

AJUSTE DE MODELOS COM NÃO-LINEARIDADES LOCAIS ATRAVÉS DE SÉRIES DE WIENER

Samuel da Silva, sam.silva13@gmail.com

Universidade Estadual do Paraná (UNIOESTE), Centro de Engenharias e Ciências Exatas, Campus de Foz do Iguaçu, PR

Resumo. Métricas para ajuste de modelos de elementos finitos baseadas em testes modais são funções de resíduos de relações envolvendo, normalmente, convolução unidimensional, frequências naturais, funções de resposta em frequência, formas modais, etc. Infelizmente, nos casos onde uma estrutura apresenta alguma geometria, junção ou folga, por exemplo, há indução de não-linearidades, e nestas situações os métodos de ajuste podem falhar. Buscando contornar este problema, este artigo apresenta uma estratégia para ajuste de modelos com não-linearidades locais empregando resíduos envolvendo núcleos de Volterra representando múltiplas convoluções. A identificação destes núcleos é feita com auxílio de uma base ortogonal de Kautz para expansão e redução do número de parâmetros a estimar. A série de Volterra expandida em bases ortogonais é chamada de série de Wiener. Visando detalhar todos os passos envolvidos, um modelo de elementos finitos de um pórtico espacial com uma não-linearidade local a ajustar com dados de operação é empregado. Várias simulações com diferentes níveis de excitação e parâmetros de identificação são implementadas. Os resultados permitem caracterizar a aplicabilidade e limitações do método proposto e discutir futuros passos para outras aplicações mais complexas.

Palavras-chave: modelos não-lineares locais, ajuste de modelos, séries de Wiener, filtros de Kautz.

1. INTRODUÇÃO

Identificação de parâmetros em estruturas mecânicas usando dados de vibração é um tópico de bastante interesse. Um caso especial de identificação compreende o ajuste local de modelos de elementos finitos (FE). Estes métodos são bem documentados na literatura com muitas aplicações práticas em análise estrutural e detecção de danos (Berman and Nagy (1971), Friswell and Mottershead (1995), Doebling *et al.* (1996), Katafygiotis (1998), etc). Porém, a presença de não-linearidades no sistema pode conduzir a uma enorme gama de comportamentos estruturais, como por exemplo, saltos, ciclos limites, ressonância interna, acoplamento modal, ressonâncias sub-harmônicas, etc. Estas não-linearidades podem ocorrer devido a elementos locais ou geometria, como juntas, rebites, folgas, etc (Worden and Tomlinson (2001)). Assim, as técnicas de ajuste de modelos lineares não podem corrigir parâmetros não-lineares locais em modelos FE visando tornar o modelo numérico compatível com o comportamento dinâmico experimental. Para atingir este objetivo deve-se empregar um estratégia de ajuste de modelos FE considerando a existência de elementos não-lineares locais para melhorar o comportamento dos modelos numéricos.

Inúmeras estratégias de ajuste de modelos não-lineares podem ser usadas considerando várias métricas (Silva *et al.* (2009) e Kerschen *et al.* (2006)). Dentre estas técnicas, os modelos não-parâmetros de Volterra podem ser candidatos efetivos para definição de métricas para ajuste. Uma série de Volterra é composta por múltiplas convoluções, ou seja, um conjunto de termos de filtragem com um termo linear e núcleos não-lineares (Rugh (1991) e Billings (1980)). Porém, devido a problemas de convergência, as aplicações práticas em estruturas complexas tem sido limitadas. Uma forma de contornar esta limitação é expandir os núcleos de Volterra com bases ortonormais, conhecidos como núcleos de Wiener. Uma estratégia de ajuste de modelos não-lineares pode ser feita a partir de uma comparação entre uma métrica calculada com os núcleos de Wiener identificados experimentalmente com núcleos estimados com o modelo numérico a ajustar.

Este procedimento de ajuste foi proposto originalmente no trabalho de Silva *et al.* (2010) e testado em uma viga com um elemento de rigidez cúbica com somente um parâmetro não-linear a ajustar. Buscando estender estes resultados, a meta do presente artigo é aplicar um procedimento para ajustar um parâmetro linear e não-linear juntos dentro de um modelo FE de um pórtico espacial. Será demonstrado a partir das simulações numéricas que a separação entre duas contribuições, uma linear, relacionada ao primeiro núcleo de Wiener $h_1(n_1)$ e outra não-linear, $h_2(n_1, n_2)$ permite tratar um problema de ajuste de elementos lineares e não-lineares de maneira independente.

2. SÉRIES DE WIENER E BASES DE FUNÇÕES ORTONORMAIS

A série de Volterra discreta no tempo é composta por uma soma de parcelas e contribuições de convolução unidimensional e multidimensional, ou seja:

$$x(k) = x_{lin}(k) + x_{quad}(k) + x_{cub}(k) + \dots \quad (1)$$

sendo $x_{lin}(k)$ a contribuição linear da resposta $x(k)$, $x_{quad}(k)$ a contribuição linear do segundo núcleo de Volterra (contribuição quadrática), etc. A equação (1) pode ser substituída pela seguinte soma (Schetzen (1980) e Rugh (1991)):

$$x(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{+\infty} h_m(n_1, n_2, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m u(k - n_i), \quad (2)$$

sendo m o número de termos não-lineares, $u(k)$ o sinal de entrada e η a ordem do núcleo $h_\eta(n_1, \dots, n_\eta)$ (Schetzen (1980) e Rugh (1991)). Esta série é truncada em um número pequeno N , normalmente $N = 2$ ou $N = 3$ é suficiente para aproximar os termos não-lineares mais comuns. Infelizmente, a principal limitação de um modelo de Volterra é a sobreparametrização que dificulta aplicações práticas na modelagem de sistemas quando o atraso de memória é alto ou sistemas de alta ordem. Portanto, é desejável reduzir a complexidade e o número de parâmetros a serem identificados. A expansão dos núcleos de Volterra em bases ortogonais pode ajudar bastante neste processo de identificação. Esta ideia foi proposta por Wiener (Wiener (1958)).

É possível descrever os núcleos de Volterra usando uma base ortonormal $\psi_{i_j}(n_j)$, por exemplo as funções de Laguerre ou função de Kautz. A série de Wiener é uma expansão ortogonal da série de Volterra. Na prática, os núcleos de Volterra são aproximados por um número finito M de filtros:

$$h_\eta(n_1, n_2, \dots, n_\eta) \approx \sum_{i_1=1}^M \dots \sum_{i_\eta=1}^M \alpha(i_1, \dots, i_\eta) \prod_{j=1}^{\eta} \psi_{i_j}(n_j), \quad (3)$$

sendo M o número de filtros ortogonais usados para aproximar os núcleos e os coeficientes $\alpha(i_1, \dots, i_\eta)$ projeções dos núcleos em uma base ortogonal $\psi_{i_j}(n_j)$. Ignorando a dinâmica dos núcleos de alta ordem, a representação discreta da série de Wiener segue a expressão (Rugh (1991)):

$$x(k) = \sum_{\eta=1}^N \sum_{i_1=1}^M \dots \sum_{i_\eta=1}^M \alpha(i_1, \dots, i_\eta) \prod_{j=1}^{\eta} l_{i_j}(k), \quad (4)$$

sendo N a ordem e $l_{i_j}(k)$ é o sinal de entrada (força de excitação) $u(k)$ filtrado por uma base ortogonal $\psi_{i_j}(n_j)$:

$$l_{i_j}(k) = \sum_{\tau_j=0}^{\varepsilon} \psi_{i_j}(\tau_j) u(k - \tau_j), \quad (5)$$

sendo ε o atraso de memória do sistema. No presente trabalho somente os dois primeiros núcleos são usados para descrever os dados de entrada e saída. Considerando as propriedades de simetria dos núcleos pode-se escrever:

$$h_1(n_1) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \alpha(i_1) \psi_{i_1}(n_1), \quad (6)$$

$$h_2(n_1, n_2) = \sum_{i_1=1}^{M_2} \sum_{i_2=1}^{i_1} \alpha(i_1, i_2) \psi_{i_1}(n_1) \psi_{i_2}(n_2). \quad (7)$$

onde M_1 e M_2 são os números de filtros ortogonais para identificar os núcleos $\alpha(i_1)$ e $\alpha(i_1, i_2)$.

Vários tipos de funções ortogonais $\psi_{i_j}(n_j)$ podem ser usadas para representar os núcleos $h_1(n_1)$ e $h_2(n_1, n_2)$ nas equações (6) e (7). Por exemplo, os polinômios de Chebyshev ou Legendre. Entretanto, estas funções não são relacionadas diretamente a dinâmica do sistema por equações a diferenças finitas. Assim, o número de termos na expansão das eqs. (6) e (7) deve ser alto. Felizmente, os filtros de Kautz são muito efetivos na representação dos núcleos ortogonais. Os filtros de Kautz contém pólos com informação da dinâmica dominante do sistema (Kautz (1954), Silva *et al.* (2008), Wahlberg (1994) e den Hof *et al.* (1995)). Estes pólos são capazes de reduzir drasticamente o número de parâmetros exigidos para estimar os núcleos $\alpha(i_1)$ e $\alpha(i_1, i_2)$. O filtro de Kautz $\Psi_n(z)$ tem um par de pólos complexos conjugados que são dados por $\beta = \sigma + j\omega$ e $\bar{\beta} = \sigma - j\omega$ e constituem uma boa generalização para sistemas vibratórios de segunda ordem.

Uma importante e difícil tarefa para contornar é a definição dos pólos β e $\bar{\beta}$ usados para construir os filtros. Um procedimento para estimar os pólos e núcleos $\alpha(i_1)$ e $\alpha(i_1, i_2)$ simultaneamente de forma iterativa foi descrito em Rosa *et al.* (2007). Outra formulação foi proposta em Kibangou *et al.* (2005) considerando bases generalizadas ortonormais. Além disto, em dinâmica linear de estruturas, as matrizes de massa \mathbf{M} , amortecimento \mathbf{C} e rigidez \mathbf{K} são disponíveis pelo método de elementos finitos ou de outras análises prévias. Então esta informação pode ser usada para estimar os pólos de Kautz no plano z . O pólo complexo dominante do modelo linear pode ser escolhido como pólo de Kautz. Rosa *et al.* (2007) concluiu que o pólo complexo dominante do sistema linear poderia ser usado como parâmetro de controle do filtro de Kautz. Porém, a escolha dos pólos de Kautz baseados na porção linear do sistema dinâmico somente seria feita se o sistema não-linear fosse muito simples. No presente trabalho, os pólos são ajustados depois de um procedimento de tentativa e erro baseado na função de resposta em frequência do sistema.

Os elementos em um conjunto de filtros de Kautz são dados por (den Hof *et al.* (1995), Wahlberg (1994) e Rosa *et al.* (2007)):

$$\Psi_{2n}(z) = \frac{\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}z}{z^2 + b(c-1)z - c} \left[\frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right]^{n-1}, \quad (8)$$

$$\Psi_{2n-1}(z) = \frac{\sqrt{1-c^2}z(z-b)}{z^2 + b(c-1)z - c} \left[\frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right]^{n-1}, \quad (9)$$

sendo as constante b e c relacionadas aos pólos β e $\bar{\beta}$ a partir de:

$$b = \frac{(\beta + \bar{\beta})}{(1 + \beta\bar{\beta})}, \quad (10)$$

$$c = -\beta\bar{\beta}. \quad (11)$$

As equações (8) e (9) são usadas para filtrar os sinais de entrada $u(k)$, e, então, podem ser substituídas nas eq. (5) para obter os sinais $l_{i_1}(k)$ e $l_{i_2}(k)$. As funções de resposta ao impulso (IRF) das equações (8) e (9) são usadas para estimar os núcleos no domínio físico.

3. AJUSTE DE MODELOS NÃO-LINEARES USANDO SÉRIES DE WIENER

O uso do primeiro núcleo de Wiener, a clássica IRF, ou no domínio da frequência da função de resposta em frequência (FRF), é empregado de maneira rotineira nas técnicas de ajuste de modelos lineares (Pereira *et al.* (1994) e Friswell and Mottershead (1995)). Uma métrica para ajuste de modelos usando o primeiro núcleo pode ser escrita por:

$$\min_{\mathbf{d}} F(\mathbf{d}) = \frac{\|\alpha_{1exp} - \alpha_{1mod}\|^2}{\|\alpha_{1exp}\|^2} \quad (12)$$

sendo \mathbf{d} um vetor de parâmetro linear para ajuste e $\alpha_{1exp} = \sum_{i_1=1}^{M_1} \alpha(i_1)_{1exp}$ e $\alpha_{2mod} = \sum_{i_1=1}^{M_1} \alpha(i_1)_{1mod}$. O núcleo $\alpha(i_1)_{1mod}$ muda seguindo a modificação do vetor de parâmetros lineares \mathbf{d} em cada passo de iteração.

As aplicações na literatura de núcleos de Volterra de alta ordem não são tão comuns para ajuste. Assim, usar os núcleos de Volterra $h_2(n_1, n_2)$ ou $h_3(n_1, n_2, n_3)$ para construir uma função objetivo para ajuste de modelos com não-linearidades locais em um modelo FE não é muito empregado. A maior vantagem em usar um métrica envolvendo séries de Volterra é a separação entre duas contribuições, uma linear $h_1(n_1)$, e outra não-linear, $h_2(n_1, n_2)$. A principal ideia é comparar o segundo núcleo ortogonal de Wiener extraído a partir dos dados experimentais, chamado aqui de $\alpha(i_1, i_2)_{2exp}$, com outro núcleo de Wiener obtido do modelo matemático do sistema a ajustar, por exemplo, um modelo FE da estrutura. Este novo núcleo é chamado de $\alpha(i_1, i_2)_{2mod}$.

A métrica para ajuste do modelo não-linear pode ser escrita como um erro quadrático normalizado entre os núcleos experimentais e do modelo:

$$\min_{\mathbf{p}} J(\mathbf{p}) = \frac{\|\alpha_{2exp} - \alpha_{2mod}\|^2}{\|\alpha_{2exp}\|^2}, \quad (13)$$

sendo $\alpha_{2exp} = \sum_{i_1=1}^{M_2} \sum_{i_2=1}^{M_2} \alpha(i_1, i_2)_{2exp}$ e $\alpha_{2mod} = \sum_{i_1=1}^{M_2} \sum_{i_2=1}^{M_2} \alpha(i_1, i_2)_{2mod}$. O núcleo $\alpha(i_1, i_2)_{2mod}$ muda seguindo a modificação dos parâmetros não-lineares \mathbf{p} em cada passo de iteração.

Poderia ter sido usados os núcleos no espaço físico $h_2(n_1, n_2)_{exp}$ e $h_2(n_1, n_2)_{mod}$. Entretanto, o tamanho das matrizes $h_2(n_1, n_2)_{exp}$ e $h_2(n_1, n_2)_{mod}$ é maior do que os núcleos na base ortogonal de Kautz $\alpha(i_1, i_2)_{exp}$ e $\alpha(i_1, i_2)_{mod}$. O problema aqui é escolher uma função objetivo capaz de representar bem as diferenças entre as duas matrizes $\alpha(i_1, i_2)_{exp}$ e $\alpha(i_1, i_2)_{mod}$.

4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Esta seção apresenta um teste numérico para ilustrar a metodologia para ajuste dos parâmetros lineares e não-lineares em modelo FE usando os núcleos de Wiener. O procedimento apresentado é composto pelos seguintes passos:

- Modelo de elementos finitos de um pórtico tridimensional com uma não-linearidade local bem localizada e com forma conhecida.
- Simulação dos dados experimentais através da solução da equação não-linear do movimento assumindo todos os parâmetros exatos e bem conhecidos. Este modelo de referência é empregado para produzir os dados "experimentais" de deslocamento. Em uma forma prática, seriam usados os dados provenientes de testes modais.
- Usando os dados "experimentais" de deslocamento e excitação da força medidos, o primeiro e o segundo núcleo de Wiener são identificados. Informação espectral pode ser usada para ajudar na escolha dos pólos dos filtros de Kautz para reduzir o número de parâmetros a estimar.
- Um segundo modelo é proposto considerando desconhecido o valor de algum parâmetro linear ou não-linear da estrutura. A resposta simulada considerando estes parâmetros variantes em uma faixa de busca é simulada. Para cada caso, os núcleos do modelo são estimados. As funções objetivos nas equações (12) e eq. (13) são calculadas e avaliadas.

Cada um dos tópicos anteriores são detalhados na sequência.

4.1 Modelagem do sistema não-linear

O desempenho relativo das métricas das equações (12) e eq. (13) são investigados com base em algumas simulações numéricas usando um pórtico 3D, fig. (1). Esta estrutura é similar a usada no trabalho de Kersch (2002) e é composta por vigas de alumínio com seção circular, módulo de Young $E = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$, densidade $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, momento de inércia de área $I_y = 4.64 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ e $I_z = 4.64 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ e área circular da seção transversal $A = 1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Esta estrutura é discretizada em 12 nós com seis graus de liberdade (dof) cada (três de translação em x , y , z e três rotações em cada um destes eixos). As colunas são engastadas no piso em todas as direções dos nós 1, 2, 3 e 4. O total de dofs é 48, então o vetor de deslocamentos é $\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{48}\}^T$.

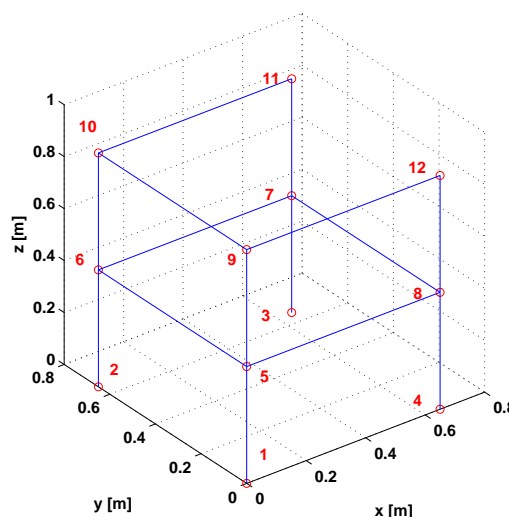


Figure 1. Pórtico tridimensional.

Um elemento de rigidez não-linear é conectado entre os nós 11 e 12. Este elemento não-linear é uma simples mola com rigidez cúbica com $k_{nl} = 1 \times 10^8 \text{ N/m}^3$. A força não-linear neste elemento é dada por:

$$\mathbf{f}_{nl}(k_{nl}) = k_{nl} (u_{44} - u_{38})^3 \quad (14)$$

sendo u_{38} e u_{44} os deslocamentos relativos dos dofs nas direções y dos nós 11 e 12, respectivamente. A força de excitação é aplicada ao longo da direção y do nó 12 (dof 44). A equação não-linear do movimento é descrita por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{nl}(k_{nl}) = \mathbf{F} \quad (15)$$

sendo \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, respectivamente, obtidas pelo método FE. A matriz de amortecimento é considerado como sendo $\mathbf{C} = 10 \times 10^{-4} \mathbf{K}$. A força \mathbf{F} aplicada no *drive point* é uma excitação escolhida de acordo com o teste feito, podendo ser uma excitação aleatória limitada na faixa de frequência de 0 até 100 Hz ou uma excitação senoidal na frequência de 60 Hz. Os dados de referência são obtidos resolvendo a eq. (15) considerando exatos os valores de todos os parâmetros. Estes sinais são nomeados como dados experimentais. A eq. (15) é resolvida numericamente através do método de Newmark com o algoritmo de Newton-Raphson. A taxa de amostragem ajustada foi de 2 kHz e o número de amostras foi de $N = 8000$.

A FRF no *driving point* é mostrada na fig. (2). Este gráfico de receptância mostra a FRF linear calculada conhecidas as matrizes estruturais \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} e assumindo $k_{nl} = 0$, além da FRF estimada usando densidade espectral de potência e o estimador H_1 quando a força aplicada é um ruído aleatório com faixa limitada entre 0 – 100 Hz. Observa-se a presença de distorções em torno de 60 Hz que estão relacionadas qualitativamente a presença de comportamento não-linear. Os seis primeiros modos calculados com o modelo FE linear de referência são mostrados na figura (3). A análise de auto-vetores mostra que o quinto modo é local e afeta primariamente a região do elemento não-linear que é conectado ao sistema, que corresponde a faixa de frequência de 60 Hz. Neste sentido, um melhor sinal de excitação para identificação seria a aplicação de um força senoidal ou do tipo *chirp* na faixa de 60 Hz para ativar o comportamento não-linear na estrutura.

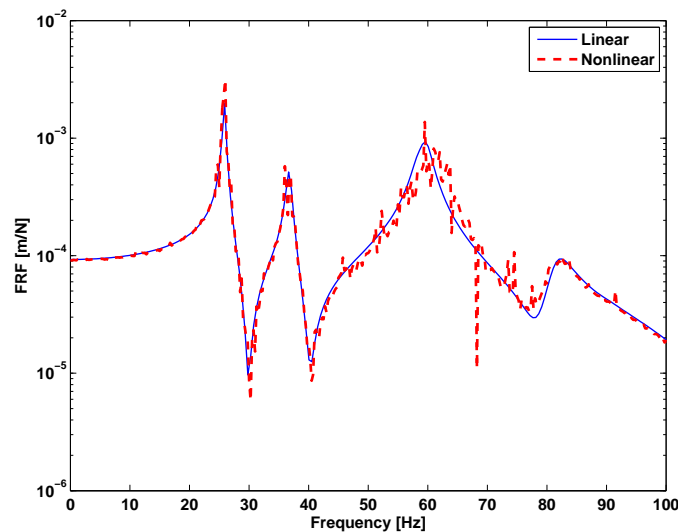


Figure 2. FRF no *driving point* (dado experimental e excitação aleatória).

4.2 Identificação experimental do núcleo de Wiener

Uma vez os dados experimentais obtidos, o núcleo de Wiener é estimado. Em estruturas reais um número limitado de sensores é empregado, além disto, tratar com múltiplas entradas e saída é necessário considerar os termos cruzados dos núcleos. Para evitar isto, no presente artigo somente um ponto de medida (*drive point*) é utilizado para calcular os dois primeiros núcleos de Wiener. Primeiramente, os sinais foram normalizados em uma faixa de $[-1 \ 1]$ para evitar problemas de mal condicionamento numérico e convergência. O par de pólos complexos de Kautz para o primeiro e o segundo núcleo de Wiener são ajustados no domínio de Laplace como $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. Para ajustar o primeiro núcleo, a frequência de 25 Hz é assumida, que pode ser obtida por uma prévia análise espectral realizada com os dados experimentais. Baseado nesta frequência e com um valor de fator de amortecimento próximo à 0.018, o pólo é ajustado como $s_{1,2} = -3.03 \pm 162j$ para o primeiro núcleo. Este valor é relativo ao comportamento do primeiro modo linear. O segundo núcleo é relacionado ao comportamento quadrático (não-linear) nos dados. Um análise qualitativa na FRF da fig. 2) mostrou que a região próxima à 60 Hz é muito sensível a presença do parâmetro não-linear. Então, esta frequência é escolhida como pólo complexo do filtro de Kautz para identificar o segundo núcleo de Wiener. Assim, o segundo pólo é ajustado como $s_{1,2} = -6.9 \pm 3.7j$.

O filtro de Kautz é um sistema discreto no tempo, então o pólo equivalente no domínio z pode ser obtido utilizando uma transformação bilinear. Assim, os pólos no plano z são $z = 0.99 \pm 0.08j$ para o primeiro núcleo e $z = 0.97 \pm 0.18j$ para identificar o segundo núcleo. Neste exemplo, um baixo valor de M filtros de Kautz pode ser empregado na identificação. Testes mostraram que $M_1 = 2$ e $M_2 = 2$ são suficientes para uma boa identificação. O número de atrasos de memória foi ajustando em $\epsilon = 1500$. A figura (4) apresenta o resultado de identificação do segundo núcleo experimental com estes parâmetros. A projeção ortogonal de $h_2(n_1, n_2)$ nas funções de Kautz é usada como função objetivo no procedimento de ajuste do modelo não-linear.

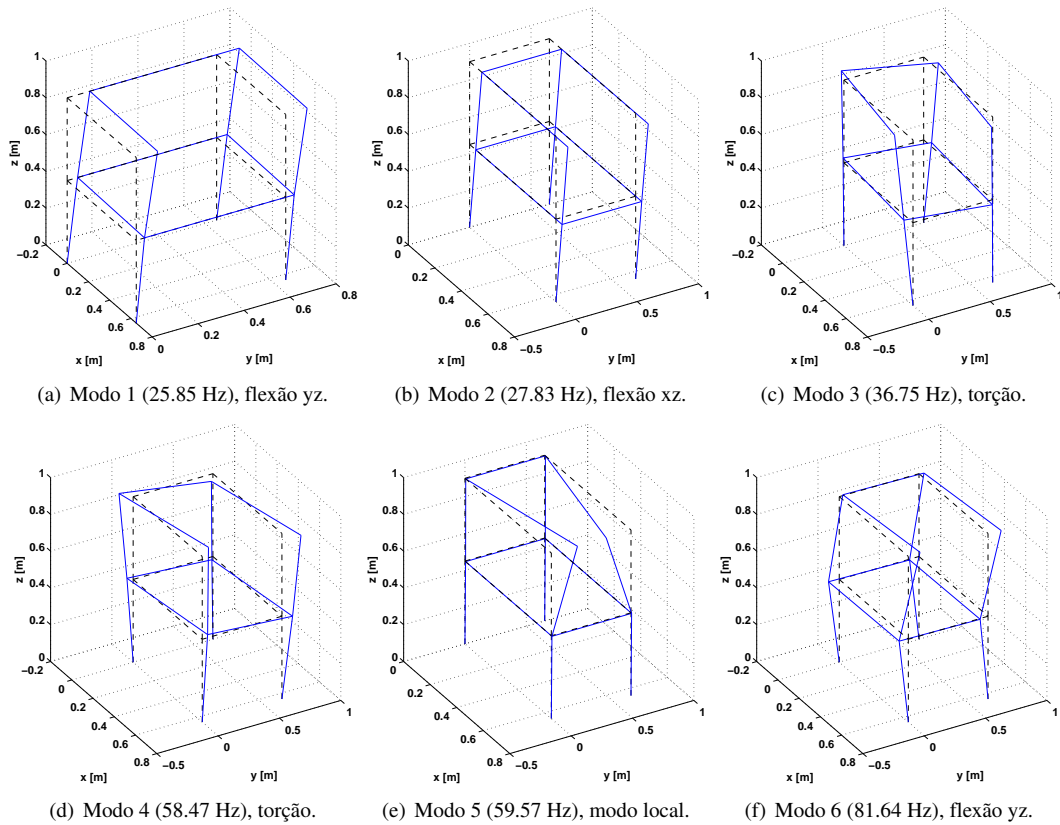


Figure 3. Seis primeiros modos calculados com o modelo linear.

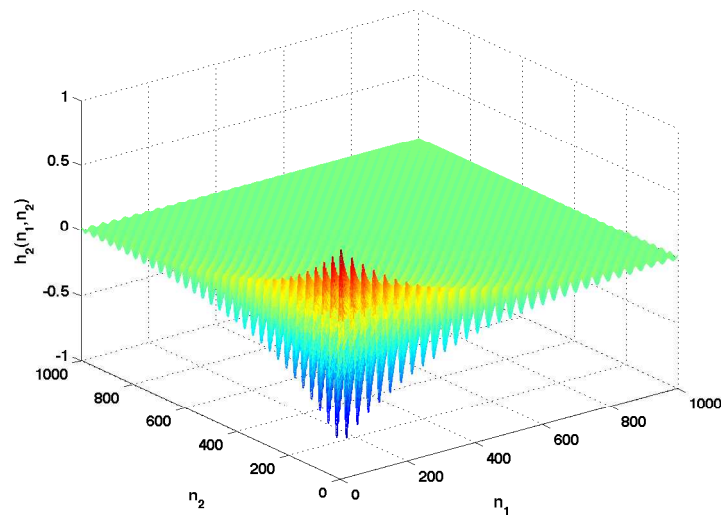


Figure 4. Núcleo experimental $h_2(n_1, n_2)$ de um modelo de Wiener.

4.3 Desempenho das métricas propostas para ajuste

A figura (5) apresenta a função objetivo baseada na eq. (13) assumindo variação do coeficientes não-linear k_{nl} de 0.5×10^8 até 5×10^8 N/m³ e com base no sinal de excitação limitado em 100 Hz. O círculo o representa o valor exato do parâmetro. Para esta condição o mínimo encontrado na curva não corresponde ao valor exato de k_{nl} .

Agora se fosse usada a entrada senoidal na faixa próxima a 60 Hz, o comportamento não-linear na estrutura seria melhor representado, como explicado anteriormente. A figura (6) mostra a função objetivo da eq. (13) considerando a mesma variação do parâmetro não-linear k_{nl} e simulando com base na excitação senoidal de 60 Hz. Neste caso, o valor mínimo encontrado na curva corresponde ao valor exato.

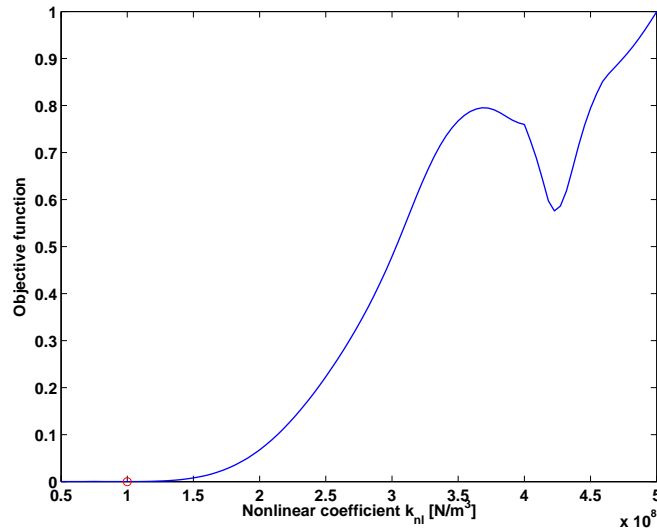


Figure 5. Função objetivo baseada na eq. (13) considerando variação do coeficiente não-linear k_{nl} e baseada no sinal de entrada aleatório limitado em até 100 Hz. O círculo o representa o valor exato do parâmetro.

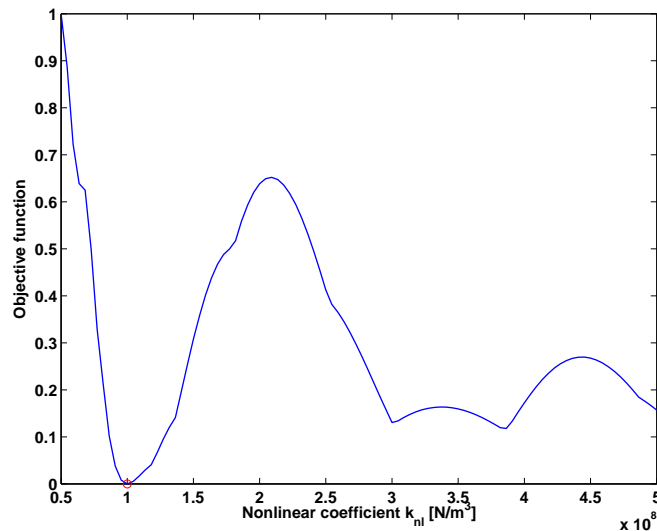
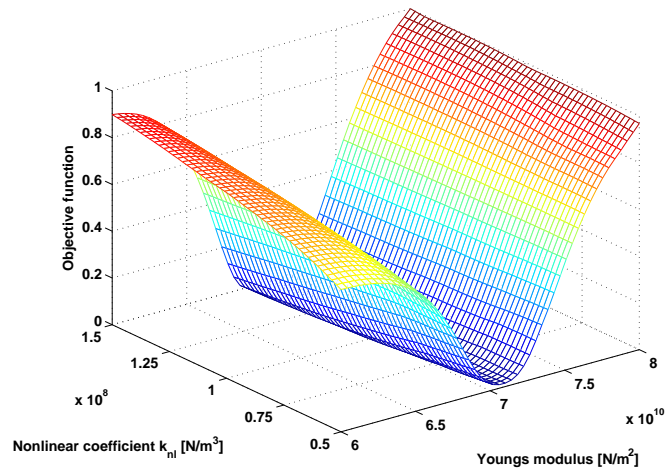


Figure 6. Função objetivo baseada na eq. (13) considerando variação do coeficiente não-linear k_{nl} e baseada no sinal de entrada senoidal de 60 Hz. O círculo o representa o valor exato do parâmetro.

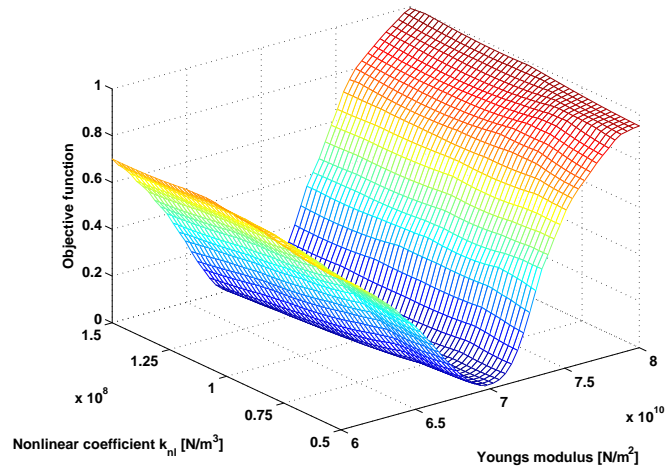
Outro teste é usado para avaliar a eficiência das métricas para identificar o parâmetro não-linear k_{nl} e o módulo de Young E considerando a excitação senoidal de 60 Hz. As funções objetivos normalizadas das equações (12) e (13) são mostradas nas figuras 7(a) e 7(b), respectivamente. A faixa de busca do módulo de Young E é definida de 6×10^{10} até 8×10^{10} N/m². A faixa do parâmetro k_{nl} é a mesma usada em outras simulações. O maior gradiente e sensibilidade nas métricas baseadas no primeiro núcleo de Wiener, eq. (12), e no segundo núcleo, eq. (13), é relativo ao valor do parâmetro E . Porém, se for analisado o parâmetro não-linear k_{nl} , o maior gradiente encontrado é usando o segundo núcleo de Wiener. As figuras 8(a), 8(b), 8(c) e 8(d) ilustram esta observação. Pode-se observar um melhor gradiente e uma tendência para o valor exato do parâmetro não-linear usando as métricas envolvendo o segundo núcleo de Wiener. Assim, o segundo núcleo é um melhor candidato para ajustar tanto o parâmetro linear, quanto o não-linear de forma simultânea. O valor mínimo encontrado na função objetivo dada por (13) corresponde a combinação exata dos parâmetros lineares e não-lineares.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um novo método para ajuste de modelos FE com parâmetro não-lineares locais foi apresentado. As funções objetivos foram propostas e simuladas usando os núcleos de Volterra identificados usando bases de Kautz, conhecidos como núcleos



(a) Função objetivo baseada na eq. (12).



(b) Função objetivo baseada na eq. (13).

Figure 7. Função objetivo normalizada considerando variação do coeficiente k_{nl} e módulo de Young E . Sinal de excitação considerado como sendo uma senóide com 60 Hz.

de Wiener. A formulação proposta ainda não é *plug-and-play* para ser usada em casos industriais uma vez que é necessário identificar os pólos complexos nos filtros de Kautz corretamente e, no geral, em aplicações práticas eles devem ter múltiplos pólos. Entretanto, o uso de filtros ortogonais generalizados pode ser bem empregado para contornar este ponto. Outra questão é relacionada ao conhecimento da forma matemática e localização da não-linearidade dentro do sistema mecânico. Na presente aplicação foi assumida informação física suficiente para o usuário ajustar e definir o tipo de não-linearidade corretamente.

Os resultados apresentados neste artigo mostraram o comportamento e formas das métricas nos exemplos simulados. Em todos os casos, o valor exato correspondia exatamente ao valor mínimo das funções objetivos. No caso de ajustar os dois parâmetros, um maior gradiente envolvendo o parâmetro linear foi observado. Funções multiobjetivos para minimizar as duas métricas de forma simultânea poderiam melhorar os resultados, assim como análise prévia de sensibilidade. Quando a não-linearidade afeta termos de alta ordem, como o terceiro núcleo, a aplicação de funções de Kautz é essencial para reduzir a complexidade e o número de termos na estimação dos núcleos. Pesquisas nestas direções tem sido iniciadas pelo autor.

6. REFERÊNCIAS

- Berman, A. and Nagy, E.J., 1971. "Theory of incomplete models of dynamics structures". *AIAA Journal*, Vol. 9, pp. 1481–1487.
- Billings, S.A., 1980. "Identification of nonlinear systems - a survey". In *IEEE* 127, pp. 272–285.
- den Hof, P.M.V., Heuberger, P.S.C. and Bokors, J., 1995. "System identification with generalized orthonormal basis function". *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1821–1834.
- Doebling, S.W., Farrar, C.R., Prime, M.B. and Shevitz, D.W., 1996. "Damage identification and health monitoring of

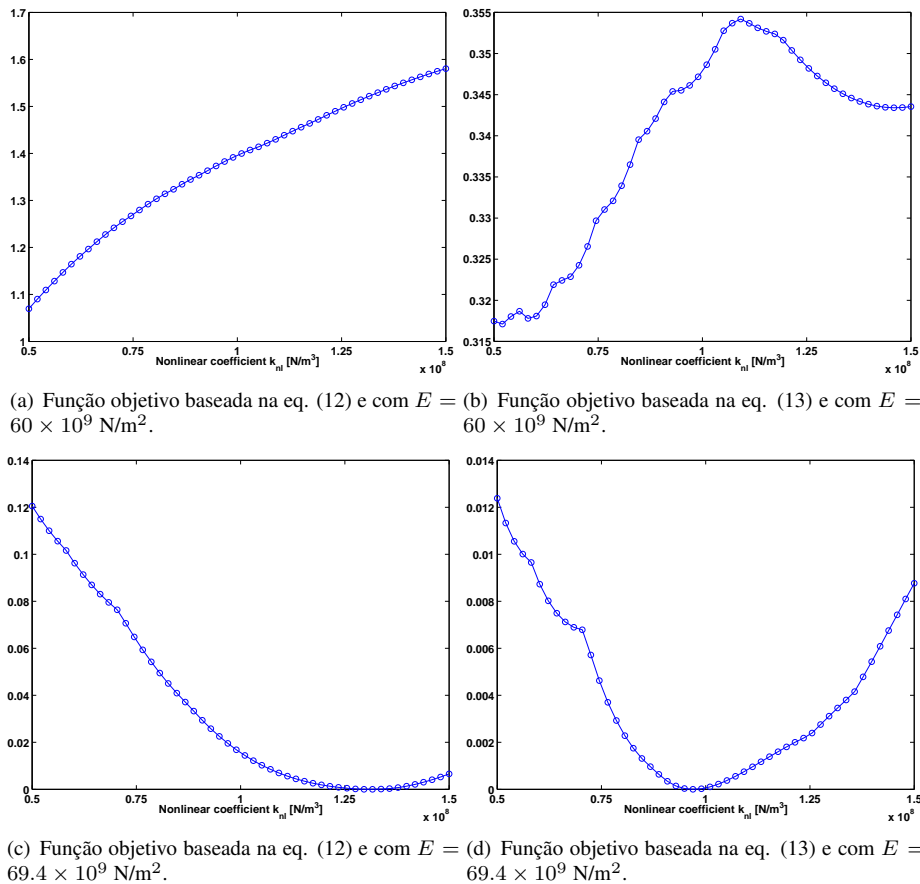


Figure 8. Função objetivo normalizada considerando variação do coeficiente k_{nl} e módulo de Young E . Sinal de excitação considerado como sendo uma senóide com 60 Hz.

structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review”. Technical report, Los Alamos National Laboratory (LANL).

- Friswell, M.I. and Mottershead, J.E., 1995. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academy Publishers.
- Katfagyiotis, L.S., 1998. “Updating models and their uncertainties: model identifiability”. *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 124–463.
- Kautz, W.H., 1954. “Transient synthesis in the time domain”. *IRE Trans. Circ. Theory*, Vol. CT-1, pp. 29–39.
- Kerschen, G., 2002. *On the Model Validation in Non-linear Structural Dynamics*. Ph.D. thesis, Université de Liège.
- Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A.F. and Golinval, J.C., 2006. “Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics.” *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, pp. 502–592.
- Kibangou, A.Y., Favier, G. and Hassani, M., 2005. “Selection of generalized orthonormal bases for second-order volterra filters”. *Signal Processing*, Vol. 85, No. 12, pp. 2371–2385.
- Pereira, J.A., Heylen, W. and Sas, P., 1994. “Model updating and failure detection based on experimental frfs: case study in space frame structure”. In *19th International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*. pp. 669–681.
- Rosa, A., Campello, R.J.G.B. and Amaral, W.C., 2007. “Choice of free parameters in expansions of discrete-time volterra models using kautz functions”. *Automatica*, Vol. 43, pp. 1084–1091.
- Rugh, W.J., 1991. *Nonlinear System Theory – The Volterra/Wiener Approach*. The Johns Hopkins University Press.
- Schetzen, M., 1980. *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. New York: Wiley.
- Silva, S., Cogan, S. and Foltête, E., 2010. “Nonlinear identification in structural dynamics based on wiener series and kautz filters”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 24, pp. 52–58.
- Silva, S., Cogan, S., Foltête, E. and Buffe, F., 2009. “Metrics for nonlinear model updating in structural dynamics”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 31, No. 1, pp. 27–34.
- Silva, S., Junior, M.D. and Junior, V.L., 2008. “Identification of mechanical systems through kautz filter”. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 15, No. 6, pp. 849–865.
- Wahlberg, B., 1994. “System identification using kautz models”. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-39, pp. 1276–1282.

Wiener, N., 1958. *Nonlinear Problems in Random Theory*. MIT Press Research Monographs.

Worden, K. and Tomlinson, G.R., 2001. *Nonlinearity in Structural Dynamics*. London : Institute of Physics Publishing.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído neste trabalho.