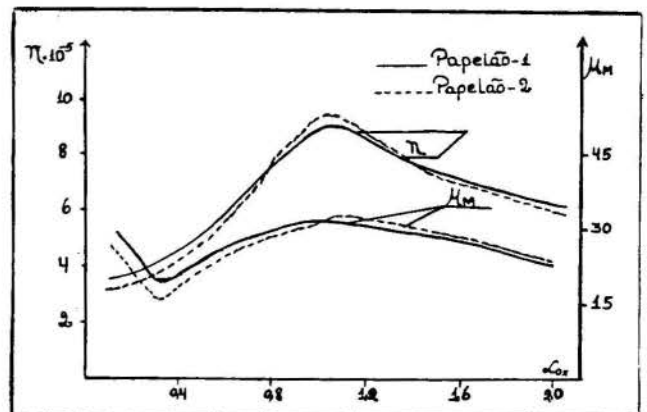


Figura 7 - Viscosidade e massa molecular média em função de  $\alpha_{ox}$

Para a correlação  $C_{Pe}/C_{Pf}$ , como para os combustíveis lixos, existem máximos na área  $\alpha_{ox} = 0,2 - 0,3$ . As mudanças das concentrações de  $H_2O$  e  $H_2$  são semelhantes as mudanças de



concentrações dos lixos, mas os papelões apresentam características termodinâmicas e termofísicas mais próximas entre elas, que as características dos lixos. Além disso foram obtidas informações sobre as propriedades dos produtos de combustão em "ar" para os seguintes combustíveis: cedro, pino, palha de milho, palha de feijão, etc.

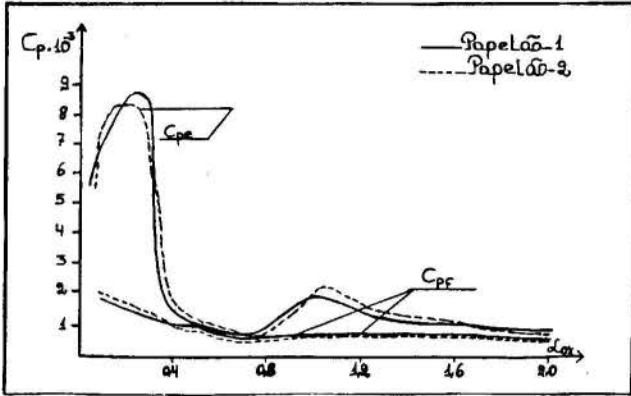


Figura 8 - Variação do  $C_{pe}$  e  $C_{pf}$  ( J / Kg.K ) em função de  $\alpha_{ox}$ .

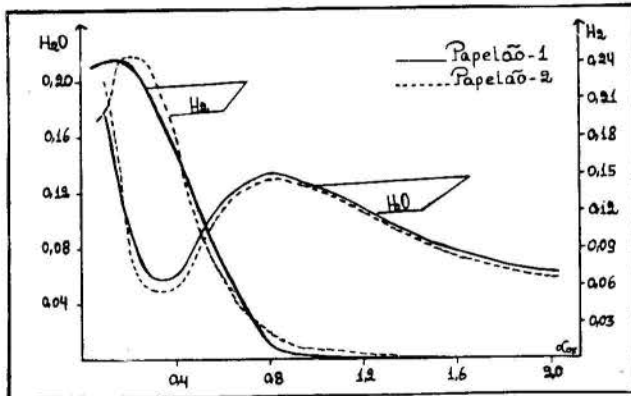


Figura 9 - Alteração na composição dos produtos de combustão ( $H_2O$  e  $H_2$ ) em função de  $\alpha_{ox}$ .

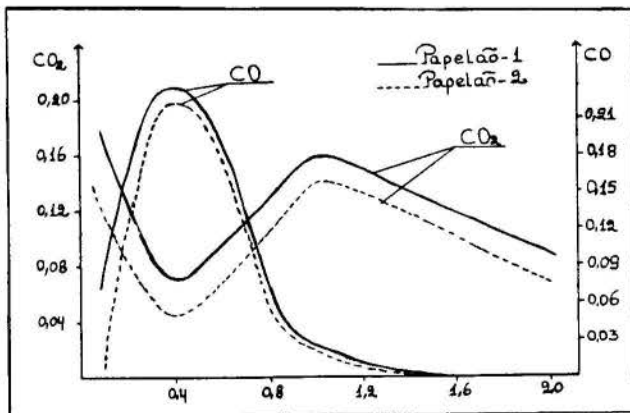


Figura 10 - Alteração na composição dos produtos de combustão ( $CO_2$  e  $CO$ ) em função de  $\alpha_{ox}$ .

As propriedades termodinâmicas e termofísicas que são necessárias para projetar várias instalações de alta temperatura, na área de  $\alpha_{ox} = 0.7 - 2.0$ , são próximas. Para todos os

combustíveis pesquisados existem várias particularidades na área de  $\alpha_{ox} \ll 1$ : altos valores do  $C_{pe}$ , mudança não habitual da composição ( $H_2$ ,  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $CO$ ), etc. Entre os combustíveis pesquisados existe diferenças na fase condensada.

3. Lixos Municipais com variação da temperatura: Pelos resultados das pesquisas realizadas é evidente que para  $\alpha_{ox} \ll 1$  forma-se uma quantidade considerável de gases combustíveis ( $CO$ ,  $H_2$ ,  $CH_4$ ) que podem ser utilizados como combustível gasoso ou para outros objetivos industriais. É evidente que sobre temperaturas não altas (700 - 900K) a combustão dos combustíveis sólidos, do tipo lixo, é difícil organizar em condições quando falta oxidante. É necessário realizar este processo sobre temperaturas mais altas. Nesta situação pode ocorrer o deslocamento do equilíbrio químico e mudança na composição, por isso tem sentido realizar pesquisas para determinar as propriedades dos produtos de combustão quando  $\alpha_{ox} \ll 1$  com aumento de temperatura -  $T_{aq}$  (admissão independente do calor nos processos de combustão). As figuras 11, 12, 13 e 14 mostram resultados destas pesquisas.

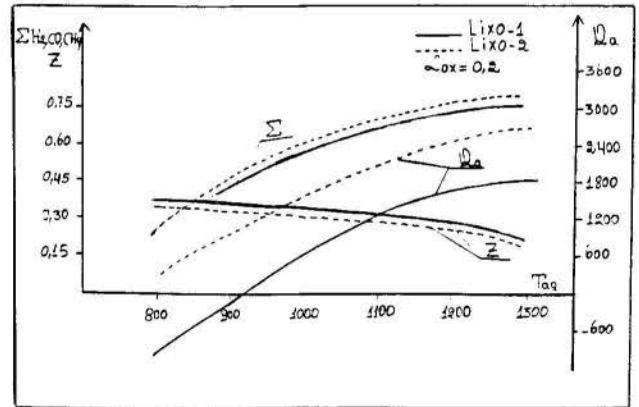


Figura 11 - Mudança das propriedades dos produtos de combustão em aquecimento ( $\alpha_{ox} = 0,2$ )

A figura 11 mostra a mudança da quantidade total de gases combustíveis:

$$r_{\Sigma}^C = r(CO) + r(H_2) + r(CH_4) \quad (18)$$

que surgem de combustíveis (quando fica uma quantidade pequena de ar) com aumento da temperatura.

Como é visível a quantidade dos gases combustíveis (18) aumenta essencialmente com aumento da temperatura e a fase condensada diminui. Mas neste caso é preciso muita quantidade de energia ( $Q_a$ ) para aumentar a temperatura dos produtos de combustão (figura 11).

Para L2 nota-se que exige  $Q_a$  maior que para L1, mesmo que o somatório da composição dos gases combustíveis para ambos os lixos sejam aproximados. No processo de aquecimento a massa molecular muda consideravelmente, diminui o conteúdo de  $CO_2$  e  $H_2O$  e o carbono condensado passa para o  $CO$  e na parte condensada fica somente a cinza.

Para  $\alpha_{ox} = 0,1$  os resultados estão mostrados nas figuras 13 e 14. Surgiu para  $\alpha_{ox} = 0,1$  quantidade de gases combustíveis maior que para  $\alpha_{ox} = 0,2$ , mas é preciso gastar mais quantidade de energia que para o regime  $\alpha_{ox} = 0,2$ .

Para temperaturas  $> 1200K$  a quantidade de gases combustíveis praticamente não aumentou.

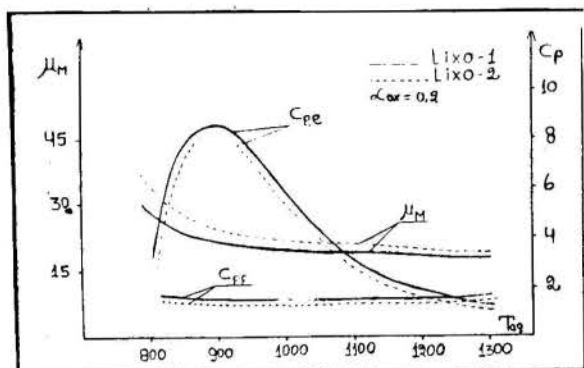


Figura 12 - Alteração de  $\mu_M$  e  $C_{pe}$  e  $C_{pf}$  dos produtos de combustão em aquecimento ( $\alpha_{ox} = 0,2$ )

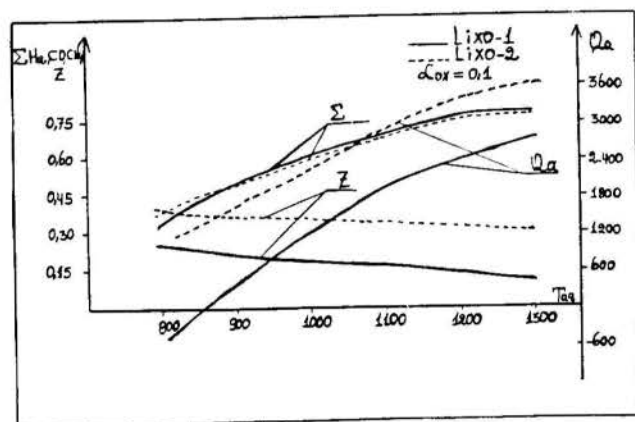


Figura 13 - Mudança das propriedades dos produtos de combustão em aquecimento ( $\alpha_{ox} = 0,1$ )

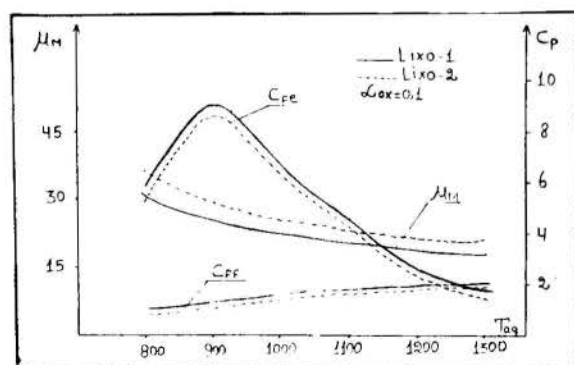


Figura 14 - Alteração de  $\mu_M$  e  $C_{pe}$  e  $C_{pf}$  dos produtos de combustão em aquecimento ( $\alpha_{ox} = 0,1$ )

## CONCLUSÃO

I. O modelo (Alemaçsov et al., 1971) foi aplicado para determinar as propriedades dos produtos de combustão da biomassa que leva em conta a dissociação e o surgimento da fase condensada. O modelo foi complementado pelo método das "grandes moléculas", que possui a estabilidade de cálculos para sistemas heterogêneos.

2. Foram realizadas pesquisas numéricas para determinar as propriedades dos produtos de combustão de vários combustíveis: lixos municipais, papelões, e vegetais num intervalo amplo de  $\alpha_{ox}$ .

3. Para  $\alpha_{ox} \ll 1$  foram investigadas as particularidades dos produtos de combustão de combustíveis de biomassa em condições de seu aquecimento, com o objetivo de determinar a quantidade de gases combustíveis.

## REFERÊNCIAS

Alemaçsov V.E. et al. 1971, "Termodinamicheskie e teplo fizicheskie svoystva produktov sgorania", Guia, Vol.1. VINITI Moscou.

Alemaçsov V.E., et al. 1973, "Termodinamicheskie e teplofizicheskie svoystva produktov sgorania", Guia, Vol.3. VINITI Moscou.

Gordon, S. e McBride. B. J., 1971, "Computer Program for calculation of complex chemical equilibrium compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks, and Chapman - Jouguet Detonations", NASA, Washington, DC.

Jenkins B.M. 1990, "Fuel Properties For Biomass Materials. Anais do International Symposium on Application and Management of de Energy in Agriculture.

Rey, A. Bravo. 1970. "Física / Química Modernas", Vol.4, Edições Fortaleza. São Paulo.

Spilimbergo. A. P., Auth, C. J. e Ischakova, R. L., 1995a, "Modelagem Matemática das Características Termodinâmicas e Termofísicas dos Produtos de Combustão de Combustíveis Vegetais", Anais do XVIII CNMAC 95, Curitiba, Pr., pp. 610-614.

Spilimbergo. A. P., Auth, C. J. e Ischakova, R. L., 1995b, "Propriedades dos Produtos de Combustão dos Combustíveis Vegetais", Anais do XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica. Belo Horizonte, MG.

Tillman, D. A., Rossi, A. J., Kitto, W.D., 1981. "Wood Combustion", Academic Press, New York.

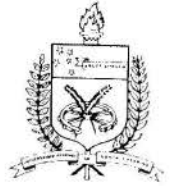
## ABSTRACT

This paper aims at the research on thermodynamical and thermophysical properties of the combustion byproducts from several biomass fuels. In order to calculate them, the model of chemically balanced processes was used together with the method of "great molecules". Information on the properties of combustion byproducts "in air" was obtained for some kinds of city garbage, as well as cardboard paper and some kinds of wood. As for the rich mixtures ( $\alpha_{ox} \ll 1$ ), the thermodynamical properties of the combustion byproducts were analysed considering several temperatures.



## DISEÑO DE UNA CELDA PARA MEDICIÓN DE COEFICIENTES DE DIFUSIÓN

Georgina Díaz y Ximena Llanca  
Departamento de Ingeniería Química  
Universidad de Santiago de Chile  
Casilla 10233-Est. Central-Stgo.-Chile



### RESUMEN

*Este trabajo apunta al diseño, construcción y puesta en marcha de una celda, para la medición de coeficientes de difusión, con membrana de agar-agar intercambiable. La celda fue construida en acrílico, cumpliendo con las condiciones de la resolución de la ecuación diferencial. En ella se estudió la difusión del NaCl, en función de la concentración de agar, de NaCl y de la temperatura. El método establecido resultó sencillo, rápido y muy confiable, de acuerdo a los estudios estadísticos y a los valores informados en literatura.*

### INTRODUCCIÓN

En muchos procesos de la industria alimentaria, los fenómenos de transferencia de masa tienen gran importancia y en particular aquéllos en que la difusión constituye el paso que controla el proceso. En algunos casos como fenómenos voluntariamente propiciados: salado y fermentación de quesos y productos cárneos (Geurts et al., 1974; Lücke, 1986), deshidratación osmótica en elaboración de productos de humedad intermedia (Karel, 1976), etc. En otros, la difusión ocurre, sin ser deseada: pérdida de aromas (Bonilla et al., 1981), disminución de la calidad nutricional, debido a la migración de solubles en el proceso de escaldado (Bühler, 1990), etc.

Estos antecedentes motivan el estudio del fenómeno de difusión en alimentos, siendo para ello de especial relevancia, en el cálculo y descripción del mismo, el disponer de valores fidedignos de los coeficientes de difusión involucrados.

La determinación experimental directa en alimentos suele ser bastante complicada, dado lo heterogéneo de su composición y a la generalmente complicada geometría que presentan. Relativamente fácil de operar, resultan los geles moldeables, con las cuales se pueden simular la composición de un alimento y recurrir a expresiones matemáticas para la determinación del coeficiente de difusión (Chu, 1991; Díaz, 1993). Por ello este trabajo plantea la evaluación de un **método de medición de coeficientes de difusión**, proponiéndose el **diseño y construcción de una celda de difusión con membrana intercambiable**, de manera de contar con un método confiable, que permita flexibilidad en las medidas.

### ANTECEDENTES TEÓRICOS

El transporte de materia, debido a mecanismos difusionales ocurre debido a una diferencia de potencial químico (diferencia de concentraciones, en la mayoría de los casos). Como analogía a la teoría de Fourier, que describe la transferencia de calor por conducción, Fick formuló las ecuaciones matemáticas para el transporte difusional de materia en medios isotrópicos (leyes de Fick).

La 1ª ley de Fick indica que el flujo de materia transferido, perpendicular a un área unitaria, es proporcional al gradiente de

concentración, que independiente del sistema de coordenadas queda representada en forma vectorial por (Crank, 1975):

$$F = -D \text{ grad } c \quad (1)$$

En donde D corresponde al coeficiente de difusión.

La 2ª ley de Fick representa el caso no estacionario, cuya expresión general es:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D \cdot \nabla c) = \text{div} (D \text{ grad } c) \quad (2)$$

siendo  $\nabla$ , el operador nabla (Bird et al., 1964).

Para distintos sistemas geométricos y diferentes condiciones iniciales y de borde, es posible encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales.

La mayoría de los métodos que se utilizan para determinar el coeficiente de difusión se basan en realizar experiencias de difusión en sistemas, cuya geometría y condiciones iniciales y de borde están claramente definidas.

Para la determinación del coeficiente de difusión en membranas poliméricas, se desarrolló el método "Lag-Time" (Crank y Park, 1968), como una modificación del ampliamente usado; pero muy consumidor de tiempo: Celda-Diafragma (Dunlop et al., 1972). El método "Lag-Time" estipula que la concentración de soluto, a un lado de la membrana ( $C_1$ ) sea constante durante todo el experimento y al otro lado  $C_0$ , medida continuamente en un volumen definido de fluido. Si la concentración de soluto en la membrana, al inicio es cero y el cambio de la concentración  $C_0$ , pequeño, la cantidad de soluto que difunde (Q) queda determinada por:

$$Q_t = d \cdot C_1 \left( \frac{D \cdot t}{d^2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(\frac{-D \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot t}{d^2}\right) \right) \quad (3)$$

en donde d corresponde al espesor de la membrana.

A tiempos muy largos ( $t \rightarrow \infty$ ) es decir, en estado estacionario, esta expresión se transforma en la relación lineal:

$$Q_t = \frac{D \cdot C_1}{d} \left( t - \frac{d^2}{6 \cdot D} \right) \quad (4)$$

donde en el punto de corte con el eje tiempo, se encuentra el llamado "Lag-Time" ( $\theta$ ):

$$\theta = \frac{d^2}{6 \cdot D} \quad (5)$$

de cuya expresión se determina el coeficiente de difusión.

En la literatura se informa una dependencia del coeficiente de difusión con la temperatura (T), del tipo Arrhenius, para el fenómeno en alimentos con alto contenido de agua (Rice y Selman, 1984; Califano y Calveo, 1983):

$$D = D_0 \exp\left(\frac{-E}{R \cdot T}\right) \quad (6)$$

en donde  $D_0$  corresponde al factor de frecuencia, R, a la constante de los gases y E, a la energía de activación asociada al proceso.

## DESARROLLO EXPERIMENTAL

La celda de difusión se diseñó de forma que se cumplieran las condiciones descritas anteriormente y fue construida básicamente en acrílico.

En la figura N°1 se muestra un esquema del montaje de todo el sistema.

La celda se compone de tres secciones desmontables: dos cámaras de volumen constante cilíndricas (1 y 6) que contienen las soluciones de concentraciones  $C_0$  y  $C_1$ , respectivamente, y una pieza que soporta la membrana intercambiable (2). Todo el sistema está rodeado de tubos perforados en cada bloque que permiten lograr un sistema de termostatación continua (5).

Las cámaras están comunicadas al exterior por orificios ubicados en la parte superior; uno de ellos, en la cámara que contiene la solución a  $C_0$  se utiliza para introducir una celda conductométrica (3), que indica el cambio de concentración a medida que transcurre la experiencia. En la otra cámara, los orificios, permiten el bombeo continuo de solución de concentración  $C_1$  constante (4).

La pieza que soporta la membrana se compone de un paralelepípedo con una perforación al centro, donde se coloca la membrana y sobre ella una tapa en forma de anillo, que la asegura.

Para la fabricación de las membranas se utilizó agar-agar (Hi-Media) en distintas concentraciones, el que fue disuelto en agua y llevado a ebullición, por un par de horas. El gel caliente se vació a moldes de teflón, para dar la forma y el espesor a las membranas y se esperó a que solidificaran.

Las experiencias de difusión se realizaron montando la membrana con ambas cámaras, en donde luego, se introdujo el electrodo y se termostató el sistema con una bomba peristáltica, a continuación, se llenaron cuidadosa y simultáneamente ambas cámaras, con las soluciones  $C_0$  (agua destilada) y  $C_1$  (NaCl), respectivamente. En ese instante se registraron las medidas de conductividad y tiempo, hasta después de alcanzar el estado estacionario. El espesor de la membrana fue medido antes y después de cada experiencia.

## PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Estudio de las membranas. Antes de comenzar con el estudio de la difusión, se estudiaron algunas características de las membranas preparadas a diferentes concentraciones de agar, con el fin de determinar los posibles cambios que ellas podrían experimentar, especialmente de espesor, durante las experiencias de difusión, cuyo valor es determinante en el cálculo del coeficiente.

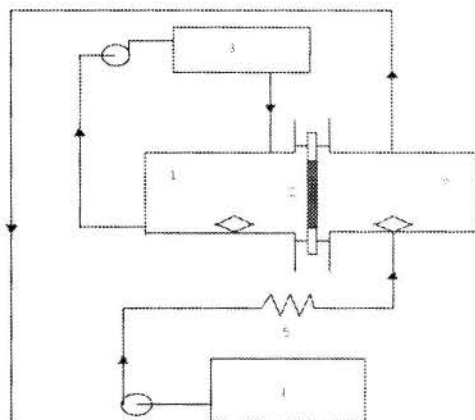


Figura 1 - Celda de difusión.

Aumento de volumen de las membranas de agar. Un experimento se realizó sumergiendo membranas de volumen inicial conocido en agua destilada por una hora. Al cabo de ese tiempo, se masaron las muestras y junto con las densidades respectivas, se calculó la variación de volumen, tales resultados se presentan en la figura N°2. En ellos se puede apreciar que todas las membranas sufrieron un aumento de volumen, producto de la histeresis (capacidad de adsorber o desorber agua) que caracteriza a algunos geles, como el de agar. El aumento del volumen de la membrana de 1% p. de agar es notoriamente mayor que el del resto.

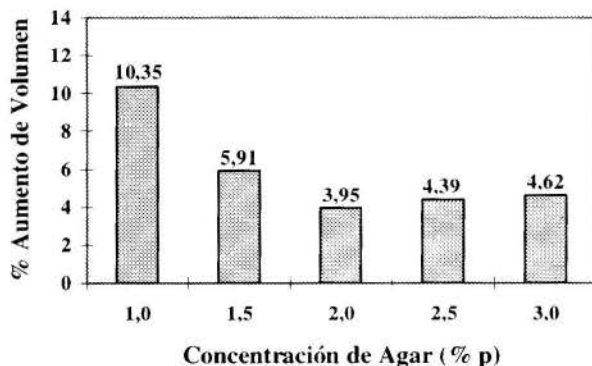


Figura 2 - Aumento de volumen de las membranas de agar

Disminución de volumen de las membranas de agar. Otro análisis que se hizo fue el de determinar el comportamiento de las membranas al sumergirlas en una solución al 0.5 % de NaCl por una hora, midiéndose los espesores iniciales y finales. En



esta experiencia se observó que todas las membranas sufrieron una disminución general del espesor y con ello del volumen, lo cual se muestra en la figura N°3. Esto se explica fácilmente por las propiedades higroscópicas del Cloruro de Sodio, es decir, la membrana al entrar en contacto con una solución de NaCl, tiende a secarse debido a que las moléculas de agua que se encuentran retenidas en el sólido, son desplazadas y sustituidas por los iones cloruro y sodio que tienen un menor tamaño; con esto el volumen total de la membrana disminuye.

En las experiencias de difusión, la membrana se mantiene inicialmente en contacto tanto con agua, como con sal. De acuerdo a los resultados mostrados, se podría esperar que el efecto neto fuese el de un aumento del volumen; sin embargo al finalizar cada una de las corridas de difusión se observó una disminución del espesor, que fue menor que el observado en estas experiencias.

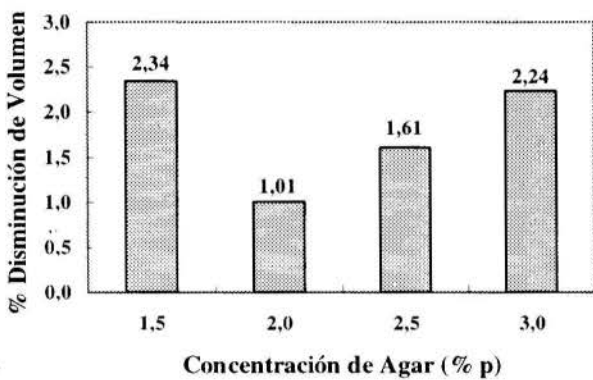


Figura 3 - Disminución de volumen de las membranas de agar

Retención de NaCl en las membranas. Del experimento anterior, también fue posible la determinación del grado de retención de sal en el interior de las membranas. Al observar los bajos porcentajes de retención de NaCl en las membranas de agar (Figura N°4), se puede deducir que el error que se comete al medir la concentración de iones en la solución y no directamente en la membrana, es prácticamente despreciable y realmente no afecta al cálculo posterior del coeficiente de difusión.

También se observa que el porcentaje de retención es creciente con el porcentaje de agar. Esto se debe a que las moléculas de agar, formando parte de un gel, son macromoléculas de tipo espiral, por lo tanto, al haber presentes una mayor cantidad de ellas en el gel, es más probable que los iones que difunden queden retenidos con mayor facilidad.

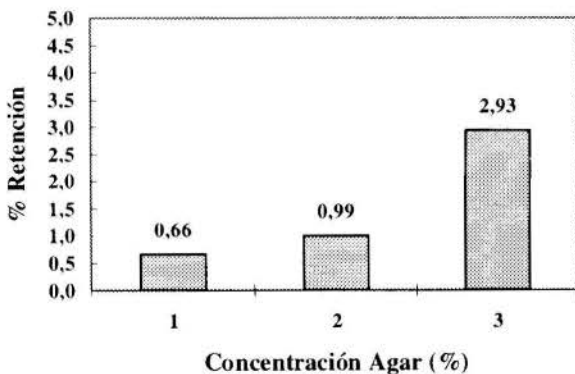


Figura 4 - Retención de NaCl en membranas de agar.

Resultados del coeficiente de difusión del NaCl. El coeficiente de difusión del NaCl fue medido utilizando membranas de distintas concentraciones en peso de agar: 3.0, 2.5, 2.0, y 1.5 %, respectivamente, variando para cada una de ellas la concentración de la solución de la sal ( $C_1$ ): 0.5, 1 y 1.5%.

Los resultados muestran que el coeficiente de difusión disminuye al aumentar la concentración de agar (Figura N°5), lo cual era fácilmente predecible puesto que al aumentar la cantidad de macromoléculas de agar, el espacio libre entre ellas para que difundan los iones disminuye, (Teoría de la obstrucción; Hendrickx et al., 1987).

Por otra parte, al extrapolar las curvas para obtener el coeficiente de difusión del cloruro de sodio a dilución infinita, es decir en agua, se obtuvo los valores que se muestran en la tabla N°1.

Tabla 1 - Coeficientes de difusión del NaCl extrapolados a concentración 0% de Agar.

Conc. NaCl (%)	0,5	1,0	1,5
$D_{0exp} (\times 10^{-5})$ ( $cm^2/s$ )	2,05	1,99	1,93
r	0,977	0,999	0,994

Si comparamos con valores de bibliografía (Crank y Park, 1968; Landolt y Börnstein, 1969) que informan valores promedio de  $D_{NaCl}$  en agua de  $1.6E-05$  ( $cm^2/s$ ), se puede apreciar una gran diferencia. Esto indica que el método no se adecua para determinar coeficientes de difusión en solución.

Coefficiente de Difusión en función de la solución salina. La variación del coeficiente de difusión con respecto a la concentración de las soluciones salinas es creciente para todas las membranas, lo cual es especialmente notable para la membrana de 3%p de agar (Figura N°6), aunque la variación se encuentra dentro del error experimental, por lo que se puede decir, que prácticamente este coeficiente es independiente de la concentración. Tal característica no puede ser analizada como una tendencia general, dado que el rango de concentraciones de sal estudiado fue muy estrecho y no pudo ser extendido, ya que esto producía alteraciones en la membrana.

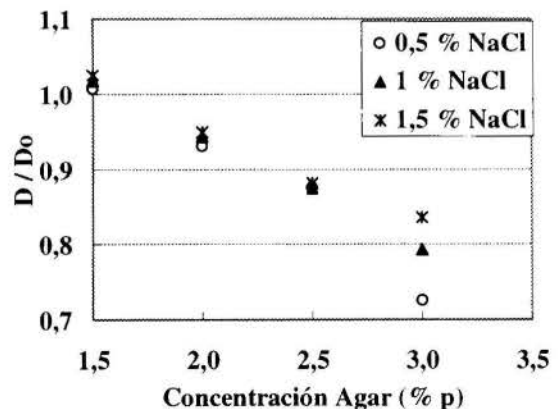


Figura 5 - Influencia de la concentración de agar en el coeficiente de difusión, expresado como la razón entre el coeficiente medido y el valor extrapolado a concentración 0% de agar ( $D/D_0$ )

Análisis del error relativo porcentual. Los resultados obtenidos fueron analizados, utilizando criterios estadísticos tradicionales.

La figura N°7 muestra el error relativo porcentual, calculado para las diferentes condiciones experimentales. Considerando que una medida se considera precisa cuando este error no supera el 5%, se puede concluir que todos los resultados obtenidos son bastante precisos. No obstante, el gráfico muestra que los valores de la solución de 1% NaCl, son los más precisos para todas las membranas.

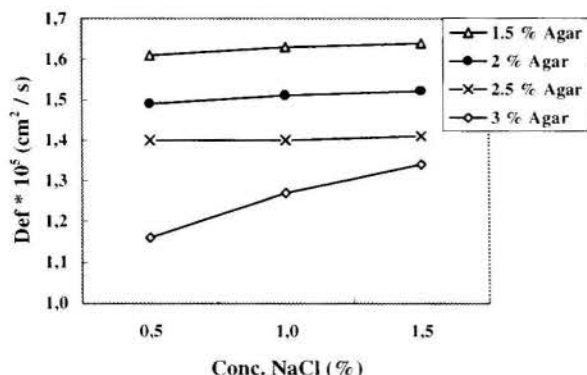


Figura 6 - Influencia de la concentración de NaCl en el coeficiente de difusión, en diferentes membranas de agar.

Efecto de la temperatura en el coeficiente de difusión. En este estudio se trabajó con temperaturas entre los 17 y 40°C, temperaturas mayores producía un ablandamiento de las membranas, temperaturas menores a los 17°C, no fue técnicamente posible.

Estas experiencias se realizaron con la membrana de 2.0 %p. de agar y la solución de 0.5% de concentración de NaCl.

El coeficiente de difusión aumenta al aumentar la temperatura como puede observarse en la Figura N°8. Un cálculo de energía de activación, mediante la relación linealizada de Arrhenius, arroja un valor de 20,4 kJ/mol, con una regresión de 0,999. Este valor de energía de activación es típico de los procesos controlados por difusión y semejante a los informados en la literatura (Díaz, 1993).

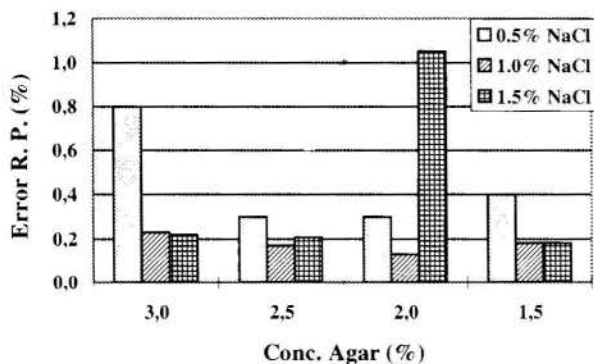


Figura 7 - Error relativo porcentual de las experiencias realizadas.

## CONCLUSIONES

Del trabajo presentado se puede concluir lo siguiente:

- La celda de difusión diseñada, es fácil de utilizar y versátil, pues permite cambiar la membrana a voluntad y ofrece la potencialidad de trabajar con membranas reales, como por ejemplo trozos de frutas.
- La medición entrega valores precisos en un corto tiempo de operación.
- En el rango de concentraciones de NaCl estudiados, los coeficientes de difusión del cloruro de sodio en agar son muy similares, en orden de magnitud, a los valores informados en literatura.

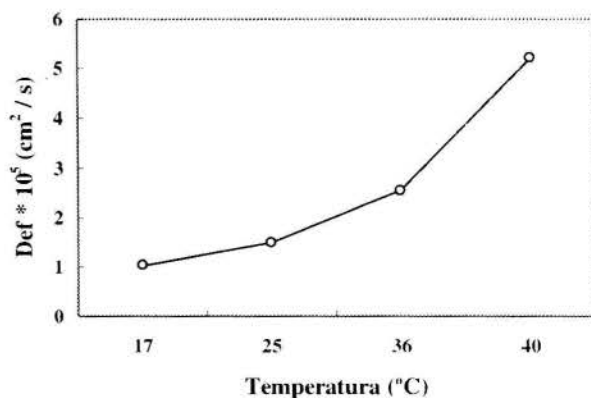


Figura 8- Influencia de la temperatura en el coeficiente de difusión.

## BIBLIOGRAFÍA

- Bird, R.B., Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N., 1964. "Fenómenos de transporte", Editorial Reverté S. A. Barcelona.
- Bonilla, C.M., Plett, E.A. y Loncin, M., 1981. "Untersuchungen zur Aromaerhaltung während der Lufttrocknung von Zuckerlösungen", *Lebensm.-Wiss. und -Technologie*, **14**, 153.
- Bühler, K.D., 1990. "Beitrag zur Charakterisierung von Stoffaustauschvorgängen beim Blanchieren von Erbsen". Dissertation, Universität Hohenheim, Stuttgart.
- Califano, A.N. y Calvelo, A., 1983. "Heat and mass transfer during the warm water blanching of potatoes", *J. Food Sci.*, **48**, 220.
- Chu, C.L., 1991. "Diffusion von Milchsäure in einer proteinhaltigen Matrix", Dissertation, Universität Hohenheim, Stuttgart.
- Crank, J., 1975. "The mathematics of diffusion" 2ª Edición, Clarendon Press, Oxford.
- Crank, J. und Park, G.S., 1968. "Diffusion in polymers". Acad. Press, New York
- Díaz, C.G., 1993. "Untersuchungen zum Stofftransport von niedermolekularen Substanzen in Lebensmittelmodellsystemen", Dissertation, Universität Hohenheim, Stuttgart.
- Dunlop, P.J., Steele, B.J. und Lane, J.E., 1972. "In: Physical methods of chemistry", Hrg. A. Weissberger & B.W. Rossiter. John Wiley & Sons, New York.
- Geurts, T.J., Walstra, P. und Mulder, H., 1974. "Transport of salt and water during salting of cheese. I. Analysis of the processes involved", *Neth. Milk Dairy J.*, **28**, 102.

Hendrickx, M., Ooms, C., Engels, C., van Pottelbergh, E. y Tobback, P., 1987, "A research note: Obstruction effect of carrageenan and gelatin on the diffusion of glucose", *J.Food Sci.*, **52** (4), 1113.

Karel, M., 1976, "Technology and application of new intermediate moisture foods. In: Intermediate moisture foods", Appl. Sci. Publishers, London.

Landolt, A. y Börnstein, H., 1969, "Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik", 6. Aufl., 5. Teil, Springer Verlag, Berlin.

Lücke, F.K., 1986, "Mikrobiologische Vorgänge bei der Herstellung von Rohwurst und Rohschinken", *Fleischwirtsch.*, **66**, 302.

Rice, P. y Selman, J.D., 1984, "Technical note: Apparent diffusivities of ascorbic acid in peas during water blanching", *J. Food Tech.*, **19**, 121.

#### SUMMARY

This work has as objectives to design, built and use a diffusion cell with changeable agar gel diaphragm, to measure the diffusion coefficient. The cell was made of acrylic and respond the conditions to solve the differential Fick equations. Diffusion from NaCl was carried out in different agar-, salt concentrations and temperatures. The method is easy, fast and exactly.

#### AGRADECIMIENTOS

Las autoras agradecen a la Dirección de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (DICYT) de la Universidad de Santiago de Chile, el patrocinio de este trabajo.

## A LOCAL MODEL FOR A PACKED-BED HEAT EXCHANGER WITH A TWO-PHASE SOLID MATRIX



Maria Laura Martins-Costa

Mechanical Engineering Department – Universidade Federal Fluminense  
Rua Passo da Pátria, 156 - 24210-240 - Niterói, RJ, BRASIL



### ABSTRACT

*Momentum and energy transport in a two-phase solid matrix packed-bed heat exchanger are studied using a mixture theory approach, which allows a thermodynamically consistent local description. The mixture consists of three (two rigid solids and an incompressible fluid) overlapping continuous constituents, whose thermodynamical interaction is ensured by momentum and energy generation terms. An iterative procedure is used to simulate the forced convection in a counter-flow heat exchanger allowing the fluid constituent inlet temperature to be the only boundary condition prescribed in the flow direction.*

### INTRODUCTION

When fluids are passed over packed beds of solid material a large ratio of surface area to volume is obtained improving the heat transfer effectiveness which could be even higher if large thermal conductivities are present. A packed-bed heat exchanger with enhanced conductivity may be built if some particles with large thermal conductivity are spread over and adhere to a solid matrix with smaller conductivity, giving rise to a two-phase solid matrix.

A thermodynamically consistent local model for momentum and energy transport in a packed-bed heat exchanger with a two-phase matrix is obtained the mixture theory, a specific tool for multiphase phenomena (Atkin and Craine, 1976). The mixture consists of three overlapping continuous constituents: two rigid solids and a newtonian incompressible fluid, each of them characterized by distinct temperatures and velocities. To allow thermal nonequilibrium among the constituents is particularly important when dealing with packed-bed heat exchangers, in which the energy flux in a direction perpendicular to the flow occurs preferentially through the solid matrix, improving the heat exchange.

Since both solid constituents are rigid and at rest, mass and momentum balance equations are solved for the fluid constituent only, while the energy balance (coupled) equations are solved for the three constituents of the mixture. Constitutive relations are derived for the partial heat fluxes and internal generation sources: the momentum and energy sources, satisfying the second law of thermodynamics and the principle of objectivity.

The packed-bed heat exchanger is represented by two porous channels, each of them composed by two solids, in which the fluid flows in a counter-flow arrangement. The porous channels are separated by an impermeable surface with infinite thermal conductivity (without thermal resistance) bounded by two impermeable adiabatic flat plates.

Considering a developed flow in each channel, an analytical solution for the hydrodynamical problem is possible (Martins-Costa et al., 1992). The thermal problem is described by three elliptical partial differential equations. The presence of the idealized interface described above allows these equations to be solved in a single domain, employing a numerical scheme adequate to the velocity sign. An iterative procedure, developed by Martins-Costa et al. (1991), is used to simulate (by means of a finite-difference approach with an upwind scheme for the convective term) the forced convection in a heat-exchanger in which the fluid constituent inlet temperature is the only boundary condition prescribed in the flow direction.

Several methods have been proposed in the literature to describe transport in porous media. Most of them use a local volume-averaging technique, that has already allowed unquestionable advances in the study of complex problems dealing with porous media. Temperature, pressure, concentration and the velocity components are described as volumetric averages, such that the heat transfer phenomenon may be studied by using the classical continuum mechanics. Darcy's law (relating pressure drop to velocity) with the addition of empirically determined terms to account for inertia and viscous effects (Vafai and Tien, 1981; Bejan, 1987) substitutes the balance of linear momentum.

Some important aspects such as multiphase transport and phase-change processes still require convenient models (Tien and Vafai, 1990). Georgiadis (1991) has detected research needs and suggests strategies to deal with convective transport in porous media. He states that contemporary research is related to four elements - one of these elements is the solid matrix structure. A different approach is used in this work: the continuum theory of mixtures (specially developed for multiphase phenomena), which allows the construction of a thermodynamically consistent local model by means of a systematic procedure to describe the heat transfer process in a fluid-saturated packed-bed heat exchanger.



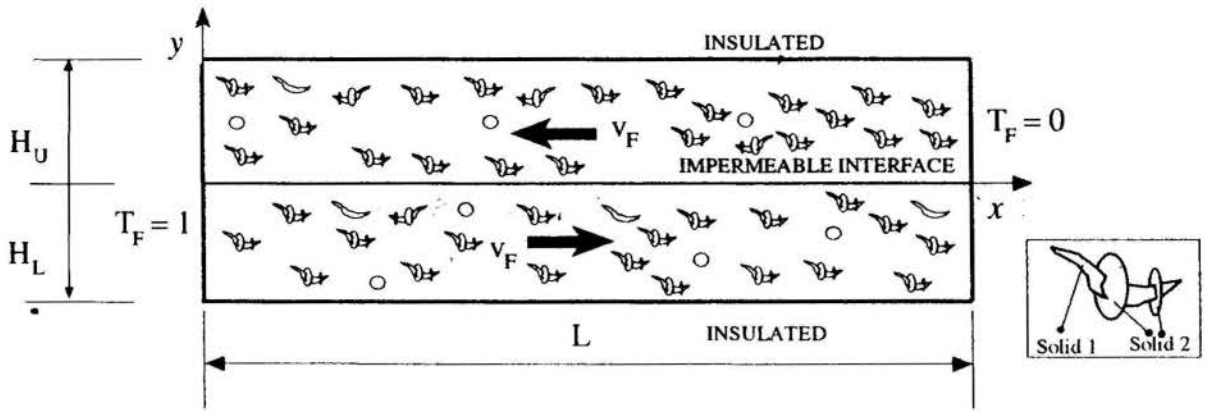


Figure 1 - Problem Scheme

### MATHEMATICAL MODEL

Since the porous medium (the two-phase solid) is assumed rigid and at rest, the mass and linear momentum balance equations need only to be considered for the fluid constituent (Martins-Costa et al., 1992). The mass balance equation is given by:

$$\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \text{div}(\rho_F \mathbf{v}_F) = 0 \quad \rho_F = \varphi_F \rho \quad (1)$$

in which  $\rho$  is the actual fluid density,  $\rho_F$  is the fluid constituent mass density,  $\mathbf{v}_F$  is the fluid constituent velocity, and  $\varphi_F$  the fluid constituent fraction in the mixture.

The balance of linear momentum is given by:

$$\rho \varphi_F \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_F}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}_F) \mathbf{v}_F \right] = -\varphi_F \text{grad} p + 2\lambda \varphi_F^2 \eta \text{div} \mathbf{D}_F - \frac{\varphi_F^2 \eta}{K} \mathbf{v}_F + \rho \varphi_F \mathbf{g} \quad (2)$$

where  $\eta$  represents the actual fluid viscosity,  $K$  the specific permeability (scalar, since the porous matrix is isotropic),  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{D}_F$  the symmetrical part of the fluid and the fluid constituent velocity gradient, respectively,  $p$  the pressure,  $\mathbf{g}$  the specific body force and  $\lambda$  is an always positive scalar parameter, which depends on the porous matrix microstructure (Williams, 1978).

The hydrodynamical problem is subjected to the following no-slip condition on the impermeable surfaces, according to the scheme shown in Figure 1:

$$\mathbf{v}_F = 0 \quad \text{at } y'_U = H_U/2 \quad \text{and} \quad y'_L = H_L/2 \quad (3)$$

in which  $y'_U = y - H_U/2$  and  $y'_L = y + H_L/2$

The following velocity profile is obtained, considering equations (1) to (3), for the geometry presented in Figure 1 and assuming one-dimensional steady-state flow:

$$v_F(y') = \frac{K}{\eta \varphi_F} \left[ \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right] \left[ 1 - \frac{\cosh \frac{y'}{\sqrt{K\lambda}}}{\cosh \frac{H/2}{\sqrt{K\lambda}}} \right] \quad (4)$$

where  $y' = y'_U$  and  $H = H_U$  if  $y \geq 0$  and  $y' = y'_L$  and  $H = H_L$  if  $y \leq 0$ .

For the limiting case in which  $H \rightarrow \infty$ , the mean velocity associated to equation (4) approaches the one obtained from the classical Darcy law.

The energy balance (Martins-Costa et al., 1992) must be satisfied by each constituent of the mixture:

$$\rho_i c_i \left[ \frac{\partial T_i}{\partial t} + (\text{grad } T_i) \cdot \mathbf{v}_i \right] = \rho_i q_i''' - \text{div } \mathbf{q}_i + \psi_i \quad (5)$$

where  $i \equiv S1$ ,  $i \equiv S2$  and  $i \equiv F$  stand for each of the solid constituents and the fluid constituent,  $\rho_i$  stands for the  $i$ -constituent density,  $T_i$  for its temperature,  $\mathbf{q}_i$ ,  $q_i'''$  and  $\psi_i$  represent, respectively its partial heat flux, heat generation and energy generation function and, finally,  $c_i$  represents the specific heat of the  $i$ -constituent, regarded as a continuum.

Three energy equations are to be solved, in order to determine the temperature fields ( $T_F$ ,  $T_{S1}$  and  $T_{S2}$ ), since the mixture theory allows the existence of a different temperature for each constituent, at every spacial point.

Equation (5) requires some constitutive hypotheses. The partial heat flux ( $\mathbf{q}_i$ ) is given by the following generalization of the equations derived for a binary mixture in Martins-Costa et al. (1992) and Costa Mattos et al. (1993):

$$\mathbf{q}_i = -\Lambda k_i \varphi_i \text{grad } T_i \quad (6)$$

where  $\Lambda$  represents an always positive parameter which may depend on both the internal structure and the kinematics of the mixture and  $\varphi_i$  is the  $i$ -th constituent fraction.

The energy generation function,  $\psi_i$ , which is an internal contribution, represents the energy supply to a given constituent, arising from its (thermal) interaction with the other constituents of the mixture. The  $\psi$  function is zero at a given point if all the constituents are at the same temperature at this point. A constitutive equation for the energy source, based on Martins-Costa et al. (1992) and Costa Mattos et al. (1993) may be considered:

$$\psi_i = \sum_{j=1}^n R_{ij}(T_j - T_i) \quad (7)$$

where  $j$  represents the other constituents of the mixture and  $R_{ij} = R_{ji}$  are always positive factors which depend not only on spacial position and on both constituents' thermal properties but also on the velocity of both constituents, accounting for the convective heat transfer. Since the solid constituents are supposed at rest, only the fluid constituent's velocity would influence the factors  $R_{ij}$ , but this influence will be neglected in the present work.

At this point a kinematic restriction, in order to satisfy the geometric compatibility, should be stated. Since the flow is saturated:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1 \quad (8)$$

Since the fluid constituent velocity is non zero only in the  $x$ -direction and considering the two-dimensional geometry of the problem, as shown in Figure 1, steady-state flow and zero heat generation, the balance of energy is reduced to:

$$\frac{\rho_{FCF} v_F}{\Lambda k_F \varphi_F} \frac{\partial T_F}{\partial x} = \frac{\partial^2 T_F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_F}{\partial y^2} + \frac{R_{FS1}}{\Lambda k_F \varphi_F} (T_{S1} - T_F) + \frac{R_{FS2}}{\Lambda k_F \varphi_F} (T_{S2} - T_F) \quad (9)$$

$$0 = \frac{\partial^2 T_{S1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{S1}}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{R_{FS1}}{\Lambda k_{S1} \varphi_{S1}} (T_F - T_{S1}) + \frac{R_{S1S2}}{\Lambda k_{S1} \varphi_{S1}} (T_{S2} - T_{S1}) \quad (10)$$

$$0 = \frac{\partial^2 T_{S2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{S2}}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{R_{FS2}}{\Lambda k_{S2} \varphi_{S2}} (T_F - T_{S2}) + \frac{R_{S1S2}}{\Lambda k_{S2} \varphi_{S2}} (T_{S1} - T_{S2}) \quad (11)$$

subject to the following boundary conditions:

$$\frac{\partial T_F}{\partial y}(x, H_U) = 0 \quad \frac{\partial T_F}{\partial y}(x, -H_L) = 0$$

$$\frac{\partial T_{S1}}{\partial y}(x, H_U) = 0 \quad \frac{\partial T_{S1}}{\partial y}(x, -H_L) = 0$$

$$\frac{\partial T_{S2}}{\partial y}(x, H_U) = 0 \quad \frac{\partial T_{S2}}{\partial y}(x, -H_L) = 0 \quad (12)$$

$$T_F(L, y) = 0 \quad \text{for } 0 < y < H_U$$

$$T_F(0, y) = 1 \quad \text{for } -H_L < y < 0$$

The following dimensionless variables are used to state dimensionless equations for the problem above:

$$X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{H_U} \quad A = \frac{L}{H_U} \quad H = \frac{H_L}{H_U}$$

$$Pe_F = \frac{\rho_{FCF} v_F |H_U|}{\Lambda k_F \varphi_F} \quad \gamma_1 = \frac{k_{S1} \varphi_{S1}}{k_F \varphi_F} \quad \gamma_2 = \frac{k_{S2} \varphi_{S2}}{k_F \varphi_F}$$

$$\theta_F = \frac{T_F - (T_F)_{min}}{(T_F)_{max} - (T_F)_{min}} \quad \beta_{FS1} = \frac{R_{FS1} H_U^2}{\Lambda k_F \varphi_F} \quad (13)$$

$$\theta_{S1} = \frac{T_{S1} - (T_{S1})_{min}}{(T_{S1})_{max} - (T_{S1})_{min}} \quad \beta_{FS2} = \frac{R_{FS2} H_U^2}{\Lambda k_F \varphi_F}$$

$$\theta_{S2} = \frac{T_{S2} - (T_{S2})_{min}}{(T_{S2})_{max} - (T_{S2})_{min}} \quad \beta_{S1S2} = \frac{R_{S1S2} H_U^2}{\Lambda k_F \varphi_F}$$

which may be written as:

$$\frac{Pe_F}{A} \frac{\partial \theta_F}{\partial X} = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \theta_F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_F}{\partial Y^2} + \beta_{FS1}(\theta_{S1} - \theta_F) + \beta_{FS2}(\theta_{S2} - \theta_F) \quad (14)$$

$$0 = \gamma_1 \left[ \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \theta_{S1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{S1}}{\partial Y^2} \right] + \beta_{FS1}(\theta_F - \theta_{S1}) + \beta_{S1S2}(\theta_{S2} - \theta_{S1}) \quad (15)$$

$$0 = \gamma_2 \left[ \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \theta_{S2}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{S2}}{\partial Y^2} \right] + \beta_{FS2}(\theta_F - \theta_{S2}) + \beta_{S1S2}(\theta_{S1} - \theta_{S2}) \quad (16)$$

satisfying the boundary conditions:

$$\frac{\partial \theta_F}{\partial Y}(X, 1) = 0 \quad \frac{\partial \theta_F}{\partial Y}(X, -H) = 0$$

$$\frac{\partial \theta_{S1}}{\partial Y}(X, 1) = 0 \quad \frac{\partial \theta_{S1}}{\partial Y}(X, -H) = 0$$

$$\frac{\partial \theta_{S2}}{\partial Y}(X, 1) = 0 \quad \frac{\partial \theta_{S2}}{\partial Y}(X, -H) = 0 \quad (17)$$

$$\theta_F(1, Y) = 0 \quad \text{for } 0 < Y < 1$$

$$\theta_F(0, Y) = 1 \quad \text{for } -H < Y < 0$$

## NUMERICAL METHOD

The presence of an idealized interface at  $Y = 0$ , opposing no thermal resistance, but allowing the kinematical fields in each channel to be independent, permits the energy problem to be solved in a single domain. For  $Y > 0$  the superior channel (whose flow is opposite to positive  $X$ -direction) is described, while the inferior channel, with a flow on positive  $X$ -direction is described for  $Y < 0$ .

The heat transfer problem consists of a system of three second order partial differential equations, on

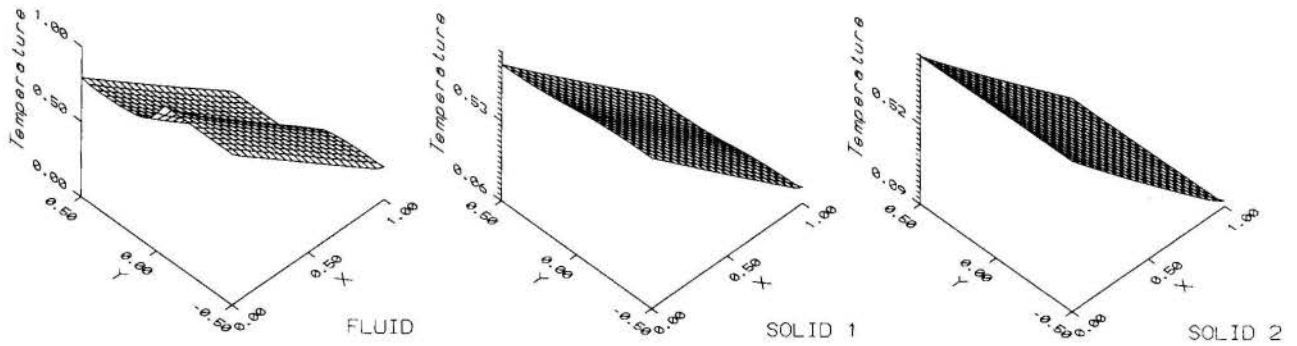


Figure 2 - Fluid, Solid 1 and Solid 2 Constituents' Temperatures  
 $\beta_{FS1} = 10^2$   $\beta_{FS2} = 10^0$   $\beta_{S1S2} = 10^{-1}$   $\gamma_1 = 90$   $\gamma_2 = 10$   $Pe_{FU} = Pe_{FL} = 10^3$

both  $X$  and  $Y$ -variables, subjected to six boundary conditions on  $Y$ -direction and to only two boundary conditions on  $X$ -direction (the fluid constituent inlet temperature, for each channel). From a mathematical viewpoint, a problem of this kind, consisting of three elliptic equations, on both  $X$  and  $Y$ -variables, even if physically realistic, could give rise to an infinite number of solutions. However, a great number of tested situations has shown that additional boundary conditions on  $X$ -direction have no influence on both solid and fluid constituents bulk temperatures.

An iterative procedure (Martins-Costa et al., 1991) is used, so that three second-order partial differential equations on  $X$ -variable can be solved with the help of two boundary conditions on  $X$ -direction, one for each considered channel. The problem is treated as a succession of modified problems in which the second-order derivatives on  $X$ -direction, for the three constituents, are treated as previously known fields, that is: the fluid constituent energy equation is treated as a sequence of parabolic problems on  $X$ -variable, while both solid constituent energy equations can be considered as a sequence of ordinary problems on  $Y$ -variable. The original system of equations is modified to:

$$\left[ \frac{Pe_F}{A} \frac{\partial \theta_F}{\partial X} - \frac{\partial^2 \theta_F}{\partial Y^2} - \beta_{FS1}(\theta_{S1} - \theta_F) \right]^l$$

$$[-\beta_{FS2}(\theta_{S2} - \theta_F)]^l = \left[ \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \theta_F}{\partial X^2} \right]^{l-1} \quad (18)$$

$$\left[ -\gamma_1 \frac{\partial^2 \theta_{S1}}{\partial Y^2} - \beta_{FS1}(\theta_F - \theta_{S1}) - \beta_{S1S2}(\theta_{S2} - \theta_{S1}) \right]^l =$$

$$= \left[ \frac{\gamma_1}{A^2} \frac{\partial^2 \theta_{S1}}{\partial X^2} \right]^{l-1} \quad (19)$$

$$\left[ -\gamma_2 \frac{\partial^2 \theta_{S2}}{\partial Y^2} - \beta_{FS2}(\theta_F - \theta_{S2}) - \beta_{S1S2}(\theta_{S1} - \theta_{S2}) \right]^l =$$

$$= \left[ \frac{\gamma_2}{A^2} \frac{\partial^2 \theta_{S2}}{\partial X^2} \right]^{l-1} \quad (20)$$

where the derivatives  $\frac{\partial^2 \theta_F}{\partial X^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \theta_{S1}}{\partial X^2}$  and  $\frac{\partial^2 \theta_{S2}}{\partial X^2}$  are calculated from a previous iteration.

Since no analytical solution to the system of equations describing the problem is known, numerical approximations to its solution are searched with the help of a finite difference approach. For the diffusive terms, a central finite difference scheme discretization was used, while an "Upwind" scheme, adequate to the velocity sign, was employed in the convective term discretization:

$$\frac{\partial \theta_F}{\partial X} \approx \frac{m[\theta_F(i+m, j) - \theta_F(i, j)]}{\Delta X} \quad (21)$$

where  $m = +1$  for negative velocities and  $m = -1$  for positive velocities.

As the temperature coefficients matrix (associated to the modified system of equations) is sparse, a grid description, in which each constituent temperature possesses two indexes, according to its position on the grid, is used. Each iteration  $l$ , represented in such a way to allow an effective storage scheme with memory reutilization, is then solved with the help of the Gauss-Seidel method. The approximations for both constituents second order derivatives are calculated from a previous  $(l-1)$  iteration, by means of a central finite-difference scheme. The implementation consists of storing vectors  $\theta_F$ ,  $\theta_{S1}$  and  $\theta_{S2}$ , obtained from equations (18) to (20) and calculate new approximations for  $\frac{\partial^2 \theta_F}{\partial X^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \theta_{S1}}{\partial X^2}$  and  $\frac{\partial^2 \theta_{S2}}{\partial X^2}$ , which are then used to calculate new values for  $\theta_F$ ,  $\theta_{S1}$  and  $\theta_{S2}$ . These vectors are compared to the ones previously stored and the process is repeated until further iterations cease to produce any significant change in their values.

## RESULTS

Figures 2 to 7 present some selected results for the three constituents' dimensionless temperatures in a counter flow heat exchanger shown in Figure 1 considering  $H = 1$  and  $A = 2 \times 10^2$  and using different scales for the temperature axis.

The influence of the fluid constituent Péclet number may be observed by comparing Figures 2, 4 and 6 -  $Pe_U = Pe_L = 10^3$ ,  $Pe_U = Pe_L = 10^4$  and  $Pe_U = 10^3$ ,

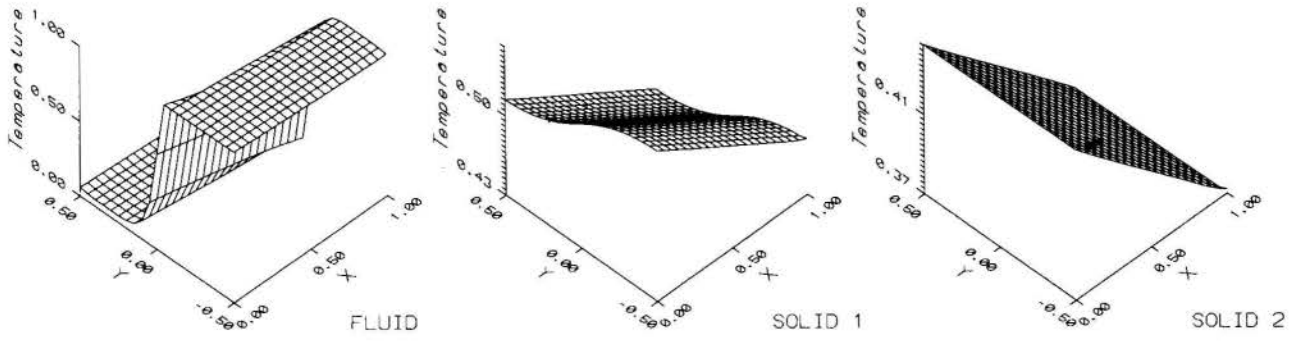


Figure 3 - Fluid, Solid 1 and Solid 2 Constituents' Temperatures  
 $\beta_{FS1} = 10^1 \beta_{FS2} = 0 \beta_{S1S2} = 10^{-1} \gamma_1 = 90 \gamma_2 = 10 Pe_{FU} = Pe_{FL} = 10^4$

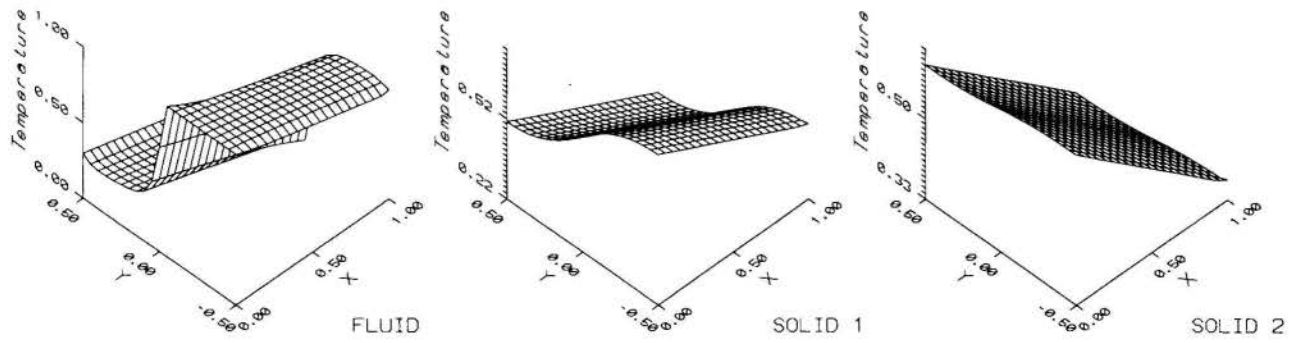


Figure 4 - Fluid, Solid 1 and Solid 2 Constituents' Temperatures  
 $\beta_{FS1} = 10^2 \beta_{FS2} = 10^0 \beta_{S1S2} = 10^{-1} \gamma_1 = 90 \gamma_2 = 10 Pe_{FU} = Pe_{FL} = 10^4$

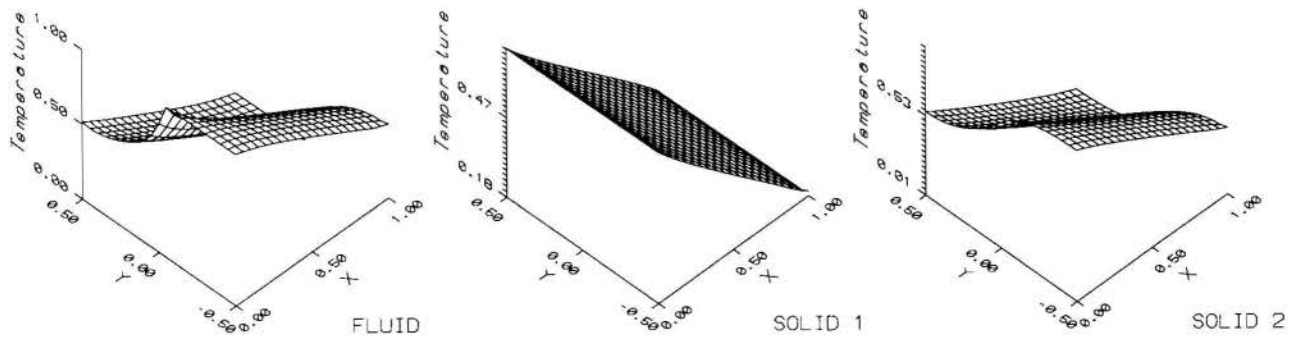


Figure 5 - Fluid, Solid 1 and Solid 2 Constituents' Temperatures  
 $\beta_{FS1} = 10^0 \beta_{FS2} = 10^2 \beta_{S1S2} = 10^{-1} \gamma_1 = 90 \gamma_2 = 10 Pe_{FU} = Pe_{FL} = 10^3$

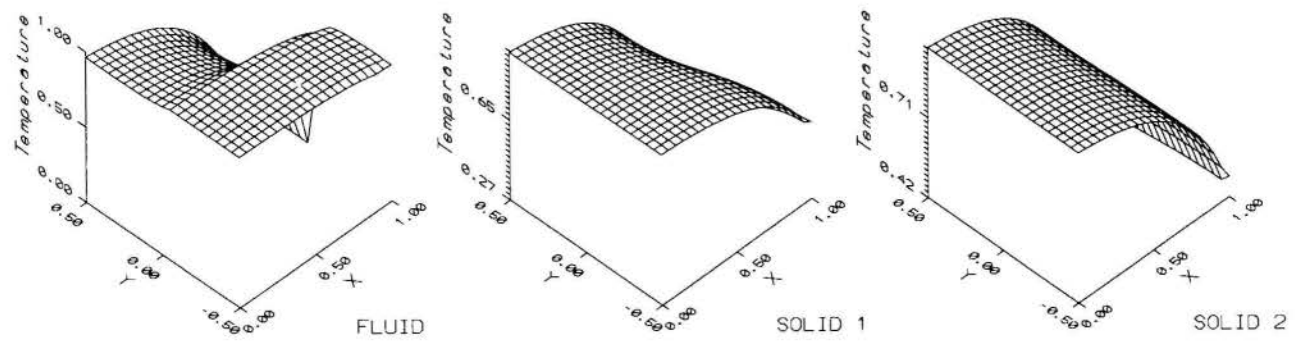


Figure 6 - Fluid, Solid 1 and Solid 2 Constituents' Temperatures  
 $\beta_{FS1} = 10^2 \beta_{FS2} = 10^0 \beta_{S1S2} = 10^{-1} \gamma_1 = 90 \gamma_2 = 10 Pe_{FU} = 10^3 Pe_{FL} = 10^4$



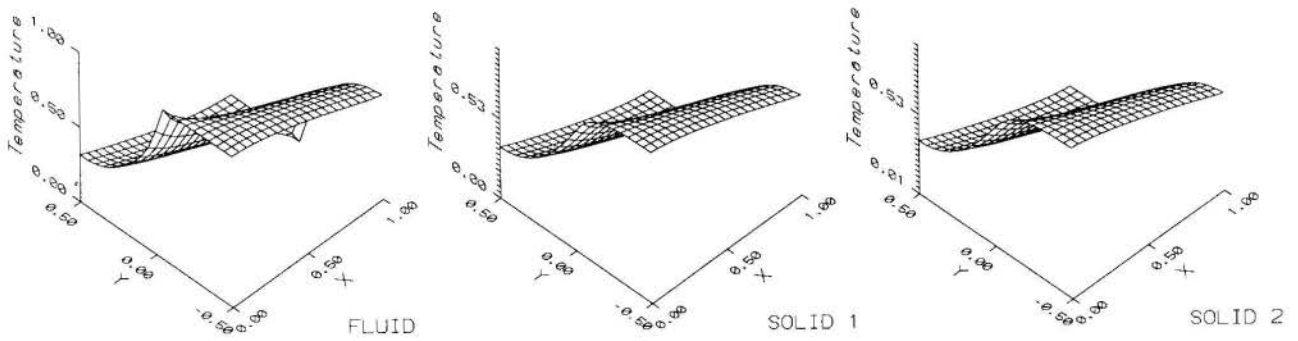


Figure 7 - Fluid, Solid 1 and Solid 2 Constituents' Temperatures  
 $\beta_{FS1} = 10^2$   $\beta_{FS2} = 10^0$   $\beta_{S1S2} = 10^{-1}$   $\gamma_1 = 4$   $\gamma_2 = 6 \times 10^{-2}$   $Pe_{FU} = Pe_{FL} = 10^3$

$Pe_{L1} = 10^4$ , respectively. The same values for all  $\beta$ - and  $\gamma$ -parameters are considered. The influence of the  $\gamma$ -parameters (relating the conduction between two constituents -  $\gamma_1$  relates the solid 1 to the fluid and  $\gamma_2$  the solid 2 to the fluid) is shown in Figures 2 ( $\gamma_1 = 90$  and  $\gamma_2 = 10$ ) and 7 ( $\gamma_1 = 4$  and  $\gamma_2 = 0.06$ ) - same values  $\beta_{FS1}$ ,  $\beta_{FS2}$ ,  $\beta_{S1S2}$  and  $Pe_F$ . This may be regarded not only as distinct heat conduction ratios but also as distinct ratios of the constituents fractions in the mixture. The  $\beta$ -parameters represent the ratio of the heat transfer between two constituents (taken into account in the energy source) -  $\beta_{FS1}$ ,  $\beta_{FS2}$  and  $\beta_{S1S2}$  relate the fluid to the solid 1, the fluid to the solid 2 and both solids, respectively - to the fluid constituent conduction. Their influence may be noticed by comparing Figures 3 and 4 - same values of  $Pe_F$ ,  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$ . It should be noticed that there is no heat exchange between the fluid and the solid 2 ( $\beta_{FS2} = 0$ ) in Figure 3. In Figure 5  $\beta_{FS1} = 10^0$  and  $\beta_{FS2} = 10^2$  while in Figure 2  $\beta_{FS1} = 10^2$  and  $\beta_{FS2} = 10^0$  - all the remaining parameters have the same values.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

This work was partially developed at the **LMTA** - Laboratory of Theoretical and Applied Mechanics at the Universidade Federal Fluminense.

#### REFERENCES

Atkin, R.J. and Craine, R.E. 1976. "Continuum Theories of Mixtures. Basic Theory and Historical Development", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **29**, 209-244  
 Bejan, A. 1987. "Convective Heat Transfer in Porous Media", *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer* (ed. Karaç, Shah and Aung), Wiley  
 Costa Mattos, H., Martins-Costa, M.L., Sampaio, R. and Saldanha da Gama, R.M. 1993. "A Thermodynamically Consistent Constitutive Theory for a Rigid Solid-Stokesian Fluid Mixture", *Mech. Research Comm.*, **20-3**, 243-249  
 Georgiadis, J.G. 1991. "Future Research Needs in Convective Heat and Mass Transport in Porous Media", *Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media* (ed. Karaç et al.), Kluwer, 1073-1088

Martins-Costa, M.L., Sampaio, R. and Saldanha da Gama, R.M. 1991. "An Algorithm for Simulating the Energy Transfer Process in a Moving Solid-Fluid Mixture", *J. Braz. Soc. Mech. Sc.*, **13-4**, 337-359  
 Martins-Costa, M.L., Sampaio, R. and Saldanha da Gama, R.M. 1992. "Modelling and Simulation of the Energy Transfer in a Saturated Flow through a Porous Medium", *Appl. Math. Modelling*, **26-11**, 589-597  
 Tien, C.L. and Vafai, K. 1990. "Convective and Radiative Heat Transfer in Porous Media", *Advances Appl. Mech.*, **27**, 225-281 Vafai, K. 1984. "Convective Flow and Heat Transfer in Variable-Porosity Media", *J. Fluid Mech.*, **147**, 223-259  
 Vafai, K. and Tien, C.L. 1981. "Boundary and Inertia Effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, **24**, 195-203  
 Williams, W.O. 1978. "Constitutive Equations for a Flow of an Incompressible Viscous Fluid through a Porous Medium", *Quart. Appl. Math.*, **36**, 255-267



## APRESENTAÇÃO DE UM MODELO-SIMULADOR DO TRANSPORTE DE SOLUTOS EM COLUNAS DE RECHEIO

Mara G. N. Quadri, Marinho B. Quadri  
Departamento de Engenharia Química  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Florianópolis, SC - Brazil



### RESUMO

*Apresenta-se um modelo matemático para a descrição dos processos de transferência de solutos em meio a escoamentos através de colunas de recheio. Sua resolução através do método dos volumes finitos, invoca simultaneamente os mecanismos de dispersão hidrodinâmica, convecção, adsorção, cinética de troca de massa e reações químicas. Utilizando-se Visual Basic, criou-se um aplicativo em ambiente Windows que facilita a tarefa do usuário na sistematização de simulações, visualização, registro de resultados, análise paramétrica, etc. Exemplos de aplicação são mostrados.*

### INTRODUÇÃO

A modelização matemática de transferência de massa é comumente feita através de equações diferenciais descritivas do sistema físico, as quais são solucionadas com auxílio de condições iniciais e de contorno apropriadas. A obtenção e utilização de uma solução analítica nem sempre é possível, sendo que a resolução numérica se apresenta como uma alternativa para várias situações onde a solução analítica não é possível. Devido à sua flexibilidade, a resolução numérica permite a adição de termos fonte e consumo, mudanças de condições iniciais, de contorno e ainda da descrição matemática da trocas envolvidas.

O modelo aqui apresentado se aplica ao transporte de solutos em colunas de recheio, fornecendo perfis de concentração dentro da coluna ao longo do processo e suas curvas de eluição, referentes aos parâmetros estudados. Ele é freqüentemente aplicado para transporte de solutos em solos, podendo no entanto ser aplicado a diferentes áreas, como a separação de compostos em colunas cromatográficas, em laboratórios ou industrialmente.

### MODELO MATEMÁTICO

Com a finalidade de representar assimetrias em curvas de eluição obtidas com traçadores, tais como os íons  $Cl^-$  e  $Br^-$  no estudo da infiltração em solos, Coats e Smith (1964) foram os primeiros a considerar o efeito de volumes "mortos" em meio a um escoamento no seio de um meio poroso. Nesse modelo, eles consideraram que a fase líquida é composta de duas frações: uma móvel, onde ocorre o escoamento, e outra imóvel, representada por líquido intraparticular, represado entre bolhas de ar ou ainda em locais de difícil acesso ao escoamento. Mais tarde, van Genuchten e Wierenga (1976) acrescentaram a esse modelo, uma adsorção linear instantânea sobre a fase sólida, controlada pela difusão do soluto na fase líquida. Encontram-se ainda na literatura outras generalizações do modelo, como aquelas que consideram taxas de degradação nas fases sólida e líquida (van Genuchten e Wagenet, 1989).

O modelo aqui apresentado acrescenta taxas de produção e de degradação na fase líquida e adsorção segundo a isoterma de Freundlich (Novy Quadri, 1993).

O balanço de massa para a transferência unidirecional de soluto em um meio poroso, sob condições de escoamento em estado estacionário, pode ser escrito como:

$$\rho_d f \frac{\partial S_m}{\partial t} + \rho_d (1-f) \frac{\partial S_{im}}{\partial t} + \theta_m \frac{\partial C_m}{\partial t} + \theta_{im} \frac{\partial C_{im}}{\partial t} + \mu \theta_m C_m + \mu \theta_{im} C_{im} - \gamma \theta_m + \gamma \theta_{im} = \theta_m D_m \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} - \theta_m v_m \frac{\partial C_m}{\partial z} \quad (1)$$

Sendo a adsorção sobre a fase sólida dada pelo modelo de Freundlich,

$$S_m = KC_m^N, \quad S_{im} = KC_{im}^N \quad (2)$$

e considerando as variações instantâneas dadas por:

$$\frac{\partial S_m}{\partial t} = KNC_m^{N-1}, \quad \frac{\partial S_{im}}{\partial t} = KNC_{im}^{N-1} \quad (3)$$

pode-se escrever:

$$\left[ \theta_m + \rho_d f KNC_m^{N-1} \right] \frac{\partial C_m}{\partial t} + \left[ \theta_{im} + \rho_d (1-f) KNC_{im}^{N-1} \right] \frac{\partial C_{im}}{\partial t} + \mu \theta_m C_m + \mu \theta_{im} C_{im} - \gamma (\theta_m - \theta_{im}) = \theta_m D_m \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} - \theta_m v_m \frac{\partial C_m}{\partial z} \quad (4)$$

Considera-se que a adsorção seja controlada por uma cinética de primeira ordem a qual representa a passagem do soluto da fase móvel em direção à fase imóvel, ou seja:

$$\left[ \theta_{im} + \rho_d (1-f) KNC_{im}^{N-1} \right] \frac{\partial C_{im}}{\partial t} = \alpha (C_m - C_{im}) \quad (5)$$

onde

$C_m$ ,  $C_{im}$  são as concentrações do soluto nas frações móvel e imóvel, respectivamente ( $kg\ m^{-3}$ );

$D_m$  o coeficiente de dispersão hidrodinâmica na fração móvel ( $m^2 s^{-1}$ );

$f$  a fração de sítios de adsorção sobre a fase sólida em contato com a fração de líquido móvel;

$K_s$  constante de adsorção do soluto ( $(m^3 kg^{-1})^N$ );

$N$  o expoente da isoterma de Freundlich;

$S_m, S_{im}$  quantidades de massa adsorvidas sobre a fase sólida em contato com água móvel e imóvel ( $kg kg^{-1}$ );

$t$  o tempo (s);

$v_m$  a velocidade intersticial ( $m s^{-1}$ );

$z$  a coordenada espacial (m);

$\alpha$  a constante de adsorção cinética reversível de 1ª ordem ( $s^{-1}$ );

$\gamma$  a constante de produção de ordem zero ( $kg m^{-3} s^{-1}$ );

$\mu$  constante de degradação de 1ª ordem ( $s^{-1}$ );

$\theta_m, \theta_{im}$  teores volumétricos totais de líquido, das frações móvel e imóvel ( $m^3 m^{-3}$ );

$\rho_d$  a densidade aparente do recheio ( $kg m^{-3}$ ).

Coats e Smith mostram que  $\alpha$  é uma função do coeficiente de difusão do soluto  $D_0$ , da fração de volumes estagnados  $\theta_m$ ,  $\theta_{im}/\theta$ , e da geometria desta fração (fase imóvel).

As condições para a solução das equações (4) e (5) são:

- condição inicial:

$$C_m = C_{im} = 0, \quad t = 0, \quad \forall z \quad (6)$$

- condições de contorno:

$$v_m - D_m \frac{\partial C_m}{\partial z} = \begin{cases} vC_0 & z = 0, \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & z = 0, \quad t > t_1 \end{cases} \quad (7)$$

$$D_m \frac{\partial C_m}{\partial z} = 0, \quad z = L, \quad \forall t \quad (8)$$

As equações (4) e (5) podem ser escritas sob a seguinte forma adimensional:

$$\beta R \frac{\partial C_1}{\partial T} + \omega(C_1 - C_2) + \psi[\phi C_1 + (1 - \phi)C_2] + \varphi = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C_1}{\partial Z^2} - \frac{\partial C_1}{\partial Z} \quad (9)$$

sujeita às condições (7) e (8), cuja adimensionalização fornece:

- condição inicial:

$$C_1 = C_2 = 0, \quad T = 0, \quad \forall Z \quad (10)$$

- condições de contorno:

$$-\frac{1}{Pe} \frac{\partial C_1}{\partial Z} + C_1 = \begin{cases} 1, & Z = 0, \quad 0 \leq T \leq T_1 \\ 0, & Z = 0, \quad T < T_1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial Z} = \frac{\partial C_2}{\partial Z} = 0, \quad Z = 1, \quad \forall T \quad (12)$$

onde os parâmetros adimensionais são dados na Tabela 1.

Tabela 1 - Definição dos parâmetros adimensionais.

Parâmetro adimensional	Adsorção não linear e restituição parcial	Adsorção linear e restituição total
T	$\frac{vt}{L}$	$\frac{vt}{L}$
Z	$\frac{z}{L}$	$\frac{z}{L}$
Pe	$\frac{vL}{D_m}$	$\frac{vL}{D_m}$
R	$1 + \frac{\rho_d K N C_m^{N-1}}{\theta}$	$1 + \frac{\rho_d K}{\theta}$
$\beta$	$\frac{\theta_m + f \rho_d K N C_m^{N-1}}{\theta + \rho_d K N C_m^{N-1}}$	$\frac{\theta_m + f \rho_d K}{\theta + \rho_d K}$
$\omega$	$\frac{\alpha L}{v\theta}$	$\frac{\alpha L}{v\theta}$
$\psi$	$\frac{\mu L \theta}{v\theta}$	—
$\varphi$	$\frac{\gamma \theta L}{v\theta} - C_i$ $\frac{C_0 - C_i}{C_0 - C_i}$	—
$\phi$	$\frac{\theta_m}{\theta}$	—
$C_1$	$\frac{C_m - C_i}{C_0 - C_i}$	$\frac{C_m - C_i}{C_0 - C_i}$
$C_2$	$\frac{C_{im} - C_i}{C_0 - C_i}$	$\frac{C_{im} - C_i}{C_0 - C_i}$

### RESOLUÇÃO NUMÉRICA

Não se conhece uma solução analítica para o sistema de equações (4) a (8), sendo que a resolução numérica foi obtida pelo método de volumes finitos (Novy Quadri, 1993). Este método consiste em substituir o domínio contínuo de escoamento por um domínio discreto composto de  $m$  células que contém os nós de cálculo, cujo objetivo é a obtenção de equações de transferência lineares.

O domínio espacial é dividido em células cúbicas de dimensões  $dx, dy$  e  $dz$ . Para um escoamento unidirecional,  $m$  elementos dispostos em série na direção  $z$  representarão o comportamento do sistema. A Fig. 1 ilustra as células de cálculo e mostra o domínio “espaço-tempo”.

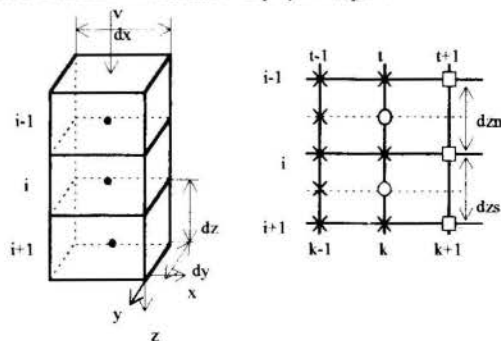


Figura 1 - Esquema de discretização do domínio de estudo. x concentração conhecida; O concentração estimada; □ concentração desconhecida.

A inclusão de uma isoterma não linear no balanço de massa conduz a uma equação a coeficientes não constantes. Para sua resolução, um esquema semi-implícito foi utilizado. Já os termos de variação da concentração com o tempo foram linearizados explicitamente com o tempo. Para o termo convectivo, as concentrações internodais são estimadas pela média aritmética dos valores nodais (Haverkamp et al., 1977):

$$C_{i+1/2}^{K+1} = \frac{C_i^{K+1} + C_{i+1}^{K+1}}{2} \quad (13)$$

A discretização das equações (4) e (5) foi desenvolvida em detalhes (Novy Quadri, 1993), e conduzem a um sistema de m equações lineares a m incógnitas, na seguinte forma geral:

$$A_1 C_{i-1}^{k+1} + A_2 C_i^{k+1} + A_3 C_{i+1}^{k+1} = A_0 \quad (14)$$

com C sendo os valores de concentração nos valores dos índices espaciais  $1 \leq i \leq n$ , no tempo  $k+1$ . Os coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_0$  são dependentes das características hídricas e físico-químicas do sistema no ponto i. Os coeficientes situados nas fronteiras do domínio físico possuem expressões particulares comparativamente aos pontos internos do domínio, pois levam em consideração as condições de contorno. A matriz resultante do sistema é tridiagonal, cuja resolução é efetuada pelo algoritmo de Thomas.

A validação do código numérico foi obtida comparando-se os resultados obtidos aos de uma solução analítica existente para um caso mais simples, o qual considera adsorção instantânea segundo uma isoterma linear onde  $N=1$ , sem consumo ou produção (van Genuchten e Wierenga, 1976). Os parâmetros adimensionais para este caso tomam a forma mostrada na coluna direita da Tabela 1.

**Características do programa de cálculo:** O programa de cálculo, desenvolvido sob o ambiente Visual Basic, permite considerar dados dimensionais e adimensionais, registrando um número escolhido de perfis de concentração calculados, a curva de eluição, o cálculo do balanço de massa e ainda os parâmetros e condições para os quais as curvas são calculadas. Ele é dotado de uma tela de visualização onde a passagem do soluto através da coluna pode ser observado pela evolução dos perfis de concentração consecutivos exibidos. A curva de restituição pode ser diretamente comparada aos dados experimentais, transportados sobre as curvas calculadas. Como informações complementares, ele fornece o balanço de massa à medida que os cálculos progredem, assim como uma estimativa do número de passos de cálculos previstos e executados para o ensaio em questão. Esta visualização é sobretudo útil para situações críticas, tais como aquelas que geram instabilidades numéricas ou a não convergência dos cálculos. O tempo de cálculo é muito variável pois depende das condições impostas.

## RESULTADOS

O modelo apresentado pode ser aplicado a diferentes casos que considerem a transferência de solutos em colunas sob regime de escoamento permanente. Um primeiro exemplo é ilustrado na Fig. 2, que considera a transferência de traçadores ( $Cl$ ) em colunas saturada ( $\theta = 0,36 \text{ m}^3/\text{m}^3$ ) e parcialmente saturada em água ( $\theta = 0,23 \text{ m}^3/\text{m}^3$ ).

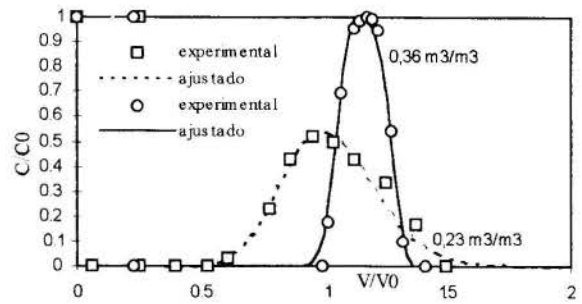


Figura 2 - Simulação da transferência de traçadores ( $Cl$ ) em colunas saturadas e parcialmente saturadas em água.

Podemos observar que o pico apresentado pela curva obtida para o estado parcialmente saturado se apresenta mais aberto e mais baixo, comparativamente ao estado saturado. Isto é característico de um meio mais dispersivo ( $D_m$  mais elevado), o que resulta em um valor menor para o número de Peclet ( $Pe$ ). Pode-se ainda ver que, para o sistema à saturação, a curva de eluição passa pelo ponto de concentração  $C/C_0$  - tempo adimensional  $V/V_0$  (0,5;1). Isto demonstra que o soluto não sofre interações físico-químicas com a matriz sólida ( $K=0$ ), tendo velocidade de escoamento semelhante à da água, sendo  $R_i$  o fator de atraso, igual a 1. Por outro lado, o adiantamento relativo do estado parcialmente saturado se deve a um teor de água inferior à porosidade do meio, onde se formam vias de escoamento preferenciais. Neste caso, se a vazão é próxima à do estado saturado, a velocidade média do escoamento é maior, provocando um aparecimento precoce do soluto na saída da coluna. O parâmetro responsável por este tipo de comportamento é  $\beta$ , indicativo do teor de água imóvel. À medida que  $\beta$  diminui, mais cedo surge o soluto, sendo seu valor máximo igual a 1, atingido quando o sistema está à saturação. Para um traçador, temos a expressão  $\beta = \theta_m/\theta$ . O parâmetro cinético  $\omega$  não possui uma resposta linear, sendo influenciado pela velocidade de escoamento. Para velocidades suficientemente pequenas, que é o caso apresentado à saturação,  $\omega$  é grande, e o processo de transferência de massa é praticamente instantâneo. Para velocidades suficientemente grandes,  $\omega$  será pequeno e poderá ser negligenciado (caso insaturado).

A Fig. 3 apresenta o cálculo de perfis de concentração desenvolvidos no interior da coluna, para a transferência do cloreto.

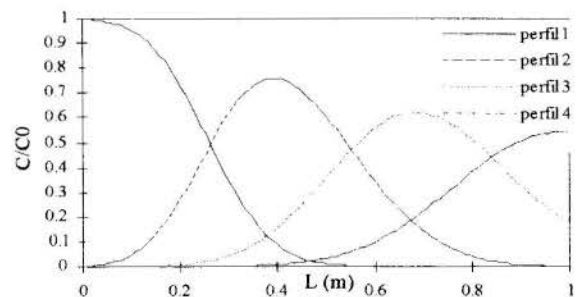


Figura 3 - Desenvolvimento do perfil de concentrações no interior da coluna.



Podemos observar que o pico de concentração dentro da coluna diminui em altura e se alarga à medida que o soluto evolui dentro da coluna devido ao efeito da dispersão hidrodinâmica. Os perfis 3 e 4 se mostram inacabados pois parte do soluto foi eluído da coluna. Os parâmetros utilizados para esta simulação são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros utilizados na simulação do cloreto.

Parâmetro	0,23 m <sup>3</sup> m <sup>-3</sup>	0,36 m <sup>3</sup> m <sup>-3</sup>
Pe	50	1300
R	1,0	1,0
$\beta$	0,9	0,986
$\omega$	1,1 10 <sup>-7</sup>	20

Um segundo exemplo (Fig. 4) considera a transferência de pentaclorofenol, um pesticida, que apresenta, além do transporte convectivo-dispersivo, uma interação de adsorção instantânea com a matriz sólida. O procedimento de obtenção dos parâmetros físico químicos passam por um ajuste prévio dos parâmetros hidrodinâmicos com o traçador (KCl na Fig. 4). Como os grupos paramétricos adimensionais variam com tempo e espaço devido à sua dependência da concentração por influência da isoterma não linear, são apresentados na Tabela 3 os parâmetros na sua forma dimensional.

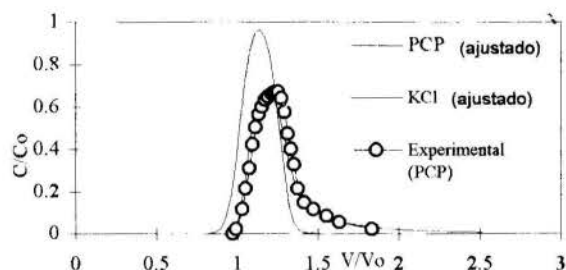


Figura 4 - Simulação da curva de eluição do pentaclorofenol mostrando adsorção não linear.

Tabela 3 - Parâmetros relativos à simulação do PCP.

Parâmetro	Valor
$v$ (m s <sup>-1</sup> )	1,7·10 <sup>-6</sup>
Pulso (s)	2,21·10 <sup>-7</sup>
$D_m$ (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	2,8·10 <sup>-8</sup>
$\theta_m/\theta$	0,986
$f$	0,465
$\alpha$ (s <sup>-1</sup> )	0,0072,8·10 <sup>-8</sup>
$K$ (m <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup> ) <sup>N</sup>	4,9·10 <sup>-3</sup>
N	0,65
$\mu$ (s <sup>-1</sup> )	8,3·10 <sup>-7</sup>

Nesta Tabela, a velocidade do escoamento  $v$  e o pulso são condições de operação. Por meio do traçador são determinados  $D_m$ ,  $\theta_m/\theta$  e  $\alpha$ . O ajuste dos parâmetros físico-químicos fornecem  $f$ ,  $K$ ,  $N$  e  $\mu$ .

O terceiro exemplo versa sobre a separação da mistura glucose-frutose em coluna cromatográfica recheada com resina de troca iônica do tipo gel de Ca<sup>++</sup>, Duolite C204/2115, com diâmetro de partícula de 4,71·10<sup>-6</sup> m. A Fig. 5 traz a curva simulada pelo modelo, e seus respectivos parâmetros são apresentados na Tabela 4.

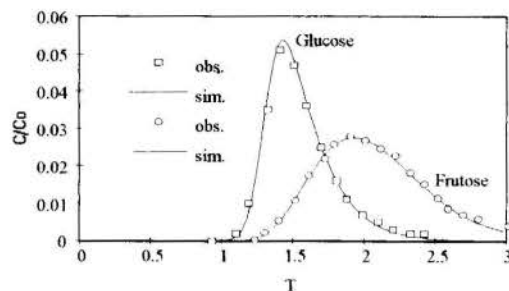


Figura 5 - Simulação da mistura glucose-frutose.

Tabela 4 - Parâmetros relativos à simulação da separação da mistura glucose-frutose.

Parâmetro	Glucose	Frutose
Pe	300	300
R	1,5	2,1
$\beta$	0,88	0,67
$\omega$	1,5	6,9

Sendo os dois solutos lançados em um único pulso, Pe assume o mesmo valor. Sendo que, sua cinética de adsorção, previamente determinada, segue uma reta (N=1), podem ser utilizados parâmetros adimensionais. Observamos assim que a frutose possui uma afinidade maior pela matriz sólida, o que se reflete em um valor de R maior.  $\beta$  diminui devido à influência de  $f$ , e  $\omega$  mostra a existência de uma cinética mais importante, já observada na Fig. 5 para a frutose por uma cauda mais alongada.

## CONCLUSÕES

O modelo apresentado mostra-se útil em diferentes situações que envolvam o transporte de solutos em meios porosos inseridos em colunas. Mesmo não sendo um modelo de caráter geral, descreve bem situações de saturação e insaturação, com diferentes intensidades de interação entre o soluto e a matriz sólida.

## SUMMARY

A mathematic model to describe solute transfer process in columns under stationary flow is presented. The method of finite volumes is used for its resolution, and takes the concepts of hydrodynamic dispersion, convection, mass transfer kinetics and chemical reactions in consideration. Visual Basic was a useful tool that facilitated the necessary work in the systematization of the simulations, visualization, results recording, parametric analysis, etc. Examples of application of the modes are showed.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coats, K.H., Smith, B.D., 1964, Dead-end pore volume and dispersion in porous media. Petrol. Eng. J., vol. 4, n<sup>o</sup> 1, pp. 73-84.

Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P.J., Vachaud, G., 1977, A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 41: 285-294.

Novy Quadri, M.G., 1993, Transferts de solutés dans les sols saturés et non saturés. Application au pentachlorophénol. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, France.

van Genuchten, M.Th., Wagenet, R.J., 1989, Two site/two region models for pesticide transport and degradation: theoretical development and analytical solutions. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 53 (5): 1303-1310.

van Genuchten, M.Th., Wierenga, P.J., 1976, Mass transfer studies in sorbing porous media. I. Analytical solutions. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 40 (4): 473-480.



**EXPERIMENTAL DETERMINATION OF TIME IN BIN COOLING FOR CORN AERATION: COOL-FRONT EVOLUTION**

**Ana M. Pagano, Dina E. Crozza**

Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería,  
 Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNC),  
 7400 - Olavarría - Provincia de Buenos Aires - Argentina



SUMMARY

*In this work it's shown the application of an experimental method for estimating of time in bin cooling in a silo of corn from continuous full-hot dryer. The cool-front evolution was observed with a measuring and acquisition data system. Ten NTC temperature-sensing devices were installed as pairs 2 m apart in a central cable type bus in parallel. The temperature was measured in an autonomous and intelligent module that converts the received signal to digital values and transmits it under demand to a central collector, allowing the access to periodic and request consults. The grain mass temperature was established at 11.8°C after 38 accumulated hours of cooling. This monitoring was given an adequate control of time of cooling needed to carry the grains until temperatures that ensure optimum conditions of conservation. On other hand, when the temperature for sure storage was reached, the following of this variable in real time allowed to observe trends and to analyze the changes on historic information of temperature inside the bin.*

INTRODUCTION

The conservation of cereal and oleaginous storage grains is so much better when they are clean, dry and cool. During post-harvest many treatments of conditioning -like drying and aeration- are employed with the objective to carry the grain mass to the optimum conditions of conservation for large storage periods.

Within no-conventional drying systems, the design of drying followed by aeration (In Bin Cooling) needs an adequate selection of aeration flow. This airflow is direct function of the ventilating-air time required to cool the grain mass until values of temperatures that limit the respiratory rhythm of the seeds and inhibit the growth of the fungus, insects and microorganisms.

The determination of time of in bin cooling through methods that includes the losses in grain moisture is a complex proceeding, because the estimate of these losses and their dependence with environmental conditions must be realized previously, in a system with low impelling-forces air-grain.

In this work an experimental method of low cost (designed at Facultad de Ingeniería UNC) for determination of time of in bin cooling in corn storage from a full-hot dryer during winter is presented as an alternative application.

MATERIALS AND METHODS

The experiment was done in a metallic bin of 300 tons of capacity, 7.40 m diameter, 7.60 m height, with a conic concrete bottom 2.50 m underground and with a metallic conic roof. The silo was provided by an aeration system (conformed by 3 conducts of perforated-sheet installed in star structure) and by an axial fan with ventilation power of 7.5 HP.

A measuring and acquisition data system with 10 NTC sensors installed as pairs 2 m apart in a central cable type bus in parallel, was used to observe the cool-front evolution (Figure 1).

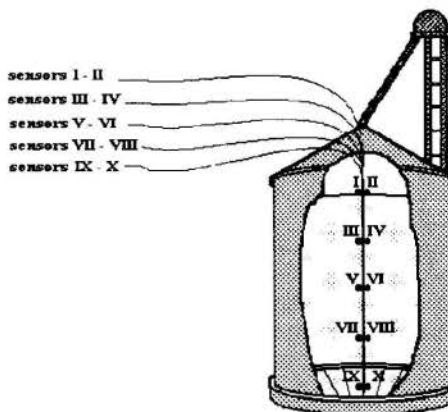


Figure 1: Schematic diagram of experimental silo showing points for temperature sensing.

An autonomous and intelligent module that converts the received signal to digital values and transmits it under demand to a central collector, was used to measure the grain temperature. The A/D converter was an MC145041 with CMOS technology, 11 input channels and 8 bits of resolution. The thermistors were calibrated at 1% in a temperature range from 0 to 50°C, with a typical operation zone between 14-25°C. The measures were carried out with an error margin lesser than 5% of full scale. The communication driver in real time was made in Turbo C++ language, using facilities of screen visualization (Figure 2), management of experimental data and printing of just in time or historic temperatures. This software allowed the access to periodic consults (for each measuring module with a predefined sequence) and to request consults (for a particular sensor of temperature).

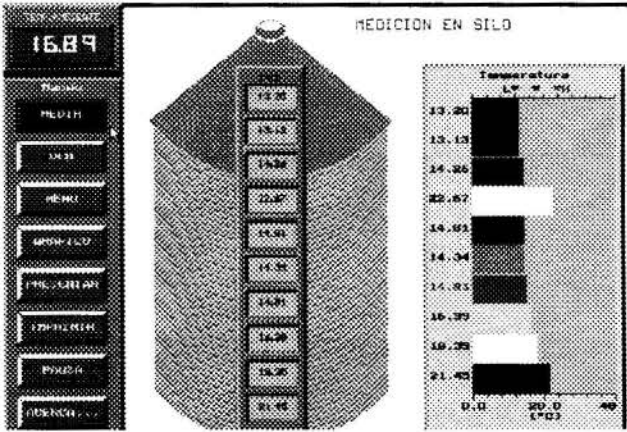


Figure 2: Operative interface of data-acquisition software.

The material used was corn from a continuous full-hot dryer. To load the silo, a system of chain pump well was employed. The grains were come in with average moisture content and temperature of 13.8% (w.b.) and 30-35°C, respectively. Once time the charge was completed (until 245 tons), 18 hours of stabilization time of temperature (tempering) were awaited. Then, the cooling procedure was started using aspiration air (negative pressure) in batch process, during the hours of the day when the air temperature was 6°C lesser than the average grain temperature, and taking care of the relative air moisture.

## RESULTS AND DISCUSSION

The time of in bin cooling for storage grains is mainly a direct function of the specific airflow employed ( $m^3/s \cdot m^3 \text{ silo}$ ), of the losses of grain moisture -produced when the warm and hot seeds get in contact with air more dry and cool, and of other secondary variables such as the environmental conditions. The theoretical estimate of cooling time is a complex work that involves to know deeply the impelling-forces air-grain. With the objective of simplify this, Christensen (1982) presented a basic method for calculate the cooling time in wheat beds from the

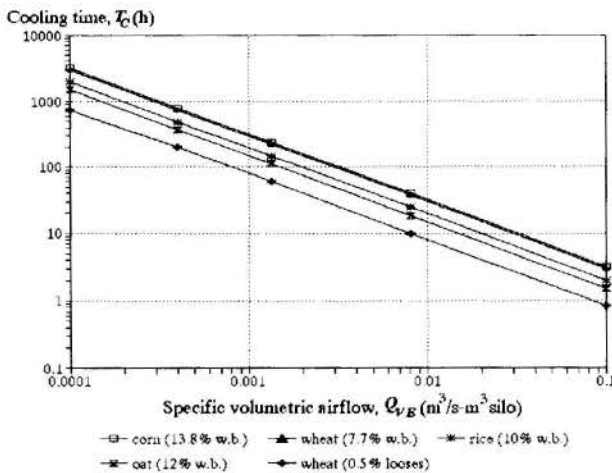


Figure 3: Time of in bin cooling for wheat and other grains as a function of the specific volumetric airflow.

specific volumetric airflow  $Q_{VE}$ , for two different situations: cooling without change in the grain moisture (upper line in Figure 3), and cooling with dissimilar losses in the grain moisture (as example, lower line in Figure 3) in various ranges of initial-final temperatures.

This graph is constructed on basis of an energy balance where the heat submitted by the static grain-mass during the cooling process is the heat absorbed by the circulating air. On the hypothesis of to dispose of air at constant temperature  $T_A$  and grain at uniform temperature  $T_G$  ( $T_G > T_A$ ), the heat  $Q$  extracted by the air from the grain mass is:

$$Q = M_G \cdot C_{PG} \cdot (T_G - T_A) \quad (1)$$

where  $M_G$  is the grain mass to cool, and  $C_{PG}$  is the specific heat of grains. The mass  $M_G$  can be expressed as a function of bulk density  $\rho_G$ , bed depth  $H$ , and bin diameter  $D$ . Then, rewriting the Eq. (1):

$$Q = \rho_G \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right) \cdot H \cdot C_{PG} \cdot (T_G - T_A) \quad (2)$$

In the other hand, the absorbed heat by ventilation air can be calculated as:

$$Q = M_A \cdot C_{PA} \cdot (T_G - T_A) \quad (3)$$

where  $M_A$  is the total of air mass employed to cool the grains and  $C_{PA}$  is the specific heat of air.

The needed air mass for all process of cooling can be expressed in function of the air density  $\rho_A$ , volumetric airflow  $Q_V$  and the cooling time  $T_C$ , considering that  $Q_V$  is the product between the specific airflow  $Q_{VE}$  and the bin volume  $V = (\pi \cdot D^2 / 4) \cdot H$ . Then, the Eq. (3) can be written:

$$Q = \rho_A \cdot Q_{VE} \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right) \cdot H \cdot T_C \cdot C_{PA} \cdot (T_G - T_A) \quad (4)$$

Combining the Eqs. (2) and (4), the simplified equation (5) for the calculation of cooling time  $T_C$  can be obtained:

$$T_C = \frac{\rho_G \cdot C_{PG}}{\rho_A \cdot Q_{VE} \cdot C_{PA}} \quad (5)$$

The specific volumetric airflow  $Q_{VE}$  can be calculated from the ventilation power installed in the bin. If the losses by friction in the air conducts were considered null, the fan efficiency is unitary, and the pressure drops in the bed due to compact effects and foreign material are insignificant, the ventilation-power is equivalent to the power absorbed by the grain bed, like it's shown in Eq. (6):

$$P_V = P_A = \Delta P u \cdot Q_{VE} \cdot H^2 \quad (6)$$

where  $P_V$  is the ventilation-power per unit of bin section,  $P_A$  is the power absorbed by grain bed and  $\Delta P u$  is the pressure-drop per unit of bed depth.

In the other hand,  $\Delta P u$  can be expressed as a function of  $Q_{VE}$  like Hukill and Ives (1955) proposed (Eq. (7)):

$$\Delta P u = \frac{A \cdot (Q_{VE} \cdot H)^2}{\ln(1 + B \cdot Q_{VE} \cdot H)} \quad (7)$$

where  $A$  and  $B$  are Hukill and Ives's constants for each particular grain and airflow range ( $A = 0.977 \cdot 10^4$ ,  $B = 8.55$  for low velocities).



For a ventilation power of 7.5 HP (0.1744 HP/m<sup>2</sup>), the value of  $Q_{VE}$  obtained by iteration from the combination of Eqs. (6) and (7) resulted 0.0139 m<sup>3</sup>/(m<sup>3</sup>silo-s). Considering the following values for the parameters:  $\rho_G = 750$  kg/m<sup>3</sup> (measured "in situ"),  $C_{PG} = 1956$  J/(kg.°C) (Brooker et al., 1982),  $\rho_A = 1.25$  kg/m<sup>3</sup> and  $C_{PA} = 1015$  J/(kg.°C) (Giner, 1995), the time of in bin cooling  $T_C$  for a continuous aeration obtained by the application of Eq. (5) was 83184 s  $\approx$  23.1 h. This result corresponds to cooling without losses in the grain moisture and can be too observed in Figure 3 on the line corresponding to corn.

However, the specific airflow  $Q_{VE}$  that really goes-across

the grain bed can be estimated from the power absorbed by bed using a multiplier coefficient  $\xi_1 \approx 1.5$  to include the additional pressure-drop in the bed caused by the variables before mentioned, a multiplier coefficient  $\xi_2 \approx 1.3$  to include the losses in the aeration system, and a multiplier coefficient  $\xi_3 \approx 2$  to include the efficiency of the fan working in the zone of optimum performance (McKenzie et al., 1980; Giner, 1995). The corrected value of  $Q_{VE}$  was 0.0079 m<sup>3</sup>/(m<sup>3</sup> silo-s), and the time of in bin cooling (without losses in the grain moisture) was 146362 s  $\approx$  40.7 h. However, it can be observed that small changes in the moisture content of the grains can cause important decreases in the time of cooling (see lines corresponding to wheat in Figure 3).

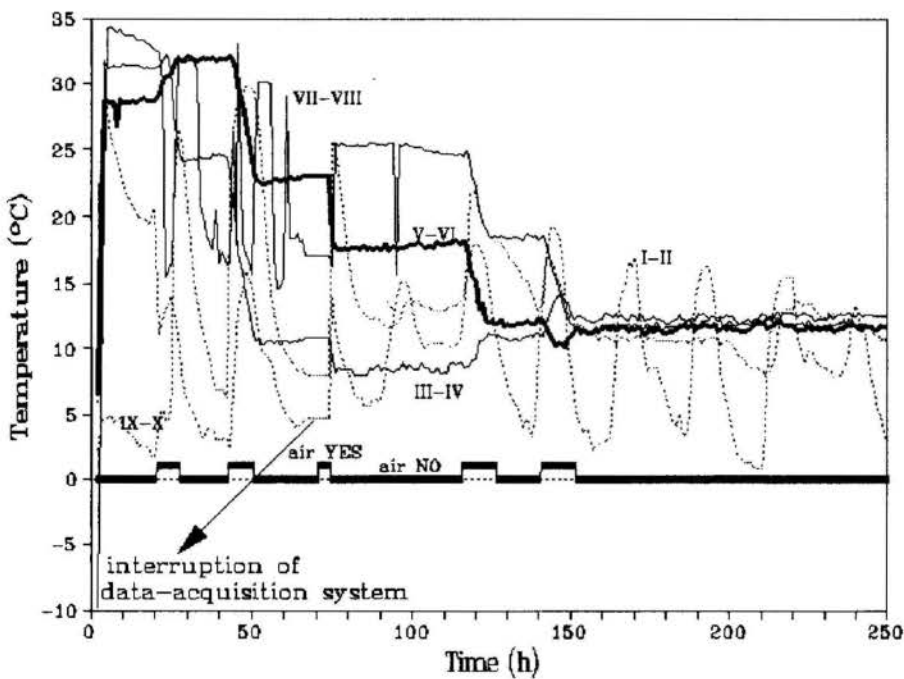


Figure 4: Monitoring of grain temperature through 10 sensors. The wide horizontal-line represents the intervals during which the fan was turned on/off (air YES, air NO).

Experimentally, the evolution of the sensor's temperatures showed that temperature of the grain mass established at 11.8°C after 38 accumulated hours of ventilation. This result can be observed in Figure 4 (the note "interruption of data-acquisition system" indicates a temporary cessation of electric energy). Periodic extractions of samples for moisture determination with a Delber moisture-meter (type capacitance) were realized parallel at the continuous control of temperature. The moisture content established at 13.5% (b.h.) after the 38 hours of cooling. It can be observed that this acquisition-data system describes with accuracy the behavior of cooling-front, as good as the heat balance.

Subsequent controls were realized during 30 days after turnoff the ventilation equipment. This monitoring allows to observe that changes in temperature of the storage material no were present.

## CONCLUSIONS

This procedure of continuous monitoring of the grain-mass temperature gives an adequate control of time in bin cooling needed to carry the grains until temperatures that ensure optimum conditions of conservation. On other hand, when the temperature for sure storage was reached, the following of this variable in real time allowed to observe trends and to analyze the changes on historic information of temperature inside the bin. The application of this data-acquisition system allowed to create an interactive interface with the operator and produced information that can prosecute later with the sanitary quality of grains. This method of periodic inspection contributed to improve the optimum conditions of knowledge state and to prevent the material from deterioration, during large storage periods.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank Ing. Alberto Miotti from the Cooperativa Agropecuaria e Industrial de Olavarría, Provincia de Buenos Aires, Argentina, for the technical assistance.

#### REFERENCES

- Brooker, D. B., Bakker-Arkema, F. W. and Hall, C. W., 1982, "Drying Cereal Grains", The Avi Publishing Company, Inc., Westport, Connecticut, USA.
- Christensen, C. M., 1982, "Storage of Cereal Grains and Their Products", 3<sup>o</sup> Ed. AACC, St Paul, MN.
- De la Vega, R., Spina, M., Crozza, D. E. and Pagano, A. M., 1994, "Monitore Procedure of the Temperature Fluctuations Nearly the Bin Wall for Grains from Argentine Production", *Proceedings of Congreso Internacional de Ingeniería Rural y III Congreso Argentino de Ingeniería Rural*, Buenos Aires, Argentina.
- Crozza, D. E. y Pagano, A. M., 1995, "Medición y Adquisición de Datos de Temperatura en un Silo de Almacenamiento de Trigo de Producción Argentina", *Proceedings of Measurement and Control International Congress ISA-SHOW'95*, SP, Brasil, pp. 445-451.
- Giner, S. A., 1995, "Temas de Post-cosecha de Granos Oleaginosos. Parte 2", *Aceites y Grasas*, Vol. 5, pp. 69-85.
- Hukill, W. V. and Ives, N. C., 1955, "Radial Flow Resistance of Grain", *Agricultural Engineering*, Vol. 36, pp. 332-335.
- McKenzie, B. A., Føster, G. H. and DeForest, S. S., 1980, "Fan Sizing and Application for Bin Drying/cooling of Grain", Cooperative Extension Service, Purdue University, West Lafayette, IN 47907.
- Pagano A.M. y Crozza, D. E., 1996, "Termometría en Silos de Almacenamiento de Granos", *Proceedings of 3er. Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos CAIP'96*, Argentina (in press).



Carlos R. Carrara, Enrique J. Mammarella, Amelia C. Rubiolo  
INTEC (U.N.L. - CONICET) - Güemes 3450 (3000) Santa Fe - Rep. Argentina

Resumen

Se comparó el comportamiento de los modelos de flujo pistón ideal y flujo con dispersión axial para reactores tubulares de lecho fijo empleando distintas cinéticas. Se utilizaron los parámetros y valores de conversión obtenidos experimentalmente con un reactor tubular relleno con β-galactosidasa de Kluyveromices Fragilis fijada sobre esferas de quitosano, considerando cuatro concentraciones de sustrato y un amplio rango de caudales. El modelo de dispersión axial y cinética de Michaelis-Menten con inhibición competitiva por producto permitió estimar los valores experimentales con un error relativo máximo del 8 % mientras que con el otro modelo y otras cinéticas los errores llegaron al 50%.

INTRODUCCION

El conocimiento de los mecanismos que intervienen en los reactores enzimáticos permite definir el modelo a resolver para obtener una solución que permita estimar las distintas condiciones de operación. Los reactores tubulares de lecho fijo, en general, son analizados suponiendo un comportamiento de flujo pistón ideal. Sin embargo, muchas veces este modelo no describe acertadamente el comportamiento experimental; por lo tanto deben considerarse otros factores como la dispersión axial del flujo para disminuir la desviación entre los valores calculados y experimentales. También en el reactor, debido a que la enzima está inmovilizada en el soporte, se forman gradientes de concentración entre la superficie y/o interior del mismo, y la superficie y el seno de la solución que se tienen en cuenta mediante la incorporación de la resistencia a la transferencia de materia interna y externa. Además de los fenómenos de transporte se deben contemplar las condiciones de la reacción a través de las ecuaciones cinéticas, que para catálisis enzimática tienen el inconveniente de ser parabólicas, por lo cual la resolución del modelo no es sencilla y generalmente sin la posibilidad de obtener una solución exacta.

Muchos trabajos en la literatura se resuelven luego de aplicar simplificaciones en algunos de los aspectos mencionados, siendo posible conseguir la resolución de las ecuaciones que luego son ajustadas mediante ciertos parámetros a los datos experimentales.

Aplicando métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales es posible utilizar modelos complejos y determinar los factores más importantes en cada rango de trabajo, comparando el modelo con los datos experimentales, y determinar la incidencia de los fenómenos considerados.

El presente trabajo, tiene por objeto analizar dos de los modelos más comunes en el estudio de reactores tubulares, obtener información sobre la importancia de los factores empleados y de la cinética de reacción, en la descripción del comportamiento real del reactor.

Teoría. El modelo matemático para la variación de concentración del sustrato a lo largo de un reactor tubular isotérmico de geometría cilíndrica con dispersión axial, en estado estacionario y considerando transferencia de materia

externa a la superficie del catalizador está representado por (Lortie y Pelletier, 1992):

$$Da \cdot \frac{d^2S}{dZ^2} - U \cdot \frac{dS}{dZ} - ks.a \cdot (S - Si) = 0 \quad (1)$$

Con las condiciones de contorno:

$$S = So + Da \cdot \frac{dS}{dZ} \quad Z = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dZ} = 0 \quad Z = L \quad (3)$$

Considerando que no hay acumulación de sustrato en la superficie del catalizador, donde se encuentra la enzima, el balance de materia en la interfase con la velocidad de reacción (Rc) está dado por la siguiente ecuación:

$$ks.a \cdot (S - Si) = Rc \quad (4)$$

Teniendo en cuenta las características de la enzima, en la Tabla 1 se presentan las distintas cinéticas que pueden ser consideradas.

Tabla 1- Ecuaciones de velocidad de reacción.

Tipo de reacción	Rc
I Primer orden	k' . Si
II Michaelis-Menten	V'm . Si / K'm + Si
III Michaelis-Menten con inhibición competitiva por producto	V'm . Si / K'm . (1 + P / k'i) + Si

Adimensionalizando las Ecs. (1), (2) y (3) respecto de Z con Z\* = Z/L y reemplazando Si con α = Si / S, se obtiene:

$$\frac{1}{Pe} \cdot \frac{d^2S}{dZ^2} - \frac{dS}{dZ} - St \cdot S \cdot (1 - \alpha) = 0 \quad (5)$$

Con las condiciones de contorno:

$$S = S_0 + \frac{1}{Pe} \cdot \frac{dS}{dZ^*} \quad Z^* = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dS}{dZ^*} = 0 \quad Z^* = 1 \quad (7)$$

Utilizando el modelo de flujo pistón ideal la Ec. (5) se reduce a:

$$\frac{dS}{dZ} - St \cdot S(1-\alpha) = 0 \quad (8)$$

$$\text{Con la condición inicial} \quad S = S_0 \quad Z^* = 0 \quad (9)$$

Para cada modelo se resuelve la ecuación principal y la Ec. (4) con las distintas cinéticas de la Tabla 1 de donde se despeja  $\alpha$ , como lo indica el Anexo. Para el modelo de flujo pistón ideal la ecuación diferencial es de primer orden, la cual puede integrarse con mayor o menor dificultad de acuerdo a la cinética que se considere, mientras que para el modelo con dispersión axial, la ecuación se resuelve aplicando el método de colocación ortogonal con N puntos interiores (Finlayson, 1980). Este método consiste en expresar en el dominio  $Z^*$  (0, 1) la variable (S) en términos de  $Z^*$  mediante las condiciones de contorno y un polinomio de expansión de orden N, que se anula en los extremos del dominio. El polinomio formado con expresiones que cumplen la condición de ortogonalidad, contiene N coeficientes desconocidos. Las derivadas 1<sup>ra</sup> y 2<sup>da</sup> del polinomio generan las matrices de colocación A y B. La evaluación de la variable en los puntos interiores conociendo el valor en los extremos 1 y N+2 se realiza transformando las Ecs. (5), (6) y (7) en:

Para  $j = 2 \dots N+1$ :

$$\frac{1}{Pe} \cdot \sum_{k=1}^{N+2} B_{kj} S_k - \sum_{k=1}^{N+2} A_{kj} S_k - St \cdot S_j (1-\alpha_j) = 0 \quad (10)$$

Para  $j = 1$ :

$$Z^* = 0 \quad S_1 = S_0 + \frac{1}{Pe} \cdot \sum_{k=1}^{N+2} A_{kj} S_j \quad (11)$$

Para  $j = N+2$ :

$$Z^* = 1 \quad \sum_{k=1}^{N+2} A_{kj} S_j = 0 \quad (12)$$

Estas expresiones representan un grupo de ecuaciones algebraicas no lineales que son resueltas por el procedimiento de Gauss. Con las Ecs. (10), (11) y (12) se halla el valor de la función en los N puntos interiores; pudiéndose luego calcular los coeficientes. En este caso se utilizó los 6 puntos interiores. Teniendo en cuenta que no interesa conocer el perfil de concentraciones dentro del reactor, sino a la salida del mismo se resolvió la serie de ecuaciones para obtener el valor de la variable solamente en este extremo sin el cálculo de los valores intermedios y de los coeficientes. Estos valores de la concentración de sustrato a la salida del reactor se realizaron variando la concentración inicial de sustrato y la velocidad superficial.

Coefficiente de transferencia de materia. El mismo puede estimarse a partir de la correlación de Chilton y Colburn, y del flujo de transferencia de materia como:

$$k_s = C \cdot \frac{D_s^{2/3}}{dc^p} \cdot \left( \frac{\delta s}{\mu s} \right)^{(2/3-p)} \cdot U^{(1-p)} \quad (13)$$

Donde P es igual a 2/3 y C a 1.09/ $\epsilon$  que son valores elegidos para números de Re entre 1,6 E-5 a 55 y Sc entre 165 a 70600, que se corresponden con las condiciones de trabajo;  $\epsilon$  es la fracción volumétrica libre del reactor o porosidad. El área externa del soporte por unidad de volumen del reactor se halló como:  $a = 6 \cdot (1 - \epsilon) / dc$ , (Geankoplis, 1983).

## MATERIALES Y METODOS

Se utilizaron los materiales indicados en un trabajo anterior (Carrara y Rubiolo, 1994). Se utilizó la enzima  $\beta$ -galactosidasa de *Kluyveromyces Fragilis* de nombre comercial Lactozym 3000 de Novo; quitosano de Crab Shells, lactosa y glucosa de Sigma, Chemical Co. Kit de glucosa oxidasa de Wiener Lab. Todos los otros reactivos fueron calidad pro-análisis y de Mallinckrot o Merck.

Constantes cinéticas. Las constantes cinéticas indicadas en la Tabla 2, fueron calculadas por regresión no lineal de datos experimentales, determinados en un reactor batch con agitación, y con las ecuaciones integradas de la velocidad de reacción; verificando que las mismas estuvieran libres de efectos difusivos (Carrara y Rubiolo, 1996).

Tabla 2 - Parámetros cinéticos.

Tipo de reacción	Rc
I Primer orden	$k' = 0,64^{(a)}$
II Michaelis-Menten	$k'_2 = 0,64^{(a)}$ $K'm = 0,141 M$
III Michaelis-Menten con inhibición competitiva por producto	$k'_2 = 0,78^{(a)}$ $K'i = 0,234 M$

<sup>(a)</sup> mM (glucosa) . min<sup>-1</sup> . mg<sup>-1</sup> proteína

La velocidad máxima se calculó como:  $V'm = k'_2 \cdot p_{sop} \cdot E^0$ .

Coefficiente de dispersión axial. El coeficiente de dispersión axial (Da) se determinó experimentalmente con el método de Levenspiel (1979), inyectando una cantidad definida de un trazador (glucosa) en el ingreso del reactor y determinando la forma de salida del mismo por medio de un detector diferencial de índice de refracción, marca LDC modelo 1107. La señal obtenida fue integrada posteriormente y por el método de los momentos (Wen y Fan, 1975) se calculó la simetría del pico de salida, el número de Péclet (Pe) y Da.

Ensayos experimentales. El reactor fue una columna de 14,0 x 1,2 cm, rellena con 10,66 gr de catalizador, quedando una fracción volumétrica libre de  $\epsilon = 0,389$ . Cuatro soluciones con distinta concentraciones de lactosa en buffer de 0,025M de KH<sub>2</sub>PO<sub>4</sub> de pH 6,86, se hicieron circular a través de la columna desde 113 a 483 ml/hr y se operó en forma isotérmica a 43°C. Se tomaron muestras a distintos tiempos del reactor en estado



estacionario, determinándose la concentración de glucosa a la salida del mismo (Carrara y Rubiolo, 1994).

## RESULTADOS Y DISCUSION

Los valores experimentales de conversión correspondientes a cuatro concentraciones de lactosa y distintas velocidades superficiales fueron tomados de un trabajo anterior de Carrara y Rubiolo (1994) y los valores teóricos para estas condiciones fueron calculadas con los diferentes modelos como se ha indicado. Con ambos grupos de valores, se calculó para cada cinética la desviación estándar de cada concentración inicial de sustrato y la desviación global para todas las concentraciones (Tabla 3). En esta tabla, se observa que la menor desviación estándar se obtuvo con la combinación del modelo de dispersión axial y cinética de Michaelis-Menten con inhibición competitiva por producto (Tipo III), con valores de desviación estándar similares para todas las concentraciones de sustrato.

En las Figuras 1 y 2, se muestran los datos experimentales y los valores calculados con los diferentes modelos y cinéticas para todos los casos. Los resultados muestran que Ec. cinética (I) no es adecuada para este caso, posiblemente debido a que no se cumple en las condiciones iniciales que  $K_m \gg S$ , entonces la cinética de Michaelis-Menten no puede simplificarse a una cinética de primer orden. Las curvas obtenidas para la Ec. cinética (II) muestran para los tres valores mas altos de concentración, resultados mayores a los experimentales debido a que no se considera la inhibición por producto; acrecentándose la diferencia con el modelo de flujo pistón. Finalmente se observa que la Ec. cinética del tipo (III) consigue la mejor estimación de los valores experimentales. La combinación del modelo de dispersión axial y Ec. cinética (III) puede estimar los valores experimentales con un error comparable con el modelo de flujo pistón y Ec. cinética (III), cuando los C son ajustados previamente para cada concentración, que fue realizado en otro trabajo (Carrara y Rubiolo, 1994).

Tabla 3 - Desviación estándar entre los datos experimentales y la combinación de modelos y cinéticas.

Modelo Flujo Pistón	Cinética		
	I	II	III
So 2,5	0,0674	0,0209	0,0357
So 5,0	0,0235	0,0856	0,0142
So 7,5	0,0760	0,1444	0,0312
So 10,0	0,1365	0,2036	0,0512
Global	0,0846	0,1317	0,0351
Modelo de Dispersión	I	II	III
So 2,5	0,0858	0,0158	0,0195
So 5,0	0,0372	0,0372	0,0257
So 7,5	0,0632	0,0716	0,0221
So 10,0	0,1149	0,1020	0,0234
Global	0,0793	0,0651	0,0229

Pelletier (1992) han demostrado que para reactores de lecho fijo con enzimas inmovilizadas con  $Pe = 5$  y cinética de Michaelis-Menten no hay diferencias significativas en utilizar un modelo que considere solamente flujo pistón o además dispersión. En los ensayos experimentales se determinó que el  $Pe$  variaba para las correspondientes  $U$  utilizadas entre 10,5 a 45,5. Luego por el valor definido en el rango de trabajo, el modelo de dispersión axial predice el comportamiento experimental con mayor exactitud que el modelo de flujo pistón (Tabla 3, Figuras 1 y 2).

## CONCLUSIONES

Los dos modelos de predicción del comportamiento de reactores de lecho fijo para enzimas inmovilizadas fueron comparados con distintas cinéticas. Se encontró que considerar la cinética correcta tiene mayor influencia que el tipo de modelo en la predicción del comportamiento del reactor y que el modelo de dispersión axial permite una mejor aproximación a los valores experimentales para el rango de  $Pe$  empleado.

Por otra parte, las constantes cinéticas obtenidas en un sistema discontinuo pudieron ser empleadas en un sistema continuo, sin que el método de obtención influyera en la evaluación de las mismas. También se ha comprobado que un modelo que considere distintos factores como cinéticos e hidrodinámicos resuelto por métodos numéricos puede predecir el comportamiento experimental global con menor error y con errores similares para las distintas concentraciones de sustrato.

## NOMENCLATURA

a	área externa del soporte por unidad de volumen del reactor ( $cm^{-1}$ )
C	constante de la correlación de Chilton y Colburn
Da	coeficiente de dispersión axial ( $cm^2/seg$ )
dc	diámetro del catalizador (cm)
Ds	coeficiente de difusión de lactosa ( $cm^2/seg$ )
$E^0$	concentración inicial de enzima (mg de proteína)
ks	coeficiente de transferencia de materia ( $cm/seg$ )
L	longitud del reactor (cm)
P	concentración de galactosa (M)
p	potencia de la correlación de Chilton y Colburn
Pe	número de Péclet ( $U.L/Da$ )
Psop	peso del soporte
Re	número de Reynolds ( $dc.U.\delta s/\mu s$ )
S	concentración de lactosa (M)
Sc	número de Schmid ( $\mu s/Ds.\delta s$ )
Si	concentración de lactosa en la superficie del catalizador (M)
So	concentración inicial de lactosa (M)
St	número de Stanton ( $ks.a.L/U$ )
U	velocidad superficial ( $cm/seg$ )
$V^m, K^m,$	
$k^i, k^2$	constantes cinéticas intrínsecas
x	conversión
Z	dirección a lo largo del reactor (cm)
$Z^*$	variable paramétrica = ( $Z / L$ )
Letras griegas	
$\delta s$	densidad de la solución ( $gr/cm^3$ )
$\mu s$	viscosidad de la solución ( $gr/cm.seg$ )
$\alpha$	variable paramétrica = ( $Si / S$ )
$\epsilon$	fracción volumétrica libre del reactor o porosidad

De acuerdo a Levenspiel (1979) para reactores en general y  $Pe < 100$  debe considerarse difusión axial en el modelo de cálculo del comportamiento de los mismos, mientras Lortie y

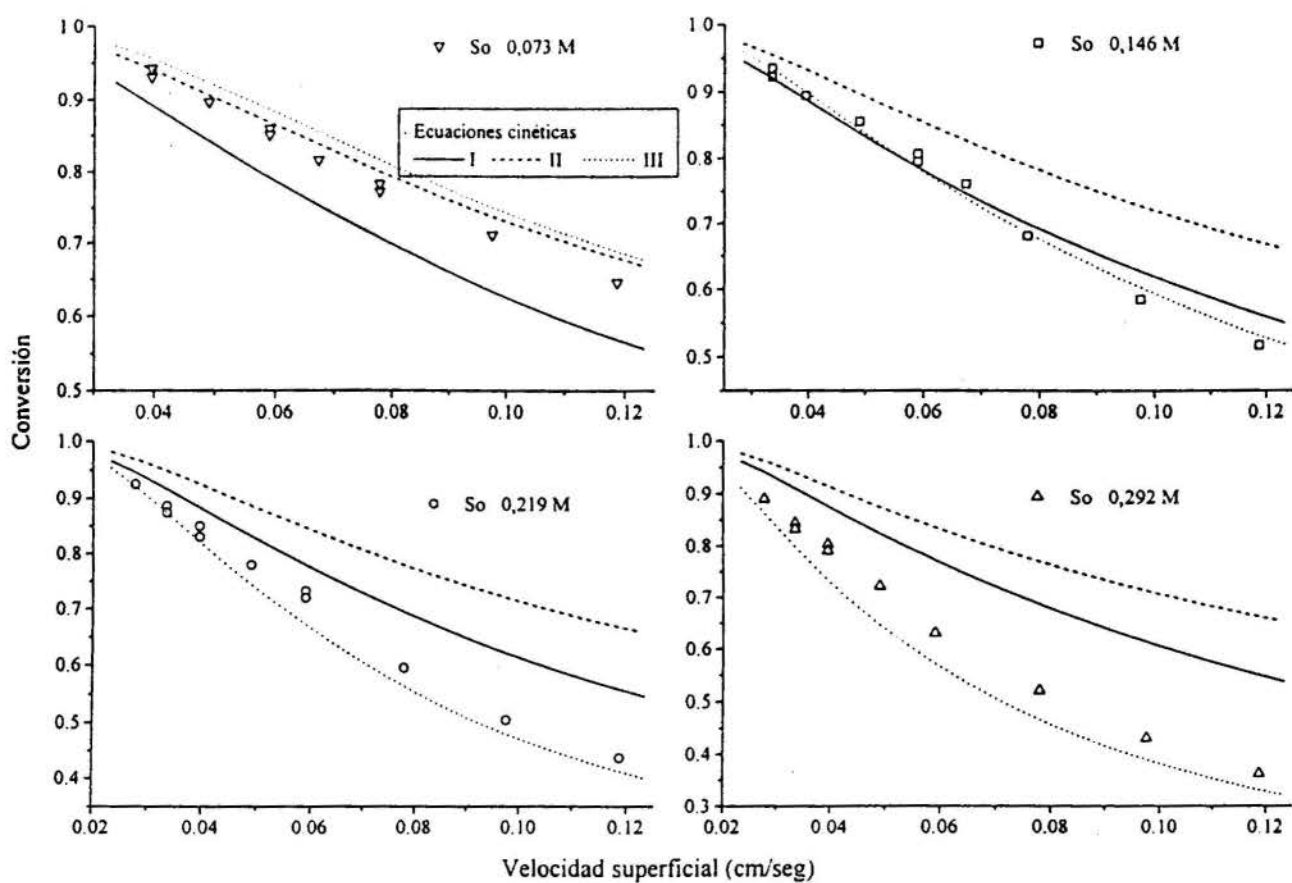


Figura 1 - Valores experimentales y calculados con el modelo de flujo pist3n ideal.

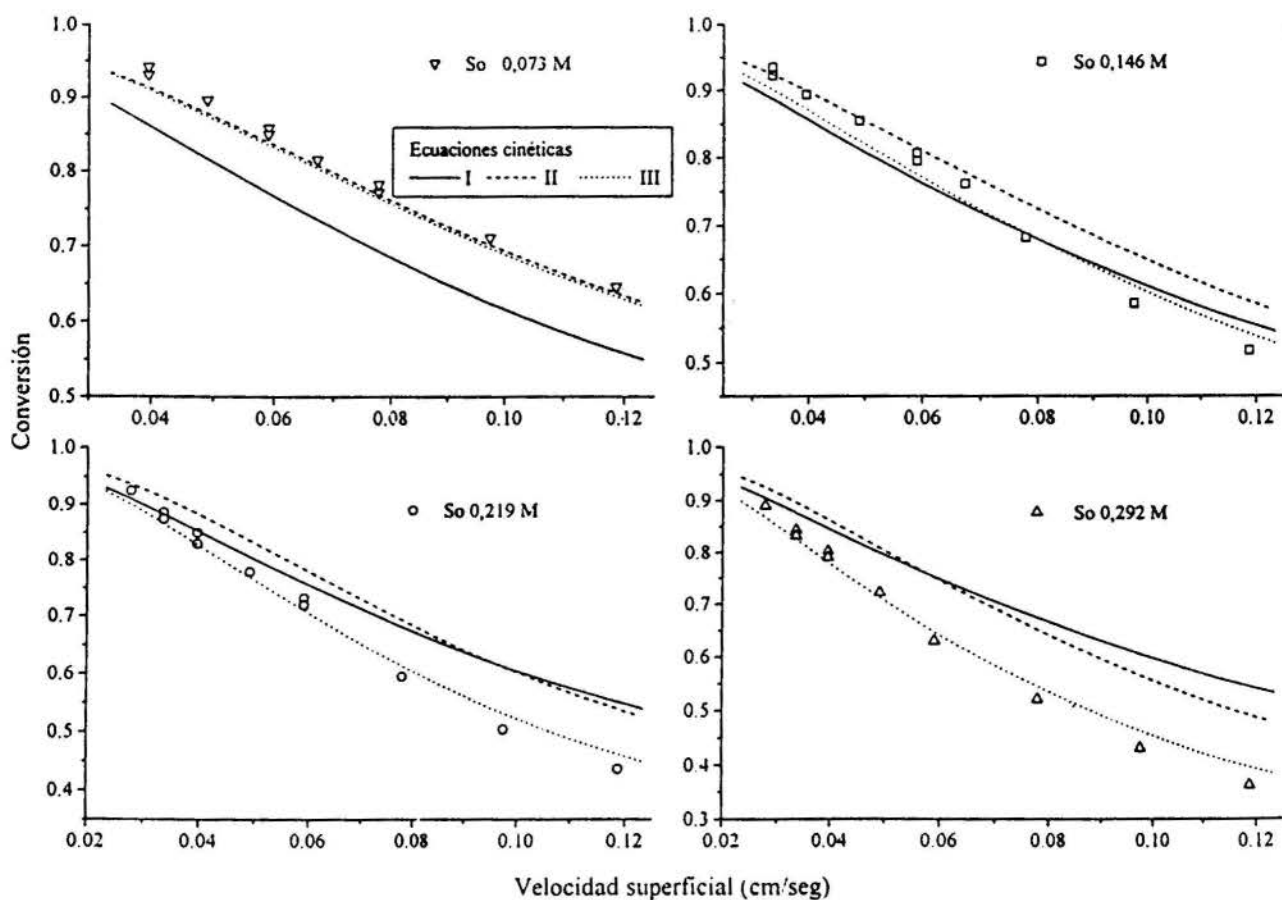


Figura 2 - Valores experimentales y calculados con el modelo de dispersi3n.

## BIBLIOGRAFIA

Carrara C. R., Rubiolo A. C. 1996. "Determination of kinetics parameters for free and immobilized  $\beta$ -galactosidase". *Process Biochemistry*. Vol. 31, pp. 243-248.

Carrara C. R., Rubiolo A. C. 1994. "Efecto de la transferencia de materia sobre la velocidad de reacción en un reactor con  $\beta$ -Galactosidasa inmovilizada". *Actas del V Congreso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Materia*, Caracas-Venezuela, Tomo I: IID9

Finlayson B. A. 1980. "Nonlinear Analysis in Chemical Engineering". Mac Graw-Hill Chemical Engineering Series.

Geankoplis C. 1983. "Transport Processes and Unit Operation", Ed. Allyn and Bacon.

Levenspiel O. 1979. "The chemical reactor omnibook". OSU Book Stores. Corvallis. USA

Lortie R., Pelletier D. 1992. "Comparison between dispersion and plug-flow models for fixed-bed enzyme reactor". *AIChE Journal*. Vol. 9, pp. 1477-1480.

Wen C. Y., Fan L. T. 1975. "Models for Flow Systems and Chemical Reactors". Marcel Dekker, Inc. New York.

## ANEXO Expresiones de $\alpha$ para las distintas cinéticas.

Cinética de primer orden (I).

$$\alpha = ks.a / k' ks.a \quad (14)$$

Cinética de Michaelis-Menten (II).

$$\alpha = \frac{S + c_1 + \sqrt{(S + c_1)^2 + S c_2}}{2 S} \quad (15)$$

$$\text{Donde } c_1 = -K'm - V'm / ks.a$$

$$c_2 = 4 K'm$$

Cinética de Michaelis-Menten con inhibición competitiva por producto (III).

$$\alpha = \frac{S c_3 + c_6 + \sqrt{(S c_3 - c_6)^2 + 4 S (c_4 - c_5 S)}}{2 S} \quad (16)$$

$$\text{Donde } c_3 = K'm + 1$$

$$c_4 = K'm + \frac{K'm}{k'i} S_0$$

$$c_5 = \frac{K'm}{k'i}$$

$$c_6 = c_4 + \frac{V'm}{ks.a}$$

## ABSTRACT

This paper presents the comparison of two models in predicting the behavior of fixed-bed reactors with immobilized enzyme in state steady with different kinetics, and external mass transfer in the catalyst surface. Solutions were obtained by direct integration for plug-flow model or orthogonal collocation in the case of second order differential equation for the axial dispersion flow model. The analysis revealed the importance of the hydrodynamic parameters and reaction kinetics for describing the reactor real behavior. The models were analyzed with the parameters of  $\beta$ -galactosidase immobilized on chitosan.



## EVOLUTION OF NONLINEAR INSTABILITIES IN RADIAL FLOWS

JAUBER C. OLIVEIRA and CRISTINA H. AMON  
 Department of Mechanical Engineering  
 Carnegie Mellon University  
 Pittsburgh-PA-15213-U.S.A.



## SUMMARY

The present investigation uses an accurate time-dependent algorithm, based on spectral element spatial discretization, to investigate flow instability mechanisms and non-linear evolution in radial flows between parallel disks. Three-dimensional numerical simulations are conducted to investigate the effect of three-dimensionality, to determine the conditions for the onset of three-dimensional flow, and to quantify the range of parameters for which the assumption of axisymmetry is no longer valid. Vortical disturbances are introduced at the inlet so as to mimic the experimental situation where such finite-amplitude disturbances are present. The behavior of the two- and three- dimensional flow, under this type of disturbances, is discussed.

## INTRODUCTION

The radial flow of a Newtonian fluid between parallel disks (Fig. 1) has been subject of uninterrupted research as a result of its important practical applications and interesting fluid mechanics characteristics. Applications include engineering devices like hydrostatic air bearings, pneumatic micrometers, radial diffusers, and compressor valves. Previous investigations of these flows include different analytical approaches, some numerical investigations and a considerable amount of experimental work. Early research was mainly based on analytical and experimental techniques with the objective of predicting and measuring the pressure distribution and boundary layer separation. Series expansion were utilized to include inertial effects in the analytical models. The region near to the inlet radius was the main source of discrepancy between analytical models and experiments (e.g., Wilson, 1972; Jackson and Symmons, 1965; Savage, 1964). Some experiments detected instabilities associated with strong adverse pressure gradients, oscillations in the flow and formation of vortical structures propagating downstream (McGinn, 1955; Mochizuki and Yang, 1985). The application of this type of flow to radial diffusers was motivated by design concerns as well as the need to predict the pressure recovery (Moller, 1966) and to determine the optimal range of parameters. This last has relevance to industrial applications since, for instance, the design of compressor valves would greatly benefit from having a thorough understanding of the fluid mechanics phenomenon taking place in the design parameter space, so as to avoid flow oscillations at the compressor valves or exploit flow unsteadiness for enhancing heat and mass transfer.

Interesting flow characteristics have been reported in radial flows, such as cavitation (McGinn, 1955), Tolmmin-Schlichting type of oscillations (McGinn, 1955), flow separation (Ishizawa, 1966; Raal, 1978), self-sustained alternated decaying-downstream type of oscillations (Mochizuki and Yang, 1985), inception of reverse transition (Moller, 1966; Kreith, 1965), successive bifurcations in numerical solutions such as

Pitchfork bifurcations (Langer, 1991) and Hopf bifurcations (Peters, 1994), and instability mechanisms associated with the Coanda effect (Oliveira, 1992). Oliveira (1992) and Oliveira et al. (1993) performed linear stability analyses of the basic flow solutions reported in Langer (1991). Several improvements on the numerical models for studying the stability of radial flows have been recently proposed (Peters, 1994). These results, along with further indications of flow instabilities on available numerical basic flow solutions, in this geometry, have motivated the starting of this investigation, and first results were reported in Oliveira and Amon (1995).

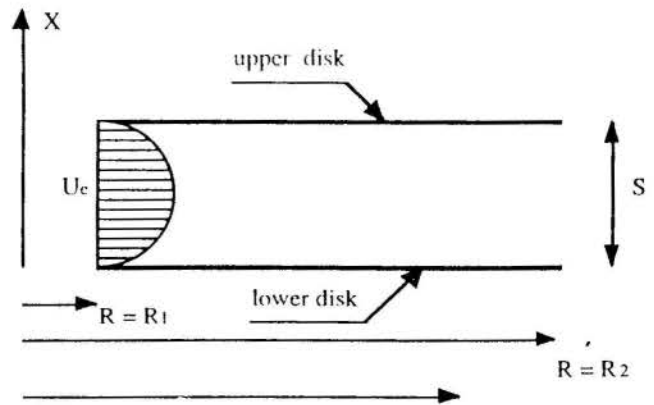


Fig.1: Sectional view of the radial flow between parallel disks depicting the inflow boundary condition and geometric parameters ( $S=1$ ;  $R1= 0.5$ ;  $R2 = 10$ ).

## OBJECTIVES

The main objective of this investigation is to improve our understanding about the radial flow stability and its different flow regimes by using two levels of modeling with direct numerical simulations. We expect that this approach will provide answers to questions like (1) In which range of Reynolds numbers do we have stable two-dimensional solutions (or is the



two-dimensional flow stable to small three-dimensional perturbations)? (2) Which model provides realistic solutions for a wider range of Reynolds numbers, still being computationally competitive with the other ones? (3) How does the solutions and instabilities behave for each of these models and what can be learned by comparing them?

This numerical approach exploits the feasibility of performing Direct Numerical Simulations (DNS) by the Spectral Element (Fourier) Method (SEM) (Amon, 1993; Patera, 1984)). In parallel, a rigorous semi-analytical approach to the corresponding Stokes problem has been developed (Oliveira, 1996; Oliveira and Amon, 1996) in order to provide insight into a new approach to the linearized equations for the evolution of perturbations.

## LEVELS OF MODELING

In the present investigation, two different levels of numerical modeling are used to investigate the flow stability in radial flows between two parallel disks. The simplest level, represented in Fig. 1, is a radial source flow between two parallel disks. This is a two-dimensional axisymmetric model (called model 2D-1) which is the model that has been mostly investigated in the literature (e.g., Raal, 1978; Langer, 1991; Peters 1994; Oliveira, 1992); however, there are still many questions to be answered.

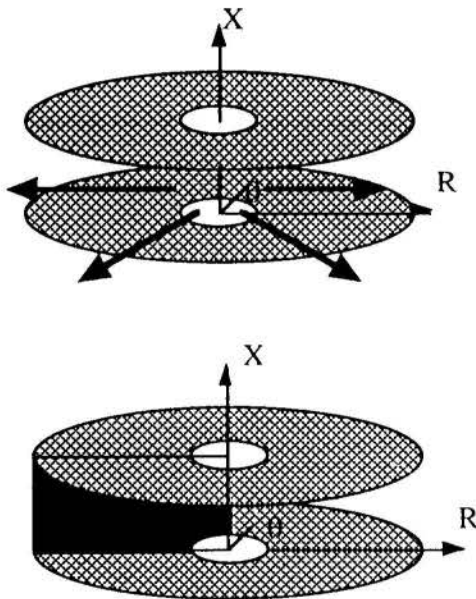


Figure 2: Representation of the three-dimensional model (3D-1) and location of the axisymmetric domain.

The second model considered in this work is a three-dimensional geometry with the computational domain defined between two parallel disks (Fig. 2). This geometry allows for non-axisymmetric solutions to occur whenever the two-dimensional axisymmetric flow becomes unstable. This model is being investigated in three different sub-levels. The most general one, model

3D-1, deals with the full domain between the two disks (Fig. 2). The second sub-level, model 3D-2, assumes that only half of the domain is enough to describe the loss of stability of the two-dimensional, axisymmetric solutions. The third sub-level, called model 3D-3, considers a quarter slice of the first computational domain. The main purpose of this model is to explore the behavior of a more restrict but still three-dimensional flow at higher Reynolds numbers, since a full 3-D mesh is computationally expensive. The comparison of results among these three sub-levels will provide further information about the assumptions involved by truncating the domain as described above.

## FORMULATION AND METHODOLOGY

It is assumed that the fluid is Newtonian, the properties (density and viscosity) are constant, and the flow is axisymmetric for the two-dimensional numerical simulations. The governing equations are those associated with the conservation of mass and linear momentum in cylindrical coordinates. The Reynolds number for all models is defined as  $Re = Q/(2\pi v s)$ , where  $Q$  is the flow rate at the radial section  $R = r_1$  (i.e., entrance of the computational domain),  $v$  is the kinematic viscosity and  $s$  is the distance between the two parallel disks. The Stokes flow solution is prescribed for the radial velocity distribution at the inlet of the computational domain, except for the model 2D-2 (where a fully-developed parabolic profile is prescribed at the supply channel's inlet). The remaining boundary conditions are no slip at both disks and an artificial boundary condition at the outlet. Specifically, at the outlet we impose  $-\rho + 2\mu \partial u_n / \partial n = T_n$  and  $\partial u_t / \partial n + \partial u_n / \partial t = 0$ , where  $p$  denotes the pressure,  $\mu$  the viscosity,  $u_n$  and  $u_t$  are the normal and tangential components of the velocity vector, respectively,  $t$  denotes the time and  $T_n$  is the normal traction. We assume initially that all three-dimensional sub-levels of formulation are capable of capturing the starting of significant non-axisymmetric (3D) flow. In fact, such assumption will be verified by comparing models 3D-2 and 3D-3 with the complete and most expensive computationally model 3D-1. The direct numerical simulations are based on the Spectral Element Method, first reported in Patera (1984) and extended, to the Spectral Element Fourier Method in Amon (1993).

## RESULTS

Previous indications of flow instabilities on available numerical basic flow solutions motivated the present investigation which uses a highly-accurate time-dependent algorithm to investigate the flow instabilities and their non-linear evolution in radial flows. Figure 3 shows the perturbation of the pressure field,  $P'(X, R)$ , at four time instants. This figure depicts the presence of pressure waves, which appear at the inlet, traveling towards the exit of the disks and de-

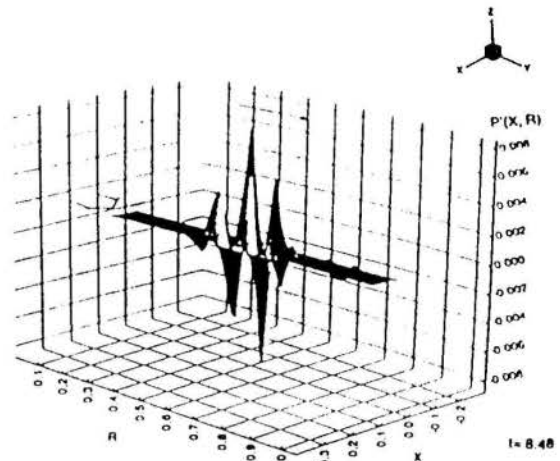
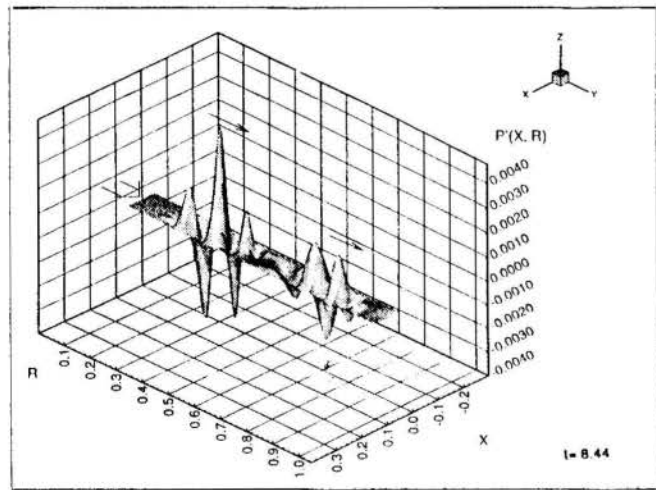
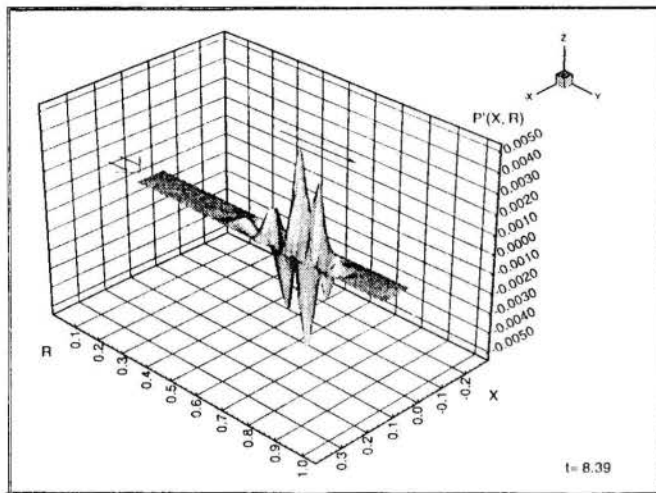
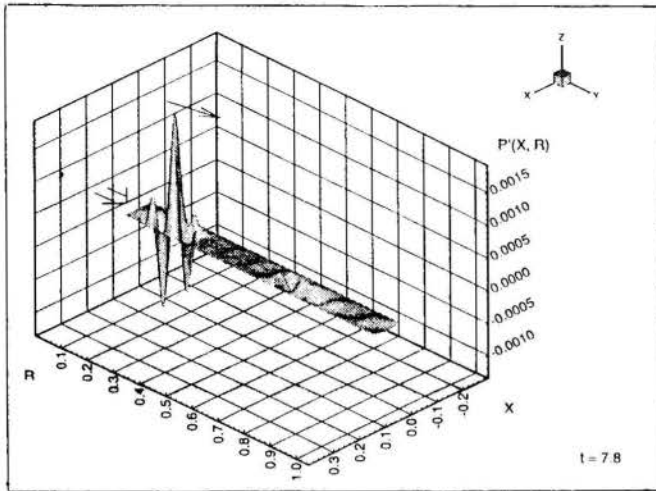


Figure 3: Transient behavior associated with the perturbation of the pressure distribution for  $Re = 350$  at different times. Notice the wave-like pulses traveling towards the exit and re-generated at the inlet.

caying in amplitude during this evolution. These transient disturbances result from introducing pressure perturbations within the flow field; however, results shown in Oliveira (1996) indicate that such a disturbance is still present within the flow when only infinitesimally small perturbations are introduced. The effect of the initial pressure perturbations is to amplify the already present small pressure disturbances. This result was obtained with a computational mesh which has 8,820 nodal points (180 macro-elements and  $7 \times 7$  collocation points per macro-element) and preceded the resolution of complex flow structures at larger Reynolds numbers.

Three-dimensional numerical simulations are being conducted to investigate the effect of three-dimensionality and to determine the Reynolds number for loss of stability of the two-dimensional solutions after which the assumption of axisymmetry is no longer valid. Figure 4 shows the streamlines at two fixed angular locations ( $\theta = \pi/6$  and  $\theta = 5\pi/6$ ) and a front view of the symmetrically-located (with respect to  $Z = 0.5$ ) recirculation zones. This axisymmetric three-dimensional flow is stable to small disturbances. It was obtained from the model 3D-3 for  $Re = 100$  and a computational mesh with 60,000 nodal points (480 macro-elements with  $5 \times 5 \times 5$  collocation points per element). Figure 5 (also from model 3D-3) presents a three-dimensional vortical structure in the disturbance field for  $Re = 50$ . This disturbance, though decaying in time, indicates how the flow will lose axisymmetry at higher Reynolds numbers. This was indeed verified for  $Re = 200$  (model 3D-2, 432 elements and  $5 \times 5 \times 5$  collocation points, i.e., a total of 54,000 nodal points), where the flow is fully three dimensional.

Weak secondary flow is already present when  $Re = 100$ , but the magnitude of the velocity in the  $\theta$ -direction is small compared with the  $r$ - and  $z$ -velocity components. This is not the case for  $Re = 200$  as it is shown in Fig. 6, where non-negligible velocity components in the  $\theta$ -direction are present; in particular, notice the magnitude of the vectors in the range:  $0 < \theta < \pi/4$ . This result indicates that the model 3D-3 fails to predict the non-axisymmetrical features shown in Fig. 6, due to the truncation of the domain which precludes to resolve important non-axisymmetrical modes. Figure 7 shows the steady-state solution for  $Re = 200$  which captures the vortical secondary flow. We can therefore state that two-dimensional models are unable to resolve accurately the flow behavior, at least, for Reynolds number above 200.

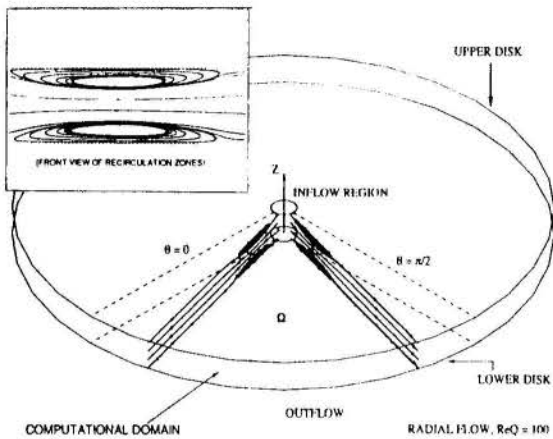


Figure 4: Stable three-dimensional axisymmetric flow resulting from a vortical disturbance at the inlet of the domain at  $Re = 100$ .

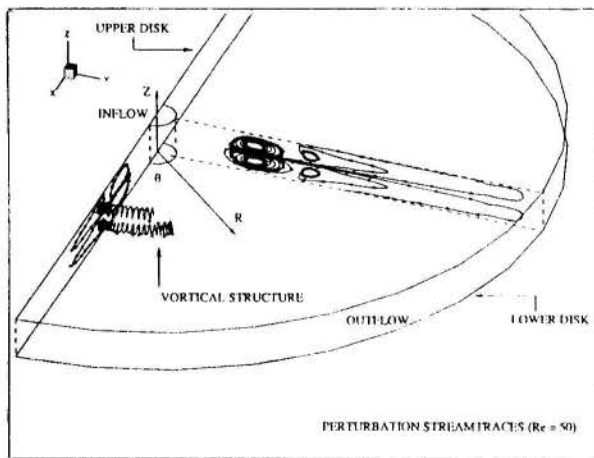


Figure 5: Plot of the perturbation streamtraces for  $Re = 50$  after imposing a finite vortical disturbance at the inlet.

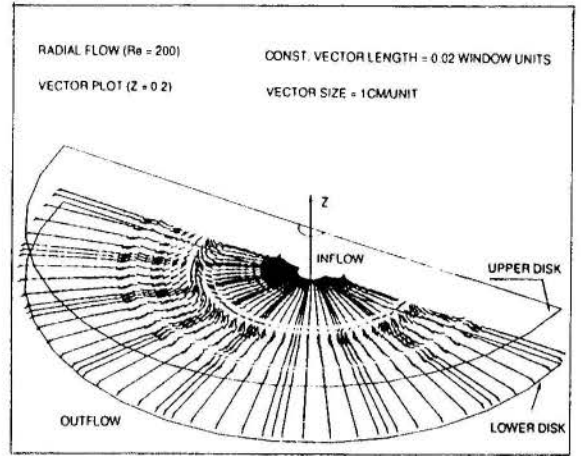


Figure 6: Vector field at  $Z = 0.2$ , depicting a non-axisymmetric flow.

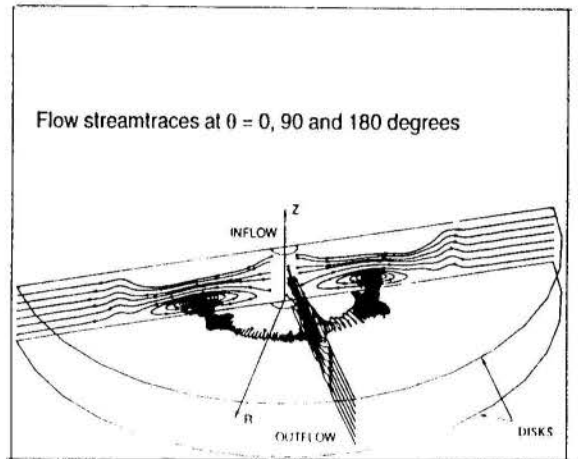


Figure 7: Streamtraces at  $Re = 200$  showing a three-dimensional weakly secondary flow.

## CONCLUSIONS

Direct numerical simulations of radial flows between two parallel disks are presented for different models to compare their accuracy in predicting flow phenomena and understanding the instability mechanisms at different flow regimes. Two-dimensional (axisymmetric) numerical simulations have shown the presence of strong unsteadiness and pressure waves as a result of introducing initial disturbances in the pressure field. The simplified 2-D model precedes the prediction of rather complex flow structures that are present for Reynolds numbers above 500. This observation was further confirmed with the three-dimensional model, which shows first the presence of time-decaying vortical disturbances at  $Re = 50$  and then a steady-state vortical secondary flow at  $Re = 200$ . The onset of the secondary flow takes place in the region corresponding to the two-dimensional larger recirculation. These

results provide a strong indication that 2-D axisymmetric simulations above a Reynolds number of 200 are no longer physically realistic. This conclusion is further supported by observing the complex flow patterns of the axisymmetric model for the Reynolds numbers above 500.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to acknowledge the financial support received from the Brazilian government (CNPq) and the computational facilities provided by NSF Grant CTS-9311072.

## REFERENCES

Amon, C.H., 1993, "Spectral Element-Fourier Method for Transitional Flows in Complex Geometries," *AIAA Journal*, vol. 31, no. 1, pp. 42-48.

Ishizawa, S., 1966, "The Axisymmetric Laminar Flow in an Arbitrary Shaped Narrow Gap," 2nd Report, *Bull. Jap. Soc. Mech. Engrs.*, vol. 9, no. 33, pp. 86-103.

Jackson, J.D and Symmons, G.R., 1965, "An Investigation of Laminar Radial Flow Between Two Parallel Discs," *Appl. Sci. Res., Section A*, vol. 15, pp. 59-75.

Kreith, F., 1965, "Reverse Transition in Radial Source Flow Between Two Parallel Planes," *The Physics of Fluids*, vol. 8, no. 6, pp. 1189-1190.

Langer, C.A., 1991, "Separation, Bifurcation and Heat Transfer in Radial Flows," Master's Dissertation (in Portuguese), Mech. Eng. Dept., Federal University of Santa Catarina, Brazil.

McGinn, J.H., 1955, "Observations on the Radial Flow of Water Between Fixed Parallel Plates," *Appl. Sci. Res., Section A*, vol. 5, pp. 255-264.

Mochizuki S. and Yang, W.J., 1985, "Self-sustained Radial Oscillating Flows Between Parallel Disks," *J. Fluid Mech.*, vol. 154, pp. 377-397.

Moller, P.S., 1966, "A Radial Diffuser Using Incompressible Flow Between Narrowly Spaced Disks," *Trans. ASME. D, J. of Basic Eng.*, pp. 155-162.

Oliveira, J.C., 1992, "Numerical Study of the Hydrodynamic Stability in Radial Flows," Master's Dissertation (in Portuguese), Mech. Eng. Dept., Federal University of Santa Catarina, Brazil.

Oliveira, J.C., Prata, A.T. and Langer, C.A., 1993, "Numerical Study of the Hydrodynamic Stability in Radial Flows," (in Portuguese) *Annals of the 12th Brazilian Congress of Mech. Eng.*, Brasilia, Brazil, vol. II, pp. 1021-1024.

Oliveira, J.C. and Amon, C.H., 1995, "Evolution of Instabilities in Radial Flows," *Annals of the Physics Computing 95 (APS meeting)*, pp. 15-16.

Oliveira, J.C., 1996, "Evolution of Instabilities in Radial Flows," Ph.D. Thesis (in progress), Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA.

Oliveira, J.C. and Amon, C.H., 1996, "Semi-Analytical Solution for the Radial Stokes Flow Between Two Parallel Disks," *ENCIT 96/LATCYM 96*, Federal University of Santa Catarina, Florianopolis-SC-Brazil.

Peters, S., 1994, "Bifurcations and Self-induced Oscillations in Fluid Flow through Radial Diffusers,"

Doctoral Thesis (in Portuguese), Mech. Eng. Dept., Federal University of Santa Catarina, Brazil.

Patera, A.T., 1984, "Spectral Element Method for Fluid Dynamics," *Journal of Computational Physics*, vol. 54, no. 3, pp. 468-488.

Raal, J.D., 1978, "Radial Source Flow Between Parallel Disks," *J. Fluid Mech.*, vol. 85, part 3, pp. 401-416.

Savage, S.B., 1964, "Laminar Radial Flow Between Parallel Disks," *Trans. ASME*, vol. 31, pp. 594-596.

Wilson, S.D.R., 1972, "A Note on Laminar Radial Flow Between Parallel Plates," *Appl. Sci. Res.*, vol. 25, pp. 349-354.





## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM DEGRAU COM O MODELO DE TURBULÊNCIA $\kappa$ - $\epsilon$ RENORMALIZADO



**Angela O. Nieckele**  
Dep. Eng. Mecânica  
PUC/RJ  
22453-900 RJ RJ

**José D. M. Abrunhosa**  
Dep. Eng. Mecânica  
IME  
22290-270 RJ RJ

**Ernesto R. Ronzani**  
Dep. Eng. Mecânica  
IME  
22290-270 RJ RJ

### RESUMO

*A capacidade de predição do modelo de viscosidade turbulenta de duas equações, obtido a partir da teoria do grupo da renormalização (RNG), é examinada em referência ao escoamento turbulento separado, após um salto de área em expansão, em um canal de placas planas ('Backstep'). Comparou-se os resultados obtidos com o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  RNG com os obtidos pelo modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional. Os resultados computacionais para várias quantidades médias do escoamento, como velocidade, tensões de Reynolds, e ponto de recolamento, foram comparados com dados experimentais e numéricos disponíveis na literatura. Pela comparação, concluiu-se que o modelo RNG mostra uma razoável melhora na predição destas quantidades médias, em relação ao modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional, a um baixo custo.*

### INTRODUÇÃO

A maioria dos escoamentos de interesse a nível de engenharia é turbulento. Sendo este tipo de escoamento altamente complexo, transiente, tridimensional, e com um grande intervalo de escalas de turbulência, as simulações diretas não são práticas. Consequentemente cálculos de engenharia e científicos de escoamentos turbulentos são baseados sobre alguma forma de modelagem de turbulência.

Grande número de códigos computacionais de dinâmica dos fluidos (CFD) faz uso dos modelos de viscosidade turbulenta de duas equações, especialmente o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional. Embora este modelo seja largamente utilizado, ele tem inúmeras limitações, como, por exemplo, não prever separação de escoamento ou, subavaliá-la e ter capacidade limitada em escoamentos com rápida distorção. A viscosidade turbulenta excessiva, predita pelo modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  em muitos casos, torna a equação da quantidade de movimento muito difusiva, suprimindo flutuações e regiões de descolamento.

Consideráveis tentativas tem sido feitas para ampliar a aplicabilidade do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional. No entanto, os aperfeiçoamentos são semi-empíricos e, enquanto sucessos são obtidos para uma classe específica de problemas, geralmente não o são, quando usados fora da classe tratada. Um modelo de turbulência, que supere muitas das limitações do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional e ainda não sacrifique sua simplicidade e eficiência computacional, responderia as necessidades dos códigos computacionais de dinâmica dos fluidos.

Desde a década passada, vários trabalhos tem sido realizados e publicados com o objetivo de avaliar o real desempenho não só do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional como formas alternativas deste modelo. Thangam e Speziale (1992) comparam o desempenho do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional com uma variante anisotrópica. Já Yakhot et al. (1992) analisam o desempenho do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  renormalizado (RNG) e sua variante anisotrópica. Neste último caso os autores limitaram-se exclusivamente a comparar os perfis de velocidade axial média e tensões turbulentas e o ponto de recolamento.

Neste contexto e diante dos estimulantes resultados publicados por Yakhot et al. (1992), este trabalho se propôs a investigar o modelo de duas equações, obtido pelos citados autores (Yakhot et al., 1992), a partir da teoria do grupo de renormalização, e comparar as suas predições com as do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional, a fim de não só avaliar o seu desempenho como a sua eficiência computacional. Com este propósito, analisou-se o problema do escoamento turbulento separado, após um salto de área em expansão, em um canal de placas planas e infinitas ('Backward-Facing Step'), pois:

- Permite o estudo do escoamento turbulento cisalhante complexo com separação;
- É vastamente documentado na literatura;
- É um caso clássico, usado na avaliação do desempenho dos modelos de escoamento turbulento.

As predições obtidas tanto com o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional como com o modelo RNG foram comparadas com os resultados experimentais de Kim et al. (1980).

As principais diferenças entre o modelo RNG e o  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional são apontadas.

### SITUAÇÃO FÍSICA

O problema aqui considerado é o escoamento em regime permanente de um fluido viscoso e incompressível, através de um canal de placas infinitas, com salto de área em expansão (Figura 1). Como as predições dos modelos foram comparadas com os dados experimentais de Kim et al. (1980), a situação física aqui utilizada procura reproduzir a experimental adotada pelos citados autores.

A razão de expansão (altura do salto: altura do canal na saída) é 1:3 e o número de Reynolds é  $Re = (\rho U_c H_c) / \mu = 1,32 \times 10^5$ , onde  $U_c$  é a velocidade na linha de centro da seção de entrada, correspondendo ao valor máximo da velocidade nesta seção, e  $H_c$  altura do canal na seção de saída.

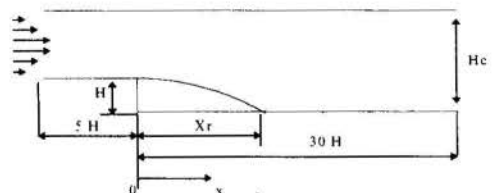


Figura 1 - Canal com salto de área

A seção de entrada foi especificada a uma distância de cinco vezes a altura do salto ( $5H$ ), a montante do mesmo. Adotou-se um comprimento de canal, após o salto, de trinta (30) vezes a altura do salto ( $30H$ ). É crucial, para a perfeita solução, que uma distância suficiente a jusante do ponto de recolamento seja especificada, antes de impor as condições de saída (Thangam e Speziale, 1992).

## MODELOS MATEMÁTICOS

Na aplicação da técnica do grupo da renormalização ao problema da turbulência, a energia cinética turbulenta ( $\kappa$ ) e a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta ( $\epsilon$ ) são utilizadas para eliminar o comprimento de escala ( $L$ ), na obtenção do modelo para altos números de Reynolds, e as equações de transporte para  $\kappa$  e  $\epsilon$  são obtidas também pela aplicação da mesma técnica (Yakhot et al., 1992).

A forma final do modelo renormalizado torna-se semelhante a forma do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional. Isto permite escrever as equações de governo, para ambos os modelos, de modo unificado.

Deste modo, as equações do movimento médio tomam a forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2)$$

Onde  $\bar{P} = \bar{p} + 2/3\rho\kappa$ , sendo  $\bar{p}$  a pressão;  $\bar{u}_i$  são os componentes da velocidade média;  $\rho$  é a massa específica;  $\nu_{ef}$  é a viscosidade efetiva. De acordo ainda com Yakhot et al. (1992), para altos números de Reynolds, tem-se que  $\nu_{ef} = \nu_t + \nu$ , onde  $\nu$  e  $\nu_t$  são, respectivamente, as viscosidades cinemática molecular e turbulenta, com esta última sendo definida como:

$$\nu_t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon} \quad (3)$$

Onde  $C_\mu$  é uma constante. Desprezando-se a contribuição da viscosidade molecular, face a hipótese acima de altos números de Reynolds, tem-se que  $\nu_{ef} \approx \nu_t$ .

Ambos os modelos são resolvidos em conjunto com as equações de transporte para a energia cinética turbulenta ( $\kappa$ ) e a taxa de dissipação turbulenta ( $\epsilon$ ) dadas por:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \kappa)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + P_\kappa - \epsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \frac{\epsilon}{\kappa} P_\kappa - C_2 \frac{\epsilon^2}{\kappa} \quad (5)$$

$$P_\kappa = \nu_t S^2; \quad S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}; \quad (6)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

As diferenças entre os modelos basicamente concentram-se nos coeficientes, conforme a Tabela 1. Enquanto para o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional os coeficientes são empíricos, para o RNG os mesmos são resultantes da teoria.

Tabela 1 - Coeficientes utilizados nos modelos

Coeficientes	Modelo	
	$\kappa$ - $\epsilon$ tradicional	RNG
$C_\mu$	0,090	0,0845
$\sigma_\kappa$	1,000	0,720
$\sigma_\epsilon$	1,000	0,720
$C_1$	1,440	1,420
$C_2$	1,920	1,680 - R

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - (\eta/\eta_0))}{1 + \beta \eta^3}; \quad \eta = S \kappa / \epsilon \quad (8)$$

$$\beta = 0,012; \quad \eta_0 = 4,38 \quad (9)$$

Comparando-se os valores das constantes para os modelos, verifica-se o valor reduzido de  $C_2$  no modelo RNG (se  $R=0$ ). A consequência interessante desta característica do modelo renormalizado é aumentar o valor da taxa de dissipação e diminuir o valor da energia cinética turbulenta, levando a menores valores de viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ), de acordo com a Eq. 3.

Nas regiões de pequenas taxas de tensão turbulenta ( $\eta < 4,38$ ), o termo  $R$ , presente exclusivamente no modelo RNG, tende a aumentar a viscosidade turbulenta. Contudo, nas regiões de grandes taxas de tensão turbulenta ( $\eta > 4,38$ ), o sinal de  $R$  é invertido e a viscosidade turbulenta diminui mais neste modelo comparativamente ao modelo tradicional.

## CONDIÇÕES DE CONTORNO

As equações de governo (Eq. 1 a 5) são resolvidas com as seguintes condições de contorno:

1. Na entrada do canal, especificou-se os perfis de velocidade média axial ( $\bar{u}$ ), de energia cinética de turbulência ( $\kappa$ ) e da taxa de dissipação da energia cinética de turbulência ( $\epsilon$ ). Estes perfis foram obtidos do cálculo do escoamento hidrodinamicamente desenvolvido em canal de placas planas e infinitas, diferentemente de outros trabalhos (Yakhot et al., 1992 e Thangam e Speziale, 1992) que ou utilizaram o perfil experimental ou ajustaram o calculado ao experimental de Kim et al. (1980);
2. Na saída adotou-se como condição a hipótese de difusão nula;
3. Já nas placas utilizou-se a lei da parede na sua forma padrão de duas camadas (Kays e Crawford, 1993).

A lei da parede não se aplica formalmente a camadas limites turbulentas separadas. Contudo, desde que o ponto de separação é fixo em relação a posição do salto e o campo de escoamento é resolvido iterativamente, então a velocidade de atrito  $u_\tau$  pode ser processada até convergir, sem a introdução de grandes erros com o seu uso (Thangam e Speziale, 1992).

## MÉTODO NUMÉRICO

As equações de governo (Eq. 1 a 5) foram resolvidas utilizando o método de volumes finitos (Patankar, 1980), com esquema 'power-law'. A solução em regime permanente foi obtida pela resolução do sistema de equações algébricas, utilizando-se a técnica da sub-relaxação, com aplicação repetida do algoritmo TDMA linha por linha (Patankar, 1980). Para aumentar a velocidade de convergência, utilizou-se o algoritmo de correção por blocos (Settari e Aziz, 1973).

Um estudo de refinamento da malha, utilizando o método de volumes finitos, conduzido por Thangam e Hur (1991), concluiu que malhas de 166 x 73 pontos internos, com espaçamento variável, a fim de possibilitar máxima resolução próximo ao salto e as paredes, rendem resultados que estão dentro de limites aceitáveis e que o uso de malhas significativamente grossas poderiam levar a erros apreciáveis. Indicaram ainda que a malha 200 x 100 renderia solução independente do espaçamento. Consequentemente, todos os cálculos computacionais foram conduzidos neste trabalho utilizando-se uma malha não uniforme 200x100. A Figura 2 ilustra o tipo de malha computacional utilizada, onde por clareza adotou-se 101x50 pontos nodais.

Para a convergência da solução numérica, controlou-se os resíduos da equação da continuidade e das equações de conservação de todas as outras variáveis. A solução foi considerada convergida, quando o resíduo da equação de conservação de massa, termo fonte da equação de correção da pressão (Patankar, 1980), foi inferior a  $10^{-12}$ . No caso das outras equações de conservação, requereu-se que a razão entre o resíduo máximo de cada equação e o valor do resíduo inicial fosse inferior a  $10^{-4}$ , sendo este definido como:

$$Res = |a_p \phi_p - (\sum a_{nb} \phi_{nb} + b)| \quad (10)$$

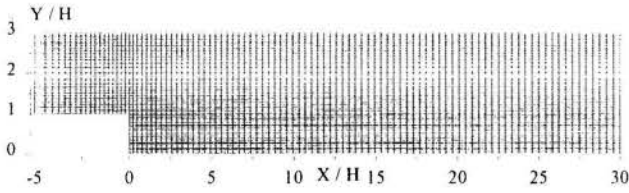


Figura 2 - Malha não uniforme, 101x50 pontos nodais.

## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Serão apresentados os resultados referentes ao ponto de recolamento, perfis de velocidade média e tensões de Reynolds, coeficiente de atrito e coeficiente de pressão, os quais foram comparados aos dados experimentais de Kim et al. (1980).

As linhas de corrente obtidas com os modelos tradicional e renormalizado, estão representadas nas Figuras 3 e 4, respectivamente. Da análise das figuras, verifica-se que o modelo RNG obtém uma significativa alongação da região de recirculação. Este aumento é devido principalmente ao efeito do parâmetro de escala de tempo  $\eta$  do termo R (Eq. 8). O valor de  $\eta$  é elevado na camada cisalhante vizinha a zona de recirculação. Em consequência, a taxa de dissipação aumenta e a viscosidade turbulenta é reduzida. As linhas de corrente indicam os seguintes pontos de recolamento, para a recirculação principal:

$\kappa$ - $\epsilon$  tradicional ..... ( $X_r/H$ )  $\cong$  6,0

$\kappa$ - $\epsilon$  renormalizado ..... ( $X_r/H$ )  $\cong$  7,0

A Tabela 1 faz uma comparação destes valores com o experimental de Kim et al. (1980) e com resultados publicados por Thangam e Speziale (1992) e Yakhot et al. (1992). O modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional apresenta uma sub-predição da ordem de 14,3%, comparado ao experimental ( $X_r/H \cong 7,0$ ), enquanto o modelo RNG obtém um valor de recolamento idêntico ao dado experimental. Observa-se ainda que os valores obtidos neste trabalho concordam bem com os valores numéricos disponíveis na literatura.

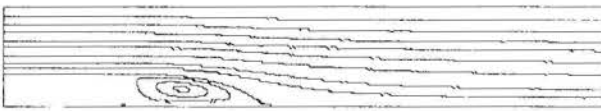


Figura 3 - Linhas de corrente, modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional

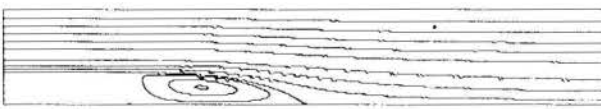


Figura 4 - Linhas de corrente, modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  renormalizado

Tabela 6.1 - Ponto de recolamento ( $X_r/H$ )

Experi- mental	$\kappa$ - $\epsilon$ Tradicional		$\kappa$ - $\epsilon$ RNG	
	Thangam e Speziale (1992)	Presente solução	Yakhot et al. (1992)	Presente solução
Kim et al. (1980)	6.0	6.0	6.6	7.0

Experimentalmente observou-se a existência de uma região de pequena recirculação, girando no sentido anti-horário, junto a parte inferior da parede vertical do salto (Karniadakis et al., 1989). O modelo renormalizado apresenta uma região de recirculação secundária maior que a do modelo tradicional, como se observa da Figura 5. Nesta figura estão representados os detalhes dos perfis de velocidade próximo a parede inferior, em duas seções imediatamente após o salto, isto é, na região dessa pequena recirculação. Verifica-se que já na segunda seção, para o modelo tradicional todas as velocidades são negativas, enquanto para o renormalizado a velocidade do primeiro ponto interno, próximo a parede inferior, continua positiva. Assim, a predição do modelo RNG mostra-se melhor, embora os dois modelos ainda sub-avaliem essa região, concordando com as observações de Lien e Leschziner (1994).

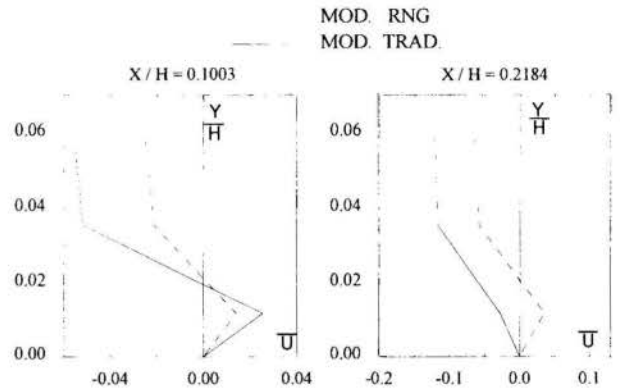


Figura 5 - Estudo comparativo da recirculação secundária

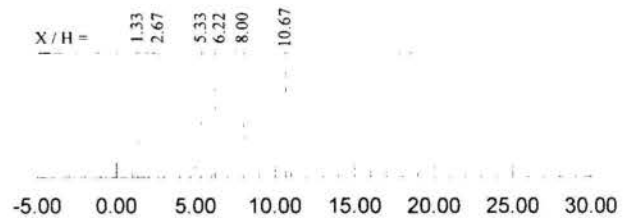


Figura 6 - Seções de levantamento do perfil de velocidade média

Para uma comparação mais detalhada entre os modelos, perfis de velocidade média são analisados em seis seções transversais. As posições onde foram levantadas as velocidades estão assinaladas na Figura 6, tendo como referência a posição do salto.

As Figuras 7 e 8 apresentam a comparação dos perfis de velocidade média, nas diversas posições selecionadas, preditos por ambos os modelos, com os dados experimentais (Kim et al., 1980). Na seção  $x/H=6,22$ , todas as velocidades do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional são positivas, indicando não haver mais recirculação, embora o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  RNG e os dados experimentais mostrem que ainda existe recirculação. A razão principal para o modelo tradicional prever um ponto de recolamento prematuro, é a excessiva difusão na camada cisalhante logo acima da zona de recirculação. O comportamento menos difusivo do modelo RNG é consequência da inclusão do novo termo (R) na equação da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta ( $\epsilon$ ) (Eq. 5). Este termo visa eliminar a hipótese de isotropia local, adotada pelo modelo tradicional, e deste modo tem a propriedade de aumentar o valor de  $\epsilon$  na região de alta taxa de deformação e diminuir o valor da energia cinética turbulenta ( $\kappa$ ), levando a valores menores da viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ), de acordo com a Eq. 3. Ao utilizar um coeficiente de transporte difusivo menor, a equação de conservação da velocidade média

torna-se menos dissipativa e consequentemente o modelo RNG produz uma região de recirculação maior.

A análise da região após o recolamento (seções  $x/H=8,0$  e  $x/H=10,67$ ) revela uma maior recuperação dos dados experimentais em relação aos modelos. A região de recuperação do escoamento parece ser melhor representada pelo modelo  $\kappa-\epsilon$  tradicional, mas isto é devido ao seu prematuro recolamento, que faz com que o modelo antecipe a recuperação do escoamento. É defeito comum da maioria dos modelos de turbulência ter uma insuficiente recuperação do escoamento, na região a seguir do ponto de recolamento (Lien e Leschziner, 1994).

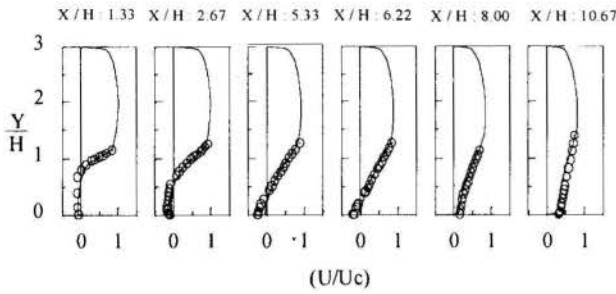


Figura 7 - Perfil de vel. média para seções selecionadas,  $\kappa-\epsilon$  trad.

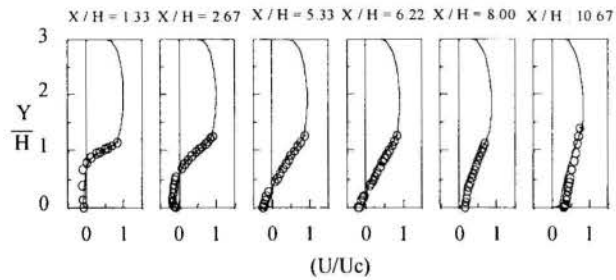


Figura 8 - Perfil de velocidade média,  $\kappa-\epsilon$  RNG

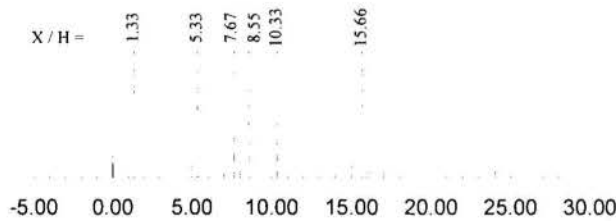


Figura 9 - Seções para perfil de tensão de turbulência

As previsões dos modelos para a intensidade de turbulência, são comparadas com dados experimentais de Kim et al. (1980). As seções onde foram levantados os perfis de intensidade de turbulência estão assinaladas na Figura 9, tendo como referência a posição do salto.

A intensidade de turbulência  $(\overline{u'_i u'_i})^{1/2}$ , normalizada pela velocidade  $U_c$  é apresentada nas Figuras 10 e 11, para os modelos tradicional e RNG respectivamente, onde uma boa concordância entre os modelos e os dados experimentais pode ser observada. A intensidade de turbulência máxima, em ambos os modelos, é sempre menor que a experimental, estando esta última mais próxima da parede inferior, que as máximas dos modelos. Nas seções imediatamente após o ponto de recolamento, isto é, no início da recuperação do escoamento e junto a parede inferior, observa-se a maior diferença dos modelos para os dados experimentais ( $X/H=7,67$  e  $8,55$ ). O modelo RNG retorna um menor nível de intensidade de turbulência, sendo a diferença para o tradicional mais acentuada na zona de recirculação (seções  $X/H=1,33$  e  $X/H=5,33$ ) e próximo a parede inferior. Este fato, com suas conseqüências, é melhor comentado posteriormente.

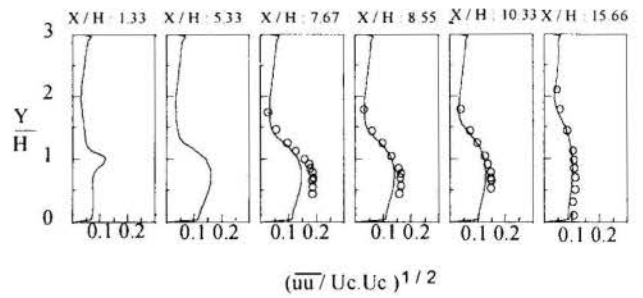


Figura 10 - Perfil de intensidade de turbulência,  $\kappa-\epsilon$  tradicional

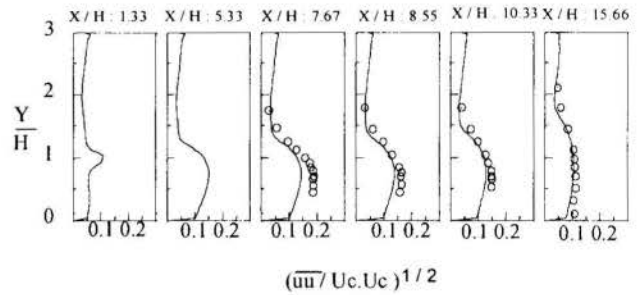


Figura 11 - Perfil de intensidade de turbulência,  $\kappa-\epsilon$  RNG

Os perfis da tensão cisalhante turbulenta  $(\overline{u'v'})$ , normalizados por  $U_c^2$ , são comparadas aos dados experimentais de Kim et al. (1980) nas Figuras 12 e 13. Utilizou-se as mesmas seções a jusante do salto, já empregadas para a intensidade de turbulência (Figura 9). Observa-se que, para todas as seções, o perfil anula-se um pouco acima do salto ( $Y/H \geq 2$ ), tendo um máximo relativo junto a parede superior bem menor que o máximo relativo junto a parede inferior. Esta tendência do perfil anular-se próximo a  $Y/H=2$  é confirmada pelos dados experimentais, demonstrando a correção das previsões dos modelos nesta região. Dá análise com o experimental, verifica-se que, na altura correspondente ao salto ( $Y/H=1$ ), os modelos geraram maiores tensões cisalhantes turbulentas  $(\overline{u'v'})$  e que, como no caso da intensidade de turbulência  $(\overline{u'u'})$ , o valor máximo dos modelos sempre está mais afastado da parede inferior que o máximo do experimental. Na região próxima a parede, as previsões dos modelos concordam muito bem com os dados experimentais.

As maiores diferenças entre os modelos estão na zona de recirculação (seções  $X/H=1,33$  e  $X/H=5,33$ ) e na parte do perfil correspondente a altura do salto ( $Y/H=1$ ). Comparativamente ao tradicional, o modelo renormalizado gerou perfis menores, especialmente na região de recirculação, representando melhor os dados experimentais. Na região de recuperação do escoamento, junto a parede inferior, os modelos praticamente tiveram o mesmo nível de tensão cisalhante turbulenta  $(\overline{u'v'})$ , concordando muito bem com os dados experimentais, conforme foi dito acima.

Da análise das Figuras 10, 11, 12 e 13, referentes ao perfil da intensidade de turbulência  $(\overline{u'u'}/U_c^2)$  e ao perfil da tensão cisalhante turbulenta  $(\overline{u'v'}/U_c^2)$ , verificou-se que o modelo renormalizado obteve os menores níveis de intensidade e tensão turbulenta, consistente com a maior região de recirculação, apresentada pelo modelo, e com sua proposta teórica de um coeficiente de transporte difusivo turbulento menor. Observou-se ainda que os modelos obtiveram um nível insuficiente de tensão de Reynolds  $(\overline{u'u'} + \overline{v'v'})$  próximo a parede na região de recuperação ( $\overline{u'u'} \cong$  experimental e  $\overline{u'u'} \ll$  experimental). É esta discrepância em relação ao experimental que faz com que os modelos tenham uma taxa insuficiente de recuperação do escoamento.



Por comparação, verifica-se que os resultados obtidos neste trabalho, tanto para a intensidade de turbulência como para a tensão de turbulência cisalhante, concordam muito bem com os alcançados por Thangam e Speziale (1992) e Yakhot et al. (1992).

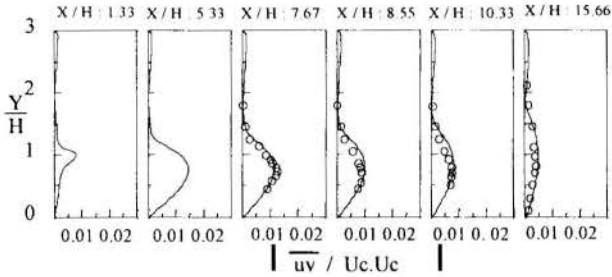


Figura 12 - Perfil de tensão de turbulência,  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional

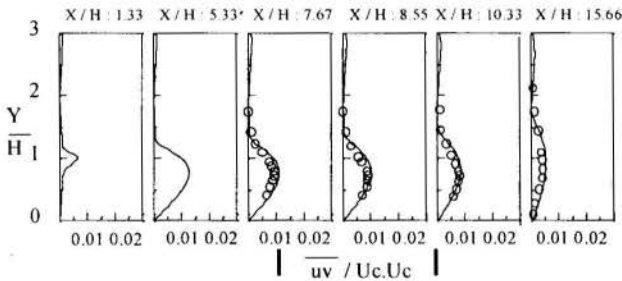


Figura 13 - Perfil de tensão de turbulência,  $\kappa$ - $\epsilon$  RNG

Para analisar a distribuição de pressão, definiu-se o coeficiente de pressão como  $C_p = (P - P_c) / (U_c^2)$ , onde  $P_c$  é a Pressão sobre a linha de centro do canal de entrada.

As variações do coeficiente de pressão obtidas pelos modelos, tanto para a parede superior como inferior, na região após o salto, são comparadas, nas Figuras 14 e 15, aos dados experimentais de Eaton e Johnston (Thangam e Speziale, 1992). Ambos os modelos reproduzem bem o comportamento dos dados experimentais, tendo o renormalizado um comportamento melhor na zona de recirculação, embora também não seja capaz de representar a rápida variação, que ocorre na zona de recolamento. A maior discrepância em relação aos dados experimentais está na região de recuperação do escoamento, logo após o ponto de recolamento, onde os modelos tem uma taxa insuficiente de recuperação da pressão. Isto é uma consequência direta da também insuficiente recuperação do movimento nesta região pelos modelos, como foi visto na análise do perfil de velocidade.

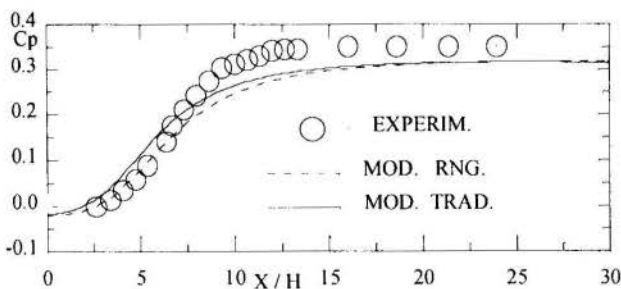


Figura 14 : Coeficiente de pressão na parede superior.

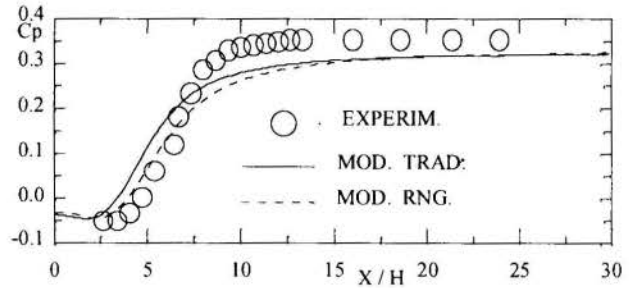


Figura 15 : Coeficiente de pressão na parede inferior.

O coeficiente de atrito ( $C_f$ ), definido como  $C_f = 2 u_\tau^2 / V_M^2$ , onde  $u_\tau$  é velocidade de atrito e  $V_M$  velocidade média espacial na seção de entrada, foi levantado, para ambos os modelos, na parede inferior após o salto, pela lei da parede. As variações deste coeficiente são importantes para identificar a localização das regiões de recirculação (principal e secundária) e refletem a precisão da predição do processo difusivo junto à parede, os quais são de relevância especial no contexto da transferência de calor. Na Figura 16, os resultados obtidos pelos modelos são representados. Verifica-se que o ponto de recolamento e a região de recirculação principal aqui levantados estão de acordo com os dados retirados das linhas de corrente. Da análise desta figura, também se observa uma região de recirculação secundária ligeiramente melhor no modelo RNG. Nota-se que a tensão negativa, associada a recirculação principal, começa no modelo renormalizado ( $X/H \approx 0,5$ ) depois de já ter começado no modelo tradicional ( $X/H \approx 0$ ). A região de recirculação secundária é caracterizada pela presença de tensões positivas, as quais são muito pequenas para os modelos e conseqüentemente não se tornam visíveis na escala do gráfico.

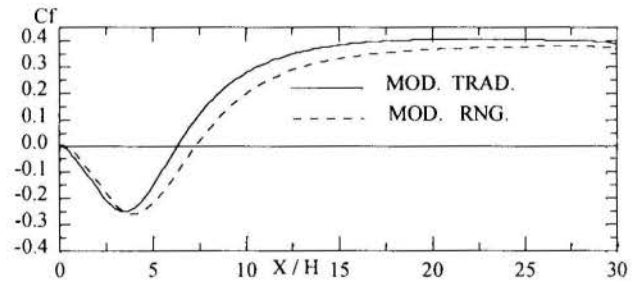


Figura 16 - Coeficiente de atrito na parede inferior

## CONCLUSÕES

Devido a alta complexidade do escoamento turbulento, as simulações diretas não são práticas e viáveis para a maioria dos computadores disponíveis atualmente, pois o espaço de memória e o tempo de computação seriam muito elevados. Como alternativa, utilizam-se os chamados modelos de turbulência, para representar o fenômeno físico. A formulação da técnica do grupo da renormalização foi utilizado por Yakhot e Orszag (1986) na obtenção de modelos de fechamento da turbulência. Eles utilizaram a técnica RNG para desenvolver uma teoria para as grandes escalas, representando os efeitos das pequenas escalas por coeficientes de transporte modificados (Smith e Reynolds, 1992 e Yakhot e Smith, 1992). A utilização desta teoria, na

obtenção de um modelo de viscosidade turbulenta de duas equações, para altos números de Reynolds, levou a formulação teórica do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$ , sem necessidade de recorrer a dados experimentais para determinar as constantes (Yakhot et al., 1992). Este modelo foi então complementado com uma escala de expansão, para o termo de produção da taxa de dissipação. A ausência desse termo adicional, dá origem a um modelo que difere do estabelecido por Launder e Jones ( $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional) somente no valor das constantes. O parâmetro de expansão foi assumido como  $\eta=(S\kappa/\epsilon)$ , isto é, a razão da turbulência para escala de tempo da deformação média.

A correção (R) do termo de produção de dissipação (Eq. 8) não é estritamente levantada das considerações da teoria RNG. Seu principal objetivo é sensibilizar a equação de  $\epsilon$ , para altas taxas de deformação, aumentando assim a taxa de dissipação e conseqüentemente diminuindo a viscosidade turbulenta. Já nas regiões de pequenas taxas de deformação, o termo R tende a aumentar levemente a viscosidade turbulenta.

O desempenho de predição do modelo RNG foi examinado por comparação com a solução dada pelo modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional e com dados experimentais das quantidades médias e tensões de Reynolds, para o escoamento com separação, após um salto de área ('backstep'). O modelo RNG demonstrou ter, em geral, um melhor desempenho que o  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional, para o problema em estudo.

Da análise comparativa foram obtidas as seguintes conclusões:

- O modelo tradicional subprediz o ponto de reatamento ( $X_r=6,0H$  - 14% menor) em relação aos dados experimentais de Kim et al., enquanto o RNG obtém um resultado que está em concordância com os mesmos dados experimentais ( $X_r=7,0H$ );
- Os dois modelos subavaliam a região de recirculação secundária (sentido anti-horário), existente junto a parte inferior da parede vertical do salto (Yakhot et al., 1992, e Lien e Leschziner, 1994), embora o modelo RNG a represente melhor;
- O modelo RNG revela uma recuperação mais lenta do escoamento, após o recolamento. Esta característica é sempre mais clara nos modelos que predizem uma região de recirculação maior, como foi o caso do modelo RNG (Lien e Leschziner, 1994);
- O modelo RNG tem um melhor comportamento junto a parede, conforme se conclui da análise do coeficiente de pressão e do coeficiente de atrito;
- Ambos os modelos subavaliam a intensidade de turbulência, especialmente no início da região de recuperação;
- O modelo RNG requer um maior esforço computacional (entre 10 e 15% a mais em tempo de computação), embora mantenha a simplicidade e a eficiência computacional do modelo tradicional.

Os bons resultados obtidos pelo modelo RNG no estudo do problema 'backStep' são fortemente dependentes da eliminação da hipótese de isotropia local, no termo de produção da taxa de dissipação, da respectiva equação de transporte, isto é, são fortemente dependentes do termo R na equação para  $\epsilon$ . Por exemplo, quando se faz  $R = 0$ , no problema 'backstep', o modelo RNG superprediz a região de recirculação ( $X_r=9,5H$ ) (Yakhot et al., 1992).

## REFERÊNCIAS

Karniadakis, G., Yakhot, A., Rakis, S., Orszag, S. and Yakhot, V., 1989, "Spectral Element - RNG Simulations of Turbulence Flows in Complex Geometries", *Symposium on Turbulent Shear Flows Stanford University*;

Kays, W. M., and Crawford, M. E., 1993, *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill;

Kim, J., Kline, S.J., and Johnston, J. P., 1980, "Investigation of a Reattaching Shear Layer: Flow Over a Backward Facing Step", *ASME J. Fluids Eng.*, Vol. 102, pp. 302-308;

Lien, F. S., and Leschziner, M. A., 1994, "Assessment of Turbulence-Transport Models Including Non-linear RNG Eddy-Viscosity Formulation and Second-Moment Closure for Flow Over a Backward-Facing Step", *Computers Fluids* Vol. 23, nº 8, pp. 983-1004;

Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer e Fluid Flow*, McGraw-Hill;

Settari, A., and Aziz, K., 1973, "A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations", *SIAM Journal of numerical Analysis*, Vol. 10, pp. 506-521

Smith, L. M., and Reynolds, W. C., 1992, "On the Yakhot and Orszag, Renormalization Group Method for Deriving Turbulence Statistic and Models", *Phys. Fluids A*, Vol. 4, pp. 364-390;

Thangam, S., and Speziale, C. G., 1992, "Turbulent Flow Past a Backward Facing Step: A Critical Evaluation of Two-Equation Models", *AIAA Journal*, Vol. 30, nº 5, pp. 1314-1320;

Thangam, S., and Hur, N., 1991, "A Highly Resolved Numerical Study of Turbulent Separated Flow Past a Backward Facing Step", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 29, nº 5, pp. 205-211;

Yakhot, V., and Orszag S. A., 1986, "Renormalization Group Analysis of Turbulence, Basic Theory", *J. Of Scientific Computing*, Vol. 1, nº 1, pp. 1-51;

Yakhot, V., Orszag, S. A., Thangam, S., Gatski T. B., and Speziale, C. G., 1992, "Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique", *Phys. Fluids A*, Vol. 4 (7), pp. 1510-1520;

Yakhot, V., and Smith, L. M., 1992, "The Renormalization Group, the  $\epsilon$ -Expansion and Derivation of Turbulence Models", *J. Sci Comput.* 3, Vol. 7, nº 1, pp. 35- 61.

## ABSTRACT

The present work analyses the capabilities of prediction of a separated flow behind a backward-facing step in a channel by a two-equations eddy-viscosity turbulence model, derived using the renormalization group (RNG). The conventional two-equations  $\kappa$ - $\epsilon$  turbulence model is presented, with its empirical constants. The  $\kappa$ - $\epsilon$  model based on the renormalization group theory (RNG) is briefly described, with particular attention being paid to the final form of the modelled equations and the implications of the various terms in relation to conventional  $\kappa$ - $\epsilon$  model. Computations using a finite-volume based code have been performed with the RNG  $\kappa$ - $\epsilon$  model and the conventional  $\kappa$ - $\epsilon$  model for the two-dimensional recirculating flow over a backward-facing step. The present computational results of various mean flow quantities are compared with available experimental data and numerics results. It is shown a significant improvement on the predictions of various mean flow quantities by the RNG  $\kappa$ - $\epsilon$  model over the conventional  $\kappa$ - $\epsilon$  model, with low cost.



## TURBULENT FLOW IN PERIODIC INTERRUPTED-SURFACE PASSAGES

**Simone Sebben and B. Rabi Baliga**  
Department of Mechanical Engineering  
McGill University  
Montreal, Quebec, H3A 2K6, Canada



### SUMMARY

*This paper presents numerical and experimental results for unsteady, spatially-periodic, fully-developed turbulent flows in interrupted-surface passages. The performance of several low-Reynolds number, two-equation linear eddy-viscosity models of turbulence is discussed in the context of an ensemble-average formulation. Numerical predictions of the friction factor, Strouhal number, and skin friction coefficient along the plates are compared with experimental results.*

### INTRODUCTION

Flow passages with spatially-periodic interrupted surfaces are commonly encountered in heat transfer equipment, such as compact heat exchangers (Shah, 1981; Kays and London, 1984). Compact heat exchangers are widely used in the chemical, materials processing, and power generation industries, as well as in automobiles and aircrafts. The interruptions in the flow passages are intended to produce enhanced heat transfer rates, but they also cause higher pressure drops than those in uninterrupted passages (Patankar et al., 1977; Shah, 1981; Kays and London, 1984). Thus, the design of such passages poses an optimization problem in which the objective is to obtain the maximum rate of heat transfer for a fixed pumping power.

Typically, the range of Reynolds number in compact heat exchangers extends from a laminar flow regime to a low Reynolds number turbulent regime (Kays and London, 1984). Few experimental and numerical investigations of *turbulent* flows in spatially-periodic geometries have been reported in the literature. Examples include the works of McBrien and Baliga (1988), McBrien (1989), Kim and Anand (1994), Ciofalo and Collins (1992), and Ciofalo et al. (1996).

In the present work, a complementary numerical and experimental investigation of temporally- and spatially-periodic, fully-developed turbulent flow in interrupted-surface passages was undertaken. Two-dimensional numerical simulations were done using various low-Reynolds number, two-equation, linear eddy-viscosity models of turbulence (EVMs). The experimental investigation was limited to measurements of frequencies of vortex shedding using single-wire constant-temperature thermal anemometry. The intention in the experimental work was to complement the experimental results of McBrien (1989) and McBrien and Baliga (1988).

In this paper, the relative performance of the several low-Reynolds number EVMs is discussed in the context of an unsteady ensemble-average formulation. Some results obtained using a steady time-average formulation of the governing equations are also presented

for comparison. The rationale for the choice of low-Reynolds number EVMs and the possibilities offered by these models are also discussed.

### PROBLEM STATEMENT

**Preamble.** Direct Numerical Simulations (DNS) of the full three-dimensional unsteady Navier-Stokes equations have been used successfully in fundamental studies of turbulent flows (Wilcox, 1993). Presently, however, they are untenable for use in engineering design calculations, and for the problem of interest in this work, DNS would be very expensive and impractical. Large Eddy Simulations (LES) also exert enormous demands on computer resources, albeit less than DNS, and they are still not regarded as a viable tool for engineering design (Wilcox, 1993; Launder, 1995). For these reasons, DNS and LES were not used in this work.

A more economical approach to simulate turbulent flows in engineering is still based on some form of averaging of the governing equations (Hanjalić, 1994; Launder, 1995). The simplest and most widely used forms of averaging are based on procedures akin to that introduced by Reynolds. For the periodic unsteady flows investigated here, ensemble averaging of the governing equations is more suitable than time averaging.

Within the framework of time and ensemble averaging, two-equation linear EVMs remain the most widely used "fast" engineering methods for computing complex turbulent flows (Hanjalić, 1994). Computationally, two-equation EVMs offer decisive advantages over Reynolds stress transport models, due to relatively simple implementation and lower computational costs. On the basis of these observations, low-Reynolds number two-equation EVMs, with some ad hoc modifications, were used in this investigation.

**Mathematical Model.** The problem of interest involves temporally and spatially periodic, fully-developed turbulent flow of a constant-property Newtonian fluid in straight rectangular channels, akin to that illustrat-



ed in Fig. 1 (a). A cross-sectional view of this channel is presented in Fig. 1 (b): The domain indicated as  $ABCD$  is denoted as a geometrical module. In interrupted-plate passages of this type, the fluid flow often attains a spatially-periodic fully-developed behavior after a short entrance region, typically 5 to 10 geometrical modules downstream of the inlet plane (Sparrow et al., 1977). A procedure for the solution of *steady*, spatially-periodic flows in the fully developed region has been described by Patankar et al. (1977). The description of temporally and spatially-periodic fully-developed flows presented here, is an extension of the concepts put forward in the work of Patankar et al. (1977). Similar concepts to that described in this paper can be found in the works of Ghaddar et al. (1986) and Amon and Mikic (1990), for example.

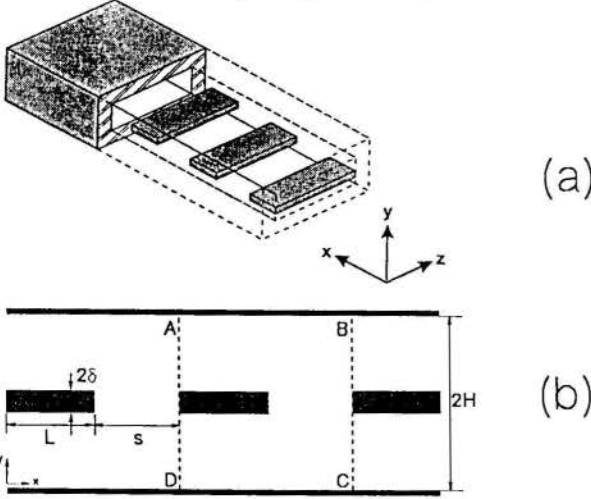


Figure 1: (a) Rectangular interrupted-plate duct; and (b) cross-sectional view, associated nomenclature and a representative geometric module  $ABCD$ .

In temporally and spatially periodic fully-developed flows, the velocity field repeats identically in successive sets of geometrical modules. Each set could consist of  $m$  geometrical modules: Then, with respect to the notation in Fig. 1 (b), the total streamwise length of a set of modules would be  $m(L + s)$ . This periodic behavior can be expressed as follows:

$$\bar{u}_i(x, y, t) = \bar{u}_i(x + m(L + s), y, t) = \dots \quad (1)$$

where the overbars represent ensemble-averaged quantities,  $m$  is an integer periodicity index, and  $(L + s)$  is the length of one module. For *steady* conditions,  $m = 1$  and the fully-developed regime can be studied in a single module, without any reference to the flow field in the entrance region or in adjacent modules (Patankar et al., 1977). For periodic *unsteady* conditions, the value of the integer periodicity index is not known a priori, rather it has to be determined empirically.

Another essential dependent variable in the problem of interest is the pressure. Here, the reduced pressure,  $\bar{p}$ , can be expressed as a linear combination of an overall pressure drop, which drives the flow in the streamwise direction, and a pressure  $\bar{P}$  which is related to the details of the local motions in the geometric modules. Thus:

$$\bar{p}(x, y, t) = -\bar{\beta}(t)x + \bar{P}(x, y, t) \quad (2)$$

where the term  $\bar{\beta}(t)$  is a uniform value for the entire periodic region, and is responsible for the overall mass flow rate. It should be noted that  $\bar{\beta}(t)$  is treated as a parameter that is adjustable, at each time step, so as to obtain a desired, or specified Reynolds number in the problem. The pressure  $\bar{P}$  behaves in a periodic manner, just as the velocity components (Eq. (1)).

The fluid flow is governed by the ensemble-averaged continuity and momentum equations, which can be written as:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \bar{\beta}(t)\delta_{i1} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_i u'_j} \right) \quad (4)$$

where the correlation  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$  is interpreted as the Reynolds stresses. To complete the formulation of the problem, initial and boundary conditions, and an appropriate model for the Reynolds stresses are necessary.

In this work, four variations of the low-Reynolds  $k - \epsilon$  model were assessed: The Jones and Launder (1973) model with the Hanjalić and Launder (1980) modification, which will be denoted as JLH; the Launder and Sharma (1974) model with an improved modification of Hanjalić and Launder (1980), which will be denoted as MLSH; and the Launder and Kato (1993) model with the closure coefficients proposed by Jones and Launder (1973) and Launder and Sharma (1974), which will be denoted as LKJ and LKS, respectively.

The additional ensemble-averaged equations for these low-Reynolds number  $k - \epsilon$  models can be written as:

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \bar{\epsilon} - 2\mu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 \quad (5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} \right] + P_\epsilon - C_{2\epsilon} f_2 \rho \frac{\bar{\epsilon}^2}{k} + \frac{2\mu\mu_t}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \right]^2 \quad (6)$$

where  $\mu_t = f_\mu c_\mu \rho k^2 / \bar{\epsilon}$ . For the JLH and LKJ models,  $f_\mu = e^{\frac{-2.5}{(1+0.02Re_\epsilon)}}$ ; and for the MLSH and LKS models,  $f_\mu = e^{\frac{-3.4}{(1+0.02Re_\epsilon)^2}}$ . The production terms in the transport equations for  $k$  and  $\bar{\epsilon}$ ,  $P_k$  and  $P_\epsilon$ , respectively, for the JLH and MLSH models, are:

$$P_k = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (7)$$

$$P_\epsilon = f_1 \frac{\bar{\epsilon}}{k} (C_{1\epsilon} P_k (1 - \delta_{ij}) + C_{3\epsilon} P_k \delta_{ij})$$

For the LKJ and LKS models, these terms are:

$$P_k = \mu_t \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (8)$$

$$P_\epsilon = C_{1\epsilon} f_1 \frac{\bar{\epsilon}}{k} P_k$$



Other damping functions and closure coefficients of the models are given in Table 1.

$c_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$	$C_{3\epsilon}$	$f_1$	$f_2$
.09	1	1.3	1.44	1.92	4.44	1	$1.3e^{-Re_t^2}$

Table 1: Coefficients used in the  $k - \epsilon$  models.

The boundary conditions for the problem are:  $\bar{u} = \bar{v} = \bar{k} = \bar{\epsilon} = 0$ , on the solid surfaces, and the periodic conditions at the inlet and outlet planes. The initial conditions will be discussed in the next section.

With reference to Fig. 1 (b), the computations were performed for the following nondimensional geometrical parameters:

$$\frac{\delta}{H} = 0.11, \quad \frac{L}{H} = 1.77, \quad \frac{s}{H} = 1.76 \quad (9)$$

The results are presented in terms of the following nondimensional quantities: the Reynolds number,  $Re$ , the Strouhal number,  $S$ , the friction factor,  $ff$ , and the skin friction coefficient,  $\bar{\tau}_w^*$ . With reference to the notation in Fig. 1 (b), these quantities are defined as:

$$Re = \frac{\rho \bar{U} (2H)}{\mu}, \quad S = \frac{\omega (2\delta)}{\bar{U}}, \quad ff = \frac{\beta (2H)}{0.5 \rho \bar{U}^2} \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_w^* = \frac{\tau_w}{0.5 \rho \bar{U}^2}$$

$\bar{U}$  and  $\omega$  are the time-mean streamwise average velocity and the frequency of vortex shedding, respectively.

Five Reynolds numbers were considered:  $Re = 5300, 11300, 17300, 22300, \text{ and } 28300$ . These values of the nondimensional geometrical parameters and Reynolds number match the corresponding values in the experimental investigation. It should be noted that in the numerical investigation, the turbulent flows were regarded as two-dimensional in the mean, and only two-dimensional computer simulations were performed.

## COMPUTATIONAL DETAILS

As was discussed previously, after a short entrance region, the flow field repeats itself in successive sets of geometrical modules. The number of geometrical modules in this set, or equivalently, the value of  $m$ , is not known a priori. In the present work, in order to keep the computational costs within the limits of available computing resources, the calculation domain was limited to a single module ( $m = 1$ ), and extended from the bottom to the top walls of the channel.

The computational domain was discretized using staggered grids for the velocity components and pressure (Patankar, 1980). The solid regions (plates) included in the calculation domain (Fig. 1 (b)) were treated as discussed by Patankar (1980): The fluid viscosity was set equal to a very large number. In addition, in the present computations, the coefficients of the discretized equations were overwritten so as to obtain identically zero values for all dependent variables ( $\bar{u}, \bar{v}, \bar{P}, k, \bar{\epsilon}$ ) in the blocked regions.

The momentum equations, Eq. (4), were discretized using the Crank-Nicolson scheme (Patankar, 1980), and the QUICK scheme of Leonard (1979). The SIMPLEC

algorithm of Van Doormaal and Raithby (1984) was used to solve the discretized momentum and pressure correction equations at each time step. The transport equations for  $k$  and  $\bar{\epsilon}$ , Eqs. (5) and (6), were discretized using the fully-implicit and the hybrid schemes (Patankar, 1980). The use of higher order schemes, such as the Crank-Nicolson and the QUICK schemes, in the discretized equations of  $k$  and  $\bar{\epsilon}$ , can produce negative coefficients, which in turn, can lead to negative effective turbulent transport coefficients and numerical instability (Lien and Leschziner, 1994). Such negative values can appear particularly in regions where the actual (positive)  $k$  and  $\bar{\epsilon}$  values are close to zero.

Four line-by-line iterative algorithms were used to solve the nominally linear and decoupled set of equations: The tridiagonal and pentadiagonal matrix algorithms (TDMA and PDMA), and the cyclic tridiagonal and pentadiagonal matrix algorithm (CTDMA and CPDMA). The cyclic algorithms are required for lines of nodes along which the periodic boundary conditions apply. Detailed description of these and related algorithms are available in the work of Sebben and Baliga (1995). Generalized block-correction procedures (Settari and Aziz, 1973) were used for the velocity components and pressure correction, in order to speed up the rate of convergence of the line-by-line algorithms. No underrelaxation was required or used for any of the dependent variables ( $\bar{u}, \bar{v}, \bar{P}, k, \text{ and } \bar{\epsilon}$ ).

All fluid flow calculations were performed on a  $72 \times 200$  nonuniform grid. The grids were packed close to the solid surfaces in order to properly resolve the steep gradients of the dependent variables in these regions. The size of the time-step was restricted according to a criteria akin to the CFL criteria (Patankar, 1980). Guidance for the time-step size was obtained from the complementary experimental work: Frequencies of vortex shedding obtained in the experiments were used to determine an adequate time step for the computations according to:

$$\Delta t \simeq \tau / 100 \quad (11)$$

where  $\tau$  is the time period of the oscillation which corresponds to the reciprocal of the frequency of vortex shedding,  $\omega$ :  $\tau = \frac{1}{\omega}$ . Results obtained with smaller time steps than that yielded by Eq. (11), finer spatial grids than  $72 \times 200$  main-grid control volumes, and multiple geometric modules ( $m > 1$ ) did not show any significant differences in the values of  $ff$  and  $S$ .

To start the computations, results of steady-state turbulent flow calculations were used as the initial field. No numerical perturbations of the initial field were necessary in the simulations in order to obtain vortex shedding. Once the temporally periodic solution was attained for the first simulation, appropriate previously calculated results were used as the initial fields for subsequent calculations, for which the Reynolds number or the turbulence model was varied.

The temporally periodic regime was monitored with regard to the  $v$ -velocity component at the centerline of the channel, at a position approximately equal to one plate thickness,  $2\delta$ , downstream of the plate trailing edge. For most cases studied here, at least 150 temporal cycles were computed before any time-mean quantities were evaluated. At each time step, convergence of the iterative solution procedure was assumed when

the sum of the absolute values of the “mass source” in the pressure correction equation, normalized by the average mass flow rate through the module, was less than  $10^{-4}$ . The absolute values of the normalized residues of all variables in each control-volume in the solution domain were typically less than  $10^{-3}$ .

## EXPERIMENTAL PROCEDURES

The configuration and dimensions of the test section (Fig. 1 (a)) were chosen to represent cores of compact heat exchangers, and the flow system was designed to produce typical turbulent ranges of Reynolds number encountered in these devices. The interested reader is referred to McBrien (1989) or McBrien and Baliga (1988) for detailed descriptions of the experimental facilities and instrumentation. Frequencies of vortex shedding were obtained using a constant-temperature, hot-wire anemometer in combination with a digital oscilloscope with spectrum analysis capabilities. A single-sensor hot-wire probe was used in a cross-flow orientation: The probe was mounted with the probe-body axis perpendicular to the mainflow direction. This was necessary because of space limitations in the interrupted-plate channel, particularly in the small gap in between plates. Earlier tests had confirmed that the cross-flow and the usual end-flow orientations of the probe gave similar results.

Over most of the range of Reynolds number considered,  $5300 \leq Re \leq 28300$ , the estimated maximum uncertainty in the experimentally measured values of  $Re$ ,  $ff$ , and  $S$  is less than  $\pm 2\%$ .

## RESULTS AND DISCUSSION

$ff$  and  $S$  Results Obtained with the LKJ and LKS Models. The results obtained with the LKJ and LKS models are presented in Table 2 in terms of time-averaged friction factor,  $ff$ , and Strouhal number,  $S$ . Also presented in this table are the values of the corresponding Reynolds number based on the plate thickness,  $Re_{2\delta} = \rho \bar{U}(2\delta)/\mu$ . The  $ff$  values reported in Table 2 show a continuous decrease as the Reynolds number increases. For the first two values of  $Re$  considered, the decrease in the  $ff$  values is quite dramatic, about 24%; but when the Reynolds number is changed from  $Re = 11300$  to  $28300$ , the decrease in  $ff$  is rather minor, about 4%. From this table, it can also be observed that for  $Re \geq 11300$  the  $S$  value remains fairly constant at about 0.158.

$Re$	$Re_{2\delta}$	LKJ Model		LKS Model	
		$ff$	$S$	$ff$	$S$
5300	585	.1155	.144	.1155	.144
11300	1248	.08799	.157	.08570	.158
17300	1910	.08658	.158	.08379	.158
22300	2462	.08540	.158	.08279	.158
28300	3125	.08428	.158	.08198	.158

Table 2: Time-averaged friction factors and Strouhal numbers obtained with the LKJ and LKS models.

The plots in Fig. 2 illustrate the numerically predicted variations of  $ff$  with  $Re$ , computed with the LKJ model with the unsteady ensemble-averaged and

the time-averaged steady formulations. Also presented in this figure are the experimental results of McBrien (1989). With the steady, time-averaged formulation, the shape of the  $ff$  versus  $Re$  curve is quite different from that of the experimental results. The ensemble-averaged formulation yields qualitative correct results: The  $ff$  values decrease with  $Re$ ; however, the quantitative agreement with the experimental data of McBrien (1989) is not very good, with the computed  $ff$  values being as much as 20% higher at  $Re = 5300$ , and 28% higher at  $Re = 28300$ . As expected, for a fixed  $Re$ , the values of  $ff$  calculated with the unsteady formulation are higher than those obtained with the steady formulation. This is because of the higher pressure drop caused by the wake oscillations behind the plate trailing edge.

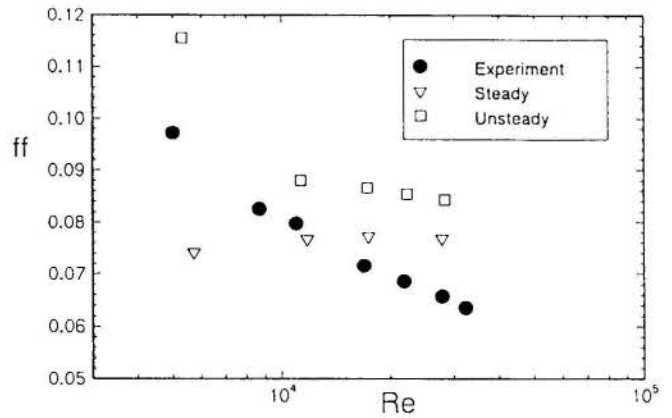


Figure 2: Variation of time-averaged friction factor with Reynolds number: Results yielded by the LKJ model in unsteady ( $\square$ ) and steady ( $\nabla$ ) simulations.

Fig. 3 shows a comparison of the  $S$  versus  $Re_{2\delta}$  results predicted with the LKJ model with those obtained in the present experimental investigation. As can be seen, the trend of the  $S$  versus  $Re_{2\delta}$  curves is the same in both cases. The experimental results correspond to three different streamwise locations of the hot-wire:  $x = 2\delta$ ,  $4\delta$ , and  $8\delta$  downstream of the plate trailing edge. The experimental values of  $S$  at  $x = 4\delta$  and  $x = 8\delta$  are 3.9% and 4.9% lower, respectively, relative to the  $S$  values at  $x = 2\delta$ . The numerical simulations, however, did not predict such behavior. It is speculated that the decrease in the experimental  $S$  values at  $x = 4\delta$  and  $x = 8\delta$ , relative to that at  $x = 2\delta$ , could be because the values of the locally adjusted time-mean average streamwise velocity at  $x = 2\delta$  and  $4\delta$  are higher than the corresponding value of  $\bar{U} = \frac{\dot{m}}{\rho b(2H)}$ , due to time-mean recirculation zones behind the plate. In the numerical predictions, the extent of the time-mean recirculation zones behind the trailing edge of the plate was typically equal to  $2\delta$ , thus the  $S$  values at all positions were the same.

For  $Re \geq 11300$ , the LKJ and LKS models yielded solutions for which the oscillations displayed finite, constant amplitudes, with the frequency spectrum showing a sharp dominant peak representing the frequency of vortex shedding. For  $Re = 5300$ , however, no finite, constant-amplitude oscillations were computed, even though a periodic unsteady nature of the flow could still be discerned. For this specific case, all time-mean quantities were averaged over 1200 complete cycles. The probable reason why the LKJ and LKS mod-

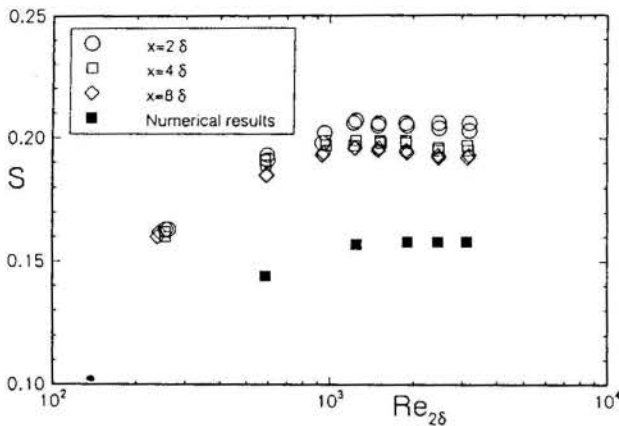


Figure 3: Variation of  $S$  with  $Re_{2\delta}$ : Experimental results and numerical results obtained with the LKJ model.

els yielded nonuniform oscillations for  $Re = 5300$  is that at this Reynolds number, and with the spatial grid and time step used in the numerical solution of the ensemble-average unsteady formulation with these models, a significant range of the unsteady turbulent eddies are picked up, or resolved, along with the unsteady vortex shedding phenomena. In this context, it should be noted that the ensemble-averaged continuity and momentum equations, Eqs. (3) and (4), are identical in form to the corresponding governing equations used in two-dimensional LES. It is also interesting to note that in the case of  $Re = 5300$ , the values of  $k$  and  $\bar{\epsilon}$  decreased continuously from the initial values, until their values became negligibly small.

**$ff$  and  $S$  Values Obtained with the JLH and MLSH Models.** For the cases investigated with the JLH model,  $Re = 5300$  and  $11300$ , the results predicted were akin to those obtained for  $Re = 5300$  and the LKJ and LKS models: The turbulence quantities  $k$  and  $\bar{\epsilon}$  decreased continuously until their values became negligibly small. In an effort to improve the numerical predictions of  $ff$ , the Launder and Sharma (1974) model with a modified Hanjalić and Launder (1980) correction was tried. In this model (MLSH), the constant  $C_{3\epsilon}$  was adjusted to values in between 1.44 and 4.44, which correspond to the original values used in the Launder and Sharma (1974) and Hanjalić and Launder (1980) models.

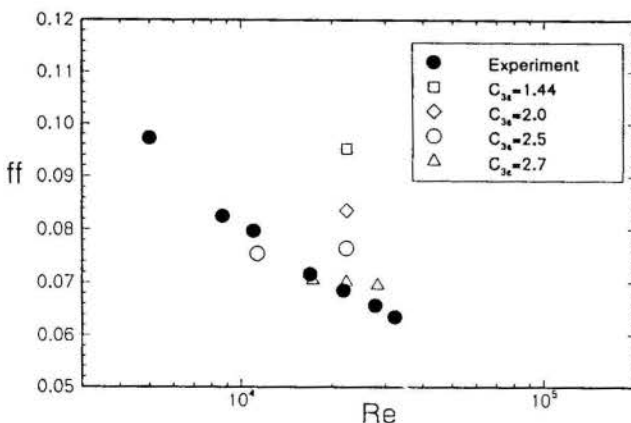


Figure 4: Influence of  $C_{3\epsilon}$  on the value of time-averaged friction factor: Results obtained with the MLSH model.

As can be seen in Fig. 4, it is possible to adjust the value of  $C_{3\epsilon}$  so as to obtain results that agree with the experimental results of McBrien (1989). However, it was not possible to identify a single optimal value of  $C_{3\epsilon}$  for all Reynolds numbers in the range  $5300 \leq Re \leq 28300$ .

**Time-Averaged Skin-Friction Coefficients.** For  $Re = 11300$  and the LKJ model, the  $\bar{\tau}_w^*$  distribution, obtained with both ensemble-average and steady-state formulation, is shown in Fig. 5. The  $\bar{\tau}_w^*$  distribution obtained with the unsteady formulation compare rather well with the  $\bar{\tau}_w^*$  distribution that can be inferred from the plate-surface oil-flow visualization results obtained experimentally by McBrien (1989). A photograph of the surface streamline pattern obtained by McBrien (1989) for the same interrupted-plate duct and  $Re = 10980$  is shown in Fig. 6. In contrast, the  $\bar{\tau}_w^*$  distribution obtained with the steady formulation does not agree as well. In particular, the rather step rise in  $\bar{\tau}_w^*$  near the plate trailing edge seen with the unsteady formulation (Fig. 5) is due to strong flow accelerations in this region that are caused by the oscillating wake: This is represented by the smooth oil-flow pattern in this region in Fig. 6. This feature of the  $\bar{\tau}_w^*$  distribution is almost entirely missing in the results obtained from the steady-state simulation: In this case, there are no wake oscillations, or vortex shedding, thus the flow over the plate in the vicinity of the trailing edge does not undergo any significant acceleration, and there is no sharp increase of  $\bar{\tau}_w^*$  in this region.

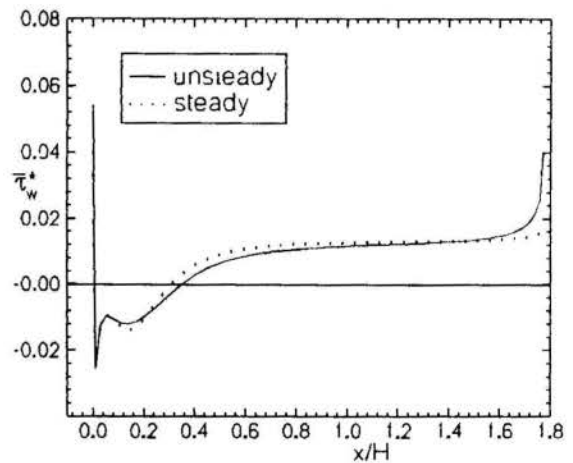


Figure 5: Distribution of skin-friction coefficient on the top surface of the plate.

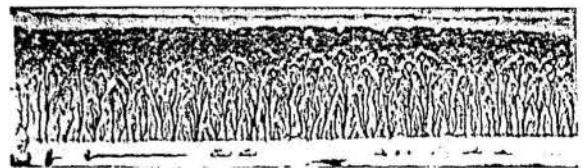


Figure 6: Plate-surface streamline for  $Re = 10980$ . Main flow direction is from top to bottom of the picture: Experimental results of McBrien (1989).

## CONCLUSIONS

Complementary numerical and experimental investigations of temporally- and spatially-periodic, fully de-



veloped turbulent flows in interrupted-plate ducts have been presented in this paper. The experimental investigation revealed that the Strouhal number,  $S$ , increases with the Reynolds number,  $Re$ , at the low flow rates. At the higher flow rates, a fairly constant value of  $S$ , independent of  $Re$ , was obtained. However, this value of  $S$  decreased slightly with increasing distance from the trailing edge of the plate.

The numerical investigation showed that an ensemble-average formulation, in conjunction with low-Reynolds number two-equation EVMs, with some rather ad hoc modifications, yields qualitatively correct predictions of the variation of  $ff$  and  $S$  versus  $Re$ . Quantitatively, however, the agreement obtained was not very good. Good qualitative agreement was obtained between time-averaged skin-friction coefficient distributions on the top surface of the plate and corresponding distributions inferred from surface oil-flow visualization photographs. It was also noted that when very fine grids and time steps are used with ensemble-average low-Reynolds number turbulence models, the numerical predictions could resemble results produced by two-dimensional Large Eddy Simulations.

#### ACKNOWLEDGMENTS

Financial support from the Brazilian government, in the form of a CNPq scholarship to Simone Sebben, is gratefully acknowledged. Thanks are also due to the Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) of Canada, and to the Centre de Recherche en Calcul Appliqué (CERCA) in Montreal for supporting B. Rabi Baliga's research activities.

#### REFERENCES

- Amon, C.H. and Mikic, B.B., 1990, "Numerical Predictions of Convective Heat Transfer in Self-Sustained Oscillatory Flows", *J. Thermophysics*, vol. 4, pp. 239-246.
- Ciofalo, M. and Collins, M.W., 1992, "Large Eddy Simulation of Turbulent Flow and Heat Transfer in Plane and Rib-Roughened Channels", *Int. J. Num. Methods in Fluids*, vol. 15, pp. 453-489.
- Ciofalo, M., Stasiek, J., and Collins, M.W., 1996, "Investigation of Flow and Heat Transfer in Corrugated Passages - II. Numerical Simulations", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 39, pp. 165-192.
- Ghaddar, N.K., Korczak, K.Z., Mikic, B.B., and Patera, A.T., 1986, "Numerical Investigation of Incompressible Flow in Grooved Channels. Part 1. Stability and Self Sustained Oscillations", *J. Fluid Mech.*, vol. 163, pp. 99-127.
- Hanjalić, K. and Launder, B.E., 1980, "Sensitizing the Dissipation Equation to Irrotational Strains", *ASME J. Fluids Engineering*, vol. 102, pp. 34-40.
- Hanjalić, K., 1994, "Advanced Turbulence Closure Models: A View of Current Status and Future Prospects", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, vol. 15, pp. 178-203.
- Jones, W.P. and Launder, B.E., 1973, "The Calculation of Low-Reynolds Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 16, pp. 1119-1130.
- Kays, W.M. and London, A.L., 1984, *Compact Heat Exchangers*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York.
- Kim, S.H. and Anand, N.K., 1994, "Turbulent Heat Transfer Between a Series of Parallel Plates with Surface-Mounted Discrete Heat Sources", *ASME J. of Heat Transfer*, vol. 116, pp. 577-587.
- Launder, B.E. and Sharma, B.I., 1974, "Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc", *Letters in Heat and Mass Transfer*, vol. 1, pp. 131-138.
- Launder, B.E. and Kato, M., 1993, "Modelling of Flow-Induced Oscillations in Turbulent Flow Around a Square Cylinder", *ASME Forum on Unsteady Flows*, FED vol. 157, pp. 189-199.
- Launder, B.E., 1995, "An Introduction to Single-Point Closure Methodology", *CRM Workshop on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, University of Montreal, Montreal, Canada, Nov. 9-21.
- Leonard, B.P., 1979, "An Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 19, pp. 59-58.
- Lien, F.S. and Leschziner, M.A., 1994, "Upstream Monotonic Interpolation for Scalar Transport with Application to Complex Turbulent Flows", *Int. J. Num. Methods in Fluids*, vol. 19, pp. 527-548.
- McBrien, R.K. and Baliga, B.R., 1988, "Module Friction Factors and Intramodular Pressure Distributions for Periodic Fully Developed Turbulent in Rectangular Interrupted-Plate Ducts", *ASME J. Fluids Engineering*, vol. 110, pp. 147-154.
- McBrien, R.K., 1989, *Fully Developed Turbulent Flow in Rectangular Interrupted-Plate Ducts*, Ph.D Thesis, Dept. of Mech. Eng., McGill University, Montreal, Canada.
- Patankar, S.V., Liu, C.H., and Sparrow, E.M., 1977, "Fully Developed Flow and Heat Transfer in Ducts Having Streamwise-Periodic Variations of Cross-Sectional Area", *ASME J. Heat Transfer*, vol. 99, pp. 180-186.
- Patankar, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill Book Co.
- Sebben, S. and Baliga, B.R., 1995, "Some Extensions of Tridiagonal and Pentadiagonal Matrix Algorithms", *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 28, pp. 323-351.
- Settari, A. and Aziz, K., 1973, "A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 10, pp. 506-521.
- Shah, R.K., 1981, "Compact Heat Exchangers", in *Heat Exchangers: Hydraulic Fundamentals and Design*, Hemisphere Publishing Corp., New York, pp. 111-151.
- Sparrow, E.M., Baliga, B.R., and Patankar, S.V., 1977, "Heat Transfer and Fluid Flow Analysis of Interrupted-Wall Channels, with Application to Heat Exchangers", *ASME J. Heat Transfer*, vol. 99, pp. 4-11.
- Van Doormaal, J.P. and Raithby, G.D., 1984, "Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, pp. 147-163.
- Wilcox, D.C., 1993, *Turbulence Modelling for CFD*, DCW Industries, Inc.





## ESCOAMENTO TURBULENTO EM TORNO DE UM CILÍNDRIO PENDULAR

Casimiro Cala\* , Antonio C. P. Brasil Junior & Aldo J. de Sousa  
Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília  
70910-900 - Brasília - DF - Brasil

e  
\*Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Eduardo Mondlane  
C.P. 257 - Maputo - Mozambique



## SUMÁRIO

*Neste artigo um estudo experimental sobre o escoamento em torno de um cilindro pendular é desenvolvido. Medições em túnel de vento utilizando a técnica de anemometria de fio quente, na região de esteira, são obtidas. Avalia-se o efeito da massa do cilindro, e por consequência sua amplitude de oscilação, na dinâmica da esteira. Apresenta-se uma avaliação da transformação da energia cinética do escoamento livre em diferentes parcelas (energia cinética de turbulência e energia mecânica) o que é fortemente influenciado pelas escalas de emissão de vórtices.*

## INTRODUÇÃO

O escoamento turbulento em torno de estruturas flexíveis, ou mesmo sobre elementos sólidos sujeitos a vibrações livres, é um problema relacionado com aplicações práticas diversas tais como dispositivos de engenharia oceânica para a redução do efeito de ondas ou correntes sobre estruturas, sistemas de amortecimento de escoamentos industriais para efeito de redução de ruído, ou ainda em escoamentos ambientais onde os elementos flexíveis compõem a vegetação. Este tipo de escoamento é extremamente complexo devido à interação fluido-estrutura. O escoamento excita o sistema mecânico que por sua vez modifica as características de escoamento visto seu movimento oscilatório.

Em um escoamento sobre um elemento sólido flexível parte da energia cinética média do escoamento é absorvida através do mecanismo de arrasto viscoso (associado ao cisalhamento) e outra parte é absorvida pelo arrasto de forma (associado à pressão). A parte associada ao cisalhamento é responsável pela formação de grandes escalas na esteira do elemento com a emissão sucessiva de vórtices. Tais vórtices atuam como excitação no sistema mecânico, produzindo assim um movimento oscilatório do elemento flexível. A energia mecânica associada a este movimento é restituída periodicamente ao escoamento. Nota-se porém que a escala de tempo desta restituição dependerá da amplitude do movimento, e portanto, em grande parte dos casos, esta restituição de fato é feita de uma forma não organizada, aleatória, via energia cinética de turbulência. Sobre um ponto de vista sistêmico, no escoamento em torno de um elemento flexível, este último atua como um filtro sobre as diferentes escalas do escoamento livre incidente. Esta modificação no espectro de frequências do escoamento pode ser benéfica para certos tipos de aplicações tecnológicas no sentido de reduzir ou ampliar certas escalas do escoamento.

Neste trabalho apresenta-se um estudo do escoamento turbulento em torno de um cilindro pendular. Neste caso específico, um cilindro finito de diâmetro  $D$  e comprimento  $H$ , é posicionado em uma camada limite turbulenta como mostra a

figura 1. A massa do cilindro é denotada por  $m$ , e a velocidade externa à camada limite como  $U_0$ .

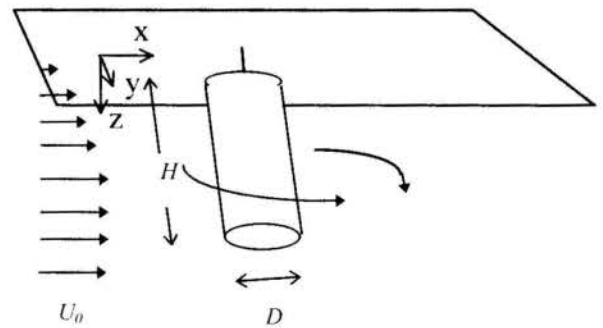


Figura 1 - Descrição do problema

A metodologia de estudo deste problema consiste em avaliar perfis de velocidade média e intensidade de turbulência na esteira do cilindro. Informações relativas ao espectro da flutuação de velocidade na esteira do escoamento também são levantadas, de forma a interpretar o efeito do transporte de energia nas diferentes escalas do escoamento.

Estudos similares em estruturas flexíveis e fixas são disponíveis na literatura. O trabalho de Flesch & Grant (1991) Finningan & Mulhearn (1978) e Finningan (1979) sobre o escoamento sobre estruturas vegetativas, discute o problema de interação fluido-estrutura, considerando um elemento de vegetação como um sistema angular massa-mola amortecido. Uma discussão sobre cilindros fixos posicionados em camada limite é apresentada nos trabalhos de Cantwell & Coles (1983), Seginer et al. (1976) Goldstein & Karmi (1984) e Baker (1984) por exemplo. Algumas características deste tipo de escoamento são coincidentes com o caso analisado neste trabalho (De fato quando a massa do cilindro tende a infinito este é um caso limite). Alguns resultados para este caso específico são também levantados no presente trabalho.

Na sequência, uma breve análise do problema é apresentada, discutindo assim alguns aspectos teóricos importantes que enfocam a questão. Mais adiante as metodologias e a montagem experimental utilizadas são apresentadas. Por fim, os resultados para diferentes casos são apresentados e discutidos.

## ASPECTOS SOBRE A HIDRODINÂMICA DO ESCOAMENTO

O escoamento em questão apresenta dois pontos peculiares que o tornam bastante complexo. Primeiramente a própria topologia tridimensional do escoamento faz com que a dinâmica da esteira turbulenta seja um ponto de controvérsia onde diversas questões abertas ainda são presentes na literatura. Um segundo ponto concerne ao caráter do acoplamento entre a dinâmica do escoamento e o comportamento pendular do cilindro, o que induz toda uma linha de desenvolvimento à qual este trabalho se insere. Algumas características do problema são comentadas a seguir:

- A esteira turbulenta 3D sobre elementos prismáticos em uma camada limite é bem mais complexa que a esteira sobre corpos em escoamentos 2D livres. Para este último caso, o comportamento dinâmico da esteira é caracterizado por uma frequência característica de emissão vórtices. Uma variação similar dos campos de velocidade média e intensidade de turbulência ao longo da coordenada  $x$  (direção do escoamento principal) é observada. A escala de comprimento característica do escoamento varia proporcionalmente à uma potência desta coordenada ( $\ell \sim x^{1/2}$  para uma região suficientemente distante do cilindro). No caso 3D, a estrutura topológica da esteira inibe tanto a emissão de vórtices tipo Karman quanto o comportamento similar dos campos em uma direção preferencial. Vórtices do tipo *ferradura* junto a parede, bem como o descolamento do topo da estrutura prismática (ver figura 2), fazem que a simples transposição de resultados de corpos 2D para problemas 3D torne-se totalmente inócua.
- Para um cilindro fixo de dimensão finita o descolamento transitório de vórtices depende da razão de aspecto do cilindro ( $H/D$ ) e do número de Reynolds do escoamento. Próximo à parede eventualmente vórtices tipo Karman podem ser produzidos. Dependendo do valor da razão do aspecto e do número de Reynolds isso nunca pode ser obtido. Na região superior do cilindro, junto ao topo, a esteira apresenta um comportamento completamente 3D cujo o comportamento de emissão em geral, não é organizado.

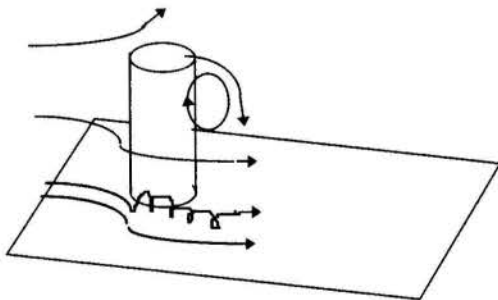


Figura 2 - Aspectos da esteira do escoamento sobre um cilindro fixo.

- Para um elemento prismático pendular (no caso específico um cilindro tal como mostrado na figura 1) o escoamento é o resultado também da dinâmica deste corpo rígido. As escalas características de tempo e comprimento na esteira serão influenciadas pela amplitude do movimento pendular do cilindro, sendo que o mesmo atuará como um filtro sobre determinadas escalas, ampliando-as

ou atenuando-as. Seja portanto o movimento do pêndulo descrito pela equação de movimento. Considera-se aqui uma simplificação do movimento em um grau de liberdade, pela posição média do cilindro na direção longitudinal  $X$ . Logo:

$$m\ddot{X} = \frac{1}{2} \rho D H C_D (u(t) - \dot{X})^2 - \frac{mg}{H} X \quad (1)$$

Nestas equações  $C_D$  é o coeficiente de arraste do cilindro,  $u(t)$  é uma escala de velocidade instantânea do escoamento, que deve ser decomposta em parcelas média e flutuante. Isto torna esta equação uma equação estocástica devido à presença da parte aleatória relativa à flutuação.

Nota-se que os termos do segundo membro representando a força de arrasto e a restituição devida ao peso, compõem um sistema massa-mola equivalente com um termo de amortecimento (dito amortecimento aerodinâmico) e um termo de rigidez efetiva, respectivamente. Estes termos são notados como:

$$\xi_{\alpha}(t) = \frac{1}{2} \rho D H C_D (2u(t) - \dot{X}) \quad (2)$$

$$K = \frac{mg}{H} \quad (3)$$

Portanto a equação (1) pode ser re-escrita como:

$$m\ddot{X} + \xi_{\alpha} \dot{X} + KX = F(t) \quad (4)$$

$F(t)$  é um forçamento aleatório dado pela parcela do arrasto relativa à velocidade instantânea.

Esta formulação mostra que as amplitudes de movimento do pêndulo são amplificadas para valores próximos à sua frequência natural ( $\omega_n = \sqrt{g/H}$ ). Esta amplificação é atenuada para maiores valores do amortecimento aerodinâmico e este efeito é transmitido ao escoamento.

- De forma a parametrizar o efeito do movimento pendular do cilindro no escoamento, propõe-se um número adimensional que relacione a massa do cilindro, a velocidade do escoamento e as dimensões do pêndulo, na forma:

$$\lambda = \frac{mg}{\rho U_0^2 D H} \quad (5)$$

## PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Túnel de vento e montagem experimental: Os experimentos do presente trabalho foram desenvolvidos em um túnel de vento aerodinâmico de seção de trabalho de 650 X 650 mm por 3600 mm de comprimento. Este túnel de vento permite o ensaio de modelos com velocidades de trabalho de até 25 m/s. Este escoamento é provido por um ventilador axial de 40 CV instalado em uma caixa plena de 4 m<sup>3</sup>, succionando o ar através da seção de ensaio. O controlador de velocidade eletrônico do motor do ventilador permite o desenvolvimento de ensaios em uma grande faixa de velocidades.

Na entrada do túnel um bocal convergente, associado a um conjunto de telas, permite a obtenção de um escoamento com intensidade de turbulência de 0.5%. A 100 mm da parede superior da seção de ensaios, uma placa plana foi posicionada, servindo como base para o escoamento em camada limite. Esta placa é chanfrada a 45° na extremidade de entrada afim de tornar mais suave a entrada do escoamento.

Um cilindro de 75 mm de comprimento por 9 mm de diâmetro, confeccionado em alumínio, é posicionado de maneira pendular à 450 mm do bordo de ataque da placa plana. Este cilindro é oco de maneira a possibilitar a variação de sua massa através da introdução de pelotas de aço e em seu interior.

**Medição de velocidade:** Para medição de velocidade um sistema de anemometria de fio quente unidirecional, marca DISA foi utilizado. Este sistema é composto por um módulo básico a temperatura constante modelo 55D01, combinado com um voltmetro digital e uma unidade para medição do valor RMS, modelos 55D31 e 55D35, respectivamente. Os sinais de saída também foram captados em um osciloscópio digital marca Hellew-Packard modelo 54600A. Os dados então digitalizados na memória do osciloscópio são transferidos para um computador tipo PC 486, via interface digital HP-IB.

Para análise em frequência do sinal de velocidade na esteira do cilindro, um analisador de sinais marca Hellew-Packard modelo 35665A, foi utilizado. Este sistema permitiu a obtenção de espectros da flutuação de velocidade na esteira do escoamento.

As medições foram realizadas com sondas unidirecionais DISA, de tungstênio, de 5  $\mu\text{m}$  de diâmetro. Esta sonda foi posicionada em um deslocador vertical, permitindo posicionamentos em décimos de milímetro. Para a medição de perfis horizontais, este deslocador foi posicionado na parede lateral do túnel. O dispositivo porta-sonda é confeccionado de maneira tal que um tubo de pitot é posicionado lateralmente à sonda de fio quente. Desta maneira, uma vez a cada dia de testes, a calibração da sonda é feita no próprio túnel em uma posição central da seção, variando sua velocidade em toda a gama de teste. O tubo de pitot é conectado a um micro-manômetro que permite a medição de pressões diferenciais com resoluções de décimos de milímetro de coluna de água.

**Camada limite:** A caracterização do escoamento de camada limite sobre a placa plana a montante do cilindro foi feita a partir de um levantamento criterioso do perfil de velocidade média e intensidade de turbulência em diferentes posições verticais. Como o instrumento metroológico para determinação da posição vertical da sonda possui resolução de décimo de milímetro, para este caso específico foi utilizado um instrumento ótico de medição de posição com resolução mais fina (Catetômetro marca Gaertner modelo M-912 com resolução de 0.01 mm). Para a velocidade do escoamento livre de 14 m/s, os resultados obtidos são mostrados na figura 2. Nota-se que os perfis de velocidade média são bem aproximados pela função potencial com expoente 1/6.

**Descrição dos ensaios:** Um conjunto de ensaios foi realizado tanto para a validação das metodologias utilizadas, bem como para a análise do problema específico. Inicialmente como forma de verificação da metodologia de medição de velocidade na esteira, um cilindro de mesmo diâmetro mas de comprimento igual a largura do túnel foi utilizado. O intuito deste experimento era de comparar alguns resultados obtidos no presente trabalho com aqueles publicados na literatura para cilindro infinito. Neste caso específico tanto resultados relativos ao perfil de velocidade e flutuação na esteira, bem como espectros de frequência foram levantados. Estes resultados são apresentados a seguir.

O segundo caso analisado consiste de um cilindro fixo imerso no escoamento de camada limite mostrado na figura 3. Já nesta corrida experimental, perfis de velocidade horizontais e verticais foram levantados nas posições  $x/D = 2, 4$  e  $6$  ( $x$  é a coordenada longitudinal com origem no eixo do cilindro). O espectro de frequência foi obtido para a posição  $x/D = 3$  e  $z/H = 0.5$ . Estes perfis foram também obtidos para o caso de cilindro

pendular. Neste último caso duas massas diferentes foram utilizadas (62.3 g e 48.7 g).

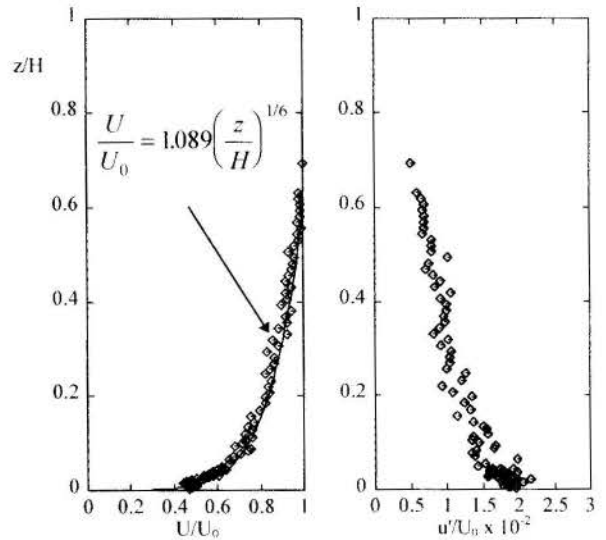


Figura 3 - Camada limite a montante ao cilindro

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

**Cilindro fixo infinito:** De maneira a validar a medição experimental de perfis de velocidade média e flutuação na esteira de cilindros, inicialmente foram levantados alguns resultados para o caso de um cilindro infinito. Na figura 4 são apresentados os perfis transversais de velocidade média nas posições  $x/D=2.0$  e  $x/D=4.0$ . Os resultados obtidos são comparados com os resultados experimentais de *Sung et al (1995)*, utilizando anemometria laser. Os resultados apresentam uma boa concordância.

Os espectros flutuação de velocidade na esteira do escoamento são apresentados na figura 5, para diferentes números de Reynolds do escoamento. Pode-se observar o pico relativo à frequência de deslocamento de vórtices. Como os gráficos são apresentados em variáveis sem dimensão, pode-se observar que este pico posiciona-se sempre próximo à posição de Strouhal igual a 0.21. Ainda nestes gráficos pode-se observar o decaimento da banda inercial do espectro na esteira em potência  $-5/3$ , o que é compatível com resultados descritos na literatura (e.g. *Monin & Yaglom (1987)*). No gráfico da figura 6 a variação do número de Strouhal para diferentes números de Reynolds é apresentada. Nota-se que na faixa de Reynolds analisada obtém-se sempre valores próximos a 0.21, o que é compatível com a literatura.

**Cilindro fixo finito:** Perfis transversais e verticais de velocidade e intensidade de turbulência na direção longitudinal (notada aqui como  $u'/U_0$ ) são apresentados nas figuras 7 e 8. Os perfis transversais são traçados na posição mediana do cilindro e pode-se observar que o comportamento similar entre as diferentes posições longitudinais, quanto à coordenada  $x$ , não é observada. A estrutura tridimensional do escoamento induz um aumento de velocidade próximo à linha de simetria, para a posição  $x/D = 2.0$ , isto caracteriza a recuperação da velocidade média atrás da bolha de recirculação. Um pico no perfil de flutuação é observado nesta posição para  $y/D$  próximo a 1.5. Os perfis verticais caracterizam a forma da esteira evidenciando uma recuperação da energia cinética média ao longo da coordenada longitudinal. Os perfis verticais de flutuação demonstram picos próximos ao topo e à placa plana

para a posição  $x/D = 2.0$ . Gradativamente o nível de intensidade de turbulência na direção  $x$  diminui.

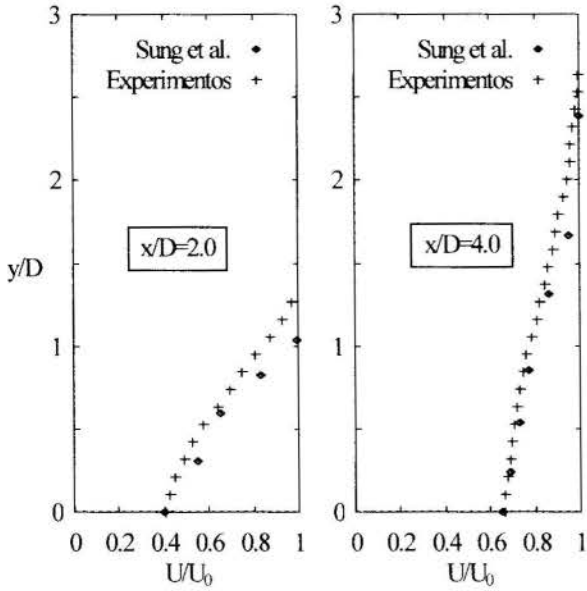


Figura 4 - Perfis transversais de velocidade média (Cilindro fixo infinito)

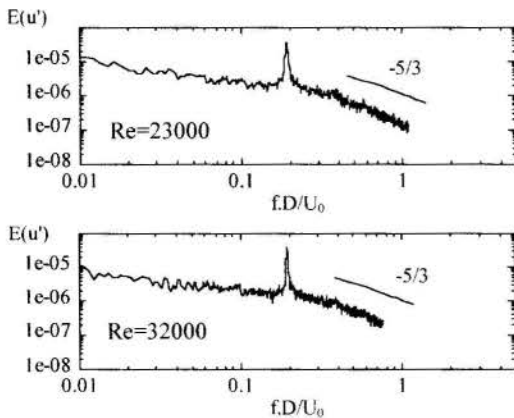


Figura 5 - Espectros da flutuação de velocidade na esteira do escoamento (Cilindro fixo infinito)

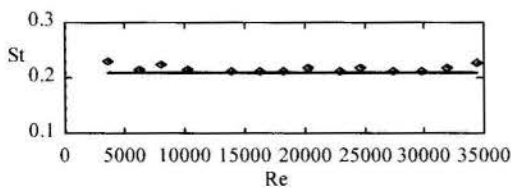


Figura 6 - Variação do número de Strouhal com Reynolds (Cilindro fixo infinito)

Na figura 9 os espectros da flutuação de velocidade média são apresentados para diferentes posições verticais. Observa-se que para regiões próximas à placa o pico próximo ao valor 0.2 existe, indicando assim uma frequência característica de emissão de vórtices nesta região. Já para uma posição mais acima ( $z/D = 0.5$ ) este pico desaparece, caracterizando um comportamento tri-dimensional não organizado da esteira. Supõe-

se que a região de altos valores de intensidade de turbulência, demonstrado na figura 8, para valores de  $z/D$  até 0.4 são causados pela emissão ordenada de vórtices tipo Karman. Observa-se que os baixos valores da velocidade bem como a presença da placa como fator de inibição do escoamento ascendente, auxiliam no alto nível de turbulência, gerada pelo cisalhamento, nesta região.

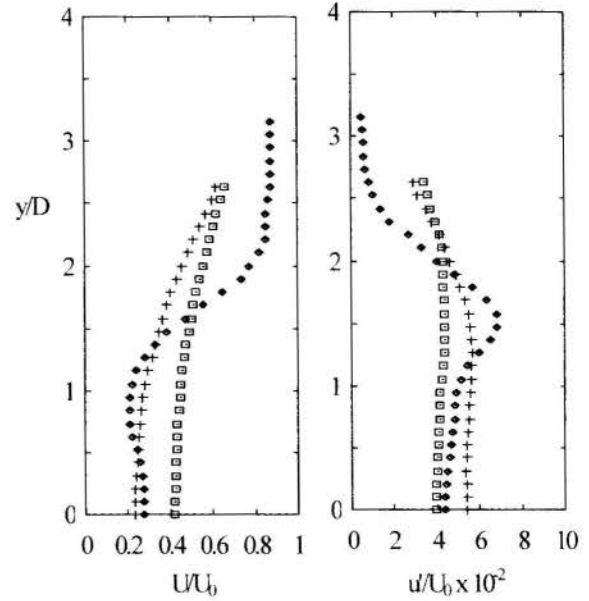


Figura 7 - Perfis transversais de velocidade e intensidade de turbulência (Cilindro fixo finito),  $\diamond$ ,  $x/D=2.0$ ,  $+$ ,  $x/D=4.0$ ,  $\square$ ,  $x/D=6.0$

**Cilindro pendular:** Os resultados do cilindro pendular foram obtidos para duas diferentes massas ( $\lambda = 2.8$  e  $3.6$ ). Para o cilindro mais leve os perfis de velocidade média e intensidade de turbulência são apresentados nas figuras 10 e 11. Observa-se nos perfis transversais de velocidade média que a inflexão do campo prolonga-se até a posição  $x/D=4.0$ . Isto leva a crer que a bolha na região traseira do cilindro em termos médio é bem maior para o cilindro pendular que para o cilindro fixo. Esta suposição é também justificada pelos perfis verticais de velocidade média da figura 11.

Pela a avaliação dos perfis de intensidade de turbulência pode-se concluir que estes níveis para o caso do cilindro pendular são mais acentuados, e com picos maiores na região próxima à  $z/D=0.4$ .

A influência da massa do cilindro nos campos de velocidade e intensidade de turbulência na esteira do cilindro pode ser notada na figura 12 onde são comparados perfis verticais para a posição  $x/D=0.4$ . Observa-se que para menores massas um aumento na intensidade de turbulência na esteira é observado, o que implica também em uma redução do perfil de velocidade média, principalmente próximo ao topo do cilindro. De fato as amplitudes de oscilação são maiores no topo do cilindro o que induz certamente uma maior perturbação ao escoamento através do movimento pendular.

No gráfico da figura 13 o espectro de flutuação de velocidade na esteira é apresentado para diferentes massas do cilindro. O ponto da frequência natural do cilindro é indicado. Nota-se o fator de ampliação do movimento pendular é observado na faixa de baixa frequência próxima à frequência natural do



pêndulo, ou seja, o mecanismo responsável pelo aumento de energia cinética de turbulência na esteira do cilindro é exatamente a amplitude de oscilação do cilindro, e esta amplificação se processa na faixa de baixa frequência, próxima à frequência natural do sistema. O decaimento da banda inercial é mantido praticamente o mesmo.

Em estruturas vegetativas, medições *in situ* revelam que a interação de elementos flexíveis com o escoamento de ar amplificam frequências próximas a frequência natural tal como obtido no presente trabalho (Flesch & Grant (1991)). Dependendo de certas condições da velocidade incidente produzem-se fenômenos de ondas de vazio na vegetação, tais como podem ser observadas em plantações de trigo por exemplo.

Ainda sobre este mesmo tipo de escoamento ambiental, diversos trabalhos apresentam decaimento da banda inercial bem inferior aos  $-2/3$  característicos do escoamento em camada limite. De fato a estrutura vegetativa filtra as altas frequências, conservando o movimento ondulatório devido à interação fluido estrutura na banda de baixa frequência. Espectros com decaimento próximos à  $-5/3$  como o obtido no presente trabalho, são encontrados em medições *in situ* dentro de camadas vegetativas (Gardiner (1994)) ou em túnel de vento em matrizes de cilindros finitos em uma camada limite (Seginer et al. (1976)).

Como conclusão cabe ressaltar que a necessidade de medições mais abrangentes, com sondas 2D e 3D, para casos pendulares, podem quantificar de maneira mais precisa o nível de energia cinética de turbulência na esteira do escoamento. O levantamento topológico da bolha traseira do cilindro, através de visualização de escoamento, pode introduzir elementos importantes quanto aos pontos comentados no presente trabalho.

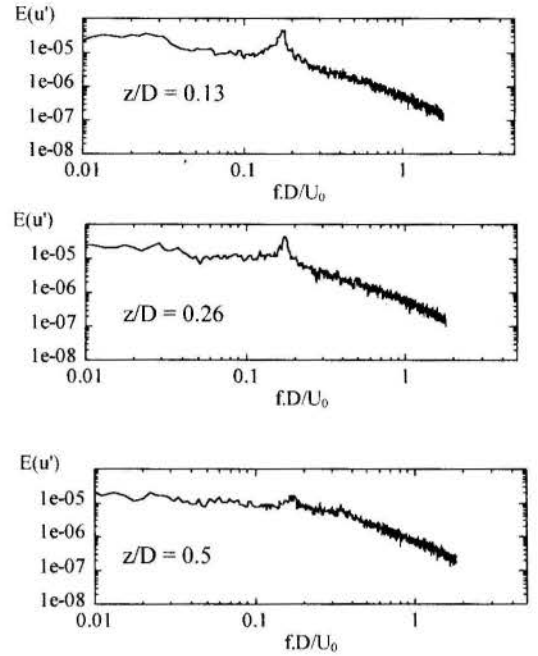


Figura 9 - Espectros da flutuação de velocidade na esteira do escoamento (Cilindro fixo finito)

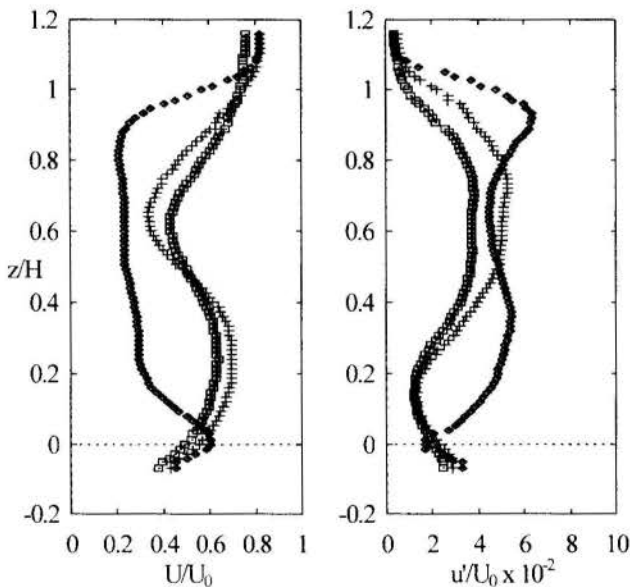


Figura 8 - Perfis verticais de velocidade e intensidade de turbulência (Cilindro fixo finito)  $\diamond$ ,  $x/D=2.0$ ,  $+$ ,  $x/D=4.0$ ,  $\square$ ,  $x/D=6.0$

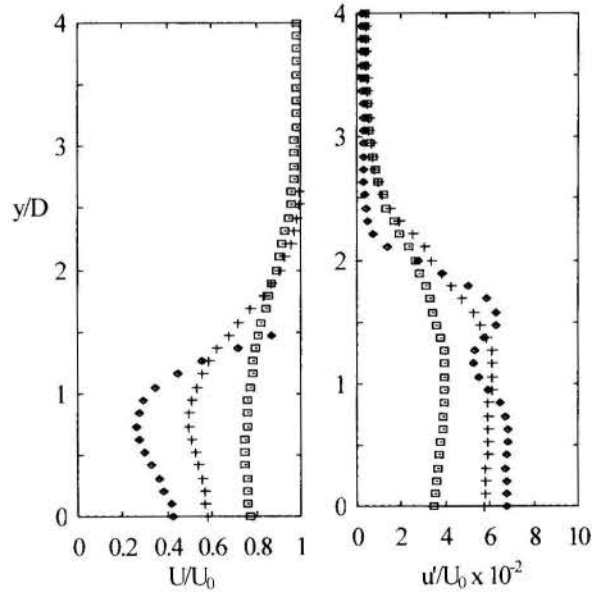


Figura 10 - Perfis transversais de velocidade e intensidade de turbulência (Cilindro pendular com  $\lambda = 2.8$ )  $\diamond$ ,  $x/D=2.0$ ,  $+$ ,  $x/D=4.0$ ,  $\square$ ,  $x/D=6.0$

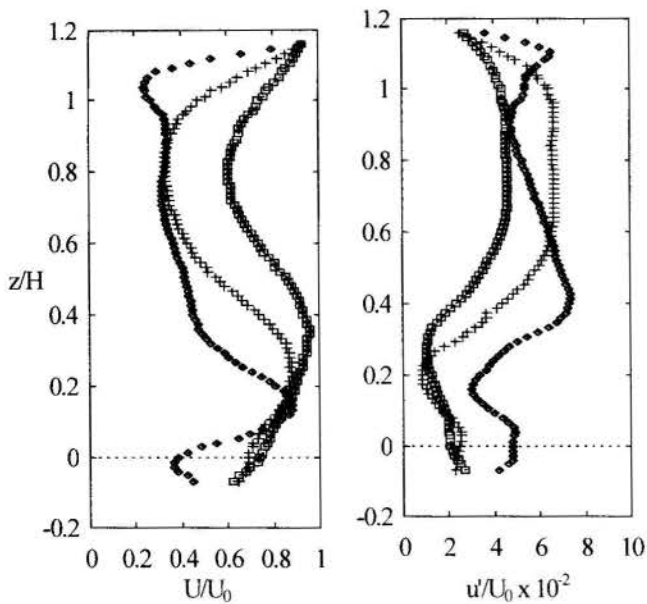


Figura 11 - Perfis verticais de velocidade e intensidade de turbulência (Cilindro pendular com  $\lambda = 2.8$ )  
 $\diamond$ ,  $x/D=2.0$ ,  $+$ ,  $x/D=4.0$ ,  $\square$ ,  $x/D=6.0$

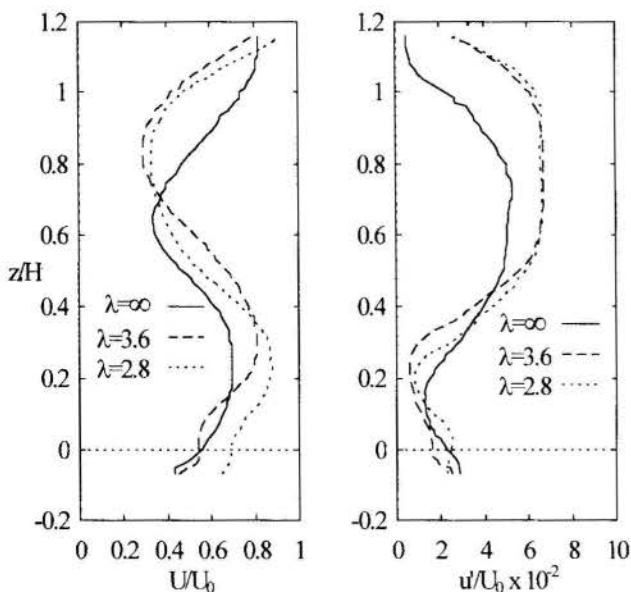


Figura 12 - Perfis verticais de velocidade e intensidade de turbulência na posição  $x/D = 4.0$  para diferentes massas do cilindro

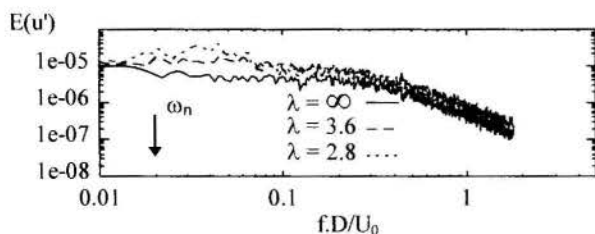


Figura 13 - Espectros da flutuação de velocidade na esteira para diferentes massas

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo projeto de pesquisa do CNPq nº 92019201. Agradecemos ainda a colaboração dos professores Edgar Mamiya e Fernando Neves pelas valiosas discussões e comentários, bem como ao aluno Cristiano Logrado pelo apoio às medições executadas.

## REFERÊNCIAS

- C. J. BAKER (1985); The position of points of maximum and minimum shear stress upstream of cylinders mounted normal to flat plates, *J. of Wind Eng. and Industrial Aerodynamics*, 18, 263-274.
- B. J. CANTWELL e D. COLES (1983); An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder, *J. of Fluid Mechanics*, 135, 321-374.
- J. J. FINNIGAN (1979); Turbulence in waving wheat I. Mean statistics and Honami, *Boundary-Layer Meteorology*, 16, 181-211.
- J. J. FINNIGAN e P. J. MULHEARM (1978); A simple mathematical model of airflow in waving plant canopies, *Boundary-Layer Meteorology*, 14, 415-431.
- B. A. GARDINER (1994); Wind and wind forces in a plantation spruce forest, *Boundary-Layer Meteorology*, 67, 161-186.
- T. K. FLESCH e R. H. GRANT (1991); Translation of turbulent wind energy to individual corn plant motion during senescence, *Boundary-Layer Meteorology*, 55, 161-176.
- R. J. GOLDSTEIN e J. KARMI (1984); The Effect of a Wall Boundary Layer on Local Mass Transfer From a Cylinder in a Crossflow, *ASME J. of Heat Transfer*, 106, 260-267.
- S. MONIN e A. M. YAGLOM (1987); *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, Vol. 2, MIT Press.
- I. SEGNER, P. J. MULHEARM, E. F. BRADLEY e J. J. FINNIGAN (1976); Turbulent flow in a model plant canopy, *Boundary-Layer Meteorology*, 10, 423-453.
- H. J. SUNG, C. K. CHUN e J. M. HYUN (1985); Experimental Study of Uniform-Shear Flow Past a Rotating Cylinder, *ASME J. of Fluids Engineering*, 107, 62-67.

## ABSTRACT

In this work an experimental study of a turbulent flow over a cylindrical pendulum is developed. Wind tunnel experiments and hot wire measurements were performed in the wake of the cylinder. The effect of the mass of the cylinder, enhancing the amplitude of the pendulum movement and the dynamic scales in the wake flow, is evaluated. The exchange between the mean kinetic energy of the boundary layer flow to the mechanical energy of the mechanical system produces more kinetic energy of turbulence in the wake. This exchange is more sensitive at the time scales related to the pendulum movement.



ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MODELOS DE TURBULÊNCIA  $\kappa$ - $\epsilon$  E O  
MODELO ALGÉBRICO DO TENSOR DE REYNOLDS PARA ALTOS NÚMEROS  
DE REYNOLDS UTILIZANDO O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS



Marcelo José Pirani \*  
Manuel da Silva Valente de Almeida \*  
Nelson Manzanares Filho \*

\* Escola Federal de Engenharia de Itajubá - Minas Gerais - Brasil

RESUMO

A simulação de escoamento turbulento incompressível em dutos de seção circular para Reynolds igual a 380000 é apresentada neste trabalho. Dois modelos de turbulência são comparados, o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  e o modelo Algébrico do Tensor de Reynolds. O programa computacional que simula o escoamento, utiliza o Método dos Volumes Finitos para a discretização espacial das equações. Uma comparação dos resultados obtidos para a componente média de velocidade axial  $U$ , para a energia cinética de turbulência  $\kappa$  e para o tensor de Reynolds  $\overline{u'v'}$  é feita com dados experimentais disponíveis na literatura.

INTRODUÇÃO

A representação do escoamento turbulento é feita através das equações da Continuidade e de Navier-Stokes, estas equações são de difícil solução analítica, tornando-se necessária a recorrência a métodos numéricos e a modelos de turbulência.

Com o objetivo de simulação de escoamentos turbulentos, o método dos volumes finitos foi aplicado. Dois modelos de turbulência foram testados e comparados, o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  e o Modelo Algébrico do Tensor de Reynolds. A discretização do domínio físico foi feita utilizando o princípio da malha deslocada (Staggered Grid) e o método semi-implícito SOLA (Solution Algorithm) (Hirt et al., 1975). Para os termos convectivos, os esquemas UPWIND e QUICK foram utilizados. A simulação foi feita considerando um tubo com relação comprimento diâmetro de 82.5. Para a resolução do sistema de equações foi utilizado o método CHOLESKI (Brebba, 1978).

EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações da continuidade e da quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas são dadas segundo Kreith e Sonju (1965). A equação da continuidade fica:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

para a componente média da velocidade axial  $U$ , a equação da quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas, fica:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ UU - v \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{u'u'} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rUV - rv \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{u'v'} \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

para a componente média da velocidade radial  $V$ , tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ UV - v \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{u'v'} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rVV - rv \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{v'v'} \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{vV}{r^2} \quad (3)$$

Modelo  $\kappa$ - $\epsilon$ . Admitindo-se a hipótese de viscosidade turbulenta de Boussinesq que pode ser vista em ZHU (1984) para o cálculo das componentes do tensor de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  presentes nas equações da quantidade de movimento, tem-se:

$$- \overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \quad (4)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $\nu_t$  é a viscosidade turbulenta dada por:

$$\nu_t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon} \quad (5)$$

onde  $C_\mu$  é uma constante igual a 0,09.

A equação de  $\kappa$  do modelo de turbulência a duas equações  $\kappa$ - $\epsilon$  segundo ZHU (1984), é dada por:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ U\kappa - \frac{v_e}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rV\kappa - \frac{rv_e}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right] = G - \epsilon \quad (6)$$

a equação de  $\varepsilon$  é dada por:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ U\varepsilon - \frac{v_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rV\varepsilon - \frac{rv_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] = (C_{\varepsilon 1}G + C_{\varepsilon 2}\varepsilon) \frac{\varepsilon}{\kappa} \quad (7)$$

onde:  $v_\varepsilon = v + v_t$

$$G = v_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{V}{r} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right]^2 \right\} \quad (8)$$

$$\sigma_\kappa = 1,00, \quad \sigma_\varepsilon = 1,30 \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad \text{e} \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92$$

**Modelo Algébrico do Tensor de Reynolds.** A transformação dos modelos diferenciais de transporte dos tensores de Reynolds em modelos algébricos é feita de acordo com a aproximação de RODI (1976) que é baseada na suposição que  $\overline{u'_j u'_j} / \kappa$  é constante no escoamento. As equações dos tensores de Reynolds para o modelo algébrico em coordenadas cilíndricas, de acordo com Zerbini (1992), são dadas por:

Equação para o tensor quadrático de Reynolds  $\overline{u'u'}$

$$\left[ 1 + \frac{4 \lambda \kappa}{3 \varepsilon} \frac{\partial U}{\partial x} \right] \overline{u'u'} = \frac{2\kappa}{3} \left[ 1 + \frac{\lambda}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial V}{\partial r} \overline{v'v'} + \left( \frac{\partial V}{\partial x} - 2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \overline{u'v'} \right] \right] \quad (9)$$

Equação para o tensor quadrático de Reynolds  $\overline{v'v'}$

$$\left[ 1 + \frac{4 \lambda \kappa}{3 \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial r} \right] \overline{v'v'} = \frac{2\kappa}{3} \left[ 1 + \frac{\lambda}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \overline{u'u'} + \left( \frac{\partial U}{\partial r} - 2 \frac{\partial V}{\partial x} \right) \overline{u'v'} \right] \right] \quad (10)$$

Equação para o tensor misto de Reynolds  $\overline{u'v'}$

$$\left[ 1 - \frac{\lambda \kappa}{\varepsilon r} \frac{V}{r} \right] \overline{u'v'} = \frac{\lambda \kappa}{\varepsilon} \left[ - \frac{\partial V}{\partial x} \overline{u'u'} - \frac{\partial U}{\partial r} \overline{v'v'} \right] \quad (11)$$

onde

$$\lambda = \frac{1 - C_2}{C_1 - 1 + \frac{P_\kappa}{\varepsilon}} \quad (12)$$

e

$$P_\kappa = - \left[ \overline{u'u'} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v'v'} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{u'v'} \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \quad (13)$$

A equação para a energia cinética de turbulência  $\kappa$  fica:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ U\kappa - C_s \frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{u'u'} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rV\kappa - r C_s \frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{v'v'} \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right] = P_\kappa - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{u'v'} \frac{\partial (C_s \kappa)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{u'v'} \frac{\partial (C_s \kappa)}{\partial x} \right] \quad (14)$$

A equação para a dissipação de energia cinética de turbulência  $\varepsilon$  fica:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ U\varepsilon - C_\varepsilon \frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{u'u'} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rV\varepsilon - r C_\varepsilon \frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{v'v'} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] = \frac{\varepsilon}{\kappa} [C_{\varepsilon 1} P_\kappa - C_{\varepsilon 2} \varepsilon] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{u'v'} \frac{\partial (C_\varepsilon \varepsilon)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{u'v'} \frac{\partial (C_\varepsilon \varepsilon)}{\partial x} \right] \quad (15)$$

onde:  $C_\varepsilon = 0,15, \quad C_s = 0,22, \quad C_1 = 1,8 \quad \text{e} \quad C_2 = 0,6$

A figura (1) mostra a localização das componentes médias de velocidade radial  $V$  e axial  $U$ , do volume de controle principal  $\nabla_o$ , dos volumes de controle deslocados  $\nabla_s$  e  $\nabla_w$ , bem como a localização das grandezas escalares, tais como, pressão  $P$ , energia cinética de turbulência  $\kappa$ , dissipação de energia cinética de turbulência  $\varepsilon$ , de acordo com o princípio da malha deslocada que pode ser visto em Patankar (1980).

A localização das tensões de Reynolds na malha é feita como em Zerbini (1992) e também é mostrada na figura (1).

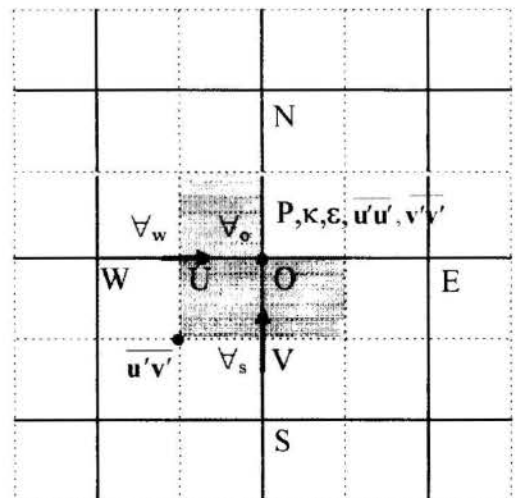


Figura 1: Malha deslocada e localização das variáveis  $U, V, P, \kappa, \varepsilon, \overline{u'u'}, \overline{v'v'}, \overline{u'v'}$ .



Sobre os volumes de controle definidos pelas malhas, são integradas as equações, obtendo-se as formulações discretizadas. A utilização do método numérico, o procedimento e a forma da discretização das equações integradas podem ser vistos em Carvalho (1993).

CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Sobre o eixo de simetria do tubo, os gradientes normais são nulos para todas as quantidades que tenham a propriedade de simetria no escoamento. A componente média de velocidade radial  $V$  e o tensor de Reynolds misto também são nulos, ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0, \quad V = 0 \quad \text{e} \quad \overline{u'v'} = 0 \tag{16}$$

onde  $\phi$  representa qualquer variável dependente com propriedades de simetria e  $\xi$  a direção normal ao eixo de simetria.

Na seção de saída é assumido escoamento completamente desenvolvido, sendo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \tag{17}$$

onde  $\eta$  é a direção paralela ao eixo de simetria.

O perfil de velocidade na entrada para a componente média de velocidade axial  $U$  é uniforme, já para a componente média de velocidade radial  $V$  é admitida como sendo nula. Para as grandezas turbulentas, as condições de contorno na entrada são admitidas conforme Pun & Spalding (1977) e Lin (1989):

$$\kappa = 0,005 U^2 \tag{18}$$

$$\epsilon = \frac{C_{\mu} \kappa^{3/2}}{0,03\delta} \tag{19}$$

onde  $\delta$  é o raio do tubo.

Nos contornos sólidos, é utilizada a lei de parede clássica, dada por:

$$\frac{U}{U^*} = \frac{1}{\zeta} \ln(E Y^+) \tag{20}$$

onde  $\zeta = 0,4$  é a constante de Von Kármán,  $E$  é um parâmetro de rugosidade da parede, para paredes hidraulicamente lisas  $E = 9,0$ ,  $Y^+$  a distância adimensional a parede, calculada como:

$$Y^+ = \frac{U^* d}{\nu} \tag{21}$$

sendo  $\nu$  a viscosidade cinemática,  $d$  a distância radial tomada a partir da parede,  $U^*$  a velocidade de atrito, dada por:

$$U^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \tag{22}$$

com

$$\tau_o = \frac{f \rho U^2}{8} \tag{23}$$

onde  $\tau_o$  é a tensão de cisalhamento na parede,  $f$  o coeficiente de atrito na parede,  $\rho$  a densidade específica do fluido.

A lei de parede clássica pode ser vista com maiores detalhes em Carvalho (1993).

O tensor misto de Reynolds  $\overline{u'v'}$  na região próxima a parede foi admitido segundo Warsi (1992) como:

$$\overline{u'v'} = \frac{\tau_o}{\rho} \tag{24}$$

RESULTADOS

Para a realização dos cálculos numéricos foi utilizado um microcomputador Pentium 133 MHz. Os perfis de  $U$ ,  $\kappa$  e  $\overline{u'v'}$  para os dois modelos de turbulência foram traçados e comparados com dados de Richman e Azad, Lawn, Barbin e Jones, e Nikuradse, que podem ser encontrados em Pollard e Martinuzzi (1989).

Da figura (2) até a figura (7) os perfis foram obtidos para malha 30x30, a influência da malha na obtenção dos resultados é mostrada nas figuras de (8) a (13).

A figura (2) mostra o perfil da componente média de velocidade axial  $U$  completamente desenvolvido para  $Re=380000$ . Observa-se que o perfil obtido pelo modelo  $\kappa-\epsilon$  mostrou-se ligeiramente mais próximo dos dados de Nikuradse do que o perfil obtido pelo modelo algébrico do tensor de Reynolds, porém, em ambos os modelos, nota-se que os valores próximos ao centro do tubo ( $r/R=0$ ) são inferiores aos obtidos por Nikuradse e na medida em que se caminha para a parede do tubo ( $r/R=1$ ) os valores se ajustam melhor, mostrando uma boa concordância.

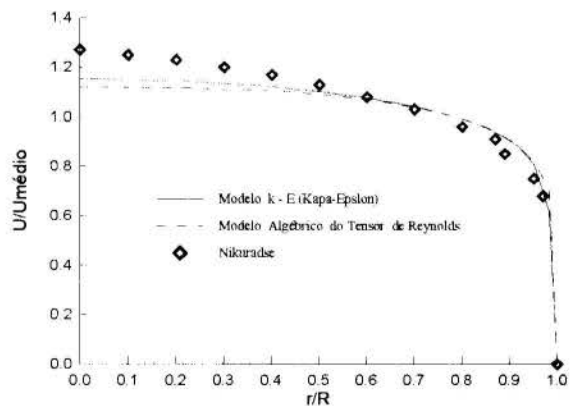


Figura 2: Componente Média de Velocidade Axial vs  $r/R$  em  $x/D=80$  para  $Re=380000$ .

A tendência dos valores de  $U$  em função do número de iterações é mostrada na figura (3). Verifica-se que acima de aproximadamente 4000 iterações, ocorre a convergência de  $U$  para os dois modelos de turbulência.

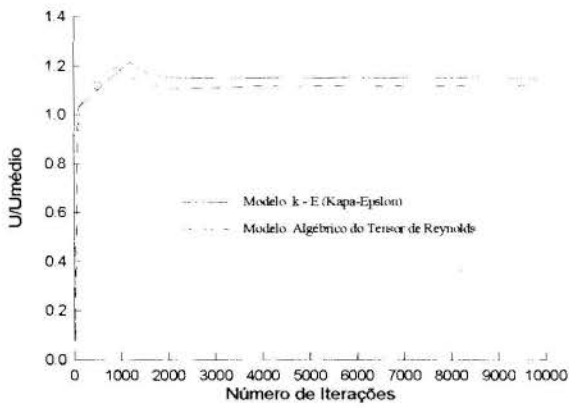


Figura 3: Componente Média de Velocidade Axial vs Número de Iterações para  $Re=380000$ .

O comportamento de  $U$  em relação aos esquemas convectivos pode ser visto nas figuras (4) e (5). Os valores de  $U$  são praticamente os mesmos qualquer que seja o esquema utilizado. Este resultado era esperado, pois, os dois esquemas convectivos consideram o valor da grandeza a montante com um peso maior, e o caso em estudo é predominantemente unidirecional.

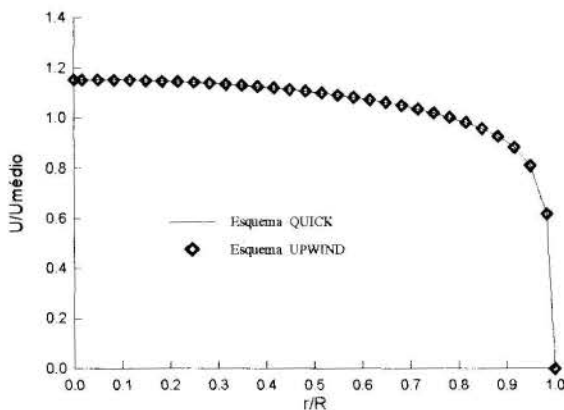


Figura 4: Componente Média de Velocidade Axial vs  $r/R$  obtida com esquemas UPWIND e QUICK em  $x/D=80$  para  $Re=380000$  e modelo  $\kappa-\epsilon$ .

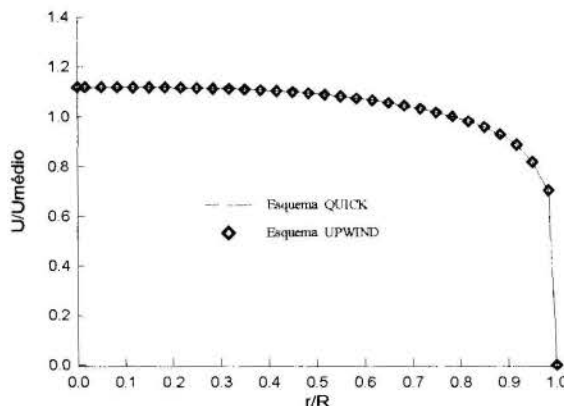


Figura 5: Componente Média de Velocidade Axial vs  $r/R$  obtida com esquemas UPWIND e QUICK em  $x/D=80$  para  $Re=380000$  e Modelo Algebrico do Tensor de Reynolds.

O perfil completamente desenvolvido para  $\overline{u'v'}$  é mostrado na figura (6) juntamente com os dados de Barbin e Jones e de Richman e Azad.

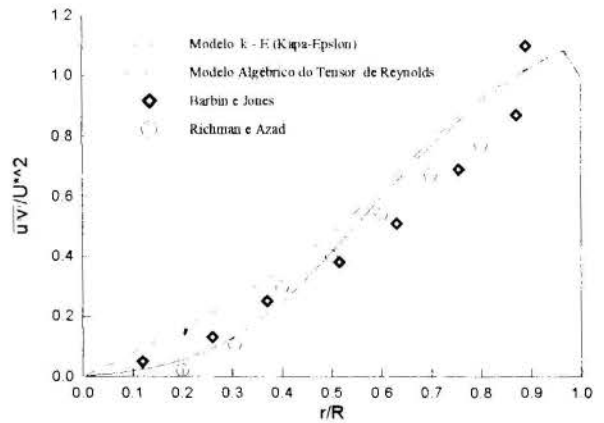


Figura 6: Tensor de Reynolds vs  $r/R$  em  $x/D=29$  para  $Re=380000$ .

Os valores para o tensor de Reynolds  $\overline{u'v'}$  obtidos pelos dois modelos estão coerentes com os dados experimentais.

Na figura (7), os valores para a energia cinética de turbulência  $\kappa$  são comparados com os dados de Lawn. O modelo  $\kappa-\epsilon$  apresenta boa concordância com os dados de Lawn, já o modelo algébrico do tensor de Reynolds afasta-se dos dados de Lawn na região próxima a parede.

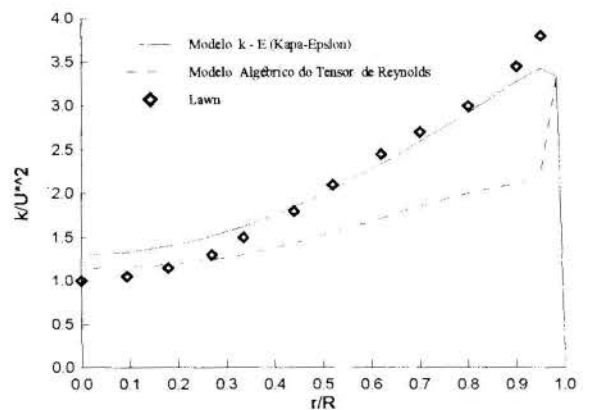


Figura 7: Energia Cinética de Turbulência vs  $r/R$  em  $x/D=80$  para  $Re=380000$ .

Através das figuras (8) e (11) observa-se que a componente média de velocidade axial  $U$  para dois modelos de turbulência estudados sofre pouca variação em relação a malha utilizada.

Para o tensor de Reynolds  $\overline{u'v'}$ , mostrado nas figuras (9) e 12, a variação é bem mais acentuada. O perfil de  $\overline{u'v'}$  para a malha  $30 \times 30$  apresenta uma melhor concordância com os dados experimentais tanto para o modelo  $\kappa-\epsilon$  quanto para o modelo algébrico do tensor de Reynolds.

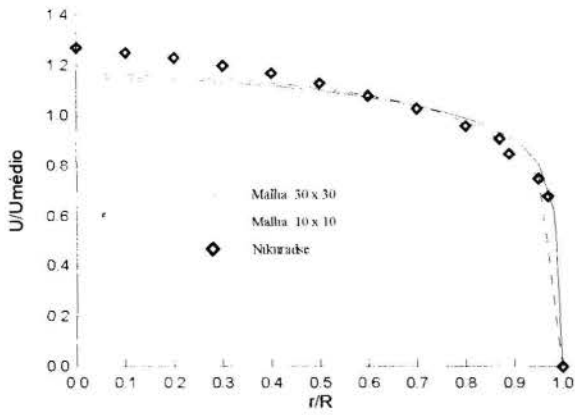


Figura 8: Componente Média de Velocidade Axial vs  $r/R$  em  $x/D=80$  para  $Re=380000$  Modelo  $\kappa-\epsilon$  para diferentes malhas.

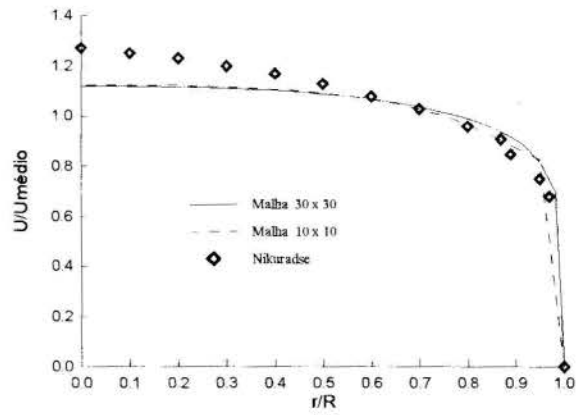


Figura 11: Componente Média de Velocidade Axial vs  $r/R$  em  $x/D=80$  para  $Re=380000$  Modelo Alébrico do Tensor de Reynolds para diferentes malhas.

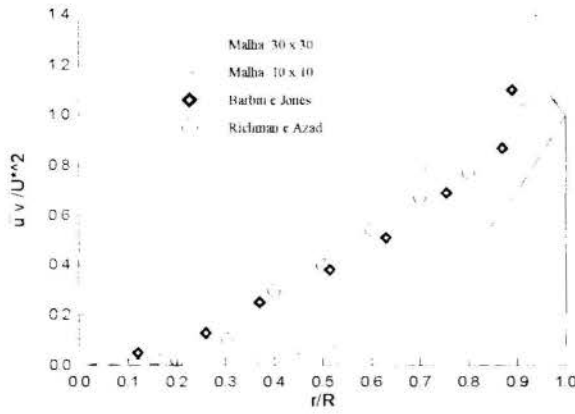


Figura 9: Tensor de Reynolds vs  $r/R$  em  $x/D=29$  para  $Re=380000$  Modelo  $\kappa-\epsilon$  para diferentes malhas.

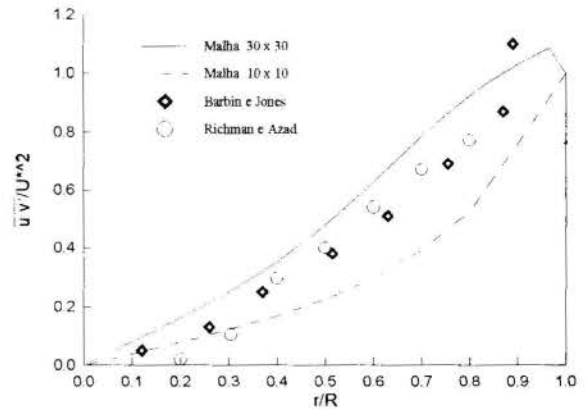


Figura 12: Tensor de Reynolds vs  $r/R$  em  $x/D=29$  para  $Re=380000$  Modelo Alébrico do Tensor de Reynolds para diferentes malhas.

A sensibilidade da energia cinética de turbulência  $\kappa$  em relação a malha é mostrada nas figuras (10) e (13). O modelo  $\kappa-\epsilon$  para as duas malhas estudadas mostrou-se mais coerente com os dados de Lawn.

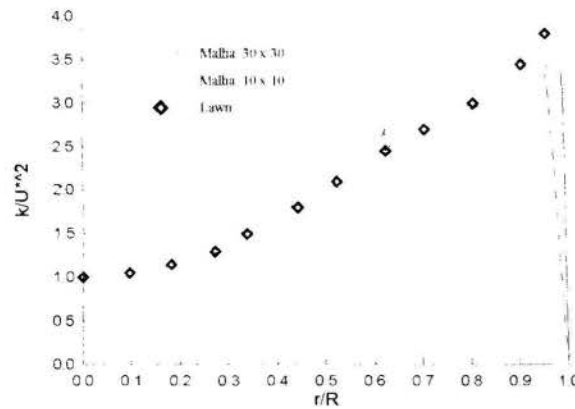


Figura 10: Energia Cinética de Turbulência vs  $r/R$  em  $x/D=80$  para  $Re=380000$  Modelo  $\kappa-\epsilon$  para diferentes malhas.

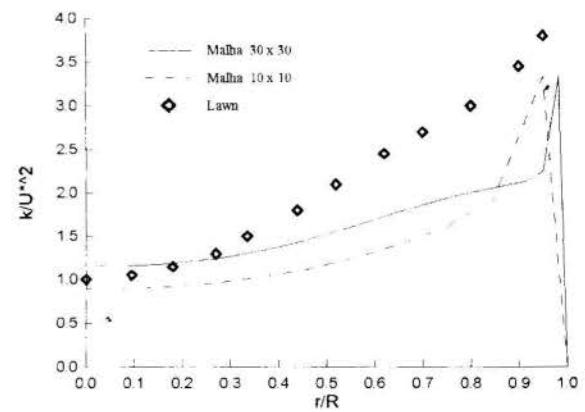


Figura 13: Energia Cinética de Turbulência vs  $r/R$  em  $x/D=80$  para  $Re=380000$  Modelo Alébrico do Tensor de Reynolds para diferentes malhas.

## CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Os resultados obtidos no presente trabalho para os dois modelos de turbulência estudados foram comparados com os dados experimentais de Richman e Azad, Lawn, Barbin e Jones, e Nikuradse, que podem ser encontrados em Pollard e Martinuzzi (1989), mostrando-se bastante satisfatórios. Os valores obtidos pelo modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  se apresentaram mais próximos dos dados experimentais. O tensor de Reynolds  $\overline{u'v'}$  e a energia cinética de turbulência  $\kappa$  se mostraram mais sensíveis em relação a malha utilizada do que a componente média de velocidade axial  $U$ . O tempo de processamento para a obtenção dos resultados é praticamente o mesmo para ambos os modelos de turbulência. Para garantir a convergência das grandezas, os resultados foram obtidos com 10000 iterações sendo este número suficiente já que a partir de 4000 iterações os valores das grandezas se apresentavam estáveis.

## REFERÊNCIAS

- Brebbia, C. A.; Ferrante, A. J., 1978, " Computational Methods for the Solution of Engineering Problems ", Pentech Press Limited, London.
- Carvalho, C. B., 1993, " Desenvolvimento de um Código de Cálculo Utilizando o Método dos Volumes Finitos e o Modelo de Turbulência  $\kappa$ - $\varepsilon$  para Solução de Problemas Bidimensionais" Tese de Mestrado da Universidade Estadual de Campinas.
- Hirt, C. W.; Nichols, B. D. and Homero N. C., 1975, " SOLA - A numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows " Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California.
- Kreith, F. and Sonju, O. K., 1965, "The Decay of a Turbulent Swirl in a Pipe " J. Fluid Mechanic, vol 22, part 2, pp. 257, 258.
- Lin Chau Jen , 1989, " Modelo Matemático para Escoamento Turbulento Confinado, Visando a Configuração de Queimadores para Gases de Petróleo e outros Gases Industriais " Tese de Mestrado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Patankar, V. Suhas, 1980, " Numerical Heat Transfer and Fluid Flow " Hemisphere Publishing Corporation.
- Pollard, A. and Martinuzzi, R., 1989, "Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow" Part I: Algebraic Stress and  $\kappa$ - $\varepsilon$  Models. AIAA Journal, vol.27, N<sup>o</sup> 1.
- Pun , W. M. & Spalding, D. B., 1977, " A General Computer Program for Two - Dimensional Elliptic Flows " Imperial College of Science and Technology.
- Rodi, W., 1976, "A New Algebraic Relation for Calculating the Reynolds Stresses", ZAMM, Vol. 56, pp 219 - 220
- Zerbini, E. J. G. J., 1992, "Simulação Numérica do Escoamento em Câmaras Ciclônicas com Elevada Recirculação" Tese de Doutorado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- ZHU, Jiang, 1984, " Calcul des Jets Turbulents Confinés Avec Recirculation " Thèse de Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, Juillet.
- Warsi,Z.U.A., 1992, "Fluid Dynamics - Theoretical and Computational Approaches" CRC Press. Inc.

## AGRADECIMENTO

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização do presente trabalho.

## ABSTRACT

In this work, a numerical simulation for incompressible turbulent flow through a circular pipe is presented. Two different turbulence models are tested: the Standard  $\kappa$ - $\varepsilon$  Model and the Algebraic Stress Model. Predictions for the velocity average component  $U$ , turbulence kinetic energy  $\kappa$  and the Reynolds shear stress  $\overline{u'v'}$  are compared with available experimental data. The results obtained with both models are satisfactory, with the  $\kappa$ - $\varepsilon$  model showing a slight closer agreement the experimental data.



# THE ASYMPTOTIC STRUCTURE OF THE TURBULENT BOUNDARY LAYER WHEN SUBJECT TO AN INTERACTING SHOCK-WAVE

Guilherme S. Terra§, Jian Su† and Atila P. Silva Freire§

§Mechanical Engineering Program, COPPE/UFRJ,  
C.P. 68503, 21945-970, Rio de Janeiro, Brazil

†Department of Mechanical and Materials Engineering,  
Instituto Militar de Engenharia, 22290-270, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

## ABSTRACT

*The purpose of this work is to apply Kaplun limits to the equations of motion in order to clearly identify the asymptotic structure of the interaction region of a turbulent boundary layer subject to an impinging shock wave. With these results, a simplified theory is developed which is capable of completely describing the flow in the defect region, as well as, in the near wall regions. The theory, as advanced, avoids the specification of a turbulence model, using asymptotic arguments for the construction of a wall solution. The defect layer is modelled by an inviscid set of equations that is numerically solved through a finite difference code. The theoretical results include the prediction of the skin-friction coefficient. All results obtained by the above procedure are compared with a full Navier-Stokes code and with the experimental data of Sawyer and Long. The full N-S code uses a finite difference procedure based on explicit scheme of Bralovskaya. In the numerical simulation, the turbulent shear stresses are evaluated through the algebraic model of Cebeci-Smith and the half-equation differential model of Johnson and King. Both the results of simplified theory and the full Navier-Stokes equations with turbulence models compare favorably with experimental data.*

## 1. INTRODUCTION

The interaction of a shock-wave with a turbulent boundary layer is a very complex phenomenon. The steep pressure gradient imposed to the boundary layer by the shock-wave completely breaks down the hypotheses that apply to the classical two-deck structure of the turbulent boundary layer, promoting an unbalance in the relative order of magnitude of the terms in the equations of motion that seems to report the problem to the Euler equations. Indeed, the strong longitudinal pressure gradients dominate the Reynolds shear stresses for most of the defect region, restricting the influence of the latter to a small region close to the wall. Thus, the interaction problem seems to be an inviscid one, even at regions close to the wall.

The purpose of this work is to apply Kaplun limits to the equations of motion in order to clearly identify the asymptotic structure of the flow in the interaction region. With these results, a simplified theory is developed which is capable of completely describing the flow in the defect region, as well as, in the near wall regions. The theory, as advanced, avoids the specification of a turbulence model, using asymptotic arguments for the construction of a wall solution. The defect layer is modelled by an inviscid set of equations that is numerically solved through a finite difference code. The theoretical results include the prediction of the skin-friction coefficient. All results obtained by the above procedure are compared with a full Navier-Stokes code and with the experimental data of Sawyer and Long(1982). The full N-S code uses a finite difference procedure based on the explicit scheme of Bralovskaya(1965). In the numerical simulation, the turbulent shear stresses are evaluated through the algebraic model of Cebeci-Smith(1970) and the half-equation differential model of Johnson and King(1985).

The simplified model is an advance to the previous asymptotic analyses of the problem by Melnik and Grossmann(1974), Adamson and Feo(1975), Messiter(1980) and Liou and Adamson(1980). In these classical works, the matched asymptotic expansion method was used to develop specific theories for specific values of a small parameter that relates the velocity change across the shock wave with the velocity change across the boundary layer. Depending on the order of magnitude of this small parameter, four cases were identified for study. In all cases, particular solutions were proposed which could not be extended to the other situations. The theory here presented treats the two relevant small parameters of the problem in a completely independent manner, giving an asymptotic description of the flow field that can be reduced to all those derived by the previous authors. In particular, the present theory shows how the logarithmic region of the flow is affected by the foot of the shock, giving rise to a new asymptotic structure for the turbulent boundary layer in the interaction region.

## 2. KAPLUN LIMITS

The asymptotic analysis to be carried out here is based on the single limit concept of Kaplun(1967). The definition of Kaplun of equivalent in the limit determines some formal properties of the equations of motion which can be used, together with the Ansatz about domains of validity, to determine the actual domains of validity of the equations.

Before considering the interaction problem, we will first review some basic concepts on perturbation techniques. The contents of this section is based primarily on the works of Kaplun(1967), of Lagerstrom and Casten(1972) and of Silva Freire and Hirata(1990).

The topology on the collection of order classes used here is introduced in Meyer(1967).

The essential idea of  $\eta$ -limit process is to study the limit as  $\epsilon \rightarrow 0$  not for fixed  $x$  near a singularity point  $x_d$ , but for  $x$  tending to  $x_d$  in a definite relationship to  $\epsilon$  specified by a stretching function  $\eta(\epsilon)$ . Taking without any loss of generality  $x_d = 0$ , we define

$$x_\eta = \frac{x}{\eta(\epsilon)}, \quad G(x_\eta, \epsilon) = F(x; \epsilon) \quad (2.1)$$

with  $\eta(\epsilon)$  a function defined in  $\Xi$  (= space of all positive continuous functions on  $(0, 1]$ ) and  $\epsilon \in (0, 1]$ .

**Definition 1 (Meyer, 1967).** If the function

$$G(x_\eta; +0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x_\eta; \epsilon)$$

exists uniformly on  $\{x_\eta / |x_\eta| > 0\}$ ; then we define  $\lim_\eta F(x; \epsilon) = G(x_\eta, +0)$ .

Transformations (2.1) and the above definition establish to every order of  $\eta$  a correspondence original equation  $\xrightarrow{\lim_\eta}$  associated equation, on that subset of  $\Xi$  for which the associated equation exists (Kaplun(1967), Silva Freire and Hirata(1990)). The resulting set of associated equations is referred to by Kaplun(1967) as the "splitting" of the original differential equations. The splitting must be seen as a formal property of the equation obtained through a "formal" passage of the  $\eta$ -limits process.

**Definition 2.** The formal limit domain of an associated equation  $E$  is the set of orders  $\epsilon$  such that the  $\eta$ -limit process applied to the original equation yields  $E$ .

**Definition 3.** Two equations  $E_1$  and  $E_2$  are said to be equivalent in the limit for a given limit process,  $\lim_\eta$ , and to a given order,  $\delta$ , if

$$\frac{E_1(x_\eta, \epsilon) - E_2(x_\eta, \epsilon)}{\delta} \rightarrow 0, \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0.$$

**Definition 4 (of formal domain of validity).** The formal domain of validity to order  $\delta$  of an equation  $E$  of formal limit domain  $D$  is the set  $D_0 = D \cup D_i$  where  $D_i$  are the formal limit domains of all equations  $E_i$  such that  $E$  and  $E_i$  are equivalent in  $D_i$  to order  $\delta$ .

To relate the formal properties of equations to the actual problem of determining the uniform domain of validity of solutions, Kaplun (1967) advanced two assertions, the Axiom of Existence and the Ansatz about domains of validity. These assertions constitute primitive and unverifiable assumptions of perturbation theory.

**Axiom of existence (Kaplun 1967).** If equations  $E_1$  and  $E_2$  are equivalent in the limit to the order  $\delta$  for a certain region, then given a solution  $S_1$  of  $E_1$  which lies in the region of equivalence of  $E_1$  and  $E_2$ , there exists a solution  $S_2$  of  $E_2$  such that as  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $|(S_1 - S_2)/\delta| \rightarrow 0$ , in the region of equivalence of  $E_1$  and  $E_2$ .

To this axiom, there corresponds an Ansatz, namely that there exists a solution  $S_1$  of  $E_1$  which lies in the region of equivalence of  $E_1$  and  $E_2$ . More explicitly, we write:

**Ansatz (Kaplun, 1967).** An equation with a given formal domain of validity  $D$  has a solution whose actual

domain of validity corresponds to  $D$ .

The word "corresponds to" in the Ansatz was assumed by Kaplun to actually mean "is equal to".

### 3. EQUATIONS AND ASYMPTOTIC HYPOTHESES

In this section, the two-dimensional Navier-Stokes equations of mean motion for a compressible fluid are introduced using the mass-weighted-averaging procedure. The continuity and the momentum equations can be written in the following non dimensional form:

a) continuity

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0, \quad (3.1)$$

b) momentum

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\bar{\rho} u'_i u'_j + \frac{1}{R} \tau_{ij} \right), \quad (3.2)$$

where the stress tensor  $\tau_{ij}$  is given by

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.3)$$

These equations must be complemented by two extra equations: the energy and the state equations. The energy equations is here written in the form of a constant stagnation enthalpy equation. Hence, it follows that

c) energy equation

$$a^2 = \frac{1}{2}(\gamma + 1) - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\tilde{u}_i \tilde{u}_i, \quad a = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho}}, \quad (3.4)$$

d) state equation

$$\bar{p} = \bar{\rho} \bar{T}. \quad (3.5)$$

In the above equations,  $x$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $t$  and  $\rho$  have their classical meaning,  $\lambda$  is the bulk viscosity ( $= -2/3\mu$ ),  $\mu$  is the viscosity and  $\delta_{ij}$  the Kronecker delta. The non-dimensional velocities, pressure, temperature and density are all referred to their critical values just outside the boundary layer and ahead of the shock.  $R$  denotes the Reynolds number. The dashes denote turbulent fluctuations; the bars and the tildes denote respectively conventional time averaging and mass-weighted averaging. A summation is understood for repeated indices. In what follows, for the sake of simplicity, the bars and the tildes will be omitted.

The order of magnitude of the turbulent terms in the equations of motion can be estimated through the experimental results of Kistler(1959), of Kistler and Chen(1963) and of Morkovin(1962). These author have shown that the (a)  $u'$ ,  $\rho'$ , and  $t'$  have the same order of magnitude and (b) the root square-mean value of  $p'$  is proportional to  $u'$ . Thus, in view of the above remarks, the scales of fluctuation can be written as

$$\text{ord}(u') = \text{ord}(v') = \text{ord}(\rho') = \text{ord}(t') = \text{ord}(u_\tau),$$

$$\text{ord}(p') = \text{ord}(u_\tau^2),$$

where  $u_\tau$  is the non-dimensional friction velocity.

### 4. THE ASYMPTOTIC STRUCTURE

Our aim is to obtain, in an asymptotic sense, a set of approximated equations for the system of equations (3.4) to

(3.5), that overlap and cover the entire given domain. To do this, we will use the formal properties of the equations according to the definitions in section two, together with the Axiom of Existence and the Ansatz about domains of validity. To find the asymptotic structure of the flow in the interaction region, we consider the following stretching transformations

$$x_{\Delta} = \frac{x}{\Delta(\epsilon)}, \quad y_{\eta} = \frac{y}{\eta(\epsilon)}, \quad \hat{u}_i(x_{\Delta}, y_{\eta}) = u_i(x, y), \quad (4.1)$$

with  $\Delta(\epsilon)$  and  $\eta(\epsilon)$  defined on  $\Xi$ .

Following previous studies of the problem made by Messiter(1980) and Silva Freire(1988), we separate the asymptotic expansions for the solution into a rotational and an irrotational part. As a result, the longitudinal velocity profile can be written as

$$u = 1 + \epsilon u_1(x, y) + u_{\tau} u_2(y), \quad (4.2)$$

where  $u_1$  and  $u_2$  represent respectively the irrotational and the rotational parts of the flow. Substitution of Eqs.(4.1) and (4.2) into the equations of motion, and upon passage of the  $\eta$ -limit process onto the resulting equations, we get:  $x$ -momentum equation:

$\text{ord}(\eta) = 1$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_{\Delta}} (\rho \hat{u}_1 \hat{u}_1) + \frac{\partial}{\partial y_{\eta}} (\rho \hat{u}_1 \hat{v}_1) = -\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x_{\Delta}}, \quad (4.3a)$$

$\text{ord}(u_{\tau}^2) < \text{ord}(\eta) < 1$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_{\Delta}} (\rho \hat{u}_1 \hat{u}_1) + \frac{\partial}{\partial y_{\eta}} (\rho \hat{u}_1 \hat{v}_1) = -\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x_{\Delta}}, \quad (4.3b)$$

$\text{ord}(\eta) = \text{ord}(u_{\tau}^2)$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_{\Delta}} (\rho \hat{u}_1 \hat{u}_1) + \frac{\partial}{\partial y_{\eta}} (\rho \hat{u}_1 \hat{v}_1) = -\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x_{\Delta}} + \frac{\partial}{\partial y_{\eta}} \left( -\overline{\rho \hat{u}'_1 \hat{v}'_1} \right), \quad (4.3c)$$

$\text{ord}(1/Ru_{\tau}) < \text{ord}(\eta) < \text{ord}(u_{\tau}^2)$  :

$$\frac{\partial}{\partial y_{\eta}} \left( -\overline{\rho \hat{u}'_1 \hat{v}'_1} \right) = 0, \quad (4.3d)$$

$\text{ord}(\eta) = \text{ord}(1/Ru_{\tau})$  :

$$\frac{\partial}{\partial y_{\eta}} \left( -\overline{\rho \hat{u}'_1 \hat{v}'_1} \right) + \mu \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial y_{\eta}^2} = 0, \quad (4.3e)$$

$\text{ord}(\eta) < \text{ord}(1/Ru_{\tau})$  :

$$\mu \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial y_{\eta}^2} = 0. \quad (4.3f)$$

The other equations, continuity, energy and state, do not give any contribution to the asymptotic structure. In fact, Silva Freire(1989) has shown that if the full energy equation is considered, and the concepts of section two are applied to the full set of equations, then the overlap domains of the velocity field and of the temperature field coincide. The  $y$ -momentum equation simply imply that

$$\text{ord}(v) = \frac{\eta}{\Delta} \text{ord}(u).$$

The classical two-deck structure of the turbulent bound-

ary layer is then clearly seen from equations (4.3a) to (4.3f).

Note that the two equations, Eqs.(4.3c) and (4.3e) are distinguished in two ways i) they are determined by specific choices of  $\eta$  and ii) one of them or both contain each of the other equations, but neither of them is contained by the other. They are, therefore, "richer" than the others in the sense that, according to definition 4, they have formal domains of validity that cover the entire domain and overlap in some region. These equations are called principal equations. They are obtained by the limit processes indicated above. We call Eqs.(4.3c) and (4.3e) the outer and inner equations respectively. They represent the balance of the inertia and pressure forces with the turbulent terms in the defect region of the boundary layer, and the balance between the turbulent and viscous forces in the wall region. The overlap region determined by

$$D = \{ \eta \mid \text{ord}(1/u_{\tau}R) < \text{ord}(\eta) < \text{ord}(u_{\tau}^2) \}, \quad (4.4)$$

shows a predominance of the turbulent effects. In this region, the classical logarithmic law of the wall is shown to occur. In the vicinity of the shock wave, however, the asymptotic structure above deduced must change. The strong pressure gradient imposed to the boundary layer by the shock wave alters the balance of the terms in the equations of motion, giving rise to a new structure where for most of the boundary layer the problem becomes an inviscid one. The need for the establishment of an inviscid rotational flow model for the description of the interaction has been recognized since Lighthill(1954) proposed his linearized solution for the laminar problem. The result is that all recent theories advanced for the turbulent problem must somehow accommodate the inviscid rotational interaction model without contradicting the features of the turbulent flow. To surmount this difficulty, the theories of Melnik and Grossmann(1974), Adamson and Feo(1975), Messiter(1980) and Liou and Adamson(1980) consider the introduction of a blending region in the interaction region. This new layer must be considered in the solution because the small streamwise scale of the interaction "freezes" the Reynolds stresses in the outer layer, which therefore cannot be matched by the varying Reynolds stresses in the viscous wall layer. The blending layer is thus, ultimately, the responsible for resolving the mismatch in the Reynolds stresses, and for that matter, in the velocity profile, for the flows in the defect and wall regions. The blending layer is, in fact, nothing more than the turbulent region defined by domain (4.3d) and derived by our asymptotic analysis of the problem. Note that this region can only be arrived at by passage of Kaplan limits and use of the concepts of section two. Since the matched asymptotic expansion method works with distinguished limits, it can only derive principal equations, even so, if a correct guessing of the stretching functions is made. The absence of an equation similar to equation (4.3d) in the matched asymptotic method analysis is the main reason for the difficulties this method presents. Likewise, this is the reason why the structure depicted by Eqs. (4.3a) to (4.3f) can deal with the interaction problem. To take into account for the presence of the shock wave, we pass the  $\Delta$  limit process onto Eqs.(4.3a) to (4.3f). The result is:

$\text{ord}(\Delta) = 1$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_{\Delta}} (\rho \hat{u}_1 \hat{u}_1) + \frac{\partial}{\partial y_{\eta}} (\rho \hat{u}_1 \hat{v}_1) = -\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x_{\Delta}}, \quad (4.5a)$$

$\text{ord}(\epsilon/Ru_\tau^3) < \text{ord}(\Delta) < \text{ord}(\epsilon\eta/u_\tau^2)$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_\Delta}(\rho\hat{u}_1\hat{u}_1) + \frac{\partial}{\partial y_\eta}(\rho\hat{u}_1\hat{v}_1) = -\frac{\partial p_1}{\partial x_\Delta}, \quad (4.5b)$$

$\text{ord}(\Delta) = \text{ord}(\epsilon/Ru_\tau^3)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\Delta}(\rho\hat{u}_1\hat{u}_1) + \frac{\partial}{\partial y_\eta}(\rho\hat{u}_1\hat{v}_1) &= -\frac{\partial p_1}{\partial x_\Delta} \\ + \frac{\partial}{\partial y_\eta}(-\overline{\rho\hat{u}_1'\hat{v}_1'}) + \mu \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial y_\eta^2}, \end{aligned} \quad (4.5c)$$

$\text{ord}(\Delta) < \text{ord}(\epsilon/Ru_\tau^3)$  :

$$\mu \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial y_\eta^2} = 0. \quad (4.5d)$$

The change in the asymptotic structure of the flow in the interaction region is noticeable from the above equations. In particular, we note that as the shock is approached, that is, as the order of magnitude of  $\Delta$  increases, the validity domain of the outer principal equation changes until the two principal equations merge at  $(\Delta, \eta) = (\epsilon/(u_\tau^2 R), 1/(u_\tau R))$ . Indeed, as shown by the calculations, at the beginning of the interaction the outer principal equation is positioned at  $(\Delta, \eta) = (\epsilon, u_\tau^2)$ . However, as the order of magnitude of  $\eta$  varies from  $u_\tau^2$  to  $1/u_\tau R$ , this equation moves along the path  $(\epsilon\eta/u_\tau^2, \eta)$  until reaching the point  $(\epsilon/u_\tau^3 R, 1/u_\tau R)$ . The flow structure is then shown to reduce from a classical two deck structure to a one deck structure near to the foot of the shock wave. According to these results, there is a region at the foot of the shock where the full boundary layer equations are recovered. The simplified theory of the next section will be developed on that basis. Fig.1 summons the main results of this section.

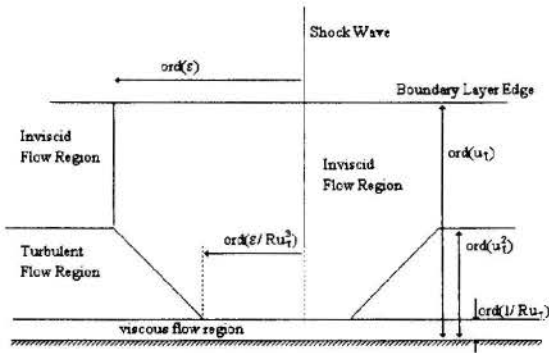


Fig.1 Asymptotic structure for the flow interaction.

## 6. SIMPLIFIED THEORY

In the previous section we showed that in the interaction region, at the foot of the shock, the extent of the inviscid region reaches the viscous region. Thus, if the flow remains attached to the wall, we can in principle match directly the inner limit of the outer region solution with a law of the wall formulation for the inner region. The law of the wall here represents the outer limit of the inner, viscous, region solution. This matching should, according to Eq. (4.5c), occur at point  $(\epsilon/u_\tau^3 R, 1/u_\tau R)$  of the domain  $(\Xi, \Xi)$ . We emphasize that this direct matching is the result of the merging of the outer and viscous regions, as demonstrated by Eqs.(4.5a) to (4.5b). To find an asymptotic solution for the outer region, we must use the inviscid flow equations.

Since the asymptotic expansions for the solution have been separated into a rotational and an irrotational part, we find convenient to replace the continuity equation, Eq.(3.1) by the gas dynamic equation, which can be written as

$$u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (5.1)$$

Substitution of the velocity asymptotic expansions into the above equation and collection of the terms of same order of magnitude gives the approximated equations for the several orders. For the first three orders of approximation we find the following expressions:

$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau)$

$$(\gamma + 1) \left( \phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 \right) \phi_{1xx} - \phi_{1yy} = 0, \quad (5.2)$$

$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau, \epsilon^3)$

$$\begin{aligned} (\gamma + 1) \left( \phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 + \epsilon \frac{\phi_{1x}^2}{2} \right) \phi_{1xx} + \\ (-1 + \epsilon(\gamma - 1)\phi_{1x}) \phi_{1yy} + 2\epsilon \phi_{1y} \phi_{1xy} = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau, \epsilon^3, \epsilon^2 u_\tau, \epsilon u_\tau^2)$

$$\begin{aligned} (\gamma + 1) \left( \phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 + \epsilon \frac{\phi_{1x}^2}{2} + \frac{u_\tau^2}{\epsilon} \frac{u_2^2}{2} + u_\tau u_2 \phi_{1x} \right) \phi_{1xx} + \\ (-1 + \epsilon(\gamma - 1)\phi_{1x} + u_\tau(\gamma - 1)u_2) \phi_{1yy} + \\ 2\epsilon \phi_{1y} \phi_{1xy} + u_\tau u_2 \phi_{1y} = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

In the above equations we have made

$$u_1 = \phi_{1x}, \quad (5.5)$$

and

$$u_2 = \frac{1}{\kappa} \ln y + \frac{P}{\kappa} [1 + \cos \pi y], \quad (5.6)$$

where  $\kappa = 0.41 =$  Von Karman's constant,  $P = 0.55 =$  Coles' wake profile. The logarithmic expression for  $u_2$  represents the nature of the flow in the undisturbed region upstream of the shock. The pressure distribution in the interaction region can be evaluated through the momentum equation. The result is

$$p = 1 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon u_\tau p_2 + \epsilon^3 p_{12} + \epsilon^2 u_\tau p_{21}, \quad (5.7)$$

where  $p_1 = -\gamma \phi_{1x}$ ,  $p_2 = -\gamma u_2 (\phi_{1x} - 1)$ ,  $r_{11} = -\frac{\gamma}{2} (\phi_{1x}^2 - 1)$ ,  $p_{12} = -\frac{\gamma}{2} (\phi_{1y}^2(x, y) - \phi_{1y}^2(-0.5, y))$  and  $p_{21} = -\gamma \int_{-0.5}^x \phi_{1y}(x, y) dx$ .

The boundary conditions for the solution of the system of equations (5.2) to (5.4) are

$$\phi_{1x}[-0.5, y] = 1, \quad y \in [y_c, 1], \quad (5.8a)$$

$$\phi_{1x}[+0.5, y] = -1, \quad y \in [y_c, 1], \quad (5.8b)$$

$$\phi_{1x}[x, 1] = 1, \quad x \in [-0.5, 0], \quad (5.8c)$$

$$\phi_{1x}[x, 1] = -1, \quad x \in (0, 0.5], \quad (5.8d)$$



where the cut-off point  $y_c$  is given by  $\eta = 1/u_\tau R$ . To find the skin-friction coefficient we patch the inner limit of the outer solution with a logarithmic law of the wall formulation. The resulting skin-friction equation can be written as

$$1 + \epsilon \phi_{1x}(x, 0) - \frac{2P}{\kappa} u_\tau = u_\tau \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta}{\delta} + A \right] \left[ 1 + u_{\tau i}(x) \right], \quad (5.9)$$

where  $\delta/\delta = u_\tau R_w$ ,  $A$  = law of the wall constant,  $u_{\tau i}$  = friction velocity in the interaction region and  $\phi_{1x}(x, 0) = \phi_{1x}(x, y_c)$ .

## 6. NUMERICAL ANALYSIS

The results of the above theory were compared with the experimental data of Sawyer and Long(1982) and with the results provided by a full Navier-Stokes code developed specifically for the interaction problem. The N-S code can be run with either an algebraic turbulence model or a half-equation differential model. In this section we will briefly describe some implementation features of both the simplified theory inviscid numerical code and the full N-S numerical code. A brief explanation on the turbulence models will also be given here.

### 6.1. Numerical Analysis of the Simplified Model

As Eq.(5.2) of the simplified model is similar to the transonic small disturbance equation, a mixed finite difference scheme is used to discretise it. That is, centered difference is used in the subsonic region and second-order upwind difference is used in the supersonic region. The algebraic equations that arise from the discretisation of Eq.(5.2) are solved by a successive line over-relaxation(SLOR) technique. This technique solves an implicit system, in tri-diagonal form, for the correction of the solution on each line in the  $y$  direction at a particular iteration level.

### 6.2. Turbulence Models

Two models are used to represent the Reynolds shear stress terms in the full Reynolds averaged Navier-Stokes equations, the algebraic model of Cebeci and Smith and the half equation model of Johnson and King. In the Cebeci-Smith(1970) model, the near wall region is treated with the Prandtl-van Driest mixing length formulation whereas in the outer layer, the turbulent viscosity is represented by the Clauser formulation. The Cebeci-Smith model can be written as:

$$\nu_{ti} = \left( \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right] \kappa y \right)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

$$\nu_{to} = 0.0168 u_\tau \delta_i^+ \Gamma$$

where  $\Gamma$  is Klebanoff's intermittence function.

The Johnson and King(1985) model has a similar two-layer structure:

$$\nu_{ti} = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]^2 \kappa y \sqrt{-\overline{v'v'_m}}$$

$$\nu_{to} = C_0 \times \Gamma.$$

The model constant  $C_0$  is determined iteratively. The nonequilibrium effect of the turbulent boundary layer is taken into account by the following equation for the maximum shear stress:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{a_1}{2u_m L_m} \left\{ 1 - \frac{g}{g_{eq}} + \frac{C_{dif} L_m}{a_1 \delta [0.7 - (y_m/\delta)]} \left| 1 - \sqrt{\frac{\nu_{to}}{\nu_{to,eq}}} \right| \right\}$$

where  $g = (-\overline{u'v'_m})^{-1/2}$  e  $g_{eq} = (-\overline{u'v'_{m,eq}})^{-1/2}$ .

### 6.3. Numerical Analysis of the Full N-S Model

The governing Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for steady two-dimensional flows are solved, in a conservative form, using the finite-difference scheme of Brailovskaya(1965). The Brailovskaya scheme is a two-step explicit centered difference method. The formal accuracy and the stability limits of the scheme are given by Carter(1972). The advantages of the Brailovskaya scheme are that it is a relatively simple algorithm, easily adapted to non-uniform grids, and the two steps have the same form, making it easy to code efficiently. Artificial dissipative terms are added to the discretised finite difference equations to provide stability against spatial oscillations caused by the centered differences. Non-uniform grid spacing is used in both spatial directions. A compressible boundary layer code is used to generate a smooth inflow profile, matched to the experimental data. Experimental data are used to specify the main flow velocity variation. Linear extrapolation is used for the outflow boundary conditions.

## 7. RESULTS AND DISCUSSION

Two of the cases of Sawyer and Long(1982), here identified by 1.3A and 1.4A, were chosen to test the simplified theory and the full Navier-Stokes solver. The flow conditions are given in Table 1.

Table 1. Flow Conditions

flow	$M$	Re
1.3A	1.270	$3.66 \times 10^6$
1.4A	1.370	$3.66 \times 10^6$

Skin-friction coefficient predictions calculated by the simplified theory and the full Navier-Stokes solver are shown in Figs. 2 and 3, together with the experimental data of Sawyer and Long(1982).

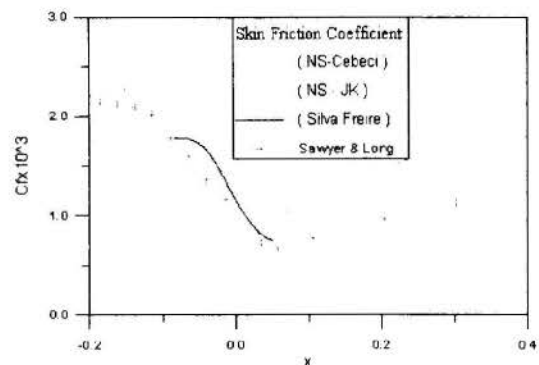


Fig.2 Skin friction coefficient for flow case 1.3A

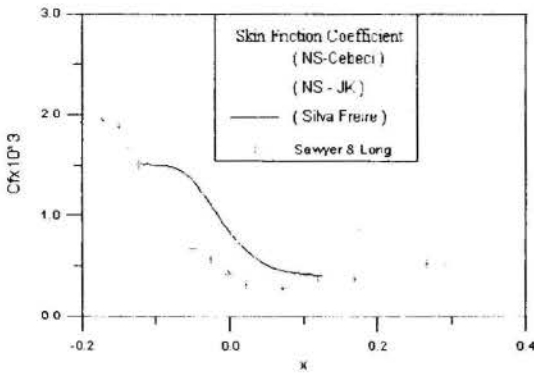


Fig.3 Skin friction coefficient for flow case 1.4A

A 155 (streamwise) by 145 (transversal) grid was used in the finite difference solution of the simplified model (Eq.5-2). Four hundred iterations were necessary to reach a converged solution. This took 4 minutes of computational time in a PC 486DX2-66, with 8M RAM. A 93( $x$ -wise) by 55( $y$ -wise) grid was used to find the finite difference solution of the full Navier-Stokes equations. In this case, the calculations needed 2000 iterations to reach a time independent solution, with 200 minutes of computational time being used in the same PC for the Cebeci-Smith model. About 50% more of computational time was spent by the Johnson and King model. We estimate a factor of about 50 times between the computational time used by the simplified model and the full Navier-Stokes equations, with a much higher resolution been achieved by the simplified model.

As one can see in the two figures above, both the simplified theory and the full Navier-Stokes equations with the two different turbulent models compare favorably with the experimental results of Sawyer and Long(1982). Considering the computational costs of both approaches, we conclude that the simplified theory proposed in this work provides a much more economic and efficient approach to the turbulent boundary layer/shock wave interaction problem.

One should also observe that the specification of a turbulence model is not required by the simplified theory. Thus, the numerical results have confirmed that the asymptotic structure suggested in this work for the main interaction region the flow is predominantly non-viscous.

## 8. CONCLUSION

In the present work, a complete analysis of the interaction problem has been performed with emphasis on the development of a comprehensive theory for the description of the asymptotic structure of the flow. The application of Kaplun limits to the equations of motion has shown the flow to attain an one deck structure, which is distinct from those of other authors but consistent with the experimental data of Sawyer and Long(1982) and with the general knowledge of the problem we have. The theory, as presented here, can formally explain how an inviscid flow region is formed at the foot of the shock wave, resulting from the disappearance of the fully turbulent region. The formal asymptotic results are then used to develop a simplified theory which is successfully tested against the data of Sawyer and Long and a full Navier-Stokes formulation of the problem. In particular, the predictions of the skin-friction are quite good.

Acknowledgments. This work has been financially supported by CNPq through grants No. 350183/93-7. JS is

grateful to CNPq for a research fellowship through grant No. 301476/92-6. In the course of this research GST benefited from a CAPES scholarship.

## 9. REFERENCES

- Adamson, T.C.Jr. and Feo, A.(1975). Interaction between a shock wave and a turbulent boundary layer at transonic speeds, *SIAM J Appl Math*, 29, pp. 121-145.
- Brailovskaya, I.Yu.(1965). A finite-difference scheme for numerical solution of the two-dimensional non-stationary Navier-Stokes equations for a compressible flow, *Soviet Physics-Doklady*, vol. 10, no. 2, pp. 107-110.
- Cebeci, T., Smith, A.M.O. and Mosinski, G.(1970). Calculation of compressible adiabatic turbulent boundary layers, *AIAA Journal*, vol 8, no. 11, pp. 1974-1982.
- Johnson, D.A. and King, L.S.(1985). A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers, *AIAA J.*, vol 23 no.11, pp. 1684-1692.
- Kaplun, S.(1967). *Fluid mechanics and singular perturbation*, Academic Press New York.
- Kistler, A.L.(1959). Fluctuation measurements in a supersonic turbulent boundary layer, *Phys Fluids*, 2, pp.290-296.
- Kistler, A.L. and Chen, W.S.(1963). A fluctuating pressure field in a supersonic turbulent boundary layer, *JFM*, 16, pp. 41-64.
- Lagerstrom, P.A. and Casten, R.G.(1972). Basic concepts underlying singular perturbation techniques, *SIAM Review*, 14, pp. 63-120.
- Liou, M.S. e Adamson, T.C.(1980). Interaction between a normal shock wave and a turbulent boundary layer at high transonic speeds. Part II: Wall shear stress, *ZaMP* 31, pp. 227-246.
- Melnik, R.E. e Grossmann, B.(1974). Analysis of the interaction of a weak normal shock wave with a turbulent boundary layer, *AIAA paper No. 74-598*.
- Messiter, A.F.(1980). Interaction between a normal shock wave and a turbulent boundary layer at high transonic speeds. Part I: Pressure distribution, *ZaMP* 31, pp. 204-227.
- Meyer, R.E.(1967). On the approximation of double limits by single limits and the Kaplun extension theorem, *J. Inst. Maths. Applics.*, Vol. 3, pp. 245-249.
- Morkovin, M.V.(1962). Effects of compressibility on turbulent flows, *Int Sym on "Mecanique de la turbulence"*, pp.367-380.
- Sawyer, W.G. e Long, C.J.(1982). A study of normal shock-wave turbulent boundary-layer interactions at Mach numbers of 1.3, 1.4 and 1.5., Royal Aircraft Establishment, Technical Report No 82099.
- Silva Freire, A.P.(1988). An asymptotic approach for shock-wave/trans-pired turbulent boundary layer interaction, *ZaMP*, 39, pp. 478-503.
- Silva Freire, A.P.(1989). A detailed review of a solution procedure for shock-wave/turbulent boundary layer interaction problems, *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, 4, pp. 210-246.
- Silva Freire, A.P. and Hirata, M.H.(1990). Approximate solutions to singular perturbation problems: the intermediate variable technique, *J. Math. Analysis and Appl.*, Vol. 145, pp. 245-253.



## A Consistent Asymptotic Solution for the K and Epsilon Equations for Transpired Boundary Layer Flows

by Mila R. Avelino, Jian Su † and Atila P. Silva Freire

Mechanical Engineering Program (PEMCOPE/UFRJ),  
C.P. 68503, 21945-970 - Rio de Janeiro - Brazil

†Department of Mechanical and Material Engineering  
Instituto Militar de Engenharia, 22290-270, Rio de Janeiro, RJ, Brasil



### ABSTRACT

*The present work uses asymptotic techniques to find analytical solutions for the velocity profile, the turbulent kinetic energy and the dissipation rate by mass unit. This higher order solutions have an explicit dependence on the transpiration rate and can be used as wall functions for the specification of boundary conditions in the fully turbulent region of the flow. The second order solutions show that  $K$  has a  $(\log y)$  behaviour whereas  $\epsilon$  has a  $(\log y)/y$  behaviour. All results are validated against the test case data of Andersen (1972).*

### 1. INTRODUCTION

A classical mean of controlling the properties of turbulent boundary layers is the promotion of transpiration at the wall. Through this artifice, momentum and heat can be added to the flow so that it can be made to conform to some desired properties. For example, one may want to thicken the boundary layer, reduce the skin-friction, inhibit the transfer of heat at the wall, or even avoid separation. All these flow features can easily be achieved by the injection or suction of fluid at the wall at controlled rates.

The perspectives opened by this mean of controlling the properties of boundary layers were soon realized, motivating a host of experimental and theoretical works on the subject. The expectation one has, therefore, is that, by now, the subject would have been exhausted. Unfortunately, this is not the case. The analytical treatment of problems that combine compressibility effects, transfer of heat and transpiration, for instance, is extremely complex, having only recently been carried out (Silva Freire et alii(1995)).

Nevertheless, the progress achieved in the description of turbulent transpired flows in the last forty years was remarkable. Since the early studies on the subject by Mickley(1954), passing by the very extensive experimental and theoretical works on incompressible flows by the Stanford Heat and Mass Transfer Group, and on compressible flows by the Cambridge University Aerodynamics Group, much has been accomplished. The roles of transfer of heat, adverse and favorable pressure gradients, roughness, curvature, tridimensionality, compressibility, all have been studied in connection with transpired flow. As a consequence, some results have become firmly established. The existence of a logarithmic law of the wall for transpired flows is today an undisputed fact. Likewise, several algebraic turbulent models have been developed which provide good numerical predictions for some flow conditions.

As a rule, most of the works published so far are concerned with mean velocity and temperature profiles, and with global parameters such as the skin-friction coefficient

and the Stanton number. Some works can be found in literature which deal with two-equation differential turbulent models (Rodi(1982), Wilcox(1988)). The results, however, are not promising. In any case, the development of a more general differential model for the portrait of transpired flows would be desired.

The purpose of the present work is to seek closed analytical solutions for the velocity,  $u$ , turbulent kinetic energy,  $K$ , and energy dissipation rate per unit mass,  $\epsilon$ , in a near wall region for incompressible transpired turbulent boundary layer flows. Since the standard  $K$ - $\epsilon$  model does not apply to flows or flow regions where the local Reynolds number is small, it cannot be applied to the viscous near wall region. This region must be bridged by universal wall functions. The present work aims at finding high order solution for  $u$ ,  $K$  and  $\epsilon$  that have an explicit dependence on the transpiration and can be used as wall functions. These new solutions should greatly improve the performance of the  $K$ - $\epsilon$  model for transpired flows, in particular, for flows with strong transpiration rates.

Perturbation techniques, which include some scaling arguments, and a beforehand hypothesis about the nature of the  $K$  and the  $\epsilon$  expansions, are used to find local approximated equations, that are then analytically solved. Important results found here are the second order solutions which show that, if appropriate similarity parameters are used, the turbulent kinetic energy has a  $(\log y)$  behaviour whereas the dissipation rate has a  $(\log y)/y$  behaviour. All results are compared with the experimental data of Andersen et alii(1972) and with algebraic turbulence model formulations. The agreement shown by the theory is remarkable.

### 2. THE EQUATIONS OF MOTION

We will now present the governing equations of the standard  $K$ - $\epsilon$  formulation. Following the regular procedure, we denote the mean parts of the velocity and pressure fields by  $u_i$  and

$p$  respectively. The fluctuation of the turbulent quantities is denoted by the dashes. All lengths and velocities are non-dimensionalized by typical quantities of the external flow. Then, the equations of motion for incompressible flows can be cast as

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}. \quad (2)$$

In writing (1) we have neglected the viscous terms. Here,  $\rho$  is the density of the fluid. The Reynolds stress,  $\tau_{ij}$ , is

$$\tau_{ij} = -\langle u_i' u_j' \rangle, \quad (3)$$

where the Dirac brackets denote time averaging. A summation is understood for repeated subscripts. The standard  $K$ - $\epsilon$  model relates the components of the Reynolds stress tensor to the mean flow gradients with the aid of the eddy viscosity concept

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} + \nu_t d_{ij}. \quad (4)$$

Here  $\delta_{ij}$  is the Kronecker delta;  $K$ , the turbulent kinetic energy is given by

$$K = \frac{\langle u_i' u_i' \rangle}{2}, \quad (5)$$

$\nu_t$  is the eddy viscosity, and  $d_{ij}$  is the velocity strain,

$$d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (6)$$

The dissipation rate of turbulent kinetic energy,  $\epsilon$ , is given by

$$\epsilon = \nu \langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \rangle, \quad (7)$$

where  $\nu$  is the kinematic viscosity of the fluid. In the  $K$ - $\epsilon$  model, dimensional arguments are invoked to give

$$\nu_t = c_\nu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (8)$$

where  $c_\nu$  is a model constant. The turbulence parameters,  $K$  and  $\epsilon$ , are determined through the following transport equations

$$\frac{DK}{Dt} = P - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right), \quad (9)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} P - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K}, \quad (10)$$

$$P = \nu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (11)$$

where all the  $c$ 's and  $\sigma$ 's are model constants. Typical values of the empirical constants are shown in Table 1.

Table 1. Model Constants

$c_\nu$	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	$\sigma_K$	$\sigma_\epsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.30

Clearly, the system of equations (1) to (11) constitute a closed system. The complete definition of the mathematical problem depends now only on the appropriate specification of the boundary conditions. At the wall, this is normally made with the help of wall functions. For the streamwise velocity component,  $u$ , for  $K$  and for  $\epsilon$  we normally write

$$\frac{u_1}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln(E y_1^+), \quad y_1^+ = \frac{y_1 u_\tau}{\nu}, \quad (12)$$

$$K = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\nu}}, \quad (13)$$

$$\epsilon = \frac{u_\tau^3}{k y_1}, \quad (14)$$

where  $u_1$  and  $y_1$  should be evaluated in the fully turbulent region of the flow,  $k$  is the Von Karman constant ( $=0.41$ ),  $E$  is the linear coefficient of the law of the wall ( $=9$ ) and  $u_\tau$  is the friction velocity. The above equations are derived upon the assumption of local equilibrium condition and are valid for solid surface flows. In the next section we will extend these expressions to our case of interest.

### 3. ASYMPTOTIC ANALYSIS

Since the wall function formulation is supposed to hold in the fully turbulent region, we will solve the equations of motion, Eqs. (1) to (11), in a specific region of the flow. The region where the turbulent effects dominate is defined by the domain

$$D = \{ \eta / \text{ord}(1/u_\tau R) < \text{ord}(\eta) < \text{ord}(u_\tau^2) \}, \quad (15)$$

where  $\eta$  denotes the region of validity of the approximated equations, and  $R$  denotes the Reynolds number. For more details concerning the nature of the stretching function  $\eta$  the reader is referred to Kaplun (1967).

This result can be easily arrived at by applying Kaplun limits to the equations of motion, Eqs. (1) and (2). Indeed, Silva Freire and Hirata(1990) and Silva Freire and Cruz(1995) have shown that the turbulent boundary layer has a two-deck asymptotic structure, with two principal equations standing out at points  $\text{ord}(\eta) = \text{ord}(u_\tau^2)$  and  $\text{ord}(\eta) = \text{ord}(1/u_\tau R)$  of the flow domain. The fully turbulent region, determined by Eq.(15), is just the overlap domain of the two principal



equations. For more details on Kaplun limits and the asymptotic structure of the turbulent boundary layer, the reader is referred to the two above mentioned works. Furthermore, the important result is that the presence of transpiration does not alter in any way domain (15). That means we should work with approximate equations that hold in that domain. Thus, passing the  $\eta$ -limit with  $ord(\eta) = ord(u_\tau^2)$  onto Eqs.(9) and (10), we get

$$v_w \frac{\partial K}{\partial y} = \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y} \right), \quad (16)$$

$$v_w \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = c_\epsilon \frac{\epsilon}{K} \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_\epsilon \frac{\epsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right). \quad (17)$$

These are the intermediate equations, in the sense of Kaplun, that hold in the fully turbulent region. The wall functions for  $u$ ,  $K$  and  $\epsilon$  will be constructed on their basis. To find a solution to Eqs.(16) and (17), we will consider the velocity field solution as known. Early studies by Stevenson (1963, 1964) and by the Stanford Heat and Mass Transfer Group, and more recent ones by Silva Freire (1988a, 1988b) have shown the velocity solution to be of the form

$$u = \frac{u_\tau}{k} \left( \ln y^+ + A_0 \right) + \frac{v_w}{4k^2} \left( \ln y^+ + A_0 \right)^2, \quad (18)$$

where  $k$  is the Von Karman constant and  $A_0$  is a parameter that varies with the transpiration (Silva Freire 1988a). This equation has been vastly tested over the last third years, being today of undisputed validity. It can be arrived at by either dimensional arguments or mathematical deductions that use simple algebraic turbulence models. An extension of this equation for compressible flow can readily be obtained if a Van Driest transformation is applied to it (Silva Freire(1988b)). The asymptotic expansions for  $K$  and for  $\epsilon$  are given by

$$K = u_\tau^2 K_1 + u_\tau v_w K_2 + v_w^2 K_3, \quad (19)$$

$$\epsilon = u_\tau^3 \epsilon_1 + u_\tau^2 v_w \epsilon_2 + u_\tau v_w^2 \epsilon_3. \quad (20)$$

To find the first and second order of approximate equations, we substitute Eqs (18), (19) and (20) onto Eqs. (16) and (17) and collect the terms of same order. The result is

a) first order equations:

$$0 = \frac{1}{k^2 y^2} \frac{K_1^2}{\epsilon_1} - \epsilon_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sigma_K} \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial K_1}{\partial y} \right), \quad (21)$$

$$0 = c_\mu c_{\epsilon 1} \frac{K_1}{k^2 y^2} - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K_1} + \frac{c_\mu}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial y} \right). \quad (22)$$

b) second order equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1}{\partial y} &= \frac{K^2}{\epsilon_1} \frac{1}{k^3 y^2} \left( \ln y^+ + A \right) + \\ &\frac{1}{\sigma_K} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon_1} \left( 2K_1 K_2 - K_1^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \frac{\partial K_1}{\partial y} \right) + \\ &\frac{1}{k^2 y^2} \frac{1}{\epsilon_1} \left( 2K_1 K_2 - K_1^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) - \epsilon_2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial y} &= c_\mu c_{\epsilon 1} \left( \frac{K_2}{k^2 y^2} + \frac{K_1}{k^3 y^2} (\ln y^+ + A) \right) - \\ &c_{\epsilon 2} \frac{1}{K_1} \left( 2\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \frac{K_2}{K_1} \right) + \\ &\frac{c_\mu}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial \epsilon_2}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon_1} \left( 2K_1 K_2 - K_1^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \frac{\partial K_1}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

The solution of the above equations is:

a) first order solution

$$K_1 = A, \quad (25)$$

$$\epsilon_1 = \frac{B}{ky}; \quad (26)$$

b) second order solution

$$K_2 = C \ln y^+ + D, \quad (27)$$

$$\epsilon_2 = E \frac{\ln y^+}{y} + \frac{F}{y}; \quad (28)$$

where  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  and  $F$  are the constants

$$A = \frac{\sigma_\epsilon}{k^2} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1}) = 3.7, \quad (29)$$

$$B = \frac{\sigma_\epsilon \sqrt{c_\mu}}{k^2} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1}) = 1, \quad (30)$$

$$C = \frac{\sigma_\epsilon}{k^3} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1}) = 9, \quad (31)$$

$$D = \frac{c_\epsilon}{k^3} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1}) \left[ \frac{17}{2} - \frac{k^2}{\sqrt{c_\mu} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1})} \right] = 66, \quad (32)$$

$$E = \frac{3}{2} \frac{\sigma_\epsilon \sqrt{c_\mu}}{k^4} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1}) = 10, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{5}{2} \frac{\sigma_\epsilon \sqrt{c_\mu}}{k^4} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1}) + \\ &\frac{(17 - \sigma_\epsilon)}{2\sigma_\epsilon \sqrt{c_\mu} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1})} = 65. \end{aligned} \quad (34)$$

Please note that the values of these constants were determined exactly from the standard  $K-\epsilon$  model constants, which are really not supposed to be universal. Thus, proper values for  $A, B, C, D, E$  and  $F$  should, necessarily, be determined by comparison with the experimental data. In the next two sections we will proceed to the experimental validation of Eqs.(19) and (20). This will be made in two ways. Firstly, we will verify if the experimental data conform to log-law expressions for  $K$  and for  $\epsilon$  such as those given by Eqs.(19) and (20). Secondly, a numerical implementation of these equations will be made for the prediction of velocity profiles and the skin-friction coefficient. The numerical results will also be compared with results obtained through algebraic turbulence models.

#### 4. EXPERIMENTAL AND NUMERICAL VALIDATION

From a full consideration of more than 200 boundary layer developments with transpiration, Squire (1980) recommends as basic test cases the flows measured by Andersen et al (1972). His data are the only ones available where redundant measurements of the skin-friction coefficient were made. The general experimental conditions are shown in Table 2.

Table 2. Experimental Flow Conditions.

RUN	$U$ [ft/s]	$F$	$m$
102171-1	21.33	0.004	-0.15
101371-2	21.32	0.002	-0.15
121671-3	21.29	-0.002	-0.15

In Table 2,  $F$  stands for injection rate;  $m$  is the exponential coefficient in the adverse pressure gradient term ( $U \propto x^m$ ).

To verify the log form of  $K$ , we re-write Eq.(19) as

$$\Gamma = C \ln y^+ + D, \quad (35)$$

where

$$\Gamma = \frac{K - u_\tau^2 A}{u_\tau v_w}$$

The experimental results plotted as  $\Gamma$  against  $y^+$  are shown in Figure 1. The presence of a logarithmic region is illustrated by the fitted straight line, thus validating the form found for equation (36). The experimentally determined equation for  $K$  than gives

$$K = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} + u_\tau v_w (C_{exp} \ln y^+ + D_{exp}), \quad (36)$$

where the constant  $C_{exp} = 20$  and  $D_{exp} = 64$ .

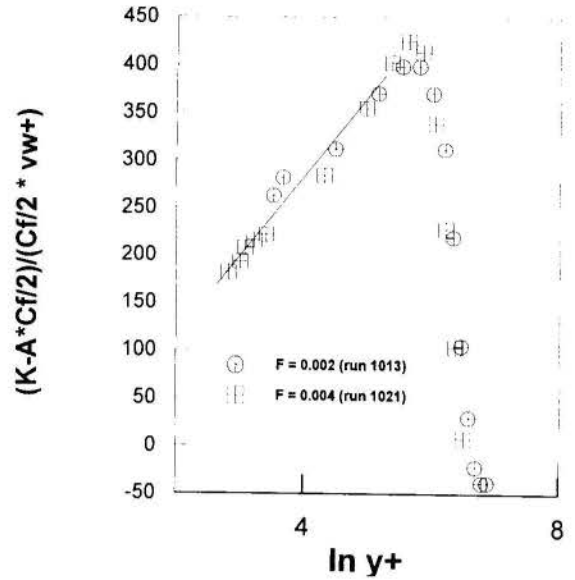


Figure 1. Similarity profiles for  $K$ .

It is no surprise that the assessed experimental values are different from the theoretical ones. Indeed, the theoretical values were, as mentioned before, evaluated according to the classical  $K-\epsilon$  model constants and these, in principal are not supposed to hold for transpirated flows. Since  $\epsilon$  is not a directly measurable quantity, its experimental assessment is difficult to be made. In fact, it can only be made indirectly through equation

$$\epsilon = C_D \frac{K^{3/2}}{l_c} \quad (37)$$

where the constant  $C_D$  a model constant. This procedure is always uncertain, making it difficult to draw any firm conclusion about the values of the constantes  $E$  and  $F$ . In any case, the predicted behaviour of  $\epsilon$  is shown in Figure 2.

The numerical implementation of Eqs.(18) to (20) will be made with the help of the computer code CAST (Computer Aided simulation of Turbulence). This program is similar in structure to other existing fluid flow prediction schemes such as TEACH and TEAM. It is thus a conservative finite-volume method in primitive variables. Distinctions from those codes arise in the co-located variable arrangement, the discretization scheme, the solution algorithms for the linear equations systems resulting from the discretization, and in the pressure coupling which is adopted to the co-located variable storage. Since the CAST (Peric and Schreuer (1989)) code uses the wall function method, updating the program consisted basically in changing the wall functions. Figures 3 and 4 show the velocity and skin-friction predictions compared with the experimental data of Andersen et al (1972), with the standard  $K-\epsilon$  model provided by CAST, and with the algebraic turbulence model predictions of other authors. For details on the algebraic models the reader is referred to Avelino et al (1995). As can be seen, the performance of the present formulation is good for suction data of Andersen (1972). Results are now being run for flow with blowing

which will be published soon.

## 5. FINAL REMARKS

In the present paper, a consistent asymptotic solution of the K-e model is given for incompressible transpired turbulent boundary layers. This solution unveils, for the first time, the logarithmic behaviour of K and of e in the fully turbulent region of the flow. A numerical implementation of the new expressions shows that they conform well to the experimental data, giving good predictions for the velocity profile and the skin-friction equation. Acknowledgements. This work was financially supported by the CNPq through grant No 350183/93-7. The authors MRA and JS are grateful to the CNPq for the award of scholarships.

## REFERENCES

Andersen P. S., Kays W. M. and Moffat R. J., "Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: An Experimental Study of the Fluid Mechanics for adverse free-stream pressure gradients", Report No. HMT-15, Thermosciences Division, Depto. of Mech. Engrg., Stanford university., (1972).

Cruz, D. O. A. e Silva Freire, A. P., "The asymptotic Structure of The Thermal Turbulent Boundary Layer Near a Separation Point". Bebell House Inc. Publishers Mickley H. S. and Davis R. S., "Momentum Transfer for flow over a flat plate with blowing" NACA TN 4017 (1957)

Peric, M. e Schreurer, G., "CAST - A Finit Volume Method for Predicting Two-Dimensional Flow and Heat Transfer Phenomena", GRS-Technische Notiz Srr-89-01 Sep(1989).

Rodi W. and Schreurer G. , "Calculation of Heat Transfer in Turbulent Transpired Boundary Layers", Proc. 7th Int. Heat Transfer Conference, Munich, (1982).

Silva Freire, A. P., "An Asymptotic Solution for Transpired Incompressible Turbulent Boundary Layers". Inter. J. Heat Mass Transfer, vol 31, 5 pp. 1011-1021 (1988).

Silva Freire, A. P., "An Extention of the Transpired Skin-Friction Equation to Compressible Turbulent Boundary Layers". Inter. J.Heat Mass Tran., v.31, 11pp.2395-2398(1988).

Silva Freire A. P. e Hirata M. H., "Approximate Solution to Singular Perturbation Problems: The Intermediate Variable Technique", J. of Mathematical Analysis and Applications. Vol 145, (1), 241, (1990).

Silva Freire A. P., Cruz D. O. A. e Pellegrine C. C., "Velocity and Temperature Distribution in Compressible Turbulent Boundary Layers with Heat and Mass Transfer", Inter. J. Heat Mass Transfer. 3 vol.13 pp 2507-2515 (1995).

Squire L. C. "Turbulent Boundary Layers with Suction or Injection", Conference on Data and Computation for Complex Flows, Report of Evaluator, Stanford, (1980).

Stevenson T. N., "A Modified Defect Law for Turbulent Boundary Layers with Suction or Injection", Cranfield College of Aero, Aero Rep. No 170 (1963)

Stevenson T. N., "Experiments on Injection into an Incompressible Turbulent Boundary Layer", Cranfield College of Aero, Aero Rep. No 177 (1963)

Wilcox D. C., "Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models". AIAA J. Vol 26, No 11, pg 1299-1310, 1998

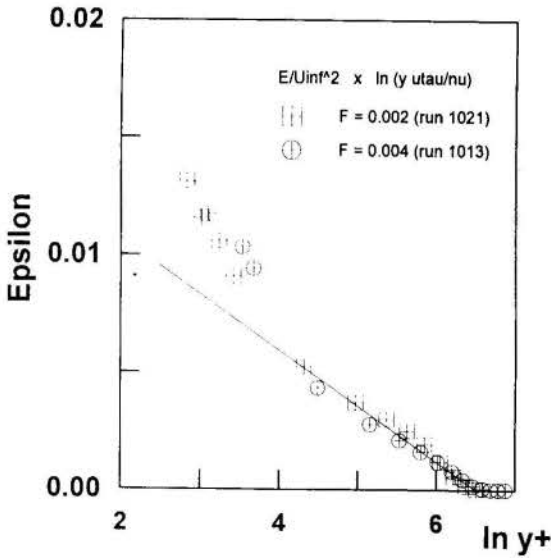


Figure 2. Similarity Profile for  $\epsilon$

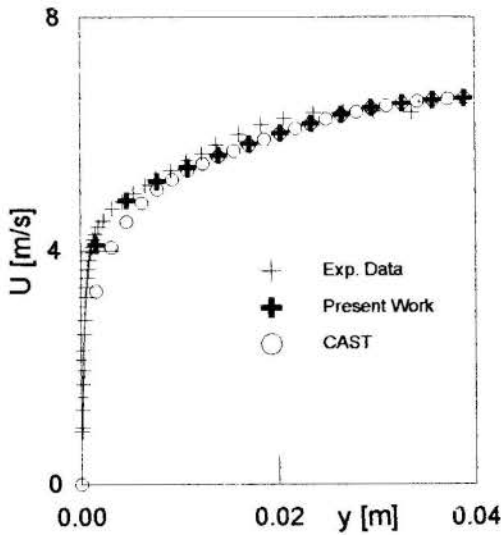


Figure 3. Velocity Profile Predictions (RUN 121671-3,  $x=20$ ).

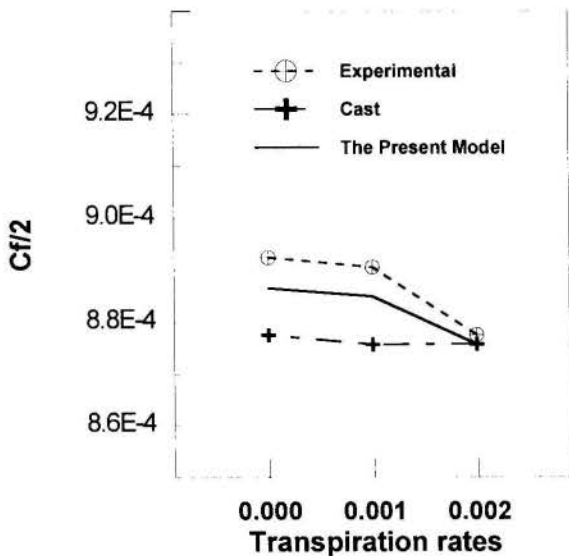


Figure 4. Skin Friction Results.



## TRATAMENTO DA TURBULÊNCIA NA REGIÃO DA PAREDE

Hugo D. Pasinato e Angela O. Nieckele  
Departamento de Engenharia. Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica - PUC/Rio  
22453-900 Rio de Janeiro - RJ - Brasil



### RESUMO

*Apresenta-se neste trabalho um fechamento para a equação da energia cinética turbulenta, junto à um contorno sólido num escoamento de camada limite, com o intuito de fornecer condições de contorno de tipo universais na modelagem de fluxos turbulentos com modelos de tipo  $\kappa$ - $\epsilon$ . O método é testado com o problema clássico de escoamento em um degrau, "backward-facing step", apresentando bons resultados.*

### INTRODUÇÃO

Escoamentos encontrados em aplicações práticas são geralmente turbulentos, sendo portanto tridimensionais e transientes. A solução numérica das equações completas de Navier-Stokes ainda não é viável para aplicações tecnológicas e industriais, devido ao alto custo, espaço de memória e tempo de processamento. Uma alternativa é a utilização de modelos de turbulência, os quais são basicamente de dois tipos: modelos baseados na hipótese de viscosidade turbulenta (Launder e Spalding, 1974) e modelos do tipo tensões de Reynolds (Durbin, 1993). Os primeiros, apesar das muitas críticas negativas por serem considerados muito simplificados, continuam sendo os mais usados por sua simplicidade e capacidade para simular diferentes tipos de escoamentos turbulentos.

A hipótese de viscosidade turbulenta considera que a turbulência numa primeira aproximação poderia ser simulada por uma viscosidade determinada pelas características do escoamento turbulento. O problema principal desta idéia é que funciona relativamente bem nas zonas com altos números de Reynolds e falha junto aos contornos sólidos. Portanto, o sucesso da simulação de um escoamento turbulento, com estes tipos de modelos, depende em grande parte, da forma em que são tratadas as regiões próximas às superfícies sólidas.

Existem duas formas de se tratar as regiões próximas às paredes. A primeira consiste em dividir o domínio de cálculo em duas regiões, na primeira modelos para altos números de Reynolds são adotados, enquanto que na região próxima à parede, o escoamento é modelado através da denominada função da parede proposta originalmente por Patankar e Spalding (1970), porém reavaliada para diferentes situações por diversos autores como Mansur et al. (1989), Lai e So, (1990). A segunda consiste em utilizar modelos de turbulência válidos para toda a faixa de número de Reynolds, permitindo o cálculo do escoamento desde o núcleo até a região da parede onde o número de Reynolds é baixo, são os denominados modelos de turbulência para baixos números de Reynolds (Patel et al., 1984).

Neste trabalho, o escoamento no interior do domínio é determinado baseado em uma viscosidade turbulenta definida pelo modelo de turbulência de duas equações diferenciais  $\kappa$ - $\epsilon$  (energia cinética turbulenta  $\kappa$  e taxa de dissipação da energia cinética turbulenta  $\epsilon$ ) descrito por Launder e Spalding, 1974. Já

para a região próxima à parede é apresentada uma metodologia baseada no uso de uma função de parede modificada, a qual está baseada no perfil de velocidade proposto por Haritonidis (1989). A viscosidade turbulenta é avaliada em função de características do escoamento médio e as condições de contorno para  $\kappa$  e  $\epsilon$  junto à parede, são interpoladas de expressões deduzidas para a subcamada viscosa.

### MODELAMENTO MATEMÁTICO

O escoamento turbulento pode ser modelado utilizando as quantidades médias do escoamento, juntamente com um modelo de turbulência para as tensões de Reynolds. Neste trabalho, as tensões de Reynolds são avaliadas utilizando a aproximação de Boussinesq, sendo a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  avaliada de acordo com a relação de Prandtl-Kolmogorov para o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  para altos números de Reynolds (Launder e Spalding, 1974) como

$$\mu_t = c_\mu \rho \kappa^2 / \epsilon \quad (1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica e  $c_\mu = 0,09$  é uma constante empírica.

As equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear para fluidos Newtonianos, em função das grandezas médias, em regime permanente utilizando o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  são:

$$\text{div}(\rho \bar{u}) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \bar{u} \bar{u}) = \rho \bar{g} - \text{grad } p + \text{div} \{ (\mu + \mu_t) \text{grad } \bar{u} \} + \\ + \text{div} \{ (\mu + \mu_t) [ (\text{grad } \bar{u})^T - 2/3 (\text{div } \bar{u} + \rho \kappa) \underline{\underline{\delta}} ] \} \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\bar{u}$  e  $\bar{g}$  são os vetores velocidade e aceleração da gravidade,  $p$  é a pressão termodinâmica,  $\mu$  é a viscosidade absoluta e  $\underline{\underline{\delta}}$  é a matriz identidade.

As equações de conservação para a energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação são

$$\text{div}(\rho \bar{u} \kappa) = \text{div} \{ (\mu + \mu_t / \sigma_\kappa) \text{grad } \kappa \} + G - \rho \epsilon \quad (4)$$



$$\text{div}(\rho \bar{u} \varepsilon) = \text{div}\{(\mu + \mu_t / \sigma_\varepsilon) \text{grad} \varepsilon\} + \varepsilon / \kappa [c_1 G - c_2 \rho \varepsilon] \quad (5)$$

onde  $\sigma_\kappa$  e  $\sigma_\varepsilon$  são os números de Prandtl de  $\kappa$  e  $\varepsilon$ , respectivamente, e são constantes empíricas, assim como  $c_1$  e  $c_2$ . Os valores recomendados por Launder e Spalding (1974) são:  $\sigma_\kappa = 1,0$ ;  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ;  $c_1 = 1,44$  e  $c_2 = 1,92$ .  $G$  é o termo de geração ou produção de  $\kappa$  sendo definido como

$$G = \mu_t [\text{grad} \bar{u} + (\text{grad} \bar{u})^T] \circ \text{grad} \bar{u} - \frac{2}{3} \rho \kappa \text{div} \bar{u} \quad (6)$$

onde o símbolo  $\circ$  significa produto duplo entre os tensores.

Junto às paredes, as aproximações para alto número de Reynolds não são válidas. Portanto, um procedimento muito usado é utilizar um outro modelo para essa região, o qual consiste em utilizar para a subcamada viscosa um perfil aproximado de velocidade, e a partir desse estimar valores para  $\kappa$  e  $\varepsilon$  ness região. Essa é a linha do presente trabalho.

**Região da Parede.** Haritonidis (1989) propôs um novo perfil de velocidade para o escoamento turbulento junto aos contornos sólidos. Alguns resultados desse trabalho são

$$U^+ = (1/\lambda) \tan^{-1}(\lambda y^+) \quad (7)$$

$$u_1^+ = \frac{k}{(n\gamma)^{1/2}} y^+ \frac{\partial U^+}{\partial y^+}, \quad u_2^+ = \frac{(n\gamma)^{1/2}}{k} \lambda^2 y^+ \quad (8)$$

onde  $U^+ = U / u_*$ ;  $u_1^+ = u_1 / u_*$ ;  $u_2^+ = u_2 / u_*$ ;  $y^+ = \rho y u_* / \mu$ ; sendo  $u_*$  a velocidade de atrito;  $U$  é a velocidade média e  $u_1$  e  $u_2$  são os componentes da flutuação da velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os parâmetros  $\lambda$ ,  $n$  e  $\gamma$  são definidos em função do fenômeno de ejeção característico do escoamento na vizinhança de contornos sólidos e  $k$  é a constante de von Kármán. É importante ressaltar, que estes resultados correspondem a um escoamento do tipo camada limite sem gradiente de pressão.

Usando esses resultados é possível expressar as tensões de Reynolds junto à parede da seguinte forma

$$-\langle \rho u_1 u_2 \rangle^+ = \rho \lambda^2 y^{+2} \frac{\partial U^+}{\partial y^+} = \mu_t^+ \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \quad (9)$$

portanto

$$\mu_t^+ = \mu_t / \mu = \lambda^2 y^{+2} \quad (10)$$

Essa viscosidade turbulenta interpolada das tensões de Reynolds pode ser utilizada na região próxima à parede, ao invés da conhecida expressão, Eq. (1). A vantagem da Eq. (10) em relação a Eq. (1) é que a primeira pode ser definida baseada somente no escoamento médio.

**Energia Cinética Turbulenta.** A equação para a energia cinética turbulenta na região da parede pode ser obtida a partir de observações experimentais, ao notar que os componentes transversais das flutuações da velocidade são da mesma ordem

de grandeza (Schlichting, 1968), portanto,  $\kappa$  pode ser expressa diretamente como

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \langle u_1 u_1 \rangle + 2 \langle u_2 u_2 \rangle \right) \quad (11)$$

Por outro lado, as tensões de Reynolds podem ser obtidas manipulando as expressões em (8) como

$$\langle u_1 u_1 \rangle^+ = \frac{k^2}{(n\gamma \lambda^2)} \lambda^2 y^{+2} \left( \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \right)^2 \quad (12)$$

$$\langle u_2 u_2 \rangle^+ = \lambda^4 \frac{(n\gamma)}{k^2} y^{+2} \quad (13)$$

Comparando-se as equações (12) e (13), é possível mostrar que a contribuição de  $\langle u_2 u_2 \rangle^+$  é desprezível. Portanto  $\kappa$ , na forma adimensional, pode ser escrita como  $\kappa^+ \cong 0,5 \langle u_1 u_1 \rangle^+$  e utilizando o perfil para a velocidade média dado pela Eq. (7) tem-se

$$\kappa^+ = \frac{k^2}{n\gamma \lambda^2} \frac{\lambda^2 y^{+2}}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^2} = 11,73 \frac{\lambda^2 y^{+2}}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^2} \quad (14)$$

onde os parâmetros  $\lambda$ ,  $n$ ,  $\gamma$  e  $k$  receberam os seguintes valores:  $\lambda = 0,09365$ ;  $n = 3$ ;  $\gamma = 0,272$  e  $k = 0,41$ .

**Dissipação de Energia Cinética Turbulenta.** A expressão para  $\varepsilon$  na região próxima à parede, pode ser obtida a partir da equação de conservação para  $\kappa$ , como mostrado por Pasinato e Niecele (1996). Utilizando o perfil para a velocidade média adimensional dado pela Eq. (7), tem-se

$$\varepsilon^+ = 11,73 \left[ \frac{2\lambda^2}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^2} - \frac{20\lambda^4 y^{+2}}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^3} + \frac{24\lambda^6 y^{+4}}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^4} \right] + 2,42 \left[ \frac{3\lambda^3 y^{+2}}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^2} - \frac{4\lambda^5 y^{+4}}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^3} \right] + \left[ \frac{\lambda^2 y^{+2}}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^2} \right] \quad (15)$$

Na Eq. (15), o primeiro termo representa a contribuição do termo de difusão de  $\kappa$ , o segundo termo é o termo associado com a inércia e o último termo representa a produção de energia cinética turbulenta. A Figura 1 ilustra a contribuição de cada um dos termos para a formação de  $\varepsilon$ . Observa-se, que para  $y^+$  maior que 6, a dissipação é aproximadamente igual a produção de energia cinética, concordando com a hipótese da lei da parede tradicional, porém na região bem próxima à parede esta hipótese falha. Observa-se ainda que, quando  $y^+$  tende a zero,  $\varepsilon^+$  tende para 0,206; o qual é um valor próximo ao experimentalmente observado (Patel et al., 1984). Por outro lado, os valores máximos para  $\varepsilon^+$  e seu comportamento na zona mais afastada do contorno, apresentam os valores esperados para essa variável na subcamada viscosa (Jovanovic et al., 1995).

A Figura 2 ilustra a variação de  $\kappa^+$  e  $\mu_t^+$  em função da distância adimensional  $y^+$ . Ambas as variáveis tendem a zero na parede pelo presente modelo. A energia cinética apresenta valor máximo para  $y^+$  aproximadamente igual a 10.

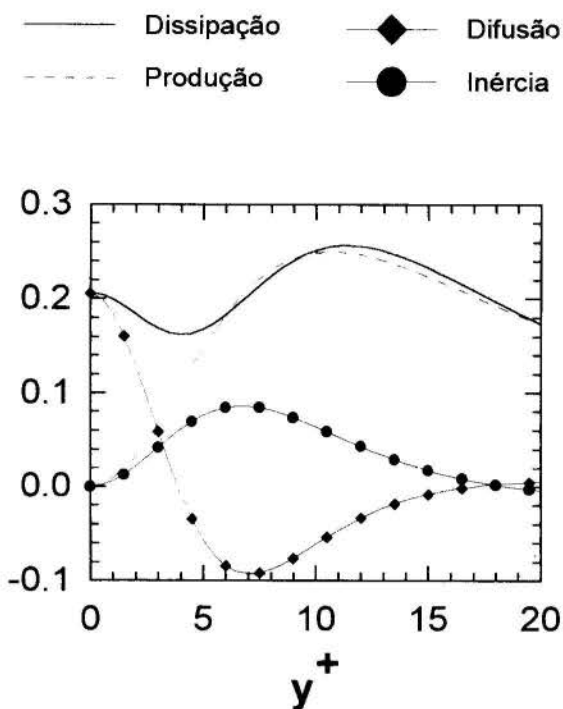


Figura 1 - Dissipação de energia cinética turbulenta adimensional  $\epsilon^+$  em função da distância à parede adimensional e os termos que a compõe.

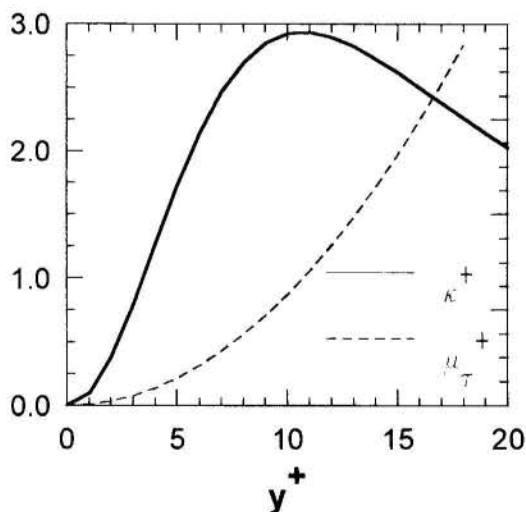


Figura 2 - Energia cinética turbulenta  $\kappa^+$  e viscosidade turbulenta  $\mu\tau^+$  adimensionais em função da distância à parede adimensional

**Velocidade de Atrito.** Para a avaliação da energia cinética turbulenta, sua dissipação e a viscosidade turbulenta, é necessário avaliar a velocidade de atrito  $u^*$ , a qual é calculada por

$$u^* = \sqrt{\tau_s / \rho} = \left[ \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} \right]^{1/2} \quad (16)$$

onde  $\tau_s$  é a tensão cisalhante na parede. Para avaliar a derivada da Eq. (16) na parede, considera-se que na região da subcamada laminar,  $y^+ < 5$ , tem-se  $u^+ = y^+$ . Substituindo esta relação na Eq. (16) obtém-se

$$y^+ 2 = \frac{y u^*}{\nu} y^+ = \frac{y u^*}{\nu} U^+ = \frac{y U}{\nu} = Y^+ \quad (17)$$

onde  $U$  é a velocidade média junto à parede; portanto  $Y^+$  é facilmente calculado, recuperando-se  $u^*$ .

De acordo com Kline et al. (1967), a hipótese  $y^+ = U^+$  só é estritamente válida para  $y^+ < 5$ . Portanto, no cálculo de  $u^*$ , será necessário localizar o primeiro nó da malha na região  $y^+ < 5$ . Em outras palavras, se uma malha uniforme é usada na subcamada viscosa, no mínimo dois pontos serão necessários na mesma.

**Lei da Parede.** O presente trabalho, propõe utilizar na região próxima à parede, isto é,  $y^+ < 15$  as expressões apresentadas para a viscosidade turbulenta, energia cinética turbulenta, e sua taxa de dissipação, nas equações (10), (14) e (15). Estas equações dependem do valor de  $y^+$ , que por sua vez é função da velocidade de atrito, portanto  $y^+$  é calculado utilizando a equação (17).

#### MÉTODO NUMÉRICO

Para resolver as equações de conservação foi selecionado o método numérico de volumes finitos (Patankar, 1980), utilizando o esquema "Power-Law". O acoplamento velocidade-pressão foi resolvido com o algoritmo SIMPLC de Van Doormaal e Raithby, 1984.

O sistema algébrico resultante da discretização foi resolvido com o algoritmo TDMA linha por linha e o algoritmo de correção por blocos para acelerar a convergência (Patankar, 1980).

#### RESULTADOS NUMÉRICOS

O problema teste selecionado para ser apresentado é o de um escoamento em uma expansão em degrau, "bakward-facing step", o qual encontra-se na Fig. 3. Este é um experimento padrão na avaliação de simulações de escoamentos turbulentos. De acordo com os testes realizados por Kim et al. (1980), o número de Reynolds foi especificado igual a 132.000, sendo baseado na velocidade média na linha central na entrada do domínio,  $U_c$  e na separação das placas à saída,  $H_s$ . A razão de expansão utilizada foi  $H/H_s = 1/3$ , onde  $H$  é a altura do degrau.

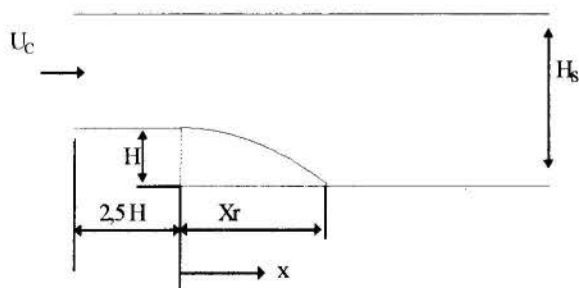


Figura 3: Domínio do problema em degrau.

Inicialmente utilizou-se uma malha de 118 x 82 pontos, nas direções x e y, respectivamente (Pasinato e Nieckele, 1996). O comprimento de recolamento obtido numericamente para esse teste, foi de  $Xr/H = 6,65$ ; um resultado que apresenta uma diferença de 5% do valor médio medido experimentalmente, o qual é  $Xr/H = 7,0$ . No presente trabalho, especificou-se uma malha mais fina, de 200x100, nas direções x e y respectivamente. Além disso, a malha foi concentrada nas proximidades das paredes. O resultado obtido para o ponto de recolamento apresentou uma melhora sensível, passando a concordar exatamente com o resultado experimental de Kim et al. (1980).

Na Fig. 4 é apresentado um detalhe da variação do perfil de velocidade média horizontal  $u$  com a distância vertical  $y$  da placa inferior. A distribuição de  $u$  entre as placas é apresentada, para diferentes posições axiais, na proximidade do ponto de recolamento. As velocidades negativas em  $x/H = 5,89$  e  $6,56$  indicam a presença de reversão do escoamento. Para a posição  $x/H = 7,0$  observa-se derivada nula na parede, indicando o ponto de recolamento. Já para  $x/H = 7,71$  todo o perfil de velocidade é positivo, indicando que o escoamento já se encontra na fase de recuperação.

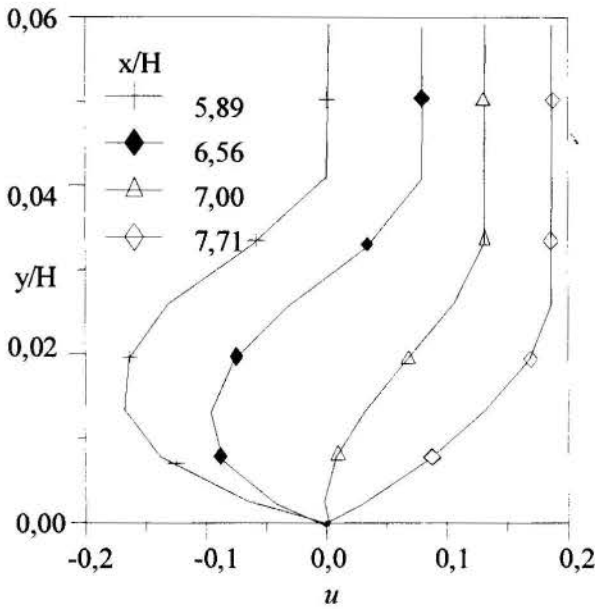


Figura 4 - Perfil de velocidade média horizontal próximo ao ponto de recolamento

Um dos desafios na previsão deste problema consiste na determinação precisa da região de recirculação, isto é, na avaliação do ponto de recolamento. Porém, observações experimentais de Kim et al. 1980, mostraram que imediatamente após o salto, existe uma pequena recirculação secundária. A Figura 5, ilustra a variação do perfil de velocidade horizontal  $u$  com a distância vertical para diversas posições axiais imediatamente após o salto. Neste caso, a presença da recirculação secundária é observada pelos valores positivos da velocidade, já que devido a recirculação principal, a escoamento próximo à superfície inferior e próximo ao salto se dá da direita para a esquerda (sentido negativo). Note porém, que a velocidade nesta região apresenta valores extremamente baixos.

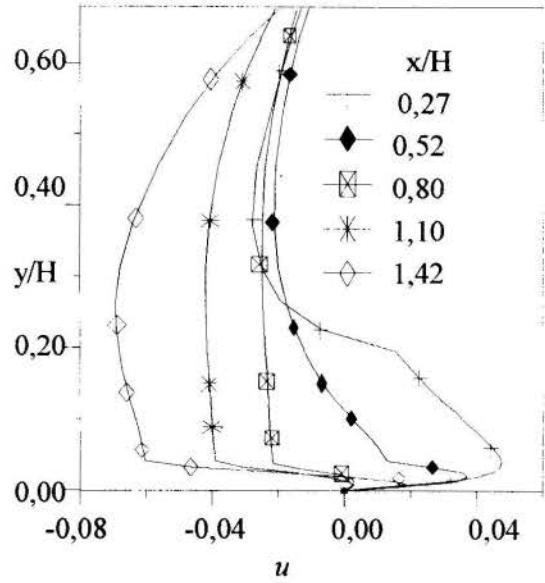


Figura 5 - Perfil de velocidade média horizontal próximo ao degrau

## CONCLUSÃO

No presente trabalho, apresentou-se a utilização de uma lei de parede baseada no perfil de velocidade de Haritonidis (1989). A dissipação da energia cinética turbulenta na região próxima à parede é avaliada retendo termos de inércia e difusão, além do termo de produção na equação de conservação de energia cinética turbulenta. Como consequência o valor de  $\epsilon$  avaliado na parede concorda com determinação experimental. O método é testado no problema do escoamento entre placas paralelas com uma expansão em degrau. Os resultados obtidos foram satisfatórios, com uma ótima concordância para a determinação do ponto de recolamento. O método foi ainda capaz de prever a recirculação secundária existente imediatamente após ao degrau.

É importante, no entanto, ressaltar que a lei da parede apresentada foi baseada em um perfil de velocidade válido para situações em que o gradiente de pressão é nulo, o que resulta em uma grande simplificação do presente modelo.

Como conclusão final deste trabalho, podemos afirmar que o modelo apresentado, apesar das simplificações utilizadas apresenta soluções com precisão razoável, a um baixo custo, tornando-se portanto atrativo para simulações de situações com finalidades tecnológicas.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq), pelo apoio em forma de bolsas de doutorado e pesquisa. O primeiro autor agradece ao Grupo de Pesquisa em Físicoquímica, do CEI da Universidade Nacional de Quilmes, Bernal, Argentina, por terem facilitado o uso de computação na parte final deste trabalho. O segundo autor também agradece ao Ministério de Ciência de Tecnologia (MCT).

## REFERÊNCIAS

Durbin, P. A., 1993, "A Reynolds Stress Model for Near-Wall Turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 249, pp. 465-572.

Haritonidis, J. H., 1989, "A Model for Near-Wall Turbulence", *Physics of Fluids A*, Vol. 1, No. 2, pp. 302-306.

Jovanovic, J., Ye Q. Y. e Durst, F., 1995, "Statistical Interpretation of the Turbulent Dissipation Rate in Wall-Bounded Flows", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 293, pp. 321, 1995.

Kim, J., Kline, S. J. e Jhonston, J. P., 1980, "Investigation of Reattaching Shear Layer: Flow Over a Backward Facing Step", *ASME Journal of Fluid Engineering*, Vol. 102, pp. 302-308.

Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. e Ranstadler, P. W., 1967, "The Structure of Turbulent Boundary Layer", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp. 741-773.

Lai, Y.G. e So, R. M. C., 1990, "On Near-Wall Turbulent Flow Modeling", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 221, pp. 641-673.

Launder, B. E. e Spalding, D. B., 1974, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 3, pp. 269-289.

Mansur, N. N., Kim, J. e Moin, P., 1989, "Near-Wall  $\kappa$ - $\epsilon$  Turbulence Modeling", *AIAA Journal*, vol. 27, n. 8; pp. 1068-1072.

Pasinato, H. D. e Nieckele, A. O., 1996, "Turbulência na

Vizinhança de Contornos Sólidos: Uso da Hipótese de Viscosidade de Redemoinho", *Anais do IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, área: Mecânica dos Fluidos*, Recife, PE, 1996, vol. 2, pp. 897-902.

Patankar, S. V. e Spalding, D. B., 1970, "Heat and Mass Transfer in Boundary Layers", Intertext Books, London.

Patankar S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation., N. Y. Patel V. C., Rodi W. e Scheurer G., 1984, "Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review", *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 9, pp.1308-1319.

Schlichting, H., 1968, "Boundary-Layer Theory"; McGraw-Hill, N.Y.

Van Doormaal, J. P. e Raithby, G. D., 1984, "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147-163.

## SUMMARY

A new wall procedure is presented, which is based on the model for near-wall turbulence proposed by Haritonidis (1989). The main characteristic of this procedure is that it has strong physical basis, and further it is simple. The backward-facing step problem was performed, indicating this method as a good predictor of rough effect of turbulence in the viscous sublayer.



## The Law of the Wall for Two-Phase Solid-Liquid Systems



by Guilherme G. Camozzato and Atila P. Silva Freire  
Mechanical Engineering Program (PEM/COPPE/UFRJ)  
C.P. 68503, 21945-970 Rio de Janeiro, Brazil



### ABSTRACT

*The purpose of this work is to find near wall solutions for the velocity and the concentration fields for particle-laden, flat plate, turbulent boundary layer flows. The concept of single limit of Kaplun will be used to unveil the asymptotic structures of both the velocity and the concentration. The concentration field is shown to have a double-layered structure whose inner scaling depends on the turbulent transport coefficient. A simplified hypothesis about the drag coupling force, together with an algebraic modelling of the turbulent velocity and concentration fields, is used for the derivation of new expressions for the law of the wall. The new laws present higher order terms which are deduced by application of asymptotic expansions to the mean motion equations. The higher order terms have a  $y \ln y$ -functional form, which is here derived for the first time. A numerical simulation of the flow shows how the drag coefficient is affected by the particles field.*

### 1. INTRODUCTION

Turbulent fluid flows laden with solid particles are a relatively common occurrence in industry. The deposition of particles in aerosols, the design of electrostatic precipitators, the event of fouling, the transport of pollutants in rivers, to mention just a few, are typical examples of situations that arise in nature and technology and that deserve careful consideration. Despite this, their understanding is very deficient. The reasons for this are several: the particle-laden environment is very hostile to the presence of intrusive measurement techniques, uniform particle loadings are very difficult to achieve, the addition of the particulate phase brings several new parameters into the problem whose effects on the turbulence must be unmistakably accounted for. All these points make it very difficult to construct consistent experiments and theories capable of reasonably describing the main features of the phenomenon. The purpose of the present work is to take to full extent the possibilities of an asymptotic analysis of the problem, together with an algebraic modelling of the turbulence and a simplified hypothesis about the coupling drag force. For that matter, an Eulerian approach for the description of the velocity and of the particles concentration fields will be used. Opposite to the Lagrangean approaches, the Eulerian approaches offer a relatively easy way of dealing with systems with a very large number of particles. Easy in a manner of speak. The interaction between the fluid turbulence and the particle motion in the fluid shear is a poorly understood process which has been the recent subject of many investigations. This lack of fundamental understanding of particle-turbulence interactions has, indeed, hampered further progress on the analytical and numerical studies of turbulence attenuation. Some authors (Elghobashi et alii(1983,1984)), have presented modified versions of the  $K-\epsilon$  two-equation differential model to account for damping of turbulence by particles. The models work well for the jet flow but are very difficult to generalize to other types of turbulent flow. In particular, turbulent boundary layer flows are very difficult to model. In the present work, our interest will be focused on the study of the effects of small particles on fluid turbulence in a flat-plate, turbulent boundary layer. Recent measurements (Rogers and Eaton(1991), Rashidi et

alli(1990)), have shown that a strong correlation exists between the degree of turbulence damping and the particle concentration in the log region of the boundary layer. Here, we aim at investigating how the velocity and the concentration fields behave in the logarithmic region as a result of the particle-turbulence interactions. Since the standard two-equation differential models do not apply to flows or flow regions where the local Reynolds number is small, it cannot be applied to the viscous near wall region. This region must be bridged by universal wall functions. The analytical solutions developed in present work for the velocity and the concentration profiles have an explicit dependence on the particle relevant parameters so as to be used as wall functions. These new solutions should greatly improve the performance of the differential models for the description of particle laden flows. Perturbation techniques together with some scaling arguments, are used to find local approximated equations, that are then analytically solved. Important results found here are the second order solutions which show that, if appropriate similarity parameters are used, both the velocity and the concentration profiles have a higher order ( $y \ln y$ ) behaviour. A numerical simulation of all results is presented so as to show the result of the particle-turbulence interactions on the velocity and skin-friction profiles.

### 2. THE EQUATIONS OF MOTION

The equations of motion for an incompressible fluid laden with fine solid particles can be written as:

a) continuity

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

b) momentum,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} F_i, \quad (2)$$

c) concentration,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (c' u'_j) + \lambda \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3)$$

The mean parts of the velocity, pressure and concentration of particles fields are denoted by  $u_i, p$  and  $c$  respectively. A summation is understood for repeated subscripts. The dashes stand for fluctuation of the turbulent quantities. All lengths and velocities are non-dimensionalized by typical quantities of the external flow. The kinematic velocity is denoted by  $v, \rho$  is the density of the fluid. The Reynolds stress,  $\tau_{ij}$ , is defined by

$$\tau_{ij} = -\langle u'_i u'_j \rangle, \quad (4)$$

where the Dirac brackets denote time averaging. In equation (2),  $F_i$  is the instantaneous drag force per unit volume applied by the particles to the fluid. The continuity equation is kept unchanged by the addition of the particles, upon consideration that the particles occupy a small volume fraction and do not react with the fluid. In a further simplification of our problem, we consider the drag force to obey a linear law. Thus,

$$F_i = \frac{c}{\tau_p} (u_i - v_i) + \left( \frac{c'}{\tau_p} (u'_i - v'_i) \right), \quad (5)$$

where  $c$  is the local particle concentration, and  $(u_i - v_i)$  is the particle relative velocity. Please note that the drag force has been split into a mean and an instantaneous part. In what follows, we will show that, indeed, only the former is important for the description of the phenomenon, the latter being of higher order. The assumption of a linear drag law does not require the use of the Stokes drag coefficient. In equation (3),  $\lambda$  stands for the turbulent transport coefficient. The turbulent flux of concentration is represented by the term

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \langle c' u'_j \rangle. \quad (6)$$

### 3. ASYMPTOTIC ANALYSIS

Before one attempts at solving the above equations, an estimation about the order of magnitude of the turbulent terms has to be made. The velocity fluctuations are clearly of the order of the skin-friction velocity. This is a classical result. Further measurements by Rogers and Eaton(1991) together with some asymptotic arguments have shown that the term

$$(u'_i - v'_i), \quad (7)$$

in equation (2) is at least of the order of the friction velocity  $u_\tau$  and that the fluctuations in concentration are of the order of the friction concentration,  $c_\tau$ .

Since  $c_\tau$  and  $u_\tau$  should have the same order of magnitude, the result is that, in principle,  $(u'_i - v'_i)$  is of the order of the Reynolds stresses and therefore cannot be neglected. In fact, as we shall see, an asymptotic analysis of the flow will show this term to be negligible in all regions of the flow to a first order of approximation. Since the wall function formulation is supposed to hold in the fully turbulent region, we will solve the equations of motion, Eqs. (1) to (4), in a specific region of the flow. The region where the turbulent effects dominate will be found by direct application of Kaplun limits to the equations of motion. To define

Kaplun limits we introduce here the topology on the collection of order classes as introduced by Meyer(1967). The material in this section can be found in greater detail in Kaplun(1967), Lagestrom and Caster(1972) or Silva Freire and Hirata(1990). Let  $\epsilon$  be a parameter on  $(0, 1]$  and  $x$  a variable in  $R$  with the euclidean norm  $|x|$ . Let  $F$  be a function defined for  $\epsilon$  on some  $x$ -space domain with pointwise norm  $\|F\|$ . We want to study the behaviour of  $F$  in the limit  $\epsilon \rightarrow 0$ . In particular we are interested in studying cases where passage of the limit results in the loss of the highest derivative term of a differential equation, and hence in the impossibility of satisfying all the boundary conditions. With Kaplun limits we study the limit as  $\epsilon \rightarrow 0$  not for a fixed  $x$  near a singularity point  $x_d$ , but for  $x$  tending to  $x_d$  in a definite relationship to  $\epsilon$  specified by a stretching function  $\eta(\epsilon)$  defined in the space of all positive continuous functions on  $(0, 1]$ . Taking  $x_d = 0$  we define, without any loss of generality,

$$x_\eta = \frac{x}{\eta(\epsilon)}, \quad G(x_\eta; \epsilon) = F(x; \epsilon) \quad (8)$$

The Kaplun limit process is defined as follows.

**Definition 1 (Meyer(1967)).** If the function

$$G(x_\eta; +0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x_\eta; \epsilon), \quad (9)$$

exists uniformly on  $\{x/|x_\eta| > 0\}$ ; then we define

$$\lim_\eta F(x; \epsilon) = G(x_\eta, +0) \quad (10)$$

If the concept of limit-process is applied directly to a system of differential equations, a correspondence is established to every order of  $\eta$  between the original equation and the resulting equation. The idea of Kaplun was to establish some rules so as to find the actual domain of validity of the solutions from the formal domain of validity of the equations. We then make the following definition.

**Definition 2 (Lagestrom and Casten(1972)).**

If  $E$  is a equation and  $\lim_{\eta_1} E = E_1$ ,  $\lim_{\eta_2} E = E_2$  and also  $\lim_{\eta_2} E_1 = E_2$ , we say that  $E_1$  contains  $E_2$  (relative to  $E$ ).

**Definition 3 (Lagestrom and Casten(1972)).**

The formal domain of validity of an equation  $F$ , relative to the full equation  $E$ , is the ord  $\eta$  such that  $\lim_\eta E$  is either  $F$  or an equation contained in  $F$ .

To relate the formal domain of validity of an equation to its actual domain of validity, Kaplun(1967) advanced two assertions, the Axiom of Existence and the Ansatz about domains of validity. These assertions are primitive and unverifiable assumptions of perturbation theory. They allow one to directly use definitions 1 to 3 to find approximate solutions to singular perturbation problems.

**Axiom (of existence Kaplun(1967)).** If equation  $E_1$  and  $E_2$  are equivalent in the limit to order  $\delta(\epsilon)$  for

a certain region, then given a solution  $S_1$  of  $E_1$  which lies in the region equivalence of  $E_1$  and  $E_2$ , there exists a solution  $S_2$  of  $E_2$  such that as  $\delta \rightarrow 0$ ,  $[S_1 - S_2]/\delta \rightarrow 0$ , in the region of equivalence of  $E_1$  and  $E_2$ . To this axiom, there corresponds an Ansatz to ensure that there exists a solution  $S_1$  of  $E_1$  which lies in the region of equivalence of  $E_1$  and  $E_2$ .

**Ansatz (about domain of validity) (Kaplun (1967)).** An equation with a given formal domain of validity  $D$  has a solution whose actual domain of validity corresponds to  $D$ . The word "corresponds to" in the Ansatz was assumed by Kaplun to actually mean "is equal to".

To find the flow asymptotic structure we will follow the procedure of Silva Freire and Hirata(1990), of Cruz and Silva Freire(1995) and of Silva Freire(1996).

Consider the intermediate variables

$$y_\eta = \frac{y}{\eta(\epsilon)}, \hat{u}_i(x, y_\eta) = u_i(x, y), \hat{c}_i(x, y_\eta) = c_i(x, y); \quad (11)$$

with  $\eta(\epsilon)$  defined in the space of all positive continuous functions on  $(0, 1]$ . Substitution of equations (11) into the equations of motion and passage of the  $\eta$ -limit process on the resulting equations yield for the leading order of approximation:

x-momentum equation

$$ord(\eta) = ord(1) : \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u}_i - \hat{v}_i), \quad (12a)$$

$$ord(u_\tau^2) < ord(\eta) < ord(1) : \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u}_i - \hat{v}_i), \quad (12b)$$

$$ord(\eta) = ord(u_\tau^2) : \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial y} \langle \hat{u}'_1 \hat{u}'_2 \rangle - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u}_i - \hat{v}_i), \quad (12c)$$

$$ord(\nu/u_\tau) < ord(\eta) < ord(u_\tau^2) : 0 = -\frac{\partial}{\partial y_\eta} \langle \hat{u}'_1 \hat{u}'_2 \rangle, \quad (12d)$$

$$ord(\eta) = ord(\nu/u_\tau) : 0 = \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial y_\eta^2} - \frac{\partial}{\partial y_\eta} \langle \hat{u}'_1 \hat{u}'_2 \rangle, \quad (12e)$$

$$ord(\eta) < ord(\nu/u_\tau) : 0 = \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial y_\eta^2}; \quad (12f)$$

concentration equation:

$$ord(\eta) = ord(1) : \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{c}}{\partial x_j} = 0, \quad (13a)$$

concentration equation:

$$ord(\eta) = ord(1) : \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{c}}{\partial x_j} = 0, \quad (13a)$$

$$ord(u_\tau c_\tau) < ord(\eta) < ord(1) : \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{c}}{\partial x_j} = 0, \quad (13b)$$

$$ord(\eta) = ord(u_\tau c_\tau) : \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{c}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial y_\eta} \langle \hat{c}' \hat{u}'_2 \rangle, \quad (13c)$$

$$ord(\lambda/u_\tau) < ord(\eta) < ord(u_\tau c_\tau) : 0 = -\frac{\partial}{\partial y_\eta} \langle \hat{c}' \hat{u}'_2 \rangle, \quad (13d)$$

$$ord(\eta) = ord(\lambda/u_\tau) : 0 = \lambda \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial y_\eta^2} - \frac{\partial}{\partial y_\eta} \langle \hat{c}' \hat{u}'_2 \rangle, \quad (13e)$$

$$ord(\eta) < ord(\lambda/u_\tau) : 0 = \lambda \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial y_\eta^2}. \quad (13f)$$

The two-deck structure of the boundary layer is seen from equations (12c), (12e), (13c) and (13e). Note that these four equations, are distinguished in two ways: i) they are determined by specific choices of  $\eta(\epsilon)$  and ii) one of them or both "contain" each of the other equations, but neither of them is "contained" by the other. They are, in the sense of Kaplun, "rich enough" to provide approximate solutions that cover the entire domain and overlap in some region. These equations are called principal equations. Indeed, the definitions of section two together with the Axiom of Existence and the Kaplun Ansatz about domains of validity, ensure that there exist solutions of the problem that lie in the region of equivalence of the principal equations and that therefore cover the entire domain and overlap. We call (12c) and (13c) the outer equations. Equations (12e) and (13e) are called the inner equations. The balance of forces in the various flow regions is clearly illustrated in the above equations. Note that while the velocity principal equations are located at points  $ord(\eta) = ord(u_\tau^2)$  and  $ord(\eta) = ord(\nu/u_\tau)$ , the concentration principal equations are located at points  $ord(\eta) = ord(u_\tau c_\tau)$  and  $ord(\eta) = ord(\lambda/u_\tau)$ . The result is that if, and only if,  $ord(u_\tau) = ord(c_\tau)$  and  $ord(\nu) = ord(\lambda)$  the two overlap domains

$$D_u = \{\eta / ord(\nu/u_\tau) < ord(\eta) < ord(u_\tau^2)\}, \quad (14)$$

and

$$D_c = \{\eta / ord(\lambda/u_\tau) < ord(\eta) < ord(u_\tau c_\tau)\}, \quad (15)$$

will coincide. Thus, in general, the concentration boundary layer will have a different structure from the velocity boundary layer depending on the order of magnitude of  $c_\tau$  and of  $\lambda$ . To find local solutions for the velocity and the concentration fields we will consider the flow in the intersection domain of sets (14) and (15). Next, we consider a mixing-length turbulence closure model to hold for both the turbulent stress and the turbulent flux of concentration. As a result, equations (12d) and (13d) reduce to

$$\frac{\partial}{\partial y_\eta} \left( k^2 y_\eta^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_\eta} \right)^2 \right) - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u} - \hat{v}) = 0, \quad (16)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial y_\eta} \left( k k_c y_\eta^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_\eta} \frac{\partial \hat{c}}{\partial y_\eta} \right) = 0, \quad (17)$$

where the  $\kappa$ 's are constants of the model. We further consider that the velocity and concentration solutions can be expanded as

$$\hat{u} = \hat{u}_a + \alpha \hat{u}_b, \quad (18)$$

$$\hat{c} = \hat{c}_a + \alpha \hat{c}_b, \quad (19)$$

where the small parameter  $\alpha$  stands for  $(\hat{u} - \hat{v})/\rho \tau_p$ . For the sake of simplicity,  $(\hat{u} - \hat{v})$  has been considered constant in the present work. Substitution of Eqs.(18) and (19) into Eqs.(16) and (17) and collection of the terms of same order of magnitude gives the equations for the several orders of approximation.

The result is:

a) to the first order equations

$$\frac{\partial}{\partial y_\eta} \left( k^2 y_\eta^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial y_\eta} \right)^2 \right) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\eta} \left( k k_c y_\eta^2 \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial y_\eta} \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial y_\eta} \right) = 0, \quad (21)$$

b) to the second order equations

$$\frac{\partial}{\partial y_\eta} \left( 2k^2 y_\eta^2 \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial y_\eta} \frac{\partial \hat{u}_b}{\partial y_\eta} \right) - \hat{c}_a = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\eta} \left[ \left( k k_c y_\eta^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial y_\eta} \frac{\partial \hat{c}_b}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial y_\eta} \frac{\partial \hat{u}_b}{\partial y_\eta} \right) \right) \right] = 0. \quad (23)$$

An integration of the above equations yields:

a) first order solution

$$\hat{u}_a = u_\tau \left( \frac{1}{k} \ln y_\eta + A \right), \quad (24)$$

$$\hat{c}_a = c_\tau \left( \frac{1}{k_c} \ln y_\eta + B \right), \quad (25)$$

b) second order solution

$$\hat{u}_b = u_\tau \left[ \frac{y}{k k_c} \left( \frac{1}{2} \ln y_\eta + \left( \frac{b k_c}{2} - 1 \right) \right) + D \right], \quad (26)$$

$$\hat{c}_b = c_\tau \left[ \frac{y_\eta}{k_c^2} \left( 1 - \frac{b k_c}{2} - \frac{1}{2} \ln y_\eta \right) + E \right]. \quad (27)$$

To the authors' knowledge, this is the first time that the above equations are presented in literature. They explicitly show the interaction between the velocity and the concentration fields. Results found with the present approach are shown next.

#### 4. RESULTS

The experimental validation of any theory developed for solid particle laden flows is always difficult. In fact, as mentioned in the introduction the particle-laden environment is very hostile to the presence of intrusive measurement techniques, making it a must to use optical techniques. In this technique, a discrimination between the tracers and the solid particles can be achieved on the basis of signal amplitude. In any case, the complications are also great. Measurement uncertainty arises from inaccurate phase discrimination, slight loading nonuniformity, small signal-to-noise ratio, and from limitations inherent to finite data records. As a result, experimental uncertainty in, say, the mean velocity statistics is close to 6%. This makes it very difficult to ascertain whether the particles actually give rise to a change in the shape of the fluid mean-velocity profile or not.

After a thorough literature review, only two references on turbulent boundary layers laden with solid particles were found by the authors which present experimental data on mean profiles, fluctuating velocity profiles and power spectra. All data, however, were restricted to the defect region of the flow, none of them being capable of capturing the log behaviour of the inner layers.

Here, to validate our results we will make a numerical simulation of the theoretical flow behaviour, comparing the trends of the predicted solution with the flow trends experimentally observed by Rogers and Eaton(1991) and by Rashidi et al(1990).

Simulation of the skin-friction results are shown below. According to the theory, the skin-friction coefficient value will, of course, depend on the direction of the turbulent flux of concentration in the wall region. A negative flux will increase the skin-friction coefficient, whereas a positive flux will result in a decrease of this quantity. In other words, the predicted values of  $C_f$  will depend on the value and on the sign of  $c_\tau$ . Note that this behaviour is quite different from the skin-friction coefficient behaviour in unladen flows where the only relevant small parameter,  $u_\tau$ , is always positive.

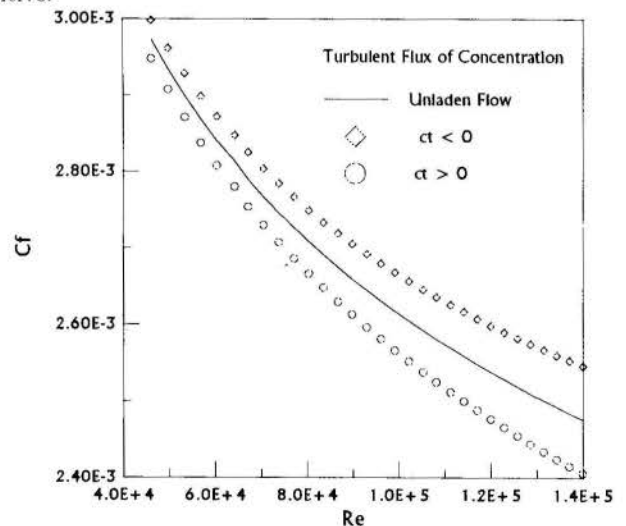


Figure 1 Skin-Friction Behavior



For the values of  $\alpha$  evaluated from the data of Rashidi et al. (1990), the departure from the classical law of the wall formulation predicted by equations (18) was small. This, indeed, is in accordance with the findings of those authors.

## 5. CONCLUSION

In the present work, a complete picture of the asymptotic structure of solid particles laden turbulent boundary layer flows has been given. Application of Kaplun limits to the equations of motion shows that both the velocity and the concentration fields have a two-deck structure, and that, in general, the concentration boundary layer will have a different structure from the velocity boundary layer depending on the order of magnitude of  $c_\tau$  and of  $\lambda$ .

A further application of algebraic turbulence models to the equations of motion shows that both the velocity and the concentration profiles have a higher order ( $y \ln y$ ) term. This result is derived here for the first time. The departure from the classical law of the wall predicted by equation (18) must be tested in the future for values of  $\alpha$  with a lower order of magnitude. Such experiments are yet to be performed. The functional form of the solution, however, is clearly identified here.

A numerical simulation of the theoretical solutions shows that the results are plausible and that further developments must be pursued.

(Acknowledgements.) This work has been financially supported by CNPq through grant No 350183/93-7. One of the authors, G.G.C., is grateful to CAPES for the award of a Scholarship.

## 6. REFERENCES

- [1] Cruz, D. O. A. and Silva Freire A. P., 1995, "The Asymptotic Structure of The Thermal Turbulent Boundary Layer Near a Separation Point", Begell House Inc. Publishers.
- [2] Elghobashi S. E., and Abou-Arab T. W., 1983, "A Two Equation Turbulence Model for Two-Phase Flows", Physics Fluids 26 (4).
- [3] Elghobashi S. E., Abou-Arab T., Risk M. and Mostafa A., 1984, International Journal of Multiphase Flow 10, pp.697.
- [4] Kaplun S., 1967, "Fluid Mechanics and Singular Perturbation", Academic Press.
- [5] Lagerstrom P. A. and Casten R. G., 1972, "Basic Concepts Underlying Singular Perturbation Techniques", SIAM Review vol. 14 n0 1.
- [6] Meyer, R. E., 1967, "On the Approximation fo Double Limits by Single Limits and the Kaplun Extension Theorem", J. Inst. Maths. Applics., Vol.3, pp.245-249.
- [7] Rashidi M., Hetsroni G. and Banerjee S., 1990, "Particle-Turbulence Interaction in a Boundary Layer", International Journal of Multiphase Flow vol.16 no 6, pp.935-949.
- [8] Rogers C. B. and Eaton J. K., 1991, "The Effect of Small Particles on Fluid Turbulence in a Flat-Plate, Turbulent Boundary Layer in Air", Physics Fluids A3 (5).
- [9] Silva Freire A. P., 1996, "On Kaplun Limits and the Asymptotic Structure of the Turbulent Boundary Layer", RBCM Vol. XVIII, n 1, pp.80-87.

- [10] Silva Freire A. P. and Hirata M. H., 1990, "Approximate Solutions to Singular Perturbation Problems: the Intermediate Variable Technique", J. Math. Analysis and Appl., Vol. 145, pp.241-253.



## UMA LEI DE POTÊNCIA PARA O COEFICIENTE DE ATRITO EM CAMADAS LIMITE EM EQUILÍBRIO, TURBULENTAS, COM GRADIENTE DE PRESSÃO



Cláudio C. Pellegrini

Dep. Ciências Térmicas e dos Fluidos  
Fund. Ens. Sup. São João Del Rei  
36.300-000, SJDR, MG, Brasil

Daniel O. A. Cruz

Programa de Engenharia Mecânica  
Univ. Fed. Rio de Janeiro  
21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

### RESUMO

*No presente trabalho provamos a existência de uma lei de potência relacionando o coeficiente de atrito à espessura de camadas limite em equilíbrio, turbulentas, incompressíveis, com gradiente de pressão. Tal lei surge diretamente da similaridade existente na região externa. Da análise, surge também, um novo modelo de turbulência. A lei de potência obtida é comparada com dados experimentais mostrando boa concordância.*

### INTRODUÇÃO

O fato de muitos escoamentos de interesse prático serem turbulentos e ocorrerem em regiões de gradiente de pressão adverso, tem gerado considerável interesse no estudo da camada limite sob estas condições. Neste estudo, a quantidade de maior interesse prático é, provavelmente, o coeficiente de atrito,  $C_f$ . Com ele o atrito total no escoamento em torno de corpos de formato arbitrário pode ser previsto. Com isto, perfis de aerofólios e cascos de embarcações podem ser projetados, canais de escoamento em máquinas de fluxo podem ser otimizados e cargas sobre estruturas sujeitas à ação do vento ou do mar podem ser calculadas.

Motivado por todas estas finalidades tecnológicas, um grande número de estudos tem sido realizado. De forma geral, dois caminhos para a previsão de  $C_f$  tem sido seguidos. Nos estudos mais antigos, utiliza-se a equação integral do momento, juntamente com um modelo para as tensões de atrito turbulento na parede e mais uma hipótese sobre a forma funcional do perfil de velocidades ou do chamado fator de forma,  $H_{12}$ . Nos mais recentes, a equação integral do momento também é utilizada, porém em conjunto com uma lei da parede e uma lei do atrito geralmente derivada da própria lei da parede.

Entre os métodos descritos pouca diferença existe. De fato, ambos utilizam a equação integral do momento, mais uma modelagem para o atrito na parede e—direta ou indiretamente—uma para o perfil de velocidades turbulento. Diferenças podem ser encontradas, basicamente, no caráter do sistema de equações a ser resolvido para a obtenção de  $C_f$ . Nos métodos que utilizam a lei da parede, as equações apresentam-se acopladas, dificultando os cálculos numéricos. Nos outros métodos, as equações apresentam-se usualmente explícitas, sendo esta sua principal vantagem. Ocorre, entretanto, que as relações para o atrito na parede utilizadas nos métodos de lei da parede são sempre obtidas por solução das equações de governo do escoamento simplificadas de alguma forma, enquanto que nos outros métodos a origem é geralmente o empirismo. Esta é a sua principal desvantagem.

Diversos representantes dos métodos que não utilizam lei da parede podem ser encontrados na literatura, distintos no que diz respeito ao modelo de tensões turbulentas. Garner

(1944), por exemplo, utilizou uma lei de potência idêntica à do caso sem gradiente de pressão como modelo de tensões turbulentas. Doenhof e Tetervin (1943), utilizaram uma lei logarítmica proposta por Squire e Young (1938). Em ambos os casos, as tensões turbulentas eram apenas função do número de Reynolds,  $Re_{\delta_2}$ , baseado na espessura de momentum da camada limite,  $\delta_2$ . Truckenbrodt (1952), por sua vez, utilizou uma outra expressão, também em forma de lei de potência, mas dependente de  $H_{12}$  e  $Re_{\delta_2}$ .

O objetivo do presente trabalho é obter um novo modelo para a tensão turbulenta na parede em escoamentos incompressíveis, com gradiente de pressão, sobre superfícies planas, que possa ser utilizado para a previsão teórica de  $C_f$  em alguns dos métodos que não utilize a lei da parede. Para isto, faz-se uma análise por similaridade da região externa das camadas limite consideradas. A análise é análoga à apresentada recentemente por Pellegrini e Cruz (1993) para o caso sem gradiente de pressão. As equações diferenciais parciais de governo da região externa da camada limite são transformadas em ordinárias, observando-se o fato de que ali existe similaridade na forma estabelecida por Clauser (1954). O modelo para as tensões turbulentas surge desta análise sob a forma de uma lei de potência em  $Re_{\delta_2}$  e na velocidade externa a camada limite,  $U(x)$ . Tal lei difere ligeiramente da de caráter empírico proposta anteriormente por Garner (1944).

Da mesma análise ainda, dois resultados colaterais são obtidos. No primeiro, um novo modelo para a viscosidade turbulenta,  $\nu_t$ , é deduzido. Para isto parte-se apenas da hipótese clássica de que  $\nu_t$  é função apenas da distância  $x$ , ao longo da placa. No segundo, verifica-se a hipótese feita por Coles (1956), que demonstra a existência de uma função universal,  $\omega$ , capaz de descrever a velocidade na região externa da camada limite sem gradiente de pressão. Neste trabalho, Coles sugere que uma função  $\pi(x)$ , multiplicando  $\omega$ , poderia ser suficiente para responder pela presença do gradiente de pressão nestes escoamentos. Fica demonstrado aqui que se a similaridade da região externa das camadas limite com gradiente de pressão de fato existe,  $\pi$  deve ser constante.

Ao fim do trabalho, as previsões teóricas para  $C_f$  são comparadas com as previsões experimentais de Andersen et al (1972) e Blackwell et al (1972), mostrando boa concordância. Mostra-se, além disto, que o modelo de turbulência recai no caso sem gradiente de pressão obtido por Pellegrini e Cruz

(1993) quando a velocidade externa  $U(x)$  torna-se constante.

## EQUAÇÕES DE GOVERNO

Seja um escoamento de fluido newtoniano, bidimensional, permanente, incompressível, turbulento, sobre placa plana, com gradiente de pressão. As equações da conservação da massa e da variação do momentum podem ser obtidas de Schlichting (1962), cap. XXIII, fazendo nestas  $\rho = \bar{\rho}$  e chamando  $-(u'v')$  de  $\tau_{xy}$ . Observando que para a região externa da camada limite a equação de Bernoulli fornece  $U dU dx = -(1/\rho) dp/dx$ , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \right], \quad (2)$$

onde as barras indicando média temporal foram omitidas por simplicidade e todos os símbolos restantes tem o significado tradicional.

As condições de contorno para as equações (1) e (2) são  $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ ,  $u(x, \delta) = U(x)$  e  $u(0, y) = U(0)$ , onde  $\delta$  é a espessura da camada limite e onde a velocidade do escoamento externo,  $U(x)$ , é considerada conhecida, posto que é ela quem estabelece o gradiente de pressão imposto ao escoamento.

As equações de camada limite (1) e (2) podem ser ainda mais simplificadas se restringirmos sua aplicação apenas à parte externa da camada limite. Esta região poderia ser definida como aquela em que, dada sua proximidade com o escoamento sem atrito externo, o termo de tensão viscosa,  $\nu \partial u / \partial y$ , pode ser desprezado. A existência de uma tal região, contudo, não é evidente e precisaria ser comprovada. Uma análise rigorosa da ordem de grandeza do termo desprezado parece ser o caminho mais lógico para cumprir esta tarefa. Tal análise, entretanto, não é possível, a menos que se façam algumas hipóteses sobre o comportamento das funções  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  e  $U(x)$  no sistema (1)-(2), desconhecidas a priori. Tais hipóteses são geralmente feitas de forma implícita em todos os trabalhos que lidam com este tema. Em Silva-Freire (1988), por exemplo, e em outros trabalhos que utilizam métodos de perturbação, a existência da região externa é decorrente de se assumir que as equações de governo adimensionais definem um problema chamado *singular*. Ao se definirem as chamadas escalas características de comprimento, indiretamente estabelece-se quais os termos da equação de governo que predominam na região que está sendo tratada. Além disto, imagina-se que  $u$ ,  $v$  e  $U$  sejam funções aproximadamente lineares, de tal forma que  $O(\partial u / \partial x) = O(\Delta u / \Delta x)$ , etc.

Aqui, o que nos propomos a fazer é simplesmente postular a existência da região externa, definindo-a como aquela em que  $\nu \partial u / \partial y \approx 0$ . Tal hipótese será finalmente confirmada pela comparação de nossas previsões com os dados experimentais.

Assim, para a região externa da camada limite em estudo, as equações (1) e (2) reduzem-se a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (4)$$

Estas expressões mais as mesmas condições de contorno de (1) e (2), são as equações de governo do problema.

## ANÁLISE POR SIMILARIDADE

No estudo das camadas limite laminares, a introdução do conceito de similaridade levou a consideráveis simplificações matemáticas na solução das equações de governo. Clauser (1954) demonstrou que para camadas limite turbulentas também haviam alguns tipos de escoamento em que a similaridade era observada na região externa. Clauser chamou tais casos de *camadas limite em equilíbrio*. Em tais casos valia a expressão de similaridade

$$\frac{u - U}{u_r} = f(\eta), \quad (5)$$

onde  $U = U(x)$ ,  $\eta = y/\delta$ , e  $u_r = \sqrt{\tau_0/\rho}$ , onde  $\tau_0$  é a tensão de atrito na placa, dada por  $\nu \partial u / \partial y|_{y=0} = \tau_0$ .

Argumentando que para a existência de equilíbrio, as forças de atrito deveriam ser proporcionais às forças de pressão na camada limite, Clauser mostrou ainda que a condição de validade de (5) era

$$\beta = (\delta_1/\tau_0) \partial p / \partial x = \text{cte}, \quad (6)$$

onde  $\delta_1$  é a espessura de deslocamento. Em 1967, Bradshaw (1967) mostrou que a restrição correspondente a  $\beta = \text{cte}$  no escoamento externo era  $U(x) = Ax^m$ , onde  $A$  e  $m$  eram constantes.

Se substituirmos todas as aparições da variável  $u$  nas equações (3) e (4) pela expressão (5), a equação resultante deve, necessariamente, ser ordinária, uma vez que  $f$  depende exclusivamente de  $\eta$ . Tal fato não apenas simplifica diretamente a solução das equações de governo, como também permite algumas conclusões colaterais que examinaremos em breve.

Assim, reescrevendo (5) na forma  $u = U + u_r f(\eta)$ , podemos substituir esta expressão em (3) para determinar  $v$ . Integrando o resultado em relação a  $y$  e determinando a constante de integração pelas condições de contorno temos:

$$v = -U' \delta [\eta] - u_r' \delta [F] + u_r \delta' [f \eta] - F, \quad (7)$$

onde, o símbolo ( $'$ ) indica derivada total,  $F = \int_0^\eta f d\eta$ ,  $u_r$  e  $\delta$  são funções de  $x$ .

Calculando as derivadas de  $u$  nas direções  $x$  e  $y$ , tomando  $v$  da expressão (7) e substituindo em (4) segue-se, após algum rearranjo:

$$\begin{aligned} (u_r U' + u_r' U) [f] - \left( u_r U \frac{\delta'}{\delta} + U' u_r \right) [f' \eta] + u_r u_r' [f^2] \\ - \left( u_r^2 \frac{\delta'}{\delta} + u_r u_r' \right) [f' F] = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Se, conforme (5),  $f$  depende apenas de  $\eta$ , todos os coeficientes que multiplicam os colchetes na equação acima devem ser constantes, pois do contrário  $f$  dependeria, por exemplo, de  $u_r$  que, por sua vez, depende de  $x$ . Antes, porém, de aplicar tal restrição aos coeficientes de (8) cabe observar um ponto bastante importante.

Relações de similaridade como a (5), são obtidas verificando-se se perfis experimentais de diversos escoamentos podem ser levados a coincidir, quando representados nas variáveis de similaridade escolhidas. Tais variáveis são, geral-

mente, sugeridas por algum tipo de consideração sobre ordens de grandeza, ou alguma análise dimensional. Desta forma não é possível decidir se pequenos desvios entre os perfis dos diversos casos devem-se a erros experimentais de medida ou a uma possível inadequação das variáveis de similaridade escolhidas. Por este motivo, tudo o que é válido exigir da equação (8) é que seus coeficientes de primeira ordem de grandeza sejam constantes. Tal fato já havia sido observado por Pellegrini e Cruz (1993) em um artigo anterior para o caso sem gradiente de pressão. Normalmente, conforme mencionado neste artigo, conclusões contraditórias são obtidas ao se exigir que todos os coeficientes sejam constantes. Certos autores definem o caso em que apenas alguns dos coeficientes são constantes dizendo que existe "similaridade incompleta". O que não se deve perder de vista, entretanto, é que não é possível garantir que qualquer expressão de similaridade obtida experimentalmente como a (5) leve a uma similaridade completa.

Dito isto, passemos a avaliar as ordens de grandeza dos termos de (8). Evidência experimental mostra que  $O(u_r) < O(U)$ . Aplicando esta observação à (8), verificamos que o quinto e o sétimo termos são pequenos quando comparados ao primeiro, e que o sexto é pequeno quando comparado ao terceiro. Utilizando apenas esta hipótese, temos:

$$(u_r U' + u_r' U) [f] - \left( u_r U \frac{\delta'}{\delta} + U' u_r \right) [f' \eta] = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (9)$$

Observando que os parênteses representam derivadas de produtos e dividindo toda a equação pelo coeficiente de  $f$  vem:

$$[f] - \frac{(U \delta)'}{U \delta} \frac{U u_r}{(U u_r)'} [f' \eta] = \frac{1}{(U u_r)'} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (10)$$

Todos os termos restantes nesta equação serão mantidos. No que diz respeito ao segundo termo, isto é justificável fazendo-se a hipótese de que a operação  $d()/dx$  altere de mesma forma as funções  $U \delta$  e  $U u_r$ , isto é que  $O(U \delta')/(U \delta) = O(U u_r')/(U u_r)$ . Quanto ao terceiro termo, apenas a parte de primeira ordem foi mantida. Isto em nada afeta a análise porvir.

Para obter informação a respeito de  $\tau_{xy}$ , precisamos assumir algo a respeito de sua forma funcional. Façamos então, como Clauser (1956), a hipótese de que  $\tau_{xy} = \nu(x) \partial u / \partial y$ . Substituindo (5) nesta expressão e o resultado obtido em (10), temos:

$$[f] - \frac{(U \delta)'}{U \delta} \frac{U u_r}{(U u_r)'} [f' \eta] = \nu_t(x) \frac{u_r}{\delta^2} \frac{1}{(U u_r)'} [f']. \quad (11)$$

Chamando os coeficientes da expressão (11) de  $c_1$  e  $c_2$ , ambos constantes, obtemos

$$\frac{(U \delta)'}{U \delta} = c_1 \frac{(U u_r)'}{U u_r}, \quad (12a)$$

$$\nu_t(x) = c_2 \delta^2 U \frac{(U u_r)'}{U u_r}, \quad (12b)$$

A equação (12a) pode ser diretamente integrada e fornece

$$u_r = C_1 U^{C_2 - 1} \delta^{C_2}, \quad (13)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. Para evitar a dependência entre  $\nu_t$  e  $u_r$ , podemos substituir (12a) em (12b) e obter

$$\nu_t = C_3 \delta (U \delta)', \quad (14)$$

com  $C_3$  constante.

Para determinar as constantes de integração,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  é preciso comparar as expressões (13) e (14) com resultados experimentais. Como a lei (5) de similaridade de Clauser só é válida para  $\beta =$  constante, diferentes valores de  $\beta$  devem resultar em diferentes valores de  $u_r$  e de  $\nu_t$ , significando que, em princípio, pode-se esperar dependência de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  com  $\beta$ .

A análise das expressões (13) e (14) será deixada para o próximo item. Por enquanto, vamos apenas reescrevê-las em outras formas, futuramente úteis. Através das definições de  $C_f$  e  $Re_\delta$  e considerando a forma de  $\tau_{xy}$  dada por Clauser, temos:

$$\frac{C_f}{2} = C_4 U^{-4} Re_\delta^{C_5}, \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = C_3 \delta (U \delta)' \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (16)$$

Tanto as expressões (13) e (14), quanto suas correspondentes (15) e (16), são o resultado principal deste trabalho. Todas elas apresentam-se inéditas ao nosso presente conhecimento. Como dissemos anteriormente, Garner (1944) apresenta em seu trabalho expressão semelhante à (15), sem a dependência com  $U^{-4}$  e de caráter puramente empírico. A mesma expressão é utilizada por Andersen et al (1972) em sua análise sobre equilíbrio na camada limite.

A análise que acabamos de apresentar, onde a lei de similaridade (5) foi aplicada às equações de governo (3) e (4), poderia ser repetida partindo de expressões diferentes da (5). De fato, não há nenhum resultado conhecido que prove que se uma relação de similaridade existe, então ela é única. Uma outra relação de similaridade poderia, por exemplo, ser obtida a partir da equação proposta por Coles (1956) em seu trabalho. Neste, ele demonstra pela primeira vez a existência da similaridade  $(u - U)/u_r = f(\eta)$  na região externa da camada limite, para o caso sem gradiente de pressão. Utilizando tal observação, Coles deduz sua lei da esteira, que é uma expressão para o perfil de velocidades, semelhante à já então conhecida lei da parede para o caso. Tal lei, na forma original lê-se:

$$\frac{u}{u_r} = \frac{1}{k} \ln \frac{y u_r}{\nu} + A + \frac{\pi}{k} \omega(\eta), \quad (17)$$

onde  $y$  é a distância perpendicular à placa,  $k$ ,  $A$  e  $\pi$  são constantes a determinar experimentalmente e  $\omega$  é uma função universal, também a ser determinada experimentalmente. No mesmo trabalho, Coles propõe os valores  $k = 0.41$ ,  $A = 5.0$  e  $\pi = 0.55$ , e apresenta a função  $\omega = \omega(\eta)$  em forma tabular. Ele ainda sugere que a lei da esteira (17) possa ser estendida ao caso com gradiente de pressão se  $\pi$  puder variar com  $x$ .

Para investigar esta última hipótese, vamos reescrever a lei da esteira de Coles, fazendo a diferença  $u/u_r - U/u_r$ , lembrando que  $u(\delta) = U$  e passando  $u_r$  e  $U$  para o lado direito da equação resultante:

$$u = U + u_r \left[ \frac{1}{k} \ln \eta + \frac{\pi(x)}{k} (\omega(\eta) - 2) \right] \quad (18)$$

Tal equação pode ser substituída nas equações de governo do problema, (3) e (4), de forma análoga ao que foi feito anteriormente com (5). A análise, embora um pouco mais trabalhosa, é idêntica à anterior, inclusive no que diz respeito às hipóteses sobre ordens de grandeza dos termos. Ao exigir que os coeficientes da expressão resultante sejam todos constantes, obtemos:

$$u_r = C_1 U^{C_2 - 1} \delta^{C_2}, \quad (19a)$$

$$\nu_t = C_3 \delta (U \delta)', \quad (19b)$$



$$\pi(x) = C_6, \quad (19c)$$

onde  $C_6$  é constante. Como se pode ver, as expressões (19a) e (19b) são idênticas às (13) e (14), obtidas anteriormente com o uso da relação (5) de similaridade de Clauser. Isso é perfeitamente coerente, se lembrarmos que a expressão da lei da parede de Coles, (17), foi obtida supondo similaridade do tipo  $(u - U)/u_\tau = f(\eta)$  na região externa, que é exatamente a lei (5).

Entretanto, a expressão (19c) demonstra que se a lei da esteira de Coles é válida, então  $\pi$  deve necessariamente ser constante. Em outras palavras, demonstramos que o modelo de lei da parede de Coles não pode ser levado a contemplar os efeitos devidos ao gradiente de pressão, fazendo-se  $\pi = \pi(x)$ .

### ANALISE DOS RESULTADOS

Como já dissemos, os resultados fornecidos pelas expressões (13), (14) e (19c) são inéditos ao nosso conhecimento. Neste item, tais expressões serão comparadas com dados experimentais e sua coerência será discutida. Dado suas formas bastantes distintas, cada uma será analisada separadamente.

Lei do Atrito. Antes de mais nada, cumpre observar que a lei do atrito expressa nas formas (13) ou (15) recai nas correspondentes expressões consagradas para o caso sem gradiente de pressão quando  $U(x) = \text{constante}$ . Tais expressões foram obtidas por Pellegrini e Cruz (1993) pelo mesmo método aqui utilizado e sua validade já havia sido demonstrada empiricamente por diversos autores antes disso.

Para a comparação da lei do atrito com o experimento, escolhemos os dados publicados por Andersen et al (1972) e Blackwell et al (1972), para escoamentos com transpiração (sucção ou injeção) de fluido através da placa. Obviamente, apenas os casos sem transpiração foram utilizados. O motivo para a escolha de tais dados é que eles são os mais recentes que se pode obter. Além disso, Kays e Moffat (1975) já haviam comparado os resultados de Andersen et al (1972) e Blackwell et al (1972) com uma grande quantidade de resultados pré-existentes na literatura e verificaram que eles eram virtualmente idênticos, podendo ser assim considerados como definitivos.

A figura 1 mostra, em gráfico di-log, a comparação entre a equação do atrito, na forma dada em (15), e os dados experimentais. A curva superior representa o caso sem gradiente de pressão, aqui apresentado como caso teste. A curva intermediária representa o caso com gradiente médio de pressão e a curva inferior, com gradiente forte de pressão. Em todos os casos os gradientes testados eram adversos, mas não suficientes para causar separação. Como se pode verificar, a concordância entre teoria e experimento é muito boa, exceto para baixos  $Re_\delta$ , o que não é de se estranhar, pois a camada limite turbulenta nestes casos provavelmente ainda não está completamente formada.

Aparentemente, quanto maior o gradiente negativo de pressão, maior o  $Re_\delta$  abaixo do qual as previsões teóricas falham. Isso pode ser explicado observando-se que a espessura,  $\delta$ , da camada limite cresce, para um dado  $x$ , à medida que aumenta o gradiente negativo de pressão. Portanto, cresce também o  $Re_\delta$  abaixo do qual a camada não está completamente formada.

O valor das constantes  $C_4$  e  $C_5$  pode ser obtida medindo-se os coeficientes linear e angular, respectivamente, da reta que melhor se ajusta aos dados experimentais na figura 1. Tal procedimento levou aos valores de  $C_4$  e  $C_5 \times \beta$  listados

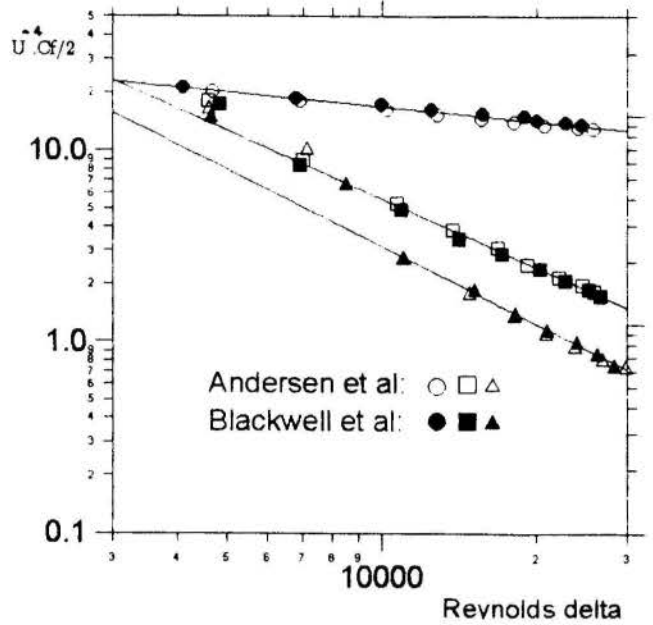


Figura 1 - Equação do atrito

na tabela 1 e representados na figura 2. Como se pode ver, a variação de  $C_4$  com  $\beta$  é praticamente linear, enquanto que a de  $C_5$  com  $\beta$  é aproximadamente quadrática. Como  $C_4$  e  $C_5$  foram obtidas de um gráfico di-log, seus valores devem ser considerados com bastante cautela, uma vez que são muito sensíveis ao ajuste das retas aos pontos experimentais. Por este motivo, nenhuma tentativa foi feita no sentido de se propor expressões para as curvas que melhor ajustam os pontos da figura 2.

Tabela 1 - Variação de  $C_4$  e  $C_5$  com  $\beta$ .

$m$	$\beta$	$C_4$	$C_5$
-0.00	0.00	178	-0.256
-0.15	0.70	318011	-1.189
-0.20	1.55	727497	-1.341

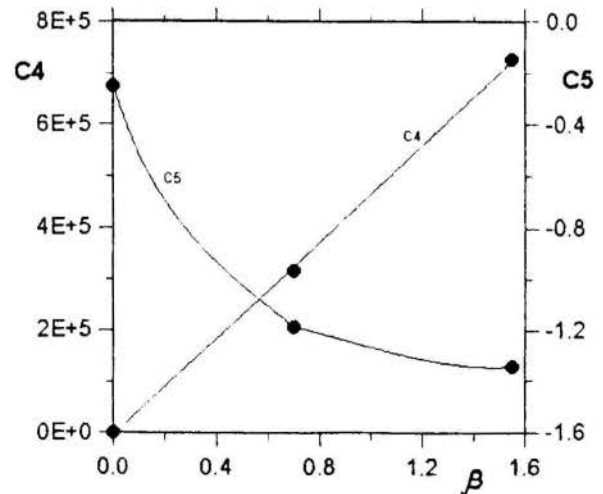


Figura 2 - Variação de  $C_4$  e  $C_5$  com  $\beta$ .

**Modelo de Turbulência.** De início, vamos verificar se o modelo para as tensões de atrito turbulento aqui obtido, (16), recai nas expressões consagradas quando  $U(x)$  torna-se constante. Um dos modelos mais utilizados é o devido a Clauser (1956):

$$\tau_{xy} = C_3 U \delta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (20)$$

Em um recente trabalho, Pellegrini e Cruz (1993) obtiveram a seguinte expressão:

$$\tau_{xy} = C_3 U \delta \delta' \frac{\partial u}{\partial y} \quad (21)$$

A diferença, como se pode ver, é a presença do termo  $\delta'$ . Tanto (20) como (21) valem apenas na região externa da camada limite. A expressão (21) foi obtida pelo mesmo método aqui utilizado. Até o momento, não se tem notícia de que ela tenha sido diretamente comparada com dados experimentais. Entretanto, ela parece fisicamente mais razoável do que a (20), pois afirma que o fluxo turbulento de quantidade de movimento depende não só de  $\delta$ , mas também de  $\delta'$ . Tal dependência fica evidente se considerarmos que quanto maior o fluxo de quantidade de movimento turbulenta através da camada limite, maior tem que ser sua taxa de crescimento, pois maior será a interferência do fluido interior sobre o exterior.

Como no caso da lei do atrito, a expressão (16) recai na (21), cuja consistência mostramos acima, quando  $U(x) = \text{constante}$ . Além disso, ela afirma que o fluxo de quantidade de movimento turbulento depende não só de  $U(x)$ , mas também de  $U'(x)$ , o que parece razoável. De fato, pela equação de Bernoulli,  $U'(x) = -(1/\rho U(x)) dp/dx$ . Assim, supor que o fluxo turbulento depende de  $U'(x)$  equivale apenas a supor que ele depende do gradiente de pressão.

Uma demonstração definitiva de que o modelo expresso pela equação (16) é adequado porém, só pode ser obtida por comparação direta com o experimento, o que não foi possível fazer até o momento. Uma possível comparação indireta, é a utilização de (14) como modelo de turbulência em algum esquema de solução numérica da camada limite. Tal comparação encontra-se no momento em curso e, esperamos, será publicada em breve.

Como a expressão (14) provém, em última análise, da hipótese de similaridade (5), fica claro que sua validade é também restrita à região externa da camada limite, aonde vale a expressão (5).

## CONCLUSÕES

No presente trabalho foi deduzida uma expressão inédita para o atrito na parede e foi criado um novo modelo para as tensões turbulentas na região externa da camada limite incompressível, sobre placa plana, com gradiente de pressão. O método utilizado consistiu em impor similaridade obtida experimentalmente as equações de governo do problema e, em seguida, avaliar as consequências deste fato.

Durante a análise, foram feitas algumas hipóteses:

- (i) Existe uma região, chamada externa da camada limite, onde  $\nu \partial u / \partial y \approx 0$ ;
- (ii) Existe similaridade da forma  $(u - U)/u_\tau = f(\eta)$ , com  $u_\tau$  diferente de zero;
- (iii) A velocidade  $u_\tau$  é pequena quando comparada a  $U(x)$  em todo o escoamento;
- (iv) Vale a relação funcional  $\nu = \nu(x)$ , conforme Clauser

As hipóteses (i) e (iv) não criam nenhuma restrição à validade das expressões aqui deduzidas. Apenas explicam algum possível afastamento entre os resultados previstos e os experimentais. A hipótese (iii) é uma verificação experimental e vale em todo escoamento em camada limite. Já a hipótese (ii), restringe a validade das equações (13) e (14) ao caso em equilíbrio, onde  $\beta = (\delta_1/\tau_0)(dp/dx) = \text{constante}$  ou, equivalentemente,  $U(x) = Ax^m$ . Além disto, a restrição ao denominador, isto é  $u_\tau \neq 0$ , estabelece que a teoria não vale na região de separação.

Dos resultados obtidos na análise realizada, todas as expressões são inéditas. A comparação das previsões teóricas para o atrito na parede com os dados experimentais, mostrou concordância notavelmente boa. É importante notar, entretanto, que um maior número de valores de  $\beta$  seria necessário para que conclusões definitivas sobre a dependência de  $C_4$  e  $C_5$  com este parâmetro pudessem ser alcançadas.

No que diz respeito ao novo modelo de turbulência, uma demonstração definitiva de sua validade não foi aqui apresentada. Apenas demonstrou-se que nenhum resultado incoerente decorre de sua existência. Algum tipo de comparação direta ou indireta entre teoria e experimento faz-se necessária no futuro.

De todas estas hipóteses, apenas a (ii) impõe uma restrição mais ou menos severa a validade dos resultados aqui obtidos. Ainda assim, o presente estudo pode ser de grande valor na tentativa de se compreender totalmente o fenômeno mais geral, que é a camada limite com gradiente de pressão arbitrário.

Como sugestões para trabalhos posteriores, acreditamos que a simples extensão dos resultados aqui obtidos aos casos compressível, com transpiração e com transpiração e gradiente de pressão, seja imediatamente proveitosa. Além disso, e provável que a busca de novas expressões de similaridade seja também bastante útil, não apenas para a presente abordagem, como para muitas outras possíveis.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao acadêmico Tântalo A.O. Campos pelo apoio na obtenção e no processamento dos dados experimentais.

## REFERÊNCIAS

- Andersen, P. S., Kays, W. M. and Moffat, R. J., 1972, 'The turbulent boundary layer on a porous plate: an experimental study of the fluid mechanics for adverse free-stream pressure gradients', Rep. HMT-15, Dep. Mech. Eng., Stanford University.
- Blackwell, B. F., Kays, W. M. and Moffat, R. J., 1972, 'The turbulent boundary layer on a porous plate: an experimental study of the heat transfer behavior with adverse pressure gradients', Rep. HMT-16, Dep. Mech. Eng., Stanford University.
- Bradshaw, P., 1967, 'The turbulence structure of equilibrium boundary layers', *J. of Fluid Mech.*, Vol 29, part 4, pp. 625-645.
- Clauser, F. H., 1954, 'Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients', *J. of Aero. Sci.*, Vol. 21, p. 91.
- Clauser, P., 1956, 'The turbulent boundary layer', *Adv. Appl. Mech.*, Vol 4, part 1,
- Coles, D. E., 1956, 'The law of the wake in the turbu-

lent boundary layer', *J. of Fluid Mech.*, Vol 1, pp. 191-226.

**Doenhoff, A. E.**, Tetervin, N., 1943, 'Determination of general relations for the behavior of turbulent boundary layers', NACA rep. 772.

**Garner, H. C.**, 1944, 'The development of turbulent boundary layers', ARC RM 2133.

**Kays, W. M. and Moffat, R. J.**, 1975, 'The behavior of transpired turbulent boundary layers', Rep. HMT-20, Dep. Mech. Eng., Stanford University.

**Pellegrini, C. C., Cruz, D. O. A.**, 1993, "Uma análise por similaridade da região externa de camadas limite turbulentas", *Atas do XII Congr. Bras. Eng. Mec.*, Brasília, DF, pp. 1029-1032.

**Schlichting, H.**, 1962, *Boundary layer theory*, McGraw Hill Book Company, p. 658.

**Silva-Freire, A. P.**, 1988, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, No. 5, pp. 1011-1021.

**Squire, H. B., Young, A. D.**, 1938, 'The calculation of profile drag of airfoil', ARC RM 1838.

**Truckenbrodt, E.**, 1952, 'Ein quadraturverfahren zur berechnung der laminaren und turbulenten reibungsschicht bei ebener und rotations-symmetrischer stromung', *Ing. Arch.*, 20, pp. 211-228.

#### ABSTRACT

In the present paper we prove the existence of a power law relating skin-friction to equilibrium boundary layer thickness in turbulent incompressible flows with pressure gradient. The power law is directly derived from the similarity observed in the external region of this type of boundary layer. From the same analyses, we also derive a new turbulence model. At the end of the paper, the power law is compared with experimental data available on the literature, showing good agreement.



## The Stanton Number Equation Near a Separation Point

by Daniel O. A. Cruz and Atila P. Silva Freire  
 Mechanical Engineering Program (PEMCOPE/UFRJ),  
 C.P. 68503, 21945-970 - Rio de Janeiro - Brazil



### ABSTRACT

The present work uses asymptotic and dimensional arguments to find near wall approximate solutions that hold for positions upstream, at and downstream of a separation point. The results show that at the separation point the classical velocity logarithmic solution reduces to Stratford's law of the wall, whereas, for the temperature profile, an inverse half-power law is obtained. To the author's knowledge this is the first time that such law is derived for the temperature. This law is corroborated by experimental results as well as by a numerical simulation of the flow field. The numerical calculations use a two-equation differential model for the description of the turbulence and wall function laws for the specification of the boundary conditions. Results are presented for the velocity and temperature fields, skin-friction coefficient and Stanton number.

### 1. INTRODUCTION

The great difficulties found in the past for dealing with turbulent flows have led to the development of many simplified theories. The concepts of eddy viscosity and of mixing length are typical examples. While subjected to some attack, for the lack of apparent generality, certain theories have become ageless and of much wider scope than anyone could have envisaged at the time they were advanced. The Reynolds's analogy between skin-friction and heat transfer is a particular case of sound success. Reynolds suggested that in turbulent flow momentum and heat were transferred in the same way. The result is that the transfer of heat from a fixed wall and the skin-friction at this wall were related through a constant. It follows that the Reynolds' analogy only holds under special conditions. Extensions of the theory for more general cases were provided by several authors, including Taylor, Prandtl and Karman in separated works. The purpose of this work is to consider the Reynolds's analogy for the flow near a separation point. At the separation point, the skin-friction is zero what, according to the classical analogy, would imply a zero rate of transfer of heat at the wall. This fact is clearly not observed in nature. At the separation point, the coefficient of transfer of heat at the wall has a finite value which must, therefore, be assessed from some alternative approach. The present work will advance local approximate solutions that hold in the near wall region for positions upstream, at and downstream of the separation point. These solutions will be obtained by asymptotic and dimensional arguments, having as a basis for their development the previous results of Cruz and Silva Freire(1995a, 1995b). The results confirm that upstream of the separation point a logarithmic solution is found for both the velocity and the temperature fields. At the separation point, Stratford's half-power law is recovered for the velocity profile whereas a new inverse half-power law is derived for the temperature profile. This different functional form between the velocity and the temperature fields is a consequence of the break down in the Reynolds's analogy. The results for the reverse flow region show that logarithmic profiles are also found there. All theoretical results are validated with the backward-facing step flow data of Vogel

and Eaton(1985) and with the divergent channel flow data of Driver and Seegmiller(1985). In addition, a numerical implementation of the theory is made so as to compare the present formulation with more complex and expensive approaches. In particular, a comparison is made with the RSM formulation of Hwang and Peng (1995). The new results presented here include velocity, skin-friction and Stanton number profiles predictions.

### 2. THEORY

The asymptotic structure of the separating turbulent boundary layer has been derived elsewhere (Cruz and Silva Freire(1995a)). An application of the single limit concept of Kaplun(1967) to the equations of motion yields a two-deck asymptotic structure for the flow which is different from the asymptotic structure found by other authors (Yajnik(1970), Mellor(1972)). The new structure (Silva Freire and Hirata(1990), Silva Freire(1996)) identifies far upstream of the separation point two principal equations located respectively at points  $ord(\eta) = ord(u_\tau^2)$  and  $ord(\eta) = ord(\frac{\nu}{u_\tau})$  of the validity domain. Passage of the single limit in the streamwise direction in the limit as the separation point is approached, shows that the two principal equations merge giving rise to a new asymptotic structure. This merging of the principal equations results in the disappearance of the log-region, reducing the flow structure to a wake layer and a viscous layer. The result is that the half-power law of Stratford is recovered for the velocity profile and a new minus-half-power law is derived for the temperature profile. A noteworthy point is that near to the separation point the classical inner scaling poses a major problem for the classical two-deck asymptotic structure to deal with large adverse pressure gradients, since at the separation point  $\tau_w \rightarrow 0$ . Thus, to establish a single scaling procedure which naturally accommodates the far upstream two-layered structure into a three-layered structure near a separation point, Cruz and Silva Freire(1995a) defined a new scaling parameter that expresses the balance of forces in the velocity overlap domain. This parameter is determined through an exact algebraic



equation. The asymptotic structure of both the velocity and the temperature fields are shown schematically in figures 1 and 2.

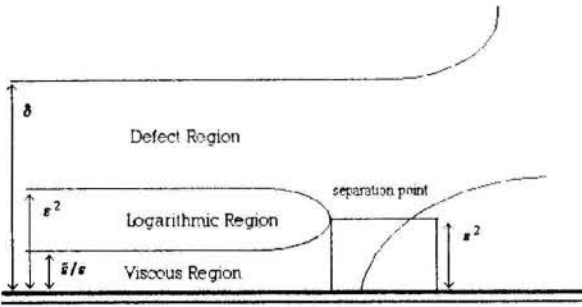


Figure 1. Velocity field asymptotic structure

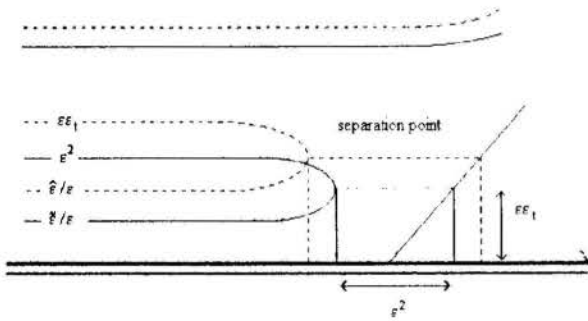


Figure 2. Temperature field asymptotic structure

To find local solutions in the near wall regions, we follow the procedure of Cruz and Silva Freire(1995b). The result is that, depending on the flow position, three different solutions are found. For the velocity profile we find:

case 1:  $\frac{\tau_w}{\rho} \geq 0 \rightarrow$

$$u = \frac{2}{k} \sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{k} \ln \frac{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{\tau_w/\rho}}{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{\tau_w/\rho}} + C_1(x), \quad (2.1)$$

case 2:  $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$  and  $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \geq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$u = \frac{2}{k} \sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \frac{\tau_w/\rho}{\sqrt{-\tau_w/\rho}} \frac{2}{k} \arctan \sqrt{\frac{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y}{-\tau_w/\rho}} + C_2(x), \quad (2.2)$$

case 3:  $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$  and  $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \leq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$u = -\frac{2}{k} \sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{k} \ln \left| \frac{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{-\tau_w/\rho}}{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{-\tau_w/\rho}} \right| + C_3(x). \quad (2.3)$$

The above equations are a generalization of the classical law of the wall for separating flows. Far upstream of the separation point where  $\tau_w/\rho \gg (dP_w/dx)(y/\rho)$  equation (2.1) is seen to reduce to the classical law of the wall. Near to the separation point where  $\tau_w \rightarrow 0$ , equation (2.1) reduces to Stratford's law of the wall. In the reverse flow region, the expression derived for CASE 3 shows a logarithmic behaviour. The reverse flow direction is implied by the minus sign of  $\tau_w$ . For the temperature field, a similar result can be found. Depending on the flow region, three temperature solutions can be found:

case 1:  $\frac{\tau_w}{\rho} \geq 0 \rightarrow$

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{1}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \ln \frac{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{\tau_w/\rho}}{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{\tau_w/\rho}} + Ct_1(x, Pr), \quad (2.4)$$

case 2:  $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$  and  $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \geq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{2}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \arctan \sqrt{\frac{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y}{-\tau_w/\rho}} + Ct_2(x, Pr), \quad (2.5)$$

case 3:  $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$  and  $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \leq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{2}{\sqrt{-\frac{\tau_w}{\rho}}} \ln \left| \frac{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{-\tau_w/\rho}}{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{-\tau_w/\rho}} \right| + Ct_3(x, Pr). \quad (2.6)$$

These equations are the law of the wall for the temperature boundary layer in separating flows. While presenting the expected logarithmic behaviour upstream of the separation point, the above equations also show that in the limit case  $\tau_w \rightarrow 0$ , the temperature profile reduces to a minus-half-power law. Thus the temperature profile becomes

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y}} + Ct_1(x, Pr). \quad (2.7)$$

This equation has a functional form different from Stratford's law of the wall, and this clearly characterizes the break down of the Reynolds analogy. The region of validity of equations (2.1) to (2.6) is illustrated in Figure 3.

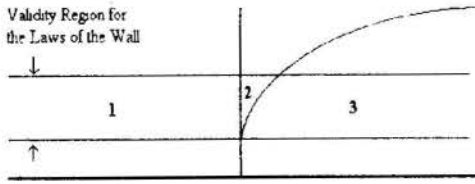


Figure 3. Validity domain of laws of the wall

In the next sections, we will give experimental evidence of the above formulation. This will be made in two ways: 1) by a direct analysis of the experimental data and the realization that the temperature profile has a minus-half-power behaviour, and 2) by a numerical implementation of expressions (2.1) to (2.6) in a finite volume method computer code. The predicted skin-friction, Stanton number and velocity profiles will then be compared with the experimental data.

### 3. EXPERIMENTAL VALIDATION

The theoretical results will be validated with the backward-facing step flow data of Vogel and Eaton(1985) and with the divergent channel flow data of Driver and Seegmiller(1985). The experimental flow conditions for both experiments are shown in Table 1.

Table 1. Experimental flow conditions

autor	$U[m/s]$	$Re$	$Q_w[W/m^2]$
Vogel et alli	11.3	28000	270.0
Driver at alli	44.2	37000	0.0

The temperature profiles in the reverse flow regions are shown in Figure 4. The occurrence of a logarithmic solution is evident as predicted by solution (2.6) In Figure 5, the temperature profile at the separation point is shown. The existence of a flow region where  $T_\infty - T \sim y^{-1/2}$  is apparent. The existence of an adjacent to the wall viscous sub-layer and of a defect layer can also be seen in this figure. The half-power law for the velocity profile is shown in Figure 6. According with the theoretical results, this figure shows that the half-power law holds not only at the separation point but also for the reverse flow region as predicted by Eq. 2.3.

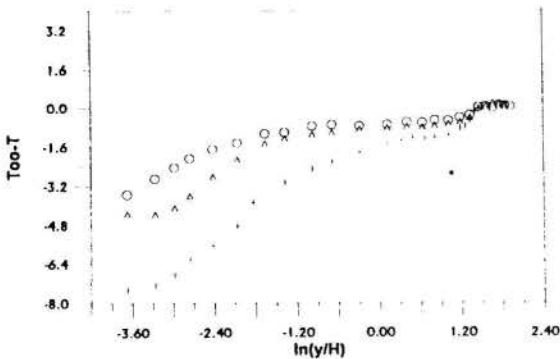


Figure 4. Temperature profiles faraway from the separation point at three different stations. The circles indicate the flow conditions nearest to the step. The other symbols otherwise.

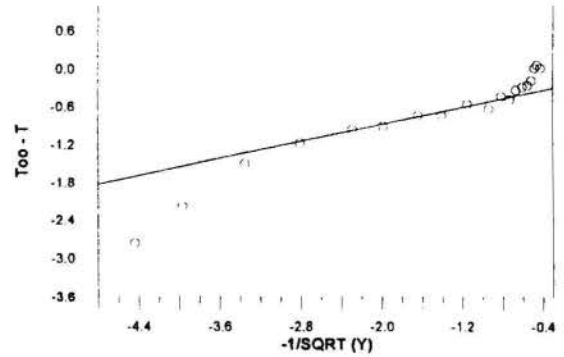


Figure 5. Temperature profile at separation

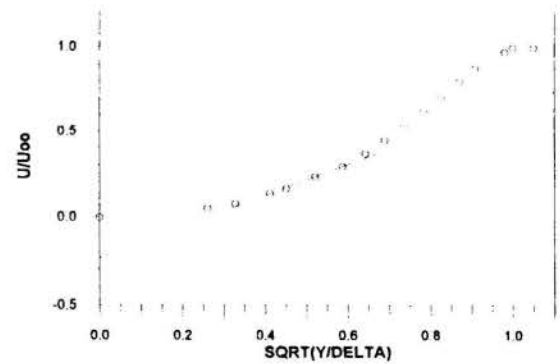


Figure 6. Velocity profile at separation

### 4. NUMERICAL RESULTS

A numerical implementation of the present theory was made with the help of the computer code CAST (Computer Aided Simulation of Turbulence, Peric and Scheuerer(1989)). This program uses a conservative finite-volume method in primitive variables, being thus similar in structure to other existing fluid flow prediction schemes such as TEAM and TEACH. For turbulent flow, the code solves the Reynolds averaged Navier-Stokes equations in connection with the K-Epsilon differential turbulence model of Launder and Spalding(1974). The five empirical constants appearing in the code take on the standard values. Since CAST uses the wall function method, updating the program was a relatively straightforward affair. To evaluate the momentum balance at the adjacent to the wall volume control, we made

to  $\tau_w \geq 0$ :

$$\tau_w = \kappa c \mu^{\frac{1}{4}} \frac{\rho \sqrt{K}}{\ln E 1/y_1} u_p, \quad (2.8)$$

to  $\tau_w < 0$ :

$$\tau_w = \kappa c \mu^{\frac{1}{4}} \frac{\rho \sqrt{K}}{\ln E 2/y_2} u_p. \quad (2.9)$$

In the above equation,  $u_p$  denotes the flow velocity to the first grid point.

$$y_1 = y_p c_\mu^{1/4} \rho \sqrt{K} / \nu, \quad (2.10)$$

$$y_2 = y_p / L_c, \quad (2.11)$$

$$L_c = \frac{\frac{-\tau_w}{\rho} \pm \left| \frac{\tau_w}{\rho} \right| \sqrt{1 + \left( \frac{\rho}{\tau_w} \right)^2 \nu \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} 2u_\tau}}{\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}}, \quad (2.12)$$

$$u_\tau = c_\mu^{1/4} \rho \sqrt{K}, \quad (2.13)$$

and  $E1$  e  $E2$  are model constants given by  $\ln E1 = 5$  and  $\ln E2 = 8.1$ . For the evaluation of the temperature profile, the boundary condition at the wall was taken as

$$\frac{(H_c - H_w) \rho c_\mu^{1/4} K_c^{1/2}}{Q_w} = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln \left| \frac{\sqrt{\tau_w / \rho + \frac{dP}{dx} y_2} - \sqrt{\tau_w / \rho}}{\sqrt{\tau_w / \rho + \frac{dP}{dx} y_2} + \sqrt{\tau_w / \rho}} \right| + Ct + Cq, \quad (2.14)$$

where  $H_c$  and  $K_c$  stand for the enthalpy and the turbulent kinetic energy at the first grid point.  $Q_w$  is the heat flux at the wall and  $Cq$  is given by.

$$Cq = 12.5 Pr^{2/3} + 2.12 \ln Pr - 5.3, \quad \text{if } Pr > 0.5, \quad (2.15)$$

$$Cq = 12.5 Pr^{2/3} + 2.12 \ln Pr - 1.5, \quad \text{if } Pr \leq 0.5. \quad (2.16)$$

The concept of a turbulent Prandtl number was used here. The calculated streamlines are shown in Figure 7. The calculated reattachment point is located at 5-7/10 step heights downstream of separation as opposed to the 6-2/3 step heights from the experiments. Figure 8 shows the calculated velocity profiles for several stations upstream of the separation. As can be seen, the theoretical predictions are very good.

The calculated values of the skin-friction for the backward-facing step flow geometry of Vogel and Eaton(1985) are shown in Figure 9. The improvement in the predictions with the introduction of the new law of the wall formulation is remarkable. The assessment of the point of minimum  $Cf$  value is, in particular, very good. The next figure, Figure 10, shows the skin-friction predictions for the divergent channel flow geometry of Driver and Seegmiller(1985). In this figure a comparison is also made with a RSM simulation of the flow by Hwang and Peng (1995). The results obtained with the present formulation are clearly comparable with the more sophisticated RSM formulation.

The Stanton number predictions are shown in Figure 11 for the backward-facing step flow geometry. The results are reasonable. Possibly, the lack of a better agreement is the result of the turbulent Prandtl number formulation.

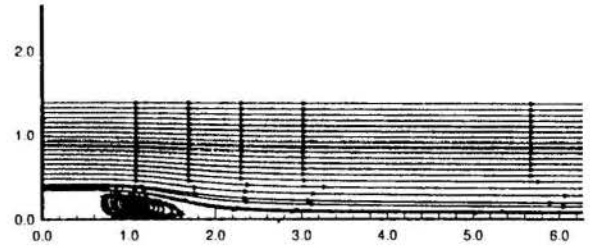


Figure 7. Flow streamlines

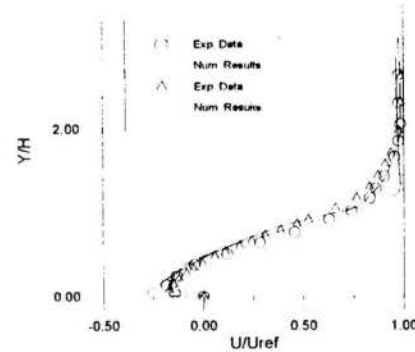


Figure 8. Velocity profiles upstream of separation point

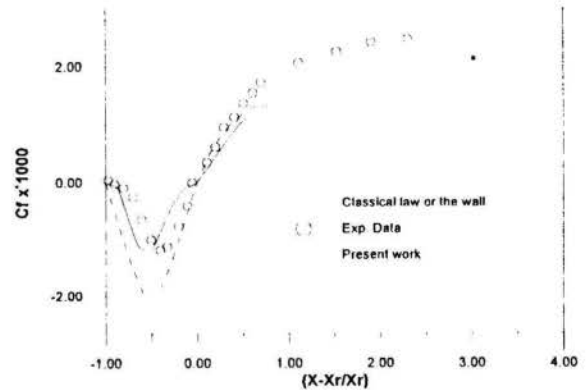


Figure 9. Skin-friction results.

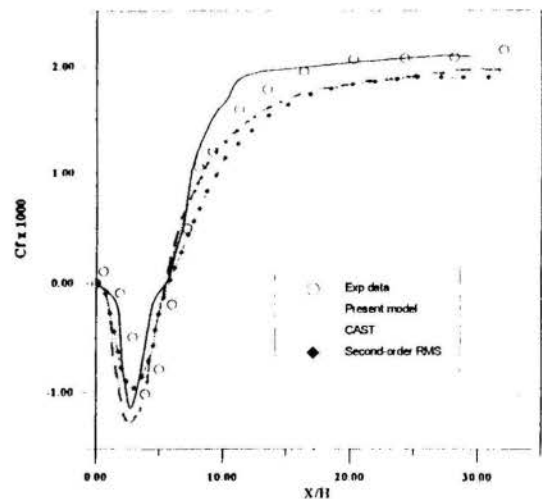


Figure 10. Skin-friction results.

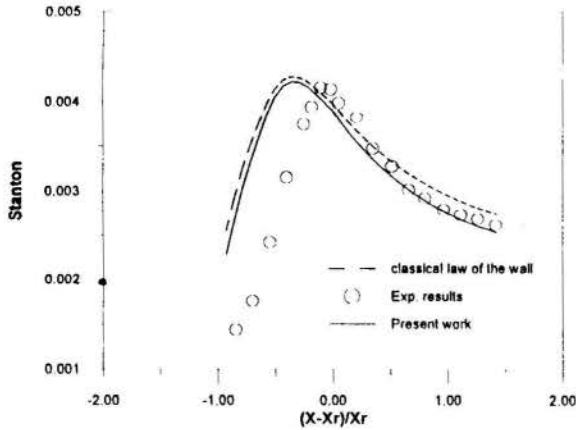


Figure 11. Stanton number predictions.

## 5. CONCLUSION

We have succeeded in the present work in showing that the temperature profile obeys a minus-half-power law in the vicinity of a separation point. The result, which was derived through some asymptotic arguments, was corroborated by the experimental data of Vogel and Eaton (1985). To the present authors' knowledge, this is the first time that such result was shown and validated in the literature. Furthermore, we have shown how the existing K-Epsilon formulations can be upgraded to give better results for separating flows.

**Acknowledgements.** This work has been financially supported by CNPq through grant No 350183/93-7. One of the authors DOAC is grateful to CNPq for the award of a Scholarship.

## REFERENCES

- CRUZ, D.O.A. and SILVA FREIRE, A.P., 1995, "The Asymptotic Structure of The Thermal Turbulent Boundary Layer Near a Separation Point", Begell House Inc. Publishers.
- CRUZ, D.O.A. and SILVA FREIRE, A.P., 1995, "The Thermal Turbulent Boundary Layer Near a Separation Point: Law of The Wall Formulation". XIII COBEM, Belo Horizonte, MG.
- DRIVER, D.M. and H.L. SEEGMILLER, 1995, "Features of a Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow", AIAA J., Vol. 23, No. 2, pp.163-171.
- HWANG, R.R. and PENG, Y.F., 1995, "Computation of Backward-Facing Step Flows by a Second-Order Reynolds Stress Closure Model", Inter. Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 21, pp 223-235.
- KAPLUN, S., 1967, "Fluid Mechanics and Singular Perturbation", Academic Press.
- LAUNDER, B.E. and SPALDING, D.B., 1974, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", Computer Methods in Applied Mechanics", Vol.3, pp.269-289.
- MELLOR, G.L., 1972, "The Large Reynolds Number Asymptotic Theory of the Turbulent Boundary Layers", Int. J. Engng. Sci., Vol 10, 851 (1972).

PERIC, M. and SCHEUERER, G., 1989, "CAST - A Finite Volume Method For Predicting Two-Dimensional Flow and Heat Transfer Phenomena", GRS - Technische Notiz Srr-89-01.

SILVA FREIRE, A.P. and HIRATA, M.H., 1990, "Approximate Solution to Singular Perturbation Problems: The Intermediate Variable Technique", J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol 145, No 1, 241.

SILVA FREIRE, A.P., 1996, "On Kaplun Limits and the Asymptotic Structure of the Turbulent Boundary Layer", RBCM, Vol 18, No 1, p. 80-87.

YAJNIK, K.S., 1970, "Asymptotic Theory of Turbulent Flow", J. Fluid Mech., Vol 42, No 2, 441.

VOGEL, J.C. and EATON, J.K., 1985, "Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward Facing Step", Journal of Heat Transfer, Vol 107, pp 922-929.





## DISIPADOR RADIAL, ECUACIONES GENERALES Y VALIDACION

**María Luisa Olivero      Julián Aguirre-Pe**  
Profesores, Laboratorio de Hidráulica, CHIDRA  
Universidad de Los Andes  
Mérida-VENEZUELA



### RESUMEN

*El disipador se produce por acción de un chorro vertical que choca con una superficie horizontal. Koloseus y Ahmad (1969) determinaron la relación de las profundidades y la relación de radios secuentes, en función del número de Froude del flujo de aproximación. Se completan y amplían las investigaciones anteriores, incorporando interpretaciones alternativas generando resultados que amplían los campos experimentales. Se presentan las ecuaciones deducidas y constatadas para las profundidades secuentes, la disipación de la energía, la fuerza adimensional en las direcciones radiales y la longitud del resalto.*

### INTRODUCCIÓN

El resalto que se forma cuando un chorro vertical de agua que choca en una superficie horizontal se distribuye radialmente, que es circular en planta, se llama resalto hidráulico circular. Este resalto se forma normalmente en instalaciones industriales y puede ser empleado como disipador de energía en obras hidráulicas. Un estudio similar al tratamiento de resalto circular se realiza para el resalto formado en un canal divergente horizontal en el cual el flujo es radial. Estos resaltos requieren consideraciones especiales en vista de que las ecuaciones que gobiernan el fenómeno difieren significativamente de aquéllas que se aplican a un resalto en un canal de sección transversal constante.

El análisis teórico se basa en la aplicación de las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento a un sector del resalto. Las ecuaciones deducidas involucran, además del número de Froude, a un parámetro dado por la relación secuencial de los radios, es decir a la relación entre el radio antes y después del resalto. Las expresiones encontradas son reducibles, en el límite, a aquéllas que se aplican a un resalto hidráulico en un canal horizontal rectangular.

### ANTECEDENTES DEL TRABAJO

En un trabajo pionero, Koloseus y Ahmad (1969) determinaron la relación de profundidades secuentes de un resalto hidráulico circular, en función del número de Froude del flujo de aproximación y de la relación de radios secuentes. Encontraron que la relación de profundidades secuentes es menor que en el resalto rectangular. Obtuvieron que la longitud del resalto circular está expresada en función tanto del número de Froude como de la relación de radios, y que tiene un valor aproximado entre 3.5 y 4.5 veces la profundidad inicial del resalto.

Beltaos y Rajaratman (1977) encontraron que para pequeñas separaciones entre la salida del chorro y el plano horizontal de desarrollo del resalto, la separación misma no es determinante en las características del resalto.

Lawson y Phillips (1983) desarrollaron un modelo predictivo para describir el comportamiento de un resalto

circular generado por una fuente central, bajo la hipótesis de un perfil de resalto lineal, independiente del número de Froude del flujo de aproximación. Los resultados de este modelo, que son razonablemente aceptables, muestran una notable disminución en la longitud del resalto y un incremento en la pérdida de energía respecto al resalto rectangular.

Khalifa y McCorquodale (1992) desarrollaron un modelo matemático de integral de banda como procedimiento general para integrar las ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad en coordenadas cilíndricas, a fin de predecir el flujo interno del resalto hidráulico radial libre. Este modelo predice la longitud del resalto, la longitud de la onda, la distribución de velocidades, el perfil de la superficie libre y el perfil del gradiente de energía a lo largo del resalto. Sus resultados están de acuerdo con experimentos previos y estudios de otros autores.

Luego de constatar que los experimentos de Koloseus y Ahmad (1969) y los modelos teóricos previamente desarrollados tienen un campo de cobertura limitado, Olivero y Aguirre-Pe (1994) completaron y ampliaron las investigaciones anteriores, generando resultados e incorporando interpretaciones alternativas que ampliaban los campos experimentales existentes. Para ello dispusieron de un chorro de simetría axial que, en función de su diámetro, elevación de salida respecto a la superficie horizontal y velocidad del flujo, modificaban las condiciones de aguas arriba del resalto. Un control de aguas abajo constituido por un anillo de diámetro y altura variables permitían determinar las condiciones del resalto.

### ECUACIONES GOBERNANTES

Ecuaciones generales para el resalto circular. Las relaciones funcionales que caracterizan un resalto circular pueden obtenerse de la correcta aplicación de la ecuación escalar de continuidad y de la ecuación vectorial de la cantidad de movimiento. Se considera un volumen de control de anchura angular infinitesimal  $r d\theta$ , en un sector de círculo, como se ilustra en la Figura 1.

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $r$  se obtiene que

$$r_1 y_1^2 - r_2 y_2^2 + \frac{1}{3}(r_2 - r_1)(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) = 2 \frac{V_2^2}{g} r_2 y_2 - 2 \frac{V_1^2}{g} r_1 y_1 \quad (1)$$

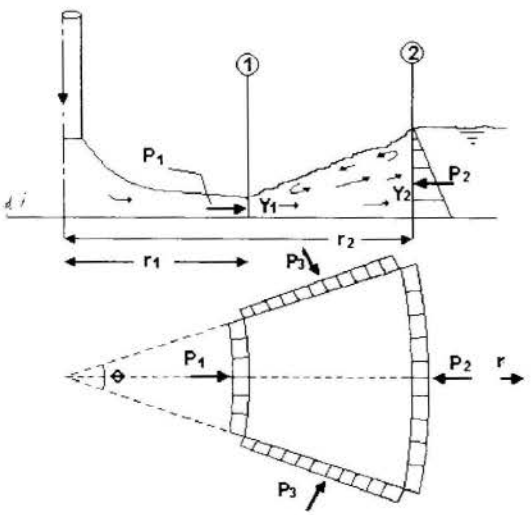


Figura 1: Esquema de definición para el resalto circular.

Definiendo los siguientes parámetros adimensionales

$$y_o = \frac{y_2}{y_1}; r_o = \frac{r_2}{r_1}; F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g y_1}}; F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g y_2}}$$

Substituyendo en la Ec. (1), ésta se transforma en

$$1 - r_o y_o^2 + \frac{1}{3}(r_o - 1)(1 + y_o^2 + y_o) = 2 F_1^2 \left[ \frac{1}{r_o y_o} - 1 \right] \quad (2)$$

y también alternativamente

$$\frac{1}{r_o y_o} - 1 + \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{1}{r_o} \right] \left[ 1 + \frac{1}{y_o^2} + \frac{1}{y_o} \right] = 2 F_2^2 (1 - r_o y_o) \quad (3)$$

Los números de Froude  $F_1$ , obtenidos para el flujo de aproximación, variaron aproximadamente entre 15 y 38. Se amplió así el rango experimental, que para Khalifa y McCorquodale (1992) variaba entre 3 y 8 para resaltos divergentes, y para Koloseus y Ahmad (1969) entre 11 y 20 en bandas radiales. En la Figura 2 se visualizan los rangos

experimentales cubiertos en los distintos trabajos a los cuales se le ha incorporado información de Rouse (1957) para resaltos rectangulares. En ella se presentan los valores medidos del número de Froude en la sección de aguas arriba  $F_{1m}$  respecto al número de Froude calculado  $F_{1c}$  según la Ec. (2), para los diferentes valores de  $r_o$  e  $y_o$  determinados experimentalmente.

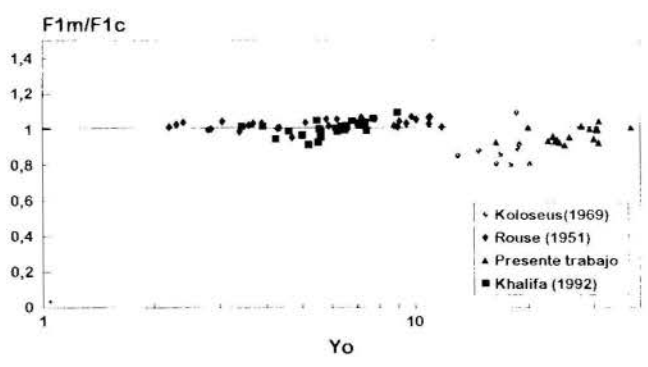


Figura 2: Rango experimental y ajuste entre la relación analítica y la experimental de números de Froude.

La Ec. (2) que expresa el número de Froude de aguas arriba del resalto circular, ofrece buen ajuste respecto a los valores experimentales, incluidos los rectangulares para los cuales  $r_o=1$ . La base de datos que se obtuvo para el presente trabajo extendiendo los rangos presentados en la literatura desde  $y_o = 20$  hasta  $y_o = 40$  y los correspondientes números de Froude del flujo de aproximación hasta  $F_1 = 38$ , según se observa en el gráfico de correlación presentado en la Figura 3.

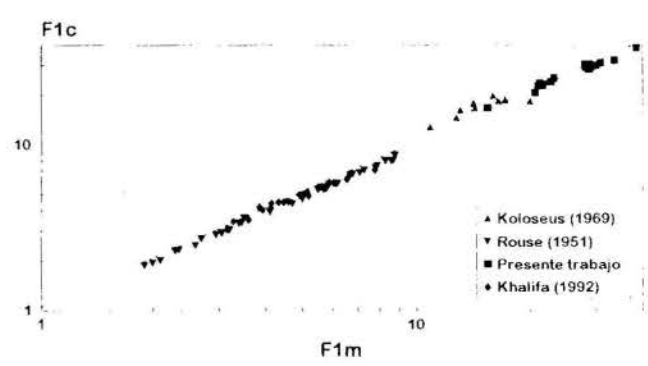


Figura 3: Relación entre el número de Froude calculado según la Ec. (2) y el correspondiente medido.

De las Ecs. (2) y (3) puede obtenerse la relación entre los números de Froude y las características geométricas del resalto dada por

$$\left[ \frac{F_1}{F_2} \right]^2 = r_o^2 y_o^3 \quad (4)$$

La función expresada por la Ec. (4) se representa en la Figura 4 en la cual se incorporan los valores experimentales del presente trabajo, para el rango de  $2.03 < r_o < 2.70$ .

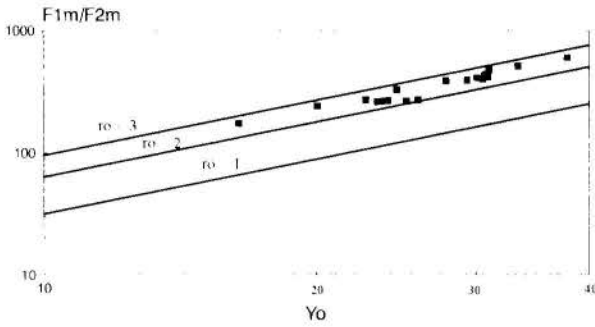


Figura 4 : Valores experimentales del número de Froude medidos en función de  $y_0$  y  $2.03 < r_0 < 2.70$ .

La relación entre los números de Froude  $F_1$  de aguas arriba y de aguas abajo  $F_2$ , expresado por la Ec. (4), para el rango de  $r_0$  entre 2.03 y 2.70 presenta un buen ajuste, según se observa en la Figura 4, en la cual se presentan los valores experimentales con el valor de  $r_0$  variable y los valores teóricos para  $r_0=2$  y  $r_0=3$ .

**Disipación de energía** : La disipación de energía por unidad de peso en el resalto  $H_L$  puede obtenerse aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2. Así se puede obtener

$$\frac{H_L}{y_1} = \frac{1}{2} F_1^2 \left[ \frac{r_0^2 y_0^2 - 1}{r_0^2 y_0^2} \right] + (1 - y_0) \quad (5)$$

y alternativamente

$$\frac{H_L}{y_2} = \frac{1}{2} F_2^2 \left[ r_0^2 y_0^2 - 1 \right] + \left[ \frac{1}{y_0} - 1 \right] \quad (6)$$

Sustituyendo la Ec. (2) en la Ec. (5) se elimina el número de Froude y se obtiene

$$\frac{H_L}{y_1} = -\frac{1}{4} \left\{ \left[ 1 - r_0 y_0^2 + \frac{1}{3} (r_0 - 1) \right] (1 + y_0^2 + y_0) \left[ 1 + \frac{1}{r_0 y_0} \right] \right\} + (1 - y_0) \quad (7)$$

La pérdida adimensional de energía, dada por la Ec. (7) para valores específicos de  $r_0$ , se presenta en la Figura 5, en la cual se incorporan los valores experimentales de Koloseus y Ahmad (1969) y los del presente estudio.

En la Figura 5 se observa un evidente incremento en la pérdida de energía con incrementos en los valores de  $r_0$ . Los datos obtenidos experimentalmente, para el presente trabajo, se ubican en la cercanía de  $r_0=3$ , en la parte superior. Para la determinación de la pérdida de energía no se dispuso de información de ensanches.

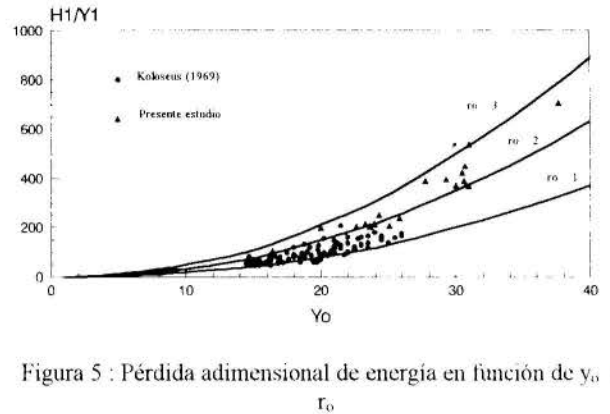


Figura 5 : Pérdida adimensional de energía en función de  $y_0$  y  $r_0$

**Fuerza específica** : La variación adimensional de fuerza específica generada por la divergencia del flujo en función de  $y_0$ , se observa en la Figura 6, la cual contiene los valores experimentales generados.

El cambio total de fuerza específica  $\Delta F$  entre las secciones 1 y 2 del resalto, en la dirección radial, se puede escribir como

$$\gamma \pi r_1 y_1^2 + \rho \frac{Q^2}{2\pi r_1 y_1} + \Delta F = \gamma \pi r_2 y_2^2 + \rho \frac{Q^2}{2\pi r_2 y_2} \quad (8)$$

en la cual  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\gamma$  es el peso específico y  $Q$  es el caudal. Si se define la fuerza específica adimensional, por unidad de ancho  $\Delta F_{*c}$  como

$$\Delta F_{*c} = \frac{\Delta F}{\gamma 2\pi r_1 y_1^2} \quad (9)$$

La Ec. (8) se puede entonces reescribir como

$$\Delta F_{*c} = \frac{1}{6} (r_0 - 1) [1 + y_0^2 + y_0] \quad (10)$$

en la cual se observa que para el resalto rectangular, con  $r_0 = 1$ , se tiene que  $\Delta F_{*c} = 0$ .

La variación adimensional de fuerza específica generada por la divergencia del flujo, en función de  $y_0$  se observa en la Figura 6, la cual contiene los valores experimentales generados y la Ec. (10) para valores  $2.03 < r_0 < 2.40$ .

**Longitud del resalto** : La longitud del resalto determinada experimentalmente se presenta en la Figura 7, en la cual también se muestran las longitudes de los resaltos rectangulares, obtenidos por Peterka (1964), para el USBR, así como las incluidas en las investigaciones previamente citadas para resaltos en expansión.

Se puede observar, en la Figura 7, que la longitud del resalto crece con el número de Froude hasta  $F_1$  cercano a 20, para los tres bancos experimentales analizados, y parece tender a

un valor constante  $L/y_2 = 6$  para números de Froude  $F_1$  mayores que aproximadamente 20.

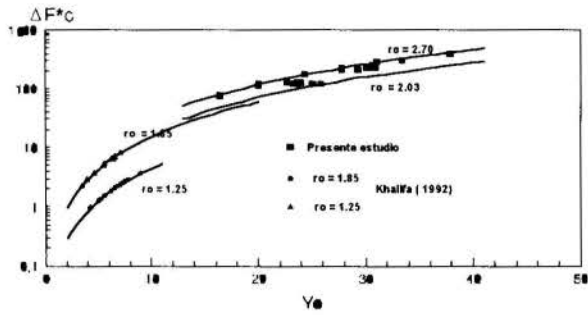


Figura 6 : Relación adimensional de la fuerza específica en función de  $y_0$  y  $r_0$

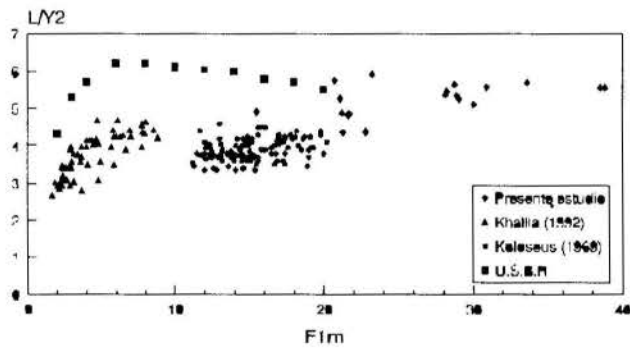


Figura 7: Longitud del resalto en función del número de Froude medido.

### CONCLUSIONES

Las ecuaciones deducidas para resaltos circulares, constatadas experimentalmente, ofrecen expresiones para las profundidades secuentes, la disipación de energía, la fuerza adimensional producida por las direcciones radiales y la longitud del resalto circular. Estas ecuaciones también son válidas, en su condición extrema, para  $r_0 = 1$  en resaltos rectangulares. También lo son para el caso de resaltos radiales en expansiones.

### RECONOCIMIENTOS

Los autores desean expresar su reconocimiento al personal del Laboratorio de Hidráulica - CHIDRA - de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, por su participación en la instalación experimental y al Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico - CDCHT - por el apoyo brindado a través del Proyecto I-398-93-02-A .

### BIBLIOGRAFÍA

Khalifa, A. M y McCorquodale, J.A.,1992, "Simulation of the Radial Hydraulic Jump", *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, Vol. 30, No. 2., pp. 149-160.

Koloseus, H.J. y Ahmad, D.,1969, "Circular Hydraulic Jump", *Journal of the Hydraulic Division, ASCE*, Vol. 95, No. HY1., pp. 409-422.

Lawson, J.D. y Phillips, B.B.,1983, "Circular Hydraulic Jump", *Journal of Hydraullic Engineering, ASCE*, Vol. 109, No. 4., pp. 505-518.

Olivero, M.L. y Aguirre-Pe, J.,1994, "Resalto Hidráulico Circular", *Proceeding del XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, Santiago de Chile, Vol. 1, pp. 243-253.

Peterka, A.J.,1964, "Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators", Bureau of Reclamation, Engineering Monograph No. 25., Denver, Colorado.

Rouse, H., 1957, "Elementary Mechanics of Fluids", John Wiley and Sons, p. 146.

### ABSTRACT

A radial hydraulic jump was generated by the action of a vertical water jet on a horizontal smooth surface, for which Koloseus and Ahmad (1969) had obtained the ratio of sequent depths as a function of the Froude number of the upstream section of the jump. As it was verified, the mentioned research and other work, available in literature, cover a limited experimental field. Then, it was decided to obtain additional experimental data to give better and wider support to the theoretical analysis based on the application of the continuity and momentum equations. Some alternative forms of the theoretical equations and new data are presented.





**ANÁLISE DE TURBINA DE REAÇÃO COM PÁ DE  
SIMPLES CURVATURA, UMA OPÇÃO PARA GERAÇÃO  
EM MICROCENTRAIS HIDROELÉTRICAS**



**Frederico F. Mauad**

Departamento de Hidráulica e Saneamento  
Escola de Engenharia de São Carlos - USP  
13560 - 970 - São Carlos - SP - Brasil

RESUMO

*Após o lançamento do plano nacional para Pequenas Centrais Hidroelétricas em 1982, convencionou-se as faixas de potência para 10.000 kW, 1.000 kW e 100 kW, sendo esta última denominada de microcentrais. Hoje, com a retomada do crescimento da economia nacional e da produção do parque industrial, o setor eletro-energético brasileiro estaria seriamente comprometido em função de uma demanda crescente sem o mesmo crescimento da oferta energética. Com base nestas questões, é feito o estudo do modelo de uma turbina com potência, até 10 kW, de baixo custo e montagem simples e rápida.*

INTRODUÇÃO

Para microcentrais hidrelétricas até 50 kW, a Escola Federal de Engenharia de Itajubá, vem desenvolvendo pesquisas com turbinas Michell-Banki, TIAGO (1986), bem como pesquisas em Bombas Centrífugas funcionando como Turbina (B.F.T.), VIANA (1986).

Esses trabalhos visam sempre a simplificação do projeto da máquina e conseqüentemente seu baixo custo, com um rendimento aceitável. Podendo com isto trazer tecnologia e conforto ao homem do campo, principalmente em regiões isoladas e não interligadas ao sistema energético, proporcionando condições de sua fixação nos locais de produção e minorando os efeitos da migração (êxodo rural).

Este estudo visa avaliar o desenvolvimento de um modelo de turbina de reação com rotor de simples curvatura, para baixa potência e de baixo custo, para ser utilizada em microcentrais hidrelétricas, através da variação das marés nos igarapés da região Amazônica.

A concepção deste trabalho surgiu da idéia desenvolvida a partir da turbina Michell-Banki de eixo horizontal em tentativa de adaptá-la a uma plataforma flutuante. Esta idéia tornou-se tecnicamente honerosa e difícil, devido a grande variação do nível de água, que poderia inundar a casa de máquinas caso a opção não fosse a plataforma flutuante. Este novo rotor, de pás de simples curvatura permite o arranjo de eixo vertical de modo a contornar o problema da variação das marés, e conseqüentemente o nível de jusante, sem haver risco de inundação do gerador.

DESCRIÇÃO DA TURBINA

Na Figura 1, MAUAD (1995), mostra o desenho do rotor de pás com simples curvatura, cujas dimensões foram obtidas de forma a adaptá-lo a uma caixa espiral já existente na bancada de testes.

O projeto deste rotor teve como objetivo a obtenção de uma máquina de baixo custo para ser utilizada em microcentrais hidrelétricas, sujeitas a variação de nível de jusante, tornando inviável a utilização de turbinas de eixo horizontal.

Os ângulos de entrada e saída de projeto foram fixados em 76° e 40°, respectivamente. O rotor foi concebido para ter

construção simples. As pás, em vez de calandradas, foram construídas a partir de um tubo de diâmetro de 4" e 3 mm de espessura. Elas foram fixadas ao disco base e anel através de solda elétrica.

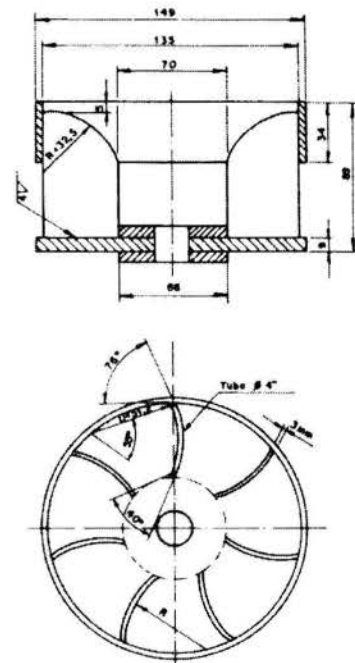


Figura 1 - Turbina Hidráulica com Pás de Simples Curvatura

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

O estudo teórico dos rotores das máquinas hidráulicas de fluxo é fundamentada na equação da conservação do momento da quantidade de movimento

Assim, para escoamentos em regime permanente associados a rotores, pode-se escrever a equação (1), aplicada a um volume de controle, VC, de uma superfície de controle SC, que envolve o rotor, onde  $\sum \dot{M}_{VC}$  é a soma dos momentos das forças que agem

sobre o volume de controle VC e  $\vec{R}$  é o vetor posição.

$$\sum \vec{M}_{VC} = \int_{SC} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \vec{V} \wedge \vec{R} \quad (1)$$

No desenvolvimento teórico da equação das máquinas hidráulicas são admitidas algumas hipóteses simplificadoras, necessárias para facilitar o tratamento matemático das equações envolvidas. Essas hipóteses levam a uma solução teórica útil, mas que só adquire conotação prática após ser devidamente corrigida por coeficientes empíricos. As hipóteses adotadas são: Escoamento Incompressível, Fluido Ideal, Perfil Uniforme de Escoamento, Regime Permanente, Rotor Ideal

### FUNIONAMENTO DA TURBINA DE REAÇÃO

Conforme LINSLEY & FRANZINI (1978) pode-se ter uma boa compreensão do funcionamento das turbinas de reação, atendendo para o fluxo através de um rotor de escoamento radial fig. 2. A velocidade da água na entrada, ao incidir sobre a pá do rotor, é praticamente tangente à extremidade de saída da palheta-guia. A velocidade do bordo de entrada das pás do rotor é  $u_1 = \omega \cdot r_1$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular do rotor em radianos por segundo. Para melhores condições operacionais, a água ao sair de entre as palhetas-guias deve escoar suavemente para o interior do rotor. Para conseguir esse resultado, a rotação do rotor deve ser tal que a velocidade  $v_1$  da água, relativamente à das pás, seja tangencial a elas. Verifica-se no diagrama das velocidades que a componente tangencial de  $V_{t1}$ , na entrada do rotor pode ser calculada como:

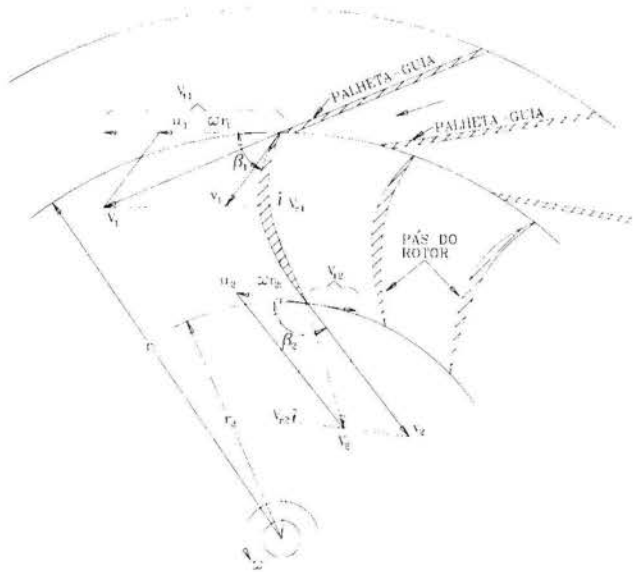


FIGURA 2 - Composição de Forças Para Turbina de Reação

$$V_{t1} = \omega \cdot r_1 - V_{r1} \cdot \cot \beta_1 \quad (2)$$

Onde  $V_{r1}$  é a componente de radial de  $V_1$ .  
 $\beta_1$  é o ângulo da pá do rotor

Na saída:

$$V_{t2} = \omega \cdot r_2 - V_{r2} \cdot \cot \beta_2 \quad (3)$$

Resultando na equação 4 conhecida como equação de Euler ou equação fundamental das turbomáquinas, hidráulicas, modalidade motora.

$$H_t = \frac{\omega}{g} (V_{t1} \cdot r_1 - V_{t2} \cdot r_2) \quad (4)$$

### ANÁLISE EXPERIMENTAL

O estudo do comportamento de uma turbina hidráulica, é feito em uma montagem experimental MAUAD (1995) que permite a obtenção dos parâmetros hidráulicos dados pelos pares de valores: vazão Q e a altura H (Potência Hidráulica) e dos parâmetros mecânicos dados através da rotação e do torque (Potência Mecânica). A relação entre as potências mecânica e hidráulica determina o rendimento da turbina.

O comportamento de turbinas hidráulicas é definido através da combinação de análises teóricas e experimentais destas máquinas, trabalhando sob diversas condições de funcionamento.

Nesta primeira fase as análises experimentais, no rotor de reação com pás de simples curvatura, foram feitas em duas etapas. A primeira foi o ensaio com a abertura do distribuidor constante em máximo valor e a carga variável definindo assim, através do campo básico de funcionamento, o ponto de funcionamento do rotor. Na segunda etapa procedeu-se ao ensaio do campo básico de funcionamento, com carga constante e com o distribuidor em várias aberturas, que tem como objetivo a definição das condições ótimas de funcionamento do rotor ensaiado.

### RESULTADOS OBTIDOS PARA O DISTRIBUIDOR A ABERTURA CONSTANTE E A CARGA VARIÁVEL

Este ensaio tem como objetivo, o levantamento do campo básico de funcionamento de um rotor de reação com pá de simples curvatura, permitindo uma análise da faixa de altura H, vazão Q e rotação n na qual se situa o rotor que está sendo ensaiado. Este campo básico de funcionamento, para o distribuidor  $\alpha$  mantido totalmente aberto, se refere a vazão Q versus rotação n com alturas H variáveis e fornece um diagrama que é conhecido como "diagrama de colinas". A partir deste campo serão determinadas as condições de funcionamento para o rotor ensaiado. A figura 3 mostra o resultado desse tipo de diagrama obtido no ensaio da turbina. Definindo a melhor altura de queda útil. Assim torna-se possível proceder a segunda fase das análises, isto é, fazer o ensaio para obtenção das condições ótimas a partir dos pontos já definidos.

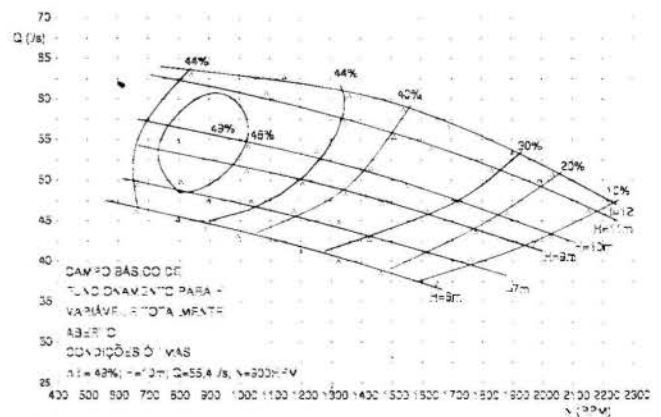


Figura 3 - Campo Básico de Funcionamento Para H Variável e Distribuidor  $\alpha$  Totalmente Aberto

**RESULTADOS OBTIDOS PARA ALTURA CONSTANTE COM VARIÇÃO DO DISTRIBUIDOR**

Já definida as condições de funcionamento da turbina através do primeiro ensaio para alturas variáveis, foi feito o ensaio para definir o campo básico de funcionamento. Para a altura ótima e variação do distribuidor  $\alpha$ , visando obter o melhor rendimento possível. De posse dos valores lidos e calculados, desenha-se em um gráfico a vazão  $Q$ , calculada, versus a rotação  $n$  lida para uma altura  $H$  constante com variação do distribuidor  $\alpha$ . O objetivo deste ensaio é determinar o melhor rendimento possível para esta turbina. A partir deste diagrama de colinas serão determinadas as condições ótimas de funcionamento do rotor. A figura 4 mostra o resultado desse tipo de ensaio. O ponto de maior rendimento define o ponto nominal do rotor.

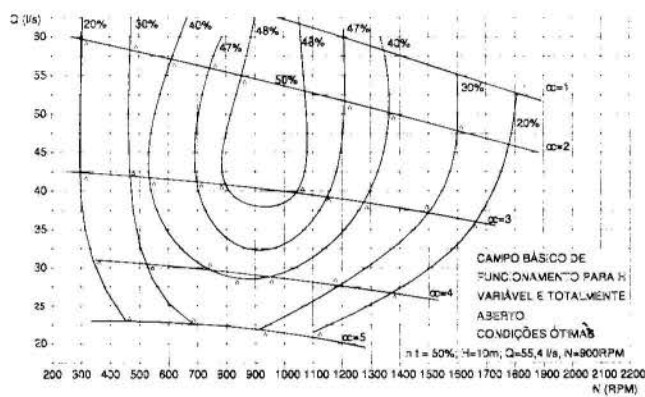


Figura 4 - Campo Básico de Funcionamento Para H Constante e Distribuidor  $\alpha$  Variável

**CURVAS DE RECEPÇÃO**

Do campo básico de funcionamento apresentado na figura 3, obtém-se as curvas de recepção do rotor, descritas como potência hidráulica, potência de eixo e rendimento da turbina versus vazão, para a rotação ótima de 900 rpm e altura de queda de 10m, conforme mostra a figura 5. Observa-se que ocorre uma queda de rendimento de somente 2%, para a faixa de variação da vazão entre 0,038[ $m^3/s$ ] a 0,061[ $m^3/s$ ].

Este comportamento da máquina mostra que ela é adequada para atuar em locais onde haja variação de vazão, como é o caso típico de microcentrais isoladas, de grande aplicação no meio rural.

Do campo básico de funcionamento mostrado na fig. 4, levanta-se as curvas altura de queda, rendimento da turbina e potência de eixo versus vazão, para a rotação ótima de 900 rpm, com variação na altura de queda, mostradas na figura 6. A partir desta figura 6 conclui-se que a variação de altura entre 6 e 12 metros apresenta uma queda de rendimento de 5,5%, a qual é alta em função do baixo rendimento obtido pôr esta turbina. Desta maneira a máquina em questão não favorece microcentrais que apresentam variação de altura.

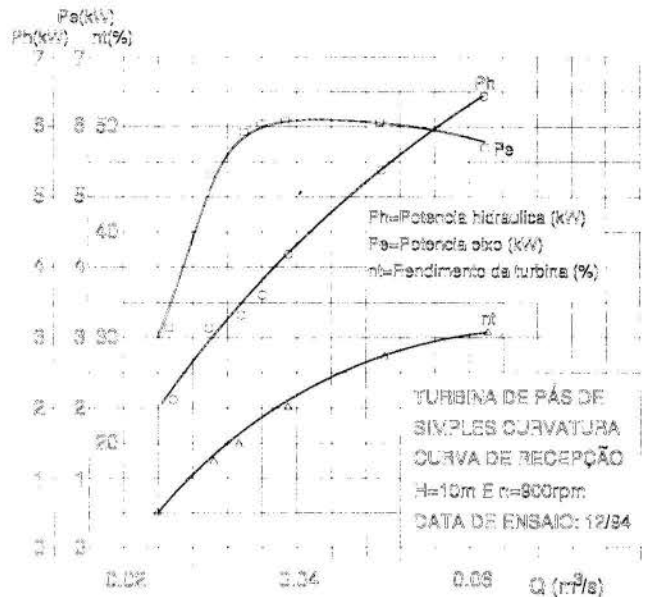


Figura 5 - Curvas de Recepção Para Altura Constante

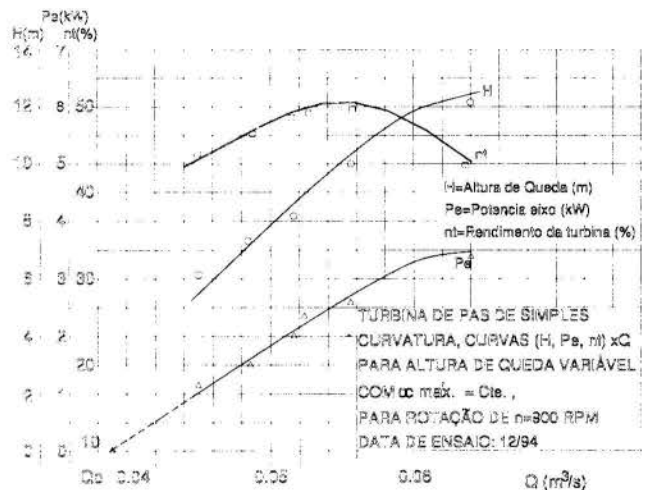


Figura 6 - Curvas de Recepção Para Altura Variável

**CONCLUSÕES**

Conforme o objetivo deste trabalho, que era o de estudar um rotor de pás de simples curvatura e de fabricação de baixo custo, adequado para aproveitamentos hidrelétricos de pequenas potências, gerados por variação das marés nas várzeas do rio Amazonas, pode-se concluir que apesar dos baixos rendimentos de  $\eta_t = 50\%$ , há possibilidade de se desenvolver tais equipamentos. O rendimento de 50% obtido nos ensaios, ficou muito abaixo da expectativa inicial para rotores nesta ordem de potência, que é em torno de 70%.

O ponto nominal de operação deste equipamento é de altura de queda útil de 10m, vazão de 55,4 l/s, rotação de 900 rpm e a faixa de utilização de 6 a 12 metros, considerando uma queda de rendimento de 5,5% para um rendimento mínimo de 44,5%.

Estes estão bastante fora do campo de aplicação almejado para quedas variando de 1 a 3 metros. Portanto, nota-se que faz-se necessário o estudo de um rotor mais adequado para estas condições, para tentar alcançar a faixa de 70%, o que o tornará competitivo para a região não centralizada

Um ponto a favor da operação deste rotor, foi o aspecto apresentado pela curva de recepção, levantada a uma rotação de

900 rpm. Pôr ela pode-se verificar que ocorre uma queda de rendimento de apenas 2% numa faixa entre 38 a 61 l/s. Esta é uma característica importante em máquinas que operam em microcentrais isoladas, de áreas rurais, onde há uma grande variação da curva de carga.

Máquinas com curvas de recepção com platôs extensos são as mais indicadas para tal situação, como é o caso deste rotor.

Outro problema importante detectado na construção do rotor, foi a diferença de ângulos entre o rotor construído e projetado, que foi de 37°. Esta variação provocou a criação de uma componente de choque e, conseqüentemente acarretou na diminuição do aproveitamento da energia cinética, sendo portanto responsável pela queda de rendimento da máquina.

Para a região em estudo, a opção de geração descentralizada, através de usinas de baixa potência, mostrou ser uma opção viável.

## NOMENCLATURA

### Caracteres Latinos

<b>g</b>	: Aceleração da Gravidade, [m/s <sup>2</sup> ].
<b>H</b>	: Altura de Queda, [m].
<b>H<sub>t</sub></b>	: Altura Teórica [m].
<b>M<sub>VC</sub></b>	: Momento sobre um Volume de Controle, [N.m].
<b>n</b>	: Rotação, [rpm].
<b>Pe</b>	: Potência de Eixo, [kW].
<b>Ph</b>	: Potência Hidráulica, [kW].
<b>Q</b>	: Vazão Total Através da Turbina, [m <sup>3</sup> /s].
<b>R</b>	: Vetor Posição, [m].
<b>r<sub>1</sub></b>	: Raio Interno Maior do Rotor, [m].
<b>r<sub>2</sub></b>	: Raio Interno Menor do Rotor, [m].
<b>S</b>	: Área, [m <sup>2</sup> ].
<b>SC</b>	: Superfície de Controle.
<b>u<sub>1</sub></b>	: Velocidade da Água que Incide sobre as Pás do Rotor na Entrada da Turbina, [m/s].
<b>V</b>	: Vetor Velocidade, [m/s].
<b>v<sub>1</sub></b>	: Velocidade da Água, Relativamente às Pás do Rotor, na Entrada do Mesmo, [m/s].
<b>v<sub>2</sub></b>	: Velocidade da Água, Relativamente às Pás do Rotor, na Saída do Mesmo, [m/s].
<b>VC</b>	: Volume de Controle.
<b>v<sub>r1</sub></b>	: Componente Radial da Velocidade v <sub>1</sub> , [m/s].
<b>v<sub>r2</sub></b>	: Componente Radial da Velocidade v <sub>2</sub> , [m/s].
<b>v<sub>t1</sub></b>	: Componente Tangencial da Velocidade v <sub>1</sub> , [m/s].
<b>v<sub>t2</sub></b>	: Componente Tangencial da Velocidade v <sub>2</sub> , [m/s].

### Caracteres Gregos

<b>ρ</b>	: Massa Específica da Água, [kg/m <sup>3</sup> ].
<b>ω</b>	: Velocidade Angular do Rotor, [rad/s].
<b>β</b>	: Ângulo de Entrada ou Saída das Pás do Rotor, [rad].
<b>α</b>	: Abertura do Distribuidor.
<b>β<sub>1</sub></b>	: Ângulo da Pá do Rotor na Entrada, [rad].
<b>β<sub>2</sub></b>	: Ângulo da Pá do Rotor na Saída, [rad].
<b>η<sub>t</sub></b>	: Rendimento Total.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LISLEY, R.K ; FRANZINE, J.B. Engenharia de recursos hídricos. São Paulo, EDUSP, 1978

MAUAD, F.F., 1995 "Estudo de Uma Turbina de Reação com Pá de Simples Curvatura Para Utilização no Meio Rural". Dissertação (Mestrado) - Escola Federal Engenharia de Itajubá, Itajubá

TIAGO, G.L.F., 1986 "Desenvolvimento Teórico Para Dimensionamento de Turbina Hidráulica: Michell - Banki". Dissertação (Mestrado) - Escola Federal Engenharia de Itajubá, Itajubá

VIANA, A.N.C., 1986, "Bombas Funcionando como Turbinas". Dissertação (Mestrado) - Escola Federal Engenharia de Itajubá, Itajubá

## ABSTRACT

The national plan for small hydro-power in 1982 established power bands of 10.000 kW and 1000 kW and 100 kW, with this last one classified as "micro plants", chosen to be the object of present work. With the improvement of the national economy and consequently the growth of the industrial park, the Brazilian electrical-energetic would be seriously compromised considering the growth of demand. On the basis of these questionas, the present work is a study of a turbine model with low cost, quick and easy to built in the rural area (rural electrification).



## ANÁLISE DO ESCOAMENTO ROTACIONAL EM GRADES DE PLACAS PLANAS COM VORTICIDADE UNIFORME

**ABCm**

Nelson Manzaneres Filho  
Ramiro G. Ramirez Camacho  
Escola Federal de Engenharia de Itajubá  
C.P. 50, 37500-000- Itajubá, MG - Brasil



### RESUMO

Apresenta-se um modelo para análise do escoamento ideal, com vorticidade uniforme, através de grades de pás retas e finas. Os casos limites de número infinito de pás e de pá isolada são enfatizados. Propõe-se uma técnica numérica para solução do modelo, empregando vórtices discretos sobre as pás. A técnica é validada através de resultados analíticos existentes para a situação de escoamento potencial. Destaque é dado para a situação de grades regenerativas. Resultados para a circulação e vorticidade são apresentados para essa situação, em função dos parâmetros geométricos da grade.

### INTRODUÇÃO

O estudo das grades de perfis aerodinâmicos constitui uma das bases para análise do desempenho e projeto das máquinas de fluxo. Uma boa parte das metodologias empregadas nesse estudo baseia-se na hipótese de escoamento potencial e em critérios corretivos para se considerar os efeitos viscosos. No caso das máquinas de fluxo convencionais, operando em condições nominais e com altos números de Reynolds, a aplicação dessas metodologias conduz, via de regra, a resultados satisfatórios.

Uma das situações em que a hipótese de escoamento potencial é essencialmente inconsistente com a realidade física se dá no caso das máquinas de fluxo regenerativas (MFR). Um esquema ilustrativo das características do escoamento nas MFR está mostrado na Fig. 1. O escoamento ocorre em superfícies toroidais, com linhas de corrente de formato helicoidal. A componente de velocidade associada à vazão está na direção do deslocamento das pás do rotor (tangencial), em contraste com as máquinas de fluxo convencionais, em que a vazão é dada pela componente normal ao deslocamento das pás (meridional). Nas MFR, a componente meridional associa-se a um movimento de recirculação do fluido entre as pás e o canal lateral fixo. Desse modo, passa a existir uma variação de pressão na direção tangencial a qual, pelas equações de conservação da quantidade de movimento, vem sempre acompanhada de uma componente de vorticidade absoluta na direção normal às superfícies toroidais do escoamento. Sendo assim, qualquer teoria de grade aplicável às MFR deve levar em conta esse fato, o que torna inviável a aplicação direta das metodologias já existentes para o escoamento potencial.

Andrew (1989) analisou o efeito de um campo uniforme de vorticidade sobre o escoamento bidimensional em grades lineares, empregando uma adaptação do método dos painéis de Hess e Smith (1966). Andrew (1989) verificou que a vorticidade influi fortemente no carregamento aerodinâmico sobre os perfis da grade, em relação ao caso potencial.

Manzaneres e Ramirez (1995) estabeleceram o conceito de *grades regenerativas*, visando uma teoria mais coerente com as MFR. O conceito foi aplicado na modelagem do escoamento ideal em grades com pás retas e infinitamente finas (placas planas), empregando-se a lei de Biot-Savart na representação do campo de vorticidade uniforme e do campo de perturbação das pás. Dessa forma, verificou-se que a vorticidade e a circulação ficavam determinadas de maneira unívoca pelo ângulo de incidência do escoamento em relação às pás, no caso regenerativo. Alguns resultados numéricos, obtidos através de uma técnica de vórtices discretos colocados sobre as pás, foram apresentados com fins ilustrativos. Aspectos importantes, como a

validação da técnica e o tratamento dos casos limites de pá isolada e número infinito de pás, não foram abordados em detalhes naquela ocasião.

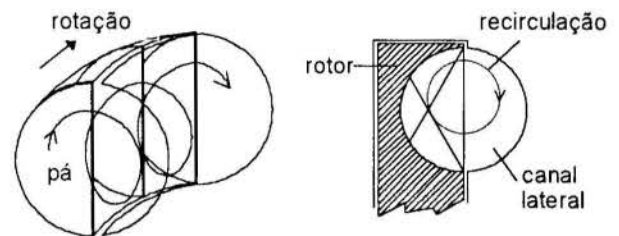


Figura 1 - Esquema de uma máquina de fluxo regenerativa.

Um estudo mais elaborado do escoamento ideal em grades de placas planas, com um campo de vorticidade uniforme, será apresentado no presente trabalho. As situações limites de pá isolada e número infinito de pás serão enfatizadas. A técnica de vórtices discretos sobre as pás, empregada na solução numérica, será validada através da comparação com resultados analíticos disponíveis para o escoamento potencial em grades (Weinig, 1964) e, também, para os escoamentos potencial e rotacional sobre a pá isolada. Dentre outros, resultados serão apresentados mostrando a influência da solidez e do ângulo de montagem da grade na vorticidade e na circulação regenerativa das pás, em relação à circulação potencial, mantido o ângulo de incidência do escoamento não perturbado.

### DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se, na Fig. 2, o esquema de uma grade linear com pás infinitamente finas (placas planas) no plano  $(x,y)$ . Os bordos de ataque e de fuga da pá de referência situam-se em  $(0,0)$  e  $(l \cos \beta, l \sin \beta)$ , respectivamente. O comprimento de uma pá é  $l$ , o ângulo de montagem é  $\beta$  e o espaçamento entre as pás é  $t$  (passo). O problema consiste em se determinar o escoamento ideal, bidimensional e permanente através da grade, em particular a circulação em torno de uma pá, dados: (i) a velocidade uniforme do escoamento não perturbado, de módulo  $W_\infty$  e ângulo  $\beta_\infty = \beta + \alpha$  em relação ao eixo  $x$ , sendo  $\alpha$  o ângulo

de incidência em relação às pás; (ii) um campo de vorticidade uniforme,  $\omega$ , prescrito numa região limitada por duas *retas limites* paralelas à grade,  $x_1$  a montante e  $x_2$  a jusante, com  $x_1 = \lambda_1 l \cos \beta$  e  $x_2 = \lambda_2 l \cos \beta$ ;  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são fatores de espaçamento lateral. A unicidade da solução do problema é garantida pela consideração da condição de Kutta no bordo de fuga das pás. Um caso *particular* de interesse se dá quando as velocidades resultantes nas retas limites se igualam. Nesse caso, a grade será dita *regenerativa*, e a vorticidade não poderá ser fixada independentemente da incidência.

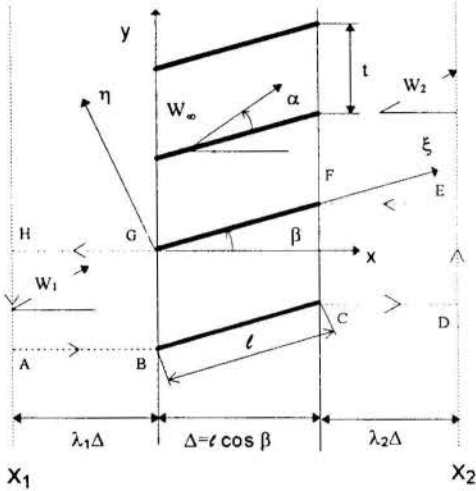


Figura 2 - Esquema de grade linear de pás retas e finas.

As componentes  $x$  e  $y$  da velocidade não perturbada relacionam-se às correspondentes componentes em  $x_1$  e  $x_2$ , da maneira convencional:

$$W_{\alpha x} = W_{1x} = W_{2x} \quad (1)$$

$$W_{\alpha y} = \frac{W_{1y} + W_{2y}}{2} \quad (2)$$

Aplicando-se o Teorema de Stokes ao campo de escoamento limitado pelo circuito ABCDEFGHA da Fig. 2, obtém-se a seguinte expressão para a circulação em torno de uma placa,  $\Gamma_p$ :

$$\Gamma_p = t(W_{1y} - W_{2y}) + \omega(x_2 - x_1)t \quad (3)$$

Pelas equações (2) e (3), resultam as seguintes:

$$W_{1y} = W_{\alpha y} + \frac{\Gamma_p}{2t} - \omega \frac{(x_2 - x_1)}{2} \quad (4.a)$$

$$W_{2y} = W_{\alpha y} - \frac{\Gamma_p}{2t} + \omega \frac{(x_2 - x_1)}{2} \quad (4.b)$$

A condição de *grade regenerativa* é, por definição, aquela em que  $W_{1y} = W_{2y}$ .

## MODELAGEM DO PROBLEMA

No modelo proposto, o campo global de velocidades do escoamento é representado pela superposição adequada de três parcelas: (I) campo uniforme de velocidades,  $W_\infty$ ; (II) campo de velocidades induzidas por uma distribuição uniforme de vorticidade,  $\omega$ , entre as retas limites da grade ("vortex layer"); (III) campo de velocidades induzidas por distribuições contínuas de vórtices sobre as pás ("vortex sheets"), com densidade  $\gamma(\xi)$ , no intervalo  $0 < \xi \leq \ell$  (ver Fig. 2). Os campos (II) e (III) podem ser expressos aplicando-se a Lei de Biot-Savart. Em particular, o campo (III) pode ser obtido também por meio de funções complexas analíticas (ver Karamcheti, 1966 e Lewis, 1991). As expressões para as componentes de velocidade desses campos são as seguintes:

$$(I) \quad W_{Ix} = W_{\alpha x} = W_\infty \cos(\alpha + \beta) \quad (5.a)$$

$$W_{Iy} = W_{\alpha y} = W_\infty \sin(\alpha + \beta) \quad (5.b)$$

$$(II) \quad W_{IIx} = 0 \quad (6.a)$$

$$W_{IIy} = \omega \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \quad (6.b)$$

$$(III) \quad W_{IIIx} = \int_0^\ell \gamma(\xi') R(\xi, \xi') d\xi' \quad (7.a)$$

$$W_{IIIy} = \int_0^\ell \gamma(\xi') I(\xi, \xi') d\xi' \quad (7.b)$$

onde

$$R(\xi, \xi') = \frac{1}{2t} \frac{\sin \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \sin \beta \right]}{\cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \cos \beta \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \sin \beta \right]} \quad (8.a)$$

$$I(\xi, \xi') = -\frac{1}{2t} \frac{\sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \cos \beta \right]}{\cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \cos \beta \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \sin \beta \right]} \quad (8.b)$$

Observa-se que, para  $x \rightarrow \pm\infty$ , as velocidades do campo (III) são uniformes em  $y$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (W_{IIIx}, W_{IIIy}) = (0, \pm \Gamma_p / 2t)$ . Assim, o modelo produz velocidades médias, nas retas limites, compatíveis com as Eqs. (4ab).

Condições do Escoamento. A componente de velocidade normal às pás, resultante da superposição dos três campos, deve ser nula. A aplicação dessa condição de impermeabilidade conduz à seguinte equação integral de Fredholm de 1ª espécie, singular, para a densidade de vórtices,  $\gamma(\xi)$ :

$$\int_0^\ell \gamma(\xi') K(\xi, \xi') d\xi' = -W_\infty \sin \alpha - \omega \left[ \xi - \frac{(1 + \lambda_2 - \lambda_1)}{2} \ell \right] \cos^2 \beta \quad (9)$$

$$K(\xi, \xi') = \cos \beta \cdot I(\xi, \xi') - \sin \beta \cdot R(\xi, \xi'). \quad (10)$$

A circulação,  $\Gamma_p$ , é dada pela integração da densidade de vórtices ao longo de uma pá:

$$\Gamma_p = \int_0^\ell \gamma(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Adicionalmente, as soluções da Eq. (9) devem satisfazer a condição de Kutta,  $\gamma(\ell) = 0$ .

**Soluções Básicas.** É conveniente, de início, considerar duas soluções básicas da Eq. (9), satisfazendo a condição de Kutta: (i) solução  $\gamma_0$ , puramente potencial, referente a  $W_\infty = 1$ ,  $\sin \alpha = 1$ ,  $\omega = 0$ ; (ii) solução  $\gamma_1$ , puramente rotacional, referente a  $W_\infty = 0$ ,  $1 + \lambda_2 - \lambda_1 = 0$ ,  $\omega \ell \cos^2 \beta = 1$ . As equações integrais para  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  e as correspondentes circulações são:

$$\int_0^\ell \gamma_0(\xi') K(\xi, \xi') d\xi' = -1, \quad \Gamma_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \gamma_0(\xi) d\xi; \quad (12.ab)$$

$$\int_0^\ell \gamma_1(\xi') K(\xi, \xi') d\xi' = -\frac{\xi}{\ell}, \quad \Gamma_1 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \gamma_1(\xi) d\xi. \quad (13.ab)$$

A circulação em torno de uma pá, com a condição de Kutta imposta, é dada pela combinação linear de  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , podendo ser expressa convenientemente como segue:

$$\Gamma_p = \Gamma_{pot} + \omega \ell^2 \cos^2 \beta \cdot \Gamma_\omega, \quad (14)$$

$$\Gamma_{pot} = W_\infty \ell \sin \alpha \Gamma_0, \quad (15)$$

$$\Gamma_\omega = \Gamma_1 - \frac{(1 + \lambda_2 - \lambda_1)}{2} \Gamma_0. \quad (16)$$

Note-se que  $\Gamma_{pot}$  é a circulação do escoamento potencial clássico ( $\omega = 0$ ) e  $\Gamma_\omega$  representa um fator adimensional para o efeito da vorticidade do escoamento. Os valores das circulações adimensionais básicas,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , dependem apenas da geometria da grade ( $\beta$  e  $t/\ell$ ). A técnica para o cálculo desses valores será discutida posteriormente.

**Caso das grades regenerativas.** Considerando o caso regenerativo,  $W_{1y} = W_{2y}$ , nas Eqs. (3), (14), (15) e (16), resultam as seguintes expressões para a vorticidade e para a relação entre as circulações regenerativa e potencial:

$$\omega = \frac{W_\infty \sin \alpha \Gamma_0}{\cos \beta [(1 + \lambda_1 + \lambda_2)t - \ell \cos \beta \Gamma_\omega]}; \quad (17)$$

$$\frac{\Gamma_p}{\Gamma_{pot}} = \left[ 1 + \frac{\ell \cos \beta \cdot \Gamma_\omega}{(1 + \lambda_1 + \lambda_2)t - \ell \cos \beta \cdot \Gamma_\omega} \right]. \quad (18)$$

As Eqs. (17), (18) e (15) mostram que a vorticidade e a circulação, na situação regenerativa, ficam determinadas de maneira unívoca pelo ângulo de incidência,  $\alpha$ . Além disso, nos casos usuais em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivos, pode-se mostrar que o 2º termo entre colchetes na Eq. (18) é positivo. Logo, a circulação da grade regenerativa e o carregamento aerodinâmico correspondente serão maiores que na situação potencial, para a mesma incidência do escoamento não perturbado. Uma explanação física simplificada desses resultados pode ser dada:

na situação potencial, a circulação das pás sempre deflete o escoamento entre as retas limites  $x_1$  e  $x_2$ . Daí, para que a deflexão se anule e o escoamento seja regenerado, torna-se necessária uma vorticidade adequada entre  $x_1$  e  $x_2$  e um conseqüente aumento na circulação das pás, compatível com o Teorema de Stokes.

**Limite para número infinito de pás.** Para espaçamentos suficientemente pequenos,  $t \rightarrow 0$ , é possível obter uma solução assintótica do modelo proposto. Neste sentido, as seguintes aproximações são válidas em (8.ab) e (10):

$$R(\xi, \xi') \cong 0, \quad I(\xi, \xi') \cong -\frac{1}{2t}, \quad K(\xi, \xi') \cong -\frac{\cos \beta}{2t}. \quad (19.abc)$$

Levando em conta a singularidade das equações integrais e a presença da condição de Kutta, é conveniente aplicar (19.c) em (12.a) e (13.a), fazendo  $\xi = \ell$ . Considerando, ainda, as Eqs. (12.b) e (13.b), resultam as seguintes aproximações de 1ª ordem para as circulações básicas (válidas para  $t$  pequeno):

$$\Gamma_0 \cong \Gamma_1 \cong \frac{2t/\ell}{\cos \beta}. \quad (20)$$

Nas Eqs. (16), (17) e (18), obtêm-se os limites para a vorticidade e a circulação da *grade regenerativa com número infinito de pás*:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega = \frac{W_\infty \sin \alpha}{\ell \lambda_2 \cos^2 \beta}, \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma_p}{\Gamma_{pot}} = \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_2}. \quad (22)$$

Salienta-se que o tratamento do limite  $t \rightarrow 0$  pode ser feito de maneira alternativa e independente das equações integrais. Por exemplo, é possível estender para o escoamento rotacional a abordagem física dada por Wislicenus (1964) ao escoamento potencial em grades com número infinito de pás. Com isso, as aproximações e os limites para  $t \rightarrow 0$ , expressos nas Eqs. (20), (21) e (22), seriam recuperados, corroborando a consistência física do presente modelo.

**Limite para pá isolada.** No caso de grandes espaçamentos,  $t \rightarrow \infty$ , os seguintes limites são obtidos nas Eqs. (8.a,b) e (10):

$$R(\xi, \xi') = \frac{\sin \beta}{2\pi(\xi - \xi')}, \quad I(\xi, \xi') = -\frac{\cos \beta}{2\pi(\xi - \xi')}, \quad (23.ab)$$

$$K(\xi, \xi') = -\frac{1}{2\pi(\xi - \xi')}. \quad (23.c)$$

Recupera-se, então, a formulação clássica do escoamento ideal em torno de uma placa plana isolada. É possível obter soluções analíticas das Eqs. (12.ab) e (13.ab), com o núcleo  $K(\xi, \xi')$  dado em (23.c). Pode-se aplicar a teoria dos perfis delgados, exposta por Karamcheti (1966), com base em estabelecidas relações entre séries de Fourier conjugadas e fórmulas integrais de Poisson. Os resultados assim obtidos são:

$$\gamma_0 = 2\sqrt{\frac{\ell - \xi}{\xi}}, \quad \Gamma_0 = \pi, \quad (24.ab)$$

$$\gamma_1 = \left(1 + 2 \frac{\xi}{\ell}\right) \sqrt{\frac{\ell - \xi}{\xi}}, \quad \Gamma_1 = \frac{3\pi}{4} \quad (25.ab)$$

Para a situação de grade regenerativa, com  $t \rightarrow \infty$ , tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_p}{\Gamma_{pot}} = 1, \quad (26.ab)$$

resultado fisicamente previsível, já que a circulação potencial na pá isolada não pode desviar o escoamento, sendo naturalmente regenerativa. Nesse caso, a presença de uma vorticidade tornaria o escoamento não regenerativo.

### SOLUÇÃO NUMÉRICA

Diversas abordagens podem ser indicadas para a solução das equações integrais (12.a) e (13.a). Neste trabalho, optou-se por uma técnica numérica, utilizando-se vórtices discretos sobre as pás. As pás são divididas em N segmentos (painéis) de mesmo comprimento. Em cada painel, são colocados um vórtice e um ponto de controle, nas posições 1/4 e 3/4 do comprimento, respectivamente (Fig. 3). As Eqs. (12.a) e (13.a)

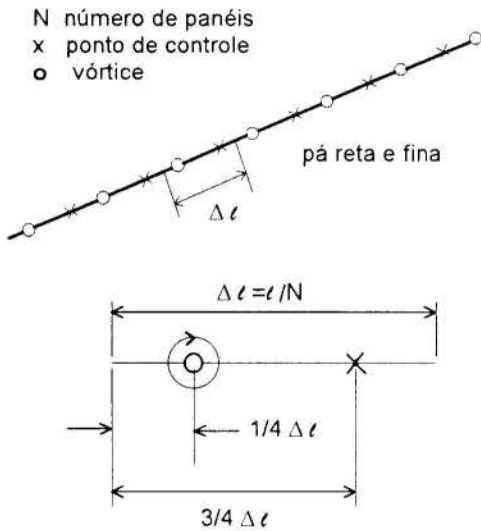


Figura 3 - Localização dos vórtices e pontos de controle.

são discretizadas adequadamente e aplicadas nos pontos de controle. Para cada uma delas, resulta um sistema de equações algébricas lineares  $N \times N$ , tendo como incógnitas as intensidades dos vórtices. Os sistemas são resolvidos através do método de eliminação de Gauss, com condensação pivotal parcial. A partir daí, os valores das circulações básicas para cada sistema,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , são calculados, somando-se as respectivas intensidades dos vórtices.

Alguns aspectos da técnica devem ser destacados. É necessário, primeiramente, que a localização de um ponto de controle seja posterior à posição do respectivo vórtice. Dessa forma, a condição de Kutta é automaticamente satisfeita na medida em que o número de painéis aumenta. Nesse aspecto, há também razões relacionadas à convergência da técnica, segundo estudos apresentados por Belotserkovsky e Lifanov (1993). Por outro lado, a escolha das efetivas posições do vórtice e do ponto

de controle seguiu um critério heurístico: no caso de uma placa plana isolada, as posições de um único vórtice e um único ponto de controle, conducentes aos valores exatos  $\Gamma_0 = \pi = 3.14159265...$  e  $\Gamma_1 = 3\pi/4 = 2.35619449...$ , são 1/4 e 3/4 do comprimento da placa, respectivamente. Verifica-se que o emprego de um número relativamente grande de painéis tem influência desprezível nos resultados da placa isolada. Por exemplo, com  $N=80$ , resulta  $\Gamma_0 = 3.14159263$  e  $\Gamma_1 = 2.35619447$ . Esses resultados numéricos, bem como todos os seguintes, foram calculados em microcomputadores do tipo IBM-PC, rodando programas escritos em FORTRAN, com precisão dupla.

As Figs. 4 e 5 mostram os resultados numéricos obtidos para  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , em função dos parâmetros geométricos da grade,  $t/\ell$  e  $\beta$ . Os resultados foram obtidos com 80 painéis. Note-se que as variações de  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  são semelhantes e que  $\Gamma_0 > \Gamma_1$  (exceto para  $t=0$ , quando  $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$ ). Interessa observar que, pelas Eqs. (15) e (24.b),  $\Gamma_0/\pi$  é igual à relação entre as circulações potenciais da pá em grade e da pá isolada. O diagrama  $\Gamma_0/\pi$  versus  $t/\ell$ , tendo  $\beta$  como parâmetro, foi apresentado inicialmente por Weinig (1964), que obteve uma solução analítica para o escoamento potencial em grades de placas planas, empregando o método da transformação conforme. Aparentemente, todavia, soluções analíticas para  $\Gamma_1$  não se encontram reportadas.

No sentido de validar a técnica proposta, diversas comparações foram feitas entre a solução numérica para  $\Gamma_0$

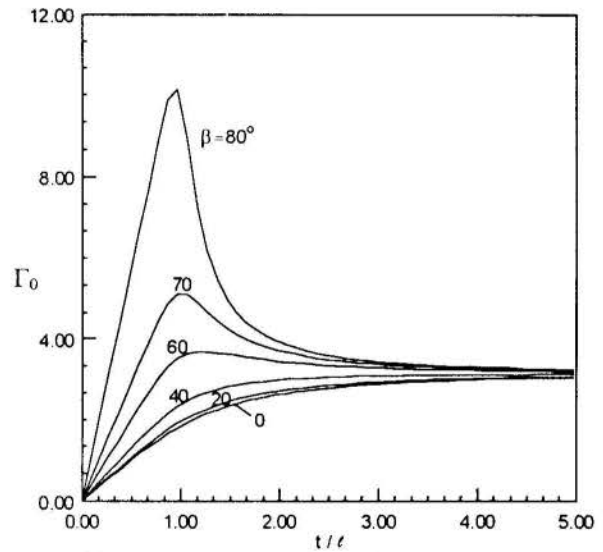


Figura 4 - Circulação adimensional básica,  $\Gamma_0$ .

e a solução analítica de Weinig (1964). A Tabela 1 mostra algumas dessas comparações, empregando  $N=80$ . Observa-se que a técnica numérica produz excelentes resultados numa ampla faixa de parâmetros geométricos. Salienta-se que, para ângulos de montagem e circulações relativamente altos (por exemplo, para  $\beta > 70^\circ$  e  $0.5 < t/\ell < 1.5$ ), a qualidade numérica dos resultados tende a cair. A Tabela 2 apresenta uma dessas situações, para a qual se variou o número de painéis entre 40 e 500. Verifica-se, nesse caso, uma taxa de convergência bastante lenta com o aumento de  $N$ . Contudo, para  $N=80$ , obtêm-se uma precisão de 4 algarismos significativos, o que se considera satisfatório. Lembre-se que, nas aplicações finais dos presentes estudos em projetos de máquinas de fluxo regenerativas (MFR), ângulos de montagem altos nunca são utilizados. Aliás, é mais comum empregar-se  $\beta=0^\circ$ . Sendo assim, pode-se considerar, que a técnica numérica está satisfatoriamente validada.



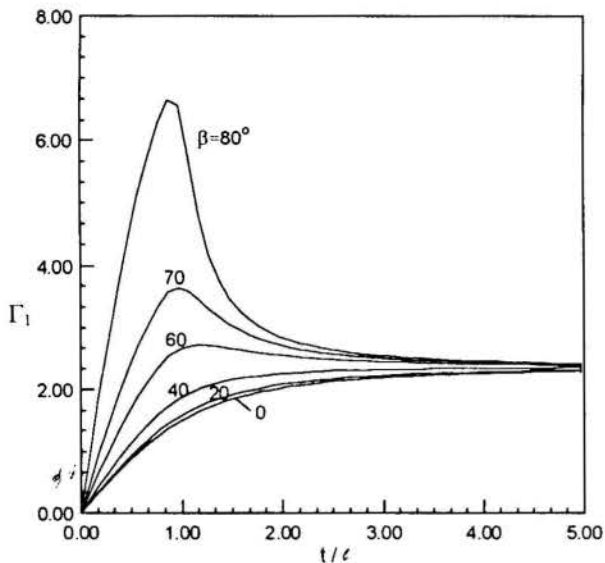


Figura 5 - Circulação adimensional básica,  $\Gamma_1$ .

Tabela 1 - Comparação entre a solução numérica e a solução analítica de Weinig (1964), para diversas grades. (número de painéis,  $N=80$ ).

$\beta$	$t/\ell$	$\Gamma_0$ solução numérica	$\Gamma_0$ solução analítica
$80^\circ$	0.35759313	4.11859353	4.11859348
$60^\circ$	1.06073357	3.62346623	3.62340114
$40^\circ$	2.73054988	3.06738972	3.06738846
$20^\circ$	3.48821350	2.98621864	2.98621849
$0^\circ$	4.27166235	3.00725069	3.00725073

Tabela 2 - Comparação entre a solução numérica e a solução analítica de Weinig (1964), para diversos números de painéis. (Grade com:  $\beta=80^\circ$  e  $t/\ell = 1.3154707$ )

$N$	$\Gamma_0$ solução numérica	$\Gamma_0$ solução analítica
40	5.828769	5.828363
80	5.828465	
150	5.828392	
250	5.828373	
500	5.828366	

## RESULTADOS PARA GRADES REGENERATIVAS.

Uma vez determinadas as circulações básicas,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , as Eqs. (14), (15) e (16) podem ser aplicadas diretamente no cálculo da circulação da grade correspondente, dada a vorticidade,  $\omega$ , o ângulo de incidência,  $\alpha$  e os fatores de espaçamento lateral,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Em particular, é direto o cálculo da vorticidade e da circulação referentes à situação regenerativa, Eqs. (17) e (18). Com relação às aplicações em MFR, é sempre possível e conveniente escolher as retas limites com  $\lambda_1 = \lambda_2$ , não havendo perda de generalidade nessa escolha. Observe-se, contudo, que a diminuição dos espaços laterais provocam aumentos na vorticidade e na circulação da grade regenerativa. Isso pode ser facilmente verificado no caso de número infinito de pás, Eqs. (21) e (22).

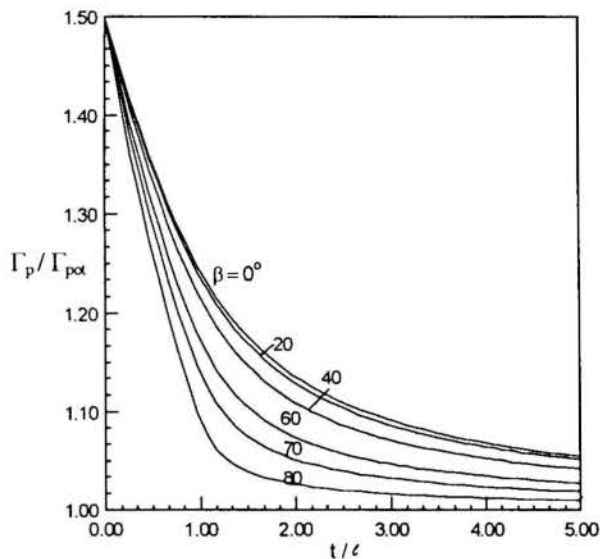


Figura 6 - Relação entre circulações regenerativa e potencial.

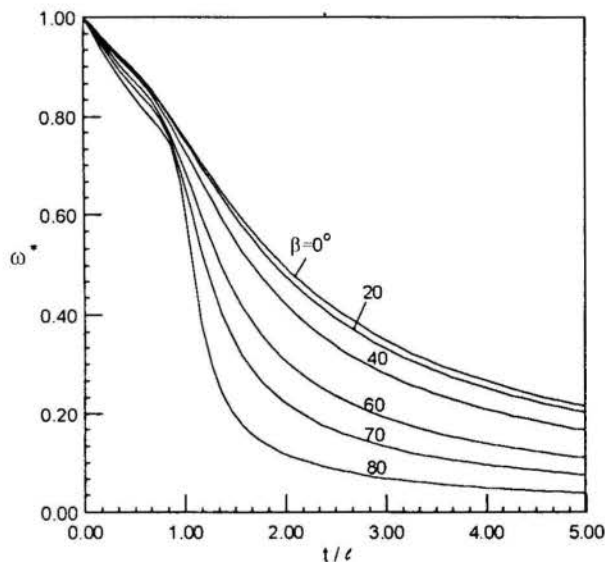


Figura 7 - Vorticidade adimensional.

Nas Figs. 6 e 7, estão apresentados resultados para grades regenerativas com pás planas e  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . A Fig. 6 mostra a variação da relação entre as circulações regenerativa e potencial da grade, para uma mesma incidência. O efeito mais notável é o aumento do carregamento aerodinâmico da grade regenerativa em relação à situação potencial ( $\Gamma_p/\Gamma_{pot} > 1$ ). Note-se a tendência para o limite  $t \rightarrow 0$  expresso na Eq. (22),  $\Gamma_p/\Gamma_{pot} = 1.5$ . O efeito regenerativo diminui à medida que  $t/\ell$  aumenta, observando-se o limite com  $t \rightarrow \infty$ ,  $\Gamma_p/\Gamma_{pot} = 1$ . Esse efeito também diminui com o aumento de  $\beta$ , para uma mesmo  $t$ . A Fig. 7 mostra a variação da vorticidade adimensional,  $\omega^*$ , definida por:

$$\omega^* = \frac{\omega \ell \cos^2 \beta}{W \sin \alpha} \quad (27)$$

A variação de  $\omega^*$  com a geometria da grade exibe um comportamento semelhante ao de  $\Gamma_p/\Gamma_{pot}$ . Notem-se os limites com  $t \rightarrow \infty$ ,  $\omega^* = 0$ , e  $t \rightarrow 0$ ,  $\omega^* = 1$ , conforme as Eqs. (26.a) e (21). Note-se que, para um dado espaçamento  $t$ , a vorticidade

dimensional,  $\omega$ , torna-se ilimitada à medida que  $\beta \rightarrow 90^\circ$ . Isso pode ser facilmente verificado no caso de número infinito de pás, Eq. (21). Observe-se que a área entre as pás tende a zero com  $\beta \rightarrow 90^\circ$ , independentemente do espaçamento. Logo, a vorticidade deverá crescer indefinidamente para produzir uma certa circulação, de acordo com o Teorema de Stokes.

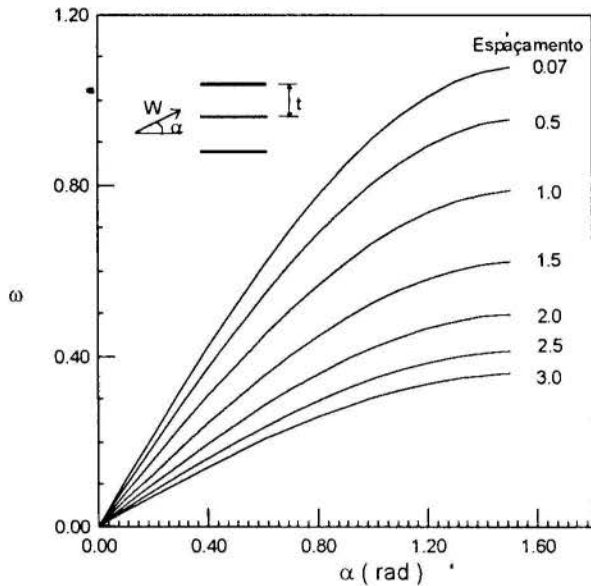


Figura 8 - Variação da vorticidade em função da incidência.

A Fig. 8 mostra a variação senoidal da vorticidade regenerativa, Eq. (17), em função do ângulo de incidência, para diferentes espaçamentos, no caso  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $t = 1$ ,  $W_\infty = 1$ . Observa-se, novamente, o aumento da vorticidade com a diminuição do espaçamento da grade, tendendo ao limite  $\omega = 1$  para  $t \rightarrow 0$  e  $\alpha = 90^\circ$ , conforme a Eq. (21).

## CONCLUSÕES

Foi apresentada uma metodologia teórica e numérica para análise do escoamento ideal, com vorticidade uniforme, através de grades de pás planas. Uma técnica numérica de vórtices concentrados foi empregada na solução do modelo e validada com sucesso, utilizando-se resultados analíticos existentes para a circulação potencial. Os casos limites de número infinito de pás e pá isolada foram enfatizados. Destaque especial foi dado à situação das grades regenerativas, apresentando-se resultados ilustrativos da circulação e da vorticidade em função dos parâmetros geométricos da grade.

A motivação principal deste trabalho tem sido o interesse em se estabelecer uma teoria de grade, que reflita as características básicas do escoamento nas máquinas de fluxo regenerativas (MFR). O presente trabalho representa uma contribuição nesse sentido. Por outro lado, estudos adicionais deverão, ainda, ser elaborados objetivando uma metodologia confiável para o projeto das MFR. Para se atingir esse estágio, será necessário, antes de tudo, incluir na teoria os efeitos não inerciais, decorrentes da rotação da máquina, o que já está sendo pesquisado pelos autores. A teoria poderá ainda ser estendida para tratar o caso das MFR com pás de formato aerodinâmico. Finalmente, estudos empíricos deverão ser realizados na avaliação dos efeitos viscosos, estabelecendo critérios aceitáveis para a aplicação da teoria no projeto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Andrew, D.N., 1989, "The Effect of Uniform Spanwise Vorticity on Two-Dimensional Flow Through Cascades", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 203, N° C6, pp. 371-378.
- Belotserkovsky, S.M. and Lifanov, I.K., 1993, "Method of Discrete Vortices", CRC Press, Inc., Florida.
- Hess, J.L., and Smith, A. M. O., 1966, "Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies", *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 8, pp. 1-138.
- Karamcheti, K., 1966, "Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics", John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Lewis, R.I., 1991, "Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems", Cambridge University Press.
- Manzanares Filho, N. e Ramirez Camacho, R. G., 1995, "Escoamento Ideal em Grades Regenerativas Compostas de Pás Retas e Finas", *Anais do XIII COBEM e II CIDIM*, Belo Horizonte, Brasil.
- Varella, S., "A Theoretical and Experimental Analysis of Regenerative Blowers", Ph.D. Thesis, Southampton University.
- Weinig, F.S., 1964 "Theory of Two-Dimensional Flow Through Cascades", *Aerodynamics of Turbine and Compressors - Section B*, Princeton University Press.
- Wislicenus, G.F., 1964, "Fluid Mechanics of Turbomachinery", Dover, Inc., New York.

## ABSTRACT

*An analysis model for ideal flows with uniform vorticity through cascades with straight thin blades is presented. Some emphasis is given on the infinitely close spacing and the isolated blade limits. A numerical technique for the model solution, based on the distribution of discrete vortices on the blades, is proposed. The technique validation is made by comparisons with analytical results for the potential flow. Specific considerations are made for the regenerative cascade situation. In this case, some results are given for the circulation and vorticity as a function of the cascade geometrical parameters.*



## A METHODOLOGY FOR AXIAL FLOW TURBOMACHINE DESIGN

A. L. Amarante Mesquita<sup>(1)</sup>, N. Manzanares Filho<sup>(2)</sup>, and E. C. Fernandes<sup>(3)</sup>,

<sup>(1)</sup> DEM.- CT - UFPA, 66075-900 Belém, PA

<sup>(2)</sup> IEM - EFEL, 35000-000 Itajubá, MG

<sup>(3)</sup> IEME - ITA - CTA, 12200-000 S. J. dos Campos, SP



### SUMMARY

*This paper presents a methodology for axial turbomachine design based on the minimum suction pressure coefficient value of the cascade close to the hub of the machine. The cascade flow is analyzed by the classic linearized singularity method with further adjustment, and by application of a panel method. In order to verify the applicability of the criterion, five axial fans were built and tested. Each rotor is design with a different value of the minimum suction pressure coefficient. It is concluded for the validity of the criterion as design guide for the adequate geometry in axial flow turbomachines.*

### INTRODUCTION

Recent developments in computational fluid dynamics (CFD) allow the treatment of most of the complex flow structures found in turbomachines. However, at the initial step of a turbomachine design, there is a lack of information about the necessary geometrical definition for advanced CFD code application. At this step the designer needs to employ some design criteria in order to attend certain performance requirements, as: optimal operational parameters, aerodynamic loading, cavitation, shock effects, stall limits, etc.

It is desirable that these criteria have good characteristics of selectivity and flexibility. In a very large universe of design options, they must be capable of selecting the eligible ones at a relatively low computational cost. In view of these aspects, it is natural to implement the design criteria by means of simplified CFD tools. In the case of axial flow turbomachines, one example is the potential flow theory for cascades. Fig. 1 shows a cylindrical development of an axial flow turbomachine cascade.

A good comparative review of various aerodynamic performance criteria for axial flow cascades was conducted by De La Fuente (1982). By employing the experimental data of Herrig et al. (1957) for NACA 65-series-airfoil cascades, De La Fuente (1982) concluded that the criterion based on the minimum suction pressure coefficient was the more adequate for selecting the minimum aerodynamic loss cascades. This criterion was initially proposed by Sholz (1965) for isolated airfoils, and was tested in axial flow pump design by Fernandes (1973).

The principal goal of this paper is to present a methodology for axial turbomachine design based on the minimum suction pressure coefficient of the cascade at the impeller hub. The cascade flow was analyzed by the thin airfoil theory with an empirical adjustment through the experimental data of Herrig et al. (1957). This correction accounts for the boundary layer effect on the lift coefficient of the cascade.

In order to verify the applicability of the methodology under consideration, five axial fans were designed with different values of the corrected minimum pressure coefficient at the impeller hub. The fans were built and tested. The test results indicated the validity of this methodology as a guide for axial flow turbomachine design. As a motivation for further development of the design methodology, potential flow results for the designed cascades at various radial blade stations were obtained by a panel method, according to Manzanares (1994).

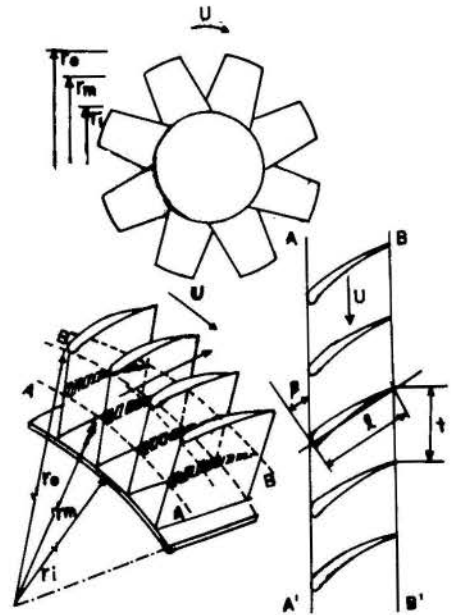


Figure 1 - Cylindrical development of an axial flow cascade

### THIN-AIRFOIL THEORY FOR CASCADES

The potential flow is formulated by the singularity method with the classical small-disturbance approximation of the thin-airfoil theory. In this approach the natural inviscid boundary condition is applied on the airfoil chord line and the angle of attack is considered small. The vortex distribution,  $\gamma$ , is given by a Glauert series as follows (Sholz, 1951)

$$\frac{\gamma(\phi)}{w_\infty} = 2A_0 \frac{1 + \cos \phi}{\sin \phi} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\phi, \quad (1)$$

where  $\phi$  is related to the singularity chord location,  $\xi^+$  ( $0 \leq \xi^+ \leq 1$ ).

$$\xi_5^+ = \frac{\xi}{1} = \frac{1 - \cos \phi}{2} \quad (2)$$

The  $A_n$  coefficients can be expressed by (Mellor, 1959)

$$A_n = A_{n\alpha} \sin \alpha + A_{nc} \frac{C_b}{2\pi} + A_{ne} \frac{C_e}{2\pi} \quad (3)$$

where  $A_{n\alpha}$ ,  $A_{nc}$  and  $A_{ne}$  are related to the effects of angle of attack,  $\alpha$ , airfoil camber,  $C_b$ , and airfoil thickness,  $C_e$ , respectively. By integrating the vortex distribution and applying the Kutta-Joukowski theorem one can obtain the following expression for the lift coefficient.

$$C_L = 2\pi (A_0 + A_1) \quad (4)$$

The complete numerical solution of this problem can be found in Amarante Mesquita (1987).

**EMPIRICAL CORRECTIONS**

The classical potential theory for airfoils predicts a greater lift force than the experimental value, due to the neglecting of the viscous effects. In order to account these effects, an empirical adjustment in the theory was made. The correction procedure consists basically in using an airfoil with an effective camber,  $C_{beff}$ , as proposed by Mellor (1959), which approximates the theoretical and experimental results for the lift coefficient. In this work, the experimental results of Herrig et al. (1957) for NACA 65-series cascades were employed in obtaining the following correlation for  $C_{beff}$ .

$$C_{beff} = \begin{cases} 0.7396 C_b - 0.0062 & , \sigma \geq 1 \\ 0.7396 C_b + 0.32 \sigma - 0.3458 & , \sigma < 1 \end{cases} \quad (5)$$

where  $\sigma = l/t$  is the cascade solidity. For more details of this procedure see Amarante Mesquita (1987).

Fig. 2 shows the comparison between the theoretical results with an without corrections in comparison with the experimental data. It is observed that the proposed correction produces a calculated lift coefficient in better agreement with the experimental data in the low drag range, where the separation effects are not important. In order to evaluate the proposed correction in predicting the pressure coefficients, comparisons were made with the correction given by De La Fuente (1982), as shown in Fig.3. It can be seen that the present corrections produces improved results at the leading edge region.

**THE MINIMUM PRESSURE COEFFICIENT CRITERION**

The minimum suction pressure coefficient,  $C_{psmin}$ , can be used as an aerodynamic loading criterion, allowing the selection of cascades with relatively low profile losses. Fig. 4 illustrates this concept. It is important to note that  $C_{psmin}$  has a negative value. There is a  $C_{psmin}$  interval limited by an inferior value,  $C_{psmin}^-$ , and a superior value,  $C_{psmin}^+$ , which corresponds to a

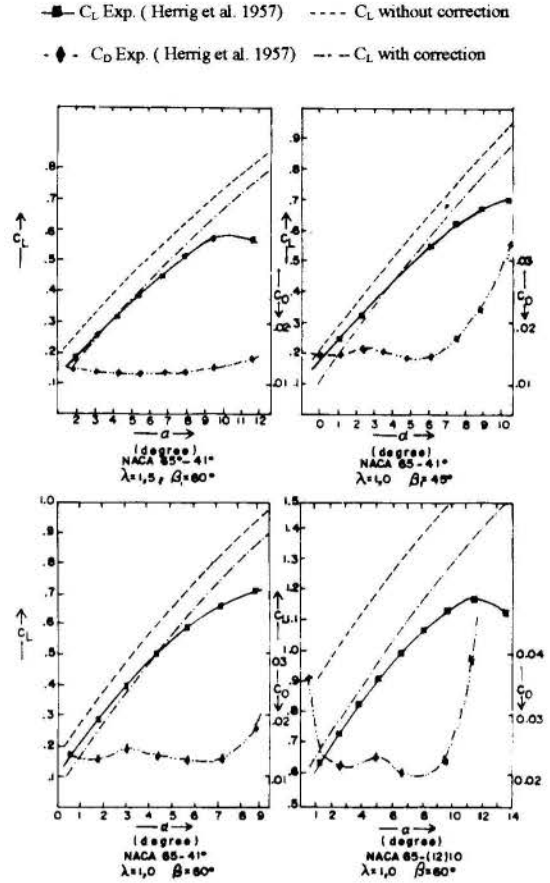


Figure 2 - Lift coefficient results

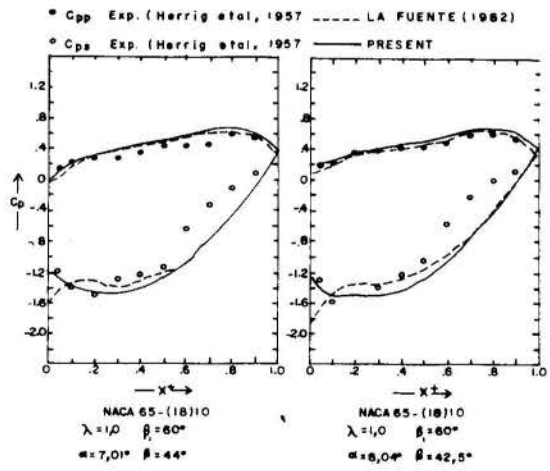


Figure 3 - Pressure coefficient results

good cascade performance. For  $C_{psmin} > C_{psmin}^+$ , a slightly loaded blade is obtained, and the danger of boundary layer separation is reduced, but comparatively large area is exposed to the flow, i.e., the friction losses are augmented. In contrast, for a cascade with  $C_{psmin} < C_{psmin}^-$ , the frictional area is relatively small but a comparatively high pressure loading is observed, increasing the danger of separation. So, in order to apply this criterion it is essential to determine with confidence the interval  $C_{psmin}^- < C_{psmin} < C_{psmin}^+$ . A way to accomplish this task is to test a series of turbomachines especially designed for this purpose.



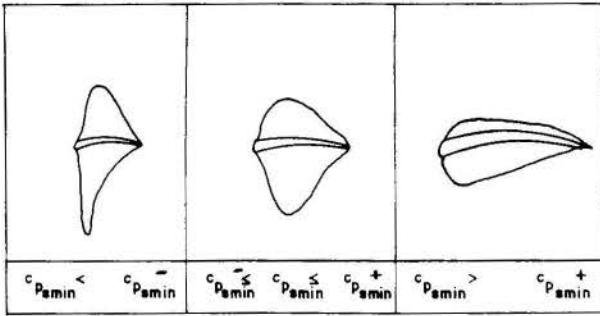


Figure 4 - The  $C_{psmin}$  criterion concept

### AXIAL FAN DESIGN AND TESTING

A series of five axial flow fans was designed in order to evaluate the optimal  $C_{psmin}$  interval. The adopted procedure was to impose a different  $C_{psmin}$  value at the impeller hub for each designed fan. The value  $C_{psmin} = -2$  was taken as the design reference, according to De La Fuente (1982). Fig 5 shows the distribution of the designed hub cascades in the Mellor's operation diagram, which establish a region with low drag cascades. The diagram coordinates represents two aerodynamic loading factors defined by Mellor (1959). Table 1 presents the cascade fan data employed for design. In this table, the value of the product  $C_L \cdot \sigma$  was evaluated by using a classical expression based on the Kutta-Joukowski theorem:

$$C_L \cdot \sigma = 2 \frac{\Delta w_u}{w_\infty} \quad (6)$$

where  $w_\infty$  and  $\Delta w_u$  are kinematic quantities, Fig.1, calculated by imposing the fan mass flow rate and specific energy. The cascade design for other radial stations was made by assuming the free-vortex radial equilibrium (Paulon, 1969).

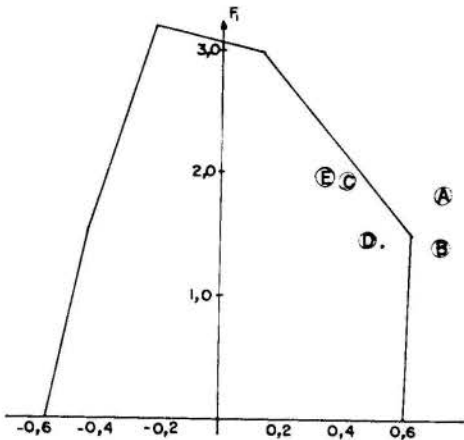


Figure 5 - Designed impeller hub cascades on the Mellor's diagramme.

The fans were built and tested in a specific test bank, constructed in accordance to AMCA 210-74 standard (1975). All

details about the fan manufacturing and testing can be found in Amarante Mesquita (1987).

Table 1 - Designed fan data for the hub cascades

Design	$C_{psmin}$	$C_b$	$C_L \cdot \sigma$ req.	$l$ mm	$\sigma$	$C_L$ comp.	$\alpha$ deg.	$\beta$ deg.
A	-3.20	1.2	1.32	65	0.85	1.55	12.4	38.2
B	-2.76	0.8	1.31	88	1.15	1.14	12.3	38.0
C	-1.93	1.2	1.31	83	1.09	1.21	9.7	40.6
D	-1.84	0.8	1.29	125	1.63	0.79	11.0	38.4
E	-1.68	1.2	1.31	90	1.17	1.11	9.2	40.9

Fig. 6 and Fig. 7 present the fan test results for the specific energy,  $Y$ , and machine efficiency,  $\eta$ , as function of the mass flow rate,  $Q$ , related to the design operation conditions. It is clearly observed that the specific energy approximates the design point of operation and a best efficiency is attained as  $C_{psmin}$  increases. For these tests, the systematic experimental uncertainties were evaluated as  $\pm 1\%$  for the specific energy,  $\pm 1\%$  for the mass flow rate and  $\pm 1.5\%$  for the maximum efficiency values.

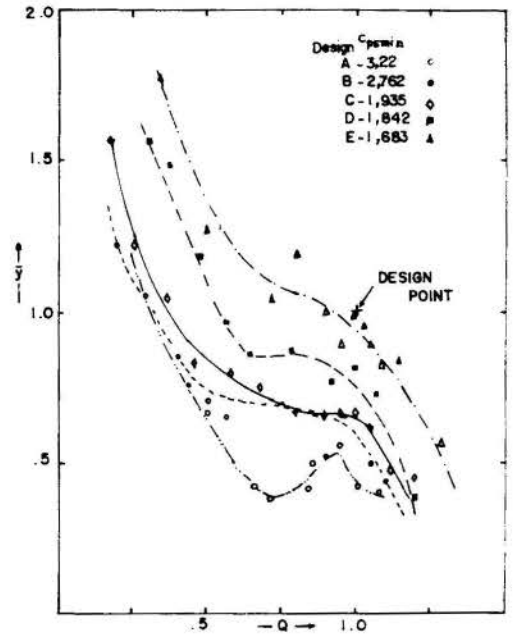


Figure 6 - Fan testing results: - specific energy

### DISCUSSION

Although the test results have presented the expected qualitative behavior, the  $C_{psmin} = -2$  was not confirmed as the adequate design reference. Probably, this fact is due to the different methodologies adopted by De La Fuente (1982) and in the present work for computing the pressure distribution. In this study, the pressure distribution utilized for the  $C_{psmin}$  evaluation was calculated with the effective camber factor,  $C_{beff}$ . One observes that this procedure is dependent on experimental data, and also on the manner in which the empirical corrections are made. In order to improve and generalize the application of

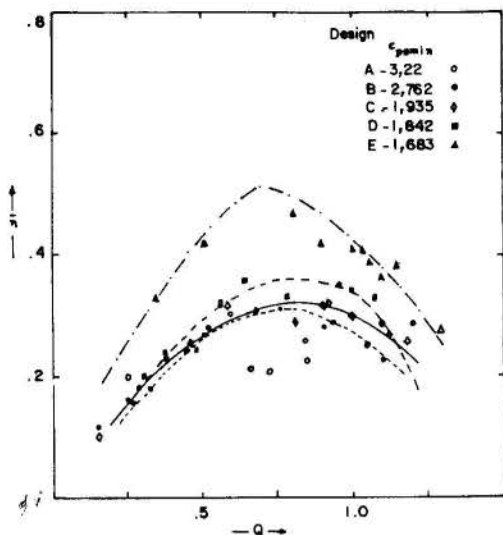


Figure 7 - Fan testing results - efficiency

the  $C_{psmin}$  criterion, it is recommended to employ  $C_{psmin}$  values calculated by a potential flow code as accurate as possible, without empirical corrections. One natural possibility is to apply an established panel method. In Tab. 2, it is shown a comparison between the present values of  $C_{psmin}$  at the designed hub cascades and the values calculated with the vortex panel method described by Manzanares (1994). It is interesting to note that the panel method values are substantially lower than the present ones. In addition, for the cascade best observed fan performance, design E, the panel method predicts a  $C_{psmin} = -2.32$  more close to the reference design value,  $C_{psmin} = -2$ .

Table 2 -  $C_{psmin}$  results at the hub impeller cascades

Design	$C_{psmin}$ (present method)	$C_{psmin}$ (Manzanares, 1994)
A	-3.20	-6.84
B	-2.76	-6.01
C	-1.93	-2.90
D	-1.84	-3.11
E	-1.68	-2.32

## CONCLUSION

A methodology for axial flow turbomachine design is presented. It is based on the minimum suction pressure coefficient,  $C_{psmin}$ , of the cascade at the impeller hub. The geometric parameters of the cascade are fixed in order to obtain a  $C_{psmin}$  value that furnish the flow condition with minimum aerodynamic loss cascade. The cascade flow is analyzed by using the classical thin-airfoil theory with empirical correction. The proposed empirical correction in this work produced lift coefficient in good agreement with the experimental data available in the literature. Five axial fans are designed by application of the methodology. The testing results of these machines showed the validity of the presented methodology as a design guide for the establishment of the optimum cascade geometry in axial flow turbomachines. Despite this result, the procedure employed to obtain the  $C_{psmin}$  value was verified to be more adequate and precise when a panel method is used,

although the lift coefficient of the cascade airfoil must to be always calculated with a correction in the potential flow theory. The presented methodology give a good indication for the geometric configuration of the machine, but in order to obtain the final design, other influences must be analyzed, as the three-dimensional effects and the secondary flows, not considered in the cascade model.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the CNPq (Brazil's Research Council) through the research project No. 523211/94-5.

## REFERENCES

- Amarante Mesquita, A. L., 1987, "Performance Analysis of Axial Flow Turbomachines", (in Portuguese), M.Sc. Thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S. J. Campos, Brasil.
- AMCA 210-74 Standard, 1975 "Laboratory Methods of Testing Fans for Rating Purposes.
- Bran, R., and Souza, Z., 1969, "Turbomachines -Turbines, Pumps and Fans", (in Portuguese), Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro.
- Castro, P. R., 1981, "Flow Analysis in Linear Cascades", (in Portuguese), M.Sc. Thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S. J. Campos, Brasil.
- De La Fuente, R. P., 1982, "Performance Evaluation Criteria for Linear Cascades", (in Portuguese) M.Sc. Thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S. J. Campos, Brasil.
- Fernandes, E. C., 1973, "Analysis of Geometric Parameter Influences on the Axial Flow Turbomachine Design", (in Portuguese), M.Sc. Thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S. J. Campos, Brasil.
- Herrig, L. J., Emery, J. C., and Erwin, J. R., 1957, "Systematic Two-Dimensional Cascades Tests of NACA 65-Series Compressor Blades at Low Speeds", NACA TN 3916.
- Manzanares Filho, N., 1994, "Flow Analysis of Axial Flow Turbomachines," (in Portuguese), Ph. D. Thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S. J. Campos, Brasil.
- Mellor, G. L., 1959, "An Analysis of Axial Compressor Cascade Aerodynamics - Part I and Part II", ASME *Journal of Basic Engineering*, Vol. 81, pp. 362-386.
- Paulon, J., 1969, "Vérification par la Condition d'Equilibre Radial de la Cohérence des Mesures dans les Ecoulements Giratoires", *Entropie*, No. 25, pp. 19-22.
- Sholz, N., 1951, "On the Calculation of the Potential Flow Around Airfoils in Cascade", *Journal of The Aeronautical Science*, Vol. 18, pp. 68-69.
- Sholz, N., 1965, "Cascades Aerodynamics", (in German), Verlag G. Braun, Karlsruhe.



## ANÁLISE HIDRODINÂMICA DE ROTORES AXIAIS PARA APROVEITAMENTO DA ENERGIA CINÉTICA DOS RIOS

C. J. C. Blanco, M. S. A. V. Gouveia e A. L. Amarante Mesquita

Departamento de Engenharia Mecânica  
Centro Tecnológico, Universidade Federal do Pará  
66075-900 - Belém - PA - Brasil



### SUMÁRIO

*Apresenta-se uma metodologia para análise hidrodinâmica de rotores axiais de eixo horizontal para aproveitamento de energia cinética de rios, baseado no modelo de Glauert associado com dados experimentais de perfis bidimensionais disponíveis na literatura. Comparações com resultados de outros autores verificam a validade do procedimento adotado para cálculo do coeficiente de potência do rotor. Apresenta-se uma análise dos diversos fatores de influência no projeto.*

### INTRODUÇÃO

Um dos problemas sociais na Amazônia é a falta de suprimento de energia elétrica para a população que vive às margens dos rios, chamada de ribeirinhos. Mesmo com a existência de grandes centrais hidrelétricas em operação, esta parte da população não é beneficiada com a energia elétrica produzida por essas usinas. A energia utilizada provém da queima de madeira, da utilização de gás de cozinha, de baterias automotivas e de pequenos grupos geradores diesel empregados principalmente por comerciantes com maior poder aquisitivo.

Neste sentido, o presente trabalho visa realizar um estudo sobre a viabilidade técnica da utilização de turbinas hidráulicas para a produção de energia elétrica, aproveitando a energia da correnteza dos rios. Este estudo apresenta uma análise teórica do potencial de rotores axiais para o aproveitamento da energia cinética dos rios, baseada em dados reais dos rios da foz do Amazonas. Inicialmente, para uma análise global, utiliza o modelo da Teoria do Momento de Glauert para o cálculo do coeficiente de potência dos rotores, de maneira análoga ao estudo realizado em rotores eólicos. São utilizados perfis NACA com os dados correspondentes de coeficiente de arrasto e sustentação.

### MODELO

O cálculo do empuxo e torque produzido pelo rotor é baseado no modelo de Glauert (1935) inicialmente empregado para aproveitamento de energia eólica, o qual, com suas posteriores modificações, é bastante empregado em projeto (Shepherd, 1984; Galetuse, 1986; Eggleston, Stoddard, 1987e Wilson, 1994). Neste modelo a rotação do escoamento é considerada e, com a utilização de dados experimentais de perfis aerodinâmicos bidimensionais, pode-se introduzir os efeitos viscosos. Entretanto, o modelo despreza a periodicidade do escoamento, causado por um rotor com número finito de pás, de tal forma que as pás podem ser analisadas independentes uma das outras. Uma forma de avaliar essa influência também é analisada e discutida neste trabalho.

O equacionamento para obtenção das relações entre os fatores de interferência e os parâmetros geométricos e aerodinâmicos dos perfis das pás do rotor pode ser encontrado em artigos anteriores (Amarante Mesquita et al., 1994)

$$a/(1-a) = \sigma/4(C_L \cos\phi + C_D \sin\phi)/\sin^2\phi \quad (1)$$

$$a'/(1-a') = \sigma/4(C_L \sin\phi - C_D \cos\phi)/\sin\phi \cos\phi \quad (2)$$

$$\text{tg}\phi = (1-a)/(1+a')x = (R/rX)\{(1-a)/(1+a')\} \quad (3)$$

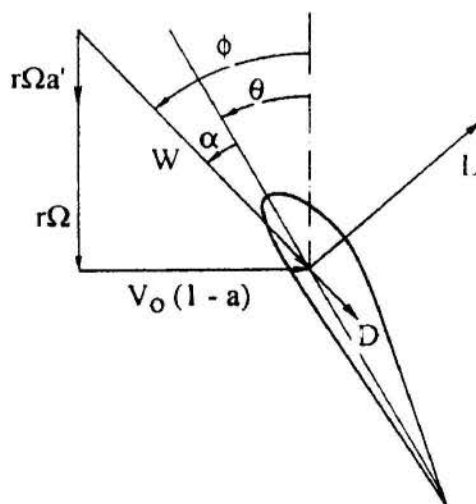


Figura 1 - Forças atuando no perfil e triângulo de velocidades

onde  $\varepsilon = C_D/C_L$ , sendo  $C_L$  o coeficiente de sustentação e  $C_D$  o coeficiente de arrasto,  $\sigma = Nc/2\pi r$  é a solidez de uma seção do rotor,  $x = \Omega r/V_0$  e  $X = \Omega R/V_0$  são as razões de velocidade local e da extremidade da pá (TSR, "Tip Speed Ratio"), sendo  $R$  o raio de cada pá e  $\Omega$  representa a velocidade angular do rotor,  $a = (V_0 - u)/V_0$  é o fator de interferência axial, sendo  $V_0$  a

velocidade do escoamento a montante do rotor (não perturbada) e  $u$  a velocidade no plano do rotor,  $a' = w/\Omega r$  é o fator de interferência tangencial,  $\phi$  é o ângulo do escoamento (Fig. 1).

Finalmente pode-se obter uma expressão para o coeficiente de potência do rotor.

$$C_P = \int_0^R \Omega dT / (\frac{1}{2} \rho V_o^3 \pi R^2) \quad (4)$$

Utilizando as relações anteriores tem-se que:

$$C_P = 8/X^2 \int_0^X a(1-a)(\text{tg}\phi - \varepsilon) / (1 + \varepsilon \text{tg}\phi) x^2 dx \quad (5)$$

Uma correção para considerar o efeito do número finito de pás e das perdas nas extremidades das pás é introduzida através do fator de Prandtl,  $F$  (Wilson et al., 1976), modificando a velocidade axial do escoamento para

$$W_a = V_o(1 - aF) \quad (6)$$

$$F = 2/\pi \cos^{-1} \{ \exp[-N/2(1 - r/R)(1 + X^2)^{1/2}] \} \quad (7)$$

Desta forma o coeficiente de potência pode ser expresso por

$$C_P = 8/X^2 \int_0^X aF(1 - aF)(\text{tg}\phi - \varepsilon) / (1 + \varepsilon \text{tg}\phi) x^2 dx \quad (8)$$

e como tem-se geralmente a relação  $\varepsilon \text{tg}\phi \ll 1$ , nos termos  $(1 + \varepsilon \text{tg}\phi)$  podemos omitir a parcela  $\varepsilon \text{tg}\phi$  na Eq. 8.

**Otimização Para o Caso do Escoamento Ideal.** Para este caso o coeficiente de arrasto é omitido nas Eq. 1 e Eq. 2, de tal forma que

$$a'(1 + a') / a(1 - a) = 1/x^2 \quad (9)$$

como, para uma determinada seção da pá,  $1/x^2$  é constante, tem-se que o lado esquerdo da Eq. (9) deve ser também constante. Observando a Eq. (17), conclui-se que para maximizar o coeficiente de potência deve-se maximizar a relação  $(1 - a)a'$ , sendo este problema resolvido pelo método dos multiplicadores de Lagrange para a função  $(1 - a)a'$ , com a condição expressa pela Eq. (9). A aplicação deste método resulta em:

$$a' = (1 - 3a) / (4a - 1) \quad (10)$$

$$\cos\phi = a / (1 - 2a) \quad (11)$$

$$x^2 = (1 - a)(4a - 1)^2 / (1 - 3a) \quad (12)$$

$$cC_L = 8\pi V_o / N\Omega (4a - 1) [(1 - a)(1 - 3a)]^{1/2} / (1 - 2a) \quad (13)$$

**Influência do Arrasto.** O problema de otimização incluindo os efeitos viscosos (arrasto) é semelhante ao procedimento do item anterior, utilizando as Eqs. (1) e (2). Assim, de maneira análoga ao trabalho já desenvolvido anteriormente (Eggleston e Stoddard, 1987), obtém-se:

$$1/a = 2 + \sec\phi [G + (G + H^2)^{1/2}] \quad (14)$$

onde

$$G = \varepsilon \sec\phi / 2(\text{tg}\phi - \varepsilon) \quad (15)$$

$$H = \text{tg}\phi / (\text{tg}\phi - \varepsilon) \quad (16)$$

Este efeito foi analisado (Galetuse, 1986) e os resultados serão comparados aos do presente trabalho. Sendo que nos anteriores não são levados em consideração os efeitos de grade (principalmente quando se utiliza um grande número de pás) em  $C_L$  e  $C_D$ . Esse efeito pode ser contabilizado a partir de uma correção do ângulo de incidência  $\alpha$  proposta por Wilson (1994).

$$\alpha_c = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 \quad (17)$$

onde  $\alpha_c$  representa o ângulo de incidência corrigido.

$$\Delta\alpha_1 = 0,11 N_p \left( \frac{c}{R} \right) \left( \frac{t}{c} \right)_{\max} \frac{X}{\sqrt{(1-a)^2 + \left( \frac{r}{R} \right)^2 X^2}} \quad (18)$$

$$\Delta\alpha_2 = 0,25 \left\{ \tan^{-1} \left[ \frac{(1-a)x}{(1+2a')} \right] - \tan^{-1} [(1-a)x] \right\} \quad (19)$$

onde:  $r/R$  é a relação entre raios (local e global),  $c$  é a corda,  $N_p$  o número de pás,  $R$  é o raio do rotor, e  $(t/c)_{\max}$  é um parâmetro utilizado de acordo com cada perfil NACA

Tabela 1 - Valores utilizados para gerar as funções de  $C_L(\alpha)$  e  $C_D(\alpha)$  (NACA 23021)

$\alpha$ (°)	$C_L$	$C_D$	$\varepsilon$
0	0.10	0.0115	0.12
2	0.30	0.0120	0.04
4	0.50	0.0135	0.03
6	0.70	0.0155	0.02
8	0.85	0.0190	0.02
10	0.95	0.0260	0.03
12	0.75	0.0165	0.02
14	0.65	0.0150	0.02

Sendo  $C_L$  e  $C_D$  funções de  $\alpha$ , a correção do mesmo provocará uma mudança em  $\varepsilon$ , já que  $\varepsilon = C_L/C_D$ , que corrigirá a corda do perfil e seu ângulo  $\theta$  de montagem. O perfil aerodinâmico adotado foi o NACA 23021, cujos parâmetros utilizados para gerar as funções de  $C_L(\alpha)$  e  $C_D(\alpha)$  através do método de polinômio de Lagrange são mostrados na tabela 1.

## PROJETO

**Estimativa do Diâmetro do Rotor.** A estimativa depende da potência de saída desejada, do regime de operação e da razão de velocidades (Gouveia e Blanco, 1996).

Uma estimativa preliminar pode ser feita a partir do modelo do disco atuador, pela equação:

$$P = \frac{1}{2} \rho A C_P V_o^3 \quad (20)$$



Considerando a eficiência do sistema de transmissão  $\eta_m$  e a do gerador  $\eta_g$ , a potência de saída real será dada por:

$$P_{out} = \frac{1}{2} \rho A C_p \eta_m \eta_g V_o^3 \quad (21)$$

assim, tem-se que o raio é dado por:

$$R = \sqrt{2P_{out} / \rho C_p \eta_m \eta_g V_o^3} \quad (22)$$

**Definição da geometria das pás.** Para tal definição, os seguintes elementos devem ser especificados: número de pás, tipo de perfil e forma construtiva destes perfis.

Na literatura consultada para elaboração deste trabalho, não foi encontrado um tratamento formal para a especificação do número de pás, contudo, os seguintes fatores influenciam nesta escolha (Eggleston e Stoddard, 1987): razão de velocidades, custo, peso, efeito no coeficiente de potência e dinâmica estrutural. Outros aspectos a considerar (Macintyre, 1987), “alguns rotores de duas pás apresentam problemas de vibração, que não ocorreram nos de três pás”, lembrando que estas observações são válidas para a aplicação eólica e que o atual trabalho se propõe a estudar o comportamento hidrodinâmico destes rotores.

A especificação do tipo de perfil aerodinâmico pode ser feita a partir da experiência de projetos já realizados, assim, de acordo com (Eggleston and Stoddard, 1987), verificou-se um largo uso da família NACA 23XXX em aplicações eólicas. Para este estudo utilizou-se os dados da literatura (Abbot and Doenhoff, 1959).

Como última etapa na definição da geometria das pás, deve-se portanto especificar os seguintes parâmetros: corda e ângulo de construção de cada seção. Em seguida, deve-se realizar uma avaliação do desempenho hidrodinâmico.

A partir da formulação com e sem correção do efeito de grade foram gerados programas que permitem a simulação do comportamento hidrodinâmico de rotores (Gouveia e Blanco, 1996).

No sentido de validar estes programas realizou-se comparações com resultados de outros autores em aplicação eólica. A Fig. 2 apresenta a comparação com os resultados apresentados por Galetuse (1986) e Wilson et al. (1976), para três valores do parâmetro  $\epsilon$  em função do coeficiente de potência e da relação de velocidade total. Da análise dessa figura, tem-se que os resultados obtidos a partir dos programas desenvolvidos, apresentam boa concordância com diversos resultados disponíveis na literatura, comprovando que estes programas são capazes de prever o comportamento de rotores axiais de eixo horizontal, considerando os efeitos viscosos e as perdas nas extremidades das pás. Efeitos de grade não são computados nestes resultados e serão analisados a seguir.

## RESULTADOS PARA O ROTOR HIDRÁULICO

Utilizando a sistemática descrita acima, um programa computacional foi desenvolvido para ser empregado como ferramenta de projeto hidrodinâmico de rotores de eixo horizontal, visando o aproveitamento da energia cinética de rios, bem como a energia provenientes de correntes originadas pelo efeito de maré.

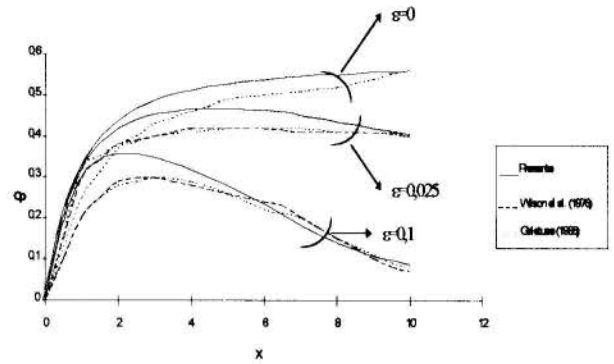


Figura 2 - Comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os de outros autores para  $C_p$  em função de  $\epsilon$  e  $X$ .

Analogamente ao resultado da Fig. 2, gerou-se o resultado simulando um rotor hidráulico, a Fig. 3 mostra o comportamento do Coeficiente de Potência “ $C_p$ ” em função de “ $X$ ” para vários  $\epsilon$ . Pode-se observar boa concordância entre as curvas comparadas.

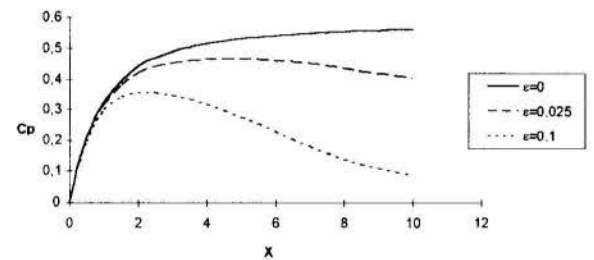


Figura 3 - Relação entre  $C_p$  e  $X$  em função de  $\epsilon$  para 8 pás

Para efetuar uma rápida estimativa do potencial destes rotores hidráulicos, utilizamos os seguintes valores típicos para os rios de nossa região.  $V_o=1,5$  m/s,  $D=3,0$  m,  $N_p=8$ ,  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup> e velocidade angular estimada  $\Omega=120$  rpm, este último parâmetro teve que ser estimado, pois os estudos sobre a dinâmica (e inércia) destes rotores ainda está em fase de desenvolvimento e experimentos *in loco*. A partir destes dados, obteve-se o valor de  $X=2$ , com este valor usamos a Fig. 3 seguindo a curva  $\epsilon=0,025$  e obtemos  $C_p=0,4$ . Adotando os seguintes valores para os rendimentos mecânico e do gerador respectivamente:  $\eta_m=0,85$  e  $\eta_g=0,9$ , obtemos o valor de  $P_{out}=3,65$  kW. Esse valor pode ser considerado baixo, porém é capaz de atender perfeitamente 10 famílias de uma comunidade ribeirinha. E, se o uso for racionalizado, como por exemplo usando apenas um refrigerador para todas as casas, podemos aumentar ainda mais o número de famílias atendidas.

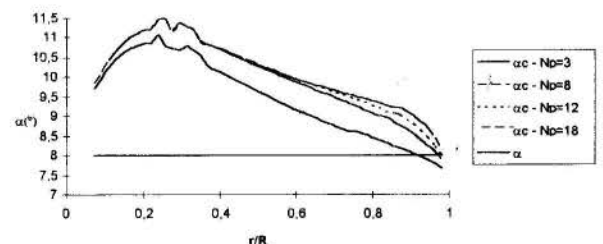


Figura 4 - Efeito de grade - Ângulo de ataque  $\alpha$  -  $X=2$ .

A grande vantagem deste tipo de aproveitamento energético é o baixíssimo custo quando comparado ao de uma micro central elétrica, e ainda com muito menos impacto ambiental.

A Fig. 4 mostra o resultado da aplicação da correção proposta para levar em consideração os efeitos de grade para diversos números de pás ( $N_p$ ) no ângulo de ataque. Notou-se um aumento do ângulo de ataque na maioria das situações e que o desvio é elevado, e que com isso os valores de  $C_L$  e  $C_D$  serão alterados para um valor que irá interferir diretamente na geometria dos perfis e pás do rotor.

Analisa-se então o estudo da influência dos efeitos de grade no ângulo montagem ( $\theta$ ) e corda dos perfis.

A curva tracejada da Fig. 5 foi gerada considerando-se o efeito viscoso porém sem levar em conta os efeitos de grade e a curva contínua leva em consideração ambos os efeitos. Nota-se uma sensível diferença quando o efeito de grade é introduzido para relações de  $r/R$  até aproximadamente 0,3.

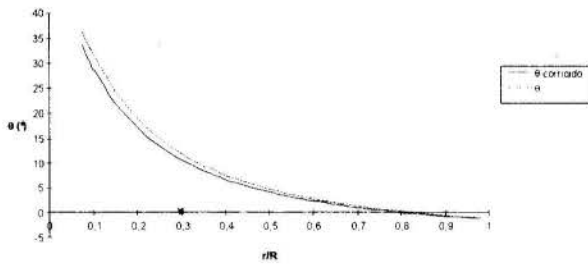


Figura 5 - Efeito de grade - Ângulo de montagem  $\theta$  -  $X=4$

No caso em estudo, houve para todas as situações de  $X$  e  $N_p$  estudados, uma diminuição na dimensão da corda  $C$ , Fig. 6. No entanto, vale ressaltar que até o momento não podemos generalizar tais resultados, e os mesmos ainda necessitarão de comprovação experimental.

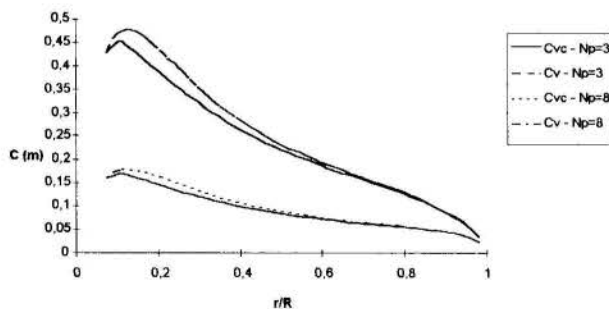


Figura 6 - Efeito de grade - Corda -  $X=6$

## CONCLUSÃO

Com base na teoria do momento de Glauert, apresentou-se a formulação básica empregada para o dimensionamento de rotores de eixo horizontal, para aproveitamento de energia cinética de rios. Uma metodologia simples, que inclui os efeitos viscosos e de perdas na extremidade da pá, é estabelecida e um programa computacional é desenvolvido como ferramenta de projeto. Resultados obtidos a partir deste programa foram comparados a resultados de vários trabalhos disponíveis na literatura para aplicação eólica.

Conclui-se que, apesar da pequena quantidade de energia gerada, em comparação às pequenas centrais hidrelétricas, esta forma de aproveitamento energético é bastante interessante para as condições particulares encontradas na região Amazônica, sendo que maiores estudos, com o detalhamento das perdas hidráulicas e possibilidades de construção, se fazem necessários para uma melhor avaliação.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido pelo CNPq através do projeto de pesquisa N° 523211/94-5.

## REFERÊNCIAS

- Abbott, I. H. and von Doenhoff, A. E., 1959, "Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data", N. Y., Dover Pub.
- Amarante Mesquita, A. L., Silva, O. F., Quintana, F. L. P., 1994, "Uma Metodologia para Projeto de Rotores Eólicos de Eixo Horizontal", Universidade Federal do Pará, Belém, PA.
- Eggleston, D. M., and Stoddard, F. S., 1987, "Wind Turbine Engineering Design", Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- Galetuse, S., 1986, "On the Highest Efficiency Windmill Design", *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol. 108, pp. 41-48.
- Glauert, H., 1935, "Airplane Propellers", in *Aerodynamic Theory*, ed. W. F. Durand, pp. 169-360, Spring Verlag.
- Gouveia, M. S. A. V., Blanco, C. J. C., 1996, "Análise de rotores axiais para aproveitamento de energia eólica e cinética dos rios", Universidade Federal do Pará, Belém, PA.
- Griffiths, R. T., 1977, "The Effect of Airfoil Characteristics on Windmill Performance", *Aeron. Journal*, July, pp. 322-326.
- Shepherd, D. G., "Note on a Simplified Approach to Design Point Performance Analysis of HAWT Rotors", *Wind Engineering*, Vol. 8, pp. 122-130, 1984.
- Wilson, R. E., 1994, "Aerodynamic Behavior of Wind Turbines", in *Wind Turbine Technology*, ed. SPERA, D. A., ASME PRESS.
- Wilson, R. E., Lissaman, P. B. S. and Walker, S. N., 1976, "Aerodynamic Performance of Wind Turbines", Oregon State University, ERDA/NSF/04014-76/1.

## ABSTRACT

In order to make use of kinetic energy of Amazon rivers, a methodology is presented for horizontal-axis hydraulic turbine rotors design, based on the Glauert momentum vortex theory in conjunction with section data of two-dimensional airfoil available in literature.

Comparison with results obtained for wind turbine applications from others authors are performed in order to verify the validity of the procedure for the calculation of the power coefficient. For the hydraulic rotors an analysis is also presented to take account all the design parameters.



Av. Pinho Brasil Milano, 2145  
Fone 341-0455 - P. Alegre - RS