

EFEITO DA DEFORMAÇÃO POR CORTANTE EM PÓRTICOS PLANOS E ESPACIAIS: ANÁLISE ELÁSTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

José Márcilio Filgueiras Cruz¹, marciliofcruz@hotmail.com
Raphael Seixas dos Santos², r_seixasmaia@hotmail.com
Angelo Vieira Mendonça³, mendonca@ct.ufpb.br

¹Programa de Pós-Graduação em Eng. Mecânica, Centro de Tecnologia, UFPB, João Pessoa, PB - CEP: 58.051-900

²PIBIC- Depto de Engenharia Civil e ambiental, Centro de Tecnologia, UFPB, João Pessoa, PB - CEP:58.051-900

³Depto de Engenharia Civil e ambiental, Centro de Tecnologia, UFPB, João Pessoa, PB - CEP: 58.051-900

Resumo: Neste artigo é apresentada uma estratégia conveniente para a montagem das matrizes de influência de pórticos planos e espaciais utilizando o método dos elementos de contorno. Além disso, a representação integral dos pórticos é feita utilizando soluções fundamentais que incorporam o efeito da deformação por cortante no problema de flexão em cada barra. Resultados numéricos são apresentados envolvendo estudos de convergência associados a variação do índice de esbelteza dos componentes estruturais

Palavras-chave: MEC, pórticos, análise estrutural

1. INTRODUÇÃO

As etapas para análise estrutural implicam na idealização de problemas físicos a partir de modelos. As representações matemáticas desses modelos físicos são, em geral, expressas em equações diferenciais e/ou integrais. Uma das maneiras para construir as soluções dessas equações, ditas governantes, é via métodos analíticos. As estruturas reticulares são formadas por barras, que dependendo dos regimes mobilizados podem ser classificadas em treliças, grelhas e pórticos. Para esses casos uma técnica analítica de solução é o bem conhecido *método dos deslocamentos da hiperestática clássica*, que tem sido empregado em sua grande maioria nos casos em que a deformação por cortante é desprezada no problema de flexão (modelo de Euler-Bernoulli). Quando essa deformação é importante, as análises de pórticos têm sido construídas utilizando-se o modelo de Timoshenko combinado com a técnica numérica associada ao MEF (Kapur, 1966), (Nickel e Secor, 1972). O modelo proposto por Timoshenko é, para situações específicas, bem mais próximo da realidade do que aquele advindo da teoria de Euler-Bernoulli (Timoshenko e Young, 1961), (Augarde e Deeks, 2008). Tal “refinamento” se deve à contribuição do efeito do cisalhamento no ângulo de giro resultante, verificado em vigas sob a ação de carregamentos quaisquer, perceptível em casos com moderados índices de esbelteza ($\lambda = L/h$, relação entre o comprimento L , da barra e a altura h , da sua seção transversal).

Alternativamente ao MEF, só recentemente soluções numéricas baseadas na filosofia do MEC foram apresentadas para o estudo da deformação por cortante em flexão de barras. Antes (2003) desenvolveu, também via MEC, a solução para o problema de flexão estática utilizando o modelo de Timoshenko. Já em Antes et al.(2004), esse modelo foi incorporado nas representações integrais de pórtico plano em regime dinâmico e estratégias convenientes de montagem foram utilizadas para obtenção de um sistema algébrico simétrico para o MEC.

Neste trabalho são propostas estratégias de geração de sistemas algébricos baseadas no MEC e aplicadas não somente aos pórticos planos, mas também naqueles definidos no espaço tridimensional. As técnicas de geração da representação algébrica dessas estruturas consistem na utilização de uma seqüência conveniente de transformações em sistemas de referências e em condições de compatibilidade de deslocamentos e forças. Além disso, é feito um estudo das respostas numéricas do MEC incorporando o efeito da deformação por cortante nessas estruturas reticulares planas e espaciais.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES DA BARRA NO SISTEMA LOCAL

Nesta seção são discutidas as representações matemáticas dos problemas definidos localmente na barra, uma vez que ela é a unidade básica que compõe os pórticos planos e espaciais.

2.1. Pórtico Plano

Para análise de pórticos planos é necessário estudar em cada uma das suas barras: a) tração axial e b) flexão unidirecional. O modelo matemático para ambos os problemas requer adoção de algumas hipóteses: barra prismática; material isotrópico e elastolinar; campos suaves para os deslocamentos e para as deformações; conservação da planicidade da seção transversal; supressão do efeito de Poisson; flexão segundo as direções principais de inércia. No caso da flexão há uma condição adicional quanto ao posicionamento relativo entre a normal da seção e a linha neutra: se a ortogonalidade é assumida, o modelo Euler-Bernoulli é representado; já o modelo de Timoshenko não exige necessariamente a ortogonalidade, o que implica fisicamente na incorporação da deformação por cortante (distorção transversa não nula).

A equação governante do problema da tração axial é a Eq. (1), na qual E é o módulo de elasticidade longitudinal; A , a área da seção transversal; $u(x)$, o deslocamento axial e $q_x(x)$ é a carga distribuída ao longo da barra. A Eq. (1) pode ser reescrita como uma equação integral equivalente, Eq. (2), utilizando-se a técnica dos resíduos ponderados.

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q_x(x) = 0 \tag{1}$$

$$u(\xi) + [u(x)N^*(x-\xi)]_{-a}^a = [N(x)u^*(x-\xi)]_{-a}^a + \int_{-a}^a [q_x(x)u^*(x-\xi)]dx \tag{2}$$

Sendo as expressões $u^*(x-\xi) = -\frac{1}{2EA}|x-\xi|$ e $N^*(x-\xi) = EAu^*(x-\xi) = -\frac{1}{2}sgn(x-\xi)$ as soluções fundamentais da equação integral, indicadas na Eq. (2), onde sgn denota a função sinal; x , o ponto-campo e ξ , o ponto-fonte.

Após a colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra, $\xi = -a$ e $\xi = a$, vide Fig. (1), e o cálculo das integrais da Eq. (2), obtém-se a Eq. (3), representação algébrica da barra axialmente carregada no sistema local de coordenadas.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + 1/2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2EA} \begin{bmatrix} 0 & -L \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{ui} \\ f_{uj} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Onde os deslocamentos axiais nodais são: $u_i = u(x = -a)$ e $u_j = u(x = a)$; já os esforços axiais nodais são: $N_i = N(x = -a)$ e $N_j = N(x = a)$; o vetor de força nodal fica: $f_{ui} = f_{uj} = pL^2 / (4EA)$ sendo o comprimento L da barra igual a $2a$. Os sistemas locais estão indicados na Fig. (1).

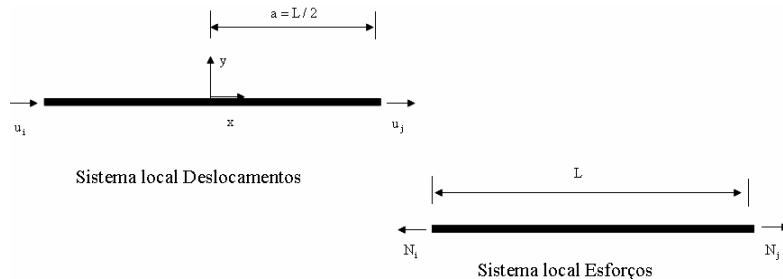


Figura 1 - Sistemas locais de referência da tração axial

As equações diferenciais governantes do problema de flexão de barras sob as hipóteses de Timoshenko são:

$$D_1 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + D_1 \frac{d\phi_z(x)}{dx} = -q_y(x) \tag{4a}$$

$$-D_1 \frac{dv(x)}{dx} + D_2 \frac{d^2\varphi_z(x)}{dx^2} - D_1\varphi_z(x) = -m_z(x) \quad (4b)$$

Com, $D_1 = \kappa GA$ e $D_2 = EI_z$, sendo: I_z o momento de inércia em z , κ o fator de forma da seção, E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal respectivamente, $v(x)$ o deslocamento transversal na direção de y e $\varphi_z(x)$ a rotação da seção transversal em z ; $q_y(x)$ o carregamento transversal e $m_z(x)$ o momento distribuído.

O sistema de equações diferenciais, Eq. (4), pode ser transformado em um sistema de equações integrais equivalentes através da técnica dos resíduos ponderados, obtendo-se uma forma análoga àquela dada por Antes (2003).

$$v(\xi) + [Q_{qy}^*(x-\xi)v(x)]_{-a}^a + [M_{qz}^*(x-\xi)\varphi_z(x)]_{-a}^a = [Q_y(x)v_q^*(x-\xi)]_{-a}^a + [M_z(x)\varphi_{zq}^*(x-\xi)]_{-a}^a + \int_{-a}^a q_y(x)v_q^*(x-\xi)dx \quad (5a)$$

$$\varphi_z(\xi) + [Q_{my}^*(x-\xi)v(x)]_{-a}^a + [M_{mz}^*(x-\xi)\varphi_z(x)]_{-a}^a = [Q_y(x)v_m^*(x-\xi)]_{-a}^a + [M_z(x)\varphi_{zm}^*(x-\xi)]_{-a}^a + \int_{-a}^a q_y(x)v_m^*(x-\xi)dx \quad (5b)$$

Onde os deslocamentos transversais e os angulares das seções transversais nodais são respectivamente: $v_i = v(x = -a)$, $v_j = v(x = a)$, $\varphi_{zi} = \varphi_z(x = -a)$, $\varphi_{zj} = \varphi_z(x = a)$; já os esforços nodais (força cortante e momento fletor em z) são, na ordem: $Q_{yi} = Q_y(x = -a)$, $Q_{yj} = Q_y(x = a)$, $M_{zi} = M_z(x = -a)$ e $M_{zj} = M_z(x = a)$. Os sistemas locais para o problema de flexão em z estão indicados na Fig. (2).

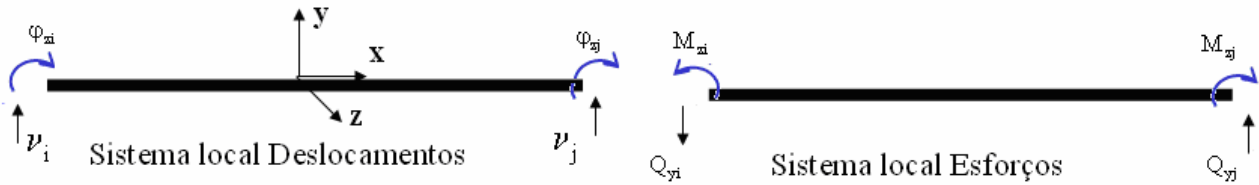


Figura 2 - Sistemas locais de referência da flexão em z

Outros símbolos importantes na Eq. (5) representam as soluções fundamentais da flexão do modelo de Timoshenko, que em Antes (2003) são derivadas a partir da função $\psi = -|x - \xi|^3 / 12D_1D_2$. Neste artigo, partiu-se da função alternativa $\psi = -\{ |x - \xi|^3 - 3|x - \xi|^2 L + 2L^3 \} / 12D_1D_2$. Assim, os valores explícitos dessas soluções fundamentais ficam:

$$v_q^* = D_2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - D_1\psi = \frac{L^3}{12EI_z} \left\{ \left| \frac{x-\xi}{L} \right|^3 - 3 \left| \frac{x-\xi}{L} \right|^2 + 2 \right\} - \frac{L}{12EI} \frac{6EI}{\kappa GA} \left\{ \left| \frac{x-\xi}{L} \right| - 1 \right\}, \quad \varphi_q^*(x-\xi) = D_1 \frac{d\psi}{dx} = -\frac{L^2}{4EI_z} \left\{ \left| \frac{x-\xi}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x-\xi}{L} \right| \right\} \text{sgn}(x-\xi),$$

$$v_m^*(x-\xi) = -D_1 \frac{d\psi}{dx} = \frac{L^2}{4EI_z} \left\{ \left| \frac{x-\xi}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x-\xi}{L} \right| \right\} \text{sgn}(x-\xi), \quad \varphi_m^* = D_1 \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{L}{2EI_z} \left\{ \left| \frac{x-\xi}{L} \right| - 1 \right\},$$

$$M_q^*(x-\xi) = D_2\varphi_q^*(x-\xi) = -\frac{L}{2} \left\{ \left| \frac{x-\xi}{L} \right| - 1 \right\}, \quad Q_q^* = D_1 \left(\varphi_q^* + \frac{dw_q^*}{dx} \right) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x-\xi),$$

$$M_m^*(x-\xi) = D_2\varphi_m^*(x-\xi) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x-\xi), \quad Q_m^* = D_1 \left(\varphi_m^* + \frac{dw_m^*}{dx} \right) = 0.$$

Após a colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra ($\xi = -a$; $\xi = a$) e o cálculo das integrais da Eq. (5), a representação algébrica da barra sob flexão no sistema local de coordenadas fica:

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \Phi_{zi} \\ v_j \\ \Phi_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -L/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & L/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \Phi_{zi} \\ v_j \\ \Phi_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_z & 0 & 0 & L^2/(4EI_z) \\ 0 & -L/2EI_z & -L^2/(4EI_z) & 0 \\ 0 & L^2/(4EI_z) & \alpha_z & 0 \\ -L^2/(4EI_z) & 0 & 0 & L/2EI_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{yi} \\ M_{zi} \\ Q_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{vi} \\ f_{\Phi_{zi}} \\ f_{vj} \\ f_{\Phi_{zj}} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Onde $\alpha_z = L^3 [2 + 6EI_z / (\kappa GAL^2)] / (12EI_z)$, $f_{vi} = 5q_y L^4 / (48EI_z)$, $f_{\Phi_{zi}} = q_y L^3 / (6EI_z)$, $f_{vi} = f_{vj}$ e $f_{\Phi_{zj}} = -f_{\Phi_{zi}}$.

Ambos os sistemas algébricos indicados na Eq. (3) e na Eq. (6) utilizam dois sistemas locais distintos para deslocamentos e esforços. Uma forma mais elegante proposta, neste trabalho, é unificar esses sistemas locais de forma a facilitar a geração do sistema algébrico em coordenadas globais de cada barra. Assim, o sistema local unificado, Fig. (3), para a barra de pórtico plano (superposição dos efeitos de tração e flexão em z) pode ser escrito como:

$$\{u\} + [H] \cdot \{u\} = [G] \cdot \{p\} + \{b\} \quad (7)$$

Onde: $\{u\}^T$, $\{p\}^T$, $\{b\}^T$ são na ordem: $\{u_i \quad v_i \quad \hat{\Phi}_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad \hat{\Phi}_{zj}\}$, $\{\hat{N}_i \quad \hat{Q}_{yi} \quad \hat{M}_{zi} \quad \hat{N}_j \quad \hat{Q}_{yj} \quad \hat{M}_{zj}\}$ e $\{f_{ui} \quad f_{vi} \quad -f_{\Phi_{zi}} \quad f_{uj} \quad f_{vj} \quad -f_{\Phi_{zj}}\}$ com seus valores explicitados nas Eq. (3) e Eq. (6). Já as matrizes de influência $[H]$ e $[G]$ dadas por:

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} \\ 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} & 0 & \frac{L^2}{4EI_z} & 0 \\ -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_z} & 0 & \alpha_z & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix}$$

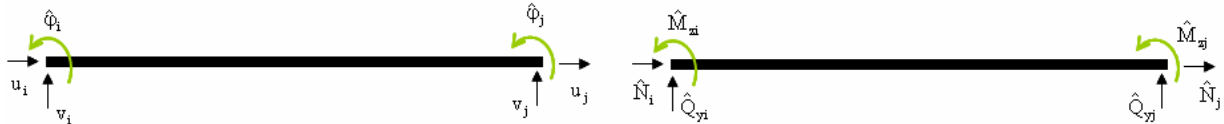


Figura 3. Sistema local unificado do pórtico plano

2.2. Pórtico Espacial

Para a representação matemática do pórtico espacial é necessária, além daquelas consideradas para os pórticos planos, a descrição adicional dos problemas de torção e de flexão na direção y. Se o modelo de torção uniforme de Saint-Venant for assumido (empenamento uniforme das seções transversais), sua equação governante (similar à tração axial) é dada por:

$$GI_p \frac{d^2 \theta_x(x)}{dx^2} + t(x) = 0 \quad (8)$$

Onde: I_p , é o momento polar de inércia; $\theta_x(x)$, é o ângulo de torção; $t(x)$ é o torque distribuído ao longo da barra.

Ainda explorando as similaridades com o problema da tração axial, uma representação algébrica local para a torção de Saint-Venant, similarmente à Eq. (6), pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix} + 1/2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2GI_p} \begin{bmatrix} 0 & -L \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{\theta_i} \\ f_{\theta_j} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Onde os ângulos de torção, os momentos torçores nodais e o vetor de carregamento são respectivamente: $\theta_{xi} = \theta_x(x = -a)$, $\theta_{xj} = \theta_x(x = a)$, $T_i = T(x = -a)$, $T_j = T(x = a)$ e $f_{\theta i} = f_{\theta j} = tL^2/(4GI_p)$.

O problema da flexão em y é similar à flexão em z, de forma que poucos ajustes (correções de sinais e a permuta de I_z por I_y) devem ser feitos para que o sistema algébrico em coordenadas locais seja escrito:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \Phi_{yi} \\ w_j \\ \Phi_{yj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -L/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & L/2 \\ 0 & -1/2 & -0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \Phi_{yi} \\ w_j \\ \Phi_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_y & 0 & 0 & -L^2/(4EI_y) \\ 0 & L/2EI_y & L^2/(4EI_y) & 0 \\ 0 & -L^2/(4EI_y) & -\alpha_y & 0 \\ L^2/(4EI_y) & 0 & 0 & -L/2EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{zi} \\ M_{yi} \\ Q_{zj} \\ M_{yj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{wi} \\ f_{\Phi_{yi}} \\ f_{wj} \\ f_{\Phi_{yj}} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Onde $\alpha_y = L^3[2 + 6EI_y/(\kappa GAL^2)]/(12EI_y)$, $f_{wi} = 5q_y L^4/(48EI_y)$, $f_{\Phi_{zi}} = q_z L^3/(6EI_y)$, $f_{wi} = f_{wj}$ e $f_{\Phi_{yj}} = -f_{\Phi_{yi}}$.

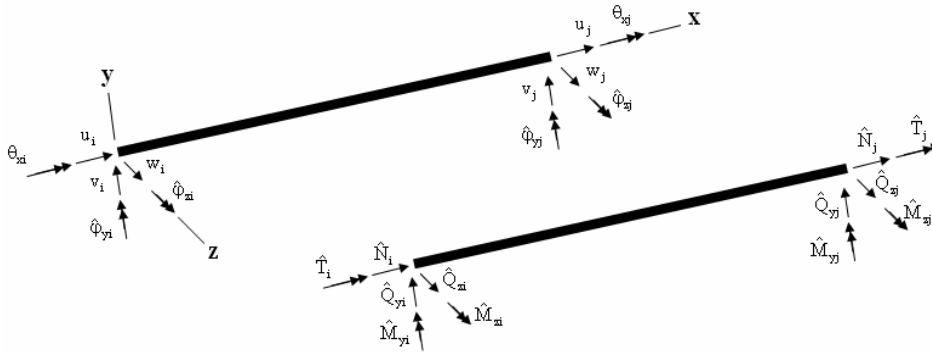


Figura 4. Sistema local unificado do pórtico espacial

Finalmente, obtém-se o sistema algébrico do pórtico espacial referido a um sistema local unificado, Fig. (4), fazendo as correções de sinais nas Eq. (3), Eq. (6), Eq. (9) e Eq. (10), cuja forma é semelhante à da Eq. (7), onde:

$$\{u\}^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \hat{\Phi}_{yi} \quad \hat{\Phi}_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \hat{\Phi}_{yj} \quad \hat{\Phi}_{zj}\}$$

$$\{p\}^T = \{\hat{N}_i \quad \hat{Q}_{yi} \quad \hat{Q}_{zi} \quad \hat{T}_i \quad \hat{M}_{yi} \quad \hat{M}_{zi} \quad \hat{N}_j \quad \hat{Q}_{yj} \quad \hat{Q}_{zj} \quad \hat{T}_j \quad \hat{M}_{yj} \quad \hat{M}_{zj}\}$$

$$\{b\}^T = \{f_{ui} \quad f_{vi} \quad f_{wi} \quad f_{\theta i} \quad f_{\Phi_{yi}} \quad f_{\Phi_{zi}} \quad f_{uj} \quad f_{vj} \quad f_{wj} \quad f_{\theta j} \quad f_{\Phi_{yj}} \quad f_{\Phi_{zj}}\}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \alpha_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} \\
 0 & 0 & \alpha_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_y} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2GI_p} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} & 0 & \frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_z} & 0 & \alpha_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 & 0 & \alpha_y & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2GI_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_y} & 0 \\
 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z}
 \end{bmatrix}$$

3. SISTEMA ALGÉBRICO DA ESTRUTURA

A representação algébrica da estrutura (pórtico plano ou espacial) requer que as contribuições advindas das barras sejam convenientemente acumuladas de forma a descrever o comportamento da estrutura como um todo. Em busca desse objetivo algumas transformações nos sistemas algébricos locais das barras devem ser efetuadas, obtendo-se assim os sistemas algébricos globais dessas mesmas barras.

3.1. Sistema Global da Barra

A princípio, a superposição dos campos vetoriais (esforços e deslocamentos) de cada extremidade de barra deve ser feita através de uma soma vetorial (magnitude e orientação) nos nós comuns. Para que estes vetores sejam somados algebricamente ou escalarmente (apenas suas magnitudes), eles precisam necessariamente estar na mesma direção para que suas contribuições sejam corretamente consideradas.

Para tanto, deve-se assegurar para cada membro que as matrizes de influência e o seu vetor de carregamento estejam no mesmo sistema de coordenadas. Os campos no sistema local podem ser transformados para global a partir das relações geométricas entre os eixos desses sistemas. Assim, os deslocamentos, os esforços e as forças externas são correlacionados com suas respectivas contrapartes globais como:

$$\{u\} = [R] \cdot \{U\}, \{b\} = [R] \cdot \{B\} \text{ e } \{p\} = [R] \cdot \{P\} \quad (11)$$

Define-se, então, uma relação entre as matrizes de influência locais e as de influência globais a partir da matriz de transformação $[R]$. A representação algébrica no sistema global pode ser obtida pela substituição da Eq. (11) na Eq. (7):

$$\{U\} + [H_g] \cdot \{U\} = [G_g] \cdot \{P\} + \{B\} \quad (12)$$

$$\text{Onde } [H_g] = [R]^T \cdot [H] \cdot [R], [G_g] = [R]^T \cdot [G] \cdot [R], [B] = [R]^T \cdot [b].$$

A matriz de transformação de pórtico plano, utilizada na Eq. (12), é dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} [B] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix}, \text{ com } [B] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No caso de pórtico espacial tem-se:

$$[R] = \begin{bmatrix} [B] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [B] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [B] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [B] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ -(C_x \cdot C_y \cdot \cos\alpha + C_z \cdot \text{sen}\alpha)/C_{xz} & \cos\alpha \cdot C_{xz} & (-C_y \cdot C_z \cdot \cos\alpha + C_x \cdot \text{sen}\alpha)/C_{xz} \\ (C_x \cdot C_y \cdot \text{sen}\alpha - C_z \cdot \cos\alpha)/C_{xz} & -C_{xz} \cdot \text{sen}\alpha & (-C_y \cdot C_z \cdot \text{sen}\alpha + C_x \cdot \cos\alpha)/C_{xz} \end{bmatrix}$$

Onde: $[0]$ é uma matriz nula de ordem 3; α é o ângulo de um dos eixos principais de inércia em relação a X ; C_x, C_y, C_z são os cossenos diretores da barra em relação ao sistema global de referência; e $C_{xz} = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$.

3.2. Montagem do Sistema da Estrutura

Quando duas ou mais barras convergirem para o mesmo nó deve ser levado em conta a continuidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio. Por simplicidade e concisão tomar-se-ão duas barras convergentes, as barras (1) e (2), conforme indicado na Fig. (5).

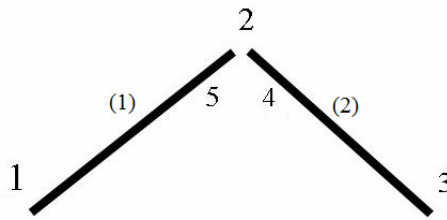


Figura 5. Barras de pórtico convergindo

As Eq. (13) e Eq. (14) indicam, na ordem, as representações algébricas para as barras (1) e (2) no sistema global:

$$\begin{cases} [H_{11}]\{U_1\} + [H_{12}]\{U_5\} = [G_{11}]\{P_1\} + [G_{12}]\{P_5\} \\ [H_{21}]\{U_1\} + [H_{22}]\{U_5\} = [G_{21}]\{P_1\} + [G_{22}]\{P_5\} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} [\hat{H}_{22}]\{U_4\} + [\hat{H}_{23}]\{U_3\} = [\hat{G}_{22}]\{P_4\} + [\hat{G}_{23}]\{P_3\} \\ [H_{32}]\{U_4\} + [H_{33}]\{U_3\} = [G_{32}]\{P_4\} + [G_{33}]\{P_3\} \end{cases} \quad (14)$$

Aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamento nas seções à esquerda e à direita no nó 2, tem-se:

$$\{U_2\} = \{U_4\} = \{U_5\} \quad (15)$$

Além disso, devem ser satisfeitas também as equações de equilíbrio no nó 2, vide Fig. (6):

$$\{P_5\} + \{P_4\} + \{F\} = \{0\} \quad (16)$$

Onde: $\{F\}$ é o vetor que contém as forças e momentos diretamente aplicados no nó 2; $\{P_5\}$ e $\{P_4\}$ são os vetores que contém os esforços à esquerda e à direita desse nó, respectivamente.

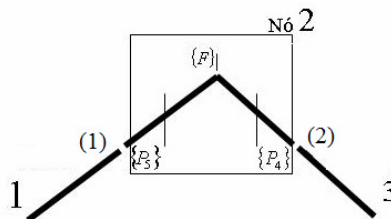


Figura 6. Condição de Equilíbrio no nó

Substituindo-se as condições de compatibilidade de deslocamento, de acordo com a Eq. (15), e as condições de equilíbrio, conforme a Eq. (16), nas representações algébricas indicadas nas Eq. (13) e Eq. (14), o sistema algébrico da estrutura pode ser reagrupado como:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & [0] & [0] & [-G_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & [0] & [0] & [-G_{22}] \\ [0] & [H_{32}] & [H_{33}] & [-G_{32}] & [0] \\ [0] & [\hat{H}_{22}] & [\hat{H}_{23}] & [-\hat{G}_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [G_{21}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G_{33}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\hat{G}_{23}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [-I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

4. VALIDAÇÃO NUMÉRICA

A validação da estratégia de solução proposta nas seções anteriores é apresentada em três etapas: a) na comparação entre os deslocamentos da extremidade livre de uma viga engastada-livre, Fig. (7), para valores crescentes do índice de esbeltez ($\lambda = L/h$), deslocamentos estes calculados sem o efeito (Teoria de Viga de Euler-Bernoulli) e, também, com o efeito da deformação por cortante (Teoria de Viga de Timoshenko); b) na comparação entre os valores dos deslocamentos da extremidade 2 da barra (1) do pórtico plano, Fig. (8), referidos ao sistema local e obtidos inicialmente através da formulação de Viga de Euler-Bernoulli e depois com a aplicação da formulação de Viga de Timoshenko, considerados valores crescentes de λ e, c) na comparação entre os deslocamentos da extremidade 2 da barra (1) do pórtico espacial mostrado na Fig. (9), obtidos também através das formulações acima mencionadas.

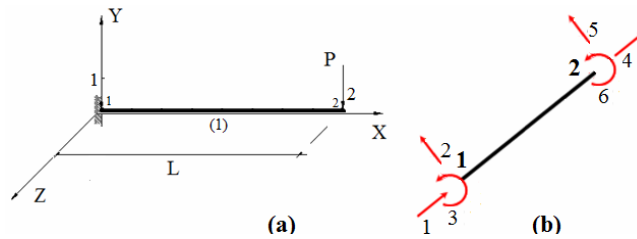


Figura 7. (a) Viga engastada-livre e (b) Graus de Liberdade Locais

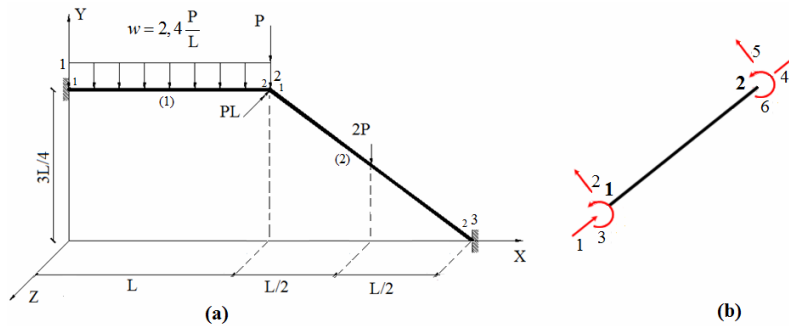


Figura 8. (a) Pórtico Plano e (b) Graus de Liberdade Locais

Dados relativos à viga e ao pórtico plano: $P = 44,48 \text{ kN}$ (10 kips), $E = 6,867 \times 10^4 \text{ MPa}$ (10000 ksi), $A = 6,452 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (10 in²), $I_z = 4,162 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ (1000 in⁴) e $L = 2,54 \text{ m}$ (100 in).

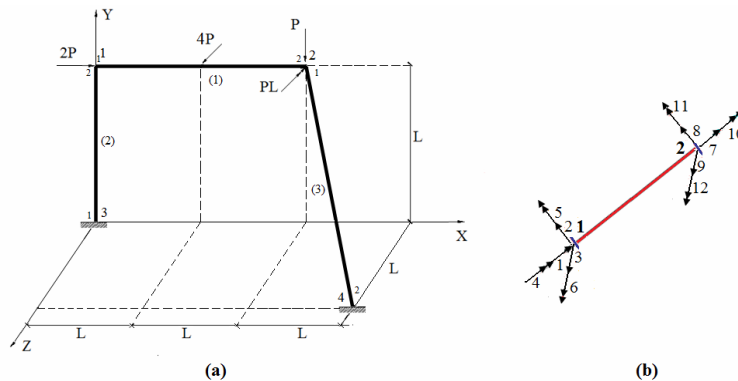


Figura 9. (a) Pórtico Espacial e (b) Graus de Liberdade Locais

Dados relativos ao pórtico espacial: $P = 4,45 \text{ kN}$ (1 kip), $E = 2,060 \times 10^5 \text{ MPa}$ (30000 ksi), $G = 8,240 \times 10^4 \text{ MPa}$ (12000 ksi), $A = 7,097 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (11 in²), $I_x = 3,455 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ (83 in⁴), $I_y = 2,331 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ (56 in⁴), $I_z = 2,331 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ (56 in⁴) e $L = 3,048 \text{ m}$ (120 in).

Os valores dos deslocamentos verticais (direção y) e das rotações (plano xy) da extremidade 2 da viga, assim como o erro entre os valores desses deslocamentos obtidos com a consideração do cortante e sem essa consideração estão na Tab. (1). Lá estão também os valores dos deslocamentos verticais e das rotações obtidos analiticamente a partir da teoria de vigas de Timoshenko apresentada por Wang, (1995); Os pórticos: plano e espacial representados, na ordem, na Fig. (8) e na Fig. (9) são propostos por Gere e Weaver (1981). Os deslocamentos de interesse do pórtico plano estão na Tab. (2) e, os do pórtico espacial, na Tab. (3). Em todas as tabelas indicadas, d_i denota o deslocamento na coordenada i, como definido nas Fig. (7.b), Fig. (8.b) e Fig. (9.b). O erro em percentual é calculado através da expressão $\epsilon_i (\%) = 100.(d_i^{VT} - d_i^{VEB}) / d_i^{VT}$, na qual os índices sobrescritos VT e VEB significam, na ordem, a aplicação da teoria de viga de Timoshenko e a de Euler-Bernoulli na obtenção do deslocamento indicado.

Tabela 1. Deslocamentos do nó 2 da viga, Fig. (7)

λ	$h(\text{cm})$	$I_z(\text{cm}^4)$	Viga de Euler-Bernoulli		Viga de Timoshenko		Viga de Timoshenko(*)		$\epsilon_5 (\%)$
			$d_5(\text{cm})$	$d_6(\text{rad})$	$d_5(\text{cm})$	$d_6(\text{rad})$	$d_5(\text{cm})$	$d_6(\text{rad})$	
3,00	84,67	38539,947	-0,91440	-0,005400	-0,97536	-0,005400	-0,97511	-0,005400	6,25
9,00	28,22	4282,216	-8,22957	-0,048600	-8,29061	-0,048600	-8,29030	-0,048600	0,73
10,00	25,40	3468,595	-10,16004	-0,060000	-10,22100	-0,060000	-10,22100	-0,060000	0,59
12,00	21,17	2408,747	-14,63049	-0,086406	-14,69145	-0,086406	-14,69145	-0,086401	0,41

(*) resultados obtidos analiticamente, Wang, (1995).

Tabela 2. Deslocamentos da extremidade 2 da barra (1) do pórtico plano, Fig. (8)

λ	Deslocamentos (cm, rad)						$\epsilon_4 (\%)$	$\epsilon_5 (\%)$	$\epsilon_6 (\%)$
	d_4^{VEB}	d_5^{VEB}	d_6^{VEB}	d_4^{VT}	d_5^{VT}	d_6^{VT}			
3,00	-0,054013	-0,261307	-0,00192532	-0,059175	-0,278172	-0,00212192	8,72	6,06	9,26
9,00	-0,103104	-0,433113	-0,01473850	-0,103065	-0,432831	-0,01498583	-0,04	-0,06	1,65
10,00	-0,105084	-0,440042	-0,01807221	-0,105016	-0,439686	-0,01832241	-0,06	-0,08	1,37
12,00	-0,107762	-0,449411	-0,02578393	-0,107679	-0,449037	-0,02603813	-0,08	-0,08	0,98

Tabela 3 Deslocamentos da extremidade 2 da barra (1) do pórtico espacial, Fig. (9)

Deslocamentos ($\times 10^{-2}$)	$d_7(\text{m})$	$d_8(\text{cm})$	$d_9(\text{cm})$	$d_{10}(\text{rad})$	$d_{11}(\text{rad})$	$d_{12}(\text{rad})$
Viga de Euler-Bernoulli	-0,391674	1,158628	1,559491	0,003584	0,005748	-0,002702
Viga de Timoshenko	-0,391100	1,159514	1,559491	0,003585	0,005748	-0,002706

5. CONCLUSÕES

Neste artigo, foi discutido o efeito da deformação por cortante na análise de pórticos planos e espaciais utilizando-se a técnica dos elementos de contorno. A formulação mostrou-se apropriada, pois sua aplicação possibilitou a determinação dos deslocamentos dos nós e das extremidades das barras, das reações dos apoios bem como dos esforços nas extremidades das barras, embora apenas os deslocamentos da extremidade 2 da barra (1) dos pórticos analisados, além dos deslocamentos verticais e das rotações da extremidade livre da viga engastada-livre tenham sido explicitados.

Da observação dos valores dos deslocamentos constantes da 4^a e da 6^a colunas da Tab. (1) obtidos da análise da viga, Fig. (7), para diferentes valores do índice de esbeltez, é possível concluir que para $\lambda \geq 10$ o efeito do cortante pode ser desprezado no cálculo do deslocamento d_5 posto que o erro cometido seria menor que 1%. Tal conclusão esta de acordo com a anunciada na literatura técnica especializada, podendo ser demonstrada a partir de Augarde e Deeks, (2008); sendo, desse modo definido $\lambda_{cr} = 10$. Os valores dos deslocamentos calculados através da aplicação da Teoria de Viga de Timoshenko obtidos a partir da estratégia aqui discutida apresentam muito boa aproximação aos valores dos mesmos deslocamentos obtidos analiticamente a partir da mesma teoria, na ordem, valores das 6^a e 8^a

colunas, ainda da Tab. (1). As rotações observadas na extremidade livre da viga estudada - 5ª e 7ª colunas da Tab.(1) - não sofreram influência da consideração do cortante, conforme - p. ex. - Wang, (1995) e Wang, Readdy e Lee, (2000).

A partir dos valores dos deslocamentos integrantes da Tab. (2) e da Tab. (3) é possível concluir que para os pórticos analisados, os deslocamentos (e rotações) das extremidades das barras apresentam diferenças não-desprezíveis quando da consideração ou não da deformação por cortante. Entretanto os erros observados entre os valores dos deslocamentos de mesmo nome da extremidade 2 da barra (1) (sistema local) do pórtico da Fig.(8) obtidos através da Teoria de Viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko tendem a desaparecer quando calculados para barras com valores crescentes do índice de esbelteza, sugerindo a existência de um λ_{cr} aplicável às barras desses pórticos. De acordo com os valores da Tab. (2) para $\lambda \geq 12$ a deformação por cortante pouco afetou aos deslocamentos (os erros cometidos ao adotarem-se os deslocamentos obtidos através da formulação de Euler-Bernoulli são menores que 1%). Como, neste caso, os deslocamentos citados são iguais aos do nó 2 (sistema global), é possível sugerir que a influência das deformações por cortante na análise dos pórticos planos seja desprezível quando suas barras apresentarem $\lambda \geq \lambda_{cr} = 12$.

A diferença nas rotações nodais dos pórticos calculadas com o efeito do cortante e sem este efeito, pode ser atribuída à variação do comprimento (devida às solicitações axiais atuantes) das barras que chegam ao nó.

6. REFERÊNCIAS

- Antes, H., Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams, Computers and Structures 81 (2003), 383–396
- Antes, H. Shanz, M. Alvermann, S., Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams, Journal of sound and vibration (2004), 807-836
- Augarde, C.E., Deeks, A.J., The use of Timoshenko's exact solution for a cantilever beam in adaptive analysis, Finite Elem. Anal.Des. (2008), doi: 10.1016/j.finel.2008.01.010.
- Gere, J. M., Weaver, W. Análise de Estruturas Reticuladas, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, RJ, 1981.
- Kapur, K.K., Vibrations of a Timoshenko beam, using a finite element approach, Journal of the Acoustical Society of America 40 (1966) 1058–1063.
- Nickel, R.E., Secor, G.A. Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering 5 (1972) 243–253.
- Timoshenko, S. P., Goodier, J.N., Theory of elasticity, McGraw-Hill, New York, 1970.
- Timoshenko, S. P., Young, D. Y., Vibration Problems in Engineering, 3rd Edition, D. van Nostrand, New York, 1961.
- Wang, C.M., Timoshenko Beam-Bending Solutions in Terms of Euler-Bernoulli Solutions, Journal of Engineering Mechanics – ASCE, 1995.
- Wang, C.M., Readdy, J.W., Lee, K. H., Shear deformable Beams and Plates, Relationships with Classical Solutions, Elsevier Science Ltd, Kidlington, Oxford, UK, 2000.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso neste trabalho.

SHEAR DEFORMATION EFFECT IN PLANAR AND SPACE FRAMES: AN ELASTICITY ANALYSIS USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

José Márcilio Filgueiras Cruz¹, marciliofcruz@hotmail.com

Raphael Seixas dos Santos², r_seixasmaia@hotmail.com

Angelo Vieira Mendonça³, mendonca@ct.ufpb.br

¹Programa de Pós-Graduação em Eng. Mecânica, Centro de Tecnologia, UFPB, João Pessoa, PB-CEP: 58.051-900

²PIBIC- Depto de Engenharia Civil e ambiental, Centro de Tecnologia, UFPB, João Pessoa, PB- CEP:58.051-900

³Depto de Engenharia Civil e ambiental, Centro de Tecnologia, UFPB, João Pessoa, PB- CEP: 58.051-900

Abstract. In this paper is presented a convenient strategy for the assembling of influence matrices of planar and space frames using the boundary element method. In addition, the integral representation of frames is done by using fundamental solutions in which it is taken into account the shear deformation effect into bending problem of each bar. Numerical responses for convergence studies associated with slenderness ratio variation of the structural components are presented as well.

Palavras-chave: BEM, Frames, Structural analysis