

MODELAGEM DE UM SISTEMA DE POSICIONAMENTO COM FOLGA E ATRITO SECO

Maurício Gruzman, maurgruzman@hotmail.com¹
Hans Ingo Weber, hans@puc-rio.br¹
Luciano Luporini Menegaldo, lmeneg@ime.eb.br²

¹Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. R. Marquês de São Vicente 225, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

²Instituto Militar de Engenharia. Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo: Este trabalho apresenta a modelagem dinâmica no domínio do tempo de um sistema de posicionamento em malha fechada atuado por um motor CC com redutor. Devido à utilização do redutor surgem folga e flexibilidade entre o rotor do motor e o elo atuado. Além disso, o redutor gera um torque de atrito adicional no sistema, que precisa ser compensado pelo motor. Tais imperfeições causam prejuízos significativos ao desempenho do controlador, por isso em uma simulação realista é fundamental incluir seus efeitos. A modelagem será realizada no domínio do tempo, isso permite utilizar modelos adequados de folga e atrito seco. Além disso, outras limitações como saturação e atrasos de tempo para atualização do sinal de controle podem ser implementados com relativa simplicidade. Por fim são apresentados resultados de simulações numéricas onde se evidencia os efeitos da folga e atritos seco no desempenho do controlador do sistema.

Palavras-chave: controle, folga, atrito seco, simulação

1. INTRODUÇÃO

A modelagem computacional é uma poderosa ferramenta para se prever o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos. Assim, muitos engenheiros optam em realizar simulações para verificar se o projeto atende aos objetivos requeridos antes de partir para a construção do mecanismo. No entanto, se a modelagem for feita de forma inadequada, desprezando-se imperfeições existentes em sistemas reais, pode haver grande divergência entre o comportamento previsto nas simulações e o que ocorre com o sistema real. Este trabalho aborda a modelagem dinâmica no domínio do tempo de sistemas de posicionamento angular em malha fechada, de um único eixo, compostos por um motor de corrente contínua de ímã permanente conectado a uma carga por meio de um redutor. É bastante comum encontrar na literatura trabalhos onde os autores modelam tal sistema considerando rígido o acoplamento entre o rotor e a carga, ignorando assim folgas, flexibilidade e amortecimento estrutural do redutor. Além disso, os torques de atrito seco são desprezados. Outros autores utilizam modelos complexos de atrito seco (Dupont et al, 2002, Lampaert et al. 2002) ou de redutores, em que se incluem as características mecânicas de cada engrenagem, bem como as forças de atrito que atuam entre cada par de engrenagens (Kahraman et al., 2007, Atanasiu, 2008). Neste trabalho propõe-se uma solução intermediária, onde os efeitos de atrito seco, folga e flexibilidade são incluídos no modelo de forma simplificada, considerando-se apenas dois corpos no sistema, o rotor e a carga. As inércias das engrenagens são desprezadas, porém considera-se um folga, flexibilidade e amortecimento estrutural resultantes no redutor. Além dos torques de atrito seco presentes na carga e rotor, modela-se também os torques de atrito seco presentes no redutor.

2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Desprezando as inércias das engrenagens que compõe o redutor e considerando que o rotor e a carga encontram-se estaticamente balanceados, têm-se as seguintes equações de movimento para o sistema:

$$\begin{aligned} J_{rotor} \ddot{\theta}_{rotor} &= T_{ele} + T_{acopl,rotor} + T_{av,rotor} + T_{as,rotor} \\ J_{carga} \ddot{\theta}_{carga} &= T_{acopl,carga} + T_{av,carga} + T_{as,carga} \end{aligned} \quad (1)$$

onde, J é o momento de inércia axial, θ o deslocamento angular, T_{ele} o torque eletromotriz, T_{acopl} o torque devido ao acoplamento rotor/carga, T_{av} o torque de atrito viscoso e T_{as} o torque de atrito seco.

2.1. Torques de atrito viscoso

Os torques de atrito viscoso que atuam no sistema são dados por:

$$T_{av,rotor} = -c_{rotor} \dot{\theta}_{rotor} \quad \text{e} \quad T_{av,carga} = -c_{carga} \dot{\theta}_{carga} \quad (2)$$

onde c_{rotor} e c_{carga} são os coeficientes de atrito viscoso nos eixos do rotor e da carga, respectivamente.

2.2. Torque eletromotriz

Este torque, que atua apenas no rotor, é dado por:

$$T_{ele} = k_m i \quad (3)$$

onde, k_m é a constante de torque do motor e i é a corrente na armadura, cujo valor provém da integração da Eq. (4).

$$\frac{di}{dt} = \frac{u - Ri - k_b \dot{\theta}_{rotor}}{l} \quad (4)$$

onde, R , l e k_b são, respectivamente, a resistência da armadura, a indutância da armadura e a constante de força contra-eletromotriz do motor. A voltagem fornecida ao motor (u) é a variável de controle. Em sistemas reais é comum se utilizar limitadores de corrente para evitar danos ao motor e aos circuitos amplificadores de potência. Os limitadores impedem que a corrente assuma um valor menor do que um determinado limite inferior (i_{min}) ou maior do que um limite superior (i_{max}). Para incluir os efeitos dos limitadores nas equações diferenciais do sistema, basta igualar a zero a derivada primeira da corrente, dada pela Eq. (4), sempre que se observarem simultaneamente as seguintes condições:

$$\left(i \geq i_{max} \right) \text{ e } \left(\frac{u - k_b \dot{\theta}_{rotor}}{R} \geq i_{max} \right), \text{ ou, } \left(i \leq i_{min} \right) \text{ e } \left(\frac{u - k_b \dot{\theta}_{rotor}}{R} \leq i_{min} \right) \quad (5)$$

2.3. Torques devido ao acoplamento

O torque entre o rotor e a carga é afetado pela folga presente no redutor. Quando a carga estiver passando pela folga este torque é zero. O método apresentado em (Nordin e Gutman, 2000 e Lagerberg e Egardt, 2002) será utilizado para modelar a folga, bem como a rigidez e amortecimento estruturais resultantes no redutor. No referido modelo, apenas dois elementos com inércia não nula são considerados. O primeiro possui a inércia do rotor e o segundo a inércia da carga. Neste trabalho as inércias das engrenagens serão desprezadas, embora seja possível incluí-las, por exemplo, no rotor, calculando-se as inércias equivalentes de cada engrenagem no mesmo. Considera-se também um eixo sem inércia, entre a redução e a carga, com coeficientes de rigidez estrutural resultante k_s e de amortecimento estrutural resultante c_s . A folga total é dada por 2η , conforme se observa na Fig. (1). Em (Baek et al., 2003) mostra-se como calcular os parâmetros mencionados para um sistema composto por um atuador, carga e redutor contendo mais de uma engrenagem. A taxa de redução é dada por:

$$N = \frac{\theta_{rotor}}{\theta_1} \quad (6)$$

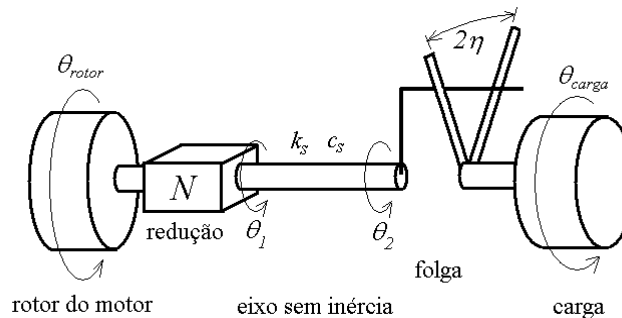


Figura 1. Modelo de redutor com folga, flexibilidade estrutural e amortecimento estrutural

O torque no eixo sem inércia é dado por:

$$T_E = k_s(\theta_d - \theta_b) + c_s(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_b) \quad (7)$$

onde $\theta_b = \theta_2 - \theta_{carga}$ e $\theta_d = \theta_1 - \theta_{carga} = \frac{\theta_{rotor}}{N} - \theta_{carga}$

O ângulo de folga é θ_b e pode ser obtido pela integração de $\dot{\theta}_b$, que é dado pela Eq. (8). Repare que se acrescentou uma nova variável de estado ao sistema.

$$\dot{\theta}_b = \begin{cases} \max\left(0, \dot{\theta}_d + \frac{k_s}{c_s}(\theta_d - \theta_b)\right) & \text{se } \theta_b = -\eta \\ \dot{\theta}_d + \frac{k_s}{c_s}(\theta_d - \theta_b) & \text{se } |\theta_b| < \eta \\ \min\left(0, \dot{\theta}_d + \frac{k_s}{c_s}(\theta_d - \theta_b)\right) & \text{se } \theta_b = \eta \end{cases} \quad (8)$$

Os torques de acoplamento no rotor e na carga são dados por:

$$T_{acopl,rotor} = -\frac{T_E}{N} \quad (9)$$

$$T_{acopl,carga} = T_E \quad (10)$$

2.4. Torques de atrito seco

Devido à dificuldade em se modelar o atrito seco, muitos autores desprezam-no, ou fazem uso do modelo de Coulomb (Baek et al., 2003), que é bastante simples, pois considera que o torque de atrito é sempre constante e opõe-se ao sentido do movimento do corpo. Entretanto, este modelo além de gerar dificuldades na integração das equações de movimento (Piedbceuf and Carufel, 2000) possui uma inconsistência física, pois considera que o módulo do torque de atrito seco possui um único valor quando o corpo se move e, quando o corpo não está em movimento, assume-se que o torque de atrito seco é igual a zero. Porém quando o corpo não se encontra em movimento e há torques atuando sobre ele, o torque de atrito seco deve-se igualar à resultante dos demais torques aplicados. Para se realizar, então, uma modelagem mais realista, muitos autores optam em utilizar modelos mais complexos para o atrito seco como o se observa em (Dupont et al., 2002, Lampaert et al., 2002). No entanto, tais modelos dependem de parâmetros empíricos que são difíceis de serem estimados. Assim, optou-se em utilizar neste trabalho uma metodologia similar a utilizada em (Piedbceuf e Carufel, 2000), que apesar de menos complexa, não traz as deficiências mencionadas do modelo de Coulomb.

No modelo utilizado, os únicos parâmetros que devem ser conhecidos são o torque de atrito seco dinâmico ($T_{as/din}$) e o valor máximo do torque de atrito seco estático ($T_{as/est/max}$). Ambos podem ser obtidos com experimentos simples conforme demonstrado em (Piedbceuf e Carufel, 2000). Durante a simulação numérica deve-se verificar, antes de cada passo de integração, se o corpo está deslizando (“slip”) ou grudado (“stick”) de modo a se definir se será utilizado o torque de atrito dinâmico ou estático, como será explicado a seguir, utilizando-se como exemplo as equações de movimento do rotor. A análise para a equação da carga é idêntica.

Se em um determinado instante da simulação $\dot{\theta}_{rotor} \neq 0$, o torque de atrito seco no rotor será dado por:

$$T_{as,rotor} = -T_{as/din,rotor} \cdot \text{sign}(\dot{\theta}_{rotor}) \quad (11)$$

onde, *sign* é uma função que retorna o sinal de uma variável.

Se a velocidade angular do rotor for igual à zero, mas o módulo da soma dos demais torques que atuam no rotor ($|T_{demais\ torques,rotor}|$), excluindo o torque de atrito seco, for maior do que $T_{as/est/max,rotor}$ então o torque de atrito seco no rotor será dado pela Eq. (12). Para se obter $T_{demais\ torques,rotor}$ utiliza-se a Eq. (13).

$$T_{as,rotor} = -T_{as/din,rotor} \cdot \text{sign}(T_{demais\ torques,rotor}) \quad (12)$$

$$T_{demais\ torques,rotor} = T_{ele} + T_{acopl,rotor} + T_{av,rotor} \quad (13)$$

Se $\dot{\theta}_{rotor} = 0$, mas $|T_{demais\ torques, rotor}| < T_{as/est/max, rotor}$ então o rotor está em “stick” e o torque de atrito seco será:

$$T_{as, rotor} = -T_{demais\ torques, rotor} \quad (14)$$

Deve-se, porém, ressaltar que não é conveniente considerar $\dot{\theta}_{rotor} = 0$ como uma condição de transição entre os regimes de “slip” e “stick”, pois durante a resolução numérica das equações diferenciais o zero absoluto nunca ocorre (exceto no início da simulação, caso a condição inicial de velocidade seja igual a zero). Além disso, observa-se em experimentos que o deslizamento cessa abruptamente abaixo de uma velocidade angular mínima (v_{min}). Assim, considera-se que o corpo está em “stick” sempre que o módulo de $\dot{\theta}_{rotor}$ for inferior a $v_{min, rotor}$ e o módulo de $T_{demais\ torques, rotor}$ for inferior a $T_{as/est/max, rotor}$. Em seguida, um termo de amortecimento numérico ($T_{numérico}$) deve ser adicionado ao torque de atrito estático para eliminar a velocidade angular residual do rotor. Utiliza-se então a Eq. (15) e não a Eq. (14).

$$T_{as, rotor} = -T_{demais\ torques, rotor} + T_{numérico, rotor} \quad (15)$$

onde:

$$T_{numérico, rotor} = -c_{numérico, rotor} \dot{\theta}_{rotor} \quad (16)$$

Piedbceuf e Carufel (2000) propõem a utilização do seguinte coeficiente de amortecimento numérico ($c_{numérico}$):

$$c_{numérico, rotor} = \frac{\mu_{rotor}}{v_{min, rotor}} \cdot T_{as/est/max, rotor} \quad (17)$$

onde μ_{rotor} é uma constante cujo valor deve ser escolhido de modo que $J_{rotor}/c_{numérico, rotor}$ seja razoavelmente maior do que o tamanho mínimo do passo de integração da rotina numérica de resolução das equações diferenciais do sistema.

Reescrevendo, de forma sucinta, o método para calcular o torque de atrito seco no rotor:

$$se \begin{cases} |\dot{\theta}_{rotor}| \geq v_{min, rotor} \Rightarrow T_{as, rotor} = -T_{as/din, rotor} \cdot sign(\dot{\theta}_{rotor}) \\ |\dot{\theta}_{rotor}| < v_{min, rotor} \ e \ |T_{demais\ torques, rotor}| > T_{as/est/max, rotor} \Rightarrow T_{as, rotor} = -T_{as/din, rotor} \cdot sign(\dot{\theta}_{rotor}) \\ |\dot{\theta}_{rotor}| < v_{min, rotor} \ e \ |T_{demais\ torques, rotor}| < T_{as/est/max, rotor} \Rightarrow T_{as, rotor} = -T_{demais\ torques, rotor} + T_{numérico, rotor} \end{cases} \quad (18)$$

De forma análoga, o torque de atrito seco na carga é obtido conforme a Eq. (19).

$$se \begin{cases} |\dot{\theta}_{carga}| \geq v_{min, carga} \Rightarrow T_{as, carga} = -T_{as/din, carga} \cdot sign(\dot{\theta}_{carga}) \\ |\dot{\theta}_{carga}| < v_{min, carga} \ e \ |T_{demais\ torques, carga}| > T_{as/est/max, carga} \Rightarrow T_{as, carga} = -T_{as/din, carga} \cdot sign(\dot{\theta}_{carga}) \\ |\dot{\theta}_{carga}| < v_{min, carga} \ e \ |T_{demais\ torques, carga}| < T_{as/est/max, carga} \Rightarrow T_{as, carga} = -T_{demais\ torques, carga} + T_{numérico, carga} \end{cases} \quad (19)$$

onde:

$$T_{demais\ torques, carga} = T_{acopl, carga} + T_{av, carga} \quad (20)$$

$$T_{numérico, carga} = -c_{numérico, carga} \dot{\theta}_{carga} \quad (21)$$

$$c_{numérico, carga} = \frac{\mu_{carga}}{v_{min, carga}} \cdot T_{as/est/max, carga} \quad (22)$$

Até agora foram modelados os torques de atrito seco no rotor e na carga. Não se mencionou a influência do torque de atrito seco presente no redutor. Para se obter um modelo preciso deste torque seria necessário modelar cada engrenagem que compõe o redutor, sendo necessário conhecer diversos de seus parâmetros (materiais, coeficientes de atrito, lubrificantes, erros de montagem, erros de fabricação, etc) conforme se observa em (Kahraman et al., 2007,

Atanasiu, 2008). No entanto, é possível utilizar um método bastante simplificado, que permite utilizar o modelo de redutor apresentado no item 2.3, onde as inércias das engrenagens eram desprezadas e utilizaram-se coeficientes de rigidez e amortecimento estrutural resultantes para todo o mecanismo. O método consiste em se adicionar torques extras aos torques de atrito seco dinâmico ($T_{as/extra/din}$) e ao valor máximo dos torques de atrito seco estático ($T_{as/extra/es/max}$) do rotor e da carga.

$$\begin{aligned}
 T_{as/din,rotor}(novo) &= T_{as/din,rotor} + T_{as/extra/din,rotor} \\
 T_{as/es,max,rotor}(novo) &= T_{as/es,max,rotor} + T_{as/extra/es,max,rotor} \\
 T_{as/din,carga}(novo) &= T_{as/din,carga} + T_{as/extra/din,carga} \\
 T_{as/es,max,carga}(novo) &= T_{as/es,max,carga} + T_{as/extra/es,max,carga}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Apesar de sua simplicidade, consegue-se representar um redutor de forma mais realista do que a feita no item 2.3, onde os atritos secos nos redutores não foram considerados.

Os torques adicionais dependem do sentido em que o redutor é girado, do valor de T_E e também do fato das folgas estarem sendo cruzadas ou não. Três situações distintas podem ocorrer, conforme se observa na Fig. 2.

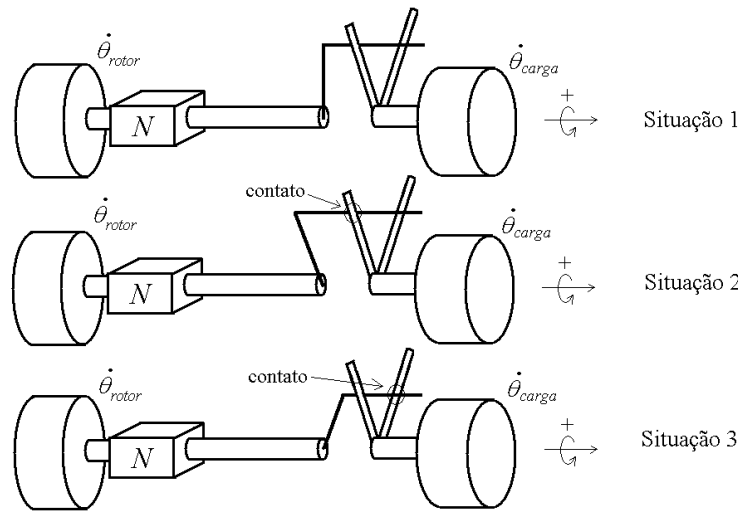


Figura 2. Situações possíveis (com contato ou sem contato)

A primeira situação corresponde à quando a carga ou o rotor estão passando pela folga. No modelo utilizado, o torque no eixo sem inércia (T_E) será igual à zero nesta situação, no entanto, não significa que não haverá torques de atrito seco no redutor. Na verdade, quando se tenta mover os eixos de entrada (lado do rotor) e saída (lado da carga) de um redutor (ver figura 3), quando a folga está aberta, percebe-se que há atrito seco em ambos os eixos. Neste trabalho, os torques correspondentes serão chamados de torques de atrito seco residuais ($T_{as/residual}$) e, na primeira situação, irão constituir os torques extras conforme a Eq. (24). Para se simular um sistema real pode-se obter os torques residuais experimentalmente, aplicando-se torques conhecidos nas extremidades do redutor (que deve estar desacoplado do motor e da carga).

$$\begin{aligned}
 T_{as/extra/din,rotor} &= T_{as/residual/din,lado\ do\ rotor} \\
 T_{as/extra/es,max,rotor} &= T_{as/residual/es/max,lado\ do\ rotor} \\
 T_{as/extra/din,carga} &= T_{as/residual/din,lado\ da\ carga} \\
 T_{as/extra/es,max,carga} &= T_{as/residual/es/max,lado\ da\ carga}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Já nas situações 2 e 3, o torque no eixo sem inércia é diferente de zero com isso, além dos torques acima mencionados, surgem torques de atrito proporcionais à T_E . Deve-se, ainda, observar que:

i) na situação 2, quando $\dot{\theta}_{rotor} > 0$ e $\dot{\theta}_{carga} \geq 0$ (ou quando $\dot{\theta}_{rotor} < 0$ e $\dot{\theta}_{carga} \leq 0$, na situação 3) o rotor está provocando uma rotação na carga. Neste caso, todos os torques de atrito seco devido ao redutor deverão ser adicionados aos torques de atrito seco do rotor. Os torques extras a serem adicionados ao rotor e a carga são dados, portanto, por:

$$\begin{aligned}
 T_{as/extra/din,rotor} &= T_{as/residual/din,lado\ do\ rotor} + \frac{T_{as/residual/din,lado\ da\ carga}}{N} + \frac{k_{din} \cdot |T_E|}{N} \\
 T_{as/extra/es,max,rotor} &= T_{as/residual/es,max,lado\ do\ rotor} + \frac{T_{as/residual/es,max,lado\ da\ carga}}{N} + \frac{k_{es/max} \cdot |T_E|}{N} \\
 T_{as/extra/din,carga} &= 0 \\
 T_{as/extra/es,max,carga} &= 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

onde, k_{din} é a constante de proporcionalidade entre o torque de atrito seco dinâmico e T_E , e, $k_{es/max}$ é a constante de proporcionalidade entre o valor máximo do torque de atrito seco estático e T_E .

As constantes de proporcionalidade acima podem ser estimadas experimentalmente com o redutor desacoplado do motor e da carga. Por exemplo, para se estimar $k_{es/max}$ pode-se aplicar torques conhecidos em cada uma das extremidades ($T_{Eixo\ Entrada}$ e $T_{Eixo\ Saída}$) mas sem que o redutor se mova.

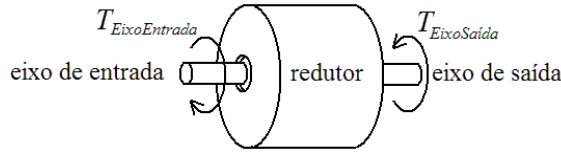


Figura 3. Experimento para estimar $k_{es/max}$.

Em seguida, vai-se aumentando o torque no eixo de entrada até que o redutor comece a se mover. Com os dados obtidos no instante imediatamente antes do movimento, e, conhecendo-se os torques residuais, bem como $T_{Eixo\ Entrada}$ e $T_{Eixo\ Saída}$, pode-se estimar $k_{es/max}$ com a Eq. (26):

$$|T_{EixoEntrada}| = \frac{|T_{EixoSaída}|}{N} + T_{as/residual/es,max,lado\ do\ rotor} + \frac{T_{as/residual/es,max,lado\ da\ carga}}{N} + \frac{k_{es/max} \cdot |T_{EixoSaída}|}{N} \tag{26}$$

Colocando $k_{es/max}$ no lado esquerdo, a Eq. (26) fica:

$$k_{es/max} = \frac{N}{|T_{EixoSaída}|} \left(|T_{EixoEntrada}| - \frac{|T_{EixoSaída}|}{N} - T_{as/residual/es,max,rotor} - \frac{T_{as/residual/es,max,carga}}{N} \right) \tag{27}$$

ii) na situação 2, quando $\dot{\theta}_{rotor} \leq 0$ e $\dot{\theta}_{carga} < 0$ (ou quando $\dot{\theta}_{rotor} \geq 0$ e $\dot{\theta}_{carga} > 0$, na situação 3) a carga está provocando uma rotação no rotor. Neste caso, todos os torques de atrito seco devido ao redutor deverão ser adicionados aos torques de atrito seco da carga. Os torques extras a serem adicionados ao rotor e a carga são dados, portanto, por:

$$\begin{aligned}
 T_{as/extra/din,rotor} &= 0 \\
 T_{as/extra/es,max,rotor} &= 0 \\
 T_{as/extra/din,carga} &= N \cdot T_{as/residual/din,rotor} + T_{as/residual/din,carga} + k_{din} \cdot |T_E| \\
 T_{as/extra/es,max,carga} &= N \cdot T_{as/residual/es,max,rotor} + T_{as/residual/es,max,carga} + k_{es/max} \cdot |T_E|
 \end{aligned} \tag{28}$$

iii) na situação 2, quando $\dot{\theta}_{rotor} \leq 0$ e $\dot{\theta}_{carga} \geq 0$ (ou quando $\dot{\theta}_{rotor} \geq 0$ e $\dot{\theta}_{carga} \leq 0$, na situação 3) nenhum dos dois corpos estará girando o redutor, assim nenhum deles recebe o torque extra de atrito seco do redutor:

$$T_{as/extra/din,rotor} = T_{as/extra/es,max,rotor} = T_{as/extra/din,carga} = T_{as/extra/es,max,carga} = 0 \tag{29}$$

iv) na situação 2, quando $\dot{\theta}_{rotor} > 0$ e $\dot{\theta}_{carga} < 0$ (ou quando $\dot{\theta}_{rotor} < 0$ e $\dot{\theta}_{carga} > 0$, na situação 3) deve-se realizar uma análise mais cuidadosa para se concluir a quem cabe o ônus de vencer o torque de atrito do redutor, pois os corpos estarão girando em sentidos opostos e ambos tentam girar o redutor. Uma possibilidade consiste em se dividir o torque de atrito entre os dois corpos proporcionalmente às velocidades angulares de cada um. Considerando:

$$\lambda_{rotor} = \frac{\frac{|\dot{\theta}_{rotor}|}{N}}{\frac{|\dot{\theta}_{rotor}|}{N} + |\dot{\theta}_{carga}|} \quad e \quad \lambda_{carga} = \frac{\frac{|\dot{\theta}_{carga}|}{N}}{\frac{|\dot{\theta}_{rotor}|}{N} + |\dot{\theta}_{carga}|} \quad (30)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} T_{as/extra/din,rotor} &= \left(T_{as/residual/din,lado\ do\ rotor} + \frac{T_{as/residual/din,lado\ da\ carga}}{N} + \frac{k_{din} \cdot |T_E|}{N} \right) \cdot \lambda_{rotor} \\ T_{as/extra/es,max,rotor} &= \left(T_{as/residual/es,max,lado\ do\ rotor} + \frac{T_{as/residual/es,max,lado\ da\ carga}}{N} + \frac{k_{es/max} \cdot |T_E|}{N} \right) \cdot \lambda_{rotor} \\ T_{as/extra/din,carga} &= \left(N \cdot T_{as/residual/din,lado\ do\ rotor} + T_{as/residual/din,lado\ da\ carga} + k_{din} \cdot |T_E| \right) \cdot \lambda_{carga} \\ T_{as/extra/es,max,carga} &= \left(N \cdot T_{as/residual/es,max,lado\ do\ rotor} + T_{as/residual/es,max,lado\ da\ carga} + k_{es/max} \cdot |T_E| \right) \cdot \lambda_{carga} \end{aligned} \quad (31)$$

3. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSIDERANDO ATRASO NO SINAL DE CONTROLE

O sistema resultante é composto por duas equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem, dadas pelas equações (4) e (8), e, duas EDO de segunda ordem, dadas pela Eq. (1). Para se ter um sistema de equações composto apenas por EDO de primeira ordem, faz-se a seguinte transformação de coordenadas $q_1 = \theta_{rotor}$, $q_2 = \theta_{carga}$, $q_3 = \dot{\theta}_{rotor}$ e $q_4 = \dot{\theta}_{carga}$. Com isso, a Eq. (1) fica:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_3 \\ \dot{q}_2 &= q_4 \\ J_{rotor} \dot{q}_3 &= T_{ele} + T_{acopl,rotor} + T_{av,rotor} + T_{as,rotor} \\ J_{carga} \dot{q}_4 &= T_{acopl,carga} + T_{av,carga} + T_{as,carga} \end{aligned} \quad (32)$$

Os torques de atrito seco devem ser calculados antes de cada passo de integração. Os torques de atrito viscoso são dados pela Eq. (2). O torque eletromotriz, dado pela Eq. (3), depende da corrente na armadura do motor, que é obtida pela integração da Eq. (4). As equações 2 e 4 podem ser re-escritas com as coordenadas introduzidas nesta seção:

$$T_{av,rotor} = -c_{rotor} q_3 \quad e \quad T_{av,carga} = -c_{carga} q_4 \quad (33)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{u - Ri - k_b q_3}{l} \quad (34)$$

Os torques $T_{acopl,rotor}$ e $T_{acopl,carga}$ são dados pelas equações 9 e 10, computadas após a resolução da Eq. (7) que, por sua vez, depende do resultado da integração da Eq. (8). Com as condições iniciais $q_1(0)$, $q_2(0)$, $q_3(0)$, $q_4(0)$, $i(0)$ e $\theta_b(0)$, utiliza-se algum algoritmo para solução aproximada de EDO de primeira ordem (Ruggiero e Lopes, 1996). Deve-se utilizar passo de integração pequeno, devido à inclusão da folga e atrito seco no modelo, ambos altamente não lineares.

A tensão fornecida ao motor (u) é a variável de controle. Se for utilizado um controlador digital haverá um atraso na atualização do sinal de controle, dado por Δt . Este atraso corresponde ao tempo entre a aquisição de dados pelos sensores, processamento dos dados e cálculo da tensão de controle. Para que este atraso seja considerado na simulação não se deve atualizar a tensão na Eq. (34) a cada passo de integração e sim conforme o esquema apresentado a seguir:

- i) com os dados fornecidos pelos sensores, em um instante t , a tensão de controle é calculada;
- ii) as EDOs são integradas de t até $(t+\Delta t)$, utilizando uma tensão constate (zero order hold) calculada em $(t-\Delta t)$, (repare o atraso de Δt);
- iii) no instante $(t+\Delta t)$, com os dados fornecidos pelos sensores, novas tensões de controle são calculadas;
- iv) o processo de integração continua de $(t+\Delta t)$ até $(t+2\Delta t)$, utilizando uma tensão constate calculada em t (novamente um atraso de Δt);
- v) o processo é repetido até o instante final da simulação.

4. SINAL DE CONTROLE

Considerando que a tensão de controle é obtida por um controlador PID (Ogata, 2003), tem-se que:

$$u = k_p \cdot e + k_i \cdot \int e \cdot dt + k_d \cdot \dot{e}, \text{ onde } e = \theta_{\text{carga desejado}} - \theta_{\text{carga}} \quad (35)$$

Na Eq. (35), k_p , k_i e k_d são os ganhos dos termos proporcional, integral e derivativo, respectivamente. O ângulo desejado para a carga é $\theta_{\text{carga desejado}}$. No entanto, como está se considerando um controlador digital nas simulações, obtém-se u pela Eq. (36). Será considerado, ainda, um limite superior (u_{max}) e inferior (u_{min}) para a tensão de controle.

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + k_i \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau=t} e(\tau) \cdot \Delta t + k_d \cdot \frac{e(t) - e(t - \Delta t)}{\Delta t}, \text{ onde } e(t) = \theta_{\text{carga desejado}}(t) - \theta_{\text{carga}}(t) \quad (36)$$

5. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

A seguir serão apresentados os resultados de seis simulações numéricas. Em todas elas utilizam-se os seguintes parâmetros:

- i) do motor e da carga: $J_{\text{rotor}} = 0,000001 \text{ kg m}^2$; $J_{\text{carga}} = 0,001 \text{ kg m}^2$; $c_{\text{rotor}} = 0,00003 \text{ kg m}^2/\text{rad s}$; $c_{\text{carga}} = 0,0001 \text{ kg m}^2/\text{rad s}$; $k_m = k_b = 0,0045 \text{ V/rad/s}$; $R = 2,84 \Omega$; $l = 0,001 \text{ H}$; $i_{\text{max}} = 4.5 \text{ A}$; $i_{\text{min}} = -4.5 \text{ A}$; $v_{\text{min,rotor}} = v_{\text{min,carga}} = 0.0001 \text{ rad/s}$;
- ii) do redutor: $N=127$; $k_s=3000 \text{ Nm/rad}$; $c_s=2 \text{ Nms/rad}$;
- iii) do controlador: $k_p = 50$; $k_d = 0$; $k_i = 500$; $u_{\text{max}} = 12\text{V}$; $u_{\text{min}} = -12\text{V}$; $\Delta t = 0,01 \text{ s}$; $\theta(t=0) = 0 \text{ rad}$; $\theta_{\text{carga desejado}} = 0,1 \text{ rad}$.

Na primeira simulação considera-se que não há atritos secos no sistema e a folga no redutor é muito pequena ($2\eta=0.0002 \text{ rad}$). Na segunda simulação acrescentam-se atrito seco no rotor e na carga. Na terceira simulação considera-se também atrito seco no redutor. Não se utiliza folga igual a zero nas três primeiras simulações pois isto impossibilitaria a inclusão dos torques de atrito seco no redutor conforme apresentado na seção 2.4. Na quarta, quinta e sexta simulações, utiliza-se, respectivamente os parâmetros das simulações 1,2 e 3, porém considera-se uma folga significativa no redutor ($2\eta=0.02 \text{ rad}$). Abaixo encontram-se os parâmetros que não são os mesmos para todas as simulações:

- i) na primeira simulação: $2\eta=0.0002\text{rad}$; $T_{\text{as/din,rotor}}=0$; $T_{\text{as/din,carga}}=0$; $T_{\text{as/es,max,rotor}}=0$; $T_{\text{as/es,max,carga}}=0$; $T_{\text{as/residual/din,lado do rotor}}=0$; $T_{\text{as/residual/din,lado da carga}}=0$; $T_{\text{as/residual/es,max,lado do rotor}}=0$; $T_{\text{as/residual/es,max,lado da carga}}=0$; $k_{\text{din}}=0$; $k_{\text{est/max}}=0$;
- ii) na segunda simulação: $2\eta=0.0002\text{rad}$; $T_{\text{as/din,rotor}}=0.0013\text{Nm}$; $T_{\text{as/din,carga}}=0.001\text{Nm}$; $T_{\text{as/es,max,rotor}}=0.0017\text{Nm}$; $T_{\text{as/es,max,carga}}=0.0012\text{Nm}$; $T_{\text{as/residual/din,lado do rotor}}=0$; $T_{\text{as/residual/din,lado da carga}}=0$; $T_{\text{as/residual/es,max,lado do rotor}}=0$; $T_{\text{as/residual/es,max,lado da carga}}=0$; $k_{\text{din}}=0$; $k_{\text{est/max}}=0$;
- iii) na terceira simulação: $2\eta=0.0002\text{rad}$; $T_{\text{as/din,rotor}}=0.0013\text{Nm}$; $T_{\text{as/din,carga}}=0.001\text{Nm}$; $T_{\text{as/es,max,rotor}}=0.0017\text{Nm}$; $T_{\text{as/es,max,carga}}=0.0012\text{Nm}$; $T_{\text{as/residual/din,lado do rotor}}=0.0008\text{Nm}$; $T_{\text{as/residual/din,lado da carga}}=0.0002$; $T_{\text{as/residual/es,max,lado do rotor}}=0.001\text{Nm}$; $T_{\text{as/residual/es,max,lado da carga}}=0.00025$; $k_{\text{din}}=0.01$; $k_{\text{est/max}}=0.008$;
- iv) na quarta, quinta e sexta simulações: mesmos parâmetros da primeira, segunda e terceira simulações, respectivamente, exceto o ângulo de folga ($2\eta=0.02 \text{ rad}$).

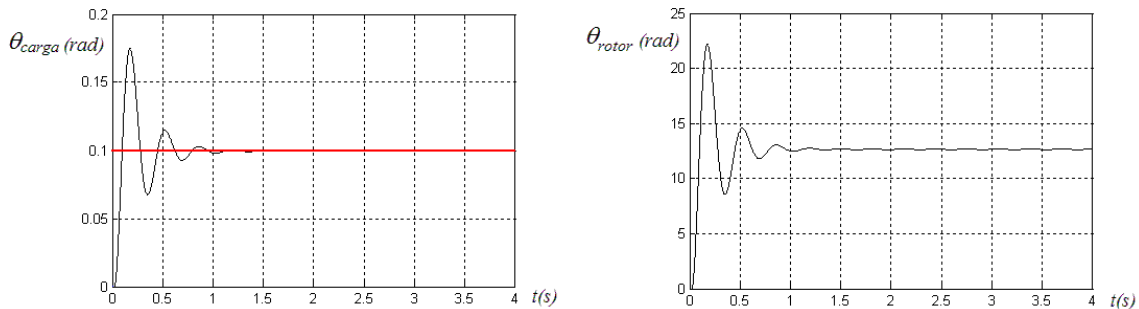


Figura 4. Resultados da primeira simulação: ângulos da carga e rotor em função do tempo.

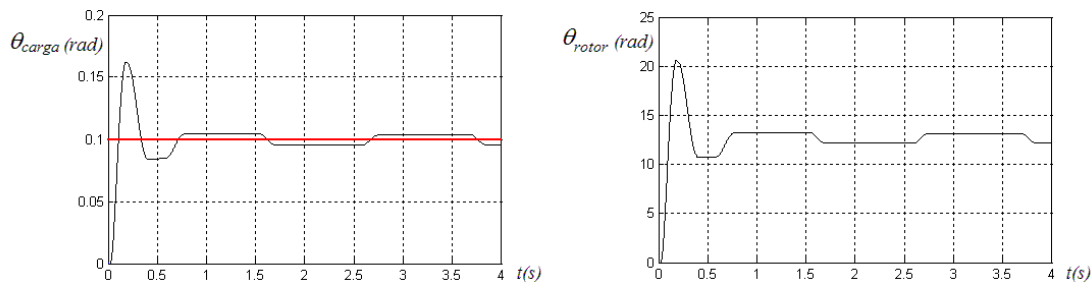


Figura 5. Resultados da segunda simulação: ângulos da carga e rotor em função do tempo.

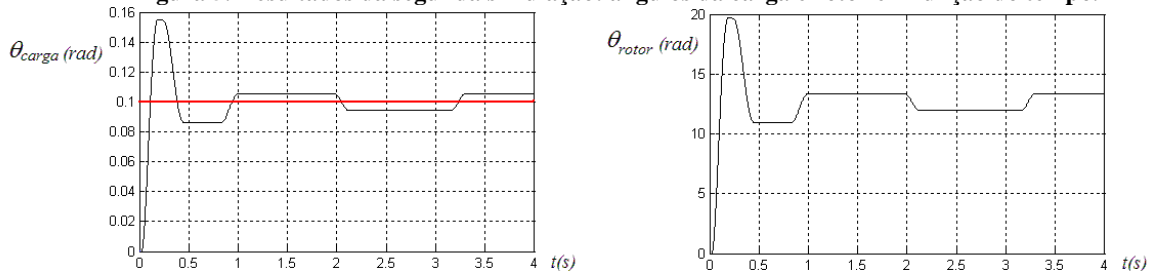


Figura 6. Resultados da terceira simulação: ângulos da carga e rotor em função do tempo

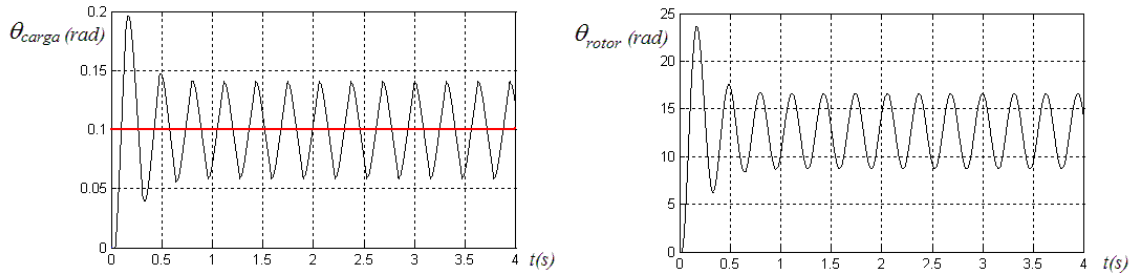


Figura 7. Resultados da quarta simulação: ângulos da carga e rotor em função do tempo

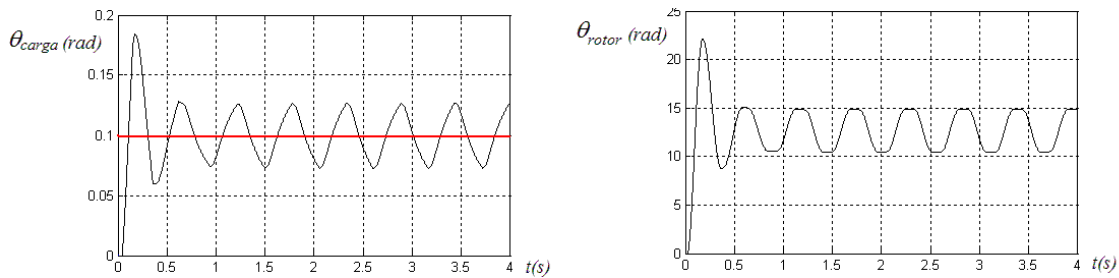


Figura 8. Resultados da quinta simulação: ângulos da carga e rotor em função do tempo

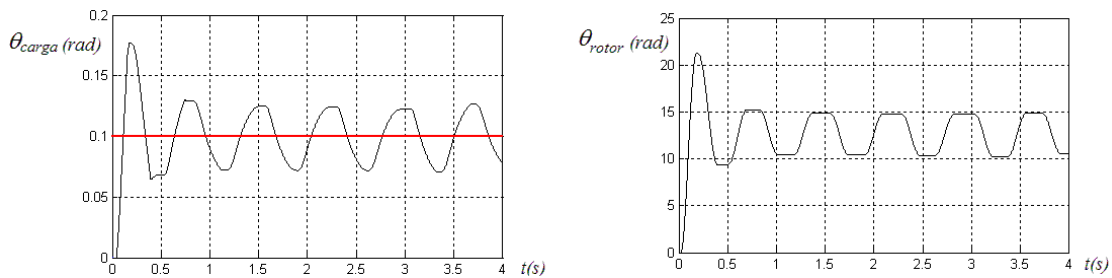


Figura 9. Resultados da sexta simulação: ângulos da carga e rotor em função do tempo

Observa-se que na primeira simulação (Fig. 4), devido à ausência de atrito seco e ao fato da folga ser desprezível, o controle leva a carga para o ângulo desejado (linha vermelha) em cerca de 1 segundo. Na segunda simulação (Fig. 5), observa-se que a combinação de atrito com o termo integral do controlador PID leva a ocorrência de um ciclo limite em torno do ângulo desejado. Deve-se salientar que se fosse utilizado um controlador proporcional não ocorreria o ciclo limite, no entanto a carga permaneceria no ângulo em que parasse pela primeira vez devido ao atrito seco. Na terceira simulação (Fig. 6) percebe-se que, devido à inclusão dos torques de atrito presentes no redutor, o sistema permanece maior tempo em “stick”. Nas três simulações seguintes, devido à folga significativa no redutor, ocorrem ciclos limites de amplitude e frequências claramente maiores. Com a folga maior, o atrito seco contribui de forma diferente para o ciclo limite, uma vez que reduz a amplitude e frequência das oscilações (no entanto, sem eliminá-las, devido à ação integral do controlador), pois reduz a diferença entre as velocidades angulares do rotor e da carga, quando esta cruza a folga.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se a modelagem de um sistema de posicionamento atuado por um motor de corrente contínua de imã permanente com um controlador PID. Entre o rotor e a carga há um redutor. Apresentaram-se metodologias para modelagem no domínio do tempo da folga no redutor, torques de atrito seco no rotor e na carga, bem como para o atraso no tempo de atualização do sinal de controle, presente em qualquer controlador digital. Desprezaram-se as inércias das engrenagens do redutor, no entanto foi apresentada uma metodologia para que a influência dos torques de atrito seco, sempre presentes nos redutores reais, pudesse ser incluída no modelo. Tais torques transmitem-se ora para o rotor, ora para a carga, ou para ambos, dependendo dos sentidos em que estes corpos giram. Por fim, apresentaram-se resultados de simulações numéricas. Apesar do trabalho não abordar a estimação de parâmetros do sistema, evidenciou-se que ocorrem diferenças significativas no desempenho quando se considera atrito seco e folgas, mostrando a necessidade de incluí-los no modelo quando se deseja uma simulação realista.

7. AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro.

8. REFERÊNCIAS

- Atanasiu, V., 2008, "An Analysis of Factors Affecting Dynamic Response of Gear Transmissions of Servomechanisms", Proceedings of the 4th International Conference on Robotics, Brasov, Romania, pp. 107-112.
- Baek, J.H., Kwak, Y.K. and Kim, S.H., 2003, "Backlash Estimation of a Seeker with Two-Stage Gear Reducers", International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 21, pp. 604-611.
- Dupont, P., Hayward, V., Armstrong, B. and Altpeter, F., 2002, "Single State Elastoplastic Friction Models", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 5, pp. 787-792.
- Kahraman, A., Lim, J. and Ding, H., 2007, "A Dynamic Model of a Spur Gear Pair with Friction", Proceedings of the 12th IFToMM World Congress, Besançon, France.
- Lagerberg, A. and Egardt, B., 2002, "Evaluation of Control Strategies for Automotive Powertrains with Backlash", Proceedings of the 6th International Symposium on Advanced Vehicle Control, Hiroshima, Japan.
- Lampaert, V., Swevers, J. and Al-Bender, F., 2002, "Experimental Comparison of Different Friction Models for Accurate Low-Velocity Tracking", Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation, Lisbon, Portugal.
- Nordin, M. and Gutman, P.O., 2000, "Non-linear Speed Control of Elastic Systems with Backlash", Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, pp. 4060-4065.
- Ogata, K., 2003, "Engenharia de Controle Moderno", 4^a Ed., Prentice-Hall, São Paulo, Brazil, 788 p.
- Ruggiero, M.A. and Lopes, V.L.R., 1996, "Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais", 2^a Ed., Makron Books do Brasil, São Paulo, Brazil, 406 p.

9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

MODELING OF A POSITIONING SYSTEM WITH BACKLASH AND DRY FRICTION

Maurício Gruzman, maurgruzman@hotmail.com¹

Hans Ingo Weber, hans@puc-rio.br¹

Luciano Luporini Menegaldo, lmeneg@ime.eb.br²

¹Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. R. Marquês de São Vicente 225, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

²Instituto Militar de Engenharia. Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

Abstract: *This work presents the dynamic modeling in time domain of a closed loop positioning system actuated by a DC motor with gear reduction. Due to the use of a gear reduction, backlash and flexibility arises between the motors rotor and the actuated link. Besides, the gear reduction causes an additional dry friction torque to the system, that must be compensated by the motor. These imperfections causes a significant impairment to the controllers performance. Therefore, in a realistic simulation, it is important to include their effects. The modeling is done in time domain, this permits the use of adequate backlash and dry friction models. Besides, other restrains as control signal saturation and time delays for its update can be implemented with relative simplicity. At last, results of numerical simulations are presented, where the effects of backlash and dry friction on the performance of the systems controller becomes evident.*

Keywords: *control, backlash, dryfriction, simulation*