

## COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS DE OBTENÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO $K_I$

### Ricardo Dutra Mendes

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI, Instituto de Engenharia Mecânica - IEM Campus Prof. Jose Rodrigues Seabra - Av. BPS nº1303 Bairro Pinheirinho Cep 37500-903 Itajubá MG -Brasil  
rdm@unifei.edu.br

### José Célio Dias

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI, Instituto de Engenharia Mecânica - IEM Campus Prof. Jose Rodrigues Seabra - Av. BPS nº1303 Bairro Pinheirinho Cep 37500-903 Itajubá MG -Brasil  
jcelio@unifei.edu.br

**Resumo:** *Este artigo tem como objetivo determinar o fator de intensidade de tensão de uma trinca de tração normal em uma lâmina semi-finita com trinca lateral oriunda de um arco de circunferência sujeita a uma tensão de tração remota uniforme. Nestas condições de geometria e solitação a região de ligamento fica submetida a uma força de tração e momento de flexão, ambos concentrados a meia distância do ligamento. O Cálculo do fator de intensidade de tensão é obtido pelo método dos elementos finitos, utilizando a técnica das deformações específicas e da extrapolação para valores ao redor da ponta da trinca. Os resultados do método proposto são comparados com outros, como forças nodais e analítico.*

**Palavras-chave:** *Fator de intensidade de tensão, Método dos elementos finitos, Deformação específica, Forças Nodais.*

## 1. INTRODUÇÃO

Pela grande importância do conhecimento do comportamento de estruturas previamente defeituosas tenta-se cada vez mais apurar o estudo da região fraturada. Sabendo-se que a distribuição de tensões em torno de qualquer trinca é completamente descrita pelo fator e intensidade de tensões  $K$  (Irwin, 1957; Williams, 1957), torna-se de extrema importância a sua obtenção.

Pela dificuldade de modelamento da região trincada por métodos analíticos atualmente tem-se desenvolvido com frequência uma série de métodos numéricos que contribuem para um melhor entendimento do assunto (Miranda, 2003). O método das deformações foi utilizado como objetivo do presente estudo com ajuda do método dos elementos finitos para o cálculo do fator  $K$  no modo de carregamento  $I$ .

O presente artigo visa analisar métodos de avaliação do fator de concentração de tensão na região de trinca de determinada lamina sob tração. Nas presentes condições de geometria e solitação a região de ligamento fica submetida a uma força de tração e momento de flexão. Desta maneira cálculo do fator de intensidade de tensão é obtido por métodos analíticos e pelo método dos elementos finitos, utilizando a técnica das deformações específicas além do das forças nodais ambos utilizando a da extrapolação para valores ao redor da ponta da trinca inovando assim o estudo pois normalmente tais defeitos são detectados e avaliados quanto as suas dimensões por técnicas de ensaios não destrutivos.

## 2. CONCEITOS FUNDAMENTAS

O Fator de Intensidade de Tensões é um dos parâmetros da Mecânica de Fratura Linear Elástica utilizados para se conhecer o comportamento de estruturas e componentes contendo trincas e defeitos (Schijve, 2001). Em corpos com geometria simples,  $K_I$  pode ser determinado com o auxílio de tabelas e manuais ou, e ainda analiticamente (Tada, 1985; Murakami, 1987; Rooke, 1976). Em casos mais complexos, esta determinação só pode ser feita por meio de métodos numéricos como o método dos elementos finitos ou de procedimentos experimentais.

### 2.1 Fator de intensidade de tensão

Devido à deformação que ocorre quando o carregamento é aplicado existe a possibilidade de determinar o fator  $K_I$  como função do carregamento em estruturas. Desta forma trabalhando o campo de deformações abaixo descritos podemos organizá-las de forma a chegar ao  $K_I$  objetivo de estudo. As deformações podem ser coletadas através do método dos elementos finitos ou por sensores de deformação (strain gages) próximos à ponta da trinca.

O campo de deformações na vizinhança da ponta de uma trinca é escrito na forma (Dally and Riley, 1991):

$$\varepsilon_{ij} = A_1 f_{ij}(\theta) r^{-1/2} + A_2 g_{ij}(\theta) r^0 + A_3 h_{ij}(\theta) r^{1/2} + \dots \quad (1)$$

Onde  $r$  e  $\theta$  é o raio e o ângulo, medidos da ponta da trinca, respectivamente.  $A_i$  são constantes.  $f_{ij}(\theta)$ ,  $g_{ij}(\theta)$  e  $h_{ij}(\theta)$  são funções adimensionais derivadas de  $\theta$ ,  $\alpha$  é o ângulo de posicionamento do sensor de deformação em relação ao eixo  $x$ . A constante  $A_1 = K_I / (2\pi)^{1/2}$ .

### 2.2 Solução analítica

Analiticamente, o fator de intensidade de tensão em uma lâmina semi-finita com trinca lateral oriunda de um arco de circunferência sujeita a uma tensão de tração remota uniforme como esquematizada na Figura 1a é dada pela Equação 2 (Cherepanov, 1979):

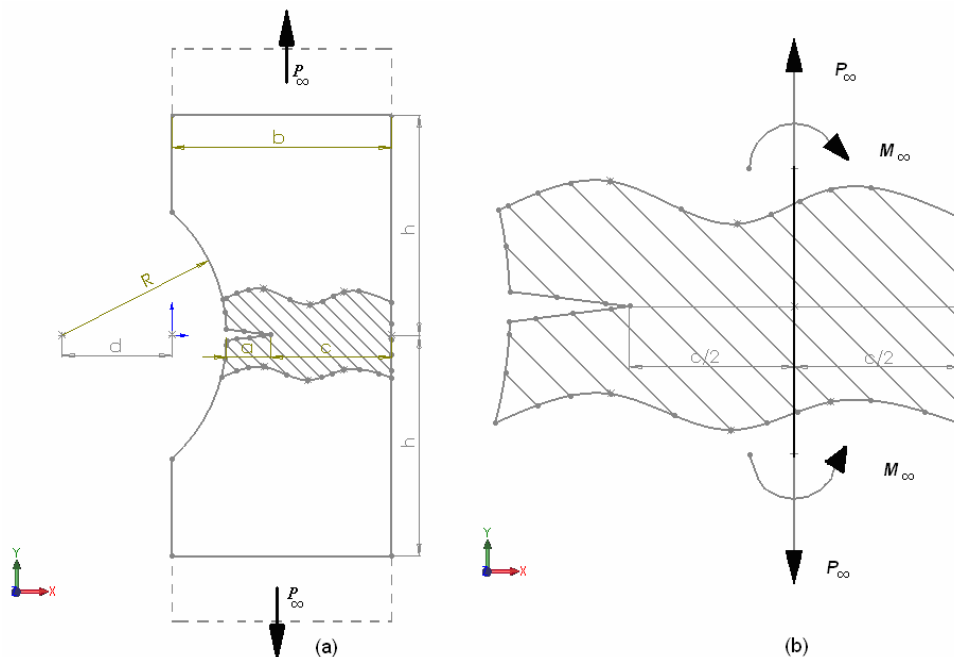


Figura 1 (a) Lâmina semi-finita com trinca lateral oriunda de um arco de circunferência, (b) Detalhe de carregamento da região hachurada.

$$K_I = \sqrt{\pi} \left[ \left( \frac{4\pi - 12}{\pi^2 - 8} \right) \left( \frac{P_\infty}{\sqrt{c}} \right) + \left( \frac{4\pi - 8}{\pi^2 - 8} \right) \left( \frac{M_\infty}{c\sqrt{c}} \right) \right] \quad (2)$$

A Figura 1b mostra a condição de carregamento, nestas condições de geometria e solicitação, a região de ligamento fica submetida a uma força de tração  $P_\infty$  e momento de flexão  $M_\infty$ , ambos concentrados a meia distância do ligamento  $c$ . A trinca lateral é oriunda de um arco de circunferência de raio  $R$  e distante de um comprimento  $d$  de uma das faces da lâmina.

### 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Entre os diferentes procedimentos de cálculo do fator de intensidade de tensões através do método dos elementos finitos, pode-se citar: 1) Método das forças nodais e 2) Método das deformações. Sendo que este último apresenta vantagens quanto à análise teórico-experimental. O valor da deformação específica é relativamente fácil de ser obtida através da análise experimental de tensão/deformação. Pares de sensores de deformação podem ser posicionados adequadamente, como por exemplo, orientados na direção dos eixos principais  $x'$  e  $y'$ . Isto é, nestas condições os ângulos  $\alpha$  e  $\alpha + 90^\circ$  definem as direções principais. Por tanto, as tensões e deformações principais são avaliadas por um simples sistema de aquisição de dados.

O programa ANSYS® se encaixa perfeitamente na proposta requerida do trabalho e pode comodamente ser utilizado para a coleta das deformações em locais estrategicamente escolhidos, assim de posse dos resultados do programa podem-se efetuar os cálculos necessários.

Foi utilizado para a análise no programa de MEF (ANSYS®) o elemento quadrilateral PLANE82 como pode ser visualizado na Figura 2, é definido por 8 nós (I,J,K,L,M,N,O,P) tendo 2 graus de liberdade em cada nó (UX,UY), duas translações segundo  $x$  e  $y$  respectivamente, funções de interpolação quadráticas, Admite prescrição nos deslocamentos, cargas concentradas nos nós, carga distribuída normal à face do elemento, etc. Apresenta como resultados mais comuns deslocamentos e deformações, tensões normais, principais e equivalentes, etc. Pode tolerar formas irregulares sem grande perda de exatidão. Desta forma se encaixando na prescrição de elemento procurada para tal trabalho.

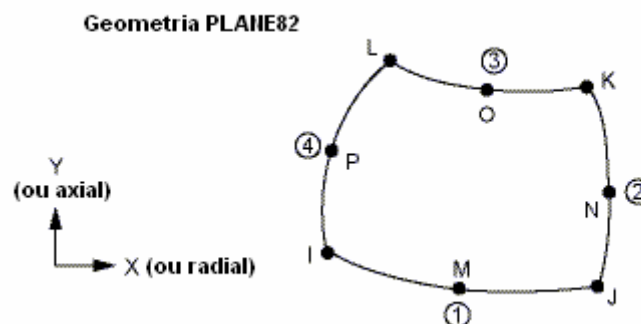


Figura 2: Elemento PLANE82.

#### 3.1. Método das forças nodais

Este procedimento de cálculo consiste em obter as forças nodais ao longo da frente da trinca e no plano da mesma. Estas forças podem ser avaliadas por métodos numéricos, sendo o fator de intensidade de tensão obtido pela expressão:

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2x_c} \sum_{i=1}^n F_{y,i}} \quad (3)$$

Onde  $F_y$  é a força nodal,  $x_c$  é a abscissa para a posição  $i$  para a respectiva força nodal. Como exemplo, para as informações disponíveis na tabela 1 com arco de circunferência de raio igual a  $150\text{mm}$  e comprimento de trinca igual a  $20\text{mm}$ , a distribuição das forças nodais é mostrada na Figura 3.

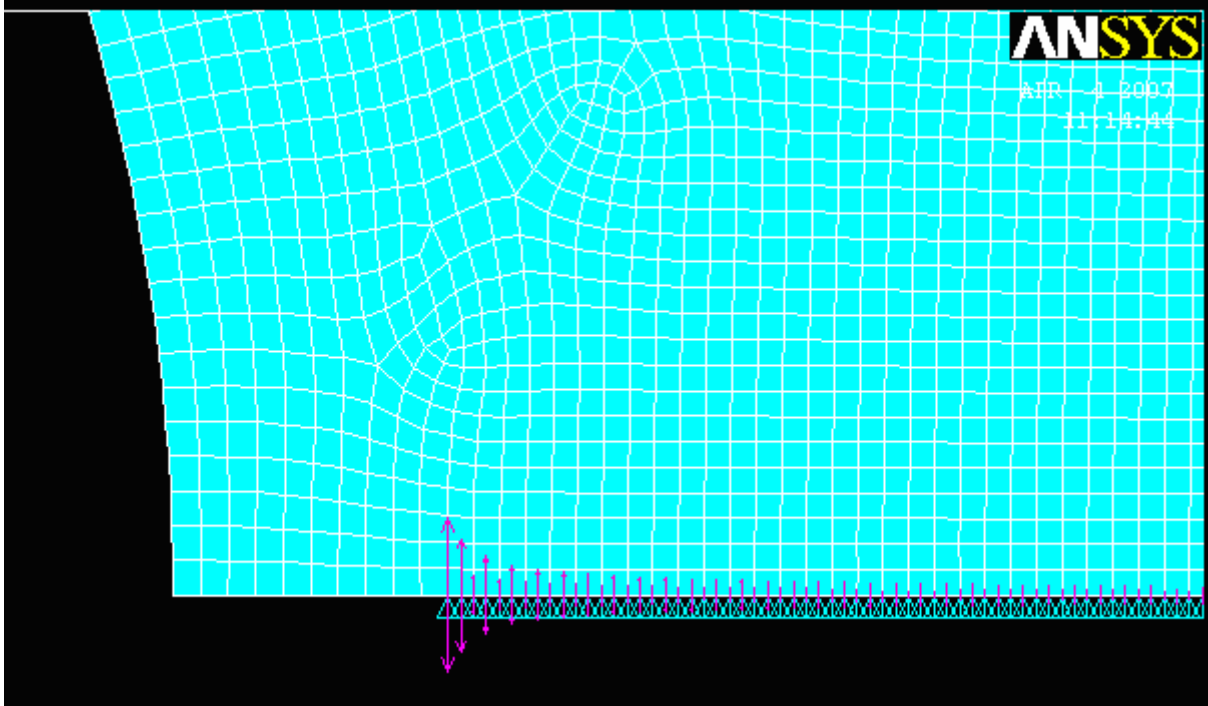


Figura 3 Distribuição das forças nodais.

### 3.2. Método das deformações

Uma vez avaliadas as deformações específicas  $\varepsilon_{x'x'}$ , a equação abaixo permite determinar as constantes  $A_i$  (Dally and Riley, 1991) pela aplicação das condições de contorno convenientemente escolhida.

$$2G\varepsilon_{x'x'} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} \left[ k \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \frac{3\theta}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \right] + A_2 (k + \cos 2\alpha) + A_3 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \left[ k + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\alpha \right] \quad (4)$$

Onde  $k = (1-\nu)/(1+\nu)$  e  $G = E/2(1+\nu)$ .  $E$  é o módulo de Young e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Na condição  $\theta = \alpha = 60^\circ$  e  $\nu = 0.333$ , pode-se escrever que:

$$A_1 = 2E\varepsilon_{x'x'} \sqrt{\frac{r}{3}} \quad (5)$$

#### 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise considerou uma lâmina de alumínio semi-finita com trinca lateral oriunda de um arco de circunferência sujeita a uma tensão de tração remota uniforme como mostrado na Figura 4. E, dados conforme a tabela 1.

Tabela 1. Dados considerados para a análise.

<b>Módulo de Young <math>E</math> (GPa)</b>	70
<b>Coefficiente de Poisson <math>\nu</math></b>	0,333
<b>Dimensões (m)</b>	$b = 0,20$ , $h = 0,20$ e $d = 0.10$
<b>Força aplicada/ unidade de espessura <math>P_{\infty}</math> (MN/m)</b>	5

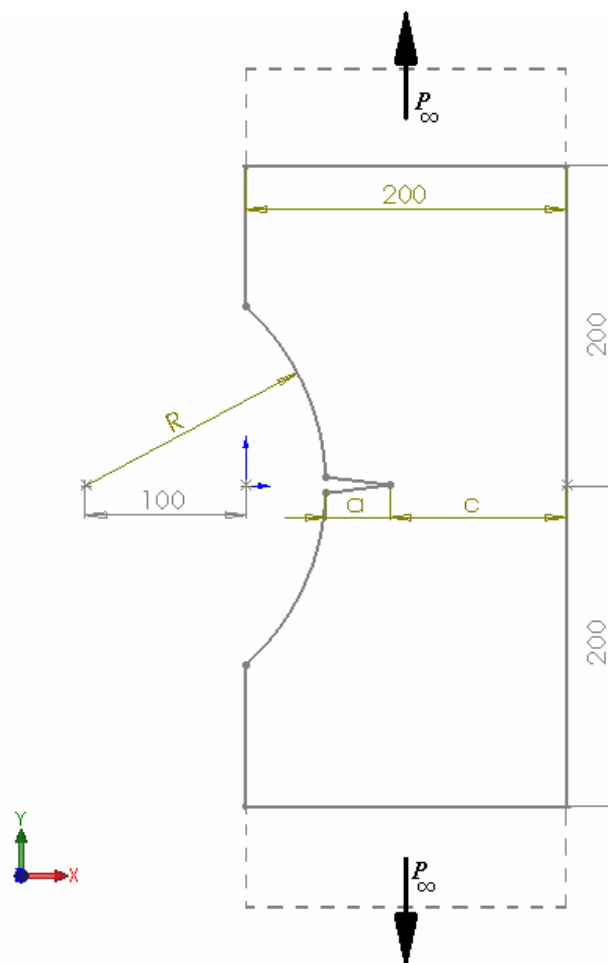


Figura 4. Lâmina de alumínio com trinca lateral sob tensão.

##### 4.1. Procedimento de cálculo

A Figura 5 mostra o fator  $K_I$  em função da distância  $r$  para  $\theta = \alpha = 60^\circ$ . Como exemplo, foi utilizado  $R=150\text{mm}$  e  $a=10\text{mm}$ . A técnica consiste em determinar as deformações específicas permitindo avaliar as constantes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ . A primeira constante permite determinar o fator de intensidade de tensão, sendo que as demais não são relevantes no momento. O cálculo do fator de intensidade de tensão é obtido através da técnica das deformações específicas e da extrapolação para valores ao redor da ponta da trinca. A equação desta reta é dada por regressão linear na forma:

$K_I = 0.0187r + 19,355$ . Portanto,  $K_I = 19,355 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . O valor analítico encontrado é igual a  $19,572 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , com erro=1,1%.

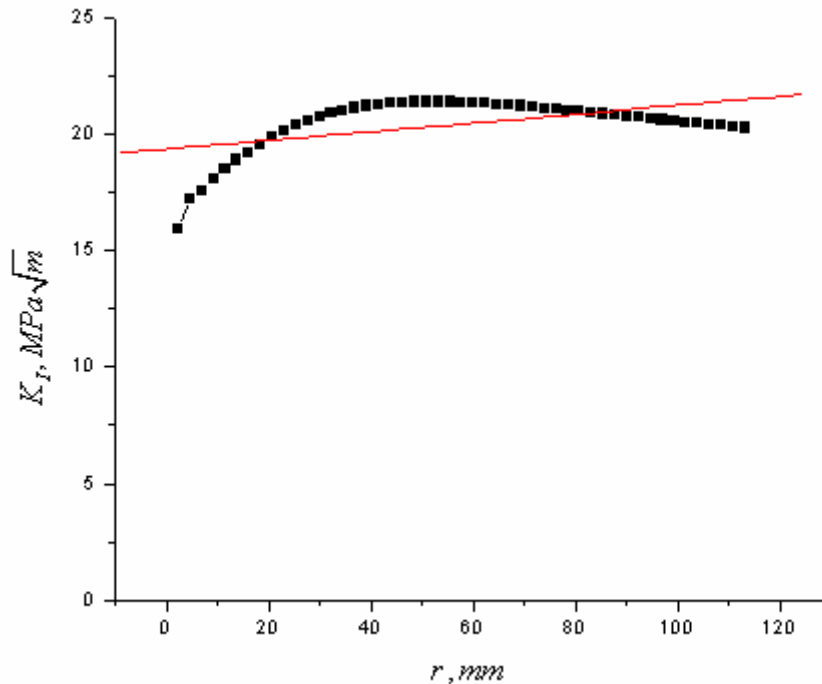


Figura 5.  $K_I$  em função de  $r$ .

As Figuras 6(a-d) mostram o comportamento do fator  $K_I$  em função do comprimento de trinca, para diferentes valores de  $R$ . Como pode ser visto nos gráficos a diferença entre o método analítico e o método das deformações é muito pequena, com erros menores que 5%. A diferença entre os valores obtidos pelo método das deformações e o método nodal só são convergentes para valores de  $R$  menor que  $150 \text{ mm}$ . Para valores acima ocorre uma acentuada discrepância entre os valores principalmente para pequenos comprimentos de trinca. Uma maneira de melhorar os resultados seria o refinamento da malha de elementos finitos para as análises utilizando o método nodal.

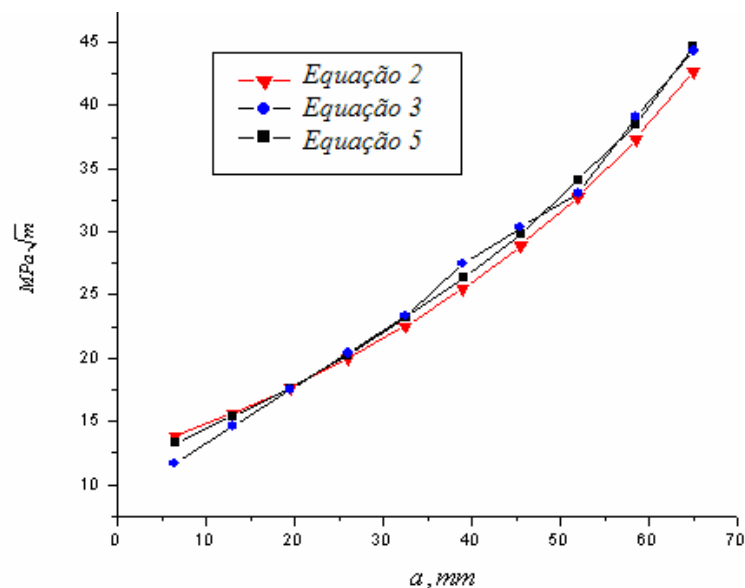


Figura 6a. Comparação entre resultados numéricos e analítico para  $R=135 \text{ mm}$ .

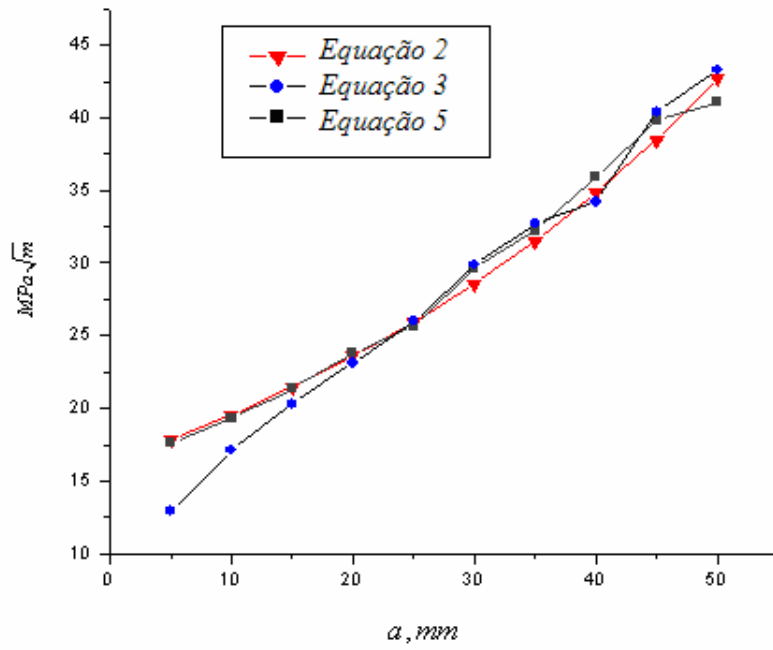


Figura 6b. Comparação entre resultados numéricos e analítico para  $R=150$  mm.

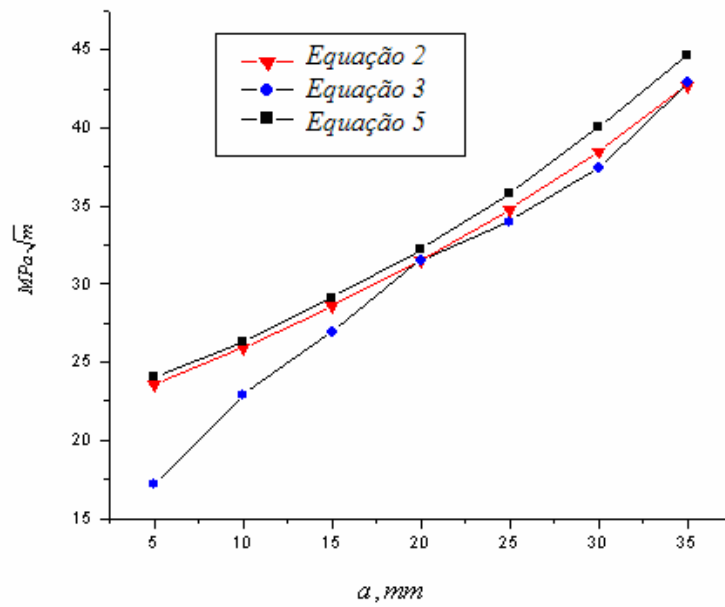


Figura 6c. Comparação entre resultados numéricos e analítico para  $R=165$  mm.

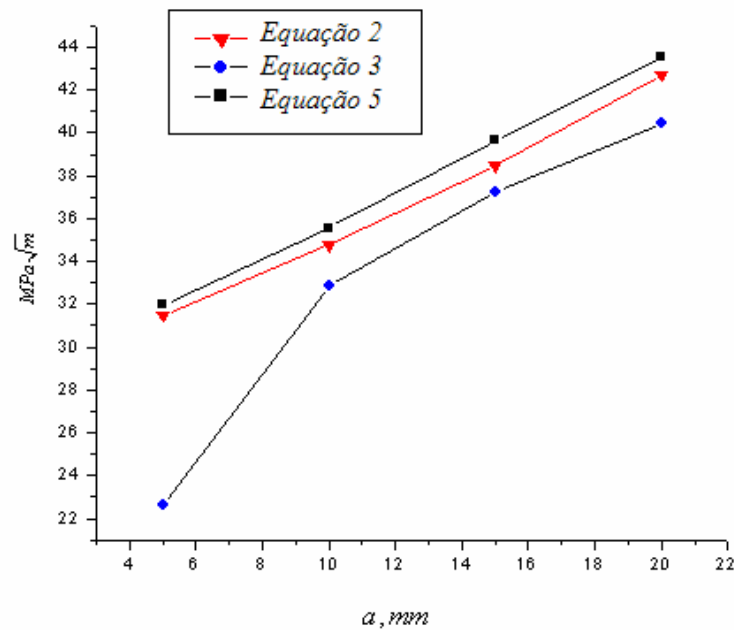


Figura 6d. Comparação entre resultados numéricos e analítico para  $R=180 \text{ mm}$ .

## 4.2. Análise teórico-experimental

No momento, vêm sendo realizados ensaios experimentais visando obter as deformações específicas através de sensores de deformação ao redor da ponta da trinca. Pares de sensores são posicionados para  $\theta = \alpha = 60^\circ$  para diferentes valores de  $r$ . Também são posicionados sensores de deformação ao longo da frente da trinca para  $\theta = 0$  e  $\alpha = 90^\circ$ . Um sistema de aquisição de dados com 8 canais/SPIDER8 é utilizado e as informações são processadas viabilizando um confronto de resultados.

O procedimento permite uma análise teórico/experimental para determinar os fatores de intensidade de tensões nos modos combinados I/II. Isto é, trinca de tração normal e trinca de cisalhamento no plano. Assim, o procedimento viabiliza a análise da integridade estrutural de elementos mecânicos e equipamentos em loco.

## 5. CONCLUSOES

A determinação dos fatores de intensidade de tensão baseados na extrapolação de valores de  $K_I$  calculados a partir das deformações específicas além das forças nodais implementada no programa ANSYS®, mostrou boa precisão. Como podem ser vistos, os resultados das comparações apresentaram baixos erros, sendo menores que 5% do método das deformações específicas (Equação 5) em comparação com o analítico (Equação 2), e de até 6% do método nodal (Equação 3) para comprimento de trincas não muito pequeno com raios ( $R$ ) de não muito grandes como comentado no item 4.1 do presente trabalho. Assim desta forma a precisão relativamente elevada permite um estudo de geometrias mais complexas, sem formula analítica conhecida podendo-se ter confiança no resultado.

Em comparação entre os dois métodos numéricos pode-se dizer que o das deformações específicas mostrou-se mais preciso, sobretudo com raios ( $R$ ) maiores além de permitir uma análise teórica/experimental utilizando sensores de deformação como comentado no item 4.2 utilizando a Equação 1.

Os pequenos erros associados à determinação do  $K_I$  podem ser minimizados se houver um refinamento mais apurado na região próxima à ponta da trinca, sendo que poderia ser utilizado outro elemento finito para a análise gerando talvez maior precisão.



## 6. AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Conselho Nacional de Pesquisa – CNPq pela bolsa concedida.

## 7. REFERÊNCIAS

- Cherepanov G.P. , 1979, “Mechanics of Brittle Fracture”, McGraw Hill, 303 p.
- Dally J.W. and Riley W.F., 1991, “Experimental Stress Analysis”, McGraw Hill, 329 p.
- Irwin, G.R., 1957, “Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate”,  
Jornal of Applied Mechanics, v. 24, pp.361-364.
- Miranda, A.C.O., 2003 “Propagação de Trincas por Fadiga em Geometrias 2D Complexas sob Cargas Cíclicas Variáveis”, Rio de Janeiro, Brasil.
- Murakami, Y., 1987, “Stress Intensity Factors Handbook”, Pergamon Press, New York.
- Rooke, D.P. and Cartwright, D.J., 1976 ,“Compendium of Stress Intensity Factors”, Her Majesty’s Stationary Office, London.
- Schijve JAAP, 2001, “Fatigue of Structures and Materials”, Kluwer Academic Publishers, 360 p.
- Tada, H., Paris, P.C., and Irwin G. R., 1985 ,“The Stress Analysis of Cracks Handbook (2nd Ed.)”, Paris Productions, Inc., St. Louis.
- William, G.R., 1957, “On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack”, Jornal of Applied Mechanics, v. 24, pp. 109-114.

## COMPARISON BETWEEN NUMERICAL OBTAINING METHODS OF THE STRESS INTENSITY FACTOR $K_I$

### Ricardo Dutra Mendes

Federal University of Itajubá - UNIFEI, Institute of Mechanical Engineering - IEM, Prof. José Rodrigues Seabra Campus, 1303 BPS Av., Pinheirinho District, ZIP code 37500-903, Box-Postal 50, Itajubá, Minas Gerais, Brazil  
rdm@unifei.edu.br

### José Celio Dias

Federal University of Itajubá - UNIFEI, Institute of Mechanical Engineering - IEM, Prof. José Rodrigues Seabra Campus, 1303 BPS Av., Pinheirinho District, ZIP code 37500-903, Box-Postal 50, Itajubá, Minas Gerais, Brazil  
jcelio@unifei.edu.br

**Abstract:** *The goal of this work is obtaining the stress intensity factor of a crack from a normal traction, of a half-finite plate with a lateral crack of a circumference arc subdued to a uniform remote tensile stress. In these geometric and requested conditions, the ligament region is subdued to a stress force and bending torque, both concentrated in the middle point of the ligament. The Calculation of the stress intensity factor is obtained by the approach of the finite elements, utilizing to technical of the specific strains and the extrapolation for values to the around crack tip. The results of the proposed method are compared with others, as nodal forces and analytic. This procedure presents satisfactory and allows a theoretical-experimental analysis by strain gauges.*

**Keywords:** *Stress intensity factor, Finite elements method, Specific strains, Nodal Forces.*