

MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS APLICADOS A ESTRUTURAS COMPOSTAS LAMINADAS INCORPORANDO CAMADAS VISCOELÁSTICAS

Adriana Amaro Diacenco, adriana_aadiacenco@yahoo.com.br¹
Antônio Marcos Gonçalves de Lima, amglima@mecanica.ufu.br²
Edmilson Otoni Côrrea, ecotoni@unifei.edu.br¹

¹Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Instituto de Engenharia, Campus José Rodrigues Seabra, P.O.BOX 50, CEP 37500-903, Itajubá-MG, Brasil.

²Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campus Santa Mônica, P.O.BOX 593, CEP 38400-902, Uberlândia-MG, Brasil.

Resumo Este trabalho trata-se da avaliação numérica do desempenho de estruturas compostas laminadas e sanduíche (com núcleo viscoelástico), com ênfase à implementação de um método de condensação destinado a reduzir o esforço computacional requerido para o cálculo das respostas dinâmicas dos sistemas amortecidos. Será utilizada a Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (HSDT) a qual é implementada em um elemento Serendipity retangular contendo oito nós e onze graus de liberdade por nó. A introdução do amortecimento viscoelástico no modelo de elementos finitos da estrutura composta laminada é feita via utilização do Módulo Complexo, associados aos conceitos de fator de deslocamento e frequência reduzida, justificado pelo Princípio da Superposição Frequência-Temperatura. São realizadas simulações numéricas a fim de determinar seus parâmetros modais como: frequências naturais, modos de vibração e fatores de amortecimento modal, representados por funções de resposta em frequência (FRFs), tornando possível avaliar e ilustrar as características de desempenho da formulação utilizada nos procedimentos de modelagem e na incorporação do amortecimento viscoelástico em modelos de elementos finitos de estruturas compostas laminadas.

Palavras-chave Materiais compostos; Materiais viscoelásticos; Elementos finitos; Controle passivo

1. INTRODUÇÃO

Materiais compósitos têm sido utilizados cada vez mais em produtos de alta tecnologia, devido às inúmeras vantagens de tais materiais em relação aos convencionais como aço e alumínio. A mais relevante delas, do ponto de vista mecânico, é sua elevada relação resistência/peso.

O desenvolvimento de novos materiais e de novas tecnologias de fabricação tem contribuído para o aumento crescente do emprego dos materiais compósitos em diversos ramos da engenharia, notadamente nas indústrias aeroespaciais e automobilística. Frequentemente, nestes tipos de aplicações, as estruturas estão sujeitas a perturbações estáticas e dinâmicas, que afetam as características mecânicas e de resposta do material, como por exemplo, as funções de resposta em frequência e os modos de vibração. Neste contexto, um aspecto importante a ser investigado, e que tem mobilizado um grande número de pesquisadores de todo o mundo, é o procedimento de modelagem numérico-computacional de estruturas compostas do tipo laminadas e do tipo sanduíches combinadas com técnicas passivas de atenuação e ruído (Bethelot, 2006; Faria et al., 2008, de Lima et al., 2009).

Entre as várias teorias que foram desenvolvidas para a modelagem de estruturas compostas laminadas, a Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (*Higher-order Shear Deformation Theory – HSDT*) proposta por Lo (1977) foi escolhida no presente artigo, uma vez que aproximam as variáveis mecânicas por uma função polinomial de terceira ordem e seus resultados se aproximam bem dos resultados obtidos através do emprego da Teoria da Elasticidade Tridimensional (Reddy, 1997).

Com base no que foi exposto acima, o principal objetivo deste artigo é a implementação numérico-computacional utilizando o método dos elementos finitos de placas compostas laminadas e sanduíches incorporando materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibração e ruído avaliando o desempenho da formulação utilizada nos procedimentos de modelagem. Entretanto, tal procedimento pode ser inexplorável em termos do alto custo numérico para o caso de modelos de elementos finitos de sistemas industriais. E neste caso, métodos de condensação de modelos são requeridos onde faz-se uso de uma base de redução que seja capaz de representar as mesmas respostas dinâmicas dos modelos nominais.

A formulação numérica sumarizada nas próximas seções, pode ser encontrada, com maior detalhe em Diacenco (2010).

2. FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS COMPOSTAS LAMINADAS

De acordo com a Teoria da Deformação Cisalhante proposta por Lo (1977), os campos de deslocamentos da *HSDT* expresso pelas seguintes equações:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(z)\mathbf{u}(x, y, t) \quad (1)$$

Na Eq. (1), tem-se:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t) \ v(x, y, z, t) \ w(x, y, z, t)]^T \quad (2.a)$$

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.b)$$

$$\mathbf{u}(x, y, t) = [u_0(x, y, t) \ v_0(x, y, t) \ w_0(x, y, t) \ \psi_x(x, y, t) \ \psi_y(x, y, t) \ \psi_z(x, y, t) \ \dots \\ \dots \ \zeta_x(x, y, t) \ \zeta_y(x, y, t) \ \zeta_z(x, y, t) \ \Phi_x(x, y, t) \ \Phi_y(x, y, t)]^T \quad (2.c)$$

onde $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, e $w(x, y, z, t)$ denotam, respectivamente, os deslocamentos nas direções x , y e z . (u_0, v_0, w_0) e (ψ_x, ψ_y, ψ_z) são, respectivamente, os deslocamentos do plano médio e as rotações da seção transversal nas direções x , y e z . Os termos ζ_x , ζ_y , ζ_z , Φ_x e Φ_y , podem ser vistos como rotações de alta ordem, não possuindo uma interpretação geométrica clara (Chee 2001; Mendonça 2005).

A discretização das variáveis de deslocamentos apresentada na Eq. (1) é feita utilizando-se funções de interpolação apropriadas. O elemento considerado foi um elemento de placa retangular composto por 8 nós da família *Serendipity*, conforme a Figura 1.

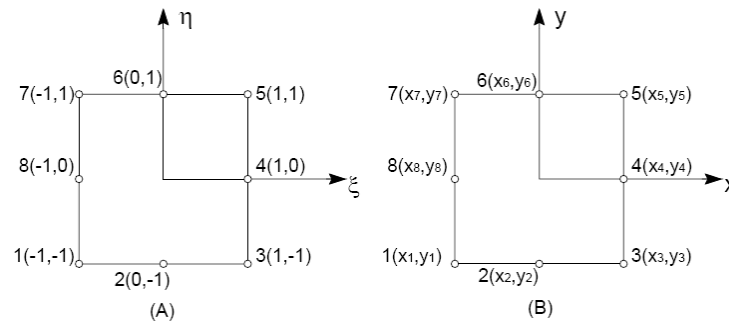


Figura 1. Elemento da família *Serendipity* empregado na formulação por elementos finitos de placas compostas laminadas: (a) coordenadas locais, (b) coordenadas globais.

As funções de interpolação, que relacionam os deslocamentos em um ponto qualquer com os deslocamentos nos pontos nodais, da família *Serendipity* são apresentadas na Eq. (3).

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) & N_5(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi+\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) & N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\xi)(1-\xi+\eta) & N_7(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) & N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta) \end{aligned} \quad (3)$$

As 11 variáveis mecânicas descritas no vetor $\mathbf{u}(x, y, t)$ estão relacionadas com os correspondentes 88 valores nodais através da seguinte relação:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, t) = \mathbf{N}(\xi, \eta)\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

onde $\mathbf{u}(t) = [\mathbf{u}_1^T(t) \mathbf{u}_2^T(t) \dots \mathbf{u}_8^T(t)]^T$ e $\mathbf{u}_i(t) = [u_i \ v_i \ w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi} \ \psi_{zi} \ \zeta_{xi} \ \zeta_{yi} \ \zeta_{zi} \ \Phi_{xi} \ \Phi_{yi}]^T$ ($i=1$ a 8). $N(\xi, \eta)$ de dimensão 11×88 , é a matriz formada pelas funções de interpolação do elemento padrão de 8 nós da família *Serendipity* formulada em coordenadas locais (ξ, η) , $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$.

Usando as interpolações dos campos de deslocamentos e deformações, as expressões das energias cinéticas e deformação podem ser formuladas, respectivamente, como segue:

$$\mathbf{K}_E(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T(t) \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{S}_E(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}(t) \quad (6)$$

$$\text{onde: } \mathbf{M}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \rho_k N^T(\xi, \eta) \mathbf{A}^T(z) \mathbf{A}(z) N(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (7.a)$$

é a matriz de massa elementar, e $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_b^{(e)} + \mathbf{K}_s^{(e)}$ é a matriz de rigidez elementar, no qual as componentes de flexão e cisalhamento são expressas, respectivamente, como:

$$\mathbf{K}_b^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_b^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_b^{(k)}(\theta_k) \mathbf{B}_b(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (7.b)$$

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_s^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_s^{(k)}(\theta_k) \mathbf{B}_s(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (7.c)$$

Nas Eqs. (7) $\det(\mathbf{J})$ indica o determinante do Jacobiano da transformação das variáveis físicas (x, y) para as variáveis naturais (ξ, η) , e as matrizes $\mathbf{C}_b^{(k)}(\theta_k)$ e $\mathbf{C}_s^{(k)}(\theta_k)$ representam, respectivamente, as matrizes elásticas ortotrópicas associadas à flexão e ao cisalhamento da k -ésima camada, as quais são construídas de acordo com a teoria CLT.

3. INCORPORAÇÃO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO EM MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

Neste artigo, tem-se interesse nas respostas dinâmicas no domínio frequencial o que pode ser representado com a utilização do modelo do módulo complexo combinado com os conceitos de fator de deslocamento e frequência reduzida, justificado pelo Princípio da Superposição Frequência-Temperatura.

De acordo com o modelo do módulo complexo o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos pode ser representado pelas seguinte expressão:

$$G(\omega, T) = G'(\omega, T) [1 + i\eta(\omega, T)] \quad (8)$$

onde ω e T representam, respectivamente, a frequência de excitação e a temperatura do material viscoelástico e η representa o fator de perda do material.

O Princípio da Superposição Frequência-Temperatura, estabelece a relação inversa entre os efeitos de temperatura e frequência de excitação para materiais viscoelásticos termoreologicamente simples. Este fato indica que as características viscoelásticas em diferentes temperaturas podem ser associadas entre si através de mudanças horizontais (deslocamentos) nos valores da frequência real de excitação, conduzindo aos conceitos de fator de deslocamento e frequência reduzida.

$$G(\omega, T) = G(\omega_r, T_0) = G(\alpha_T \omega, T_0) \quad (9)$$

$$\eta_G(\omega, T) = \eta_G(\omega_r, T_0) = \eta_G(\alpha_T \omega, T_0) \quad (10)$$

onde T indica um valor arbitrário da temperatura, T_0 é uma temperatura de referência, $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$ representa a frequência reduzida, ω é a frequência de excitação, e $\alpha_T(T)$ representa o fator de deslocamento como função da temperatura.

Drake e Soovere (1984) sugerem expressões analíticas para o módulo complexo e o fator de deslocamento para diferentes materiais viscoelásticos disponíveis comercialmente, para a zona de transição. As equações seguintes representam, respectivamente, o módulo complexo e o fator de deslocamento como funções da frequência reduzida e da temperatura para o material viscoelástico ISD112 produzido pela 3M, de acordo com o obtido pelos autores:

$$G(\omega_r) = B_1 + B_2 / (1 + B_5(i\omega_r/B_3)^{-B_6} + (i\omega_r/B_3)^{-B_4}) \quad (11.a)$$

$$\log(\alpha_T) = a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + 2.303 \left(\frac{2a}{T_0} - b \right) \log \left(\frac{T}{T_0} \right) + \left(\frac{b}{T_0} - \frac{a}{T_0^2} - S_{AZ} \right) (T - T_0) \quad (11.b)$$

$$B_1 = 0.4307 \text{MPa}; B_2 = 1200 \text{MPa}; B_3 = 1543000; B_4 = 0.6847; B_5 = 3.241; B_6 = 0.18$$

onde: $T_0 = 290 \text{K}; T_L = 210 \text{K}; T_H = 360 \text{K}; S_{AZ} = 0.05956 \text{K}^{-1}; S_{AL} = 0.1474 \text{K}^{-1}; S_{AH} = 0.009725 \text{K}^{-1}$

$$C_A = (1/T_L - 1/T_0)^2; C_B = (1/T_L - 1/T_0); C_C = (S_{AL} - S_{AZ}); D_A = (1/T_H - 1/T_0)^2; D_B = (1/T_H - 1/T_0)$$

$$D_C = (S_{AH} - S_{AZ}); D_E = (D_B C_A - D_A C_B); a = (D_B C_C - C_B D_C) / D_E; b = (D_C C_A - C_C D_A) / D_E$$

A Figura 2 representa as curvas normalizadas do módulo de armazenamento, do fator de perda, e do fator de deslocamento em temperatura para o material viscoelástico ISD112™.

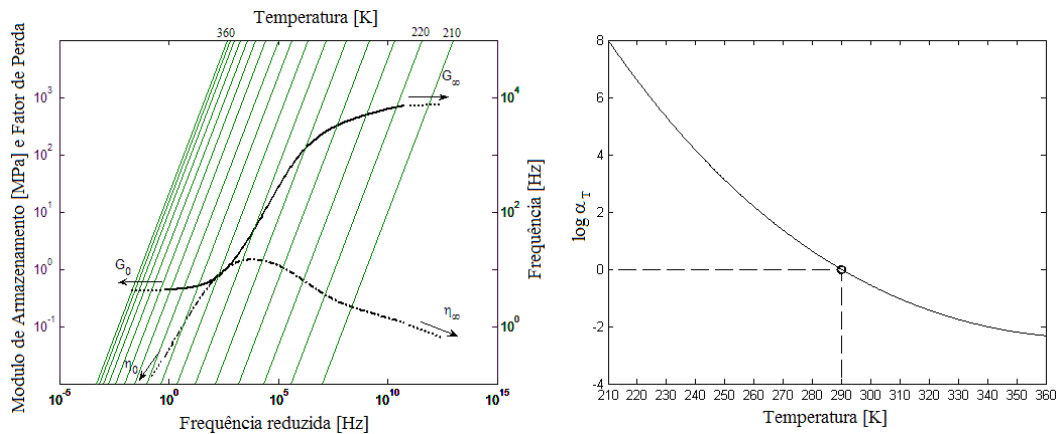


Figura 2 – Nomograma representando as propriedades do material viscoelástico ISD112™.

De acordo com o Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástica (PEEV), a derivação do modelo de elementos finitos considerando o comportamento viscoelástico pode ser descrito em duas fases distintas: primeiro, as matrizes elementares e globais são obtidas considerando-se comportamento elástico puro (o módulo do material é independente da frequência e da temperatura). Este procedimento foi considerado na seção precedente. Então, o módulo do material é modificado para levar em conta o comportamento viscoelástico (de acordo com modelo do módulo complexo como definido pela Eq. (8)). É importante destacar que esta aproximação fornece matrizes de elementos finitos dependentes da frequência e da temperatura, as quais são expressas, após uma adaptação das Eqs. (7.b) e (7.c), da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_b^{(v)}(\omega, T) = \sum_{k=1}^v \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_b^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_b^{(k)}(\omega, T) \mathbf{B}_b(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (12.a)$$

$$\mathbf{K}_s^{(v)}(\omega, T) = \sum_{k=1}^v \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_s^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_s^{(k)}(\omega, T) \mathbf{B}_s(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (12.b)$$

Um dos módulos pode ser fatorado das matrizes que representam as contribuições nas matrizes de rigidez da placa composta sanduíche como segue:

$$\mathbf{K}_b^{(v)} = G(\omega, T) \sum_{k=1}^v \sum_{i=1}^7 t_k^i \bar{\mathbf{K}}_{b_i}^{(k)} \quad (13.a)$$

$$\mathbf{K}_s^{(v)} = G(\omega, T) \sum_{k=1}^v \sum_{i=1}^5 t_k^i \bar{\mathbf{K}}_{s_i}^{(k)} \quad (13.b)$$

Após o procedimento padrão de elementos finitos obtém-se a matriz de rigidez global expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{K}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v \quad (14)$$

Negligenciando os efeitos de outros tipos de amortecimento, pode-se chegar à equação global do movimento de elementos finitos no domínio da frequência:

$$\left[\mathbf{K}(\omega, T) - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (15.a)$$

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{b}\mathbf{U}(\omega), \mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{c}\mathbf{Q}(\omega) \quad (15.b)$$

Combinando-se as expressões (14) e (15), obtém-se a seguinte expressão para a matriz de rigidez dinâmica complexa:

$$\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M} \quad (16)$$

Uma vez definido a rigidez complexa, a etapa seguinte consiste em resolver o sistema no domínio frequencial, o que pode ser feito através da construção da matriz de flexibilidade dinâmica ou matriz de Funções Resposta em Frequências (FRFs):

$$\mathbf{H}(\omega, T) = \mathbf{c}\mathbf{Z}(\omega, T)^{-1}\mathbf{b} \quad (17)$$

4. MÉTODOS DE CONDENSAÇÃO DE MODELOS APLICADOS A SISTEMAS TRATADOS VISCOELASTICAMENTE

A partir da expressão (17), pode-se imaginar que para os modelos de elementos finitos de sistemas industriais de grande escala amortecidos viscoelasticamente, não é prático (do ponto de vista do custo numérico) utilizar diretamente o modelo completo, pois, ele conduz a um tempo de cálculo proibitivo em virtude da inversão da matriz de rigidez dinâmica complexa para cada passo de frequência. Neste caso, utilizam-se aproximações de respostas, buscando-se a solução num subespaço: isto é, a aproximação modal, que consiste a projetar as equações do movimento do sistema amortecido numa base de redução \mathbf{T} , com o objetivo de diminuir o número de graus de liberdade do sistema e, portanto, acelerar a resolução numérica do problema, através da hipótese de que as respostas exatas, representadas pela expressão (15.a), podem ser aproximadas por soluções dentro de um subespaço reduzido da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{Q}_r \quad (18)$$

onde a matriz $\mathbf{T} \in C^{N \times NR}$ é a base de redução, ou base de Ritz, e $\mathbf{Q}_r \in C^{NR}$ com $NR \ll N$ (NR representa os modos retidos na base).

Considerando-se as expressões (15.a) e (18), a função de transferência (17) pode ser aproximada como:

$$\mathbf{H}_r(\omega, T) = \mathbf{c}\mathbf{Z}_r(\omega, T)^{-1}\mathbf{b} \quad (19)$$

onde $\mathbf{Z}_r(\omega, T) = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T} + G(\omega, T)\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_v \mathbf{T} - \omega^2 \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$ representa a matriz de rigidez reduzida.

A matriz de rigidez dinâmica reduzida pode ser calculada e invertida para cada passo de frequência de uma maneira direta, utilizando-se algoritmos numéricos eficientes. Entretanto, para sistemas amortecidos viscoelasticamente, a escolha da base de redução não é simples, nem sistemática, em função da dependência da matriz de rigidez do material com relação à frequência de excitação e à temperatura. Neste caso, a base de redução deve levar em conta as variações da frequência e da temperatura. Dentre algumas soluções possíveis para resolver este problema, uma delas é negligenciar esta dependência, admitindo-se que a matriz de rigidez é independente da frequência e da temperatura. Para isto, é preciso escolher um modelo de partida para se calcular a base de redução que será independente da frequência e da temperatura, que deve ser em seguida, enriquecida com vetores residuais estáticos para levar em conta os efeitos viscoelásticos (Balmès et al, 2002a ; 2002b).

Então a base de redução será fixa e a determinação da resposta dinâmica amortecida é obtida utilizando-se a técnica de aproximação padrão de Ritz-Galerkin. Para isto, é necessária a adoção de um ponto de partida para a determinação da base de redução independente da frequência. Balmès e Germès (2002b) demonstram que a rigidez tangente é um ponto de partida conveniente, tendo a vantagem de ser real e fácil de ser invertida. Isto caracteriza o comportamento

conservativo associado do material viscoelástico, para o qual $\mathbf{K}_v(0) = G_0 \bar{\mathbf{K}}_v$. Caracteriza-se portanto o Sistema Conservativo Associado no qual o amortecimento viscoelástico é eliminado. O CCA pode ser obtido através das propriedades assintóticas do ajuste de curvas para cada material viscoelástico, como mostrado na Fig. 2.

De uma maneira geral, a medida das características viscoelásticas a uma temperatura fixa fornece o módulo de armazenamento e o fator de perda, no qual a variação em frequência assemelha-se geralmente à forma ilustrada na Fig. 2 para o material viscoelástico 3M ISD112. Nas regiões de altas e baixas frequências não medidas, as curvas do módulo de armazenamento e do fator de perda podem ser prolongadas por assíntotas. A extrapolação em baixa frequência fornece uma assíntota real G_0 e $\eta_0 = 0$ e para as altas frequências, obtém-se uma assíntota complexa G_∞ e η_∞ (Crandall, 1970). Neste caso, a matriz de rigidez elástica tangente pode ser obtida como segue:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v \quad (20)$$

A base de redução nominal contendo os primeiros modos mantidos do sistema amortecido por materiais viscoelásticos pode ser obtida através da resolução do problema de autovalores seguinte:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_0 - \lambda_i \mathbf{M}) \phi_i &= 0 \quad i = 1, \dots, N \\ \phi_0 &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{NR}]^T, \quad \mathbf{A}_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{NR}) \end{aligned} \quad (21)$$

A base de redução ϕ_0 contém somente os modos próprios do sistema tratado considerando-se o comportamento SCA. Para enriquecer esta base, Balmès e Germès (2002) propuseram a utilização de resíduos estáticos baseados nos deslocamentos associados ao carregamento imposto, que pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{b} \quad (22)$$

Este procedimento é chamado de correção estática de primeira ordem, que é completada através do cálculo da resposta estática dos carregamentos produzidos pela parte imaginária da matriz de rigidez dinâmica completa, que pode ser obtida através da expressão (15.a):

$$\mathbf{R}_A^0 = \mathbf{K}_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_v \phi_0 \quad (23)$$

Esses resíduos são associados aos efeitos viscoelásticos (forças viscoelásticas) do sistema nominal amortecido, traduzido pelo amortecimento. Desta forma, a base de redução nominal enriquecida pode ser expressa como segue:

$$\mathbf{T}_0 = [\phi_0 \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{R}_A^0] \quad (24)$$

A base de redução (24) será utilizada para reduzir os modelos de elementos finitos de estruturas compostas laminadas do tipo sanduíches contendo amortecimento viscoelástico.

5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

5.1. Placa composta laminada contendo amortecimento inerente

Nesta aplicação considera-se uma placa plana composta laminada, conforme ilustrado na Fig. 3, onde $L_x = L_y = 0.16$ m, composta por cinco camadas unidirecionais de mesma espessura e igual a $h/5$, onde $h = L_x/128$. A Fig. 3(b) ilustra a discretização do modelo de elementos finitos composto por 64 elementos de placa plana laminada e 225 nós. São consideradas as seguintes condições de contorno para o problema: $u_0 = w_0 = \psi_z = \zeta_x = \zeta_z = 0$ em $y = 0$ e $y = a$, e $u_0 = w_0 = \psi_z = \zeta_x = \zeta_z = 0$ em $x = 0$ e $x = b$ (Correia, 2000). As orientações das fibras de cada camada são adotadas arbitrariamente como $(45^\circ/0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ)$, e a propriedades elásticas de cada camada são: $\bar{E}_1 = 172.4 \text{ GPa}$, $\bar{E}_2 = \bar{E}_3 = 6.89 \text{ GPa}$, $\bar{G}_{12} = \bar{G}_{13} = 3.45 \text{ GPa}$, $\bar{G}_{23} = 1.38 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25$, $\nu_{23} = 0.30$. $\rho = 1566 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do material.

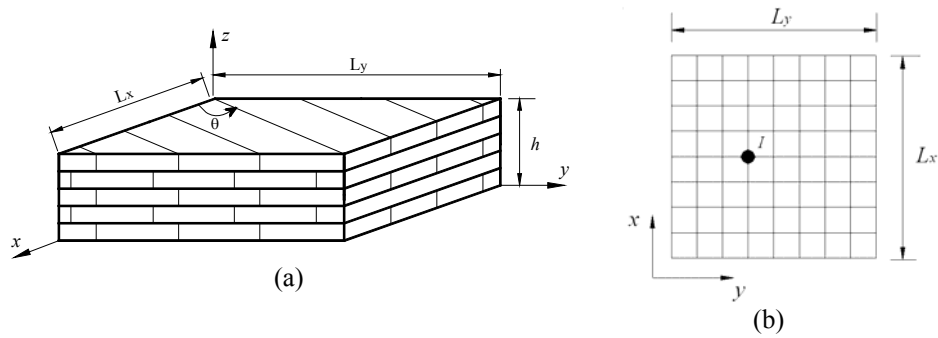


Figura 3 – Geometria da placa composta (a) e a discretização por EFs (b).

É assumido que o material compósito apresenta amortecimento inerente, representado pelos módulos complexos e independentes da frequência e temperatura da seguinte forma:

$$E_{mn} = \bar{E}_{mn}(1 + i\eta_{mn}), \quad E_{mn} = \bar{G}_{mn}(1 + i\eta_{mn}) \quad (25)$$

onde $\eta_{mn} = 0.001$ é adotado como fator de perda para todos os módulos.

Os cálculos consistem em obter as FRFs pontuais $H_{II}(\omega, \mathbf{p})$ associadas ao deslocamento transversal do ponto I , escolhido arbitrariamente, e indicado na Fig. 3.1(b). \mathbf{p} indica o vetor contendo os parâmetros de projeto. Além disso, as FRFs foram computadas com um modelo reduzido utilizando-se a seguinte base de redução constante: $T_1 = [\phi_0 \quad \mathbf{R}]$ (15 autovalores ϕ_0 , mais um vetor residual \mathbf{R} calculado de acordo com a Eq. (22)).

A Fig. 4 ilustra as amplitudes da função de resposta em frequência da estrutura composta laminada contendo amortecimento inerente, mostrando as quatro primeiras frequências naturais da placa. Na mesma figura é mostrado as amplitudes da FRF da estrutura sem considerar o efeito do amortecimento. Nota-se que a consideração do amortecimento inerente da estrutura é bastante relevante em termos da atenuação dos níveis de vibração correspondentes aos picos de ressonância.

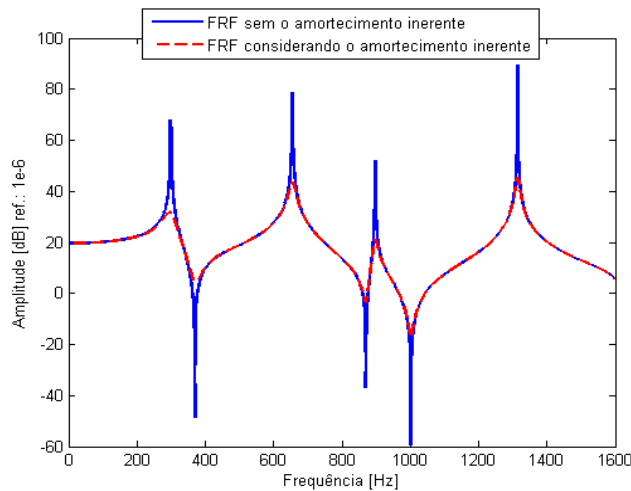


Figura 4 – FRFs da placa composta laminada com e sem amortecimento inerente.

5.2. Placa composta laminada contendo amortecimento viscoelástico

Na segunda aplicação numérica tem-se uma placa composta laminada do tipo sanduíche, formada por quatro camadas de material compósito e um núcleo de material viscoelástico do tipo 3M ISD112[®] (densidade $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$), conforme ilustra a Fig. 5, cuja expressão do módulo complexo é definida pela Eq. (8).

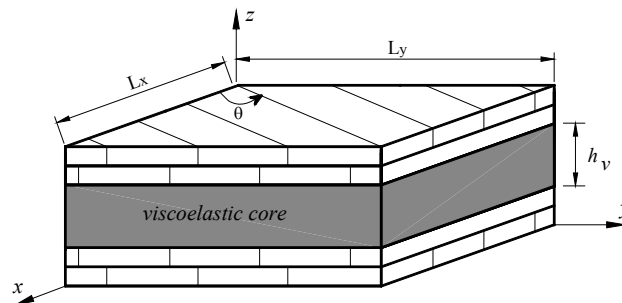


Figura 5 – Ilustração de uma placa sanduíche com núcleo viscoelástico.

A discretização por elementos finitos, as características geométricas e as condições de contorno da placa composta sanduíche são as mesmas utilizadas no exemplo da seção anterior. Para este caso, a espessura da camada viscoelástica é adotada como sendo $h_v = L_x/128$, e a temperatura do material viscoelástico é 25°C . Além disso, tem-se o interesse em verificar a base de condensação constante para estruturas amortecidas viscoelasticamente conforme descrito na Seção 4, através do uso de uma base de condensação composta por resíduos estáticos associados aos esforços externos e as forças viscoelásticas. O cálculo consiste na obtenção das FRFs pontuais associadas ao ponto I indicado na Fig. 3.1(b). Para verificar a condensação direta, serão utilizadas três bases de condensação, a saber: $T_1 = [\phi_0]$ (60 autovetores); $T_2 = [\phi_0 \ R]$ (60 autovetores, mais um vetor residual calculado de acordo com Eq. (22)); $T_3 = [\phi_0 \ R \ R_v^0]$ (60 autovetores, um vetor residual calculado pela (22), 54 vetores residuais computados de acordo com a definição (23)). Os resíduos R_v^0 foram calculados considerando-se os maiores valores singulares, para o qual a relação $\sigma_1/\sigma_i \leq 1 \times 10^5$, onde $i = 1$ a 60 é adotada.

As Figs. 6 (a), (b) e (c) ilustram as amplitudes das FRFs computadas para as três bases de redução, comparadas com as amplitudes das FRFs utilizando-se uma base de referência formada por um grande número de autovetores (100) e vetores residuais (100). Pode-se notar que a precisão e representatividade do modelo reduzido são continuamente aumentadas após o enriquecimento sucessivo da base de redução pela inclusão dos vetores residuais que levam em conta os esforços externos e os efeitos do amortecimento viscoelástico, para formarem as bases T_2 e T_3 .

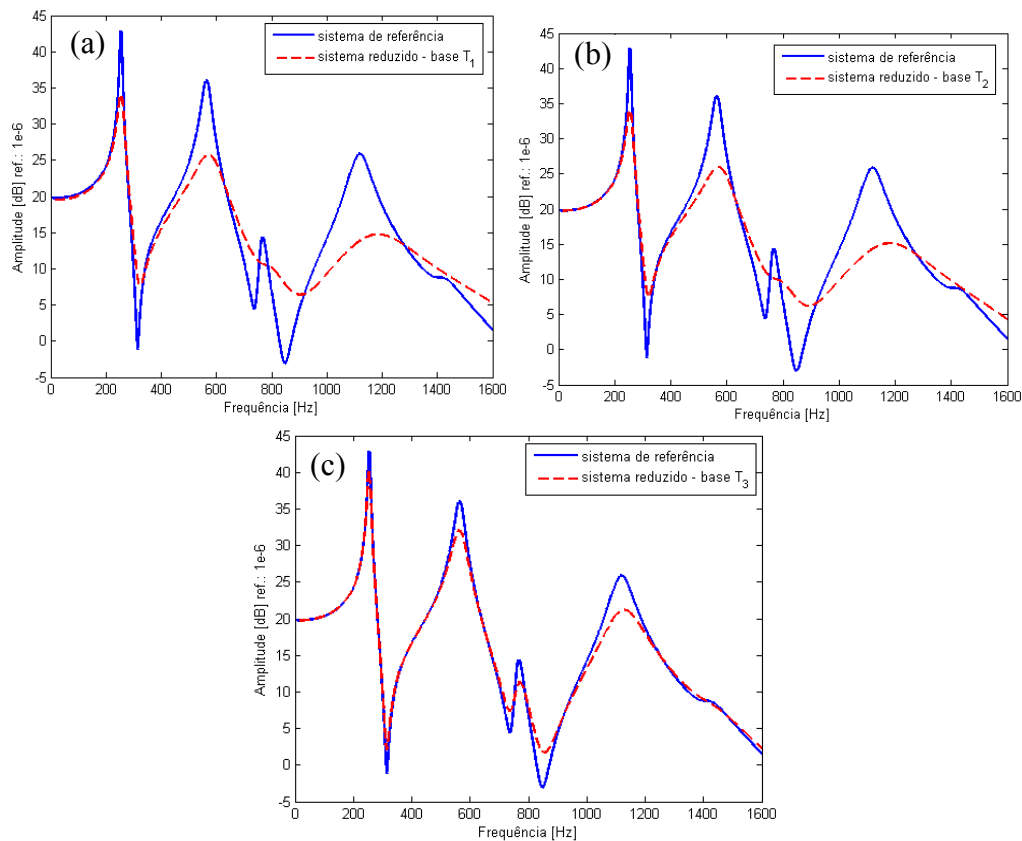


Figura 6 – FRFs dos sistemas de referência e reduzidos utilizando-se as bases de redução T_1 (a), T_2 (b) and T_3 (c).

6. CONCLUSÕES

De acordo com estudos previamente realizados e nos resultados apresentados neste artigo, pode-se concluir que os procedimentos de modelagem desenvolvidos mostraram-se eficientes para caracterizar o comportamento dinâmico de sistemas compostos laminados analisados, notadamente para representar a dependência das características dinâmicas dos materiais viscoelásticos em relação à frequência.

A parametrização do modelo demonstrou ser bastante útil obtendo um ganho de custo computacional. Além disso, uma vez o modelo parametrizado, a metodologia de condensação foi aplicada, a partir do qual foi construída uma base de redução independente da frequência de excitação e da temperatura para representar as respostas dinâmicas dos modelos nominais, com o objetivo de diminuir os custos computacionais envolvidos na geração das funções de respostas em frequência.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro, à Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI e ao Programa de Pós-Graduação da UNIFEI, à Faculdade de Engenharia Mecânica e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFU.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Balmès, E., Babillot, A., 2002a, “Analysis and Design Tools for Structures Damped by Viscoelastic Materials”, International Modal Analysis Conference (IMAC)
- Balmès, E., Germès, S., 2002b, “Tools for Viscoelastic Damping Treatment Design: Application to an Automotive Floor Panel”, Proceedings of the 28th International Seminar on Modal Analysis (ISMA), Leuven, Belgium.
- Berthelot, J. M. Matériaux, 1992, “Composites: Comportement Mécanique et Analyse des Structures.”, Paris: Masson.
- Chee, C.; Tong, L.; Steven, G. P., 2001, “Static Shape Control of Composite Plates Using a Curvature-displacement Based Algorithm”, International Journal of Solid and Structures, v. 38, p. 6381-6403, 2001.
- Correia, V. M. F. Gomes; M. A. A., Suleman, A.; Soares, C. M. M.; Soares, C. A. M., 2000, “Modelling and Design of Adaptive Composite Structures”, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. v. 185, p. 325-346.
- Crandall, S. H.; 1970, “The role of damping in vibration theory, Journal of Sound and Vibration”, Vol. 11(1), pp. 3-18.
- de Lima, A. M. G., 2003, “Procedimentos de Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Elementos Viscoelásticos Aplicado ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas” Dissertação (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.
- de Lima, A.M.G., Ait Brik, B., Bouhaddi, N., Rade, D.A., 2006c, “Multi-objective Optimization of Viscoelastically Damped Systems Combining Robust Condensation and Metamodels”, Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology, Las Palmas de Gran Canaria, Spain.
- de Lima, A. M. G.; Diacenco, A. A.; Côrrea, E. O., 2009, . “Finite Element Modeling of Composite Sandwich Plates with Viscoelastic Layers.”, In: 20th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), Gramado, RS.
- de Lima, A. M.G. ; Faria, A. W. ; Rade, D. A., 2010, . “Sensitivity Analysis of Frequency Response Functions of Composite Sandwich Plates Containing Viscoelastic Layers.”, Composite Structures, v. 92, p. 364-376.
- Diacenco, A. A. 2010, “Modelagem por Elementos Finitos de Materiais Compósitos Estruturais Incorporando Material Viscoelástico para o Controle Passivo de Vibração e Ruído”, Dissertação (Engenharia de Materiais) – Universidade Federal de Itajubá.
- Drake ML, Soovere J. A , 1984, “Design Guide for Damping of Aerospace Structures.”, In: Vibration damping workshop proceedings, AFWAL-TR-84-3064, Air Force Wright Aeronautical Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, VV- 1-VV-10.
- Faria, A.W., 2006, “Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica”, 152f. Dissertação (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.
- Faria, A. W. ; Lima, A. M. G. ; Rade, R. S. L. ; Rade, D. A., 2008, “Avaliação Numérica por Elementos Finitos do Amortecimento em Materiais Compostos Laminados.”, In: V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Salvador. Anais do V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica.
- Huebner KH, Thornton EA., 1982, “The Finite Element Method for Engineers”, New York: John Wiley & Sons.
- Lo, K. H; Christensen, R. M.; WU, E. M. A., 1977, “High Order Theory of Plate Deformation - Part 1: Homogeneous Plates”, Journal of Applied Mechanics. v. 44, p. 663-668.
- Mendonça, P. T. R., 2005, “Materiais Compostos & Estruturas - Sanduíche: Projeto e Análise”, 1.ed. Manole.
- Reddy, J. N., 1997, “Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis”, 2.ed. Florida: CRC Press.

9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

REDUCTION METHODS OF LAMINATED COMPOSITE STRUCTURES INCORPORATING VISCOELASTIC LAYERS

Adriana Amaro Diacenco, adriana_aadiacenco@yahoo.com.br¹
Antônio Marcos Gonçalves de Lima, amglima@mecanica.ufu.br²
Edmilson Otoni Côrrea, ecotoni@unifei.edu.br¹

¹Federal University of Itajubá, Mechanical Engineering Institute, Campus José Rodrigues Seabra, P.O.BOX 50, CEP 37500-903, Itajubá-MG, Brazil.

²Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering, Campus Santa Mônica, P.O.BOX 593, CEP 38400-902, Uberlândia-MG, Brazil.

Abstract: *This work is devoted to the numerical evaluation of the laminated composite structures incorporating viscoelastic layers, with emphasis on the reduction methods applied to rectangular composite sandwich plates with viscoelastic layers in order to reduce the computational effort required to compute the dynamic responses of the systems. The Higher-order Shear Deformation Theory (HSDT) combined with a 8-node rectangular Serendipity plate element is used. The viscoelastic damping is introduced on the model through the complex modulus approach associated with the concepts of shift factor and reduced frequency, based on the Frequency-Temperature Correspondence Principle. The numerical results obtained are compared with the corresponding obtained for a composite plate without damping, and the usefulness of the reduction modeling methodology in various types of analyses and design of large-scale laminated composite with viscoelastic damping is highlighted*

Keywords: Composite Materials, Viscoelastic damping, Finite elements, Passive control