

## **ANÁLISE DE SUAVIDADE DE TRAJETÓRIAS ROBÓTICAS DEFINIDAS POR SEGMENTOS DE RETAS CONCORDANTES POR POLINOMIAIS**

Werley Rocherter Borges Ferreira, [werley\\_meca@hotmail.com](mailto:werley_meca@hotmail.com)

João Carlos Mendes Carvalho, [jcmendes@mecanica.ufu.br](mailto:jcmendes@mecanica.ufu.br)

Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Av. João Naves de Ávila, 2121, Santa Mônica-CEP 38408-288 - Uberlândia- Minas Gerais

**Resumo:** Em manipuladores industriais e máquinas ferramentas são geralmente utilizadas trajetórias compostas por segmentos lineares com concordância parabólica (LSPB – “Linear Segments with Parabolic Blends”). Este tipo de trajetória é muito utilizado por permitir um movimento rápido e também devido à baixa complexidade computacional. No entanto, neste método a aceleração tem um perfil retangular, o que introduz transientes no movimento, provocando vibrações estruturais o que resulta em deficiência de acompanhamento do trajeto e aumentando o desgaste dos atuadores. Para suavizar o movimento, geralmente é utilizada uma função polinomial de maior ordem. Isto é possível pela imposição de novas condições de restrição nos pontos de concordância da trajetória. Com a eliminação das descontinuidades das acelerações nas articulações, as vibrações estruturais são reduzidas. Porém, o trajeto desenvolvido pelo manipulador passa por uma distância relativamente grande do ponto de interseção das duas retas. Em algumas tarefas específicas é necessário que o trajeto passe o mais próximo possível dos pontos que definem o trajeto. Neste trabalho, são apresentadas trajetórias compostas por segmentos lineares com concordância por funções polinomiais com ordem superior a dois. Para a obtenção das mesmas será considerada uma condição de proximidade entre a curva e o ponto de interseção dos segmentos que definem a trajetória, além da continuidade de posição, velocidade, aceleração e jerk. Exemplos são apresentados para a análise da metodologia.

**Palavras-chave:** Concordância polinomial, Planejamento de trajetórias, Robô, Robótica.

### **1. INTRODUÇÃO**

A automação industrial pode ser classificada de duas formas: rígida e flexível. Na rígida, cada sistema possui uma atividade específica. Na flexível, o sistema é multitarefa e interligado por um sistema de gerenciamento onde os robôs têm participação importante no processo, visto que são sistemas eletromecânicos controláveis e programáveis para realizar diferentes tarefas.

Para cada tarefa que o robô realiza, a trajetória do seu elemento terminal deve ser definida em sua programação. Esta trajetória pode ser descrita em termos das coordenadas articulares (espaço das articulações) ou em função das coordenadas que definem o trajeto do elemento terminal no espaço (espaço da tarefa). Planejamento de tarefas no espaço das articulações é aplicado em ambientes de trabalho onde não existem obstáculos e é desejável que o movimento ocorra o mais rápido possível. Já o planejamento no espaço da tarefa é muito utilizado em operações onde o trajeto especificado deve ser seguido corretamente tais como colagem, corte, e soldagem.

Em diversos tipos de manipuladores industriais e máquinas ferramentas são utilizadas trajetórias compostas por segmentos lineares com concordância parabólica (LSPB – “Linear Segments with Parabolic Blends”). Este tipo de trajetória é muito utilizado por permitir um movimento rápido e também devido à baixa complexidade computacional. No entanto, neste método a aceleração tem um perfil retangular, o que introduz transientes no movimento, provocando vibrações estruturais o que resulta em deficiência de acompanhamento do trajeto e aumentando o desgaste dos atuadores. Para maior suavidade do movimento é necessário considerar condições de continuidade de velocidade e aceleração, o que é possível pela utilização de polinomiais de alta ordem ao invés de utilizar a concordância parabólica.

Em Lloyd (1991) é apresentada uma solução que concorda dois segmentos de reta concorrentes utilizando polinômios de concordância de quinta ordem, pois na obtenção do polinômio são consideradas seis condições de contorno: posição, velocidade e aceleração nos pontos inicial e final da interpolação. Isso garante um movimento mais suave que o LSPB, porém, não se tem o controle da distância entre o ponto de interseção das retas e a curva e não se tem a garantia da continuidade da aceleração, ou seja, a tangente da curva da aceleração no ponto de concordância apresenta dois valores (mudança brusca de direção).

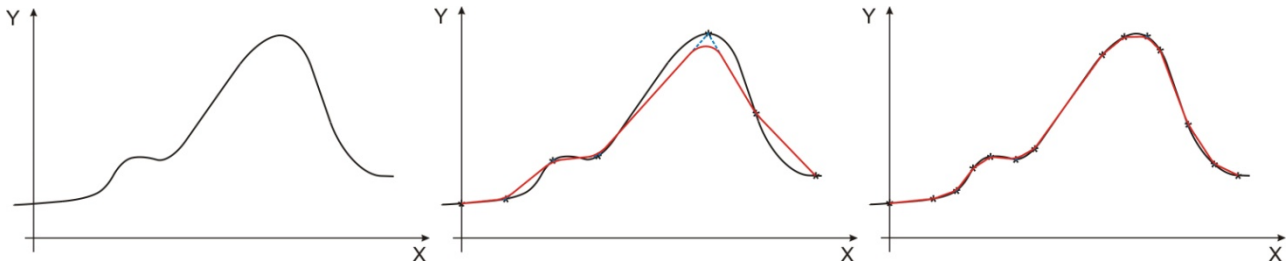
Neste trabalho é apresentada a modelagem considerando o jerk nulo nos pontos de concordância, garantindo maior suavidade ao movimento, e uma condição de proximidade do polinômio ao ponto de interseção dos dois segmentos de reta. São apresentados também resultados de simulações aplicadas a um robô de 6gdl.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Em algumas atividades é necessário que o robô descreva uma trajetória suave, embora ela tenha sido definida por pontos. Isto significa que o robô não pode operar com o princípio de “pick-and-place” onde, em cada ponto que define o trajeto, a velocidade inicial e final são nulas.

Uma das alternativas para a obtenção de uma trajetória suave consiste em definir segmentos de reta unindo os pontos do trajeto e, posteriormente, efetuando concordância entre os segmentos, conforme esquematizado na Fig. (1).

Neste caso, a partir da trajetória requerida, Fig. (1a) definem-se os pontos que melhor representam a trajetória. A escolha adequada dos pontos e sua quantidade permitirão obter uma trajetória mais próxima da requerida, conforme esquematizado nas Figs. (1b) e (1c).

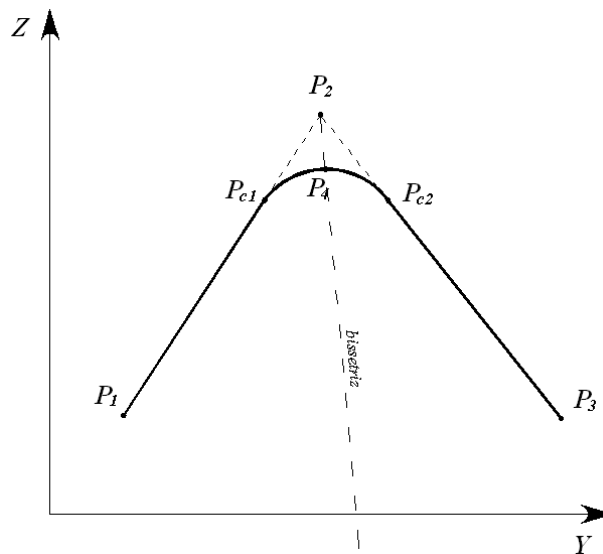


**Figura 1. Princípio de planejamento de trajetórias por segmentos de reta concordantes por polinomiais. a) Trajetória requerida; b) Trajetória planejada inadequada; c) Trajetória melhor planejada.**

Neste tipo de trajetória, como pode ser observado na Fig. (1), o polinômio concordante não passa pelos pontos que definem o trajeto.

A trajetória pode ser planejada tanto em termos de coordenadas articulares como em termos das coordenadas da tarefa. No entanto, quando planejada no espaço das articulações, o elemento terminal não descreverá, necessariamente, um trajeto com perfil similar. Então, este tipo de planejamento de trajetória é mais adequado quando realizado no espaço da tarefa onde se pode prescrever/evitar colisões no espaço de trabalho do robô, apesar de ter um custo computacional maior devido à necessidade de resolver a cinemática inversa.

Por motivo de simplicidade da apresentação do método, a análise será considerada no plano e entre três pontos consecutivos que definem um trecho da trajetória,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , conforme esquematizado na Fig. (2). Na figura estão apresentados também os pontos de concordância da polinomial com os segmentos de reta  $P_{c1}$  e  $P_{c2}$ .



**Figura 2. Trajetória definida por segmentos de retas concordantes por polinomial.**

Para obter uma trajetória suave é necessário que nos pontos de concordância exista a continuidade de posição, velocidade, aceleração e jerk. Pode-se também impor uma condição de proximidade, definida pela distância  $d$  entre o

polinômio e o vértice: distância entre  $P_2$  e  $P_4$  da Fig. (2). Logo, têm-se nove condições de contorno e, a polinomial concordante sendo de oitava ordem, Eq. (1).

$$z(y) = ay^8 + by^7 + cy^6 + dy^5 + ey^4 + fy^3 + gy^2 + hy + k \quad (1)$$

Em geral são consideradas condições de continuidade de posição, velocidade e aceleração nos pontos de concordância, além da consideração de que o tempo de aceleração e desaceleração no trecho curvo seja igual, reduzindo a polinomial para quarta ordem.

Segundo Angeles (1997), se a trajetória a ser seguida no espaço da tarefa é suave, a trajetória no espaço das articulações também será suave, desde que os problemas de singularidades sejam resolvidos. Portanto, para garantir a suavidade de movimento em todo trajeto, será considerada até a derivada terceira da trajetória em relação à  $y$  que, no espaço das articulações em relação ao tempo está relacionada com o jerk.

$$\dot{z}(y) = 8ay^7 + 7by^6 + 6cy^5 + 5dy^4 + 4ey^3 + 3fy^2 + 2gy + h \quad (2)$$

$$\ddot{z}(y) = 56ay^6 + 42by^5 + 30cy^4 + 20dy^3 + 12ey^2 + 6fy + 2g \quad (3)$$

$$\dddot{z}(y) = 336ay^5 + 210by^4 + 120cy^3 + 60dy^2 + 24ey + 6f \quad (4)$$

A condição de proximidade é determinada sobre a bissetriz formada pelos dois segmentos de retas. Dessa forma, é possível obter um ponto  $P_4$  sobre a bissetriz que possui uma distância  $d$  do ponto  $P_2$ , que é a condição de proximidade. O ponto  $P_4$  é uma condição de contorno para se obter o polinômio de oitava ordem e que está sobre bissetriz cuja equação é:

$$z(y) = a_B y + b_B \quad (5)$$

Da geometria analítica é possível obter os coeficientes da bissetriz da seguinte forma:

$$\vec{r}_1 = P_2 - P_1 \quad (6)$$

$$\vec{r}_2 = P_3 - P_2 \quad (7)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2|} \quad (8)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{P_{3z} - P_{2z}}{P_{3y} - P_{2y}} - \beta \quad (9)$$

Então,

$$a_B = \tan \alpha \quad (10)$$

O coeficiente linear da bissetriz pode ser calculado por:

$$b_B = P_{2z} - a_B P_{2y} \quad (11)$$

Com a equação da bissetriz conhecida, pode-se calcular a condição de proximidade:

$$(P_{4z} - P_{2z})^2 + (P_{4y} - P_{2y})^2 = d^2 \quad (12)$$

Onde:

$P_{4z}$ : coordenada  $z$  do ponto  $P_4$ ;  $P_{4y}$ : coordenada  $y$  do ponto  $P_4$ ;  $d$ : distância desejada entre  $P_2$  e  $P_4$ .

Assim, resolvendo o sistema de equações formado pelas Eqs. (5) e (12), as coordenadas de  $P_4$  são encontradas. Com  $P_4$ , os pontos de concordância  $P_{c1}$  e  $P_{c2}$ , coeficientes angulares  $a_1$  e  $a_2$  das retas nos pontos de concordância, e a derivada segunda e terceira nulas nas concordâncias definidas, é possível obter os coeficientes do polinômio de oitava ordem a partir do sistema de equações obtido pela substituição das condições de contornos nas Eqs. (1) a (4), ou seja:

$$\begin{cases}
 a.P_{c1y}^8 + b.P_{c1y}^7 + c.P_{c1y}^6 + d.P_{c1y}^5 + e.P_{c1y}^4 + f.P_{c1y}^3 + g.P_{c1y}^2 + h.P_{c1y} + k = P_{c1z} \\
 a.P_{c2y}^8 + b.P_{c2y}^7 + c.P_{c2y}^6 + d.P_{c2y}^5 + e.P_{c2y}^4 + f.P_{c2y}^3 + g.P_{c2y}^2 + h.P_{c2y} + k = P_{c2z} \\
 a.P_{4y}^8 + b.P_{4y}^7 + c.P_{4y}^6 + d.P_{4y}^5 + e.P_{4y}^4 + f.P_{4y}^3 + g.P_{4y}^2 + h.P_{4y} + k = P_{4z} \\
 8a.P_{c1y}^7 + 7b.P_{c1y}^6 + 6c.P_{c1y}^5 + 5d.P_{c1y}^4 + 4e.P_{c1y}^3 + 3f.P_{c1y}^2 + 2g.P_{c1y} + h = a_1 \\
 8a.P_{c2y}^7 + 7b.P_{c2y}^6 + 6c.P_{c2y}^5 + 5d.P_{c2y}^4 + 4e.P_{c2y}^3 + 3f.P_{c2y}^2 + 2g.P_{c2y} + h = a_2 \\
 56a.P_{c1y}^6 + 42b.P_{c1y}^5 + 30c.P_{c1y}^4 + 20d.P_{c1y}^3 + 12e.P_{c1y}^2 + 6f.P_{c1y} + 2g = 0 \\
 56a.P_{c2y}^6 + 42b.P_{c2y}^5 + 30c.P_{c2y}^4 + 20d.P_{c2y}^3 + 12e.P_{c2y}^2 + 6f.P_{c2y} + 2g = 0 \\
 336a.P_{c1y}^5 + 210b.P_{c1y}^4 + 120c.P_{c1y}^3 + 60d.P_{c1y}^2 + 24e.P_{c1y} + 6f = 0 \\
 336a.P_{c2y}^5 + 210b.P_{c2y}^4 + 120c.P_{c2y}^3 + 60d.P_{c2y}^2 + 24e.P_{c2y} + 6f = 0
 \end{cases} \quad (13)$$

### 3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Para o estudo de trajetórias foi escolhido o robô industrial de seis graus de liberdade, instalado no Laboratório de Automação e Robótica da FEMEC/UFU, modelo HP6 da Motoman, Fig. (3). Os movimentos deste robô partindo da base são: **S**, **L**, **U**, **R**, **B** e **T**, estes movimentos são definidos pelas coordenadas articulares denominadas por  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$  e  $q_6$ , respectivamente.

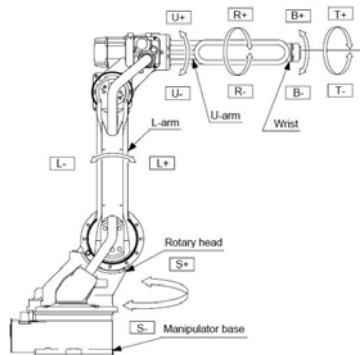


Figura 3. Robô HP6 da Motoman com as cotas e seu espaço de trabalho.

Como exemplo, é apresentado o resultado de trajetórias definidas pelos pontos  $P_1(0,420,425)$ ,  $P_2(0,600,100)$  e  $P_3(0,800,630)$ , os pontos de concordância  $P_{c1}(0,500,680)$  e  $P_{c2}(0,700,815)$ , sendo o trajeto realizado em 5s. Na Figura (4) está representada uma trajetória sem impor a condição de proximidade. Cabe salientar que, com a exclusão desta condição, o polinômio de concordância passa a ser de sétima ordem.

Outros três exemplos consideram valores distintos para a condição de proximidade de 50 mm, 20 mm, e 0 mm, cujas trajetórias estão representadas nas Figs. (5), (6) e (7), respectivamente.

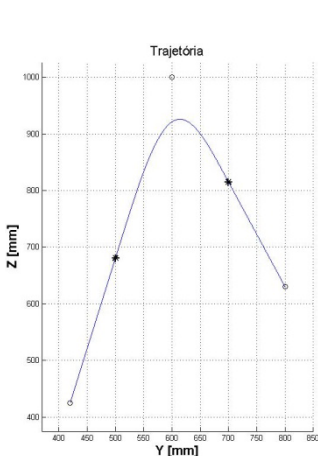


Figura 4. Trajetória sem condição de proximidade

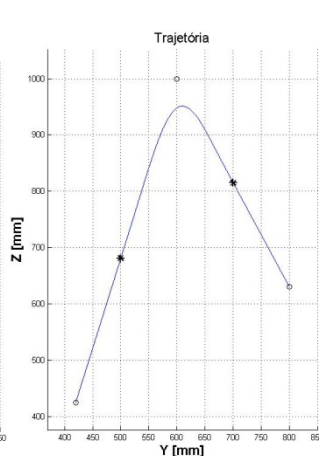


Figura 5. Trajetória com condição de proximidade de 50mm.

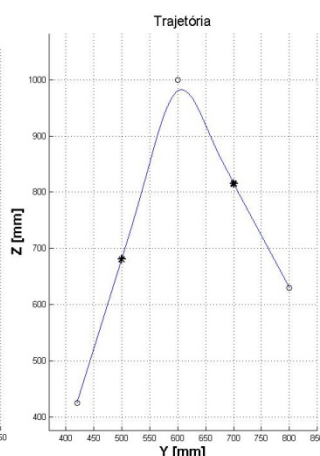


Figura 6. Trajetória com condição de proximidade de 20mm .

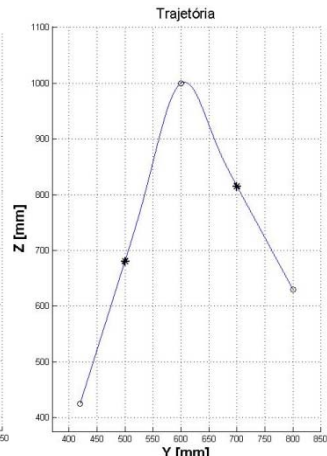


Figura 7. Trajetória com condição de proximidade de 0mm.

A partir da trajetória obtida é utilizado o modelo cinemático da estrutura é possível analisar o comportamento temporal de cada atuador. Sendo a aceleração um importante parâmetro, tanto para movimento quanto para o atuador, o seu comportamento é apresentado nas Figs. (8) a (11) para as trajetórias analisadas. Neste caso, são apresentados os perfis das acelerações para a articulação U, Fig. (3), definida pela coordenada  $q_3$ , por ter apresentado maiores níveis de aceleração.

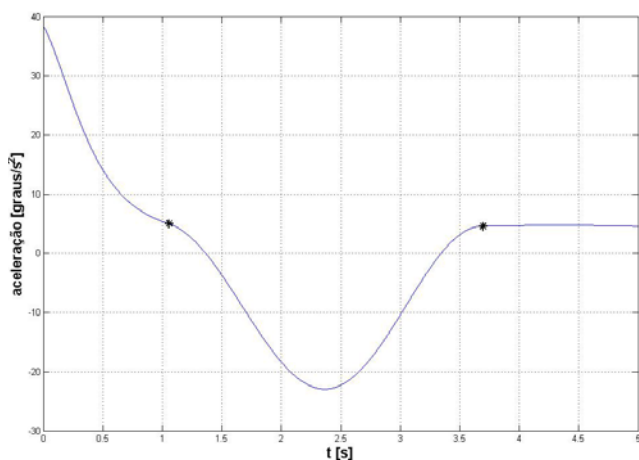


Figura 8. Aceleração angular de  $q_3$  para a trajetória sem condição de proximidade.

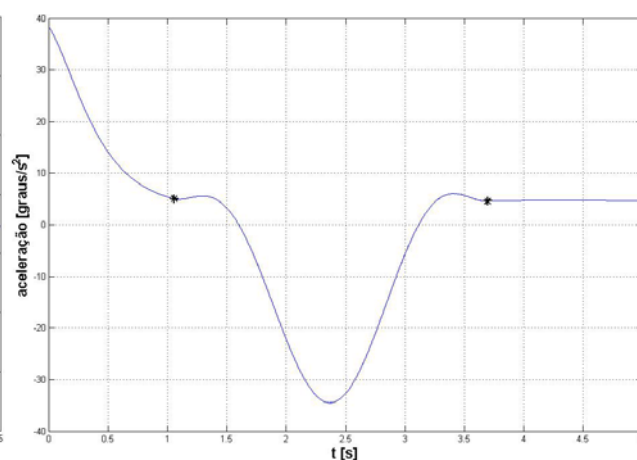


Figura 9. Aceleração angular de  $q_3$  para a trajetória com condição de proximidade de 50 mm.

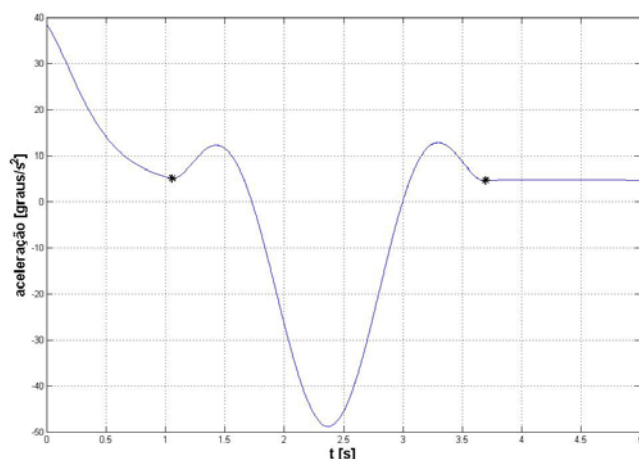


Figura 10. Aceleração angular de  $q_3$  para a trajetória com condição de proximidade de 20 mm.

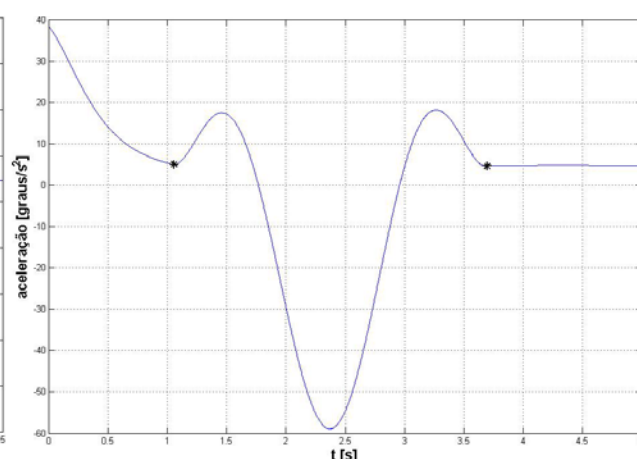


Figura 11. Aceleração angular de  $q_3$  para a trajetória com condição de proximidade de 0 mm.

Nas figuras (4) a (11), os pontos de concordância estão representados por um “\*”. Outro aspecto importante a ser observado é que quanto mais próximo do vértice, maior é a aceleração nas articulações.

Pode-se verificar pelas figuras que, no trecho linear, a aceleração é a mesma para todos os casos e, embora as derivadas segunda e terceira no espaço da tarefa tenham sido consideradas nulas, nos pontos de concordância o mesmo não ocorre com a aceleração da terceira articulação.

#### 4. CONCLUSÃO

O planejamento de trajetórias é muito importante para obter alta produtividade e para garantir a integridade tanto do robô como da unidade fabril e do produto. A concordância polinomial de segmentos de retas garante que o robô possa passar de um segmento de reta para outro sem paradas, permitindo um movimento contínuo. Quando acrescentada a condição de proximidade entre o polinômio e o vértice formado pelos segmentos de reta, foi possível observar que quanto mais a curva passa próxima do ponto, maiores são as acelerações nas articulações. Assim, respeitando as condições limites dos atuadores, pode-se definir a condição de proximidade.

Utilizando-se de métodos de recorrência podem-se definir trajetórias compostas por vários segmentos de reta. É claro que quanto maior o número de pontos utilizados para definir a trajetória, maior a acuracidade na execução do trajeto e maior o custo computacional para sua realização.

Estudos devem ser realizados de forma a incluir condições limites das características mecânicas dos atuadores.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais e ao CNPq pela concessão de bolsas e apoio financeiro ao projeto de pesquisa.

## 6. REFERÊNCIAS

- Angeles, J., 1997, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Springer-Verlag, New York.
- Bobrow, J. E., Dubowsky, S., Gibson, J. S., 1985, "Time-Optimal Control of Robotic Manipulators Along Specified Paths", *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 4, n° 3, pp: 3-17.
- Carvalho, J.C.M., 2008. "Planejamento de Trajetórias Robóticas", Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Material da disciplina GEM38 – Robótica.
- Castain, R. H., Paul, R. P., 1984, "An On-Line Dynamic Trajectory Generator", *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. 3, n° 1, pp: 68-72.
- Fisher, W. D., Mujtaba, M. S., 1988, "Minimum Ratio-Locked Profile Times for Robot Trajectories", *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp: 1054-1060.
- Lloyd, J., Hayward, V., 1993, "Trajectory Generation for Sensor-Driven and Time-Varying Tasks", *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 12, n° 4, pp: 380-393.
- Red, E., 2000, "A dynamic Optimal Trajectory Generator for Cartesian Path Following", *Robotica*, Vol.18, Part 5, pp: 451-458.
- Sciavicco L., Siciliano, B., 1996, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill Companies, Inc.
- Shin, K. G., McKay, N. D., 1985, "Minimum-Time Control of Robotic Manipulators with Geometric Path Constraints", *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. AC-30, n° 6, pp: 531-541.

# ANALYSIS OF SMOOTH OF ROBOT TRAJECTORIES DEFINED BY SEGMENTS OF STRAIGHT POLYNOMIAL BLENDS

Werley Rocherter Borges Ferreira, [werley\\_meca@hotmail.com](mailto:werley_meca@hotmail.com)  
João Carlos Mendes Carvalho, [jcmendes@mecanica.ufu.br](mailto:jcmendes@mecanica.ufu.br)

Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Av. João Naves de Ávila, 2121, Santa Mônica-CEP 38408-288 - Uberlândia- Minas Gerais

**Abstract:** *In industrial manipulators and machine tools are generally used paths composed of Linear Segments with Parabolic Blends. This type of trajectory is widely used to allow a rapid and also due to low computational complexity. In this method the acceleration has a rectangular shape, which introduces transients in motion, causing structural vibrations resulting in failure to track the path and increasing the wear of joints. A smooth at motion is generally obtained by using polynomial function of high order. This is possible imposing new conditions connecting points. With the elimination of discontinuities of the accelerations at the connecting joints, the structural vibrations are reduced. However, the path developed by the end-effector goes through a relatively long distance from the point. In some specific tasks it is necessary that the path pass close to point. In this paper is presented analysis of composed of linear segments blended by polynomial functions with order high than two. To obtain the trajectory has been considered: the distance between the point and the curve; the position, velocity, acceleration and jerk continuity at the connecting points.*

**Keywords:** *Concordance polynomial, Trajectory Planning, Robot, Robotics.*