

CONSIDERAÇÃO DA RIGIDEZ GEOMÉTRICA NA FREQUÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIGAS EM BALANÇO

Alexandre de M. Wahrhaftig¹

João Augusto Lima Rocha²

Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil³

¹ Departamento de Construção e Estruturas, Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil. alixa@ufba.br,

² Departamento de Construção e Estruturas, Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil. joarocha@ufba.br,

³ Departamento de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, São Paulo, Brasil, reyolando.brasil@poli.usp.br

Resumo: Normalmente, a consideração do efeito da força axial sobre as frequências naturais de uma viga remete a sistemas de equações diferenciais com solução inviável do ponto de vista da vida prática do engenheiro. Este artigo estuda uma expressão matemática simples para o cálculo da frequência fundamental de vigas em balanço, que leva em conta a presença do efeito da solitação axial sobre a rigidez da barra com curvatura aproximada. A influência do esforço axial passa a ser importante no momento em que a vibração da viga ocorre a partir de uma configuração deformada que se diferencia, em certa medida, da configuração indeformada. Desse modo, a componente da força generalizada que modifica a rigidez da viga passa a ser função da curvatura adotada, quer seja no aumento contínuo da força transversal sobre o eixo da barra, ou no aumento contínuo do comprimento da viga para um mesmo nível de carregamento transversal. Em qualquer uma das condições anteriores, passa a existir uma componente da força agindo tangencialmente à curvatura da barra, o que modifica a sua rigidez, pela presença da componente geométrica da matriz de rigidez do elemento, influenciando na frequência natural do sistema. Estudos analíticos realizados com base no princípio dos trabalhos virtuais revelam que à medida que a curvatura da viga se acentua, a diferença entre os resultados considerando-se o eixo reto e a curvatura dada pela equação aproximada da linha elástica aumenta conforme aumenta o comprimento da peça. Os resultados analíticos foram comparados aos obtidos pelo método dos Elementos Finitos, cujos processamentos, por auto-valores, tomaram como base os resultados de uma análise estática não-linear previamente realizada.

Palavras-chave: Linha Elástica, Rigidez Geométrica, Frequência Natural, Princípio dos Trabalhos Virtuais.

1. INTRODUÇÃO

Em geral, a força de compressão tende a reduzir a rigidez de um sistema estrutural, enquanto forças de tração produzem o inverso, ou seja, aumentam a rigidez. Conforme as características dos sistemas estruturais, as cargas aplicadas podem ter significativo efeito na resposta da estrutura, quando submetida a carregamentos dinâmicos. Por essa razão, é importante avaliar a influência da mudança de rigidez na resposta dinâmica da estrutura. A mudança de rigidez, portanto, refere-se à influência exercida pelo esforço normal, incluída no cálculo da frequência por meio da rigidez geométrica.

No caso de uma viga em balanço, a rigidez geométrica é caracterizada pela ação da força normal sobre a curvatura da barra. Essa ação, como mencionado, é a responsável pela mudança da rigidez da viga. Uma barra carregada transversalmente se deforma pela ação das forças atuantes. Para um mesmo nível de carregamento, à medida que a barra se alonga, a diferença entre a configuração deformada e a indeformada aumenta. Se a barra carregada é excitada, ela vibra e o movimento oscilatório ocorre a partir da configuração deformada, conforme ilustrado na Figura 1. A situação descrita anteriormente conduz a que se trabalhe com a consideração de que o movimento oscilatório ocorre levando-se em conta a curvatura sobre a qual a barra experimenta a flexão. Isso pode ser feito, adotando-se uma curvatura para a linha elástica, e a componente da força normal que modifica a rigidez da barra é obtida por meio da decomposição das forças laterais, de acordo com o ângulo de giro estabelecido por essa curvatura. Quando se utiliza a curvatura aproximada chega-se a expressões relativamente simples, nas quais a frequência da estrutura pode ser obtida satisfatoriamente por meio de uma única equação.

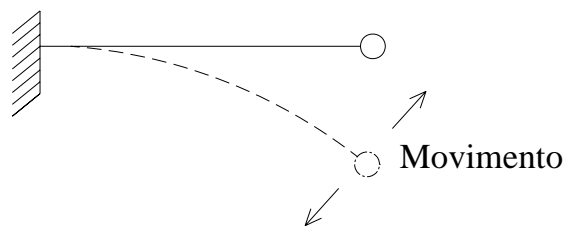


Figura 1. Configuração a partir da qual ocorre o movimento.

A proposta deste artigo é realizar um estudo analítico para avaliar a influência da rigidez geométrica sobre o resultado da frequência natural do primeiro modo de vibração de vigas em balanço. A aferição dos resultados analíticos é feita por comparação com o Método dos Elementos Finitos, com resultados dinâmicos por autovalores, obtidos sobre a rigidez modificada da viga.

2. SOBRE O CONCEITO DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA

O conceito de rigidez geométrica pode ser entendido por meio da exposição que Pauletti (2003) realiza ao estudar estruturas retesadas. A abordagem feita por Pauletti (2003) ratifica a concepção de que o comportamento das estruturas é em maior ou menor grau não-linear. A importância da não-linearidade depende do tipo de estrutura e da fase de análise.

Embora de forma sutil, a consideração da rigidez geométrica é uma consideração não linear, já que a rigidez geométrica depende do estado de tensões internas (esforços internos) na estrutura que só se consegue determinar a partir das deformações causadas pelos deslocamentos que ela sofre. Claro que se forem mantidos esses esforços internos constantes a partir daí, estar-se-ia ignorando os deslocamentos adicionais que ocorrem a partir desse estado de deformações inicial. É, pois, uma linearização de um problema não linear a partir de uma certa configuração que não é a inicial descarregada.

Para entender o comportamento não-linear e o conceito de rigidez geométrica tome-se o exemplo de uma corda,

Figura 2, que nada mais é que um elemento de barra, estendido entre dois pontos fixos que suporta exclusivamente a força normal de tração F_0 dada por

$$F_0 = \frac{EA}{L_r}(L - L_r) = k(L - L_r), \quad (1)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, A é área de sua seção transversal, L é a distância entre os pontos fixação, igual ao comprimento deformado, na configuração retilínea e L_r é o comprimento indeformado, ou de referência, do cabo. A constante $k = \frac{EA}{L_r}$ é chamada constante de mola.

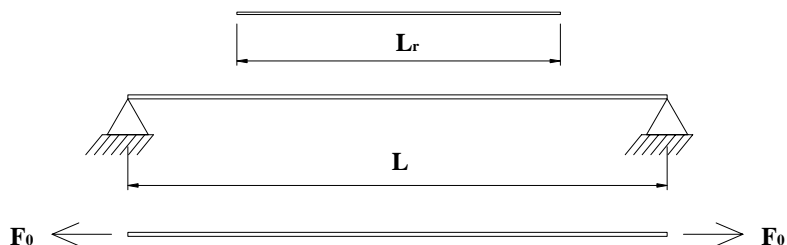


Figura 2. Corda tracionada entre dois apoios fixos distantes $L > L_r$ – Pauletti (2003).

Como a rigidez transversal da corda em torno da sua configuração retilínea não depende de deformações adicionais impostas, mas sim de sua relutância em alterar a geometria, diz-se que essa é *exclusivamente geométrica*.

Desprezando-se o peso próprio e demais cargas externas, a configuração retilínea inicial, tal como mostrado na Figura 3, é uma configuração de equilíbrio sob ação da força de tração. Se, porém, como é usual na análise linear de estruturas, tentar-se expressar a deflexão da corda, decorrente da imposição de um carregamento transversal, em termos da configuração inicial, retilínea, chega-se obviamente a uma indeterminação, ou seja, o equilíbrio só pode ser obtido sobre a configuração deformada da barra.

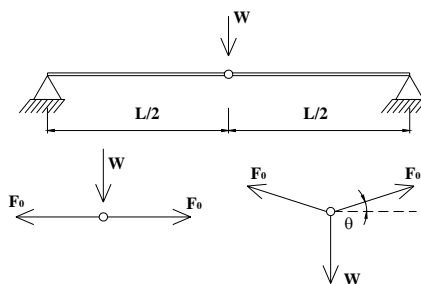


Figura 3. O equilíbrio só é possível na configuração deformada – Pauletti (2003).

Levy (1994) posiciona-se de forma análoga e destaca a importância da não-linearidade geométrica quando afirma que, em termos da teoria das estruturas, quando na presença de tensões iniciais, não-linearidades geométricas são da mesma ordem de grandeza dos efeitos elásticos na estrutura.

Para aplicar o conceito de rigidez geométrica à dinâmica de uma barra, tome-se a coluna representada na Figura 4.

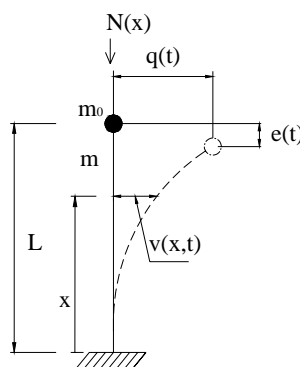


Figura 4. Barra em movimento livre não amortecido.

Uma barra em movimento constitui um sistema contínuo com infinitos graus de liberdade. Estudar o comportamento de sistemas com infinitos graus de liberdade requer o emprego de técnicas de discretização, nas quais a estrutura é transformada em subsistemas definidos por um conjunto de pontos chamados “nós”. No entanto, o tratamento eficiente para um sistema contínuo é aquele pelo qual é possível associá-lo a um sistema com um único grau de liberdade. Para isso, é preciso restringir a maneira como o sistema irá se deformar, sob a ação das forças atuantes, a uma única forma de deformação, e escrever suas propriedades em função de uma coordenada generalizada, definida como o deslocamento necessário para descrever o movimento do sistema.

Para aproximar o movimento de uma barra engastada a de um sistema com um único grau de liberdade é necessário admitir que a sua deformada possa ser representada matematicamente. Para isso, assume-se uma determinada função que possa reproduzir, da melhor maneira possível, essa deformada. A essa expressão matemática dá-se o nome de *função de forma* e será designada por $\phi(x)$. Logicamente, a precisão obtida por esse método depende inteiramente da função de forma assumida para representar o modo de vibração livre, Leissa (2005). A utilização de uma função de forma tal como mencionado anteriormente foi preconizada por Rayleigh (1945), e encontra vasta aplicação aos problemas de vibração mecânica. Como bem deixa claro Clough (1993), o conceito por detrás desse método é o Princípio da Conservação da Energia sendo, portanto, aplicável a estruturas lineares ou não. De acordo com Temple (1933), o método pode ser aplicado não somente a sistemas com um número finito de graus de liberdade, mas também a sistemas contínuos, e se destina tanto à determinação do período fundamental de vibração quanto às análises da estabilidade dos sistemas elásticos.

É de interesse recordar que na aplicação do princípio da conservação da energia, a energia potencial de qualquer sistema estrutural, em alguma configuração real, é definida como o trabalho realizado por todas as forças atuantes, caso o sistema seja movido da configuração real para a configuração descarregada. Portanto, a energia potencial é o trabalho realizado por todas as forças atuantes quando a estrutura é movida de sua configuração com carga para uma posição sem carregamento. Na aplicação do Princípio da Conservação da Energia, as forças atuantes na estrutura consistem em cargas externas e forças internas, sendo as últimas assimiladas às tensões resultantes. A energia potencial interna é a energia de deformação armazenada na estrutura carregada. Se a estrutura for descarregada, a quantidade de trabalho recuperado será igual à energia de deformação. O trabalho das forças externas é negativo porque a carga na estrutura realiza trabalho negativo caso retorne da posição carregada para a descarregada. Logo, o trabalho virtual das forças externas, realizado pelas cargas atuantes, deve ser igual ao trabalho virtual das forças internas.

Para o problema de vibração de barras em balanço, a amplitude do deslocamento da extremidade livre da viga, dada pela coordenada generalizada, será representada por $q(t)$. Sendo assim, a curvatura da barra fica, univocamente, definida por

$$v(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (2)$$

O emprego da Eq. (2) implica na constância da forma de vibração com o tempo, isto é, somente a amplitude do movimento é que varia e varia harmonicamente com a condição de movimento livre. A assunção da função de forma $\phi(x)$ efetivamente reduz a barra a um sistema com um único grau de liberdade. Assim, a frequência de vibração pode ser encontrada igualando-se a máxima energia de deformação desenvolvida durante o movimento e a máxima energia cinética.

Portanto, é possível utilizar o Princípio dos Trabalhos Virtuais associado a uma técnica do tipo Rayleigh (1945) para descrever o movimento da estrutura. Para tanto, o Princípio dos Trabalhos Virtuais será escrito em termos da coordenada generalizada e de uma função forma que descreve o primeiro modo de vibração. Ao final do processo, a equação do movimento aparece em termos da coordenada generalizada e da qual podem ser extraídas as propriedades elásticas e geométricas generalizadas do sistema.

Considere-se o sistema em movimento livre não amortecido apresentado na Figura 5. Admita-se que esse sistema seja composto por uma barra prismática, constituída de material elástico-linear, engastada na extremidade inferior, possuindo uma massa m por unidade de comprimento e suportando uma massa concentrada m_0 na extremidade livre. Esse sistema constitui uma barra em flexão. Assim, o trabalho virtual das forças internas é realizado pelo momento fletor $M(x,t)$, agindo sobre a curvatura virtual da barra. Admita-se que a seção permaneça plana após a deformação e que a força axial continue paralela ao eixo, sem haver mudança em sua magnitude, nem em sua linha de ação.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais requer que o trabalho virtual das forças externas seja igual ao trabalho virtual interno. Considerando que o carregamento inercial é dado por

$$f_1(x, t) = m \ddot{v}(x, t) + m_0 \ddot{v}(x = L, t) \quad (3)$$

e considerando que o deslocamento virtual produzido na direção da força normal durante a curvatura seja $\delta e(t)$, o trabalho virtual das forças externas é

$$\delta W_E = -\int_0^L f_1(x) \delta v(x, t) dx + \int_0^L N(x) \delta e dx \quad (4)$$

na qual $N(X)$ representa os esforços axiais internos.

O trabalho virtual das forças internas é dado por

$$\delta W_I = \int_0^L M(x, t) \delta \left(\frac{1}{r} \right) dx \quad (5)$$

onde $1/r$ se refere à curvatura da barra fletida. Para encontrar o deslocamento $e(t)$ é preciso tomar um elemento infinitesimal ds da curvatura da barra. Logo:

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dv^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2} - dx \quad (6)$$

Pelo desenvolvimento binomial tem-se que

$$\left(1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{dv}{dx} \right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{dv}{dx} \right)^4}{8} + \frac{\left(\frac{dv}{dx} \right)^6}{16} - \dots \quad (7)$$

Como os termos de ordem superior a $\left(\frac{dv}{dx} \right)^2$ são muito pequenos comparados à unidade, pode-se fazer

$$\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{2} \quad (8)$$

O que permite reescrever a Eq. (6) na forma de

$$ds - dx = dx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] - dx = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \quad (9)$$

Utilizando a expressão (9) para integração sobre toda a viga, obtém-se o deslocamento desejado, isto é

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (10)$$

Como os parâmetros necessários à solução do problema podem ser expressos em função da coordenada generalizada $q(t)$ e de uma função de forma $\phi(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \phi(x)q(t) & \delta v(x, t) &= \phi(x)\delta q(t) \\ v'(x, t) &= \phi'(x)q(t) & \delta v'(x, t) &= \phi'(x)\delta q(t) \\ v''(x, t) &= \phi''(x)q(t) & \delta v''(x, t) &= \phi''(x)\delta q(t) \\ \ddot{v}(x, t) &= \phi(x)\ddot{q}(t) & \delta \dot{v}(x, t) &= \phi(x)\delta \dot{q}(t) \\ \dot{v}''(x, t) &= \phi''(x)\dot{q}(t) & \delta e &= \int_0^L v'(x, t)\delta v'(x)dx \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo-se convenientemente aquilo que couber das Eq. (11) na Eq. (4), chega-se a

$$\delta W_E = \left\{ -\ddot{q}(t) \left[\int_0^L m(x)(\phi(x))^2 dx + m_0(\phi(x=L))^2 \right] + q(t) \int_0^L N(x)(\phi'(x))^2 dx \right\} \delta q \quad (12)$$

Adotando, para este instante, uma aproximação para a curvatura, de modo que

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (13)$$

e substituindo-se convenientemente o que couber das Eq. (11) na Eq. (5), chega-se a

$$\delta W_I = \left[q(t) \int_0^L EI\phi''(x)^2 dx \right] \delta q \quad (14)$$

Igualando as Eqs. (12) e (14) vem

$$\begin{aligned} &\left\{ -\ddot{q}(t) \left[\int_0^L m(x)(\phi(x))^2 dx + m_0(\phi(x=L))^2 \right] + q(t) \int_0^L N(x)(\phi'(x))^2 dx \right\} \delta q = \\ &\left[q(t) \int_0^L EI\phi''(x)^2 dx \right] \delta q \end{aligned} \quad (15)$$

O que leva, após a simplificação, a

$$\ddot{q}(t) \left[\int_0^L m(x) (\phi(x))^2 dx + m_0 \right] + q(t) \int_0^L EI (\phi''(x))^2 dx - q(t) \int_0^L N(x) (\phi'(x))^2 dx = 0 \quad (16)$$

onde Π , K_E e K_G são, respectivamente, a massa, a rigidez convencional e a rigidez geométrica generalizadas, apresentadas a seguir:

$$\Pi = \int_0^L m(x) dx (\phi(x))^2 dx + m_0 \quad (17)$$

$$K_E = \int_0^L EI (\phi''(x))^2 dx \quad (18)$$

$$K_G = \int_0^L N(x) (\phi'(x))^2 dx \quad (19)$$

Na aplicação da Eq. (18) está implícita uma simplificação. A Eq. (19) denota a influência da força normal sobre a rigidez da barra e, como afirma Clough (1993), pode ser aplicada a um sistema arbitrário, desde que se considere que o movimento ocorre com pequenas deformações a partir da configuração de equilíbrio.

3. RIGIDEZ GEOMÉTRICA NA VIBRAÇÃO DE VIGAS EM BALANÇO

O conceito de viga pressupõe ação de forças laterais. Sob a ação dessas forças a viga se deforma e apresenta uma curvatura que caracteriza a sua deformada, conhecida como linha elástica. Essa elástica define a curva assumida para a deformação de peça. Portanto, a vibração do sistema dar-se-á em torno da configuração estabelecida para a deformada da viga.

Cabe observar que, como a viga se encontra encurvada antes de iniciar o movimento, conforme indicado na Figura 5, os esforços que eram, em princípio, perpendiculares ao eixo de reto da viga, deixam de sê-lo, e passam a produzir uma componente normal que altera a rigidez do sistema, influenciando na determinação da frequência de vibração. Essa força normal age concomitantemente com a curvatura da barra fletida. Se essa componente é de tração, a rigidez da barra aumenta e a frequência natural de vibração se eleva. A importância exercida pelo esforço normal sobre a resposta da estrutura passa a ser, portanto, função das rotações iniciais que as seções da barra possuem.

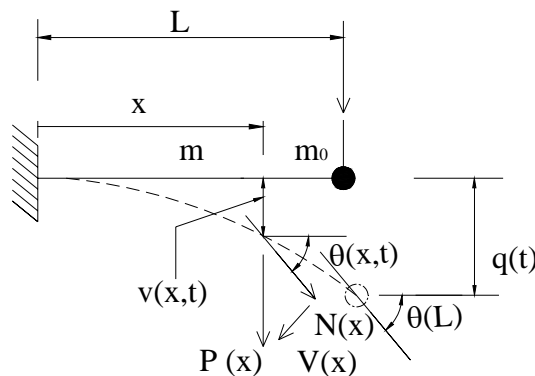


Figura 5. Barra em movimento livre não amortecido.

O caso mais simples de análise é aquele que considera a viga permanecendo com seu eixo indeformado, condição largamente empregada justamente por sua simplicidade. Para o cálculo da frequência, nessa situação, basta conhecer a rigidez convencional e a massa generalizada do sistema, desconsiderando-se qualquer efeito geométrico. No entanto, quando se considera a deformada da viga é preciso estar atento ao fato de que a força normal age segundo a curvatura definida pela rotação em cada seção da barra.

A rotação $\theta(x)$ em uma dada posição ao longo do comprimento da viga é fornecida pela Eq. (20). Para se obter a rotação θ na extremidade direita basta fazer $x = L$.

$$\theta(x, t) = \arctan\left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}\right) \quad (20)$$

A força normal em cada posição ao longo da barra, por sua vez, é dada por

$$N(x) = [m_0 + m(L - x)]g \operatorname{gsen}(\theta(x)) \quad (21)$$

Sendo $\theta(x)$ a rotação na seção considerada, e $\theta(L) = \theta$ a da extremidade direita, na condição da curvatura assumida.

A função trigonométrica apresentada a seguir, escolhida como função de forma, serve para descrever o primeiro modo de vibração, e pode ser encontrada em Clough (1993) e Timoshenko (1961), e é dada por.

$$\phi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (22)$$

Na condição de curvatura aproximada a frequência da estrutura pode ser obtida diretamente com o uso das propriedades generalizadas desenvolvidas no presente item, e que conduzem à Eq. (28).

Com a função de forma anterior, a solução das integrais das Eqs. (16) a (19), conduzem à massa, à rigidez convencional e à rigidez geométrica generalizadas, respectivamente, apresentadas nas Eqs. de (23) a (25).

$$\Pi = m_0 + \frac{1}{2} L m \frac{3\pi - 8}{\pi} \quad (23)$$

$$K_E = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (24)$$

Considerando a rotação da extremidade livre da viga, a rigidez geométrica pode ser escrita como

$$K_G = \frac{\operatorname{gsen}(\theta)}{16} \frac{2\pi^2 m_0 + (\pi^2 - 4)mL}{L} \quad (25)$$

A rigidez generalizada total do sistema, considerando positivo o esforço de tração, é dada pela Eq. (26).

$$K = K_E + K_G \quad (26)$$

A frequência natural de vibração é determinada por

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\Pi}} \quad (27)$$

Substituindo as expressões de (23) a (26) na Eq. (27), chega-se à equação da frequência que leva em conta a rigidez geométrica sobre a curvatura aproximada da viga, em função do ângulo da extremidade livre, em Hertz:

$$f = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\left[\frac{\pi^4 EI}{32L^3} + \left[\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2m_0 + mL}{L} \right) - \frac{1}{4} m \right] \operatorname{sen}(\theta) g \right]^{\frac{1}{2}}}{m_0 + \frac{3\pi - 8}{2\pi} L m} \right\} \quad (28)$$

Na Eq. (28) E é o módulo de elasticidade do material, L é o comprimento da barra, I é o momento de inércia da seção em relação ao plano do movimento e g é a aceleração da gravidade. É óbvio que no desenvolvimento anterior foram desconsiderados os efeitos da força cortante sobre a curvatura da barra. O ângulo θ , para o presente caso, é dado por

$$\theta = \frac{(3m_0L^2 + mL^3)g}{6EI} \quad (29)$$

tendo em vista a aproximação permitida a um ângulo pequeno poder ser representado por sua tangente, isto é

$$\theta(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (30)$$

4. CONCLUSÃO

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para uma simulação realizada sobre uma barra metálica de seção retangular de 12,70 mm por 3,17 mm, com uma massa de 1.595 gramas concentrada na extremidade livre, com densidade de 8190 kg/m³ e módulo de elasticidade longitudinal de 205 GPa.

Os resultados da coluna (2) foram obtidos com o emprego direto da Eq. (28). Para a obtenção dos dados da coluna (3) foi empregada a Eq. (28) utilizando o ângulo dado pela Eq. (20), obtido resolvendo-se numericamente a equação diferencial da linha elástica para as condições de contorno do problema. Os dados da coluna (4) e (5) representam valores provenientes de uma análise linear por autovalores obtidos computacionalmente utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O detalhamento do processamento realizado pelo Método dos Elementos Finitos não é objetivo deste trabalho, no entanto, as análises realizadas com o MEF foram conduzidas para servir como referência ao presente estudo. É de importância salientar que os resultados presentes na coluna (5) se referem ao cálculo dinâmico pelo MEF, processado sobre uma análise estática não-linear sob a hipótese de grandes deslocamentos associada a efeito P-Delta, conferida previamente. Isso significa dizer que a análise por autovalores, pelo MEF, baseou-se na rigidez modificada pela análise estática não-linear, o que se assemelha ao que foi realizado no presente trabalho. Informações sobre o MEF podem ser encontradas em Cook (2002) e Bathe (1996).

Tabela 1. Resultados analíticos e numéricos.

L (m)	Estudo Analítico			Método dos Elementos Finitos	
	Curvatura aproximada				
	Frequencias (Hz)			Frequencias (Hz)	
	(1) Teoria Linear - Sem rigidez geométrica	Teoria NL - Com rigidez geométrica		(4) Linear	(5) NL - Grandes deslocamentos
		(2) Rotação- Eq. (28)	(3) Rotação - Eq. (19)		
0,20	6,4479	6,4533	6,4523	6,3989	6,4038
0,25	4,6084	4,6179	4,6164	4,5733	4,5819
0,30	3,5017	3,5168	3,5145	3,4749	3,4884
0,35	2,7756	2,7978	2,7946	2,7543	2,7741
0,40	2,2691	2,3002	2,2958	2,2517	2,2792
0,45	1,8995	1,9411	1,9351	1,8848	1,9214
0,50	1,6199	1,6738	1,6658	1,6073	1,6544
0,55	1,4025	1,4702	1,4598	1,3915	1,4502
0,60	1,2295	1,3125	1,2992	1,2198	1,2910
0,65	1,0892	1,1888	1,1720	1,0805	1,1648
0,70	0,9735	1,0906	1,0698	0,9657	1,0634
0,75	0,8768	1,0119	0,9867	0,8698	0,9810
0,80	0,7950	0,9482	0,9182	0,7886	0,9130
0,85	0,7250	0,8958	0,8611	0,7192	0,8563
0,90	0,6647	0,8521	0,8129	0,6593	0,8084

Na Tabela 2 encontram-se as diferenças entre o estudo analítico e o realizado como auxílio do Método dos Elementos Finitos. As diferenças entre as colunas (1) e (4) mostram a compatibilidade entre as teorias lineares que serve de base para ambos os métodos. As diferenças entre os resultados da coluna (1) e da coluna (3) destacam a necessidade de uma abordagem não-linear para levar em conta o efeito da força normal sobre a curvatura da viga. Cabe ressaltar as diferenças entre os valores presentes nas colunas (2) e (4), uma vez que representam as diferenças entre os resultados obtidos com a rigidez geométrica tomada sobre a curvatura aproximada da viga, definida com a rotação fornecida por Eq. (29). Esses valores mantêm-se razoavelmente próximos dos mais exatos, mesmo para as peças longas, alcançando uma diferença máxima de 5,40%. Uma melhor aproximação com o MEF é obtida substituindo-se a rotação dada pela

Eq. (29) pela rotação calculada pela equação da linha elástica, por meio da Eq. (20), e a rigidez geométrica encontrada em função dessa rotação, empregando-se a Eq. (19) em conjunto com a Eq. (21). Essa melhor aproximação pode ser percebida pelas diferenças entre as colunas (3) e (5). É oportuno observar que as peças mais longas, como o representado pela Figura 6, necessitam ter sua curvatura definida pela equação exata da linha elástica e a rotação obtida sobre essa curvatura. Nesse caso, é fácil pressupor que a força normal decomposta sobre uma angulação maior conduziria a componentes maiores e, como consequência, faria elevar a rigidez e a frequência natural de vibração.

Pode-se concluir que os resultados obtidos com o emprego da equação aproximada para a curvatura de vigas em balanço apresentam-se compatíveis com análises não-lineares pelo MEF.

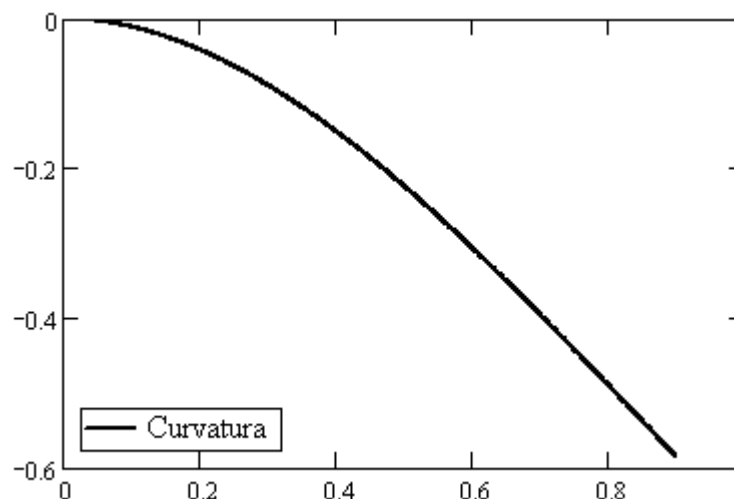


Figura 6. Curvatura para $L = 0,9m$.

Tabela 2. Diferenças entre os resultados.

L (m)	Diferenças entre resultados da Tabela 1			
	Colunas (1) e (4)	Colunas (1) e (2)	Colunas (2) e (5)	Colunas (3) e (5)
0,20	0,77%	0,08%	0,77%	0,76%
0,25	0,77%	0,21%	0,79%	0,75%
0,30	0,77%	0,43%	0,81%	0,75%
0,35	0,77%	0,80%	0,86%	0,74%
0,40	0,77%	1,37%	0,92%	0,73%
0,45	0,78%	2,19%	1,03%	0,71%
0,50	0,78%	3,33%	1,17%	0,69%
0,55	0,79%	4,83%	1,38%	0,66%
0,60	0,79%	6,75%	1,67%	0,64%
0,65	0,80%	9,14%	2,06%	0,62%
0,70	0,81%	12,03%	2,55%	0,60%
0,75	0,81%	15,41%	3,15%	0,59%
0,80	0,82%	19,27%	3,86%	0,57%
0,85	0,81%	23,56%	4,62%	0,56%
0,90	0,82%	28,19%	5,40%	0,56%

5. REFERÊNCIAS

- Bathe, K. J., 1996, "Finite element procedures", Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.
- Clough, R. W., Penzien, J., 1993, "Dynamic of Structures. Taiwan, McGraw Hill International Editions, Second Edition.
- Cook R. D., Plesha, d. S., Witt, M.; R. J., 2002, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", Jhon Wiley and Sons, inc., NJ, USA.
- Pauletti, R. M. O., 2003, "História, Análise e Projeto das Estruturas Retesadas", Tese (Livre Docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Rayleigh, 1945, "Theory of Sound" (two volumes), Dover Publications, New York, 1877, re-issued.

Levy, R.; Spilliers, W. R., 1995, "Analysis Of Geometrically Nonlinear Structures", Chapman & Hall. New York.
Temple, G, Bickley, W.G., 1933, "Rayleigh's Principle and its Applications to Engineering", Oxford University Press, London: Humphrey Milford.
Timoshenko, S. P., 1961, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA, re-issued.

6. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

GEOMETRIC STIFFNESS UPON THE NATURAL FREQUENCIES OF FRIST MODO OF CANTILEVERS BEANS

Alexandre de M. Wahrhaftig¹

João Augusto Lima Rocha²

Reyolando Manoel Lopes Rebelo da Fonseca Brasil³

¹ Department of Construction and Structures, Polytechnic School, Federal University of Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil, alixa@ufba.br,

² Department of Construction and Structures, Polytechnic School, Federal University of Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil, joarocha@ufba.br,

³ Department of Structural and Geotechnical Engineering, Polytechnic School, University of São Paulo (USP), São Paulo, São Paulo, Brasil, reyolando.brasil@poli.usp.br.

Abstract. *The considering the effect of axial force upon the natural frequencies of a beam usually result in systems of differential equations of unviable solutions from the engineer's practical point of view. This article studies the simple mathematical expression of the calculation of the fundamental frequencies of the cantilevered beans, that take into account the presence of the effect of the axial force over the stiffness of the curved bar. The influence of the axial force becomes important at the time in which the vibration of the beam occurs from the deformed shape. In this mode, the generalized force element that modifies the stiffness of the beam becomes the function of the adopted curvature, either in the continued increase of the transversal force upon the bar axel or in the continued increase of the length of the beam for the same level of transversal load. In any of the above conditions, a force element begins to act tangentially to the bar curve, that modifies its stiffness, with the presence of the geometric stiffness component influencing the system's natural frequency. Analytical studies that were done based on the principle of virtual work reveal that the the difference between the results considering the straight shaft and the curve given by the approximate equation of the elastic line increases according to the increase of the length of the piece. The analytical results were compared to those obtained by the Finite Element Methods, whose processing for eigenvalues, were taken as the base of the results from nonlinear static analysis previously performed.*

Keywords: *Elastic line, Geometric Stiffness, Natural Frequency, Principle of virtual work.*