

MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE UM ROTOR VERTICAL FLEXÍVEL SOB EFEITOS GIROSCÓPICOS E GRAVITACIONAIS

Agostini, C. E., cr.agostini@gmail.com¹
Capello Souza, E. A., capello@feb.unesp.br¹

¹Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Bauru, SP

Resumo: Neste trabalho, analisaram-se as frequências naturais e a velocidade crítica em um rotor vertical com um disco rígido na extremidade através da modelagem por elementos finitos. A modelagem matemática baseou-se na teoria de viga de Euler-Bernoulli considerando três deslocamentos e três rotações em cada nó. A equação que governa o movimento foi obtida através da formulação Lagrangeana. O modelo considerou os efeitos à flexão, torção e deformação axial do eixo, além dos efeitos giroscópicos e gravitacionais. O método dos elementos finitos foi utilizado para discretização da estrutura em elementos cilíndricos com 12 graus de liberdade. A partir das matrizes dos elementos obteve-se o sistema de equações globais que governa o movimento do rotor. As condições de contorno foram consideradas como eixo engastado na extremidade superior e livre na inferior, sendo que toda a massa do disco foi mantida concentrada na parte inferior do eixo. Para obtenção das frequências naturais do sistema rotativo considerou-se o caso de vibrações livres. O sistema a ser resolvido foi transformado para o espaço estado através da mudança de variável nas coordenadas generalizadas. A solução do sistema vibratório constituiu-se então em um problema de autovalores onde foram obtidas as frequências naturais de flexão, torção e axial para uma velocidade constante e conhecida de rotação. Como os efeitos giroscópicos foram considerados no modelo, tanto os autovalores quanto os autovetores dependem da velocidade de rotação. A dependência das frequências naturais em relação à velocidade de rotação foi representada através de diagramas de Campbell. Um programa de elementos finitos foi implementado no ambiente MATLAB para efetuar simulações numéricas e exibição dos diagramas de Campbell, frequências naturais diretas e retrógradas e velocidade crítica. O modelo foi validado através da literatura existente com resultados satisfatórios.

Palavras-chave: Elementos Finitos, Dinâmica de Rotores, Vibrações

1. INTRODUÇÃO

Máquinas rotativas são sistemas mecânicos que possuem várias aplicações, tais como: motores e geradores elétricos, turbinas hidráulicas, bombas, compressores, colunas de perfuração de poços entre outros. O comportamento dinâmico de um sistema mecânico deve ser analisado ainda na fase de projeto para que seja possível determinar se este terá um desempenho satisfatório ou não em sua condição de operação prevista. As frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração destes sistemas podem ser determinados de forma analítica, numérica ou experimental.

O estudo para máquinas rotativas, no entanto, exige uma análise mais cuidadosa e aprofundada, pois, o movimento de rotação do rotor influencia significativamente o comportamento dinâmico do sistema, tornando os parâmetros do modelo dependentes da rotação da máquina. O efeito giroscópico acopla os movimentos de rotação e, como se sabe, este é dependente da velocidade de rotação do rotor. Portanto, é de se esperar que as frequências naturais e os modos de vibração de uma máquina rotativa também dependam da velocidade angular do sistema. Neste caso surgem os chamados modos de precessão, onde os centros geométricos ou de massa de cada seção transversal do rotor, descrevem órbitas em torno da linha que os une. O rotor apresenta então um movimento de rotação que é a composição de duas respostas superpostas: a rotação do rotor em torno de si próprio e o movimento de rotação do eixo fletido em torno da sua configuração não defletida. A órbita pode ser descrita na mesma direção do movimento de rotação própria, constituindo-se no chamado modo de precessão direta, ou pode ter direção oposta, sendo denominado modo de precessão retrógrada, Souto (2000). Observa-se então que, na presença da matriz de efeito giroscópico, a velocidade de rotação própria do rotor afeta o valor das frequências naturais do sistema. Esse fato justifica a relação entre as frequências naturais de precessão e a rotação própria do rotor, representada pelo diagrama de Campbell. A forma anti-simétrica da matriz giroscópica implica em $2n$ frequências naturais distintas para cada velocidade de rotação do eixo,

uma maior e outra menor do que cada uma das n frequências naturais do sistema sem rotação, correspondendo em geral aos modos de precessão direta e retrógrada, Da Silva (2004).

Modelos matemáticos têm evoluído há décadas, e uma das ferramentas mais poderosas de análise numérica, o método dos elementos finitos (MEF), tem cumprido papel decisivo na investigação dos sistemas mecânicos rotativos. Dana (1987) em seu trabalho sobre rotores verticais, analisa um rotor vertical estacionário e através do MEF faz previsões de autovalores de sistemas rotativos e aborda os efeitos de precessão direta e retrógrada. Cordovil (1991) utiliza uma adaptação em um software já existente em MEF para análise de colunas de perfuração simples, incluindo análise não linear. Estes trabalhos, porém, não contemplam efeitos giroscópicos e gravitacionais na estrutura.

Colunas de perfuração de poços podem ser analisadas como um eixo rotativo vertical em balanço onde experimentam três tipos de vibrações: axial, torsional e lateral. Uma análise dinâmica global da coluna de perfuração geralmente é complicada, visto que os três tipos de vibrações citadas anteriormente podem estar presentes, assim como as disfunções associadas a cada tipo de vibração: precessão direta e retrógrada associada à vibração lateral, Stick-Slip associada à vibração torsional e Bit-Bounce associada à vibração axial, como visto na Fig. (1), Alamo (2003).

Axisa e Antunes (1990) apresentam um modelo dinâmico utilizando MEF que inclui os efeitos de flexão e torsão, mas estes são tratados de forma desacoplada. Dunayevsky et al. (1993) empregou o uso do MEF em um modelo para cálculo de características modais em colunas de perfuração, no entanto, o modelo limita-se a vibrações paramétricas de ressonância uniformemente distribuídas em vigas apoiadas sobre as extremidades. Neste caso, como nos trabalhos anteriores, as formulações não tratam dos efeitos giroscópicos e gravitacionais nas colunas.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA POR ELEMENTOS FINITOS

A presente formulação baseou-se nos trabalhos de: Alnaser (2002), Bazoune e Khulief (1992) e Khulief e Mohiuddin (1997); e considera as seguintes hipóteses: material elástico linear, homogêneo e isotrópico, rotor axissimétrico e, além disso, os deslocamentos se referem à linha do eixo central do elemento e o amortecimento da estrutura foi desconsiderado. A Fig. (1) ilustra o sistema de coordenadas adotado para a modelagem do sistema rotativo. Os eixos XYZ se referem ao sistema indeformado e os eixos xyz ao sistema após a deformação do elemento.

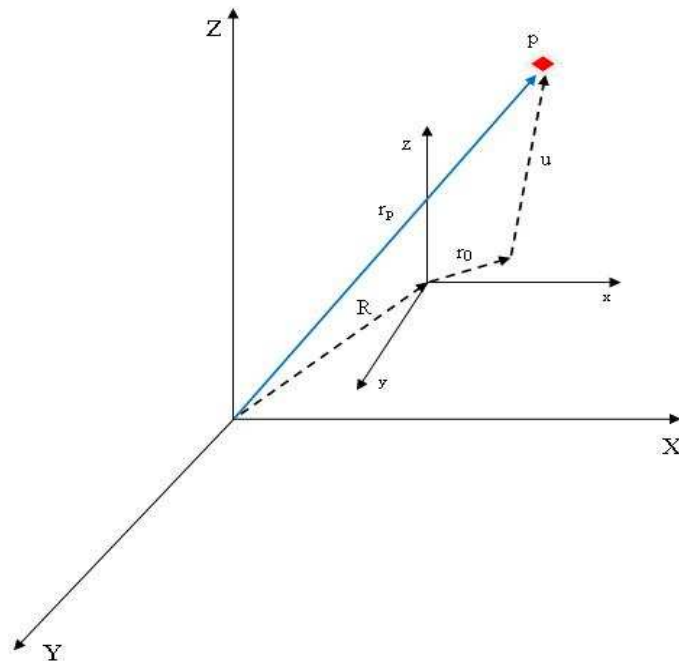


Figura 1. Sistema de coordenadas generalizadas.

O sistema de coordenadas xyz é rotacionado em relação ao sistema XYZ conforme o conjunto de ângulos exibido na Fig. (2), onde a orientação geral da seção transversal do elemento de viga pode ser obtida através da rotação em torno do eixo X com o ângulo ϕ , depois por um ângulo θy em torno do novo eixo y_1 e posteriormente por um ângulo θz em torno do eixo final z_2 .

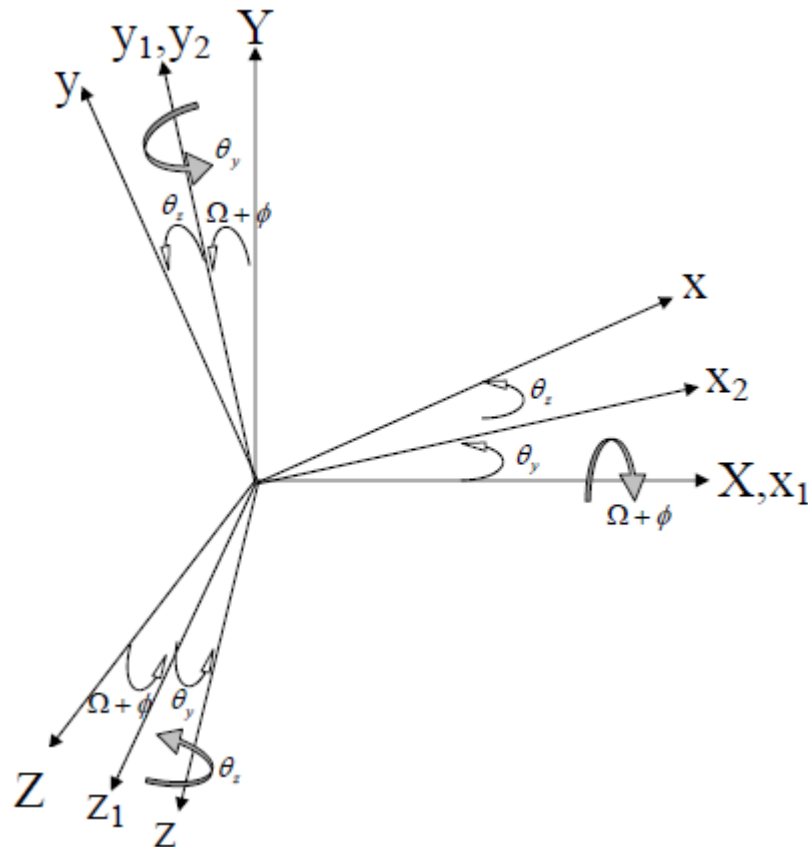


Figura 2. Sistema de eixos em rotação nas coordenadas generalizadas.

A velocidade angular instantânea ω com relação ao sistema de coordenadas xyz pode ser vista na Eq. (1).

$$\omega = \dot{\varphi} i + \dot{\theta}_y j_1 + \dot{\theta}_z k_2 \quad (1)$$

Onde: i , j_1 e k_2 são os vetores unitários ao longo dos eixos x, y_1 e z_2 .

Transformando a Eq. (1) para o sistema de coordenadas XYZ e assumindo pequenos ângulos para θ_y e θ_z temos:

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\theta}_z \theta_y \\ \dot{\theta}_y \cos \varphi - \dot{\theta}_z \sin \varphi \\ \dot{\theta}_z \cos \varphi + \dot{\theta}_y \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Adotando p, visto na Fig. (1), como sendo um ponto qualquer na posição indeformada da viga e definindo o vetor r_p com relação ao sistema de coordenada global XYZ temos:

$$r_p = R + r_0 + u \quad (3)$$

Onde u representa a deformação do vetor no ponto p. Utilizando a análise por elementos finitos, pode-se escrever u como na Eq. (4).

$$u = [N_t]\{e\} \quad (4)$$

Onde $[N_t]$ é a matriz função de forma para o elemento de viga 3D e o vetor $\{e\}$ contém os deslocamentos nodais do elemento, conforme Eq. (5).

$$e = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{y_1} \quad \theta_{z_1} \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{y_2} \quad \theta_{z_2} \quad \varphi_2\}^T \quad (5)$$

As deformações devido ao efeito de translação dos elementos em termos de funções de forma são:

$$\begin{Bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \\ w(x, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{u_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{v_1} & 0 & 0 & N_{v_2} & 0 & 0 & N_{v_3} & 0 & 0 & N_{v_4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{v_1} & N_{v_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{v_3} & -N_{v_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_u \\ N_v \\ N_w \end{bmatrix} \{e\} = [N_t(x)] \{e(t)\} \quad (6)$$

A rotação elástica do elemento pode ser aproximada por:

$$\begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N_{\theta_1} & 0 & 0 & N_{\theta_2} & 0 & 0 & N_{\theta_3} & 0 & 0 & N_{\theta_4} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{\theta_1} & N_{\theta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{\theta_3} & N_{\theta_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\theta_y} \\ N_{\theta_z} \end{bmatrix} \{e\} = [N_\theta(x)] \{e(t)\} \quad (7)$$

E para deformação torsional temos:

$$\varphi(x, t) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{\varphi_1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{\varphi_2}\} e = [N_\varphi] \{e(t)\} \quad (8)$$

A derivada com relação ao tempo da Eq. (3) pode ser expressa como:

$$\frac{dr_p}{dt} = \dot{r}_p + \omega \times r_p = \dot{r}_p + [\omega] \{r_p\} \quad (9)$$

Onde a matriz $[\omega]$ é anti-simétrica (3 x 3) associada ao vetor rotacional ω .

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Uma vez que a magnitude de R e r_0 não variam com a deformação do elemento temos que:

$$\dot{r}_p = \dot{u} = [N_t] \{\dot{e}\} \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (11) na Eq. (9) temos:

$$\frac{dr_p}{dt} = [N_t] \{\dot{e}\} + [\omega] \{r_p\} \quad (12)$$

2.1. Energia Cinética

A expressão para a energia cinética do elemento pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mu \left\{ \frac{dr_p}{dt} \right\}^T \left\{ \frac{dr_p}{dt} \right\} dV \quad (13)$$

Onde μ é a massa específica do elemento. Substituindo a Eq. (12) na Eq. (13) temos:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mu \left[\{\dot{e}\}^T [N_t]^T [N_t] \{\dot{e}\} + \{\dot{e}\}^T [N_t]^T [\omega] \{r_p\} + \{r_p\}^T [\omega]^T [N_t] \{\dot{e}\} + \{r_p\}^T [\omega]^T [\omega] \{r_p\} \right] dV \quad (14)$$

O segundo e terceiro termos da Eq. (14) são igualmente nulos, pois o momento de inércia é calculado com relação ao centro de massa do elemento. O primeiro termo representa a energia cinética devido ao efeito de translação e o último termo à energia cinética devido ao efeito rotacional, já incluindo os efeitos giroscópicos.

Após manipulações algébricas, chega-se a expressão da energia cinética, conforme apresentado na Eq. (15).

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{e}\}^T [M_t] \{\dot{e}\} + \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2 + \{\dot{e}\}^T [M_\varphi] \{\dot{e}\} - \dot{\varphi} \{\dot{e}\}^T [G] \{\dot{e}\} - \{\dot{e}\}^T [M_e] \{\dot{e}\} + \{\dot{e}\}^T [M_r] \{\dot{e}\} \quad (15)$$

Onde:

$$[M_t] = \int_0^l [N_v]^T \mu A [N_v] dx \quad (16)$$

$$[M_r] = \int_0^l [N_\theta]^T I_D [N_\theta] dx \quad (17)$$

$$[M_\varphi] = \int_0^l [N_\varphi]^T I_P [N_\varphi] dx \quad (18)$$

$$[M_e] = \int_0^l I_p \left([N_\varphi]^T [N_{\theta_z}] \{e\} [N_{\theta_y}] - [N_\varphi]^T [N_{\theta_y}] \{e\} [N_{\theta_z}] \right) dx \quad (19)$$

$$G = [G^*] - [G^*]^T \quad (20)$$

$$[G^*] = \int_0^l I_p [N_{\theta_y}] [N_{\theta_z}] dx \quad (21)$$

$$C = \int_0^l I_p dx \quad (22)$$

Sendo I_p o momento polar de inércia e I_D o momento diametral de inércia, segundo a Eq. (23) e Eq. (24).

$$I_D = \mu I_y = \mu I_z \quad (23)$$

$$I_p = \mu I_x \quad (24)$$

Pode-se escrever a Eq. (15) de maneira compacta de forma matricial como visto na Eq. (25).

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{e}\}^T [M] \{\dot{e}\} + \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi} \{\dot{e}\}^T [G] \{\dot{e}\} \quad (25)$$

$$M = [M_t] + [M_r] + [M_\varphi] - 2[M_e] \quad (26)$$

M representa a matriz de massa do elemento de viga 3D; sendo $[M_e]$ a matriz de massa com acoplamento torsional e transversal, o qual será desconsiderado neste trabalho, já que a mesma é dependente do tempo; $[M_t]$ a matriz de massa para a translação; $[M_r]$ a matriz de rotação e $[M_\varphi]$ a matriz de torsão.

2.2. Energia Potencial

Adotando para o elemento de viga 3D as variáveis (u, v, w) como deformações de translação, sendo uma axial e duas de flexão e as variáveis $(\theta_y, \theta_z, \varphi)$ compostas por duas deformações relacionadas com a flexão e uma com a torsão, a equação da energia potencial elástica combinada para a deformação axial, de flexão e torsão pode ser escrita conforme Eq. (27).

$$U_{elast} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + EI_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + GJ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (27)$$

Considerando a energia de deformação devido ao efeito gravitacional temos:

$$U_{gravit} = \frac{1}{2} \int_0^l F(x) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (28)$$

Onde $F(x)$ representa a força gravitacional dada pela Eq. (29).

$$F(x) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (29)$$

Somando as parcelas da energia potencial e considerando a seção transversal simétrica, ou seja, $I_z = I_y = I(x)$, temos:

$$U = \frac{E}{2} \int_0^l I(x) \left[\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{GJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l F(x) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (30)$$

Escrevendo a Eq. (30) na forma matricial temos:

$$U = \frac{1}{2} \{e\}^T [K] \{e\} \quad (31)$$

$$K = [K_a] + [K_b] + [K_\varphi] + [K_g] \quad (32)$$

K representa a matriz de rigidez do elemento de viga 3D; sendo $[K_a]$ a matriz de rigidez axial, $[K_b]$ matriz de flexão, $[K_\varphi]$ matriz de torção e $[K_g]$ matriz devido ao efeito gravitacional (tensão).

2.3. Equação do Movimento

A expressão para o movimento do sistema mecânico é derivada através da equação de Lagrange, dada pela Eq. (33).

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (33)$$

Onde:

$L = T - U$	Função Lagrangeana
q	Coordenadas Generalizadas
Q	Vetor Forças Generalizadas
T	Energia Cinética Total
U	Energia Potencial Total

Substituindo q e L na Eq. (33) obtém-se a formulação para elementos finitos da dinâmica do movimento dada pela Eq. (34).

$$[M]\{\ddot{e}\} + \dot{\phi}[G]\{\dot{e}\} + [K]\{e\} = Q \quad (34)$$

Onde:

$[M]$	Matriz de Massa
$[G]$	Matriz Giroscópica
$[K]$	Matriz de Rigidez
$\dot{\phi}$	Velocidade Angular

2.4. Formulação Espaço Estado e Problema de Autovalor

A equação do movimento pode ser escrita no espaço estado de maneira a dispor o problema na forma padrão de solução para autovalores e encontrar consequentemente as frequências naturais do rotor. Transformando a Eq. (34) para o sistema de espaço estado temos:

$$[A]\{\dot{y}\} - [B]\{y\} = 0 \quad (35)$$

Onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [G] \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -[M] & 0 \\ 0 & [K] \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{e}\} \\ \{e\} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

A dimensão das matrizes $[M]$, $[K]$ e $[G]$ são $6n \times 6n$ onde n é o número de nós do rotor, já as matrizes $[A]$ e $[B]$ são de $12n \times 12n$. Supondo $y = \{\theta\}e^{\lambda t}$ a solução homogênea da Eq. (35), obtém-se o problema de autovalor conforme a Eq. (39), onde λ é o autovalor e θ o autovetor correspondente.

$$(\lambda[A] - [B])\{\theta\} = 0 \quad (39)$$

A solução da Eq. (39) fornece as frequências naturais do rotor λ ; no caso desta modelagem, utiliza-se somente a parte imaginária de λ , já que o efeito de amortecimento foi desprezado.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

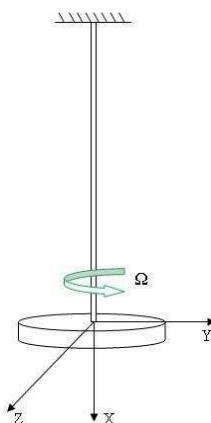
Uma rotina computacional foi implementada utilizando o software MATLAB. Nesta simulação utilizou-se o trabalho de Alamo (2003) com o objetivo de comparação de resultados. A Tab. (1) mostra os dados de entrada para simulação do rotor.

O modelo em estudo, exibido na Fig. (3), é constituído de um eixo elástico engastado em uma extremidade e livre na outra, sendo que o disco está unido solidariamente ao eixo na parte inferior.

Tabela 1. Dados mecânicos do rotor para simulação.

Disco rígido	
Massa (Kg)	2,46
Raio (m)	0,05
Espessura (m)	0,04
Momento de inércia diametral de massa (Kg.m^2)	$1,87 \times 10^{-3}$
Momento de inércia polar de massa (Kg.m^2)	$3,08 \times 10^{-3}$
Eixo circular maciço	
Diâmetro (m)	$8,0 \times 10^{-3}$
Comprimento (m)	0,62
Momento de inércia de área (Kg.m^4)	$0,2 \times 10^{-9}$
Módulo de Young (N/m^2)	$2,1 \times 10^{11}$
Massa específica (Kg/m^3)	7850

A solução do problema através da modelagem apresentada leva a dois importantes resultados para o sistema mecânico, os autovalores e autovetores. Considerando o sistema sub-amortecido, os autovalores se apresentam em números complexos, onde a parte imaginária indica a frequência natural e a parte real o fator de amortecimento. Os autovetores por sua vez trazem as informações sobre os modos próprios de vibrar.

**Figura 3. Modelo do sistema rotativo para simulação.**

Os sistemas rotativos experimentam situações de risco quando operam em certas velocidades de rotação chamadas velocidades críticas. A velocidade é considerada crítica quando esta se iguala a alguma das frequências naturais do sistema, que por sua vez dependem da velocidade de rotação. Para encontrar as velocidades críticas, traçam-se as frequências naturais obtidas através do simulador com a velocidade de rotação do disco; neste mesmo gráfico, traça-se a linha $\omega_n = \Omega$. Determina-se as velocidades críticas onde os pontos $\omega_n = \Omega$ interceptam a curva de frequências naturais. O diagrama representando na Fig. (4) exibe os resultados obtidos com o modelo apresentado neste estudo.

Para um sistema não rotativo ($\Omega = 0$) os modos de vibração são compostos por um de flexão e outro de rotação. Quando o sistema gira, estes dois modos continuam a existir, mas cada um deles é separado em outros dois, sendo um direto e outro retrógrado. Na Fig. (4) mostra-se a variação das quatro frequências naturais w_1 , w_2 , w_3 e w_4 com a velocidade de rotação Ω do sistema rotativo, assim como os pontos das velocidades críticas. As velocidades críticas w_{c1} , w_{c2} correspondem ao movimento de precessão retrógrada e direta, respectivamente, no primeiro modo de vibração, e a velocidade crítica w_{c3} corresponde ao movimento de precessão retrógrada no segundo modo de vibração, conforme dados numéricos apresentandos na Tab. (2).

No diagrama de Campbell observa-se que w_{c4} não existe, além disso, w_{c1} e w_{c3} na realidade são “falsas velocidades críticas”. Portanto, somente existirá a velocidade crítica $w_{c2} = 2,3 \text{ Hz}$ do primeiro modo direto (Alamo, 2003). As frequências naturais w_1 e w_2 estão praticamente sobre retas horizontais, ou seja, elas variam muito pouco com a velocidade de rotação. Isto significa que o efeito giroscópico concentra-se principalmente no segundo modo de vibração, enquanto que o primeiro modo pode ser praticamente analisado por um modelo simplificado que não inclui as deflexões do disco.

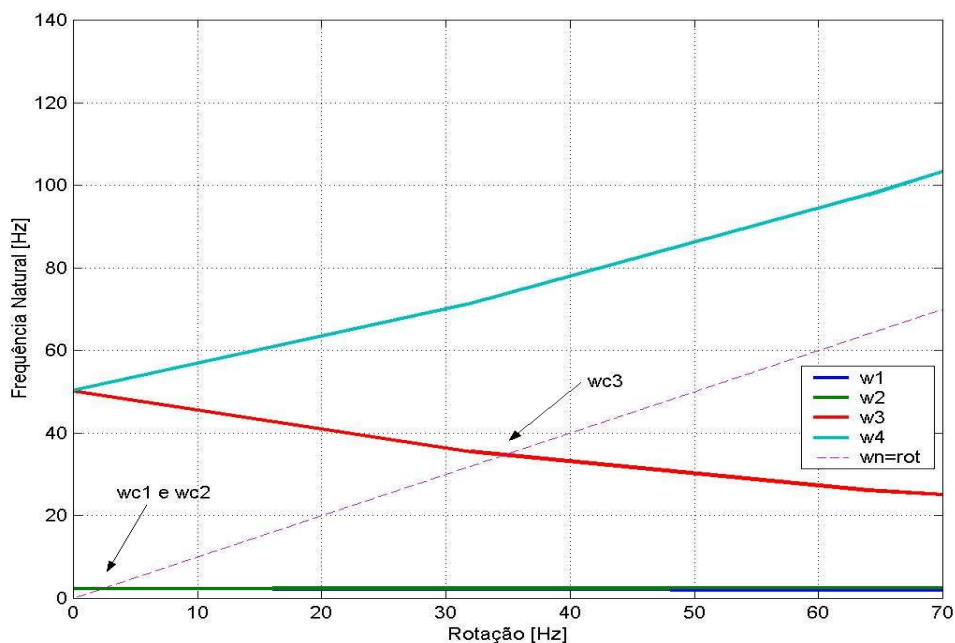


Figura 4. Diagrama de Campbell e velocidade crítica.

O valor da frequência natural estática do sistema rotativo para o primeiro modo w_0 , ou seja, com rotação zero ($\Omega = 0$) é de 2.3Hz. Já para o segundo modo, a frequência natural estática é 50 Hz, diferentemente de Alamo (2003), onde o valor apresentado é de 60 Hz para uma modelagem mais simplificada. Outro tipo de estrutura foi analisada através do modelo proposto, sendo composta somente por uma barra flexível circular maciça engastada em uma extremidade e livre na outra. Uma força de 1N foi aplicada na extremidade livre na direção y.

Tabela 2. Comparação de resultados das velocidades críticas.

	Velocidade Crítica (Hz)		Tipo de Precessão	Modo de Vibração
	Alamo (2003)	MEF Desenvolvido		
ω_{c1}	2,27	2,3	Retrógrada	Primeiro
ω_{c2}	2,29	2,3	Direta	Primeiro
ω_{c3}	36,7	34,0	Retrógrada	Segundo
ω_{c4}	∅	∅	Direta	Segundo

A Tab. (3) mostra os dados de entrada para o rotor em estudo. A estrutura foi discretizada em 10 elementos.

Tabela 3. Dados mecânicos do rotor para simulação.

Eixo circular maciço	
Diâmetro (m)	0,1
Comprimento (m)	10
Módulo de Young (N/m ²)	$2,1 \times 10^{11}$
Módulo de Cisalhamento (N/m ²)	$7,69 \times 10^{10}$
Massa específica (Kg/m ³)	7850

Os resultados apresentados na Tab. (4) e Tab. (5) apresentam boa precisão em comparação com a solução exata, com o Ansys e com os resultados extraídos de Alnaser (2002).

Tabela 4. Frequências naturais de vibração lateral.

		F ₁ (rad/s)	F ₂ (rad/s)	F ₃ (rad/s)	F ₄ (rad/s)
Eixo não rotativo (sem gravidade)	Exata	4,5458	28,4910	79,7820	156,3400
	Ansys	4,5459	28,4740	79,6770	156,0600
	Alnaser (2002)	4,5463	28,4897	79,7785	156,4111
	MEF desenvolvido	4,5462	28,4880	79,7710	156,3990
Eixo não rotativo (com gravidade)	Alnaser (2002)	4,8605	28,8949	80,0996	156,6978
	MEF desenvolvido	4,8592	28,8910	80,0900	156,6700
Eixo rotativo 10,47 (rad/s)	Alnaser (2002) (direta)	4,1161	28,1392	79,4156	156,1155
	(retrógrado)	5,7395	29,6709	80,7896	157,2824
	MEF desenv. (direto)	4,8592	28,8920	80,0930	156,6800
	(retrógrado)	6,7577	29,3020	80,2410	156,7700

Tabela 5. Frequências naturais de vibração torsional e axial.

		F ₁ (rad/s)	F ₂ (rad/s)	F ₃ (rad/s)	F ₄ (rad/s)
Torsional	Exata	491	1475	2458	3442
	Ansys	492	1489	2522	3616
	MEF desenvolvido	492	1489	2522	3616
Axial	Exata	812	2437	4062	5687
	Ansys	813	2460	4167	5976
	MEF desenvolvido	813	2460	4167	5976

4. CONCLUSÕES

Uma formulação dinâmica de sistemas rotativos através do MEF foi desenvolvida e implementada em ambiente MATLAB considerando efeitos giroscópicos e gravitacionais, ou seja, eixo submetido ao peso próprio, para estudo de vibrações em rotores flexíveis verticais. Os resultados apresentaram boa precisão com relação aos estudos analíticos e numéricos extraídos das referências citadas. O modelo permite efetuar estudos mais avançados com eixos longos e esbeltos, como é o usual em colunas de perfuração. Neste caso, análises mais detalhadas, incluindo efeitos dinâmicos resultantes de contato com a parede do poço e efeitos de amortecimento devido às forças hidrodinâmicas podem ser acoplados ao modelo, além de estudos considerando vibrações forçadas com análises da resposta no domínio da frequência.

5. REFERÊNCIAS

- Alamo, F.J.C., 2003, “Dinâmica de um Rotor Vertical em Balanço com Impacto”, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, Brasil.
- Alnaser, H.A., 2002, “Finite Element Dynamic Analysis of DrillString”, Dissertation, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia.
- Axisa, F. and Antunes, J., 1990, “Flexural vibrations of rotors immersed in dense fluids: Part I – Theory”, Symp. on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-3, Honolulu, Hawaii, Vol. 2, pp. 23–38.
- Bazoune, A. and Khulief, Y.A., 1992, “A Finite Beam Element for Vibration Analysis of Rotating Tapered Timoshenko Beams”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 156, pp. 141-164.
- Cordovil, A.G.D.P., 1991, “Análise Dinâmica de Colunas de Perfuração via Superposição Modal”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.
- Da Silva, E.L., 2004, “Dinâmica de Rotores: Modelo Matemático de Mancais Hidrodinâmicos”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Paraná, Brasil.
- Dana, S.S., 1987, “Análise Dinâmica de Rotores com Eixo Vertical”, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.
- Dunayevsky, V.A., Abbassian, F. and Judzis, A., 1993, “Dynamic stability of drillstring under fluctuating weight on bit”, SPE Paper No. 14329, SPE Drill, pp. 84–92.
- Khulief, Y.A. and Mohiuddin, M.A., 1997, “On the dynamic analysis of rotors using modal reduction”, Journal of Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 26, pp. 41-55.
- Souto, C.A., 2000, “Estudo do Comportamento Dinâmico de Máquinas Rotativas através da Análise Modal Complexa”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.

6. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.



VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING
18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil
August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil

MODELING FLEXIBLE VERTICAL ROTOR BY FINITE ELEMENTS WITH GRAVITY AND GYROSCOPIC EFFECTS

Agostini, C. E., cr.agostini@gmail.com¹
Capello Souza, E. A., capello@feb.unesp.br¹

¹Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Bauru, SP

Abstract: *This work has analyzed the natural frequencies and critical speed in a vertical rotor with a hard disc at the edge through the finite element modeling. The mathematical modeling was based on the beam theory of Euler-Bernoulli considering three displacements and three rotations at each node. The equation that governs the movement was obtained through the Lagrangian formulation. The model considered the effects of bending, torsion and axial deformation of the shaft, in addition to the gyroscopic and gravitational effects. The finite element method was used for discretization of the structure in cylindrical elements with 12 degrees of freedom. From the matrix of the elements, it was obtained the global system of equations governing the motion of the rotor. The boundary conditions were considered as the axis embedded in the upper extremity and free at the bottom, and the entire mass of the disk was kept concentrated at the bottom of the shaft. To obtain the natural frequencies of the rotation, it was considered the case of free vibrations. The system to be solved was transformed to the state space by changing the variable in the generalized coordinates. The solution of the vibratory system constitutes in eigenvalues problem where we obtained the natural bending, torsion and axial frequencies of velocity for a constant and known rotation. As the gyroscopic effects were considered in the model, both the eigenvalues and eigenvectors depend on the speed of rotation. The dependence of natural frequencies for the speed of rotation was represented by diagrams of Campbell. A finite element program was implemented in MATLAB to perform numerical simulations and view the Campbell diagrams, forward and backward natural frequencies and critical speed. The model was validated by the literature with satisfactory results.*

Keywords: *Finite Elements, Rotor Dynamics, Vibrations*