



OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS PLANAS

André Jacomel Torii

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Av. Sete de Setembro, 3165 - Curitiba/PR, Brasil - CEP 80230-901.
ajtorii@hotmail.com

Resumo: *O propósito deste trabalho é apresentar um algoritmo para a otimização topológica de estruturas planas, visando uma mínima flexibilidade, restrita a uma quantidade máxima de material. Além disso, são discutidos alguns problemas numéricos comuns e são apresentados três exemplos.*

Palavras-chave: *otimização, estruturas, Método dos Elementos Finitos, otimização topológica, mínima flexibilidade.*

1. INTRODUÇÃO

A otimização topológica tem como objetivo aplicar os conceitos matemáticos de otimização para o projeto ótimo de estruturas. Com isso, são encontradas formas estruturais de maneira criteriosa e eficiente. Além disso, através da otimização de topologia estrutural pode-se obter respostas para problemas nos quais as soluções são de difícil visualização, como naqueles onde a solução final é uma geometria complexa ou quando a estrutura é submetida a múltiplos casos de carregamento.

Para que um método de otimização possa ser empregado a um problema, é necessário definir uma grandeza que meça o a qualidade da solução para cada configuração de projeto. Essa grandeza é posta na forma de uma função, denominada função objetivo, dependente de forma explícita ou implícita de um conjunto de parâmetros, os quais caracterizam os vários projetos em análise. Esses parâmetros são as variáveis de projeto. Adicionalmente, via de regra é necessário definir restrições para as soluções do problema. Tem-se, assim, a definição de um conjunto viável para essas variáveis de projeto. O algoritmo de solução irá então buscar neste conjunto viável uma solução que seja ótima de acordo com a função objetivo, definida anteriormente.

As funções objetivo e restrições utilizadas na otimização topológica de estruturas contínuas em estado plano de tensões podem ser definidas de diversas maneiras. Algumas formulações bastante comuns são: maximização da rigidez da estrutura, dado um volume de material a ser utilizado; minimização da massa da estrutura, dado um limite para a tensão efetiva.

Este trabalho aborda a formulação de maximização da rigidez da estrutura, o qual corresponde ao problema de otimização clássico de busca da mínima flexibilidade da estrutura (Bendsoe, 1989). Esta formulação apresenta características que torna os algoritmos significativamente mais eficientes (Pereira, 2001). A primeira delas é o fato da função objetivo ser de fácil obtenção, sendo simplesmente o trabalho realizado na estrutura, que pode ser obtido pelo produto interno entre o vetor de deslocamentos nodais e o vetor de forças nodais externas. Outra característica é que a função de restrição é única e, também, de fácil obtenção, sendo o volume de material utilizado na estrutura.

Entretanto, a solução obtida nesse problema de máxima rigidez pode ocasionar valores de tensões efetivas muito altas em alguns pontos da estrutura. Esta é uma severa limitação dessa abordagem. Tem-se, dessa forma, a necessidade de inserir no problema uma restrição a ser aplicada a cada ponto da estrutura e relacionada à falha do material (Duysinx and Bendsoe, 1998).

Para a avaliação da função objetivo e das restrições do problema de otimização de estruturas, deve-se fazer uso de um conjunto de rotinas para solução do problema físico em discussão. Nesse

caso, o Método dos Elementos Finitos possibilita a obtenção dos campos de deslocamentos, deformações e tensões ao longo do domínio. Nesse processo, tomando a Figura 1 como referência, define-se um domínio para o problema, o qual é então discretizado. O domínio discretizado é incorporado a uma estrutura de otimização onde, após um processo iterativo, obtém-se o campo de densidades que é a solução do problema de otimização proposto. Vale salientar que neste trabalho são utilizados os elementos finitos triangulares lineares, denominados CSTs.

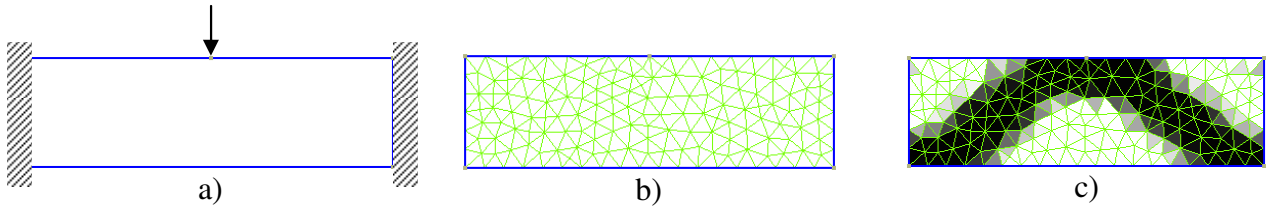


Figura 1: Exemplo de topologia estrutural ótima utilizando o MEF. a) domínio de análise, b) modelo discreto e c) solução do problema.

2. OTIMIZAÇÃO

A maioria dos autores, por conveniência, define um formato padrão para problemas de otimização. Neste, a meta é minimizar uma função objetivo $f(x)$, considerando um vetor n -dimensional de variáveis de projeto x . As restrições são especificadas como sendo de igualdade e desigualdade. Nesse sentido, o formato padrão de um problema de otimização é definido como:

$$\begin{cases} \min_{x \in R^n} f(x) \\ \text{Restrições: } \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \\ h_j(x) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

sendo $f(x)$ a função objetivo a ser minimizada, $g_i(x)$ as restrições de desigualdade (com $i = 1, \dots, m$) e $h_j(x)$ as restrições de igualdade (com $j = 1, \dots, p$).

2.1 Otimização sem restrições através do Método dos Gradientes Conjugados

O Método dos Gradientes Conjugados é uma técnica de otimização sem restrições de programação não-linear, onde o problema a ser resolvido pode ser posto como:

$$\min_{x \in R^n} f(x) \quad (2)$$

Esta técnica baseia-se em um processo iterativo composto pela definição de uma direção de descida e subsequente minimização ao longo dessa direção (Arora, 2004). A característica principal do método é a obtenção da direção de descida com base em uma combinação do gradiente da função no ponto atual e nas direções de descida anteriores, da seguinte maneira:

$$s_i = -\nabla f_i + \beta \cdot s_{i-1} \quad (3)$$

sendo s_i o vetor direção de descida na iteração atual, ∇f_i o vetor gradiente da função, s_{i-1} o vetor direção de descida na iteração anterior e β um escalar. Para o método dos gradientes conjugados de Fletcher-Reeves (Arora, 2004) esse escalar é definido como:

$$\beta = \frac{|\nabla f_i|^2}{|\nabla f_{i-1}|^2}, \quad (4)$$

sendo ∇f_{i-1} o vetor gradiente da função na iteração anterior.

Após a obtenção da direção de descida, é necessário calcular o tamanho do passo a ser tomado na direção em questão. Este passo é obtido pela minimização unidimensional do seguinte problema:

$$\begin{cases} \min f(x + \alpha \cdot s_i) \\ \alpha \in R^1 \end{cases}, \quad (5)$$

sendo α o passo a ser tomado na direção s_i .

Entre os diversos métodos para a solução do problema definido pela Equação 5, destaca-se o método da Seção Áurea (Kiusalaas, 2005). Este é o método adotado neste trabalho em virtude de sua boa eficiência relativa a outros métodos clássicos encontrados na literatura. Apesar da grande importância da otimização unidimensional para a eficiência do algoritmo, sua descrição não será abordada neste trabalho. Para maiores informações, são sugeridos os textos de Kiusalaas (2005), Rao (1996) e Arora (2004).

Finalmente, pode-se escrever o algoritmo para implementação do Método dos Gradientes Conjugados de Fletcher-Reeves como (Rao, 1996):

1. Definição de um ponto inicial x_1 ;
2. Cálculo da primeira direção de descida como $s_1 = -\nabla f(x_1)$;
3. Busca unidimensional, obtendo o passo α que minimiza a Equação 5;
4. Atualização da solução fazendo-se: $x_2 = x_1 + \alpha \cdot s_1$, e $i = 2$;
5. Cálculo do gradiente no novo ponto: $\nabla f_i = \nabla f(x_i)$;
6. Obtenção da nova direção de descida com a Equação 3;
7. Busca unidimensional, obtendo o passo α que minimiza a Equação 5;
8. Atualização da solução fazendo-se: $x_{i+1} = x_i + \alpha \cdot s_i$ e $i = i + 1$;
9. Teste da condição de otimalidade do ponto x_{i+1} : Se x_{i+1} for ótimo o algoritmo é encerrado.

Caso contrário, atualiza a iteração ($i = i + 1$) e retorna-se ao passo 5.

De maneira geral, o teste da condição de otimalidade, proposto no passo 9 do algoritmo anterior, pode ser substituído por testes de convergência das variáveis de projeto ou da função objetivo. Isso se justifica em virtude dos testes de otimalidade exigirem muito esforço computacional (Arora, 2004).

2.2 Otimização com restrições utilizando o Método do Lagrangeano Aumentado

A técnica utilizada neste trabalho para a solução do problema de otimização com restrições proposto é o Método do Lagrangeano Aumentado. Este método transforma o problema original em uma seqüência de subproblemas de otimização sem restrições. Com isso, cada subproblema pode ser resolvido através de técnicas de otimização sem restrições.

Considerando um problema de minimização somente com restrições de desigualdade, pode-se demonstrar que este pode ser transformado em um problema de minimização sem restrições, para ser resolvido pelo Método do Lagrangeano Aumentado, da seguinte forma (Rao, 1996):

$$\min \left\{ A(x, \lambda, r_k) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \alpha_j + r_k \cdot \sum_{j=1}^m \alpha_j^2, \right. \quad (6)$$

sendo r_k um fator de penalização, $\lambda^{(k)}$ o vetor de multiplicadores de Lagrange no subproblema k , α_j é dado por:

$$\alpha_j = \max \left\{ g_j(x), -\frac{\lambda_j}{2.r_k} \right\} \quad (7)$$

e os multiplicadores de Lagrange podem ser atualizados por:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + 2.r_k \cdot \alpha_j^{(k)}, \quad (8)$$

sendo $\lambda_j^{(k+1)}$ o multiplicador de Lagrange associado à restrição $g_j(x)$ no subproblema $k+1$ e $\lambda_j^{(k)}$ o mesmo para o subproblema k .

Por outro lado, a penalização deve ser aumentada entre subproblemas e sua regra pode ser estabelecida como:

$$r_{k+1} = \min \{ c \cdot r_k; r_{\max} \} \quad (9)$$

sendo a constante $c > 1$ e a penalização máxima r_{\max} pré-definidas e dependentes de cada tipo de problema.

Resumidamente, pode-se dizer que o papel dos multiplicadores de Lagrange e do fator de penalização é penalizar de forma gradual as violações às restrições. Maiores detalhes sobre estes conceitos podem ser encontrados em Rao (1996).

O algoritmo para solução de um problema de otimização sem restrições e utilizando o Método do Lagrangeano Aumentado pode então ser descrito como:

1. Definição de um ponto inicial x_1 , um fator de penalização inicial r_1 , um vetor de multiplicadores de Lagrange iguais a zero e o contador de subproblemas $k = 1$;
2. Otimização do subproblema sem restrições k -ésimo, definido pela Equação 6, tendo como ponto inicial x_k e como solução o ponto x_k^* ;
3. Atualização da solução: $x_{k+1} = x_k^*$;
4. Verificação da convergência com base no tamanho do passo $\|x_{k+1} - x_k\|$. Se houve convergência o processo é encerrado.
5. Se não houve convergência, atualiza-se os multiplicadores de Lagrange de acordo com a Equação 8, o fator de penalização com a Equação 9 e o contador $k = k+1$;
6. Retorna-se ao passo 2.

3. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS PLANAS

Os algoritmos de otimização discutidos anteriormente foram aplicados para o problema de otimização de topologia estrutural considerando mínima flexibilidade. A seguir, esse problema é discutido com maiores detalhes.

3.1 Definição do problema

O objetivo proposto neste trabalho é minimizar a flexibilidade de uma estrutura contínua em estado plano de tensões, restrito a uma quantidade limite de material a ser utilizada. É suposto que o material é elástico linear e isotrópico e que a teoria de pequenas deformações e pequenos deslocamentos pode ser aplicada.

Uma medida da flexibilidade da estrutura é a energia de deformação total acumulada durante o carregamento. Aplicando a 1ª. Lei da Termodinâmica (conservação da energia) pode-se mostrar que

essa energia é igual ao trabalho realizado pelas forças externas (W_{ext}). No caso de uma estrutura discretizada em elementos finitos, esse trabalho pode ser obtido pelo produto interno entre os deslocamentos nodais u e o vetor de forças externas nodais $F = K \cdot u$. Ou seja:

$$W_{ext} = \frac{1}{2} u^T \cdot F = \frac{1}{2} u^T \cdot K \cdot u. \quad (10)$$

sendo K a matriz de rigidez da estrutura, dependente do vetor de variáveis de projeto. Nesse ponto, o fator $\frac{1}{2}$ será desconsiderado, o que não altera a solução final.

Tomando como referência o formato padrão da Equação 1, este problema de otimização pode ser posto como:

$$\begin{cases} \min W_{ext}(x) = u^T \cdot K \cdot u \\ \text{Restrições: } \frac{V(x)}{V_0} - 1 \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

sendo $W_{ext}(x)$ o trabalho mecânico realizado sobre a estrutura, $V(x)$ o volume de material na estrutura, V_0 o volume de material máximo admissível e x o vetor de densidades dos elementos, que são as variáveis de projeto.

Tem-se, assim, a função objetivo a ser minimizada

$$f(x) = u^T \cdot K \cdot u \quad (12)$$

e a restrição de desigualdade

$$g(x) = \frac{V(x)}{V_0} - 1 \leq 0 \quad (13)$$

O problema da Equação 11 pode ser resolvido pela maioria dos métodos de otimização com restrições. Para o Método do Lagrangeano Aumentado, cada subproblema k -ésimo a ser resolvido pode ser escrito como

$$\min A(x, \lambda^{(k)}, r_k) = f(x) + \lambda^{(k)} \cdot \alpha(x) + r_k \cdot \alpha(x)^2, \quad (14)$$

sendo a função relacionada à restrição da Equação 13

$$\alpha(x) = \max \left\{ \frac{V(x)}{V_0} - 1, -\frac{\lambda^{(k)}}{2 \cdot r_k} \right\}. \quad (15)$$

Os multiplicador de Lagrange $\lambda^{(k)}$ e o fator de penalização r_k são atualizados de acordo com as Equações 8 e 9, respectivamente.

3.2 Comentários sobre a Implementação Numérica

3.2.1 Densidades mínimas, máximas e intermediárias

A abordagem mais comum para o problema de otimização de topologia de estruturas contínuas é a utilização de um material poroso virtual que possibilite o algoritmo deslocar-se entre a situação de total ausência de material no ponto e a situação de existência integral de material. Entre as várias possibilidades de materiais que possuem densidades intermediárias, o *Solid Isotropic with Microstructure Penalized* – SIMP – (microestrutura sólida, isotrópica e penalizada) é o mais popular na literatura, principalmente devido à facilidade de implementação numérica (Bendsoe,

1989). As densidades podem então assumir valores intermediários entre zero e um. Entretanto, na solução final, os valores intermediários devem ser evitados por questões práticas. A alternativa mais usual para essa questão é a aplicação de uma penalização para os valores de densidades intermediários, reduzindo-se a rigidez destas. Com isso, e lembrando que a microestrutura é isotrópica, assim como o material original, a penalização é aplicada somente ao módulo de elasticidade E do material, resultando em:

$$E_p = E \cdot x^p \quad (16)$$

sendo E_p o módulo de elasticidade penalizado, x a densidade relativa do elemento finito e p um fator de penalização maior que um.

Dessa maneira, a utilização de densidades intermediárias torna-se desvantajosa, pois para um mesmo volume de material tem-se uma rigidez bastante inferior em relação à densidade unitária. Isso faz com que o algoritmo tenda a utilizar as densidades iguais à zero ou iguais a um, evitando as densidades intermediárias. O efeito desta penalização para um problema pode ser visto na Figura 2. É possível evidenciar uma grande quantidade de material com densidade intermediária na solução sem penalização, sendo que estas densidades são reduzidas significativamente para a solução com penalização, realçando a forma final da estrutura.

Outro problema é impedir que as densidades sejam menores que zero. Para isso faz-se com que materiais com densidades negativas não contribuam para o cálculo do volume da estrutura, ou seja

$$V(x) = \sum_{i=1}^{numel} v_i \cdot \max(0, x_i) \quad (17)$$

sendo $numel$ o número de elementos da estrutura e v_i o volume de um elemento.

Assim, não será vantajosa a utilização de densidades negativas, pois estas não acarretarão em diminuição do volume da estrutura. Além disso, antes do cálculo dos deslocamentos da estrutura pelo método elementos finitos, é feita uma checagem das densidades, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 1 & , \text{ se } x > 1 \\ x = 0,001 & , \text{ se } x < 0,001 \end{cases} \quad (18)$$

Isso impede que elementos com densidades superiores à unidade sejam utilizados. Além disso, elementos com densidades muito pequenas não tornam a matriz de rigidez singular, o que impossibilitaria a solução do sistema. Essa mesma checagem é feita ao final de cada iteração, garantindo assim que as densidades dos elementos estejam sempre entre seus limites inferiores e superiores, respectivamente definidos em 0,001 e 1.



Figura 2: Exemplos de soluções para o mesmo problema a) sem penalização e b) com penalização p igual a 3.

3.2.2 Checkerboard e filtragem

Alguns problemas quando resolvidos apresentam um padrão chamado *checkerboard*. Esse problema caracteriza-se por elementos com densidades pequenas cercados por elementos com densidades grandes, como pode ser visto na Figura 3.a. Este fenômeno gera uma estrutura que não

pode ser utilizada na prática, devido à sua forma complexa, tornando o resultado da análise de pouca utilidade.



Figura 3: Exemplos de soluções a) sem filtragem e b) com filtragem.

A literatura apresenta diversas alternativas para este problema (Ming-Hsiu and Yeh-Liang, 2005), sendo um dos mais comuns a utilização de filtros (Cardoso and Fonseca, 2003). De maneira geral, a filtragem impõe uma uniformização nas propriedades de elementos próximos, impedindo uma variação brusca de propriedades entre elementos adjacentes.

Para os problemas de otimização topológica, a filtragem pode ser aplicada às densidades ou ao gradiente. Porém, tem-se observado que a filtragem do gradiente torna o algoritmo mais estável. Este fato ocorre, provavelmente, pelo fato da filtragem das densidades ao final de cada iteração inserir uma mudança muito brusca no problema. Já a utilização de gradientes filtrados faz com que o algoritmo opere mais naturalmente, pois nenhuma mudança brusca é feita.

Diversos filtros são comumente utilizados em problemas de otimização topológica (Cardoso and Fonseca, 2003). O procedimento adotado neste trabalho é devido a Pedersen et al. (2006), sendo que o gradiente da função objetivo é filtrado da seguinte maneira:

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{numel} H(i, j) \cdot V_j} \cdot \sum_{j=1}^{numel} H(i, j) \cdot V_j \cdot \frac{df}{dx_j}, \quad (19)$$

sendo V_j o volume do elemento j . A função $H(i, j)$ caracteriza o processo de filtragem e é dada por

$$H(i, j) = \max \{0; r_{\max} - r_{ij}\}, \quad (20)$$

sendo r_{\max} uma distância fornecida e r_{ij} a distância entre os baricentros dos elementos i e j .

O valor r_{\max} determina a distância de influência para a filtragem de cada elemento. Assim, elementos que estiverem a uma distância maior do que r_{\max} do elemento em questão não irão influenciar a filtragem deste. É válido observar que um valor muito pequeno para r_{\max} pode fazer com que não haja filtragem, enquanto um valor muito grande pode considerar uma área de influência muito grande, destruindo detalhes da estrutura. Uma limitação dessa técnica é sua dependência com relação ao tamanho dos elementos finitos.

3.2.3 Cálculo das derivadas e gradientes

Para o cálculo das derivadas é utilizado o método de diferenças finitas. Apesar de a literatura fornecer informações para a obtenção dessas derivadas em forma analítica, para o corrente problema de otimização (Sigmund, 2001), optou-se pela utilização de diferenciação numérica com o intuito de manter o código computacional mais geral, permitindo a implementação de outras formulações na mesma estrutura computacional. Porém, vale salientar que a utilização das formas analíticas aumenta de forma substancial o desempenho do algoritmo.

Para o cálculo das derivadas é utilizada a aproximação por diferenças finitas para intervalo à diante, da seguinte maneira (Kiusalaas, 2005):

$$\frac{df(x)}{dx_i} \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (21)$$

sendo Δx o intervalo utilizado para o cálculo das diferenças finitas.

Outras formas para a aproximação por diferenças finitas são mais precisas, como as diferenças finitas para intervalo central. Porém, estas formas necessitam do cálculo da função em mais pontos, tornando o algoritmo bastante menos eficiente. Considerando que as derivadas obtidas aqui ainda serão filtradas e conjugadas, torna-se questionável a necessidade e uma precisão demasiada na sua obtenção.

3.3. Algoritmo geral

Feitas as considerações anteriores, pode-se escrever ao algoritmo de solução utilizado neste trabalho como:

1. Entrada de dados da estrutura e parâmetros de otimização;
2. Obtenção da solução inicial;
3. Otimização do subproblema definido pela Equação 14:
 - a. Cálculo do gradiente da Equação 14 por diferenças finitas;
 - b. Filtragem do gradiente da Equação 14 de acordo com a Equação 19;
 - c. Cálculo da direção de descida (através do Método do Gradiente Conjugado) pela Equação 3;
 - d. Obtenção do passo ótimo de acordo com a Equação 5;
 - e. Atualização das variáveis do processo;
 - f. Repetição dos passos 3.a à 3.f até atingir-se a tolerância especificada para o subproblema;
4. Atualização do multiplicador de Lagrange e do fator de penalização, dados respectivamente pelas Equações 8 e 9;
5. Repetição dos passos 3 a 5 até atingir-se a tolerância especificada.

Dentre os passos descritos anteriormente, vale salientar que a obtenção da solução inicial é feita distribuindo-se o material disponível igualmente entre todos os elementos. Além disso, a tolerância para o subproblema no passo 3.f não precisa ser muito estreita durante as primeiras iterações, uma vez que Equação 8 fornece apenas uma aproximação para os multiplicadores de Lagrange do problema. Porém, nas iterações finais, o subproblema definido pela Equação 14 deve ser resolvido com maior precisão, uma vez que o algoritmo encontra-se próximo a solução do problema.

4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Na Figura 4 são apresentadas algumas soluções obtidas com o algoritmo descrito anteriormente, sendo ao lado apresentados os parâmetros utilizados. Para a obtenção destas soluções, é necessário testar os parâmetros que proporcionam uma maior eficiência do algoritmo em cada caso. Ou seja, o mesmo problema deve ser resolvido algumas vezes com diferentes parâmetros, até uma solução satisfatória ser obtida. Isso pode ser visto comparando-se os parâmetros utilizados nos problemas da Figura 4. Para o problema da Figura 4.b, por exemplo, é necessária a utilização de um maior número de elementos e um r_{\max} menor do que nos outros casos. Já no exemplo da Figura 4.c, é necessária uma penalização maior para as densidades intermediárias. Assim, a obtenção da solução ótima de uma estrutura é um processo que exige interação com o usuário do algoritmo, sendo que este deve ter conhecimentos básicos necessários à regulação dos parâmetros de cada problema e interpretação dos resultados.

Os exemplos aqui analisados apresentam apenas carregamentos simples. Porém, em algumas estruturas pode ser interessante considerar múltiplos casos de carregamentos. Isto pode ser realizado

fazendo-se a composição da função objetivo pela soma do trabalho realizado em cada caso de carregamento (Sigmund, 2001).

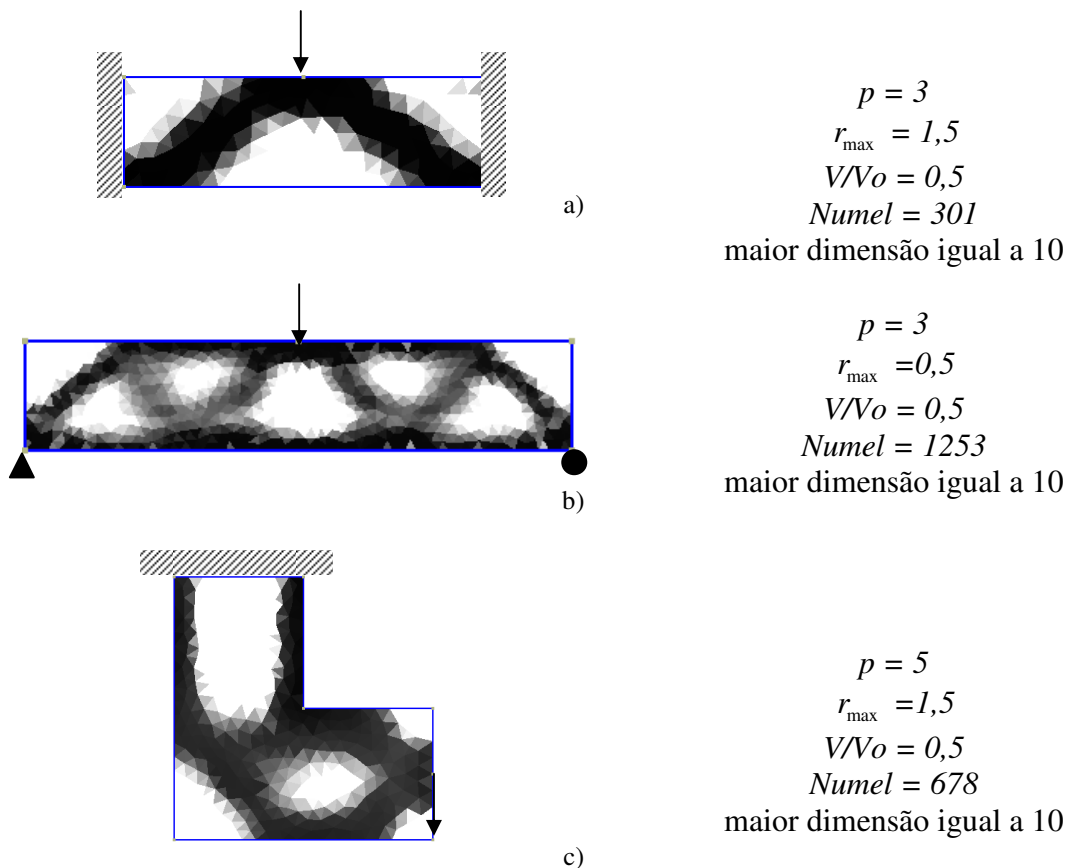


Figura 4: Três exemplos de soluções.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho procurou apresentar a clássica formulação de otimização de topologia estrutural que visa uma mínima flexibilidade (máxima rigidez), limitada a uma quantidade de material pré-definida. Alguns resultados numéricos foram apresentados e pode-se constatar a aplicabilidade da técnica. Apesar de suas vantagens, a otimização topológica acarreta em alguns problemas numéricos, sendo os mais comuns as densidades intermediárias, o *checkerboard* e o cálculo do gradiente da função objetivo.

Uma solução para as densidades intermediárias pode ser implantada com relativa simplicidade, utilizando-se o método de penalização SIMP. Porém, dificilmente consegue-se evitá-las totalmente, principalmente nas regiões que definem o contorno da estrutura. Além disso, as densidades intermediárias podem também ser ocasionadas pelo uso da filtragem, que faz uma homogeneização das propriedades em certas regiões.

O *checkerboard* constitui provavelmente uma das principais questões para a otimização topológica de estruturas. Isso porque sua solução é de relativa complexidade, e mesmo a utilização da metodologia da filtragem pode ser implantada segundo diversos critérios. Além disso, existem questionamentos sobre a validade matemática da utilização da filtragem, e sua aplicação necessita da interação com o usuário do algoritmo.

O cálculo do gradiente da função objetivo pode ser extremamente dispendioso computacionalmente, uma vez que é feito por diferenças finitas e exige inúmeras análises pelo método dos elementos finitos. Uma solução para este problema é a utilização de formas analíticas para o cálculo deste gradiente, o que pode aumentar substancialmente a eficiência do algoritmo.

Porém, para muitas formulações não existem tais formas analíticas, fazendo com que nestas formulações a utilização das diferenças finitas seja o único meio de obtenção do gradiente.

Por fim, conclui-se que a otimização topológica possibilita a obtenção de estruturas ótimas que em alguns casos são de difícil obtenção à primeira vista. Assim, as soluções obtidas podem representar uma significativa melhora das propriedades da estrutura ou diminuição da quantidade de material utilizado.

6. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio da FUNCEFET-PR, Fundação de Apoio à Educação, Pesquisa e Desenvolvimento Científico e Tecnológico do CEFET-PR – Brasil.

Agradeço também ao professor Jucélio Tomás Pereira, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pois sem sua ajuda e incentivo este trabalho nunca teria sido realizado.

7. REFERÊNCIAS

- Arora, J.S., 2004, “Introduction to Optimum Design”, Elsevier Inc., USA.
- Bendsoe, M.P., 1989. “Optimization of Structural Topology, Shape, and Material”. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- Cardoso, E.L. and Fonseca, J.S.O., 2003, “Complexity control in the topology optimization of continuum structures”, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering, vol. 25, pp. 293-301.
- Duysinx, P. & Bendsoe, M.P., (1998). “Topology optimization of continuum structures with local stress constraints”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 43, pp. 1453-1478.
- Kiusalaas, J., 2005, “Numerical Methods in Engineering with MATLAB”, Cambridge University Press, USA.
- Ming-Hsiu Hsu and Yeh-Liang Hsu, 2005, “Generalization of two- and three-dimensional structural topology optimization”, Engineering Optimization, vol. 37, ppv 83-102.
- Pedersen, C.G., Lund, J.J., Damkilde, L. and Kristensen, A.S., 2006, “Topology optimization - Improved checker-board filtering with sharp contours”, Proceedings of the 19th Nordic Seminar on Computational Mechanics, ppv 182-185.
- Pereira, J. T., (2001). Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com restrições Sobre o Critério de Falha Material. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Rao, S.S., 1996, “Engineering Optimization”, John Wiley & Sons, USA.
- Sigmund, O., 2001, “A 99 line topology optimization code written in matlab”, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 21, no. 2, pp. 120-127.

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF PLANE STRUCTURES

André Jacomel Torii

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Av. Sete de Setembro, 3165 - Curitiba/PR, Brasil - CEP 80230-901.
ajtorii@hotmail.com

Abstract: *The purpose of this work is to present an algorithm for topology optimization of plane structures, seeking a minimum flexibility, restricted by a maximum volume of material. y, some numeric problems are discussed and three examples are presented.*

Keywords: *optimization, structures, Finite Element Method, topology optimization, minimal compliance.*