



VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA  
VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING  
18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil  
August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil

## O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS ADAPTATIVO APLICADO À ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES DE EIXOS

Marcos Arndt, marndt@up.edu.br<sup>1</sup>  
Roberto Dalledone Machado, rdm@ufpr.br<sup>2</sup>  
Adriano Scremin, adriano.scremin@gmail.com<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Positivo, Curso de Engenharia Civil, R. Prof. Pedro Viriato Parigot de Souza, 5300 – CEP 81280-330 Curitiba, PR.

<sup>2</sup>Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Caixa Postal 19011 – CEP 81531-990 Curitiba, PR.

**Resumo:** Este trabalho apresenta a aplicação do refinamento adaptativo do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na análise de vibrações livres torcionais de eixos circulares retos. O MEFG, desenvolvido a partir do Método da Partição da Unidade, permite a inclusão de conhecimento prévio sobre a solução da equação diferencial sendo resolvida no espaço de solução aproximado. O problema variacional de vibração livre de eixos retos circulares é apresentado e os principais aspectos do MEFG são discutidos. Os autovalores obtidos pelo MEFG Adaptativo são comparados com soluções analíticas encontradas na literatura. O MEFG Adaptativo proposto permite a imposição das condições de contorno de forma direta, como no Método dos Elementos Finitos, converge muito rápido e permite aproximar a frequência relacionada a qualquer modo de vibração.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos Generalizados, vibrações livres, análise de vibrações

### 1. INTRODUÇÃO

Em 1996 foi desenvolvido o Método da Partição da Unidade (MPU) (Melenk e Babuska, 1996), como uma técnica otimizada de enriquecimento. Com base nas idéias do MPU surgiram diversos métodos, entre eles o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). No MPU, a base do subespaço de aproximações locais é constituída de funções, não necessariamente polinomiais, que refletem informações disponíveis a priori sobre a solução da equação diferencial governante. Esta técnica garante boa aproximação local e global. As principais vantagens do MPU são: possibilidade de enriquecimento do espaço de aproximação global com funções que refletem o comportamento local da solução da equação diferencial governante, funções de forma obtidas mais facilmente do que no refinamento  $p$  do Método dos Elementos Finitos (MEF), construção de espaços de aproximação com a regularidade desejada e refinamentos locais facilmente implementados. Entretanto, o MPU apresenta alguns desafios que compreendem: a escolha adequada do espaço de funções de aproximação local, a imposição das condições de contorno essenciais e a construção adequada do esquema de integração dos coeficientes das matrizes de rigidez e massa.

Recentemente, inúmeras pesquisas têm comprovado a eficiência do MEFG e outros métodos baseados no MPU em problemas tais como análise de trincas (Xiao e Karihaloo, 2007) e plasticidade (Gracie, Ventura e Belytschko, 2007), entre outros.

A aplicação do Método da Partição da Unidade na análise dinâmica de estruturas não é inédita, embora existam poucos trabalhos nesta área. De Bel, Villon e Bouillard (2005) apresentaram uma nova técnica baseada no Método da Partição da Unidade para análise de vibrações forçadas em placas finas na faixa das frequências médias. O Método da Partição da Unidade, juntamente com a técnica de elemento de interface, foi também utilizado por Hazard e Bouillard (2007) para análise numérica de vibrações de estruturas tipo sanduíche equipadas com camadas visco-elásticas passivas de amortecimento.

Arndt, Machado e Scremin (2010) propuseram um método iterativo adaptativo baseado no MPU para análise de vibrações livres de estruturas, que permite refinar a solução para uma determinada frequência, com rápida convergência e precisão equivalente, em alguns casos até superior, ao refinamento  $p$  do MEF. O método foi denominado Método dos Elementos Finitos Generalizados Adaptativo e foi inicialmente empregado na análise de vibrações livres de barras e treliças.

Este trabalho apresenta a aplicação do MEEG Adaptativo na análise de vibrações livres torcionais de eixos circulares retos. Os autovalores obtidos são comparados com soluções analíticas encontradas na literatura. O MEEG Adaptativo proposto permite a imposição das condições de contorno de forma direta, como no Método dos Elementos Finitos, converge muito rápido e permite aproximar a frequência relacionada a qualquer modo de vibração.

## 2. FORMA VARIACIONAL DA VIBRAÇÃO LIVRE DE EIXOS

A vibração livre torcional de um eixo reto (Fig. (1)) ocorre em torno do eixo central longitudinal da barra.

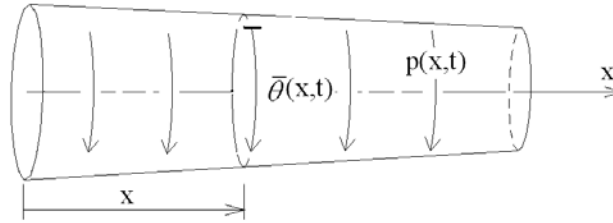


Figura 1. Eixo reto com deformação angular.

O problema de vibração torcional de um eixo circular uniforme estacionário consiste em encontrar o deslocamento angular  $\bar{\theta}$  que satisfaz:

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( G I_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) = p(x, t) \quad (1)$$

onde  $I_p$  é o momento polar de inércia da seção transversal do eixo,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\rho$  é a massa específica,  $p$  é o momento torsor aplicado por unidade de comprimento e  $t$  é o tempo. Particularizando o problema para o caso de vibração torcional livre de eixo circular reto uniforme, onde  $G$ ,  $I_p$  e  $\rho$  são constantes e  $p(x, t) = 0$ , a Eq. (1) reduz-se a:

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2} - G I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

Segundo Inman (1996), admitindo-se que o centro de massa e o centro de rotação coincidem, e que as vibrações laterais e torcionais são desacopladas, a Eq. (2) pode ser empregada para aproximar o movimento de vibração torcional livre de eixos uniformes com seções transversais não circulares utilizando-se a constante torcional  $\gamma_T$ , da seguinte forma:

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2} - G \gamma_T \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

A solução  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(x, t)$  deve satisfazer as condições iniciais e de contorno definidos no problema.

De acordo com Carey e Oden (1984), o modo mais usual para determinar a forma variacional de um problema dependente do tempo é considerar o tempo  $t$  como um parâmetro real e desenvolver uma família de problemas variacionais em  $t$ . Este processo consiste em selecionar funções testes  $w = w(x)$ , independentes de  $t$ , e aplicar o método dos resíduos ponderados. Se o Método dos Elementos Finitos ou métodos similares são utilizados para representar o comportamento espacial da solução, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias com graus de liberdade sendo funções do parâmetro  $t$ . Esta técnica é chamada formulação semi-discreta do problema.

Logo, aplicando o método dos resíduos ponderados para desenvolver a forma integral da Eq. (2), a solução  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(x, t)$  deve satisfazer:

$$\int_0^L \rho I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2} w \, dx - \int_0^L G I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} w \, dx = 0 \quad (4)$$

para funções testes admissíveis  $w = w(x)$  em qualquer tempo  $t \in (0, T_f]$ .

Integrando a Eq. (4) por partes, obtém-se:

$$\rho I_p \int_0^L \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2} w \, dx - \left[ w G I_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right]_0^L + G I_p \int_0^L \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \, dx = 0 \quad (5)$$

De acordo com Carey e Oden (1984), em problemas de vibração admitem-se soluções periódicas do tipo:

$$\bar{\theta}(x, t) = e^{i\omega t} \theta(x) = (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) \theta(x) \quad (6)$$

onde  $\omega$  é a frequência de vibração.

A vibração livre de um eixo circular uniforme transforma-se então em um problema de autovalores na forma variacional: encontrar um par  $(\lambda, \theta)$ , com  $\theta \in H^1(0, L)$  satisfazendo as condições de contorno e  $\lambda \in \mathbf{R}$ , tal que

$$G I_p \int_0^L \frac{d\theta}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx - G I_p \left[ w \frac{d\theta}{dx} \right]_0^L - \rho I_p \lambda \int_0^L \theta w \, dx = 0 \quad (7)$$

para funções testes admissíveis  $w \in H^1(0, L)$ , onde  $\lambda = \omega^2$  corresponde ao parâmetro de acoplamento espaço-tempo. A forma variacional do problema de autovalores também pode ser escrita como: encontrar  $(\lambda, \theta)$ , com  $\theta \in H^1(0, L)$ , satisfazendo as condições de contorno, e  $\lambda \in \mathbf{R}$ , tal que

$$B(\theta, w) = \lambda F(\theta, w) \quad (8)$$

para todas as funções testes admissíveis  $w \in H^1(0, L)$ , onde  $B : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbf{R}$  e  $F : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbf{R}$  são formas bilineares.

Para as condições de contorno clássicas, as formas bilineares são obtidas pelas expressões:

$$B(\theta, w) = G I_p \int_0^L \frac{d\theta}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx \quad (9)$$

$$F(\theta, w) = \rho I_p \int_0^L \theta w \, dx \quad (10)$$

De maneira análoga, para as condições de contorno não clássicas, estas formas bilineares são substituídas, respectivamente por:

$$B(\theta, w) = G I_p \int_0^L \frac{d\theta}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx + k_E \theta(0)w(0) + k_D \theta(L)w(L) \quad (11)$$

$$F(\theta, w) = \rho I_p \int_0^L \theta w \, dx + I_{0E} \theta(0)w(0) + I_{0D} \theta(L)w(L) \quad (12)$$

onde  $k_E$  e  $k_D$  são as rigidezes torcionais das molas e,  $I_{0E}$  e  $I_{0D}$  são as inércias rotacionais das massas nas extremidades esquerda e direita do eixo, respectivamente.

Utilizar métodos numéricos baseados na forma fraca do problema consiste em reescrever a forma variacional (Eq. (8)) em um subespaço aproximado  $H^h \subset H^1(0, L)$ . O problema de autovalores aproximado transforma-se em: encontrar  $\lambda_h \in \mathbf{R}$  e  $\theta_h \in H^h(0, L)$  tal que

$$B(\theta_h, w_h) = \lambda_h F(\theta_h, w_h), \quad \forall w_h \in H^h \quad (13)$$

A solução aproximada  $\theta_h(x)$  pode ser escrita, na forma discreta em uma base  $N$ -dimensional, da seguinte forma:

$$\theta_h(x) = \sum_{j=1}^N \theta_j \phi_j(x) \quad (14)$$

onde  $\phi_j$  são as funções de base globais do subespaço aproximado  $H^h$  e  $\theta_j$  são os respectivos graus de liberdade. Diferentes subespaços aproximados são empregados em diferentes métodos numéricos.

### 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é um método de Galerkin cujo principal objetivo é a construção de um subespaço de funções de aproximação de dimensão finita, usando conhecimento local sobre a solução da equação diferencial do problema, que garanta bons resultados locais e globais. O MEFG surgiu a partir das idéias do Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade proposto por Melenk e Babuska (1996), no qual o enriquecimento local do subespaço de aproximação é incorporado através do Método da Partição da Unidade.

Seja  $\theta \in H^1(\Omega)$  a função a ser aproximada e  $\{\Omega_i\}$  um sistema de subcoberturas sobrepostas que formam uma cobertura aberta do domínio de interesse  $\Omega \in \mathbf{R}^n$ , satisfazendo a condição de sobreposição:

$$\exists M_S \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall x \in \Omega \quad \text{card}\{i|x \in \Omega_i\} \leq M_S \quad (15)$$

Seja ainda,  $\{\eta_i\}$  uma partição da unidade de Lipschitz subordinada à cobertura  $\{\Omega_i\}$  satisfazendo as condições:

$$\text{sup}(\eta_i) = \{x \in \Omega \mid \eta_i(x) \neq 0\} \subset [\Omega_i], \quad \forall i \quad (16)$$

$$\sum_i \eta_i \equiv 1 \text{ sobre } \Omega \quad (17)$$

$$\|\eta_i\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq C_\infty \quad (18)$$

$$\|\nabla \eta_i\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq C_G / \text{diâm}\Omega_i \quad (19)$$

onde  $\text{sup}(\eta_i)$  indica o suporte de definição da função  $\eta_i$ ,  $[\Omega_i]$  indica o fechamento da subcobertura  $\Omega_i$  e,  $C_\infty$  e  $C_G$  são duas constantes.

Se sobre cada subdomínio  $\Omega_i \cap \Omega$  obtém-se um espaço de funções  $S_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$  tal que  $\theta$  pode ser bem aproximado neste subdomínio, então o espaço global  $S$  utilizado para aproximar  $\theta$  em  $\Omega$  é obtido por:

$$S := \sum_i \eta_i S_i = \left\{ \sum_i \eta_i s_i^j \mid s_i^j \in S_i \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (20)$$

ou seja, a solução aproximada no ponto  $x$  do domínio é dada por:

$$\theta_h(x) = \sum_i \sum_{s_i^j \in S_i} \eta_i s_i^j(x) a_{ij} \quad (21)$$

onde  $a_{ij}$  são os graus de liberdade.

No MEFG Adaptativo (Arndt, Machado e Scremin, 2010) utilizam-se como partição da unidade as funções de forma lineares do MEF convencional para eixos que, no subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  podem ser descritas por:

$$\eta_i = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (22)$$

Já o espaço de aproximação local proposto por Arndt, Machado e Scremin (2010), no subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  toma a forma:

$$S_i = span\{1 \quad \gamma_{1j} \quad \gamma_{2j} \quad \varphi_{1j} \quad \varphi_{2j} \quad \dots\}, \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (23)$$

$$\gamma_{1j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \text{sen}[\beta_{dj}(x - x_i)] & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (24)$$

$$\gamma_{2j} = \begin{cases} \text{sen}[\beta_{ej}(x - x_i)] & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (25)$$

$$\varphi_{1j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \cos[\beta_{dj}(x - x_i)] - 1 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (26)$$

$$\varphi_{2j} = \begin{cases} \cos[\beta_{ej}(x - x_i)] - 1 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (27)$$

$$\beta_{dj} = \sqrt{\frac{\rho_d}{G_d}} \mu_j \quad (28)$$

$$\beta_{ej} = \sqrt{\frac{\rho_e}{G_e}} \mu_j \quad (29)$$

onde  $G_d$  e  $\rho_d$  são o módulo de elasticidade transversal e a massa específica do eixo no subdomínio  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $G_e$  e  $\rho_e$  são o módulo de elasticidade transversal e a massa específica do eixo no subdomínio  $(x_{i-1}, x_i)$ , e  $\mu_j$  é a frequência associada ao nível de enriquecimento  $j$ .

O MEFG Adaptativo é um processo iterativo cujo principal objetivo é aumentar a precisão de uma frequência (autovalor) relacionada a um modo de vibrar escolhido, cuja ordem é aqui denominada de “ordem alvo”. O fluxograma com blocos A a H apresentado na Fig. (2) representa o processo adaptativo. Neste fluxograma,  $\omega_{alvo}$  corresponde à frequência relacionada ao modo alvo e  $\lambda_{alvo} = \omega_{alvo}^2$  é o autovalor associado.

O primeiro passo do processo adaptativo do MEFG (blocos A a C) consiste na obtenção de uma primeira aproximação da frequência alvo pelo MEF convencional (MEFG com  $n_l = 0$ ). A malha de elementos finitos usada na análise deve ser refinada o suficiente para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo. Para tanto, basta utilizar uma malha com número de graus de liberdade ( $ngl$ ) efetivos, após a introdução das condições de contorno, igual ou maior que a ordem da frequência alvo, e que seja capaz de representar a geometria do problema. Os passos subsequentes (blocos D a G) consistem na aplicação do MEFG com apenas um nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ), para a mesma malha de elementos finitos, utilizando como frequência  $\mu_j$  ( $j = 1$ , blocos D e E) das funções enriquecedoras a frequência alvo obtida no passo anterior. Ao longo do processo iterativo nenhum refinamento da malha é realizado.

Tanto o MEF convencional quanto o MEFG Adaptativo permitem obter a cada análise tantas frequências quantos forem os graus de liberdade efetivos do modelo. Entretanto, devido às características de adaptatividade à frequência alvo do MEFG Adaptativo, para cada frequência que se deseja determinar através deste processo é necessário executar uma nova análise tomando-a como frequência alvo.

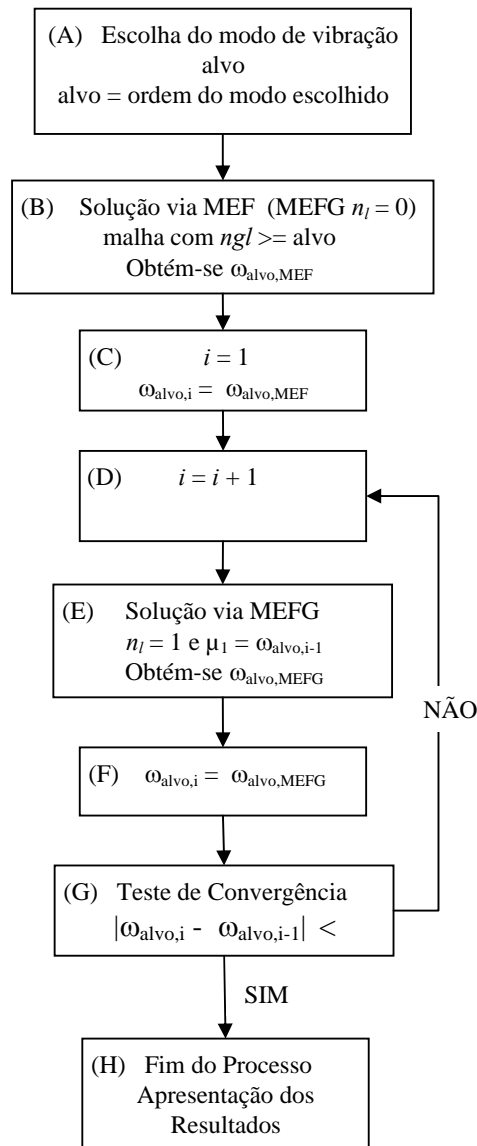


Figura 2. Fluxograma do MEEG Adaptativo.

#### 4. APLICAÇÃO

Para verificação numérica do MEEG Adaptativo são analisadas as frequências naturais de dois eixos circulares retos com condições de contorno não clássicas. Os resultados obtidos são comparados com as soluções analíticas obtidas por Gorman (1975) e Chen (2006).

##### 4.1. Eixo uniforme fixo-livre com massa concentrada

Nesta seção é analisada a vibração torcional livre de um eixo uniforme fixo-livre com seção transversal circular e uma massa concentrada na metade do seu comprimento (Fig. (3)). O eixo tem as seguintes características: diâmetro de 0,0254 m, comprimento  $L = 1,016$  m, módulo de elasticidade transversal  $G = 8,27 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, massa específica  $\rho = 7833,58$  kg/m<sup>3</sup> e momento de inércia polar da seção transversal  $I_p = 4,086 \times 10^{-8}$  m<sup>4</sup>. A massa concentrada possui inércia rotacional  $I_0 = \rho I_p L / 0,1$ .

Segundo Gorman (1975), as frequências naturais analíticas ( $\omega_p$ ) deste eixo podem ser obtidas através da solução da equação característica:

$$\frac{\kappa_r \text{sen}(\kappa_r/2)}{\cos(\kappa_r/2) - \tan(\kappa_r/2) \text{sen}(\kappa_r/2)} - \frac{I_p \rho L}{I_0} = 0 \quad (30)$$

$$\omega_r = \frac{\kappa_r}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (31)$$

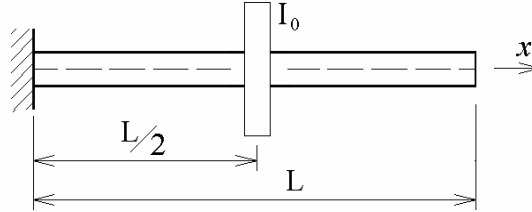


Figura 3. Eixo uniforme fixo-livre com massa concentrada.

O autovalor adimensional  $\chi_r$  é utilizado para comparar a solução analítica com as soluções aproximadas. Este parâmetro é dado por:

$$\chi_r = \sqrt{\frac{\rho L^2 \omega_r^2}{G}} \quad (32)$$

A Tabela (1) apresenta os resultados obtidos por cinco análises adaptativas do MEFG e as soluções analíticas apresentadas por Chen (2006) e calculadas a partir da equação característica (Eq. (30)). Nas análises do MEFG Adaptativo foram utilizadas malhas com o número mínimo de elementos necessário para obter uma primeira aproximação da frequência alvo e representar a geometria do eixo.

Tabela 1. Resultados para vibração livre de eixo fixo-livre com massa concentrada.

Autovalor	Solução analítica (Eq. (30))	Solução analítica Chen (2006)	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$	ngl nas iterações <sup>(a)</sup>
1	0,432841	0,432841	0,432841	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	3,203935	3,203935	3,203935	1x 2 gl + 2x 10 gl
3	6,314846	6,314846	6,314846	1x 4 gl + 2x 20 gl
4	9,445948	9,445948	9,445948	1x 4 gl + 2x 20 gl
5	12,582265	12,582264	12,582265	1x 6 gl + 2x 30 gl

Notas: (a) 1x n gl + 2x m gl = primeira iteração (MEF) com n graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com m graus de liberdade.

Observa-se que os resultados obtidos pelo MEFG Adaptativo são iguais aos resultados analíticos, exceto para o quinto autovalor, que difere na sexta casa decimal do resultado apresentado por Chen (2006).

#### 4.2. Eixo uniforme fixo-livre com mola torcional

Nesta seção é analisada a vibração torcional livre um eixo uniforme com seção transversal circular, com as mesmas características do eixo analisado no tópico anterior, fixo na extremidade esquerda e ligado a uma mola torcional com rigidez  $k = 0,1GI_p/L$  na extremidade direita (Fig. (4)).

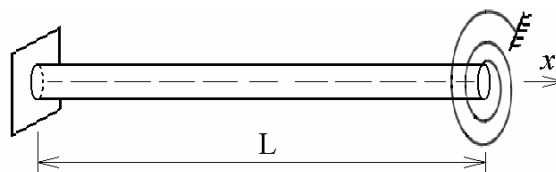


Figura 4. Eixo circular uniforme com mola torcional.

As frequências naturais analíticas ( $\omega_r$ ) podem ser obtidas através da solução da equação característica (Gorman, 1975 e Inman, 1996):

$$\kappa_r \cot(\kappa_r) + \frac{kL}{GI_p} = 0 \quad (33)$$

$$\omega_r = \frac{\kappa_r}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (34)$$

e os modos naturais de vibração são dados por:

$$\theta_r(x) = a \operatorname{sen}\left(\frac{\kappa_r x}{L}\right) \quad (35)$$

sendo  $a$  uma constante.

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos por cinco diferentes análises do MEFG Adaptativo e as soluções analíticas calculadas a partir da equação característica (Eq. (33)) e apresentadas por Chen (2006).

**Tabela 2. Resultados para vibração livre de eixo fixo-livre com mola torcional.**

Autovalor	Solução analítica (Eq. (33))	Solução analítica Chen (2006)	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$	ngl nas iterações <sup>(a)</sup>
1	1,631995	1,631994	1,631995	1x 1 gl + 2x 5 gl
2	4,733512	4,733512	4,733512	1x 2 gl + 2x 10 gl
3	7,866693	7,866693	7,866693	1x 3 gl + 2x 15 gl
4	11,004661	11,004661	11,004661	1x 4 gl + 2x 20 gl
5	14,144237	14,144237	14,144237	1x 5 gl + 2x 25 gl

Notas: (a) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se novamente que os resultados obtidos pelo MEFG Adaptativo são iguais aos resultados analíticos, com exceção de uma pequena diferença na sexta casa decimal do primeiro autovalor em relação ao obtido por Chen (2006).

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada a formulação variacional do problema de vibração livre de eixos retos estacionários e a formulação do MEFG Adaptativo para análise deste tipo de problemas.

O MEFG Adaptativo é um processo iterativo cujo principal objetivo é aumentar a precisão de uma frequência relacionada a um modo de vibrar escolhido. No MEFG Adaptativo são utilizadas funções enriquecedoras que dependem das propriedades geométricas e mecânicas dos elementos. Esta técnica permite um processo adaptativo preciso que converge muito rápido. Além disso, a introdução das condições de contorno de forma direta, como no MEF, e a facilidade de obtenção das funções de forma conferem ao método generalidade para análise de problemas com as mais distintas condições de contorno.

Os resultados obtidos pelo MEFG Adaptativo para os dois eixos analisados mostraram-se muito precisos mesmo com a utilização de malhas grosseiras.

A aplicação do MEFG Adaptativo na análise de vibrações livres de vigas de Euler-Bernoulli e pórticos será apresentada em trabalhos futuros.

## 6. REFERÊNCIAS

- Arndt, M., Machado, R.D. and Scremin, A., 2010, "An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 659-672.
- Carey, G.F. and Oden, J.T., 1984, "Finite elements: computational aspects", Vol. 3, Ed. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Chen, D., 2006, "An exact solution for free torsional vibration of a uniform circular shaft carrying multiple concentrated elements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 291, pp. 627-643.



- De Bel, E., Villon, P. and Bouillard, P.H., 2005, "Forced vibrations in the medium frequency range solved by a partition of unity method with local information", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 62, pp. 1105-1126.
- Gracie, R., Ventura, G. and Belytschko, T., 2007, "A new fast finite element method for dislocations based on interior discontinuities", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 69, pp. 423-441.
- Gorman, D.J., 1975, "Free vibration analysis of beams and shafts", John Wiley & Sons, New York, USA.
- Hazard, L. and Bouillard, P., 2007, "Structural dynamics of viscoelastic sandwich plates by the partition of unity finite element method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 196, pp. 4101-4116.
- Inman, D.J., 1996, "Engineering vibration", Ed. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Melenk, J.M. and Babuska, I., 1996, "The partition of unity finite element method: basic theory and applications", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, No. 1-4, pp. 289-314.
- Xiao, Q.Z. and Karihaloo, B.L., 2007, "Implementation of hybrid crack element on a general finite element mesh and in combination with XFEM", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 196, pp. 1864-1873.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# THE ADAPTIVE GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO FREE VIBRATION OF SHAFTS

Marcos Arndt, marndt@up.edu.br<sup>1</sup>  
Roberto Dalledone Machado, rdm@ufpr.br<sup>2</sup>  
Adriano Scremin, adriano.scremin@gmail.com

<sup>1</sup>Universidade Positivo, Curso de Engenharia Civil, R. Prof. Pedro Viriato Parigot de Souza, 5300 – CEP 81280-330 Curitiba, PR.

<sup>2</sup>Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Caixa Postal 19011 – CEP 81531-990 Curitiba, PR.

**Abstract.** *This work presents an adaptive refinement of the Generalized Finite Element Method (GFEM) applied to free vibration of straight circular shafts. The GFEM, developed from the Partition of Unity Method, allows adding a priori knowledge about the solution of the differential equation being solved in the approximated solution space. The variational problem of free vibration of straight circular shafts is presented and the GFEM main aspects are discussed. The eigenvalues obtained by Adaptive GFEM are compared to the analytical solutions found in the literature. The proposed Adaptive GFEM allows imposing directly the boundary conditions, as in the Finite Element Method, converges fast and allows approximating the frequency related to any vibration mode.*

**Keywords:** *Generalized Finite Element Method, free vibration, vibration analysis.*