

COBEM 81

RIO DE JANEIRO

15 - 18 de dezembro de 1981



ANAIS DO
VI CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

VOLUME D



**ANAIS DO
VI CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**HOTEL INTER-CONTINENTAL RIO
Rio de Janeiro**

15 - 18 de dezembro de 1981

COBEM 81

VOLUME D

TUBULAÇÕES

SISTEMAS COMPUTACIONAIS E ALGORÍTIMOS

PROJETO MECÂNICO DE COMPONENTES NUCLEARES

ELEMENTOS FINITOS EM MECANICA DOS SÓLIDOS

MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS EM FENÔMENOS DE TRANSPORTE

MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS

III

ÍNDICE - VOLUME D

TUBULAÇÕES

SESSÃO D - 1

D-1	Progressos recentes na análise geral de tubulações, Almeida, C.A. (PUC/RJ)	1
D-2	Modal vs direct integration methods in pressure pulse analysis of piping systems, Leimbach, K.R. (Bachum-Linden, Alemanha), Sterkel, H.P. (NUCLEN)	11
D-3	Design and analysis for piping systems, Sterkel, H.P., Cutrin, J.H.C., (NUCLEN)	25
D-4	Um estudo semi-analítico das vibrações induzidas pelo escoamento em tubulações de centrais nucleares, Maneschy, J.E.A. (FURNAS)	37
D-5	Tensões térmicas em tubulações em regime transiente de fluxo de calor - um método semi-analítico, Ribeiro, S.V.G., Andrade, J.E.L., (CNEN)	45
D-6	Concentração de tensões em reduções de tubulações sobre o efeito da pressão interna, Villas-Bôas, F.A.M., Bevilacqua, L., (PUC/RJ)	55

SISTEMAS COMPUTACIONAIS E ALGORITMOS

SESSÃO D - 2

D-7	Projeto ótimo de mola helicoidal - uma aplicação do sistema PROMIN, Costa Fo., P.A., Segenreich, S.A., (PUC/RJ)	65
D-8	Sistema de projeto assistido por computador para cálculo de dimensionamento e desempenho teórico de componentes, Porto, A.J.V., Lirani, J., (EESC-USP)	75

IV

D-9	Gecor1 - um módulo de geração de coordenadas, Rosa, E., Barcellos, C.S., (UFSC)	85
D-10	Critical and post-critical analysis of divergence: Part I - normal form algorithm, Hsu, L. (COPPE)	95
D-11	Critical and post-critical analysis of divergence: Part II- application to buckling, Hsu, L. (COPPE)	103
D-12	Existência e unicidade da solução variacional do problema de Dirichlet num setor plano, Gesteira, C.S. (UFBa)	113
D-13	An algorithm for the determination of the Helmholtz free energy and derived state properties for CO ₂ near the critical region, López, A.F.R. (UNAM, México), Siegmantel, V. (U. Munchen, Alemanha), Tardaguila, J.A.C. (UNAM, México)	121

PROJETO MECÂNICO DE COMPONENTES NUCLEARES

SESSÃO D - 3

D-14	A photoelastic study of the effects of an impulsive seismic wave on a nuclear containment vessel, Burger, C.P. (Iowa S. U., USA)	129
D-15	Tensões térmicas no vaso de pressão de um reator tipo PWR, Bassel, W.S., Diegues, J.A.D., (IPEN)	139
D-16	Design concept for vessels and heat exchangers, Elßmann, W.W., Ferrari, L.D.B., (NUCLEN)	149
D-17	Limite inferior da carga de colapso de vasos axissimétricos, Fonseca Neto, J.D. (UF/PiauZ), Ebecken, N.F.F. (COPPE)	157
D-18	Optimization of mechanical systems subjected to dynamic loadings, Vasconcelos, H.F. (UFPb), Taylor, S. (U. Birmingham, Inglaterra)	167
D-19	Um método para o dimensionamento de uma viga em balanço submetida a esforços aleatórios, Sanchez, M.G., Szajn bok, M., (EPUSP)	181

ELEMENTOS FINITOS EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS

SESSÃO D - 4

- D-20 A discrete elements perturbation approach to the hopf bifurcation of rods under follower forces, *El Naschie, M.S., Athel, S.A., (U. Riyadh, Arábia Saudita)*. 191
- D-21 Desenvolvimento de um modelo de elementos de haste curva para o método de elementos finitos, *Bento Fo., A., Barcellos, C.S., (UFSC)*. 205
- D-22 Análise de deformações de uniões parafusadas pelo método dos elementos finitos, *Arato Jr., A., (FEIS/UNESP), Back, N. (UFSC)*. 215
- D-23 Finite element analyses of shells using large elements and a collocation method of solution, *Sutcliffe, J. (U. Liverpool, Inglaterra)*. 225
- D-24 Um modelo de sólido esférico para o método de elementos finitos, *Quirino, J.P. (FEIS/UNESP), Barcellos, C.S. (UFSC)*. 231
- D-25 Análise por elementos finitos da interação sólido-líquido sob a ação de solicitações dinâmicas, *Delgado, R., Martins, R. (F.E. Porto, Portugal), Owen, R. (U. Gales)*. 243
- D-26 Análise elastoplástica com endurecimento isotropo-cinemático não linear, *Groehs, A.G., Creus, G.J., (UFRGS)*. 255

MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS EM FENÔMENOS DE TRANSPORTE

SESSÃO D - 5

- D-27 Simulação de transientes térmicos utilizando CSMP, *Konuk, A.A. (UNICAMP), Paula, H. M. (IPEN)*. 265
- D-28 Cálculo de transientes térmicos bidimensionais pelo método dos elementos finitos, *Rodrigues, J.L.A.F. (UnB), Barcellos, C.S. (UFSC)*. 275

VI

D-29	Aplicação de "alternating direction methods" à solução da equação de condução de calor com fonte e em regime transitório, Barroso, A.C.O., Alvim, A.C.M., (CNEN), Gebrin, A.N. (COPPE), Santos, R.S. (IME)	285
D-30	Condução de calor em elementos combustíveis com condições de contorno variando com o tempo, Faya, A.J., Maiorino, J.R., (IPEN)	297
D-31	A variational method for radiant emission from diffuse V-groove cavities, Gama, R.M. S., Saboya, F.E.M., (PUC/RJ)	307
D-32	Mistura de gases: um modelo cinético não linear para problemas a números de Knudsen arbitrários, Philippi, P.C. (UFSC), Brun, R. (U. Provence, França)	319
D-33	Sobre a regra das fases de Gibbs, Mattos Neto, A.G. (CNEN), Vargas, A.S. (PUC/RJ)	329

**MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS EM MECÂNICA
DOS SÓLIDOS**

SESSÃO D - 6

D-34	Estudo das características de rigidez de uma estrutura pela análise espectral, Dumont, N.A., Napoleão Fo., J., (PUC/RJ)	343
D-35	A numerical solution technique for elastic-plastic plate bending, Anand, S.C., Bertz, R.F. (Clemson, U., USA)	353
D-36	Análise transiente não linear de sistemas rígido-flexíveis, Ebecken, N.F.F., Machado, R.D., (COPPE)	367
D-37	Simulation of large motions of restrained space trusses, Tavares, G.A. (Stanford U., USA)	375
D-38	Análise de sólidos axissimétricos-ASAS-TD, Damian, J.M. (UFSC), Rodrigues, J.L.A.F. (UnB), Barcellos, C.S. (UFSC)	389
D-39	Complementary energy for buckling problems, Angelillo, M., Dodaro, L., (U. Napoli, Itália)	399



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-1

P. P. 1 - 10

PUC/RJ

PROGRESSOS RECENTES NA ANÁLISE GERAL DE TUBULAÇÕES

Carlos A. de Almeida

Department of Mechanical Engineering
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, MA 02139, USA
Professor Auxiliar, em licença
Depto. de Engenharia Mecânica - PUC/RJ
22453-Rio de Janeiro, RJ, BRASIL

SUMÁRIO

Neste trabalho são apresentadas as formulações de dois modelos de elementos finitos recentemente propostos. Os elementos discutidos quanto a aplicabilidade na análise geral de tubos são os seguintes: um elemento viga-tubo com os deslocamentos axial, de torção, de flexão e da ovalização variando cúbica-mente ao longo do tubo e um elemento de placa, plano com três nós onde as deformações de membrana são constantes. Uma análise onde as respostas destes elementos são comparadas às da formulação geral de cascas ilustra a qualidade das formulações e oferece uma avaliação das modificações recentemente propostas à formulação do elemento viga-tubo.

SUMMARY

The formulations of two recently proposed displacement based finite element models are presented. The elements, a pipe-elbow element with axial, torsional, bending and ovalization displacements that vary cubically along the axis of the elbow and a three-noded constant membrane strain flat plate element, are discussed for their applicability to a general piping analysis. A sample analysis where element responses are compared with a general shell formulation illustrates the effectiveness of the formulations and evaluates the newly proposed enhancements to the pipe-elbow element.

1. Introdução

Sistemas de tubulações, largamente usados em oleodutos, centrais nucleares e trocadores de calor são de importância relevante considerando-se a segurança e os custos de tais instalações. Recentemente u'a maior atenção tem sido dedicada ao desenvolvimento de modelos que efetivamente preveem os principais modos de deformações em tubos, basicamente as deformações de viga e as deformações de ovalização.

As primeiras observações experimentais dos efeitos da ovalização em tubos mostraram serem os modelos analíticos para vigas curvas inadequados à análise estrutural de tubos sujeitos aos efeitos da ovalização[1]. Em 1911, utilizando métodos de energia, von Kármán mostrou fisicamente os efeitos da ovalização em tubos e propôs um modelo analítico que elucidou os resultados experimentais publicados[2]. No modelo proposto, von Kármán considera um comprimento diferencial do tubo curvo em que o momento fletor interno é constante; assume-se portanto ser a ovalização da seção reta constante ao longo do tubo. Assim, os sistemas de tubulações em que a carga momento é variável ou o fato de não haver ovalização em uma das extremidades do tubo ou ainda os efeitos da interação entre tubos curvos e retos não podem ser analisados utilizando-se o modelo proposto por von Kármán.

Devido as limitações acima, algumas soluções utilizando a teoria geral de cascas tem sido apresentadas para descrever o comportamento do tubo[3]. Apesar de remover algumas das hipóteses simplificadoras de von Kármán, tais soluções não são efetivas na análise geral de tubulações. O grande potencial para a análise geral de tubos está no uso do método de elementos finitos[4,5]. Atualmente tubos são analisados utilizando-se basicamente três modelos[6-8]: (a) elementos tri-dimensionais, (b) elementos gerais de cascas, e (c) elementos especiais do tipo viga-tubo. Considerando o número de graus de liberdade envolvido e o custo do processamento numérico para a análise típica de um sistema de tubulações, os dois primeiros modelos estão além do estado da-arte dos meios de computação atuais.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo comparativo das formulações de dois elementos recentemente publicados. Primeiro, o elemento especial viga-tubo com quatro nós

onde as deformações axial, de torção, de flexão e da ovalização variam cúbicamente ao longo do eixo do tubo [9]. A formulação do elemento é uma extensão natural do modelo pioneiro de von Kármán modificado para acomodar os efeitos da interação entre tubos [10]. O segundo é um elemento de placa, triangular, com três nós e seis graus-de-liberdade por nó [11]. A formulação isoparamétrica deste elemento baseia-se na teoria de placas com deformações de cisalhamento transversal (teoria de Reissner ou de Mindlin para placas [13]) e utiliza ordem de integração reduzida.

Na próxima Seção são apresentadas as formulações básicas destes dois elementos e discutidas quanto a aplicabilidade de à análise geral de tubulações.

2. Formulação dos Elementos

A análise geral de estruturas utilizando o método de elementos finitos consiste basicamente na formulação das equações de equilíbrio para cada elemento e posterior solução do sistema de equações independente dos tipos de elementos envolvidos. Neste processo geral de discretização da estrutura, como na análise de Ritz, funções de interpolação aproximam os deslocamentos em todo o domínio do elemento. Uma vez estabelecido o Indicador Variacional

$$\Pi = U - W \quad (1)$$

onde U e W são respectivamente a energia total de deformação e o potencial total das cargas externas, a solução é obtida invocando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (ou Princípio da Energia Potencial Mínima) [5]. Assim, com $\delta\Pi=0$ obtém-se a equação de equilíbrio,

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{R} \quad (2)$$

onde \underline{K} é a matriz de rigidez da estrutura associada aos graus-de-liberdade listados em \underline{U} ,

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} \, dV \quad (3)$$

e \underline{R} é o vetor das forças externas referidas aos nós dos elementos. Na Eq. (3) \underline{B} é a matriz de transformação geométrica de deformação-deslocamentos e \underline{C} e a matriz de transformação tensão-deformações. Na solução da Eq. (2) é necessário estabelecer apenas a matriz \underline{B} de cada elemento e proceder a integração numérica da Eq. (3).

2.1. O Elemento Viga-Tubo

Considere-se inicialmente o elemento de viga na Fig. 1a cuja seção reta circular não se deforme em seu plano ou fóra do seu plano. Na formulação do elemento são usados basicamente os deslocamentos axial, de flexão e de torção e, portanto, o campo dos deslocamentos referido ao sistema global de coordenadas é

$$u_i(r, s, t) = \sum_{k=1}^4 h_k u_i^k + t \sum_{k=1}^4 a_k h_k v_{ti}^k + s \sum_{k=1}^4 a_k h_k v_{si}^k ; \quad (4)$$

$i = 1, 2, 3$

com

$$\underline{v}_s^k = \underline{\theta}_i^k \times \underline{0}_{v_s}^k \quad \text{e} \quad \underline{v}_t^k = \underline{u}_i^k \times \underline{0}_{v_t}^k \quad (5)$$

onde,

r, s, t = coordenadas isoparamétricas [5]

$h_k(r)$ = funções de interpolação isoparamétrica [9,10]

u_i^k = deslocamentos associados ao nó k

θ_i^k = rotações associadas ao nó k

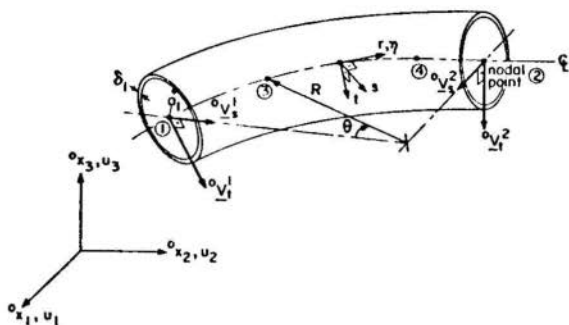
a_k = raio externo da seção reta associada ao nó k

$\underline{0}_{v_{ti}}^k$ = componente i do vetor unitário $\underline{0}_{v_t}^k$ na direção t , associado ao nó k

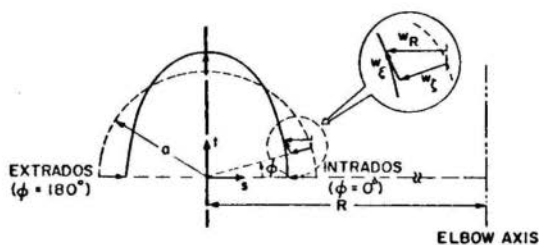
$\underline{0}_{v_{si}}^k$ = componente i do vetor unitário $\underline{0}_{v_t}^k$ na direção s , associado ao nó k

A partir da Eq. (4) as deformações totais referidas ao sistema global de coordenadas (${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$) são transformadas ao sistema local de coordenadas (r, s, t) . Apenas as deformações importantes do modelo de viga são então incluídas, especificamente: a deformação normal ϵ_{rr} e as deformações de cisalhamento γ_{rs} e γ_{rt} . As equações de deformações assim obti-

das formam a matriz de transformação geométrica B_V do modelo de viga.



(a). Geometria e discretização do elemento de viga de seção reta circular.



(b). Deslocamentos de ovalização considerados na formulação (1º modo de Kármán; w_ζ neg.)

Fig. 1. Deslocamentos associados ao elemento viga-tubo.

Para incluir os deslocamentos da ovalização da seção reta, Fig. 1b, assume-se que o tubo ovalize segundo os seguintes modos de deslocamentos,

$$w_\zeta(r, \phi) = \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{m=1}^{N_c} h_k c_m^k \sin 2m\phi + \sum_{m=1}^{N_d} h_k d_m^k \cos 2m\phi \right) \quad (6)$$

onde a hipótese básica é $w_\zeta = -dw_\xi/d\phi$; c_m^k e d_m^k , $k=1,2,3,4$, são os deslocamentos generalizados da ovalização do tubo.

Dependendo do tipo de carregamento e da geometria do tubo, é suficiente incluir-se apenas o primeiro ou os dois primeiros termos de um (ambos) duplo-somatório(s). Na implementação do elemento N_c e N_d podem assumir os valores 0 (sem ovalização), 1, 2 ou 3. Os deslocamentos totais do elemento são a soma dos deslocamentos presentes nas Eqs. (4) e (6). Portanto, um nó típico do elemento viga-tubo possui incógnitos os seguintes deslocamentos

$$\underline{u}^{kT} = [u_1^k \ u_2^k \ u_3^k \ \theta_1^k \ \theta_2^k \ \theta_3^k \ | \ c_1^k \ c_2^k \ c_3^k \ | \ d_1^k \ d_2^k \ d_3^k] \quad (7)$$

As deformações associadas a ovalização da seção reta, no sistema local de coordenadas, possui as seguintes componentes

$$(\epsilon_{\eta\eta})_{ov} = \frac{w_R}{R - a \cos\phi} - \left[\left(\frac{1}{R - a \cos\phi} \right)^2 \frac{d^2 w_\zeta}{d\theta^2} \right] \zeta \quad (8)$$

$$(\gamma_{\eta\xi})_{ov} = \left(\frac{1}{R - a \cos\phi} \right) \frac{dw_\zeta}{d\theta} \quad (9)$$

$$(\epsilon_{\xi\xi})_{ov} = - \frac{1}{a^2} \left[w_\zeta + \frac{d^2 w_\zeta}{d\phi^2} \right] \zeta \quad (10)$$

O segundo termo na Eq. (8) e a Eq. (9) representam as modificações da teoria de von Kármán para incluir os efeitos da interação entre os elementos. Basicamente estas modificações representam as componentes da flexão e do cisalhamento incluídas no estado bi-axial de deformações devido as mudanças de curvatura da superfície mediana durante a deformação do tubo. A matriz de transformação geométrica do elemento é obtida adicionando-se a matriz transformação geométrica a partir das Eqs. (8) a (10) à matriz \underline{B}_v do modelo de viga. A continuidade nas derivadas dos deslocamentos radiais na superfície mediana do tubo é enforçada através de uma matriz de penalidade adicionada à matriz de rigidez do elemento [10]. Esta condição é equivalente a imposição da continuidade das rotações na formulação geral dos elementos de viga.

2.2. O Elemento de Placa

O elemento triangular DKT (Discrete-Kirchhoff-Theory) mostrado na Fig. 2 possui três nós nos vértices com seis graus-de-liberdade por nó; o elemento é plano e, uma superfície de casca como em um tubo curvo é modelada em uma montagem de "facetas planas". O objetivo primeiro do desenvolvimento deste elemento foi o de obter-se um elemento simples e de precisão como uma alternativa ao elemento isoparamétrico de cascas. A matriz de rigidez do elemento DKT é construída da seguinte forma [14]:

(1) o comportamento à flexão segue uma generalização da formulação de Kirchhoff inicialmente desenvolvida para vigas e estendida para a formulação de placas: "qualquer segmento inicialmente normal à superfície mediana do elemento permanece reto mas não necessariamente perpendicular à superfície mediana deformada". Com esta hipótese, as componentes dos deslocamentos devidos à flexão e referidos ao sistema local de coordenadas x, y, z , são

$$u = z\bar{\theta}_y(x, y) \quad ; \quad v = -z\bar{\theta}_x(x, y) \quad ; \quad e \quad w = \bar{w}(x, y) \quad (11)$$

onde u, v, w são respectivamente os deslocamentos no plano e transversal, \bar{w} é o deslocamento na superfície mediana e $\bar{\theta}_x$ e $\bar{\theta}_y$ são as rotações da normal a superfície da placa nos planos $y-z$ e $x-z$ respectivamente. Na análise linear as deformações devido a flexão obtidas a partir das equações acima são imediatamente identificadas,

$$\begin{bmatrix} b \\ \epsilon_{xx} \\ b \\ \epsilon_{yy} \\ b \\ \gamma_{xy} \\ b \\ \gamma_{xz} \\ b \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\bar{\theta}_{y,x} \\ -z\bar{\theta}_{x,y} \\ z(\bar{\theta}_{y,y} - \bar{\theta}_{x,x}) \\ -\bar{w}_{,x} + \bar{\theta}_y \\ \bar{w}_{,y} + \bar{\theta}_x \end{bmatrix} \quad (12)$$

(2) o comportamento de membrana é obtido a partir dos deslocamentos na superfície mediana do elemento. As deformações, assumidas constantes através da espessura da placa, são

$$\epsilon_{xx}^m = \bar{u}_{,x} ; \epsilon_{yy}^m = \bar{v}_{,y} ; \epsilon_{xy}^m = \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} \quad (13)$$

Na formulação do elemento triangular DKT as deformações são referidas apenas aos deslocamentos na superfície mediana. Assim, na implementação do elemento polinômios de Hermite interpolam os deslocamentos nos três nós e a matriz de transformação geométrica deformação-deslocamentos é obtida substituindo-se o campo de deslocamentos obtido nas Eq. (12) e (13). A integração reduzida da matriz de rigidez é efetuada no domínio da superfície mediana do elemento.

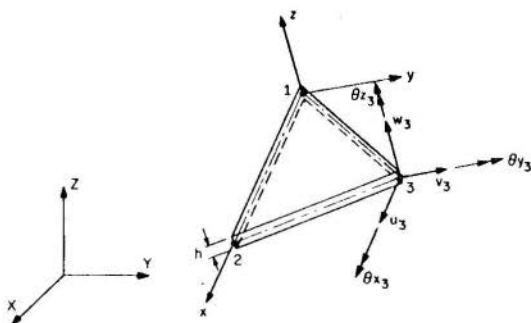


Fig. 2. O Elemento triangular DKT

3. Análise Comparativa dos Elementos

Os exemplos apresentados nesta Seção foram analisados na Ref. [9] e a solução analítica apresentada em [3] entretanto, nestas análises, os efeitos da interação não eram considerados. À Fig. 3, as respostas do elemento viga-pipe considerando os efeitos da ovalização para diferentes condições de contorno nas extremidades, são comparadas com as respostas do elemento triangular DKT. Nas configurações I e II foram usados 5 e 7 elementos viga-pipe respectivamente enquanto que com o elemento de placa, meio-tubo foi modelado com malhas de 216 e 288 elementos respectivamente. As respostas dos elementos nas análises com flanges mostram a boa concordância das soluções comparadas com as do elemento isoparamétrico geral de placas [15]. É notável a variação nas soluções quando os efeitos da interação e dos flanges são considerados: a dife-

rença entre as soluções gerais de cascas e as apresentadas pelo elementoviga-tubo representam apenas 3% do erro cometido quando não são considerados os efeitos da interação na análise de tubos com flanges.

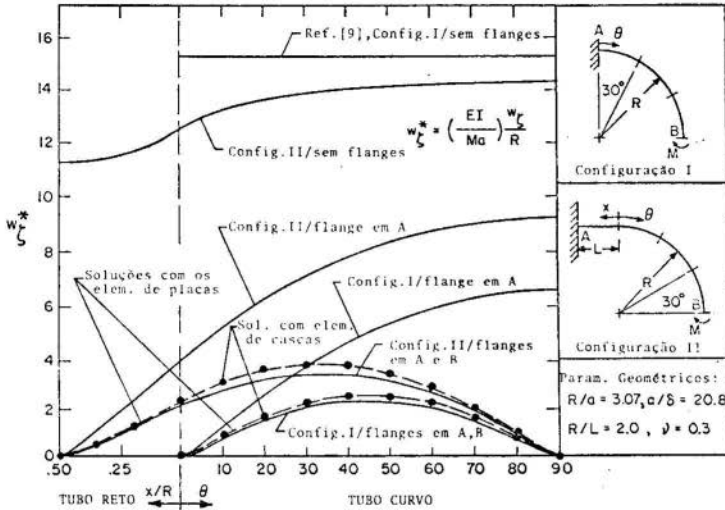


Fig. 3 Respostas dos modelos nas análises sob diferentes condições de contorno da ovalização (w_{ζ} medido a $\phi=90^{\circ}$)

4. Conclusões

As formulações de dois elementos efetivos para a análise geral de tubulações são apresentadas. Uma análise comparativa dos elementos demonstra ser o elemento viga-tubo bastante efetivo na análise geral de tubulações considerando-se o número de variáveis de elementos finitos envolvidas. A boa concordância dos resultados demonstra que as modificações introduzidas no modelo de von Kármán representam os termos importantes da teoria de cascas necessários para acomodar os efeitos da interação entre tubos.

5. Agradecimentos

Este trabalho foi realizado durante o programa de doutoramento do autor que agradece o apoio financeiro recebido da Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) e da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC/RJ).

REFERÊNCIAS

- [1] Bantlin, A., "Formänderung und Beanspruchung federnder Ausgleichrohre", Zeitschrift des Vereinesdeutscher Ingenieure, Vol. 54, pp. 43-49. 1910.
- [2] von Kármán, T., "Über die Formänderung Dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre", Zeitschrift des Vereinesdeutscher Ingenieure, Vol. 55, pp. 1889-1895, 1911.
- [3] Clark, R. A., Reissner, E., "Bending of Curved Tubes", Advances in Applied Mechanics, Vol. 2, pp. 93-122. 1951.
- [4] Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method, McGraw Hill Co., 1977.
- [5] Bathe, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall Inc., 1981.
- [6] Shimizu, T. et al., "Some Experiences on Elastic-Plastic Analysis of Shell Structure", Proceedings of ADINA Conference, Ago. 1977, Bathe, K. J. (ed.)
- [7] Iwata, K., et al., "A Solution for the IAEA International Piping Benchmark Problem", in Compilation of Piping Benchmark Problems - Cooperative International Efforts, ORNL-Report IWGFR/27-June 1979.
- [8] Ohtsubo, H. and Watanabe, O., "Stress Analysis of Pipe Bends by Ring Elements", Trans. ASME, Vol. 100, pp. 112-122, Feb. 1978
- [9] Bathe, K. J., Almeida, C. A., "A Simple and Effective Pipe Elbow Element-Linear Analysis", J. Appl. Mech., Vol. 47, pp. 93-100
- [10] Bathe, K. J., Almeida, C. A., "A Simple and Effective Pipe Elbow Element-Interaction Effects", J. Appl. Mech., a ser publ.
- [11] Batoz, J. L., Bathe, K. J. and Ho, L. W., "A Search for the Optimum Three-Node Triangular Plate Bending Element", Report 82448-8, Dept. Mech. Eng., Dec. 1978, MIT.
- [12] Dodge, W. G., Moore, S. E., "Stress Indices and Flexibility Factors for Moment Loadings on Elbows and Curved Pipes", Welding Research Council Bulletin 179, Dec. 1972.
- [13] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd. Ed., Pergamon Press, 1975.
- [14] Bathe, K. J., Ho, L. W., "A Simple and Effective Element for Analysis of General Shell Structure", ADINA Conference, June 1981., MIT.
- [15] Bathe, K. J., "ADINA--A Finite Element Program for Automatic Dinamic Incremental Nonlinear Analysis", Sept. 1975, MIT

ANAIS

PROCEEDINGS



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981

TRABALHO
PAPER

N.º D-2

P.P. 11 - 23

PUC/RJ

MODAL VS. DIRECT INTEGRATION METHODS IN PRESSURE PULSE
ANALYSIS OF PIPING SYSTEMS

Karl-Robert Leimbach

Registered Professional Engineer
Haverkampstr. 12, D-4630 Bochum-Linden
West Germany

Hans-Peter Sterkel

NUCLEN - Nuclebras Engenharia SA
Rua de Visconde Ouro Preto, 5,
22250 Rio de Janeiro, Brasil

SUMÁRIO

O cálculo de problemas de golpe de transientes múltiplos nos sistemas de apoio com auxílio do método espectral modal é comparado à integração direta das equações de movimento. São pesquisadas várias possibilidades de superposição de forças componentes com participações modais, baseadas num exemplo de cálculo de uma tubulação.

SUMMARY

Structural analysis of multiple transient pulse problems by the modal response spectrum method is compared to direct integration of the equations of motion. Various options for combining load components and modal contributions are investigated in conjunction with a computational case study from the field of piping design.

1. Introduction

The sudden closing of a valve in a fluid-filled pipe generates high pressure pulses propagating through the entire piping system. The assessment of the safety of the design requires the computation of the maximum deformations and stresses of the structural system.

Current practice of analysis consists of a two-part time history investigation. First, the time histories of the hydrodynamic forces are determined by fluid dynamics methods. Second, a stress analysis follows in which the force time histories from the first step serve as a loading pattern in space and time.

To the structural designer the maximum, over the time domain, of deformations and stress resultants rather than the time histories themselves are of main concern. This suggests the application of the spectrum method of modal analysis. This method has been used successfully in the analysis of structural response of piping systems subjected to support accelerations caused by earthquakes and other severe stochastic dynamic loading conditions.

The use of transient response spectra in the analysis of pulse problems has been treated extensively by Jacobson and Ayre[1]. The use of response spectra in the analysis of structures was first introduced by Benioff[2] and Biot[3]. The application of the spectrum method to the analysis of transient pulse problems is an approximation in the sense that the temporal relationships of the response from the individual loads and the signs of both, loading and response, are lost. The superposition of the individual loading contributions to the total response requires an approach different from the superposition of multiple support excitation contributions from an earthquake.

A driving factor for the use of the spectrum method in transient pulse problems is the possible saving of computational cost, provided that the transient load spectra are available free of cost. Otherwise the cost of the generation of the spectra from time histories has to be added to the total cost.

The present paper sets up the numerical procedure for the analysis of transient pulse problems by the spectrum method. It explores the validity of the approach by comparison to both, modal and direct time history analyses. Three areas of particular interest are investigated: (a) the number of modes required to describe a pressure pulse problem, including the treatment of the residual components; (b) the type of superposition of the load components and mode components required to arrive at a realistic result; (c) the effect of damping in the analysis. Cost savings vs. accuracy are appraised for a typical transient pressure pulse analysis of a power plant piping system.

2. Mathematical background

The matrix equation of motion of a discretized mathematical model of a piping system subjected to force excitations is given by

$$\underline{M} \ddot{\underline{V}} + \underline{C} \dot{\underline{V}} + \underline{K} \underline{V} = \underline{\eta} \bar{\underline{P}}(t) \quad , \quad (1)$$

where \underline{M} , \underline{C} , and \underline{K} are the system mass, damping and stiffness matrices, respectively, and $\ddot{\underline{V}}$, $\dot{\underline{V}}$ and \underline{V} are the nodal point accelerations, velocities and displacements, respectively. The dynamic force excitations are described by two matrices, a distribution matrix, $\underline{\eta}_p$, which locates the forces on the structural modal topology, and the time histories $\bar{\underline{P}}(t)$. The number of rows in $\underline{\eta}_p$ corresponds to the number of degrees of freedom, n , of the mathematical model, while the number of columns corresponds to the number of different time histories.

The free, undamped vibrational characteristics of the model are computed from the solution of the eigenproblem

$$(\underline{K} - \underline{\Omega}^2 \underline{M}) \underline{\Phi} = \underline{0} \quad . \quad (2)$$

The solution of the eigenproblem is carried out to m modes $\underline{\Phi}_{j,i}$ and frequencies ω_j where, $1 \leq j \leq m < n$ and

$$\underline{\Phi} = [\underline{\Phi}_1, \underline{\Phi}_2, \dots, \underline{\Phi}_m] \quad , \quad \underline{\Omega}^2 = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2] \quad . \quad (3)$$

Modal decomposition reduces the n coupled equations of eq.(1) to m uncoupled second order differential equations in Y_j plus a residual equation in \underline{V}_0 . The total displacement can be written as

$$\underline{V} = \sum_{j=1}^m \underline{\Phi}_j Y_j + \underline{V}_0 \quad (4)$$

When only the modal components are taken into account the j -th uncoupled equation is

$$\ddot{Y}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = \underline{L}_{p,j} \bar{P}(t) \quad (5)$$

The modes are assumed to be normalized to give the following generalized mass, damping, and stiffness, respectively,

$$\underline{\Phi}_j^T \underline{M} \underline{\Phi}_j = 1; \quad \underline{\Phi}_j^T \underline{C} \underline{\Phi}_j = 2\xi_j \omega_j, \quad \underline{\Phi}_j^T \underline{K} \underline{\Phi}_j = \omega_j^2 \quad (6)$$

The modal participation factors are contained in the matrix $\underline{L}_{p,j}$, which is a row matrix with one coefficient for each of the time histories. The participation factors are computed from

$$\underline{L}_{p,j} = \underline{\Phi}_j^T \underline{\eta}_n \quad (7)$$

In the treatment of the residuum, which is the part of the solution not covered by modal decomposition, the following identity is used

$$\underline{M} \tilde{\underline{\Phi}} \tilde{\underline{\Phi}}^T = \underline{I}_n \quad (8)$$

where $\tilde{\underline{\Phi}} = [\underline{\Phi}_1, \underline{\Phi}_2, \dots, \underline{\Phi}_n]$. Although all the modes up to $\underline{\Phi}_n$ are not actually computed they are nevertheless part of the derivation of the residuum \underline{V}_0 . By premultiplying eq. (7) with the matrix $\tilde{\underline{\Phi}}$ the following is obtained,

$$\tilde{\underline{\Phi}} \underline{L}_n = \tilde{\underline{\Phi}} \tilde{\underline{\Phi}}^T \underline{\eta}_n = \underline{I}_n^{-1} \underline{\eta}_n \quad (9)$$

This concludes the mathematical background of the problems to be solved. The computational procedure may be carried out directly from eq.(1) by direct integration, or from eqs.(4) and (5) by modal time history analysis or by spectrum analysis. Of course, there are other additional modal analysis procedures to compute maxima of the solution.

3. Computational approach

Modal solution procedures will be described only. For the presentation of a brief summary of a direct integration solution procedure.

3.1 Modal time history analysis

The complete acceleration time histories are written in terms of eq.(4) as

$$\ddot{V}(t) = \sum_{j=1}^m \phi_{-j} \ddot{V}_j(t) + \ddot{V}_0(t) \quad (10)$$

The modal components $\ddot{V}_j(t)$ are computed from

$$\ddot{V}_j(t) = \sum_{l=1}^L L_{l,j}^1 \tilde{Y}_j^1(t) \quad (11)$$

in which l is the number of the load time history under consideration. The normalized modal response from force time history l is computed from the integral

$$Y_j^1(t) = (\omega_j^2 / \omega_{D,j}) \int_{\tau=0}^t \bar{n}^1(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin \omega_{D,j} (t-\tau) d\tau \quad (12)$$

The damped frequency $\omega_{D,j}$ in eq.(12) is obtained from

$$\omega_{D,j} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (13)$$

The residuum in eq.(10) contains the contributions of all the higher modes $m < j \leq n$

$$\ddot{V}_0(t) = \sum_{j=m+1}^n \phi_{-j} \ddot{V}_j(t) \quad (14)$$

Since these modes have not been computed their effect must be approximated. This can be done by considering the sum

$$\sum_{j=m+1}^n \phi_{-j} L_{l,j} = \sum_{j=1}^n \phi_{-j} L_{l,j} - \sum_{j=1}^m \phi_{-j} L_{l,j} \quad (15)$$

When the expression for $\tilde{\Phi} L_{l,j}$ of eq.(9) is substituted in eq.(15) it can be rewritten as

$$\sum_{j=m+1}^n \phi_{-j} L_{l,j} = M^{-1} \underline{r}_l - \sum_{j=1}^m \phi_{-j} L_{l,j} \quad (16)$$

The break of the modal approach should be taken at $j=m+1$ where $Y_j^1(t)$ can be replaced by $\bar{n}^1(t)$. The residuum is then

$$\ddot{\underline{v}}_o(t) = (\underline{M}^{-1} \underline{r}_o - \sum_{j=1}^m \underline{\phi}_{j-L_p j}) \bar{\underline{p}}(t) \quad (17)$$

The solution of the m uncoupled second order differential equations of eq.(5) is presented in eq.(12) as an integral. The solution may also be obtained by a numerical solution algorithm such as the Wilson, Newmark or Goldberg algorithm [4] .

3.2 Modal response spectrum analysis

The first computational step in this approach is the generation of spectra for each of the time histories. This is done by finding the maxima of the acceleration time histories in eq.(12) for different ω 's. For each ω selected for analysis a maximum $S_a(\omega, \xi)$ is computed.

The j -th modal acceleration amplitude resulting from the l -th force spectrum is

$$\ddot{Y}_{jmax}^l = |L_{p,j}^l| S_p^l(\omega_j, \xi_j) \quad (18)$$

The j -th modal acceleration amplitude from all force spectra is obtained from

$$\ddot{Y}_{jmax} = \left\{ \sum_1 (\ddot{Y}_{jmax}^l)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Eq.(19) assumes that the forces do not all act at once in the same direction. The sign is lost in this analysis in eq.(18). Both equations constitute an approximation in the sense that phase relationships are not accounted for. Other possible types of superposition are absolute summation

$$\ddot{Y}_{jmax} = \sum_1 |\ddot{Y}_{jmax}^l| \quad (20)$$

or summation including the signs

$$\ddot{Y}_{jmax} = \left| \sum_1 L_{p,j}^l S_p^l(\omega_j, \xi_j) \right| \quad (21)$$

The summation of eq.(20) is the most conservative type of superposition of the load contributions. The summation of eq.(21) is an enveloping method in the sense that all modal load components of mode j move in phase. Such a situation can be described more accurately by assigning the same spectrum S_a^l to all the load positions while the dif-

ferent scale factors are contained in the distribution vector \underline{v}_p^1 .

The modal components of the acceleration maxima are combined by one of the various modal superposition rules. One typical such superposition rule is the SRSS-method, which is used here in place of other rules

$$\ddot{v}_{-max} = \left\{ \sum_{j=1}^m (\phi_j \ddot{v}_{jmax})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \quad (22)$$

In dealing with displacements and stresses a more conservative modal superposition method will be presented.

The residual acceleration is computed from the spectrum value which is independent of frequency, $S_p^1(\omega_0, \xi)$, using a modified form of eq.(17),

$$\ddot{v}_{-omax}^1 = (\underline{v}_n^{-1} \underline{v}_n^1 - \sum_{j=1}^m \phi_j L_{n,j}^1) S_p^1(\omega_0, \xi) . \quad (23)$$

The complete solution is obtained from the square root of the sum of the squares of \ddot{v}_{-max} from eq.(21) and \ddot{v}_{-omax} in which

$$\ddot{v}_{-omax} = \sum_1 \ddot{v}_{-omax}^1 . \quad (24)$$

Displacement and stress components are computed in a similar way as the accelerations. The modal displacement maximum for the j -th mode is

$$Y_{jmax} = - \ddot{v}_{jmax} / \omega_j^2 . \quad (25)$$

The modal displacement maxima can be superimposed by the SRSS-method of eq.(22), by the ABS-method,

$$v_{-max} = \sum_{j=1}^m |\phi_j Y_j| , \quad (26)$$

which is quite conservative, or by any of the methods required by the code [5].

A more general superposition method has been suggested by Der Kiureghian [6]. This method is based on the cross-correlation coefficients, $\rho_{i,j}$, of the free vibration frequencies, ω_j , where $i, j=1, \dots, m$. For constant modal damping ξ the cross-correlation coefficients are

$$\rho_{i,j} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2r(1+r)^2} , \quad (27)$$

where $r = \omega_j / \omega_1$. The modal superposition is given by the square root of a double sum,

$$\underline{V}_{\max} = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \rho_{ij} (\phi_{i1} Y_{i1}) (\phi_{j1} Y_{j1}) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

The residual displacement maximum is obtained by solving the quasi-static problem

$$\underline{K} \underline{V}_{\text{omax}} = \underline{M} \ddot{\underline{V}}_{\text{omax}} \quad (29)$$

The total displacement maxima are

$$\underline{V}_{\text{total max}} = \{ U_x \ U_y \ U_z \ \Phi_x \ \Phi_y \ \Phi_z \} = \left\{ (\underline{V}_{\max})^2 + (\underline{V}_{\text{omax}})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

The next step in the computational procedure is the computation of stress resultants at various points of the piping system,

$$\underline{\mathcal{E}}_{\text{total max}} = \{ N_x \ Q_y \ Q_z \ M_x \ M_y \ M_z \} \quad (31)$$

Using the element stress-deformation transformation matrices of the mathematical model, one arrives at the modal and residual stress resultants, respectively, as follows:

$$\underline{\mathcal{E}}_j = \underline{S} \underline{\Phi}_j Y_{j\max} \quad (\text{modal}) \quad (32)$$

$$\underline{\mathcal{E}}_o = \underline{S} \underline{V}_o \quad (\text{residual})$$

In keeping with eqs.(28) and (30) the total stress resultant maxima are

$$\underline{\mathcal{E}}_{\text{total max}} = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \rho_{ij} \underline{\mathcal{E}}_i \underline{\mathcal{E}}_j + \underline{\mathcal{E}}_o^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

This concludes the presentation of the modal analysis methods.

4. Example problem

The analysis methods described in the foregoing sections were exercised with an example problem taken from Ref. [7]. The piping system shown on Fig.1 is defined for the purpose of the presentation in condensed form by a ten degree-of-freedom reduced system stiffness matrix and a diagonal mass matrix. Three load time histories of corner

forces simulate a pressure pulse originating at the valve and travelling through the system (Fig.2). From the time histories three sets of acceleration response spectra have been computed, of which the ones with five percent damping (Fig.3) were used in the response spectrum analysis.

A direct integration time history analysis with five percent equivalent modal damping was carried out. The corresponding Rayleigh damping coefficients based on the first two frequencies were $\alpha=2.02$ and $\beta=0.00113$. Three modal time history analyses with all ten modes were completed with the modal damping ratios of five, eight and two percent. The direct and modal displacement time history maxima show good agreement (Table 1). The effect of modal damping on the model's dynamic performance is as expected. The complete time histories are shown on Fig.4.

In the modal response spectrum analysis the modal amplification factors were first computed for each of the three loads and then combined by three different superposition rules (Table 2). The following abbreviations are used: ADD=addition, ABS=sum of absolutes, and SRSS=square root of sum of squares. As expected, ABS results in the largest amplification factors.

The amplification factors of Table 2 were used to compute displacement responses with all ten modes (Table 3). Various modal superposition rules were used. The most conservative results were obtained with ABS-ABS. While ABS-SRSS may still be acceptable in comparison with the results of Table 1, the other combinations must be called deficient (CQC=complete quadratic combination).

Since only the first two modes dominate the modal analysis (compare Table 2), two reduced superpositions SRSS-SRSS with five and two modes, including the effect of the corresponding residual, were conducted (Table 4). When compared with the SRSS-SRSS column of Table 3 these results document a further loss of accuracy.

Finally a different approach to superposition of load and modal components was tried (Table 5). Displacement responses were computed for each of the loads (spectra) sepa-

rately by SRSS and CQC, and the displacement responses were then obtained by ADD and SRSS. CQC-SRSS results are unacceptable while for the other two columns deficiencies occur for some degrees of freedom.

Typical computer times are: eigensolution (10 figure tolerance, 136 Jacobi rotations) 0.470 sec; generation of three spectra with five different damping ratios, 100 out-out frequencies and 200 integration time steps 42.454 sec; direct integration time history analysis with 200 integration time steps 2.294 sec; modal time history analysis with 200 integration time steps 4.568 sec; interpolation of spectra 0.204 sec; computation of modal response amplification factors 0.152 sec. Computer times for matrix operations and printing are not accounted for. From the above list the generation of spectra is the costliest item.

5. Conclusions

In the analysis of transient problems with staggered load time histories, such as pulse problems of piping systems, the maxima from a response spectrum analysis do not necessarily form an upper bound, except for the combination of modes and loads by absolute summation. All other superposition rules may lead to deficiencies. Superposition rules from seismic response analysis are unsuitable for multiple pulse analysis. Generation of load spectra is time consuming.

More numerical experimentation with the spectrum method is needed to find useful ways for its application in multiple pulse problems. Application of seismic response analysis techniques to multiple pulse problems leads to unconservative results and is strongly discouraged.

6. References

- [1] Jacobsen, L.S., and Ayre, R.S., Engineering Vibrations, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958, pp. 160-194.
- [2] Benioff, H., "The Physical Evaluation of Seismic Destructiveness, Bull. Seismol. Soc. Amer., Vol.24, pp. 398-403, 1934.

- [3] Biot, M., "Acoustic Spectrum of an Elastic Body Submitted to a Shock," J. Acoust. Soc. Amer., Vol.5, p. 206, 1934.
- [4] Sterkel, H.P., and Leimbach, K.R., "Comparison of Multiple Support Excitation Solution Techniques for Piping Systems," Simposio Brasileiro Sobre Tubulacoes e Vasos de Pressao, Salvador, Bahia, Brasil, November, 1980.
- [5] U.S. Nuclear Regulatory Commission, Regulatory Guide 1.02, Revision 1 (1976).
- [6] Der Kiureghian, A., "On Response of Structures to Stationary Excitation," Report No. EERC 79-32, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1979.
- [7] Chen, M.M., "A Simplified Dynamic Analysis for Reactor Piping Systems Under Blowdown Conditions," paper F5/1, SMIRT3, London, September, 1975.

Table 1 Time History Analysis

dof No. Type	Direct	Modal Time History Analysis		
	Integration $\xi = 5\%$	5%	8%	2%
1 UX10	7.056-3	7.206-3	6.861-3	7.617-3
2 UY10	5.035-2	5.090-2	4.855-2	5.332-2
3 UX16	6.362-2	6.430-2	6.178-2	6.705-2
4 UZ16	4.991-1	4.973-1	4.790-1	5.168-1
5 UX22	3.007-2	3.005-2	2.536-2	3.724-2
6 UY22	4.505-1	4.464-1	4.152-1	4.835-1
7 UY30	5.249-1	5.262-1	4.846-1	5.733-1
8 UZ30	4.631-1	4.665-1	4.474-1	4.876-1
9 UX44	5.272-3	5.340-3	4.751-3	6.558-3
10 UZ44	1.260-3	1.397-3	1.237-3	1.606-3

Table 2 Combined Amplification Factors

Mode No.	ADD	ABS	SRSS	(Loads)
1	1.342	1.651	1.500	
2	1.121	1.296	1.194	
3	1.892-3	1.065-2	7.346-3	
4	5.111-2	6.494-2	5.560-2	
5	3.279-3	2.620-2	1.779-2	
6	1.908-2	1.933-2	1.845-2	
7	7.063-4	1.823-3	1.329-3	
8	1.785-2	1.785-2	1.566-2	
9	5.246-4	5.559-4	4.184-4	
10	2.147-3	3.015-3	2.576-3	

Table 3 Displacement Response with Combined Amplification Factors

dof No. Type	ADD SRSS	ADD CQC	ABS ABS	ABS SRSS	SRSS SRSS
1 UX10	5.877-3	5.903-3	1.364-2	7.019-3	6.367-3
2 UY10	4.454-2	4.497-2	8.042-2	5.195-2	4.766-2
3 UX16	5.028-2	5.087-2	9.491-2	6.121-2	5.568-2
4 UZ16	3.931-1	3.976-1	6.570-1	4.626-1	4.244-1
5 UX22	3.097-2	3.053-2	7.350-2	3.995-2	3.520-2
6 UY22	4.492-1	4.448-1	7.491-1	5.469-1	4.981-1
7 UY30	5.163-1	5.108-1	8.544-1	6.265-1	5.711-1
8 UZ30	3.621-1	3.666-1	6.320-1	4.316-1	3.949-1
9 UX44	6.512-3	6.475-3	1.387-2	7.509-3	6.916-3
10 UZ44	1.355-3	1.316-3	3.487-3	1.691-3	1.503-3

Table 4 Displacement Response with Reduced Number of Modes, Including Residuum

dof No. Type	5 modes		2 modes		(SRSS)
	modal	total	modal	total	(SRSS)
1 UX10	6.339-3	6.341-3	6.093-3	6.167-3	
2 UY10	4.714-2	4.785-2	4.709-2	4.768-2	
3 UX16	5.568-2	5.568-2	5.544-2	5.547-2	
4 UZ16	4.244-1	4.244-1	4.242-1	4.245-1	
5 UX22	3.517-2	3.517-2	3.327-2	3.327-2	
6 UY22	4.981-1	4.981-1	4.976-1	4.680-1	
7 UY30	5.711-1	5.711-1	5.710-1	5.711-1	
8 UZ30	3.949-1	3.949-1	3.945-1	3.949-1	
9 UX44	5.864-3	6.999-3	5.829-3	8.395-3	
10 UZ44	1.452-3	1.455-3	1.292-3	1.403-3	

Table 5 Combination of Individual Displacement Responses

dof No. Type	SRSS ADD	CQC SRSS	CQC ADD	(Modes) (Loads)
1 UX10	7.505-3	6.359-3	7.498-3	
2 UY10	5.581-2	4.817-2	5.636-2	
3 UX16	6.222-2	5.639-2	6.294-2	
4 UZ16	4.639-1	4.294-1	4.691-1	
5 UX22	4.347-2	3.447-2	4.266-2	
6 UY22	5.477-1	4.934-1	5.427-1	
7 UY30	6.275-1	5.651-1	6.212-1	
8 UZ30	4.329-1	3.998-1	4.380-1	
9 UX44	9.908-3	6.851-3	9.826-3	
10 UZ44	1.933-3	1.463-3	1.680-3	

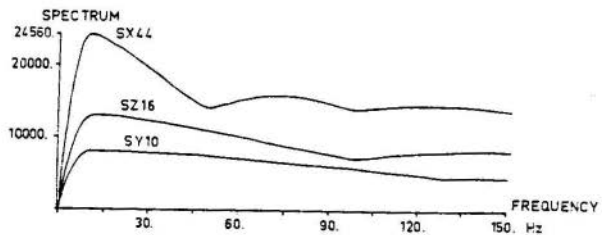


Fig. 3 Load Spectra, 5% Damping

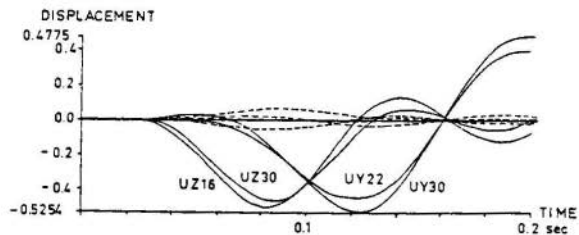


Fig. 4 Displacement Time Histories

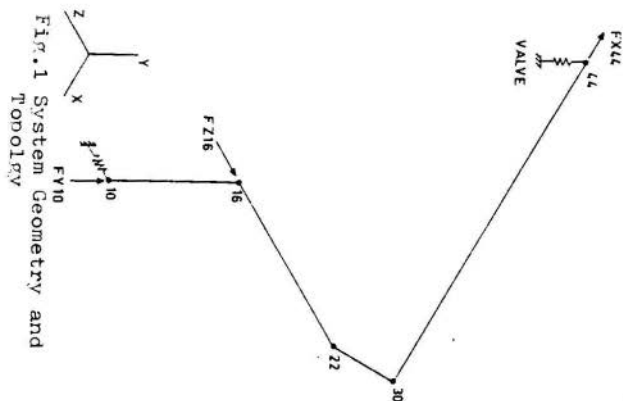
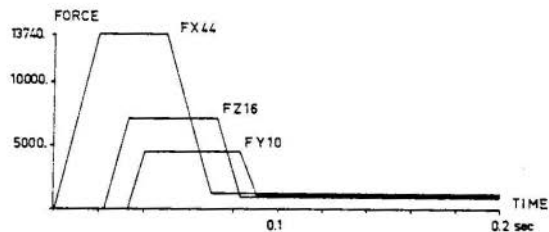


Fig. 2 Load Time Histories



ANAIS

PROCEEDINGS



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981

TRABALHO
PAPER

N.º D-3.

p.p. 25 - 35

PUC/RJ

DESIGN AND ANALYSIS FOR PIPING SYSTEMS

Hans-Peter STERKEL and
José Henrique COSTA CUTRIM

Engineers

NUCLEN - Nuclebras Engenharia S.A.-Deptº TM5
Rua Visconde de Ouro Preto, 5 - 6º andar

SUMÁRIO

Este trabalho pretende mostrar, através de uma descrição genérica os procedimentos e as técnicas mais típicas que são usadas pela NUCLEN para o projeto e cálculo de tubulações de Usinas Nucleares. O trabalho descreve o sistema de classificação e mostra as técnicas de análise que são usados para o projeto e verificação dos sistemas de tubulação, i.e. Pressão de projeto para o dimensionamento da espessura da parede, análise de temperatura e peso próprio, juntamente com a determinação dos pontos de suporte. As técnicas de projeto e análises dinâmicas são descritas para consideração de carregamentos de terremoto e impulsos de pressão.

SUMMARY

This paper intends to show as a generic description, the procedure and the typical techniques that are used in NUCLEN for the design and the calculation of the piping of Nuclear Power Plants. The paper describes the classification system and shows the analysis techniques which are used for the design and verification of the piping systems, i.e. pressure design for the dimensioning of the wall thicknesses, temperature and dead weight analysis together with determination of support points. The techniques of dynamic design and analyses are described for earthquake and pressure impulse loadings.

1. Introduction

This paper describes the design and analysis procedures used by NUCLIN for the piping calculation of Nuclear Power Plants, but it is not intended as a detailed design specification.

Because of the need to provide security against the uncontrolled release of radioactive materials, a rigorous classification system is applied to nuclear piping and an extensive set of codes and standards have been developed in the nuclear industry. The paper describes the classification system utilized by NUCLIN and refers to industry codes and standards applied. There are described the various design and analysis techniques used by NUCLIN to meet the requirements of these standards and the requirements of the state or governmental bodies having legal jurisdiction over a specific nuclear plant.

2. Piping System Classification

2.1 Mechanical System Quality Group Classification

Mechanical systems and components fall within various quality levels or groups which are directly related to codes and code classes. In addition, due to the complex nature of system functions and their importance to safety, mechanical systems and components are further classified by requirement categories. Within a system, components or portions of systems may have differing categories. In this sense, components will imply pressure vessels, tanks, piping, pumps, valves and other equipment. The requirement categories RC-1 to RC-3 are applied relative to the design, materials, fabrication and quality assurance.

Systems and components which do not relate to nuclear safety are assigned to a RC-4 or RC-5.

RC-1 applies to components of the Reactor Primary Coolant System except piping and system components DN32 nominal size and smaller (failure of which can not lead to uncovering of the core with operation of the charging pumps).

RC-2 applies (1) to these valves, components, or closed systems used to effect isolation of the Containment atmosphere from the outside environs, (2) to portions of the Reactor Coolant System not covered by RC-1 and (3) to safety components of the following:

- Residual Heat Removal System
- Those portions of the Reactor Coolant Auxiliary Systems which form the Reactor Coolant letdown and makeup loop.

- portions of Reactor Containment Cooling Systems inside the Reactor Containment, some of which may circulate Reactor Coolant.
- Emergency Core Cooling System including injection and recirculation portions
- Air Cleanup System inside the Reactor Containment and portions that serve as extensions of Reactor Containment during air cleanup recirculation
- Reactor Containment Hydrogen Control System
- portions of the Main Steam and Normal Feedwater System extending from and including the secondary side of the steam generator up
- portions of Reactor Containment Cooling and Air Cleanup Systems outside the Reactor Containment that may recirculate Reactor Coolant

RC-3 applies to safety system components of the following:

- those portions of the Reactor Auxiliary Systems that provide boric acid for the letdown and makeup loop
- those portions of the Reactor Containment Cooling Systems not covered by RC-2
- emergency Feedwater System
- portions of Component and Process Cooling Systems not covered by RC-2 that cool other safety systems, the control room or safety-related electrical components outside Reactor Containment

Components of fluid systems required:

- for Spent Fuel Pool Cooling System
- to support on-site Emergency Power Supply System operation
- for compressed air systems required to support control or operation of safety systems, and
- to control or filter air-borne radioactive particulates or iodines not covered by RC-2

The following non-safety system components, the failure of which would result in uncontrollable release to the environment of gaseous radioactivity, normally held up:

- portions of the Reactor Coolant Auxiliary Systems that form the letdown and makeup loop, or
- portions of the Radioactive Waste Disposal System

2.2 Seismic Classification

The following seismic classification is applicable:

2.2.1 Class I components (active/passive)

As defined in KTA 2201.1 all components which are safety-related belong to Seismic Class I (SC-1). They are required under or after all off-normal conditions consequent to external influences for the safe shutdown of the reactor, for maintenance of the shutdown condition, for residual heat removal and prevention of impermissible activity release.

Active class I components are assigned the "Function" (F) objective of protection which in turn includes "Tightness" (D) and "Stability" (S). Active plant components are those of which at least in subsections must perform or enable to perform mechanical movements (movements of parts relative to one another, e.g. pumps, valves, relays) in the execution of their safety-related function and/or the deformation must be kept in certain permissible limits.

All other plant components are passive (e.g. tanks, vessels, piping). Passive class I components are assigned to the 'D' and 'S' objective of protection, 'F' is inapplicable.

2.2.2 Class II (A) Components

Class II (A) encompasses non-safety-related components which however may effect class I components as a result of impacts and damage which they may sustain.

2.2.3 Class II Components

All other plant components belong to class II. For these components, no proof is required. These components appear without an objective of protection.

The following definitions are applicable as objectives of protection:

Stability (S) is defined as resistant to topping, falling and excessive slip.

Tightness (D) is defined as the passive retention of media necessary for keeping accidents under control. The component is no longer required to perform active functions. Tightness is understood as entailing stability.

Function (F) is defined as the condition in which the system or component is able to perform its normal function, e.g. valves can still be opened and closed, electrical switchgear can still perform switching operations. Function is understood as entailing stability and tightness.

3. Design and Analysis Techniques for Large Piping (\geq DN 50)

All large diameter piping in a NCN nuclear plant is subjected to rigorous design and analysis, the extent of which is a function of the piping's classification (required category, seismic and explosion). Large diameter piping is defined as piping having an internal diameter greater than or equal to 50mm.

Table 1. Type of analysis in relation to the classification

Requirement Category (RC)	Seismic Classification (SC)					
		DL	T	S	E	SH/WH
RC - 1	SC-I and SC-II(A)	X	X	X	X	X
RC - 2	SC-I and SC-II(A)	X	X	X	X	X
RC - 2	Non seismic	X	X			X
RC - 3	SC-I and SC-II(A)	X	X	X	X	X
RC - 3	Non seismic	X	X			(X)
RC - 4	Non seismic	X	X			
RC - 5						

where DL = weight(dead load) T = temperature
 S = seismic E = explosion loading
 SH/WH = steamhammer or waterhammer

Piping in NCN plants with RC-1,2 or 3 is designed and analysed to design specifications developed on system by system basis. The design specifications consider both static and dynamic loadings and establish the credible loading combinations to be considered.

3.1 Pressure Design

Once the internal diameter of piping has been determined to meet system functional requirements (flow volume and frictional head loss) the required wall thickness is determined from the piping's design pressure considering different factors like corrosion allowance specified in accordance with DIN or other standards.

3.2 Weight and Temperature Design and Analysis

Once the piping routings have been determined from plant layout considerations, flexibility analysis are performed using the "Static Loading Analysis Procedures". These are typically written as a set of linear equations as follows:

$$\underline{F} = \underline{Kd} \quad (1)$$

in which: \underline{F} = joint load matrix \underline{K} = stiffness matrix
 \underline{d} = joint displacement matrix

Flexibility analyses are performed to verify that the piping layout has adequate inherent flexibility resulting from its shape, such that the temperature expansion strains resulting from the temperature conditions can take place without inducing unacceptably high stress levels. If the unsupported piping flexibility results are unacceptable, the piping is rerouted to increase the system flexibility.

Once it has been determined that adequate flexibility exists in a piping layout, weight analysis are performed to locate weight supports such that the piping is stable, its stress levels are acceptable and the deflections of the piping are acceptable. In these analysis, the distributed weight of the piping plus any insulation and heating tracing, and the concentrated weights of any valves or other components are considered. The analyses are performed using the Finit Element Method (FEM) with lumped weights at the nodal points in the mathematical model.

Before performing weight analysis, vertical weight supports are located through-out the piping using design guides or experience. Where ever possible, these supports are designed to be rigid supports but where the results of the flexibility analysis indicate large temperature expansion, vertical spring hangers or constant supports are used.

Weight flexibility analysis are iterated adjusting the vertical support types and locations until an arrangement of supports is obtained which provides adequate weight support of the piping such that pipe stresses, displacements and nozzles and moments are all within acceptable levels while providing sufficient flexibility to maintain the temperature expansion stresses displacements and nozzle forces and moments all within acceptable levels.

To facilitate compliance with the Design Specification and piping codes, when weight and temperature expansion stresses are combined with other loadings in the design checking phase, NCN normally limits weights and temperature expansion stresses to the following values:

Pressure stress:	33% of SY
Weight stresses:	10% of SY

Temp. expansion stresses: 150% of SY

where SY is the piping material yield as defined in the ASME BPVC Section III.

3.3 Seismic Design and Analysis

3.3.1 Determination of Piping Dynamic Characteristics

All large diameter piping of seismic Category 1 (nominal diameter ≥ 50 mm) is designed and analysed for earthquake induced inertia effects and earthquake induced anchor movements. The piping is typically analysed using the "Response Spectra Modal Analysis Procedures". The governing joint equilibrium equations for dynamic loading can be written as

$$\ddot{\underline{M}}\underline{U}_t + \dot{\underline{C}}\underline{U} + \underline{K}\underline{U} = \underline{F}\underline{I} + \underline{F}\underline{D} + \underline{F}\underline{E} = \underline{F}(t) \quad (2)$$

where

$\underline{F}\underline{I}$ = matrix of inertia forces = $\underline{M}\underline{U}_t$

$\underline{F}\underline{D}$ = matrix of damping forces = $\underline{C}\underline{U}$

$\underline{F}\underline{E}$ = matrix of elastic forces = $\underline{K}\underline{U}$

$\underline{F}(t)$ = applied dynamic load vector

\underline{U} = relative displacement vector

$\dot{\underline{U}}$ = relative velocity vector

$\ddot{\underline{U}}_t$ = total acceleration vector

\underline{M} = system mass matrix

\underline{C} = system damping matrix (viscous damping assumed)

\underline{K} = system stiffness matrix

The natural undamped dynamic characteristics of vibration of the piping (Eigenvalues or frequencies and Eigenvectors or Mode Shapes) are determined. This is basically a mathematical computation based on the mass and stiffness characteristics of the complete piping loop as analysed using the Finite Element Method.

The dynamic properties of the system are determined by solving the equations of motion for the undamped vibration assuming harmonic motion.

i.e.
$$\ddot{\underline{M}}\underline{U} + \underline{K}\underline{U} = \underline{0} \quad (3)$$

Equation becomes:
$$-\omega^2 \cdot \underline{M}\underline{U} + \underline{K}\underline{U} = \underline{0} \quad (4)$$

or changing to the flexibility form:

$$\underline{F}\underline{M}\underline{U} = \frac{1}{\omega^2} \underline{U} \quad \text{where } \underline{F} = \underline{K}^{-1} \quad (5)$$

with the substitution $\underline{U} = \underline{\theta X}$ (6)

we get $\underline{\theta}_n^T \underline{M} \underline{\theta}_m = 0 \quad m \neq n$ (7)

with $\underline{\theta} =$ the Eigenvectors

For most typical piping systems all natural dynamic characteristics of the piping in the frequency range 0 - 33Hz are determined.

The contribution of modes above the frequency cut-off of 33 Hz to piping response is considered by inclusion of the rigid body modes of response of the piping.

3.3.2 Determination of the Piping's Dynamic Seismic Inertia Response

Once the dynamic characteristics of the piping are determined, the dynamic seismic inertia response is calculated.

The equations of motion can be written as follows:

$$\underline{M}\ddot{\underline{U}} + \underline{C}\dot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{M}\underline{T}\ddot{\underline{U}}_g \quad (8)$$

which are a set of coupled ordinary second order differential equations, or

$$\underline{\theta}_n^T \underline{M} \underline{\theta} \ddot{\underline{Y}} + \underline{\theta}_n^T \underline{C} \underline{\theta} \dot{\underline{Y}} + \underline{\theta}_n^T \underline{K} \underline{\theta} \underline{Y} = -\underline{\theta}_n^T \underline{M} \underline{T} \ddot{\underline{U}}_g \quad (9)$$

where $\underline{\theta}_n$ - Mode shape for "n" th mode
(A function of position (x,y,z))

This leads after some transformations to the decoupled equations

$$\ddot{Y}_n + 2 \xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = -\frac{1}{M_n^*} \underline{\alpha}_n \ddot{\underline{U}}_g \quad (10)$$

which can be solved with the Duhamel or Convolution Integral:

$$Y_n = \frac{\underline{\alpha}_{ni}}{M_n^*} \frac{1}{\omega_{nd}} \int_0^t \ddot{U}_g(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_{nd} (t-\tau) d\tau \quad (11)$$

as time dependent solution or with response spectra via

$$Y_{ni \max} = \frac{\underline{\alpha}_{ni}}{M_n^*} \frac{1}{\omega_n^2} \cdot S_{a_i}(\xi_n, \omega_n) \quad (12)$$

= maximum generalised coordinate response in the "n" th mode corresponding to acceleration in the i coordinate direction (i = x,y,z)

3.3.3 Combination of Modal Response

Since the response spectrum method of dynamic analysis yields the maximum dynamic response for each mode, it is generally not reasonable to directly sum the individual modal responses by absolute summation. It has been shown that this summation procedure is generally too conservative as the modal maxima do not occur simultaneously, and summation of the modal response by the "Square-Root-of-the-Sum-of-the-Squares" (SRSS) summation procedure provides a more realistic estimate of the total maximum response.

3.3.4 Selection of Input Spectra

A specific selection from the various floor and nozzle spectra developed for piping analyses as input spectra in the analyses is necessary for each pipe analysed. This selection corresponds to the anchor points or nozzles to which the pipe connects, and the points along the pipe at which the piping is supported.

3.3.5 Spatial Directions of Excitation and Combination of Spatial Response

In the calculation of the seismic response of piping the total response (summation of modal responses) is calculated for excitation in each of the three spatial coordinate directions separately, and the total response of the piping is then calculated from the individual responses in each spatial coordinate direction.

In either of the types of analyses, it is generally assumed that the mass and inertia of the piping is sufficiently small in comparison with both the mass and inertia of the mechanical components to which the piping connects and that of the structures from which the piping is supported. Thus the piping may be considered separately from the mechanical components and structures. The input motion for the seismic analysis of piping is accordingly defined at the piping connection and support points on the mechanical systems and structures.

3.4 Steam and Waterhammer Design and Analysis

Several of the major piping systems in a NCN plant may be subjected to Steamhammer or Waterhammer effects resulting from rapidly closing or rapidly opening valves or pump operation changes. These systems are typically as follows:

- a) Mainsteam system: - Steamhammer effects resulting from rapid turbine stop valve closure (upset or emergency conditions)
- Steamhammer effects resulting from moderately rapid mainsteam isolation valve closure (upset or emergency conditions)
- b) Feedwater system: - Waterhammer effects resulting from rapid regulating valve closure (upset conditions)
- Waterhammer effects resulting from pipe rupture and the resultant rapid check valve closure (emergency conditions)
- c) Pressurizer RV Discharge system: - Steamhammer (shock) loading resulting from rapid RV opening

For the above systems, hydrothermal analyses must be performed to determine the forcing functions imposed on the piping by the change in flow conditions, and dynamic piping response analyses must be performed to determine the stress induced in the piping and the piping displacements and support forces. The response is evaluated step-by-step through the desired time range, starting with any given initial condition. The incremental form of the equations of motion is

$$M \underline{\Delta U} + C_t \underline{\Delta U} = K_t \underline{\Delta U} = \underline{\Delta F}(t) \quad (13)$$

in which $\underline{\Delta F}(t)$ is the change in applied load vector. $\underline{\Delta U}$ is the change in displacement vector, an C_t and K_t represent the effective damping and stiffness matrices applicable during the increment. In a non-linear system these properties may be changing as the structure responds, but in a linear system these properties are constant. It is reasonable in any event to assume them to remain constant during each time increment if the increments are made short enough.

4. Seismic Design and Analysis for Small Diameter Piping

The design and analysis techniques used for small diameter piping (nominal diameter less or equal 50), depend on the classification of the piping, the complexity of its layout and the complexity of design conditions. The following techniques are typically used.

Design guides and design charts are used for all small diameter piping, instead of rigorous analysis. The procedures used for this

piping are applied both in the design office and on site after the piping has been erected.

Small diameter piping is erected and supported appropriately after completion of weight and temperature design.

Those lines categorised as Seismic Category I are then reviewed in the field by experienced personnel. Any necessary additional seismic supports are then located and designed by experienced piping engineers in the field, using the design guides and charts.

5. Conclusions

This paper showed that with the classification with requirement categories and for seismic classifications a detailed system of classification is established to ensure that sufficient calculations will be made for the piping systems. The methods shown are given as overview of the most important techniques which are used.

6. References

The references are not mentioned explicitly in the text

- /1/ KTA 2201.1, Kerntechnischer Ausschuss, Rules 22 01.1, Draft, Germany
- /2/ RE-L 1510E, 1511E, 1512E specification for Nuclear Power Plant Angra 2 and 3, Kraftwerk Union AG, Germany
For company internal use only.
- /3/ ASME - Boiler and Pressure Vessel Code
Section III, Subsection NB and NC, July 1980
- /4/ Piping analysis and design in Nuclen, Technical Report
NCN - TM5/593/81, Rio de Janeiro 18.03.81

ANAIS

PROCEEDINGS



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-4.

P.P. 37 - 44

PUC/RJ

UM ESTUDO SEMI-ANALÍTICO DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS
PELO ESCOAMENTO EM TUBULAÇÕES DE CENTRAIS NUCLEARES

José Eduardo Maneschy

Furnas Centrais Elétricas S/A
Depto. de Engenharia Nuclear

SUMÁRIO

Apresenta-se um método semi-analítico para a determinação da segurança de tubulações excitadas pelo escoamento interno. O método consiste em aplicar ao sistema um espectro de frequências uniformemente distribuído obtido a partir das acelerações modais medidas experimentalmente. É estabelecido um critério que permite verificar se o nível de tensões daí resultante está dentro de limites admissíveis.

SUMMARY

A semi-analytical method is presented to evaluate the piping system safety due to internal flow vibration excitation. The method is based on the application of a plane spectrum on the system, resulted by measured modal accelerations. A criteria is established to verify stress levels and compare with the allowable levels.

1. Introdução

Os órgãos reguladores para o licenciamento de centrais nucleares estabelecem a necessidade de se adotar um programa de testes antes do funcionamento normal da planta. Os principais objetivos são assegurar que os componentes, tubulações etc. estão adequadamente projetados e também, verificar se os modelos analíticos adotados para estes são confiáveis. Nos testes devem ser observadas e medidas a expansão térmica e as vibrações a que os sistemas possam estar sujeitos.

Este trabalho pretende apresentar um método que estuda se o nível de tensões, causado pelas vibrações induzidas pelo escoamento de fluido nas tubulações, não supera os valores admissíveis impostos pelas normas.

O procedimento que foi desenvolvido necessitava que as acelerações de pontos previamente selecionados sobre a estrutura fossem medidas. Estes valores foram obtidos com a instalação de acelerômetros, sendo os resultados apresentados na forma de espectros de frequência [1]. Estas medições foram realizadas pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) durante o teste funcional à quente da Central Nuclear de Angra I.

2. Tensão Admissível à Vibração

As acelerações e deslocamentos dinâmicos resultantes de vibrações produzem tensões primárias na linha que, quando combinadas com aquelas provocadas por cargas previstas nas especificações (pressão interna, peso próprio, sismos) não devem superar os limites admissíveis pelas normas. Assim, para que possa ser determinada a faixa de tensões reservada às vibrações, deve-se considerar a análise de tensões para a linha. Esta análise, realizada segundo o código ASME seção III subseção NC-3650, [2], estabelece que para tubulações de classe nuclear 2 as tensões primárias devem satisfazer as seguintes equações:

$$\frac{PD}{4t} + 0.75i \frac{M_A}{Z} \leq 1.0 S_h \quad (1a)$$

$$\frac{PD}{4t} + 0.75i \frac{(M_A + M_B)}{Z} \leq 1.2 S_h \quad (1b)$$

onde P é a pressão interna de projeto, D diâmetro externo do tubo, t espessura da parede, i fator de intensificação de tensões, Z o módulo da seção e S_h tensão admissível. M_A é o valor do momento resultante devido ao peso próprio e outras cargas mecânicas e M_B o momento resultante devido aos terremotos.

As Eqs. (1a, 1b) podem ser modificadas de modo que, o menor valor das equações abaixo, forneça a tensão admissível às vibrações:

$$\sigma_{VIB} = 1.0 S_h - \left(\frac{PD}{4t} + 0.75i \frac{M'_A}{Z} \right) \quad (2a)$$

ou

$$\sigma_{VIB} = 1.2 S_h - \left(\frac{PD}{4t} + 0.75i \frac{M'_A + M'_B}{Z} \right) \quad (2b)$$

onde M'_A é o momento resultante devido ao peso próprio.

Encontrado o valor de tensão admissível deve-se agora determinar qual o nível de tensão atuante causado pelas vibrações do sistema. É este o propósito da seção seguinte.

3. Método Proposto

A maior dificuldade do problema em estudo está associada ao fato de não se conhecer, a priori, a excitação a que está submetida a tubulação. Esta dificuldade é contornada quando se propõe que o sistema seja submetido a um espectro de frequências uniformemente distribuído, obtido a partir das máximas acelerações modais determinadas experimentalmente. Se o valor da máxima tensão atuante na tubulação excitada por este espectro não ultrapassa σ_{VIB} , pode-se assegurar que o nível de vibrações é admissível.

A hipótese de que a excitação devida ao escoamento do fluido possa ser representada por um espectro de frequências uniformemente distribuído pode ser aceita uma vez que, de um modo geral, as estruturas a partir de um determinado valor de frequência respondem da mesma forma, conforme pode ser visto

na Fig. 1a. Assim, como a excitação devida ao escoamento de fluidos é de alta frequência, a determinação das tensões envolve um espectro como o mostrado na Fig. 1b, que passa a ser significativo a partir de um determinado valor f_0 .

Para que o método possa ser implementado é necessário que seja estabelecida uma relação entre a aceleração modal e o espectro de acelerações. Assim, considere-se o sistema com N-graus de liberdade submetido a este espectro. A solução da equação do movimento pode ser obtida através da análise modal [3]. Dessa análise resulta um conjunto de N equações desacopladas que pode ter sua solução estabelecida através do método do espectro de resposta. Baseado neste método o

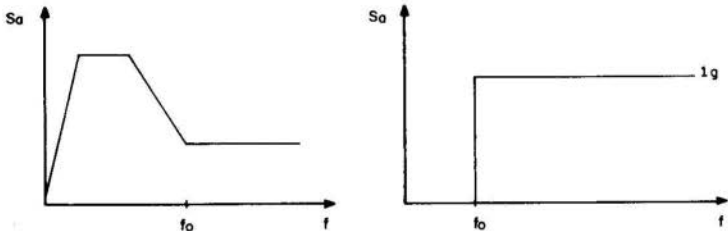


Fig. 1a - Espectro para as Estruturas Fig. 1b - Espectro para o problema
valor da máxima aceleração modal para cada direção, no ponto modal i pode ser posto na forma:

$$\ddot{W}_n^i = \phi_n^i \left\{ \sum_{j=X,Y,Z} (\gamma_{nj} S_{anj})^2 \right\}^{1/2} \quad (3)$$

onde

ϕ_n^i - vetor modal

γ_{nj} - fator de participação modal na direção j

S_{anj} - aceleração espectral do n -ésimo modo na direção j

Admitindo-se que o valor do espectro de acelerações é o mesmo nas direções X, Y, Z obtém-se, para cada uma destas direções, o valor de \ddot{W}_n^i na forma:

$$\ddot{W}_{nX}^i = \phi_{nX}^i (\gamma_{nX}^2 + \gamma_{nY}^2 + \gamma_{nZ}^2)^{1/2} S_a \quad (4.a)$$

$$\ddot{W}_{nY}^i = \phi_{nY}^i (\gamma_{nX}^2 + \gamma_{nY}^2 + \gamma_{nZ}^2)^{1/2} S_a \quad (4.b)$$

$$\ddot{W}_{nZ}^i = \phi_{nZ}^i (\gamma_{nX}^2 + \gamma_{nY}^2 + \gamma_{nZ}^2)^{1/2} S_a \quad (4.c)$$

Entretanto, como o método do espectro de resposta foi utilizado, os valores dados pelo conjunto de Eqs.(4) são valores relativos, isto é, para que o valor da aceleração total seja encontrado, deve-se adicionar às Eqs.(4) o valor da aceleração da base, que para valores máximos pode ser assumida igual a S_a . As expressões daí resultante são:

$$A_{nX}^i = \phi_{nX}^i \{ (\gamma_{nX}^2 + \gamma_{nY}^2 + \gamma_{nZ}^2)^{1/2} + 1 \} S_a \quad (5.a)$$

$$A_{nY}^i = \phi_{nY}^i \{ (\gamma_{nX}^2 + \gamma_{nY}^2 + \gamma_{nZ}^2)^{1/2} + 1 \} S_a \quad (5.b)$$

$$A_{nZ}^i = \phi_{nZ}^i \{ (\gamma_{nX}^2 + \gamma_{nY}^2 + \gamma_{nZ}^2)^{1/2} + 1 \} S_a \quad (5.c)$$

As máximas acelerações medidas experimentalmente A_n^i quando substituídas no conjunto de equações acima permite determinar qual o valor do espectro de frequências uniformemente distribuído, S_a , a que deve estar submetido o sistema. Desse modo, pode-se encontrar qual a máxima tensão atuante na tubulação associada a este espectro e compará-la com o valor da tensão admissível. Se esta última superar a máxima tensão atuante a tubulação está qualificada com relação às vibrações.

4. Exemplo Numérico

Para ilustrar o método proposto, uma tubulação de classe nuclear 2, mostrada na Fig. 2, foi analisada.

Inicialmente considera-se a tubulação submetida aos casos de cargas previstos nas especificações, com o objetivo de se determinar a tensão admissível às vibrações, σ_{VIB} , dada pela Eq.(2).

O modelo dinâmico utilizado para a determinação de σ_{VIB} é agora excitado com um espectro igual a 1σ , atuante nas direções X, Y e Z, conforme a Fig. 1b. Esta análise permite determinar as frequências naturais, os vetores modais e os fatores de participação modal.

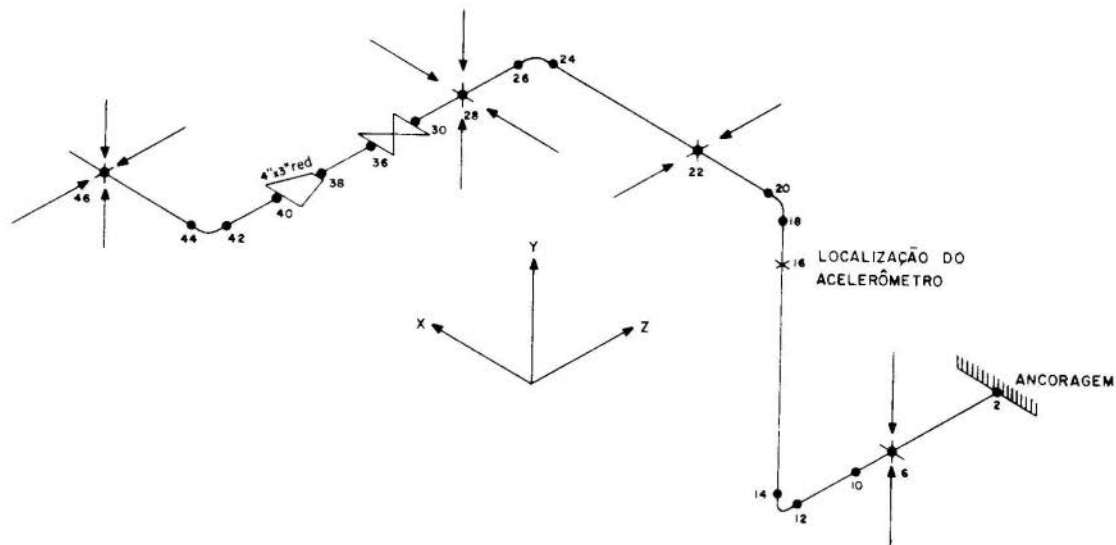


Fig. 2 - Modelo Estrutural para a Análise

Para o acelerômetro localizado no ponto 16 os máximos valores de acelerações modais medidas foram [1]:

$$A_{24X} = 0,966g, \quad 600 \text{ Hz}$$

$$A_{25Y} = 0.406g, \quad 750 \text{ Hz}$$

$$A_{24Z} = 1.220 g, \quad 662 \text{ Hz}$$

Substituindo-se estes valores juntamente com os vetores modais e fatores de participação modais no conjunto de Eq. (5), obtém-se o valor do espectro igual a:

$$S_a = 0.928 g$$

Este espectro quando aplicado nas três direções fornece a máxima tensão atuante no sistema, que é igual a:

$$\sigma = 566 \text{ psi}$$

Observa-se então que o valor da tensão devida às vibrações resultantes do escoamento do fluido é bem inferior à admissível às vibrações, que para a linha analisada é:

$$\sigma_{VIB} = 11000 \text{ psi}$$

5. Conclusões

O trabalho apresenta um método que analisa se as vibrações induzidas pelo escoamento de fluidos não produzem tensões que possam superar os limites admissíveis pelas normas.

Para a tubulação estudada como exemplo, determinou-se qual o valor máximo de tensão para o sistema submetido a um espectro de frequências uniformemente distribuído simulando a excitação. O valor da máxima tensão obtida, sendo inferior à admissível às vibrações, permite qualificar a linha de acordo com os critérios estabelecidos pelo código ASME.

AGRADECIMENTOS

Aos Drs. Luiz Bevilacqua (PFOMON) e Sérgio Guerreiro (CNEM) pelas orientações e sugestões apresentadas durante es

te trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] CEPEL Relatório Técnico, Medição de Vibrações nas linhas de Angra I, (1981)
- [2] ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section III, Sub-section NC, (1980)
- [3] Clough, R.W. and Penzien, J., Dynamic of Structures , McGraw-Hill, (1975)
- [4] Meirovitch, L.. Analytical Methods in Vibrations, Mac-Millan, (1967)
- [5] NUPIPE II, User Information Manual, CDC



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-5

P. P. 45 - 54

PUC/RJ

TENSÕES TÉRMICAS EM TUBULAÇÕES EM REGIME TRANSIENTE DE FLUXO DE
CALOR - UM MÉTODO SEMI-ANALÍTICO

Sergio Vieira Guerreiro Ribeiro

José Eudes Leite de Andrade

Comissão Nacional de Energia Nuclear - CNEN

Rua General Severiano 90 sala 415-B

Rio de Janeiro 22290 - Brasil

SUMÁRIO

A Subseção NB-3600 do ASME Boiler and Pressure Vessel Code Section III fornece fórmulas aproximadas para cálculo das tensões em tubulações nucleares classe 1. As tensões provocadas por carregamentos térmicos são dadas em função de tres quantidades \bar{T} , ΔT_1 e ΔT_2 derivadas da distribuição de temperaturas através da parede do tubo. O objetivo deste trabalho é a determinação destas tres quantidades para um transiente arbitrário na temperatura do fluido. Um código de computador foi desenvolvido e as tensões do código ASME obtidas foram comparadas com a solução elástica exata e também com o método dos elementos finitos.

SUMMARY

Subsection NB-3600 of ASME Boiler and Pressure Vessel Code Section III furnishes formulas for evaluating the stresses in class 1 nuclear piping. The stresses induced by thermal loads are given in terms of three quantities \bar{T} , ΔT_1 and ΔT_2 derived from the actual temperature distribution across the pipe wall. The objective of this paper is to determine these three quantities for any given temperature transient in the internal fluid. A computer code was developed and the ASME code stresses obtained compared with exact solution and finite element stresses.

1. Introdução

As tubulações nucleares de classe I devem ser projetadas contra fadigas por fadiga. A subseção NB-3600, seção III, do Código ASME, dá regras simplificadas para preencher os requisitos gerais da subseção NB-3200. As tensões térmicas na tubulação, causadas pelos transientes de temperatura no fluido, podem ser estimadas através das quantidades \bar{T} , ΔT_1 e ΔT_2 definidas no Código.

Aqui se propõe um método semi-analítico para determinar a distribuição de temperatura através da parede do tubo, produzida por um transiente de temperatura arbitrário no fluido interno. Considera-se que a parede do tubo é plana e usa-se a equação diferencial unidimensional da condução de calor em coordenadas cartesianas.

Considera-se que o tubo é isolado externamente, embora pudessem ser usadas outras condições de contorno.

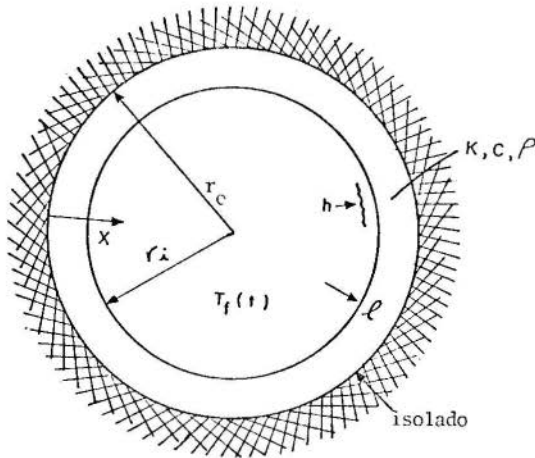


Figura 1 - Geometria e Condições de Contorno

2. Solução Semi-Analítica da Equação de Calor Transiente

A Figura 1 mostra a geometria e as condições de contorno do problema. Os raios internos e externos são respectivamente r_i e r_c . A espessura da parede é denotada por h . O coeficiente de película, a condutividade térmica do material do tubo, o calor específico e a massa específica são h, k, c e ρ respectivamente. Inicialmente o tubo está à temperatura T'_0 e a história no tempo da temperatura do fluido é dada por $T_f(t)$.

A equação diferencial é

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

onde T e t denotam temperatura e tempo respectivamente. A variável x é medida da parede externa do tubo e a difusividade térmica é $\alpha = \frac{k}{\rho c}$. As condições iniciais e de contorno são

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x=0 \quad (2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = h (T - T_f) \quad \text{em } x=l \quad (3)$$

$$T = T'_0 \quad \text{em } t=0 \quad (4)$$

Para o caso geral de a história no tempo da temperatura do fluido ser arbitrária, uma solução analítica completa não é possível. Todavia, considerando $T_f(t)$ sendo uma soma de funções degraus, como mostrada na Figura 2, obtém-se a solução da equação (1), com condições de contorno (2), (3) e (4), como uma soma de soluções degraus unitárias.

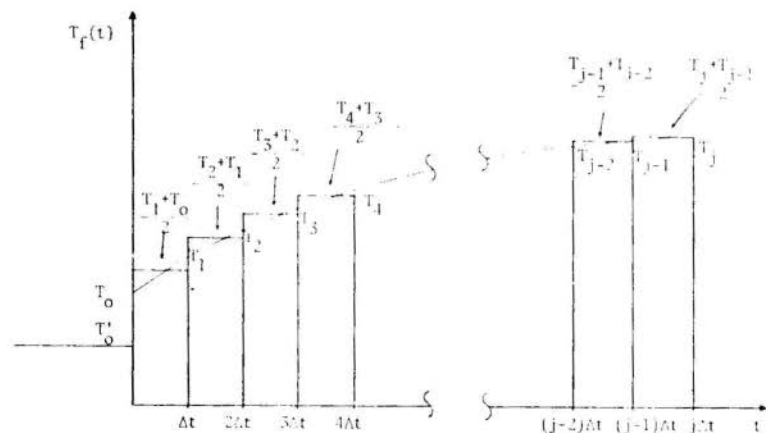


Figura 2 - Discretização de $T_f(t)$.

Considere $\Delta T^1(x, j)$ como a variação na temperatura do tubo no ponto x , no tempo $t = j \Delta t$, devido a uma variação de temperatura unitária de grau no fluido, no tempo $t=0$. Então, a temperatura no ponto x , no tempo $t=j \Delta t$ é aproximadamente

$$T(x, t=j\Delta t) = T'_0 + \Delta T^1(x, j)(T_0 - T'_0) + \Delta T^1(x, j)(T_1 - T_0)/2 + \dots + \Delta T^1(x, j-1)(T_2 - T_0)/2 + \dots + \Delta T^1(x, 1)(T_j - T_{j-2})/2 \quad (5)$$

ou, em forma compacta,

$$T(x, t=j\Delta t) = T'_0 + \Delta T^1(x, j)(T_0 + T_1 - 2T'_0)/2 + \sum_{k=1}^{j-1} \Delta T^1(x, j-k)(T_{k+1} - T_{k-1})/2. \quad (6)$$

Portanto, para Δt suficientemente pequeno, a equação (6) dá a distribuição de temperatura na parede do tubo.

Falta, ainda, determinar $\Delta T^1(x, j)$, solução da equação (1), com condições de contorno (2), (3) e (4) e $T'_1 = T'_0 + 1$. Usando separação de variáveis, determina-se que

$$\Delta T^1(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 \exp\left[-\frac{\alpha}{\ell^2}(\lambda_n \ell)^2 t\right] \cos\left[(\lambda_n \ell) \frac{x}{\ell}\right], \quad (7)$$

onde:

$$A_n^1 = -\frac{2 \operatorname{sen}(\lambda_n \ell)}{(\lambda_n \ell) + \operatorname{sen}(\lambda_n \ell) \cos(\lambda_n \ell)} \quad (8)$$

e $(\lambda_n \ell)$ são as raízes das equações (9) abaixo,

$$\cot \vartheta(\lambda_n \ell) = \frac{\lambda_n \ell}{B_1} \quad , \quad (9)$$

sendo o número de Biot $B_1 = \frac{\ell h}{k}$.

Desta forma, a equação (6) nos permite calcular \bar{T} , ΔT_1 e ΔT_2 , de acordo com as definições da subseção NB-3652, do Código ASME.

3. Solução Numérica da Equação de Autovalor

As raízes da equação (9) podem ser facilmente determinadas, através

do método de Newton, especialmente aplicado à equação. Considere-se a de terminação das raízes de

$$F(\lambda\ell) = B_1 \cotg(\lambda\ell) - (\lambda\ell) = 0. \quad (10)$$

Traçando um gráfico de $\cotg(\lambda\ell)$ e $(\frac{\lambda\ell}{B_1})$, verifica-se que a i -ésima raiz da equação (10) está entre $(i-1)\pi$ e $(i-1/2)\pi$. Também, neste intervalo, $F'(\lambda\ell) < 0$ e $F''(\lambda\ell) > 0$, i.e., $F(\lambda\ell)$ tem a configuração mostrada na Figura 3.

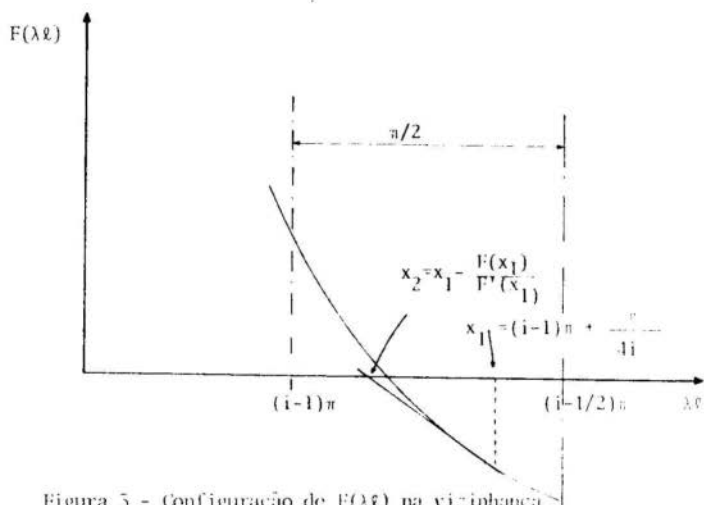


Figura 3 - Configuração de $F(\lambda\ell)$ na vizinhança da i -ésima raiz

Verifica-se facilmente que o seguinte algoritmo é sempre convergente na determinação da i -ésima raiz:

- 1) Deixe $x_1 = (i-1)\pi + \frac{\pi}{4i}$
- 2) Calcule $x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} = x_1 + \frac{B_1 \cotg x_1 - x_1}{1 + B_1 \operatorname{cosec}^2 x_1}$
- 3) Se $x_2 < (i-1)\pi$, faz-se $x_1 = \frac{1}{2} [x_1 + (i-1)\pi]$ e retorna-se ao passo 2. Se $x_2 \geq (i-1)\pi$, faz-se $x_1 = x_2$ e retorna-se ao passo 2. Repete-se este processo até que a tolerância seja alcançada, i.e., $||x_1| - |x_2|| < \text{tolerância}$.

A aplicação deste esquema no computador tem mostrado resultados excelentes.

4. Resultados Numéricos

4.1 Distribuição de Temperatura

Referindo-se à Figura 1, considerou-se um tubo com as seguintes características: $r_i=71,65\text{mm}$; $r_e=81,15\text{mm}$; $c=550\text{ w s/kg }^\circ\text{C}$; $\rho=7,82 \times 10^{-6}\text{ kg/mm}^3$; $h=5000 \times 10^{-6}\text{ W/mm}^2\text{ }^\circ\text{C}$. A condutividade térmica K foi considerada diferentemente pelo código ANSYS e pelo método proposto, i.e., o código ANSYS tem a capacidade de considerar o K como uma função da temperatura, enquanto, no presente método, foi usado um valor médio de K . A expressão geral para K foi $K=45,75 \times 10^{-3} - 0,013 \times 10^{-3} T(\text{W/mm }^\circ\text{C})$.

As condições de contorno térmicas foram: T_0 (temperatura inicial da tubulação) = $296\text{ }^\circ\text{C}$; $T_f(t)$ (história no tempo da temperatura no fluido) = $120\text{ }^\circ\text{C}$.

A Figura 4 apresenta a comparação dos cálculos de temperatura entre o ANSYS (modelos axissimétrico e planar) e o método proposto, usando um valor de K correspondendo à temperatura média do transiente, i.e., $T_{\text{médio}} = (120^\circ + 296^\circ)/2 = 208\text{ }^\circ\text{C}$. Isto dá $K_{\text{médio}} = 15,026 \times 10^{-3}(\text{W/mm }^\circ\text{C})$. Verifica-se que, para $t=5,0$ segundos, por exemplo, as temperaturas são

LOCALIZAÇÃO	TEMPERATURA ($^\circ\text{C}$) em $t = 5,0$ segundos		
	ANSYS(Axissim)	ANSYS(planar)	Método Presente
PAREDE INTERNA	206,25	203,85	205,9
ESPESSURA MÉDIA	255,06	252,51	251,8
PAREDE EXTERNA	271,90	270,03	268,5

Considerando que, usando o ANSYS, os cálculos foram feitos com K variável, os resultados acima concordam perfeitamente bem.

4.2 Distribuição de Tensão

A subseção NB-3000, da seção III, do código ASME, dá fórmulas aproximadas para avaliar as tensões térmicas em tubos. A intensidade de tensão de pico térmica em um tubo reto é dada por

$$S_p = \frac{E\alpha}{2(1-\nu)} \left[K_3 \Delta T_1 + \frac{E\alpha}{1-\nu} \Delta T_2 \right] \quad (11)$$

onde ΔT_1 e ΔT_2 são definidos na seção III, do Código ASME, E, α e ν são os módulos de Young, coeficiente de expressão térmica e coeficiente de Poisson, respectivamente. $K_3 = 1.0$ para tubos retos.

A tensão foi calculada em um sistema de coordenadas cilíndricas, onde de r , θ e z representam as direções radial, circunferencial e axial, respectivamente. Inicialmente, para calcular as tensões térmicas reais, tomou-se a capacidade do ANSYS, usando um modelo axissimétrico no estado plano de tensão, para ambos os casos de distribuição de temperatura, i.e., dos modelos planar e axissimétrico. Os valores utilizados foram $E = 207.798,072 - 88,275T - 0,003T^2$ (N/mm²), onde T é a temperatura em graus Celsius, $\nu=0,3$ e $\alpha=12,5 \times 10^{-6}$ (1/°C). Como o tubo está em um estado plano de deformação, os resultados do ANSYS devem ser transformados, como se verifica a seguir.

No estado plano de tensão, as soluções elásticas para um tubo reto com uma distribuição de temperatura radial $T(r)$, são dadas por /2/:

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha E}{r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b r T(r) dr - \int_a^r r T(r) dr \right], \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha E}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b r T(r) dr + \int_a^r r T(r) dr - r^2 T(r) \right], \quad (13)$$

onde a e b são os raios internos e externos, respectivamente. Também de /2/, as soluções no estado plano de deformação são obtidas, dos resultados no estado plano de tensão, substituindo-se E , ν e α pelas quantidades $E_1 = E/(1-\nu^2)$, $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$ e $\alpha_1 = \alpha(1+\nu)$, respectivamente. Usando estes valores em (12) e (13), é o mesmo que substituir αE por $\alpha_1 E_1 = \alpha E/(1-\nu)$. Para o estado plano de deformação há uma componente de tensão adicional, σ_{zz} ; quando as extremidades são livres, σ_{zz} é dado pela fórmula abaixo:

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b r T(r) dr - T(r) \right] = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \quad (14)$$

e as componentes σ_{rr} e $\sigma_{\theta\theta}$ são obtidas, dividindo-se equações (12) e (13) por $(1-\nu)$. Isto foi feito para transformar o estado plano de tensão, resultado fornecido pelo ANSYS, em um estado plano de deformação.

A distribuição de temperatura dada pelo método proposto, em $t=5.0$

segundos, foi usada para comparar as soluções considerando-se a seção III do Código ASME e a solução elástica. Os resultados estão resumidos abaixo:

LOCALI- ZAÇÃO	TENSÕES (N/mm ²) em t = 5,0 segundos			
	ANSYS (*)		Solução Elástica (**)	Método do Código ASME(**)
	Modelo Axissimétrico para o Cálculo da Temperatura	Modelo Planar para o Cálculo da temperatura		
PAREDE INTERNA	$\sigma_{\theta\theta} = 149,81$ $\sigma_{rr} = 0,0$ $\sigma_{zz} = 149,81$ SI = 149,81	$\sigma_{\theta\theta} = 149,39$ $\sigma_{rr} = 0,0$ $\sigma_{zz} = 149,39$ SI = 149,39	$\sigma_{\theta\theta} = 146,96$ $\sigma_{rr} = 0,0$ $\sigma_{zz} = 146,96$ SI = 146,96	SI=144,14 (K ₃ =1,0)
PAREDE EXTERNA	$\sigma_{\theta\theta} = -70,76$ $\sigma_{rr} = 0,0$ $\sigma_{zz} = -70,76$ SI = 70,76	$\sigma_{\theta\theta} = -72,46$ $\sigma_{rr} = 0,0$ $\sigma_{zz} = -72,46$ SI = 72,46	$\sigma_{\theta\theta} = -71,42$ $\sigma_{rr} = 0,0$ $\sigma_{zz} = -71,42$ SI = 71,42	

(*) Módulo de Young $E = 207.798,072 - 88,275T - 0,003T^2$

(**) Módulo de Young $E = (T = 208^{\circ}\text{C}) = 189,307,0$

SI - Intensidade de tensão

5. Conclusões

A seção anterior mostrou que o método do Código ASME dá boas estimativas para a intensidade de tensão máxima, em face dos efeitos térmicos. A comparação entre as duas soluções do ANSYS, i.e., considerando as temperaturas determinadas pelos modelos planar e axissimétrico, usando um mesmo modelo axissimétrico na determinação das tensões, mostrou uma diferença muito pequena nas intensidades de tensão. Isto justifica o uso de um modelo planar para o cálculo da distribuição de temperatura.

O pequeno não conservatismo encontrado no método do Código ASME, quando comparado com a solução elástica, é devido ao fato de que, para um tubo reto, K_3 na equação (11), deveria ser $K_3 = 1 + \frac{b-a}{3(b+a)}$. Como a quantidade $\frac{b-a}{3(b+a)}$ é muito menor que 1, pode ser desprezada. Aqui $\frac{b-a}{3(b+a)} = 0,0267$.

Embora tenhamos considerado somente um tipo de condição de contorno, outras poderiam ser tratadas identicamente. Isto afetará essencialmente a equação de autovalor (9).

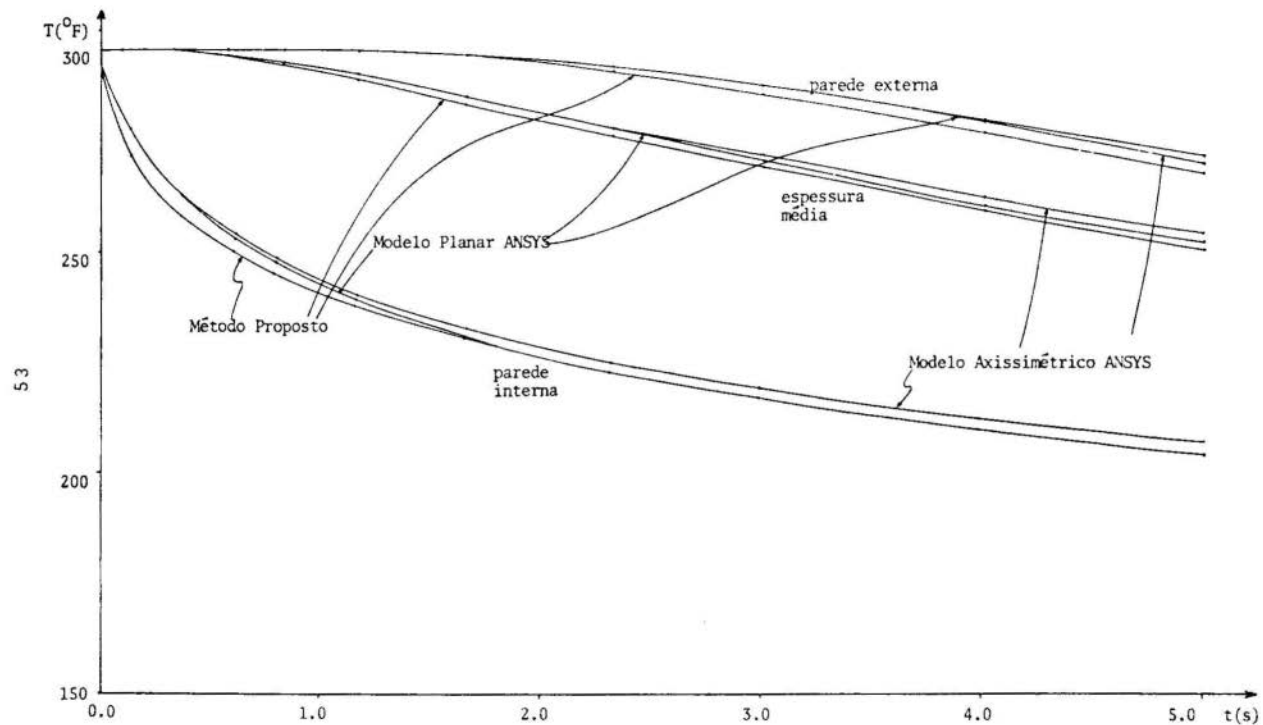


Figura 4 - História no Tempo das Temperaturas

REFERÊNCIAS

- [1] KREITH, F., "Principles of Heat Transfer", Intext Educational Publishers, New York (1973).
- [2] BOLEY, B.A., WEINER, J.H., "Theory of Thermal Stresses", John Wiley and Sons, Inc., New York (1960).
- [3] LIN, T.H., "Theory of Inelastic Structures", John Wiley and Sons, Inc., New York (1968).
- [4] ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section III - Division 1, New York (July 1, 1974).
- [5] DE SALVO, G.J., SWANSON, J. A., "ANSYS Computer Code, User's Manual", Swanson - Analysis Systems, Inc. Pennsylvania (March 1975).



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECÂNICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-6

P.P. 55 - 63

PUC/RJ

CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM REDUÇÕES DE TUBULAÇÕES
SOB O EFEITO DA PRESSÃO INTERNA

Fernando Augusto Mourão Villas-Bôas

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

Luiz Bevilacqua

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

As especificações para projetos industriais de reduções sujeitas ao efeito de pressão interna, não comentam, em geral, sobre as alterações provocadas nos fatores de intensificação de tensões quando se insere, no ramo de menor ou maior diâmetro, uma junta de expansão. O presente trabalho, além do estudo dos fatores de intensificação para o caso em que o esforço axial redistribui-se aos dois ramos, analisa os casos onde o esforço axial reduz-se a apenas um dos ramos, o que determina alterações de até cerca de 30% nestes fatores.

SUMMARY

The standards recommended for the stress analysis of pipe reduction do not take into account the various possibilities for the balance of the axial forces due to the internal pressure acting on the reductions.

1. Introdução

Admitindo que a cada um dos elementos que compõem uma redução a ser submetida à pressão interna fosse permitido deformar-se livremente, observar-se-ia que, nas junções as deformações produzidas em cada componente seriam diferentes, indicando a necessidade de que esforços de flexão deveriam ser introduzidos para que a continuidade da estrutura viesse a ser mantida nestes pontos. A determinação destes esforços e suas conseqüências são apresentadas a seguir.

2. Análise

Para os elementos estruturais cônicos e cilíndricos utilizados na composição de reduções a serem submetidas ao efeito de pressão interna (p), é possível obter soluções analíticas através da teoria das cascas finas de revolução [1], [2]. Visando generalizar o problema, tais soluções foram adimensionalizadas. Desta forma, os esforços resultantes, rotações e deslocamentos despertados nas cascas cônicas podem ser descritos como:

a) Solução homogênea

$$\frac{M_x^H}{Eh^2} = \frac{2}{y^2} [C_1(2\nu\text{bei}_2 y + y\text{bei}_2' y) - C_2(2\nu\text{ber}_2 y + y\text{ber}_2' y) + C_3(2\nu\text{kei}_2 y + y\text{kei}_2' y) - C_4(2\nu\text{ker}_2 y + y\text{ker}_2' y)] ,$$

$$\frac{Q_x^H}{Eh} = \left(\frac{2m}{y}\right)^2 \cot\alpha (C_1\text{ber}_2 y + C_2\text{bei}_2 y + C_3\text{ker}_2 y + C_4\text{kei}_2 y) ,$$

$$\frac{H_x^H}{Eh} = \frac{Q_x^H}{Eh} \frac{1}{\cos\alpha} , \quad \frac{M_\theta^H}{Eh^2} , \quad \frac{N_x^H}{Eh} , \quad \frac{N_\theta^H}{Eh}$$

$$\beta_x^H = \text{tg}\alpha m^2 (C_1\text{bei}_2 y - C_2\text{ber}_2 y + C_3\text{kei}_2 y - C_4\text{ker}_2 y) ,$$

$$\frac{\delta_x^H}{h} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{2\cos\alpha} [C_1(y\text{ber}_2' y - 2\nu\text{ber}_2 y) + C_2(y\text{bei}_2' y - 2\nu\text{bei}_2 y) + C_3(y\text{ker}_2' y - 2\nu\text{ker}_2 y) + C_4(y\text{kei}_2' y - 2\nu\text{kei}_2 y)] ,$$

onde $y = 2\rho\sqrt{x}$, $\rho = m\left(\frac{\cot\text{tg}\alpha}{h}\right)^{1/2}$, $m = (12(1-\nu^2))^{1/4}$,

b) Solução particular para pressão interna

$$\frac{N_x^P}{Eh} = \frac{p}{E} \frac{\text{tg}^2\alpha}{2} \left(\frac{y}{2m}\right) \left[1 - \frac{y_A^4}{y^4} - C\left(\frac{y_B^4 - y_A^4}{y^4}\right)\right] ,$$

$$\frac{N_{\theta}^P}{Eh} = \frac{P}{E} \operatorname{tg}^2 \alpha \left(\frac{y}{2m} \right)^2,$$

$$\beta_x^P = -\frac{P}{E} \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{2} \left(\frac{y}{2m} \right)^2 \left[3 + \frac{y_A^4}{y^4} + C \left(\frac{y_B^4 - y_A^4}{y^4} \right) \right]$$

$$\frac{\delta_x^P}{h} = \frac{P}{E} \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg}^3 \alpha}{2} \left(\frac{y}{2m} \right)^4 \left[2 - \nu \left(1 - \frac{y_A^4}{y^4} - C \left(\frac{y_B^4 - y_A^4}{y^4} \right) \right) \right]$$

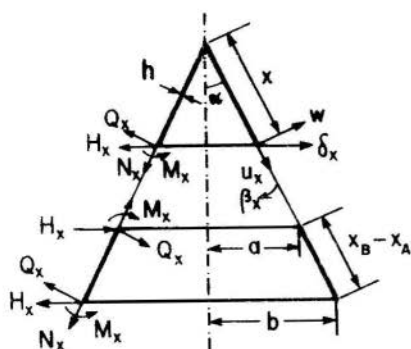
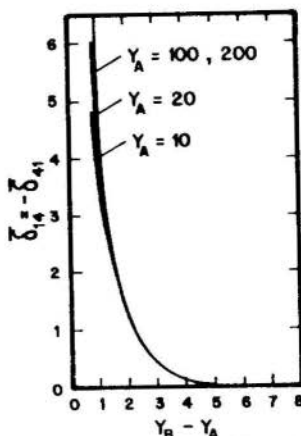


Fig.1- Convenção de sinais.

Fig.2- Comportamento de $\bar{\delta}_{14}$ e $\bar{\delta}_{41}$ variando $Y_B - Y_A$ e Y_A .

A solução homogênea para o problema do cone, também denominada solução de flexão, pode ser obtida através de funções de Bessel de ordem dois e caracteriza o comportamento da casca quando são aplicados esforços ou deslocamentos nas bordas. A partir das soluções para esforços horizontais e de momento unitários atuando respectivamente na borda menor A e maior B, as constantes $C_{1,2,3,4}$ podem ser conhecidas, conduzindo à determinação da matriz de flexibilidade $[\delta_{ij}]$:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} Y_1 y_A^2/2 & \bar{\delta}_{12} Y_2 (y_A/2)^2 & \bar{\delta}_{13} Y_1 y_B^2/2 & \bar{\delta}_{14} Y_2 (y_B/2)^2 \\ \bar{\delta}_{21} Y_2 (y_A/2)^2 & \bar{\delta}_{22} Y_3 (y_A/2m)^2 & \bar{\delta}_{23} Y_2 (y_B/2)^2 & \bar{\delta}_{24} Y_3 (y_B/2m)^2 \\ \bar{\delta}_{31} Y_1 y_A^2/2 & \bar{\delta}_{32} Y_2 (y_A/2)^2 & \bar{\delta}_{33} Y_1 y_B^2/2 & \bar{\delta}_{34} Y_2 (y_B/2)^2 \\ \bar{\delta}_{41} Y_2 (y_A/2)^2 & \bar{\delta}_{42} Y_3 (y_A/2m)^2 & \bar{\delta}_{43} Y_2 (y_B/2)^2 & \bar{\delta}_{44} Y_3 (y_B/2m)^2 \end{bmatrix}$$

para $\delta_i = [\beta_A \delta_A/h \beta_B \delta_B/h]^T$, onde $\gamma_1 = \tan^2 \alpha$, $\gamma_2 = \sin^2 \alpha / \cos \alpha$ e $\gamma_3 = \sin^3 \alpha / 2 \cos \alpha$.

Os coeficientes $\bar{\delta}_{ij}$ apresentados, constituem uma matriz simétrica, dependente do valor das funções de Bessel nas bordas $y=y_A$ e $y=y_B$, cujo comportamento pode ser analisado através da Fig. 2 ([2] e [3]).

Assim, quando $y_B - y_A = 2m(\cos \alpha / \sin^2 \alpha) [(h/h)^{1/2} - (a/h)^{1/2}]$ assume valores maiores que 6, os esforços de flexão que atuam em uma das bordas não produzirão perturbações significativas na borda oposta. Torna-se então conveniente adotar um comprimento para a geratriz do tronco de cone tal que $y_B - y_A > 12$.

Na solução particular apresentada, a constante C caracteriza o tipo de carregamento N_x^P/Eh a ser imposto, de tal forma que, nas bordas, sua componente axial N_x^P/Eh reproduza o esforço longitudinal despertado nos cilindros ali acoplados. Este esforço longitudinal depende das dimensões da redução, da pressão interna e das condições de apoio da tubulação. Desta forma, os valores de C apresentados na Tabela 1, podem ser associados a três casos distintos:

TABELA 1 - Esforços axiais despertados.

CASO	C	$N_x^P \cos \alpha / Eh$	
		Borda A	Borda B
1	$(1 - (\gamma_B - \gamma_A)^4)^{-1}$	$pa / 2Eh$	$pb / 2Eh$
2	0	0	$(pb / 2Eh)(1 - (a/b)^2)$
3	1	$(pa / 2Eh)(1 - (a/b)^2)$	0

CASO 1 - esforço axial se redistribui nos dois ramos da tubulação,

CASO 2 - simula a existência de uma junta de expansão no ramo de menor diâmetro,

CASO 3 - simula uma junta de expansão no ramo de maior diâmetro.

Para que a solução particular do cone fique consistente com as condições de contorno, é necessário introduzir nas bordas esforços horizontais $H_{A,B} = -N_x^P \sin \alpha / Eh$ de modo a se ter a resultante paralela ao eixo longitudinal do cilindro.

A solução para os cilindros semi-infinitos a serem acoplados ao tronco de cone, pode também ser descrita de maneira adimensional, como:

a) Solução homogênea

$$\frac{M_x^H}{Eh^2} = \frac{(\bar{a}/h)^{1/2}}{2n} e^{-z} (C_1(\sin z - \cos z) - C_2(\sin z + \cos z))$$

$$\frac{Q_x^H}{Eh} = e^{-z} (C_1 \cos z + C_2 \sin z) ,$$

$$\frac{N_x^H}{Eh} = 0 , \quad \frac{N_\theta^H}{Eh} = \left(\frac{\bar{a}}{h}\right)^{1/2} n e^{-z} (C_2 (\cos z - \sin z) - C_1 (\sin z + \cos z)) ,$$

$$\beta_x^H = 2(\bar{a}/h)^{1/2} n^2 e^{-z} (C_2 \cos z - C_1 \sin z) , \quad \frac{w^H}{h} = \left(\frac{\bar{a}}{h}\right) \frac{N_\theta^H}{Eh} ,$$

onde $z = \mu x$, $\mu = n/(\bar{a}h)^{1/2}$ e $n = (3(1-\nu^2))^{1/4}$.

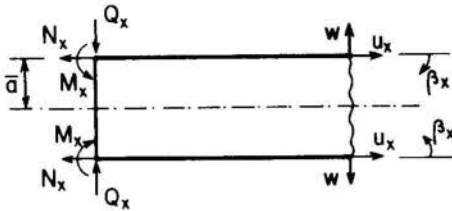


Fig.3 - Convenção de sinais.

b) Solução particular para pressão interna

$$\frac{N_x^P}{Eh} = \bar{C} , \quad \frac{N_\theta^P}{Eh} = \frac{p\bar{a}}{Eh} , \quad \frac{w^P}{h} = \frac{p}{E} \left(\frac{\bar{a}}{h}\right)^2 - \nu \bar{C} \quad \text{e} \quad \beta_x^P = 0$$

Através da aplicação de esforços unitários, cortante e de momento, na borda do cilindro, determinam-se as constantes $C_{1,2}$ da solução homogênea. Consequentemente a matriz de flexibilidade para cilindros $[\delta_{ij}]$ pode ser definida como:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} -4n^3(\bar{a}/h)^{1/2} & -2n^2(\bar{a}/h) \\ -2n^2(\bar{a}/h) & -2n(\bar{a}/h)^{3/2} \end{bmatrix} , \quad \text{para} \quad \delta_i = \begin{Bmatrix} \beta \\ w/h \end{Bmatrix} .$$

Na solução particular obtida, a constante \bar{C} representa um esforço axial externo aplicado. Quando dois destes cilindros ($\bar{a}=a,b$) encontram-se acoplados ao tronco de cone apresentado, o esforço axial N_x^P/Eh despertado em cada um destes, terá para cada caso estudado (1, 2 ou 3) , o valor da componente axial do esforço N_x^P/Eh produzido no cone. Desta forma, o deslocamento axial a ser despertado em cada um dos cilindros (ca e cb) pode ser descrito como:

$$\left(\frac{w^P}{h}\right)^{ca} = \frac{p}{E} \left(\frac{a}{h}\right) \left\{ \left(\frac{a}{h}\right) + \nu \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \left(\frac{y_A}{2m}\right)^2 \left[C \left(\frac{y_B}{y_A} - 1\right) \right] \right\} ,$$

$$\left(\frac{w^P}{h}\right)^{cb} = \frac{p}{E} \left(\frac{b}{h}\right) \left\{ \left(\frac{b}{h}\right) + v \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \left(\frac{y_B}{2m}\right)^2 \left[(1-C) \left(1 - \frac{y_B^4}{y_A^4}\right) \right] \right\} .$$

De posse destes elementos, pode-se computar que valores devem assumir os esforços de flexão para que, nos pontos de junção cilindro-cone e cone-cilindro, se obtenha rotações e deslocamentos relativos nulos, isto é:

$$\begin{bmatrix} -(\delta_{11}^{ca} + \delta_{11}) & (\delta_{12}^{ca} - \delta_{12}) & -\delta_{13} & \delta_{14} \\ (\delta_{21}^{ca} + \delta_{21}) & -(\delta_{22}^{ca} + \delta_{22}) & -\delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & (\delta_{33}^{cb} + \delta_{33}) & (\delta_{34}^{cb} - \delta_{34}) \\ \delta_{41} & \delta_{42} & (\delta_{43}^{cb} - \delta_{43}) & \delta_{44}^{cb} + \delta_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta_{11} & -\delta_{12} & -\delta_{13} & \delta_{14} \\ -\delta_{21} & -\delta_{22} & -\delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & -\delta_{34} \\ -\delta_{41} & -\delta_{42} & -\delta_{43} & \delta_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ H_A \\ 0 \\ H_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_1^P \\ \delta_2^P - (w^P/h)^{ca} \\ \delta_3^P \\ \delta_4^P - (w^P/h)^{cb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ,$$

onde os coeficientes δ_{ij} , δ_{ij}^{ca} e δ_{ij}^{cb} foram tomados em valor absoluto.

Assim, para os três casos analisados é possível obter os correspondentes esforços e a conseqüente distribuição de esforços.

Sabido que, as tensões mais perigosas serão despertadas nos pontos de descontinuidade geométrica, foram desenvolvidos fatores de intensificação de tensões, K_A e K_B , para os pontos de junção em função da TENSÃO CISALHANTE MAX. atuante nos cilindros componentes em pontos suficientemente distantes das descontinuidades. Desta forma, em cada caso, a tensão cisalhante máxima na junção ($\tau_{max_{A,B}}$) pode ser determinada como:

TABELA 2 - Tensões despertadas.

CASO	TENSÕES NOS PONTOS DISTANTES			NA JUNÇÃO
		$\sigma_e = N_e/h$	τ_{max}	$\tau_{max_{A,B}}$
RAMO MENOR				
1	$pa/2h$	pa/h	$pa/2h$	$\tau_{max_A} =$ $K_A \tau_{max}$
2	0	pa/h	$pa/2h$	
3	$(pa/2h)(1-(b/a)^2)$	pa/h	$(pa/2h)(1+((b/a)^2-1)/2)$	
RAMO MAIOR				
1	$pb/2h$	pb/h	$pb/2h$	$\tau_{max_B} =$ $K_B \tau_{max}$
2	$(pb/2h)(1-(a/b)^2)$	pb/h	$pb/2h$	
3	0	pb/h	$pb/2h$	

3. Resultados

Em cada um dos casos analisados, foram levantadas curvas para os fatores de intensificação, K_A e K_B , usando diversas relações entre os raios dos cilindros componentes variando-se o raio do cilindro maior (b) em relação ao do cilindro menor (a), sendo estes unidos através de troncos de cone com diversos ângulos de vértice (2α). Serão aqui apresentados alguns destes resultados.

4. Conclusões

Analisando os resultados, observa-se que na Fig. 4.1, onde o esforço axial se redistribui aos dois ramos (CASO 1), o desvio entre as curvas do fator K_A referente a junção cilindro-cone, aparece apenas para a relação $b/a = 1.5$, na medida em que o ângulo de redução (α) é aumentado. Este aumento de α propicia valores inferiores a 6 da relação $y_B - y_A$, o que caracteriza existir interferência entre os esforços produzidos numa das bordas do cone sobre a outra. Tal desvio é cada vez menos observado na medida em que são utilizadas relações de espessura (h/a) menores (Fig. 4.2), acarretando valores maiores da diferença $y_B - y_A$.

Para os fatores de intensificação K_B , destas figuras (4.1 e 4.2), quando a relação de raios (b/a) é aumentada, o esforço axial produzido no ramo maior cresce, gerando com isto, estados de tensões mais intensos, daí serem obtidas curvas diferentes para as diversas relações b/a adotadas.

As Figuras 5 e 6, que analisam a situação em que o esforço axial é equilibrado apenas pelo ramo maior (CASO 2), apresentam comportamento semelhante ao CASO 1 quanto ao aspecto, tanto para o fator K_A , quanto para o fator K_B , mas apresentam valores mais baixos comparativamente.

Quando o esforço axial é equilibrado apenas pelo ramo menor (CASO 3), aparecem diversas curvas para o fator K_A , correspondentes as diferentes relações b/a . Isto deve-se ao fato de que, a medida que se aumenta o raio do ramo de maior diâmetro, mantido o ângulo α , maiores troncos de cone estarão sendo utilizados, com isto, os esforços axiais despertados na borda superior deverão crescer, gerando estados de tensões mais intensos (Fig. 7).

Para o fator K_B , nesta situação (Fig. 8), a intensificação de tensões produzida na junção cone-cilindro não é alterada para as diversas relações b/a , já que o esforço axial produzido nestes pontos é nulo, daí suas curvas encontrarem-se sobrepostas. Como K_B apresenta valores baixos, o desvio esperado para a relação $b/a = 1.5$ fica muito atenuado.

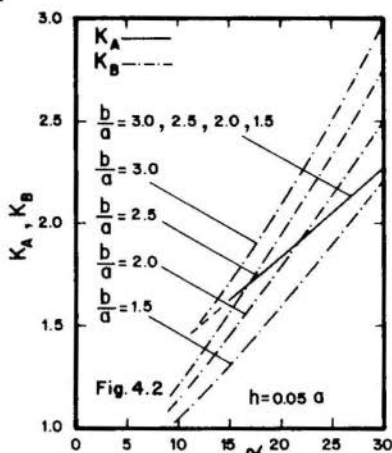
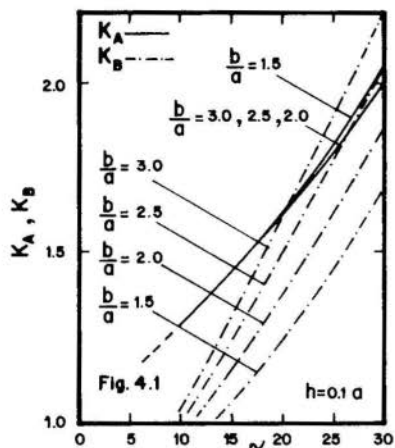


Fig. 4.1 e 4.2 - Variação de K_A e K_B quando o esforço axial se redistribui aos dois ramos (CASO 1).

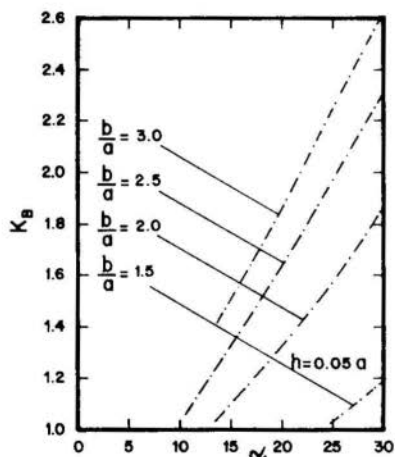


Fig. 5 - Variação de K_B quando o esforço axial é equilibrado pelo ramo maior (CASO 2).

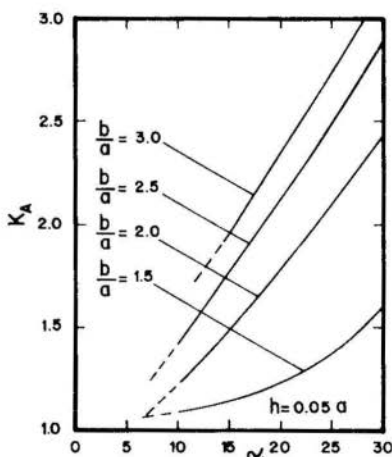


Fig. 7 - Variação de K_A quando o esforço axial é equilibrado pelo ramo menor (CASO 3).

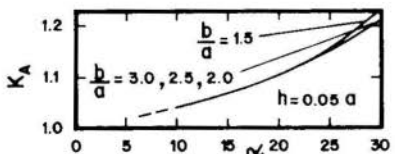


Fig. 6 - Variação de K_A quando o esforço axial é equilibrado pelo ramo maior (CASO 2).

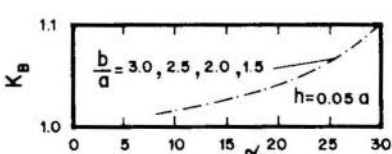


Fig. 8 - Variação de K_B quando o esforço axial é equilibrado pelo ramo menor (CASO 3).

Se os resultados dos CASOS 2 e 3 forem comparados aos obtidos no CASO 1, verifica-se que: a) no CASO 2, observam-se fatores de intensificação pelo menos 35% inferiores ao CASO 1 para a borda A e pelo menos 10% inferiores para a borda B; b) no CASO 3, observam-se fatores de intensificação até cerca de 30% superiores ao CASO 1 para a borda A e pelo menos 30% inferiores para a borda B. Os dois últimos casos analisados, ocorrem quando uma junta de expansão é inserida no ramo de menor ou maior diâmetro respectivamente.

Os fatores aqui obtidos, para os três casos, podem ser utilizados, diretamente, para determinar qual o valor da espessura a ser adotada junto às descontinuidades. Estes resultados são importantes na especificação de normas para projetos industriais, que em geral não comentam sobre a alteração dos fatores de intensificação na presença de juntas de expansão.

REFERÊNCIAS

- [1] Kraus, H., "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, (1976).
- [2] Villas-Bôas, F.A.M., "Concentração de Tensões em Reduções Sujeitas aos Efeitos da Pressão Interna", Tese de Mestrado, PUC/RJ, Abril de 1981.
- [3] Baltrukonis, J.H., "Influence Coefficients for Edge Load, Thin, Conical Frustums", J.Appl.Mech., 26,241-245, (1959).



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA
RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-7.

P. P. 65 - 74

PUC/RJ

PROJETO ÓTIMO DE MOLA HELICOIDAL
UMA APLICAÇÃO DO SISTEMA PROMIN

Paulo Affonso Costa Filho

Engenheiro Mecânico

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

Solly Andy Segenreich

Professor Associado

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

O projeto ótimo de uma mola helicoidal para o trabalho em compressão sob severas condições é apresentado. Utiliza-se um método baseado no critério de otimalidade para minimização de funções não-lineares com restrições de desigualdade. Resultados de testes realizados com diferentes restrições de projeto são comparados.

SUMMARY

The optimal design of a spring, which works under severe conditions, is presented. The optimization is carried out using an optimality criteria based algorithm, for non-linear constraints and objective function. Results of tests performed for some different design constraints are compared.

1. Introdução

Este trabalho é motivado pelo crescente interesse tanto na aplicação de técnicas de otimização ao projeto mecânico como no desenvolvimento de programas do tipo "caixa preta", com interface universal, adequados para um largo emprego em engenharia.

Bibliotecas de programas de otimização, já disponíveis, têm sido usadas na síntese de projetos entretanto a diversidade de métodos torna, muitas vezes, complexa a tarefa de seleção do algoritmo mais adequado à solução de um determinado problema por pessoas não profundamente especializadas em otimização.

Os métodos de otimização baseados no critério de otimalidade, inicialmente propostos para a otimização estrutural, têm sido desenvolvidos e generalizados encontrando, atualmente, pela sua capacidade de resolver problemas de grande porte com rápida convergência, vasta área de aplicação ainda pouco explorada.

Neste trabalho apresentam-se uma breve descrição do método de otimização, a formulação do problema de projeto de uma mola helicoidal e a obtenção do projeto de mínimo peso utilizando-se o programa PROMIN ora em fase de desenvolvimento.

O projeto ótimo de molas helicoidais já foi estudado por Bachtler e Rommel [2] com o emprego de um método que não calcula derivadas.

Maiores informações sobre a análise de molas helicoidais podem ser obtidas em [3 e 4], referências tomadas como base para o desenvolvimento do presente trabalho.

2. Método de Otimização

Considere-se o problema de minimizar uma função $P(X)$ – função objetivo – com $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – vetor de projeto – sujeita a l restrições de desigualdade da forma:

$$c_j(X) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (2.1)$$

Pela introdução de l "variáveis de desvio" z_j obtem-se [5]:

$$c_j^!(X, Z) = c_j(X) + z_j^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (2.2)$$

de tal forma que o problema de minimização com restrições de desigualdade pode ser transformado num problema equivalente com restrições de igualdade. Neste novo problema, as condições necessárias à existência de um ótimo local são dadas por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

em que $\Phi = \Phi(X, Z, \lambda)$ é a função de Lagrange associada ao problema:

$$\Phi = P + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j c_j' \quad (2.4)$$

As condições necessárias podem ser reescritas na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \frac{\partial c_j}{\partial x_i} &= 0 & i &= 1, 2, \dots, m \\ \lambda_j z_j &= 0 & j &= 1, 2, \dots, \ell \\ c_j + z_j^2 &= 0 & j &= 1, 2, \dots, \ell \end{aligned} \quad (2.5)$$

Uma seqüência de vetores de projeto X , a partir de um projeto factível, pode ser gerada pela seguinte fórmula de recorrência [1]:

$$X^{v+1} = [1 + (\alpha^v - 1)v^v] X^v \quad (2.6)$$

em que α é um parâmetro que controla a convergência [5] e v^v é um vetor dado por:

$$v_i^v = \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^v + \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j)^v \left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^v \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

ambos reavaliados a cada iteração.

Os incrementos nas variáveis de projeto (x_i) e nas variáveis de desvio (z_j) são dados, respectivamente, por:

$$\Delta x_i^v = x_i^{v+1} - x_i^v = (\alpha^v - 1)v_i^v x_i^v \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.8)$$

$$\Delta z_j^v = z_j^{v+1} - z_j^v = (\alpha^v - 1)K\lambda_j^v z_j^v \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (2.9)$$

em que K é um parâmetro de controle.

Os incrementos de primeira ordem nos resíduos de restrição (c_j^v) são dados por:

$$\Delta c_j^v = c_j^{v+1} - c_j^v = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial c_j^v}{\partial x_i} \right)^v \Delta x_i^v + \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial c_j^v}{\partial z_k} \right)^v \Delta z_k^v \quad (2.10)$$

$$j = 1, 2, \dots, l$$

Impondo-se, à cada iteração, que tais incrementos (Δc_j^v) sejam nulos, uma equação que permite a determinação dos coeficientes λ_j^v é obtida:

$$\sum_{k=1}^l \beta_{kj}^v \lambda_j^v = \beta_j^v \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (2.11)$$

em que:

$$\beta_j^v = - \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial c_j^v}{\partial x_i} \right)^v \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^v x_i^v \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (2.12)$$

$$\beta_{kj}^v = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial c_j^v}{\partial x_i} \right)^v \left(\frac{\partial c_k^v}{\partial x_i} \right)^v x_i^v - 2Kc_j^v \delta_{kj} \quad j=1, 2, \dots, l \quad (2.13)$$

$$k=1, 2, \dots, l$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ 1 & \text{se } k = j \end{cases}$$

Caso alguma restrição seja violada, a recuperação da factibilidade é obtida impondo-se a condição [5]:

$$(\Delta c_j^v)^v = -c_j^v \quad \forall \quad c_j^v \geq 0 \quad (2.14)$$

Outra forma de proceder à recuperação de um projeto consiste na repetição da última iteração com uma redução no módulo do passo [1].

Informações sobre a avaliação dos parâmetros de controle α e K podem ser obtidas na referência [5].

3. Lay-Out do Programa Básico

O programa de otimização compreende dois blocos fundamentais. O primeiro, denominado analisador, calcula a função objetivo e suas derivadas em relação às variáveis de projeto

bem como as restrições e suas derivadas em relação às mesmas variáveis. O segundo, denominado sintetizador, dimensiona um novo projeto a partir dos dados fornecidos pelo primeiro bloco.

O programa termina quando a redução da função objetivo é menor que um limite previamente estabelecido.

A Figura 1 apresenta um fluxograma simplificado.

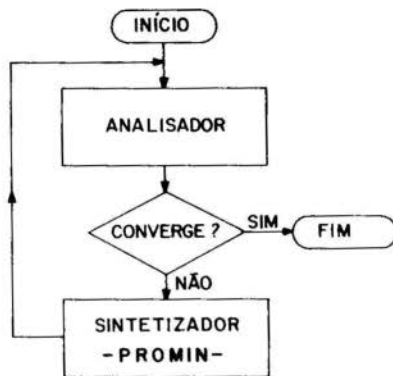


Fig. 1. Fluxograma básico do programa de otimização

4. Definição das Variáveis e Restrições Relevantes ao Projeto

Quer-se minimizar o peso P de uma mola helicoidal de diâmetro médio D , diâmetro do arame d , com N voltas e comprimento livre ℓ_0 para o trabalho em compressão sob carregamento flutuante e elevada temperatura (Figura 2).

As variáveis de projeto são: D , d , N e ℓ_0 .

A função objetivo - peso - é dada por:

$$P = \rho \pi^2 N D \frac{d^2}{4} \quad (4.1)$$

em que ρ é o peso específico do material.

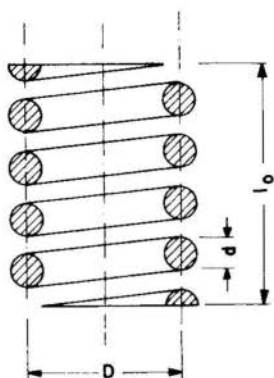


Fig. 2. Mola helicoidal para trabalho em compressão

As restrições sobre a geometria e comportamento da mola são brevemente descritas abaixo:

Resistência à fadiga e ao escoamento. As falhas por fadiga e escoamento são previstas pelo critério de Soderberg com o valor do limite de fadiga fixado em 67.0 Kpsi [3]. O valor da resistência à fadiga S_{se} é obtido do produto do limite de fadiga (endurance limit) pelos fatores de correção devidos à temperatura de trabalho e à confiabilidade requerida [3].

A expressão da restrição é:

$$c_1 = \frac{\eta}{S_{se}} K_c K_s \tau_a + \frac{\eta}{S_{sy}} k_s \tau_m - 1 \leq 0 \quad (4.2)$$

em que S_{se} e S_{sy} são, respectivamente, a resistência à fadiga e ao escoamento na torção; τ_a e τ_m , respectivamente, as tensões cizalhantes alternada e média; K_c e K_s fatores de correção devidos à curvatura do arame e à consideração do efeito cortante na avaliação da tensão [3] e η um fator de segurança.

Flambagem. A falha por flambagem, para o caso em que a mola tem uma de suas extremidades fixa e outra livre para mover-se lateralmente mas impedida de girar, é prevista por

Wahl [4].

A expressão da restrição é:

$$c_2 = 1 - \frac{\delta_{cr}}{\delta_{max}} \leq 0 \quad (4.3)$$

em que δ_{max} é a máxima deflexão experimentada pela mola e δ_{cr} é a deflexão crítica dada por:

$$\delta_{cr} = 0,812 \ell_0 \left[1 - \sqrt{1 - 6,87 \left(\frac{D}{\ell_0} \right)^2} \right] \quad (4.4)$$

Ressonância. Para o caso de mola helicoidal comprimida entre duas placas paralelas, a frequência f_n do primeiro modo de vibração axial é dada por [4]:

$$f_n = \frac{14100 d}{D^2 (N-2)} \quad (\text{Hz}) \quad (4.5)$$

A expressão da restrição é:

$$c_3 = 1 - \frac{f_n}{v f} \leq 0 \quad (4.6)$$

em que f é a frequência de trabalho e v um fator arbitrado ($v = 10,0$ no exemplo testado).

Compactação. Molas que trabalham sob compressão têm sua capacidade de deflexão limitada pelo espaço existente entre as voltas. A mola será dita compactada quando este espaço for nulo.

O comprimento da mola compactada ℓ_c é dado por:

$$\ell_c = N \cdot d - \frac{1}{2} d \quad (4.7)$$

A expressão da restrição é:

$$c_4 = \frac{\ell_c}{\ell_{min}} - 1 \leq 0 \quad (4.8)$$

em que ℓ_{min} é o comprimento da mola na sua máxima deflexão.

Forças exercidas pela mola. Para atender a especificações de projeto são estabelecidos limites inferiores para as forças exercidas pelas molas nas situações de máxima e mínima deflexão.

As expressões das restrições são:

$$c_5 = 1 - \frac{P_1}{P_1^*} < 0 \quad (4.9)$$

$$c_6 = 1 - \frac{P_2}{P_2^*} < 0 \quad (4.10)$$

em que P_1 e P_2 são, respectivamente, as forças reais nas situações de máxima e mínima deflexão e P_1^* e P_2^* são forças mínimas admissíveis.

A Tabela 1 apresenta os requisitos de projeto para os quatro casos testados. Um material recomendado para as condições de trabalho nesses casos é o aço Cr-Va AISI 6150 [3].

Tabela 1. Requisitos de Projeto

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Comprimento de montagem (in)	2,00	2,00	2,00	2,00
Comprimento com máxima deflexão (in)	1,60	1,60	1,70	1,70
Força mínima de montagem (lb)	10,0	40,0	10,0	40,0
Força mínima com máxima deflexão (lb)	50,0	100	50,0	100
Frequência de trabalho (rpm)	1000	1000	500	1500
Temperatura de operação (F)	250	250	250	250
Confiabilidade (%)	90,0	90,0	90,0	90,0
Coefficiente de segurança	1,20	1,20	1,20	1,20

5. Resultados

Os resultados obtidos para os quatro casos testados (Tabela 1) são apresentados na Tabela 2. Em todos eles, o "projeto de partida" foi o mesmo, definido pelas variáveis: $D = 1,6$ in, $d = 0,24$ in, $N = 6,0$ in e $\ell_o = 2,2$ in, com o peso inicial de 0,3820 lb.

Tabela 2. Resultados

Caso	D(in)	d (in)	N(in)	ℓ_o (in)	peso(lb)	Redução do peso (%)
1	1,352	0,1427	5,825	2,391	0,1108	70,99
2	1,467	0,1874	5,902	2,296	0,2101	45,00
3	1,365	0,1484	5,823	2,398	0,1209	69,53
4	1,400	0,1837	5,848	2,344	0,1909	50,03

As Figuras 3 e 4 apresentam o valor da função objetivo a cada iteração.

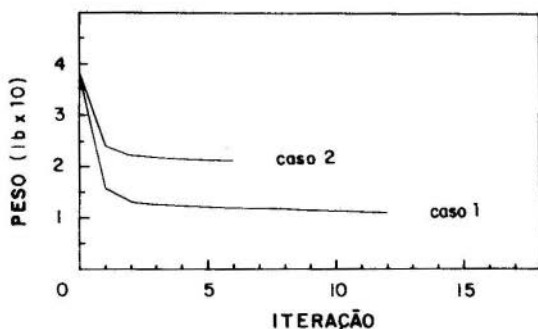


Fig. 3. História da função objetivo para os casos 1 e 2

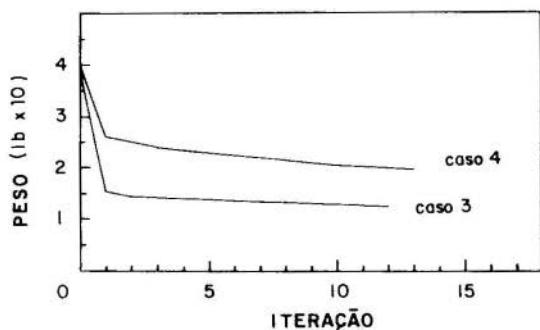


Fig. 4. História da função objetivo para os casos 3 e 4

6. Conclusões

O presente trabalho apresenta os resultados da aplicação de um método baseado no critério de otimalidade na otimização de uma mola helicoidal.

As Figuras 3 e 4 mostram a história da função objetivo para quatro casos de projeto testados. São verificadas uma variação monotônica decrescente da função objetivo e, após as primeiras iterações, uma redução do peso da mola a valores muito próximos daqueles obtidos ao final do processo.

O aspecto da história da função objetivo, acima descrito, tem sido observado em aplicações anteriores do método de otimização empregado neste trabalho. Tais propriedades justificam o desenvolvimento de um sistema computacional para otimização de projetos com base em algoritmos dessa natureza. O sistema PROMIN, utilizado neste trabalho, vem sendo desenvolvido dentro de um critério de fácil utilização em variados tipos de problemas de projeto e tendo em vista usuários não profundamente especializados em otimização.

REFERÊNCIAS

- [1] Costa Filho, P.A., "PROMIN-Um Sistema Computacional para Otimização de Projetos", Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1981.
- [2] Bachtler, C.S. e Rommel, J.B., "Optimum Design of a High-Duty Helical Spring", Design Engineering Technical Conference, Cincinnati, Ohio, 12-9-1973.
- [3] Shigley, J.E., "Mechanical Engineering Design", McGraw-Hill Book Company, Inc., 2^a ed.
- [4] Wahl, A.M., "Mechanical Springs", McGraw-Hill Book Co., Inc., 2^a ed.
- [5] Zouain, N., "Um Algoritmo de Otimização para Projeto de Estruturas de Grande Porte", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1976.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-8

P.P. 75 - 84

PUC/RJ

SISTEMA DE PROJETO ASSISTIDO POR COMPUTADOR PARA CÁLCULO DE
DIMENSIONAMENTO E DESEMPENHO TEÓRICO DE COMPONENTES

A. J. V. Porto

J. Lirani

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola de Engenharia de São Carlos - USP
São Carlos - Brasil

Sumário

Um sistema de programas foi implementado no Laboratório de Máquinas Ferramentas, o qual utiliza a teoria dos elementos finitos e possui capacidade para efetuar análise estática (tensões e deslocamentos estruturais) e dinâmica (frequências naturais, modos de vibrar e resposta em frequência) em estruturas conservativas ou amortecidas. O trabalho apresenta também uma aplicação no projeto de eixo-árvore de uma retificadora.

Summary

A package of computer programs based on the Finite Element Method has been implemented in the Machine Tool Laboratory and its capability embodies static analysis (stresses and structural displacements) and dynamic analysis (natural frequencies, modes of vibration and frequency response) of conservative or damped structures. An application in the design of the spindle shaft of a grinding machine.

1. Introdução

A utilização dos computadores digitais nas fases de projeto, deu origem a um vasto conjunto de ferramentas, conhecido atualmente como CAD, ou Projeto Assistido por Computador.

O CAD conjuga as potencialidades de um eficiente processo decisório e interativo com a possibilidade de simulação de sistemas complexos, permitindo:

1. Obtenção de alternativas racionais de projeto.
2. Interação entre soluções alternativas com objetivo de um projeto otimizado do sistema.
3. Simulação de sistemas, no intuito de se prever o seu comportamento real, tanto sob condições estáticas como dinâmicas.

A área de projeto assistido por computador se desenvolveu grandemente e ela pode ser caracterizada subdividindo-a em dois ramos:

- A parte gráfica interativa (Interactive Computer Graphics).

- Dimensionamento e simulação do desempenho teórico.

Na análise de sistemas, em geral, é exigida alguma informação sobre o seu comportamento real, sem que se tenha construído o modelo físico ou protótipo para avaliação sob condições de testes. A utilização de ferramentas matemáticas mais precisas conjugada com as soluções numéricas por Elementos Finitos, permite analisar teoricamente o comportamento elástico de sistemas, para que se possa prever com bom grau de exatidão o seu comportamento real quando em serviço.

Neste trabalho, tratar-se-á deste último aspecto.

2. O uso do método dos Elementos Finitos

Em geral tenta-se projetar um elemento estrutural, ou sistemas estruturais, tal que as suas características estáticas e dinâmicas satisfaçam todas as exigências de projeto sob condições de custo mínimo. Na maioria das vezes, torna-se difícil, ou até impossível, determinar soluções ótimas, do ponto de vista matemático, quando se tem complexos problemas de projeto.

A utilização de computadores digitais pode permitir a análise de várias variáveis por métodos computacionais. Neste ponto, torna-se claro que é exigido um método computacional que possa ser aplicado a uma variedade de problemas.

Nos últimos anos fez-se várias tentativas para se analisar estática e dinamicamente o comportamento de sistemas estruturais usando-se uma modelação da estrutura como sendo composta de elementos vigas, ou o método dos parâmetros concentrados [4]. Tais aplicações tiveram sucesso efêmero, principalmente devido ao fato da isolação da estrutura por meio de uma montagem de elementos vigas resultar num similar topologicamente limitado: a elasticidade das vigas, muitas das vezes tinham que ser estimadas por julgamentos baseados em experiência acumulada, ou recorrendo-se a resultados empíricos [1], [3].

O Método dos Elementos Finitos torna-se preferido por que permite similaridade topológica muito mais próxima entre modelo e sistema real. Isto conduz a uma maior precisão na determinação das características estáticas e dinâmicas, diminuindo consideravelmente as exigências relativas a tempo de computação.

Descreve-se a seguir um sistema de dimensionamento e análise teórica do desempenho estático e dinâmico de elementos e/ou sistemas estruturais pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), implementado pelo Laboratório de Máquinas Ferramentas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

3. Formulação geral do problema

Já se ressaltou anteriormente, que a principal vantagem do M.E.F. oferece sobre os outros métodos de análise é a sua grande generalidade. Em geral, parece provável que, com a utilização de muitos elementos, é possível se aproximar virtualmente de qualquer problema elástico contínuo com condições complexas de carga e de contorno, a tal extensão, que se pode executar uma análise bastante precisa. A única limitação à utilização de um número muito grande de elementos, é o fator custo de utilização do computador e os trabalhos de preparação de dados, e interpretação dos resultados.

Convém salientar que, mesmo com a utilização de um

computador digital de alta velocidade e grande capacidade de memória central, a praticabilidade da solução do problema e a efetividade da análise depende diretamente do procedimento numérico empregado [2].

Um sistema estrutural, submetido à ação de um conjunto de solicitações, pode ser descrito em termos das suas propriedades elásticas, de inércia e de amortecimento, pelo seguinte conjunto de equações, sob a forma matricial:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P\} \quad (1)$$

Antes da especificação de qualquer um dos dois casos de análise (estática ou dinâmica), o sistema computacional calcula e monta $[M]$, $[C]$ e $[K]$, as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

4. Análise estática

O sistema assume a eq. 1 na forma:

$$[K] \cdot \{x\} = \{P\} \quad (2)$$

isto é: o problema torna-se o da solução de equações simultâneas, quando são conhecidas a matriz global de rigidez $[K]$ e o vetor de carregamento $\{P\}$, obtendo desta maneira o vetor deslocamento $\{x\}$ da estrutura nos pontos nodais.

As deformações nodais são calculadas por:

$$\{E\} = [B] \cdot \{x\} \quad (3)$$

onde $[B]$ é uma matriz com diferenciações apropriadas das funções deslocamentos.

As tensões podem ser agora calculadas, utilizando-se as relações fundamentais das equações tensão-deformação:

$$\{G\} = [D] \cdot \{E\} \quad (4)$$

onde $[D]$ é a matriz elasticidade.

Desta maneira, na análise estática pode-se obter o seguinte conjunto de dados:

- deslocamentos nodais
- tensões nos nós
- tensões principais em cada elemento da estrutura.

5. Análise dinâmica

A fase de análise dinâmica está dividida em duas partes:

- obtenção das frequências naturais e modos de vibrar.
- cálculo da resposta em frequência
 - conservativa
 - não conservativa

A obtenção das frequências naturais e modos de vibrar toma a equação de movimento (eq. 1)

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [K] \cdot \{x\} = \{P\} \quad (5)$$

onde $\{P\}$ é um vetor de carga.

A eq. 5, no caso harmônico e homogêneo, se resume na solução de um problema de autovalor do tipo:

$$[K] \cdot \{u\}_i = \lambda_i [M] \cdot \{u\}_i \quad (6)$$

onde $\{u\}_i$ é o vetor de forma nodal, e λ_i autovalores correspondentes às frequências naturais.

Na obtenção da resposta em frequência no caso conservativo ($[C] = 0$), o método utilizado é a análise modal ou síntese modal, que com a associação a um problema de autovalor, desacopla as equações com coordenadas normalizadas.

Para o caso não conservativo, podem ocorrer casos de amortecimento proporcional ou não proporcional. Se for o caso proporcional, o amortecimento obedece a Lei de Rayleigh para amortecimento; a solução da equação amortecida segue um procedimento similar para o caso conservativo.

Se o amortecimento for não-proporcional, as equações não podem ser desacopladas pela transformação em coordenadas normais. Até bem pouco tempo não existia um método, eficiente, rápido e preciso de solução de movimento amortecido para este caso. O método utilizado para a solução de equa

ções de movimento amortecido, (caso não proporcional), utilizado no sistema implantado no LAMAFE, deve-se a LIRANI [5], e é denominado Método da Inversão Modificada. Este método é bastante eficiente e envolve apenas duas multiplicações de matrizes e a solução de um conjunto de equações lineares. Podem ser analisados os seguintes casos de amortecimento:

- Amortecimento histerético proporcional à massa ou a rigidez.
- Amortecimento viscoso proporcional à massa ou a rigidez.

6. Modelagem estrutural

Ao se preparar uma estrutura para análise pelo M.E.F., deve-se inicialmente subdividir a estrutura em vários elementos fundamentais, transformando-se a estrutura real em uma estrutura geométrica pela geração de uma malha de elementos, observando-se as seguintes condições: evitar elementos desnecessários, manter a malha sempre em função do que se quer analisar, e da precisão da análise que se quer obter.

Após a definição dos elementos e enumeração dos nós, deve-se gerar os dados da estrutura, ou sejam: coordenadas cartesianas dos nós, características físicas dos materiais empregados (módulo de Young, densidade e coeficiente de Poisson) e número de graus de liberdade de cada nó.

Os tipos de elementos existentes no P.E.F. do LAMAFE são: VIGA, RETÂNGULO, TRIÂNGULO, QUADRILÁTERO, HEXAEDRO, TETRAEDRO e AXISSIMÉTRICO, todos de primeira, segunda e terceira ordem. [6]

As condições de solicitação utilizadas para a análise, podem estar na forma de: Tensão Plana, Flexão Pura ou Análise de casca.

7. Dimensionamento e desempenho teórico de máquinas ferramentas

No projeto de Máquinas Ferramentas, diversos fatores fazem com que seja necessário o desenvolvimento de uma técnica que proporcione resultados confiáveis e de rápida obtenção, baixo custo. Alguns desses fatores são:

- exigências de melhores qualidades estático-dinâmicas

para as máquinas ferramentas

- emprego de novos materiais
- reprojeto de máquinas visando redução de custo e peso
- alto custo de construção de protótipos para ensaio
- falta de normalização adequada para máquinas especiais
- ausência de técnicas exatas para análise de desempenho.

A utilização do C.A.D. permite ao projetista prever as características estático-dinâmicas da máquina em desenvolvimento, para quaisquer formas ou materiais que ele imaginar, facilitando-lhe a definição do projeto final. Permite também o dimensionamento de elementos de máquinas, aplicação de importância especial quando não houver cálculos normalizados para o elemento projetado. Os principais componentes de máquinas que podem ser dimensionados e/ou analisados por C.A.D., são: estruturas em geral, nervuramentos, mesas, guias, mancais, eixos e outros elementos rotativos, elementos de fixação e retenção. Os elementos citados podem ser analisados com amortecimento interno e/ou externo, do tipo viscoso ou histerético (vide [5]).

8. Exemplo de aplicação

No projeto do eixo árvore de uma retificadora (Fig.1) quer-se estimar: a rigidez estática da ponta do eixo onde está localizada a ferramenta, as frequências naturais, os modos de vibrar

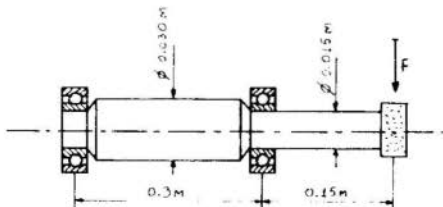
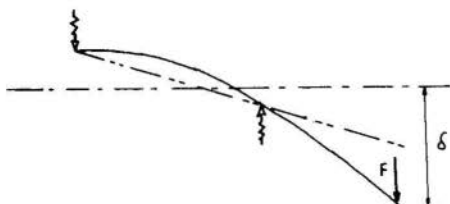


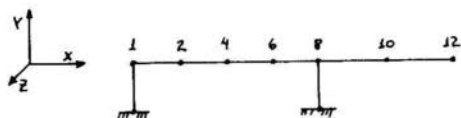
Fig. 1 - Eixo-Árvore de uma retificadora

A modelagem física do eixo é:



onde, para mancais de rolamento serie 62 SKF, a rigidez estática (K) foi estimada em $1,15 \text{ Kg}/\mu\text{m}$

A modelagem por elementos finitos é:



com 8 elementos e 78 graus de liberdade. E nos nós 1 e 8, posição dos mancais, foram restringidos os graus de liberdade: X , Z e Θ_y .

Realizou-se no nó 12, posição da ferramenta, um carregamento estático na direção Y de 100 N .

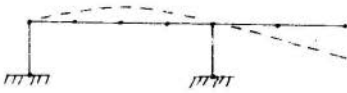
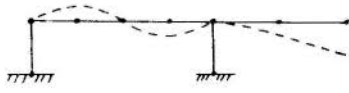
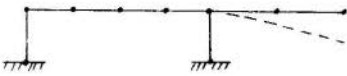
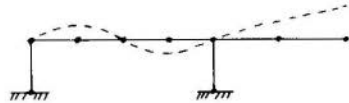
Os resultados obtidos foram:

- rigidez estática do nó 12 de $2,5 \text{ N}/\mu\text{m}$
- frequências naturais e modos de vibrar

1º modo de vibrar



$\omega_1 = 7,9 \text{ hz}$ (torcional em Θ_x)

2º modo de vibrar $\omega_2 = 261 \text{ hz}$ 3º modo de vibrar $\omega_3 = 367 \text{ hz}$ 4º modo de vibrar $\omega_4 = 922 \text{ hz}$ 5º modo de vibrar $\omega_5 = 1054 \text{ hz}$



Tempo gasto em modelação - 10 minutos

Tempo gasto de computador - 4 minutos (utilizou-se um mini-computador DIGITAL PDP-11)

9. Referências

- [1] Hinduja, S. and Cowley, A.
The finite element method applied to the deformation analysis of thin-walled columns.
12 th MTDR Conference, 1971 - McMillan, p. 455.
- [2] Yip, Y. W.
Data Generation For Finite Element Analysis
M. S. thesis, UMIST, October 1974

- [3] Cowley, A. and Fawcett, M.A.
The analysis of machine tool structure by
computing techniques.
8 th MTDR Conference, 1967 - McMillan
- [4] Taylor, S. and Tobias, S.A.
Lumped constant, methods for the prediction of
the vibration characteristics of machine tool
structures.
5 th MTDR Conference, 1964 - McMillan, p. 37
- [5] Lirani, J.
Substructuring techniques in the analysis of
partially coated structures.
Ph. D. Thesis, UMIST, November 1978.
- [6] Porto, A.J.V.
FECPRO: Manual do usuário
EESC-USP, Publicação Interna, 1980.

ANAI S	COBEM 81 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981	PROCEEDINGS
		
TRABALHO PAPER	N.º D-9	P. P. 85 - 94
		PUC/RJ

GECORI - UM MÓDULO DE GERAÇÃO DE COORDENADAS

Edison da Rosa

Professor Assistente - Deptº Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC

Clovis Sperb de Barcellos

Professor Titular - Deptº Eng Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC

SUMÁRIO

Um módulo específico para gerar coordenadas nodais em malhas uni, bi e tridimensional está descrito ao longo do presente trabalho. Este modelo está sendo incorporado ao sistema SIMELF de elementos finitos, aumentando consideravelmente a capacidade operacional do referido sistema.

SUMMARY

In this paper a specific set of subroutines for nodal coordinates generating is described. This set is incorporating to the SIMELF system of finite elements, considerably growing the operational capacity of the after mentioned system.

1 - Introdução

Em estruturas ou componentes estruturais espaciais o volume de informações envolvido na entrada de dados necessário para qualquer programa de elementos finitos é um entrave ao seu uso. Desta forma é necessária a geração automática de dados, reduzindo o trabalho do usuário, bem como a chance de erros. Por outro lado, muitas vezes um simples esquema de geração linear é deficiente, quando a forma geométrica a ser modelada é complexa. Desta forma, a segunda versão do módulo de geração de coordenadas do sistema SIMELF [1] baseia-se no conceito de interpolação, considerando o domínio a ser discretizado como um super elemento isoparamétrico. Assim, o algoritmo se fundamenta no mapeamento do domínio real, no espaço xyz , em uma região regular padrão no espaço rst . Assim uma superfície curva fica representada por um quadrado no espaço rst e um volume é mapeado em um cubo. Este esquema de geração permite que formas complexas sejam geradas com relativa facilidade, pelo fornecimento de algumas poucas informações.

2 - A Metodologia de Geração

De uma forma geral, as coordenadas de um ponto qualquer, que pertença a um elemento isoparamétrico, são obtidas como

$$x = N_j x_j$$

$$y = N_j y_j$$

$$z = N_j z_j$$

onde as funções de interpolação são calculadas no ponto de coordenadas intrínsecas B_j , ponto homólogo ao ponto de coordenadas (x,y,z) .

Considerando agora a região no espaço, a qual deve ser subdividida em um certo número de elementos finitos, pode-se empregar o mapeamento para definir as coordenadas dos pontos intermediários, já que estas coordenadas podem ser obtidas pelo uso das equações (1), bastando definir as coordenadas intrínsecas do ponto homólogo. A determinação das coordenadas

intrínsecas é feita facilmente, já que no espaço rst a região fica definida entre pontos de coordenadas $+1$ e -1 . Interpolando agora entre estes valores, tem-se as coordenadas intrínsecas do ponto intermediário. Retornando ao espaço xyz , pela transformação do mapeamento, as coordenadas reais são obtidas. A superfície gerada é de grau igual ao grau da formulação isoparamétrica usada para o processo de geração. Como as coordenadas no SIMELF são geradas segundo um sistema subestrutural, é possível usar este processo para gerar malhas segundo os sistemas retangular, cilíndrico ou esférico, já que a interpolação é feita segundo $x; y; z, R; \theta; z$ ou $R; \theta; \phi$, respectivamente. A interpolação pode ser linear ou então segundo um esquema não linear, com uma alteração do intervalo entre elementos consecutivos. Assim, é possível gerar uma malha como a ilustrada na figura 1, fornecendo apenas as coordenadas dos quatro vértices.

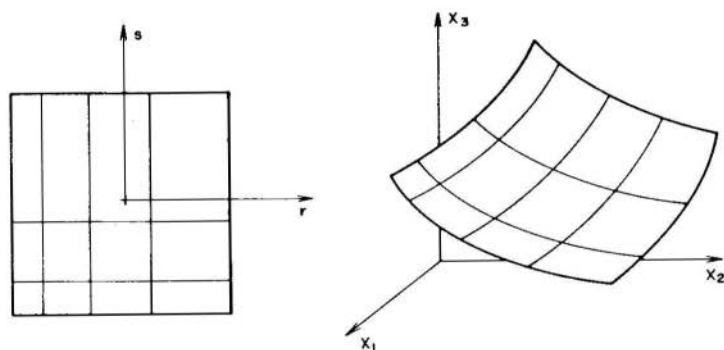


Figura 1 - Coordenadas intrínsecas geradas por interpolação linear e coordenadas globais obtidas por mapeamento quadrático.

3 - O Processo

O processo de geração desenvolvido está descrito para o caso tridimensional, onde o domínio espacial é particionado em elementos finitos de domínios volumétricos, já que o caso bidimensional está embutido no procedimento espacial. Um fluxograma operacional do processo está apresentado na figura 2.

ilustrando as diversas etapas do processo, que são detalhados a seguir



Figura 2 - Fluxograma operacional para gerar dados em um volume.

Na primeira etapa são lidos os dados necessários, como números de elementos em cada direção, o número de pontos intermediários dos elementos, que pode ser diferente segundo a direção, o tipo de progressão usada no cálculo dos comprimentos das arestas dos elementos (progressão aritmética ou progressão geométrica), a razão da progressão, que também pode diferir conforme a direção, a numeração do nó inicial, o tipo de função de mapeamento a ser utilizada, o tipo de sistema de coordenadas e finalmente as coordenadas globais dos pontos que definem o domínio.

A segunda etapa gera a numeração de todos os pontos nodais que situam-se sobre as arestas do domínio, portanto, esta é arquivada na matriz MAR, usada na etapa seguinte.

Com o número de elementos em cada direção conhecido, a terceira etapa obtém as coordenadas intrínsecas de todos os pontos situados sobre as arestas. Deve ser observado que no caso do elemento conter pontos intermediários nas arestas, estes são posicionados fazendo uma divisão uniforme dos comprimentos das arestas, ou seja, apenas o comprimento do elemento é que segue a progressão selecionada.

A quarta etapa usa as informações geradas anteriormente para determinar as coordenadas dos pontos restantes. Inicialmente são obtidas as coordenadas dos pontos das quatro faces paralelas ao eixo intrínseco r , pela subrotina COPLA. O procedimento está detalhado no apêndice. Com estas coordenadas geradas, o interior do volume é calculado considerando a intersecção de uma superfície interna, definida por quatro pontos nas arestas paralelas ao eixo r , com uma reta definida por pontos nas faces normais ao eixo r . Esta intersecção é feita pela subrotina ISUPRE.

A última etapa faz o mapeamento do sistema rst para o sistema global adotado, seja o cartesiano retangular, cilíndrico ou esférico.

4 - Resultados

Estão descritos abaixo dois exemplos de aplicação do módulo de geração de coordenadas, um para um caso tridimensional e o outro para o caso bidimensional, onde são discutidas algumas das potencialidades do processo usado para definir as coordenadas.

4.1 - Exemplo

A figura 3 mostra o resultado obtidos na solução de um domínio espacial, onde foram gerados 27 elementos e 208 nós. As informações necessárias para o processamento foram:

- Número de elementos em cada uma das três direções geradas, NI, NJ, NK, respectivamente 3, 3 e 3.

- Número de pontos intermediários nas arestas que os elementos possuem, em cada direção, IP, JP, KP, respectivamente 1, 1 e 1.

- Percentual que fornece a razão da progressão que define o comprimento dos elementos em cada uma das direções, IPERC, JPERC, KPERC, respectivamente -30, 0 e 0.

- Tipo de progressão usada. No caso progressão aritmética.

- Número do nó inicial, NOI=1.

- Tipo de função de interpolação usada no mapeamento. Foi especificada uma formulação baseada na família serendipity de segundo grau.

- Finalmente coordenadas globais dos pontos que irão definir o domínio e permitirão o mapeamento. Estes pontos estão assinalados na figura 3.

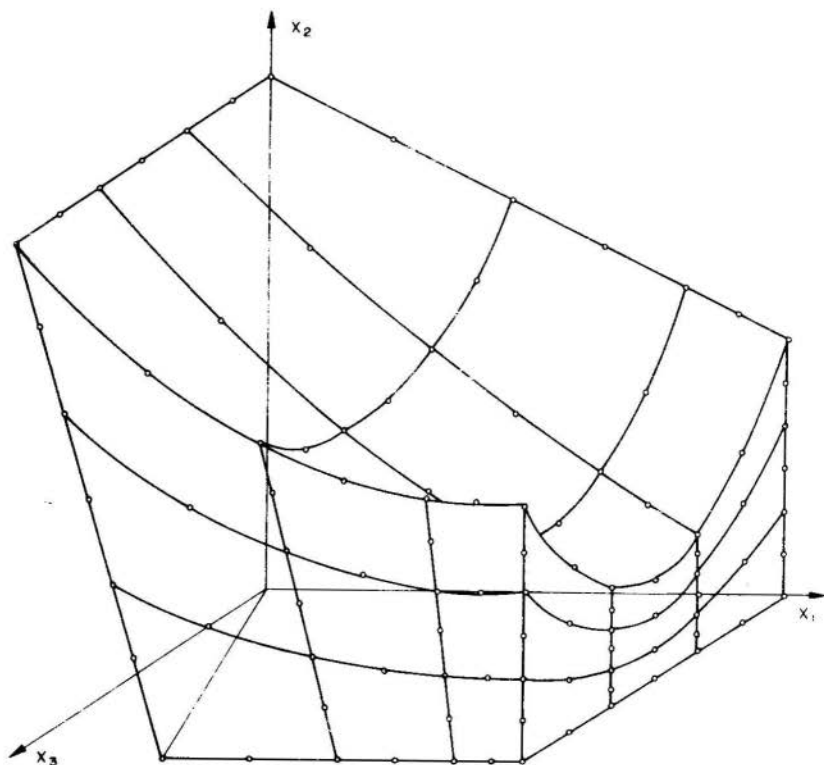


Figura 3 - Exemplo 1.

4.2 - Exemplo

A figura 4 ilustra uma outra possibilidade de alterar o grau de refino da malha, além do uso das progressões. As progressões afetam o cálculo das coordenadas intrínsecas, ficando o refino constante em uma dada direção, ou seja, as arestas paralelas a uma direção possuem comprimentos iguais, quando no espaço rst. Outra forma de alterar o refino é mudando agora as coordenadas globais dos pontos intermediários que definem o volume. Na figura 4a foram usados os pontos intermediários das arestas 1 e 3 com posições intermediárias entre os pontos extremos. Na figura 4b os dois pontos intermediários foram deslocados para uma posição mais próxima do vértice comum às arestas 1 e 3. Isto tem como efeito uma distorção na malha gerada, pois estes nós intermediários possuem como coordenadas intrínsecas (0;-1) e (-1;0) e logo quando do mapeamento houve a distorção mencionada.

Os dados fornecidos para gerar as duas configurações foram:

- Número de elemento $N1=5$, $NJ=3$.
- Número de pontos intermediários $IP=1$, $JP=1$.
- Interpolação quadrática.
- Os pontos que definiram o domínio estão assinalados na figura 4.

5 - Conclusões

O módulo de geração automática de coordenadas apresentado é uma extensão de um módulo já existente no Sistema SIMELF, melhorando sensivelmente a capacidade de análise de modelos tridimensionais. No entanto, o módulo descrito não é a versão final pois existem algumas opções que serão introduzidas brevemente. Uma destas é o desenvolvimento de funções de interpolação que permitam o mapeamento segundo uma superfície elipsoidal, pois as funções atualmente disponíveis interpolam em uma superfície parabólica. Assim, para situações onde temos contornos elípticos (ou circulares) o módulo não é aplicável, a menos que o mapeamento pudesse ser feito

to segundo um sistema de coordenadas esférico ou cilíndrico.

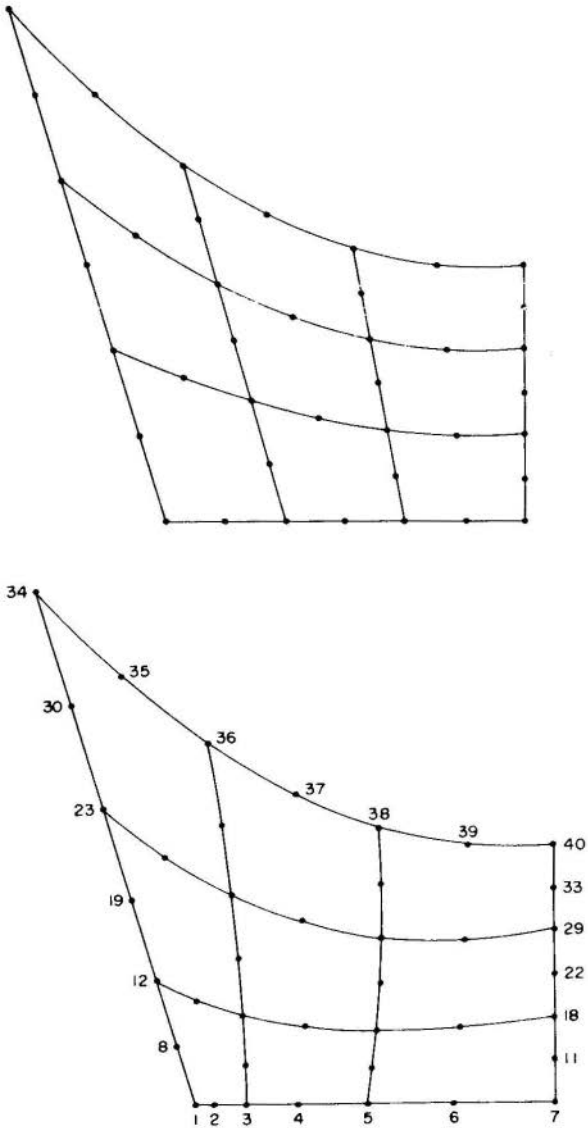


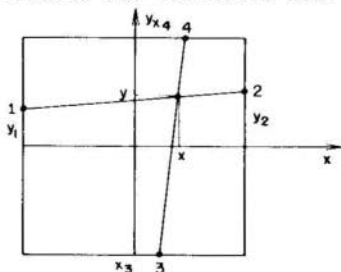
Figura 4 - Exemplo 2.

REFERÊNCIAS

- 1 - Barcellos, C. S., Rosa, E. da - Arquitetura de um sistema Modular de Elementos Finitos. Parte I e II. V COBEM. Volume D, pp 78-87 e 181.190.
- 2 - Buel, W.R., Bush, B.A. Mesh Generation a Survey. Journal of Engineering for Industry. February 1973 pp. 332 - 338.
- 3 - Herrmann, L. R. Laplacian Isoparametric Grid Generation Scheme. Transaction ASCE, Vol. 102, N° EM5, pp. 749-756.
- 4 - Imafuku, I. et. al. A Generalized Automatic Mesh Generation Scheme for Finite Element Method. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, pp. 713 - 731.
- 5 - Thacker, W. A Brief Review of Techniques for Generating Irregular Computational Grids. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 15, pp. 1335 - 1341.

APÊNDICE

Na subrotina COPLA são determinadas as coordenadas de pontos sobre uma superfície plana, no domínio rst, através da solução da intersecção de duas retas. As funções declaradas usadas e o significado das variáveis são:



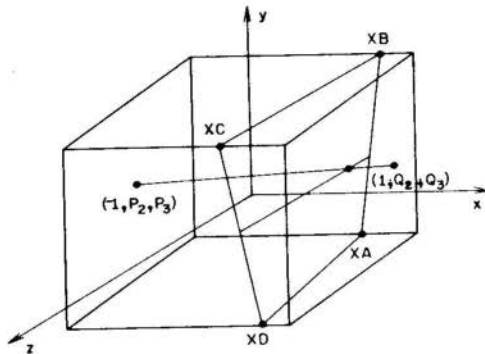
$$Y = ((Y2-Y1)(X4-X3)+2(Y2+Y1))/(4-(Y2-Y1)(X4-X3))$$

$$X = ((X4-X3)Y + (X4 + X3))/2$$

A subrotina ISUPRE obtém as coordenadas de pontos interiores ao volume, por um processo de resolução da intersecção de uma superfície, não necessariamente plana, por uma reta. A equação da superfície é $x = a + by + Cz + dyz$, onde as constantes a ; b ; c e d são

$$a = (X_A + X_B + X_C + X_D)/4 \quad b = (-X_A + X_B - X_C + X_D)/4$$

$$c = (-X_A - X_B + X_C + X_D)/4 \quad d = (X_A - X_B - X_C + X_D)/4$$



São definidas as variáveis auxiliares

$$V_1 = (P_2 + Q_2)/2 \quad V_2 = (Q_2 - P_2)/2$$

$$W_1 = (P_3 + Q_3)/2 \quad W_2 = (Q_3 - P_3)/2$$

$$\alpha = d V_2 W_2 \quad \gamma = a + b V_1 + c W_1 + d V_1 W_1$$

$$\beta = b V_2 + c W_2 + d(V_1 W_2 + V_2 W_1) - 1$$

sendo a coordenada x do ponto de intersecção a solução de $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ e as coordenadas y e z são obtidas como $y = V_1 + V_2 x$; $z = W_1 + W_2 x$. No caso de $\alpha=0$, então $x = \gamma/\beta$.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º 0-10

P.P. 95 - 102

PUC/RJ

CRITICAL AND POST CRITICAL ANALYSIS OF DIVERGENCE:
PART I: NORMAL FORM ALGORITHM

Liu Hsu

COPPE/UFRJ

Programa de Engenharia Mecânica

Caixa Postal n.º 68 503

Rio de Janeiro - RJ

SUMÁRIO

An algorithm for obtaining the normal form of analytical differential systems is given. It can be implemented in a computer avoiding usual cumbersome algebraic calculations. The normal form is utilized in Part II, to generate a perturbation method for the analysis of divergence instability and in particular, the buckling of elastic systems.

1. INTRODUCTION

Since Poincaré, the problem of finding the simplest form, or *normal form*, to which a system of differential equations can be reduced, by means of (nonlinear) change of coordinates or transformations, has been considered by several authors. The most recent version of the normal form was given in 1964 by Briuno [1].

The reason for bringing a given differential system into normal form is that it is often much easier to draw general conclusions when the system is in normal form. Sometimes one can even integrate the system when it is normalized (e.g., when the normal form is linear) [2].

One difficulty, of practical character, in the normal

form approach, is that the computation of the normal form is involved. Starzhinski was the first to give an explicit method for obtaining normal forms [2].

In this paper we provide an alternative algorithm and also take into account that, for asymptotic studies, the dimension of the original system can be reduced to the number of critical eigenvalues (i.e., with zero real parts). Previous works in this direction appeared in [3] [4].

In principle, our algorithm can be utilized for normalization up to any order (the higher the order of normalization, the higher will be the precision of the results). Thus, an extension of the algorithm presented in [3] has been obtained. However, the amount of computation, grows quite rapidly and the possibility of increasing the order of normalization will depend on the computer capacity.

2. NORMAL FORM OF DIFFERENTIAL SYSTEMS

Let $\psi_1(\underline{x}), \dots, \psi_n(\underline{x})$ be power series in x_1, \dots, x_n ($\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$) without constant terms, which converge in some neighborhood of $\underline{x} = \underline{0}$. Then, this point is a singular point of the system

$$\dot{x}_i = \psi_i(\underline{x}) \quad ; \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Theorem 1.1 [1] For every system (1) there exists a formal invertible transformation $(x \rightarrow y)$:

$$x_i = \xi_i(\underline{y}) = y_i \sum_{q \in N_i} h_{iq} y^q, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

reducing (1) to the normal form

$$\dot{y}_i = y_i \sum_{q \in N_i, \lambda=0} g_{iq} y^q \quad (3)$$

where, $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \in N_i$; $N_i = \{\text{integral } \underline{q} : q_i \geq -1; q_k \geq 0, k \neq i; q_1 + \dots + q_n \geq 0\}$; $i = 1, \dots, n$; $y^{\underline{q}} = y_1^{q_1} \cdot y_2^{q_2} \cdot \dots \cdot y_n^{q_n}$; h_{iq}, g_{iq} are constants. The sum in

(3) only contains resonance terms, i.e., terms satisfying $q^T \lambda = 0$, where $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ is the vector of eigenvalues of the linear part of (0.1). Furthermore, the linear part of (3) is in Jordan canonical form.

When the Jordan canonical form is diagonal, the normal form can be written as

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sum_{\lambda_{\nu i}=0} G_{i\nu} y_{\nu}^{\nu} \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

where $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ is an integral vector with $\nu_i > 0$ and $\lambda_{\nu i} = (\lambda_1 \nu_1 + \dots + \lambda_n \nu_n) - \lambda_i$, i.e., the sum only contains resonant terms defined by the relation $\lambda_{\nu i} = 0$.

2.1 - Normal Form For Studying Asymptotic Behavior

Suppose that the linear part of (1) has ℓ eigenvalues with zero real parts and that the $m (= n - \ell)$ remaining eigenvalue have negative real parts.

Then, system (1) can be reduced to

$$\dot{\underline{u}} = \underline{A} \underline{u} + \underline{f}(\underline{u}, \underline{v}), \quad \dot{\underline{v}} = \underline{B} \underline{v} + \underline{g}(\underline{u}, \underline{v}) \quad (5)$$

by means of a (formal) transformation (3), where $\underline{y}^T = (\underline{u}^T, \underline{v}^T)$ [3]. In (5), $\underline{u} \in \mathbb{R}^{\ell}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$; \underline{f} and \underline{g} are strictly nonlinear, the eigenvalues of \underline{A} (respec., of \underline{B}) have zero (respec., negative) real parts and $\underline{g}(\underline{u}, \underline{0}) = \underline{0}$. It is readily seen that the manifold $\underline{v} = \underline{0}$ is invariant with respect to (4), i.e., is composed of trajectories of (5). Then, the *reduced system*,

$$\dot{\underline{u}} = \underline{A} \underline{u} + \underline{f}(\underline{u}, \underline{0}) \quad (6)$$

generally contains the essential properties of the solutions of (5) (or of (1)) in a neighbourhood of $\underline{u} = \underline{0}$, $\underline{v} = \underline{0}$. Now, according to theorem 1.1, we can normalize (6). Then, system (1) is transformed to the form (5) where, in addition, (6) is in normal form (3).

From the viewpoint of the invariant manifold theory, system (6) relates to the restriction of (1) to a centre ma-

nifold $|^5|$ $|^6|$.

From a more physical viewpoint, the variables \underline{u} represent "slow" modes and the variables \underline{v} represent "fast" modes. The fast modes die out after some relatively short transient and then the slow modes alone, governed by the reduced system (6), represent the time evolution of (1).

In the asymptotic analysis of (1), local conclusions can be obtained with the reduced system (6). In this case we will consider the (partial) normalization which transforms (1) to (5), where (6) is in normal form (3).

When also the transient (non-asymptotic) behaviour is of interest, full normalization (according to theorem 1.1) is required in general $|^2|$.

3. The Normalization Algorithm

Notation:

$\underline{u}, \underline{v}$: integral vectors $(\mu_1, \dots, \mu_n), (v_1, \dots, v_n)$; $\mu_i, v_i \geq 0$;

$|\underline{u}| = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$;

$\phi_{j\underline{u}}, B_{j\underline{u}}$: constants;

$\delta_{-1} = (\delta_{11}, \delta_{21}, \dots, \delta_{n1})$; $\delta_{ij} =$ Kronecker delta;

$\{X_j\}, \{B_{j\underline{u}}\}$: vectors $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{1\underline{u}} \\ \vdots \\ B_{n\underline{u}} \end{pmatrix}$;

$\underline{x}^{\underline{u}} = x_1^{\mu_1}, x_2^{\mu_2}, \dots, x_n^{\mu_n}$; $\sum_{|\underline{u}|=K}$: summation over all integral vectors \underline{u} , $|\underline{u}| = K$.

$\sum_{|\underline{u}|=K}^{\infty}$: summation over all integral vectors \underline{u} , $|\underline{u}| = K, K+1, \dots, \infty$.

We sketch below the algorithm that normalize (1) to (5) when the critical eigenvalues (with zero real parts) are simple divisors. The reduced system (6) is obtained in normal form (4).

(A): A linear transformation brings (1) to the form (see $|^3|$):

$$\dot{X}_j = \lambda_j X_j + \sum_{|\underline{v}|=2}^{\infty} \phi_{j\underline{v}} X^{\underline{v}}; \quad j = 1, \dots, \ell; \quad (7.a)$$

$$\{X_k\} = \bar{A}_{22} \{X_k\} + \left\{ \sum_{|\underline{\nu}|=2}^{\infty} \phi_{k\underline{\nu}} X^{\underline{\nu}} \right\}; k = \ell + 1, \dots, n. \quad (7.b)$$

(B): Successive transformations (almost identity) are applied to (7) to achieve increasing order of normalization. These transformations are of the form

$$\bar{X}_J = X_J + \sum_{|\underline{\mu}|=K} B_{J\underline{\mu}}^{(K)} \bar{X}^{\underline{\mu}}; J = 1, \dots, n; \quad (8)$$

with $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell, 0, \dots, 0)$, i.e. the K^{th} order polynomial in (8) only contains critical variables. First, (8) is applied to (7) with $K = 2$. By choosing the B's, normalization is obtained up to the second order. Then, a new transformation (8), with $K = 3$, is chosen to normalize the resulting system up to order 3, and so on (Note that (8) leaves invariant (in (7)) terms of order lower than K).

The transformations (8) should in principle, be carried out for $K \rightarrow \infty$. However, in practice, one can stop at some sufficiently large $K = N$. Then, we speak of N -normal form to be understood as "normal up to order N " (inclusive).

Following the above procedure and omitting details, the following recurrent relationships are obtained ($\underline{\mu}' = (\mu'_1, \dots, \mu'_\ell)$; $\underline{\Lambda}^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$)

$$B_{j\underline{\mu}}^{(N)} = \phi_{j\underline{\mu}}^{(N)} / \lambda_{\underline{\mu}', j}, \quad (\lambda_{\underline{\mu}', j} \neq 0);$$

$$B_{j\underline{\mu}}^{(N)} = 0 \text{ (could be arbitrary)}, \quad (\lambda_{\underline{\mu}', j} = 0);$$

$$\{B_{k\underline{\mu}}^{(N)}\} = [(\underline{\Lambda}^T \cdot \underline{\mu}') \underline{I} - \bar{A}_{22}]^{-1} \{\phi_{k\underline{\mu}}^{(N)}\},$$

where the $\phi_{j\underline{\mu}}^{(N)}$'s are the coefficients of (7) after successive application of (8) with $K = 2, 3, \dots, N$. Then,

$$\begin{aligned} \phi_{j\bar{\mu}}^{(N+1)} &= \phi_{j\bar{\mu}}^{(N)} \quad (\lambda_{\bar{\mu}, i} = 0) \\ |\bar{\mu}| \leq N \quad \phi_{j\bar{\mu}}^{(N+1)} &= 0 \quad (\lambda_{\bar{\mu}, j} \neq 0) \\ \phi_{k\bar{\mu}}^{(N+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

The remaining ϕ 's are given by:

$$\begin{aligned} \phi_{J\bar{\nu}}^{(N+1)} &= \phi_{J\bar{\nu}}^{(N)} - \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{|\bar{\nu}|=|\bar{\nu}|-N+1} (\bar{\nu}_i - \nu_i + 1) \phi_{i\bar{\nu}}^{(N+1)} B_{J, \bar{\nu} - \nu + \delta_i}^{(N)} \\ &\quad \times \sum_{M=2}^{|\bar{\nu}|-1} \sum_{i_1, \dots, i_M} \phi_{J, \delta_{i_1} + \dots + \delta_{i_M}}^{(N)} P_{\bar{\nu} \text{ IML}} \left\{ \sum_{i'=1, \dots, L} |\bar{\mu}(i')| = N \right. \\ &\quad \left. B_{i_1 \bar{\mu}(1)}^{(N)} \dots B_{i_L \bar{\mu}(L)}^{(N)} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned} \dots, i_M &= i_M = i_{M-1}, \dots \\ &\vdots \\ i_2 &= i_1, \dots, n \\ i_1 &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

$P_{\bar{\nu} \text{ IML}} =$ Summation over all L -combinations
 i_1, \dots, i_M

and

$\sum_{i'=1, \dots, L} |\bar{\mu}(i')| = N$ summation over all integral vectors $\bar{\mu}(i')$,
 $i' = 1, \dots, L$ satisfying $|\bar{\mu}(i')| = N$ and $\bar{\nu} =$
 $\bar{\mu}(1) + \dots + \bar{\mu}(L) + \delta_{i_{L+1}} + \dots + \delta_{i_M}$. The num-
 ber L is an integer satisfying $L \leq M$ and $L =$
 $(|\bar{\nu}| - N)/N - 1$.

It is assumed that the summations in (11) extend only over the range of definition of their arguments; undefined

terms are excluded (e.g., if $\bar{v} = (3, 0, 0)$, $v = (0, 2, 0)$, $i=1$, then $\bar{v}-v+\delta_i = (4, -2, 0)$; thus, the term $B_{j, \bar{v}-v+\delta_i}^{(N)}$ is undefined and is excluded in the first summation of $\bar{I}^{(1)}$ (11). By conventional $\phi_{j\bar{v}}^{(1)} = \phi_{jv}$.

NOTE: In (11) it is easy to see that $\phi_{j\bar{v}}^{(N+1)} = \phi_{j\bar{v}}^{(N)}$ if $|\bar{v}| < N$.

3-Normal forms are most useful in practice and sometimes are sufficient to "solve" the problem. We develop from (9) (10) and (11) the following expressions for the 3-normal form coefficients ($\lambda_{\mu, j} = 0$) of the reduced system:

$$\phi_{j\bar{\mu}}^{(3)} = \phi_{j\bar{\mu}}^{(2)} = \phi_{j\bar{\mu}} ; |\bar{\mu}| = 2$$

$$\phi_{j\bar{\mu}}^{(3)} = \phi_{j\bar{\mu}}^{(2)} = \phi_{j\bar{\mu}} + \sum_{l_1, l_2} \phi_{j, \delta_{l_1} + \delta_{l_2}} (B_{l_1, \bar{\mu} - \delta_{l_2}}^{(2)} + B_{l_2, \bar{\mu} - \delta_{l_1}}^{(2)});$$

$$|\bar{\mu}| = 3 \quad (12)$$

$B^{(2)}$ given by (9).

NOTE: Although in (11) the superscript $N+1$ appears on both sides, there is no difficulty in solving $\phi^{(N+1)}$ for $\phi^{(N)}$ since (11) is a triangular system.

4. CONCLUSIONS

An algorithm for finding the normal form of analytical differential systems has been given. The usefulness of normal forms is well known [1] [2] [3] [4]. Perturbation methods can be derived from the normal form approach in order to assess nonlinear flutter [3], divergence (buckling), internal resonance [2] and parametric resonance [7]. The advantage of this approach is the possibility of relegating usual lengthy computations to a computer, without resorting to the use of special symbolic computer languages.

REFERENCES

- [¹] Brjuno, A. D. - "Analytical forms of differential Equations". Transactions of the Moscow Mathematical Society 1971 (1972), pp. 132-198 (199-299). English Translation Edited by the American Mathematical Society.
- [²] Starzhinskii, V. M. - "Applied Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations". MIR Publishers, Moscow 1977. English Translation, 1980.
- [³] Hsu, L., Tavares, G. A. - "A Direct Method for the Analysis of Critical and Post-Critical Behavior of Nonlinear Mechanical Systems". Proceedings of the IVth COBEM, Florianópolis, Dec. 1977, pp. 285-298.
- [⁴] Hsu, L. - "On the Analysis of Fourth Order Systems Near a Bifurcation". Mech. Res. Communications, 4, June, 1977.
- [⁵] Marsden, J. E., Mc Cracken, M. - "The Hopf Bifurcation and its Applications". New York: Springer Verlag 1976.
- [⁶] Holmes, P. J. - "Bifurcations to Divergence and Flutter in Flow-Induced Oscillations", Journal of Sound and Vibration, 1977, 53, pp. 471-503.
- [⁷] Hsu, L. - "Parametric Excitation of Linear and Nonlinear Systems: The Normal Form Method". Proceedings of the Vth COBEM (Campinas) dec. 1979. pp. 247-259.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º 0-11

P. P. 103 - 112

PUC/RJ

CRITICAL AND POST-CRITICAL ANALYSIS OF DIVERGENCE:
PART II: APPLICATION TO BUCKLING

Liu Hsu

COPPE/UFRJ

Programa de Engenharia Mecânica

Caixa Postal nº 68 503

Rio de Janeiro, RJ

SUMMARY

The normal form of analytical differential systems obtained in Part I is applied to the analysis of post-critical behavior of nonlinear dynamical systems near a divergence bifurcation. The "reduced system" defined in Part I is utilized to determine, (a) the stable or unstable nature of the bifurcating point, (b) the local equilibrium paths associated with the divergence (or buckling) bifurcation and (c) the influence of imperfections.

1. INTRODUCTION

The normal form approach appears to be well suited for treating large nonlinear systems because of its algorithmic character. A computer program can be implemented, according to Part I, in order to prepare the bifurcational problem, i.e., either to find the complete normal form or to find the reduced system.

The analysis of a normalized system, is often much more amenable than in the original form.

The reduced system describes the asymptotic behavior of the full system (see Part I). If a more complete description

of the full system, including the transient behaviour, is desired, then, it is generally convenient to completely normalize the system.

In this paper, divergence (or buckling) is treated by the normal form approach. A perturbation method is described. By the algorithm proposed in Part I one can arbitrarily increase the precision of the results (e.g., equilibrium paths), i.e., higher order approximations can be obtained.

The systems considered are general. Elastic (conservative) systems are treated as special cases. Load or imperfection parameters can be included with ease when treating the buckling of structures. We use the term "divergence", when general dynamical systems are considered and "buckling", when elastic conservative structures are treated.

2. CRITICAL AND POST-CRITICAL BEHAVIOR

Let us consider a system

$$\dot{\underline{x}} = F(\underline{x}, \alpha) = \underline{A}(\alpha)\underline{x} + \underline{f}(\underline{x}, \alpha); \quad \underline{f}(0, \alpha) = 0; \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n; \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

where f is analytic in its arguments. Suppose that for some $\alpha = \alpha^c$, the matrix $A(\alpha^c)$ has one zero eigenvalue, while the remaining $n-1$ eigenvalues have negative real parts. For definiteness let all eigenvalues of $A(\alpha)$ have negative real parts for $\alpha < \alpha^c$ while for $\alpha > \alpha^c$, only one eigenvalue is on the right hand side of the imaginary axis. The parameter value α^c is obviously a bifurcation value since the solution $\underline{x} = 0$ of (1) is stable for $\alpha < \alpha^c$ and unstable for $\alpha > \alpha^c$. This situation describes the simplest divergence bifurcation. More complex cases arise when, for $\alpha = \alpha^c$, more eigenvalues are zero. Let us first examine the former case.

According to Part I, the reduced system for $\alpha = \alpha^c$, is a first order differential equation of the form

$$\dot{u}_1 = \sum_{j=2}^{\infty} G_j^{1c} u_1^j. \quad (2)$$

The coefficients G are calculated by the given algo-

rithm. According to Malkin [1] the trivial solution of (1) is stable if the first nonzero coefficient G_{1J}^C is such that

$$J \text{ is odd, } G_{1J}^C < 0 \quad (\text{stable}) \quad (3)$$

and unstable if

$$J \text{ is even or } J \text{ is odd with } G_{1J}^C > 0 \quad (\text{unstable}) \quad (4)$$

Thus, the critical stability problem can be solved if some G is nonzero.

Let us now examine the post-critical properties of (1). For this purpose we introduce a perturbation scheme writing

$$\alpha = \alpha^C + \epsilon \quad (5)$$

where ϵ is a small parameter. Without loss of generality let $\alpha^C = 0$. Then, we introduce the dummy equation

$$\dot{\epsilon} = 0 \quad (6)$$

to be used in conjunction with (1). The augmented system (1) (6) has two zero eigenvalues since ϵ is considered as variable. Thus, the reduced equation is shown to be

$$\dot{\epsilon} = 0, \quad \dot{u}_1 = u_1 \sum_{j+k=1}^{\infty} G_{jk}^1 u_1^j \epsilon^k \quad (7)$$

whence, obviously $G_{j0}^1 = G_j^{1C}$.

Again the coefficients G can be found using the normal form algorithm. Let us retain in (7) only terms up to order 3 (in ϵ and u_1), that is,

$$\dot{u}_1 = [G_{01}^1 \epsilon + G_{02}^1 \epsilon^2 + G_{11}^1 \epsilon u_1 + G_{10}^1 u_1 + G_{20}^1 u_1^2] u_1 \quad (8)$$

Equation (8) has the trivial solution $u_1 = 0$.

Case (a): $G_{10}^1 \neq 0$

In this case we see that, besides the trivial solution $u_1 = 0$, we also have the (constant) solution

$$u_1 = - G_{01}^1 / G_{10}^1 \epsilon . \quad (9)$$

By hypothesis $G_{01}^1 > 0$ (for $c > 0$, $\alpha > \alpha_c$). Thus the solution $u_1 = 0$ is stable for $\epsilon < 0$ and unstable for $\epsilon > 0$ whereas the solution (9) is stable for $\epsilon > 0$ and unstable for $\epsilon < 0$.

Case (b): $G_{10}^1 = 0$, $G_{20}^1 < 0$

Then, instead of (9) we have two solutions approximately given by

$$u_1^2 = - G_{01}^1 / G_{20}^1 \epsilon \quad (10)$$

for $\epsilon > 0$. These solutions are verified to be stable.

Case (c): $G_{10}^1 = 0$, $G_{20}^1 > 0$

Here the two nontrivial solutions (10) exist for $\epsilon < 0$ and are unstable.

It is readily seen that in any case other G coefficients than G_{01}^1 , G_{10}^1 (case (a)) or G_{01}^1 , G_{20}^1 (case (b)) only contribute for improving the expressions of the nontrivial equilibrium paths (9) or (10) respectively.

The above conclusions on the reduced system (8) can be extended to the full system (1). However, this is not immediate because the normalizing transformation is not necessarily convergent. The extension can be made through the implicit function theorem. In order to avoid the complications related to using formal power series, one can use N -normal forms with N sufficiently large. Another possible way of making the extension is through the center manifold theory [5] [6] (Part I).

It is not difficult to correlate the above cases with certain well known types of bifurcations occurring in elastic conservative systems. Case (a) corresponds to an asymmetric point of bifurcation (always unstable), Case (b) and Case (c) correspond to the stable and unstable symmetric points of bifurcation respectively. We will come back to this point in section 2.1.

Using the algorithm of Part I we can show that the coefficients G of (8) are given by

$$G_{02}^1 = \underline{V}_L^T \underline{\Lambda}_2 \underline{V}_R ;$$

$$G_{20}^1 = \phi_1(2, 0, \dots, 0) ;$$

$$G_{30}^1 = \phi_1(3, 0, \dots, 0) + \sum_{J=2, \dots, n} \phi_1(\delta_1 + \delta_J) B_{J(2, 0, \dots, 0)}^{(2)} \quad (11)$$

where, $\underline{\Lambda}_2 = \left. \frac{\partial \underline{\Lambda}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$; $\underline{V}_L, \underline{V}_R$ are respectively the critical

left and right eigenvectors of $\underline{\Lambda}(\alpha^c)$; the coefficients ϕ are those obtained by the linear transformation of step (A) of the normalizing algorithm (see Part I, section 3), and $B_{J(2, 0, \dots, 0)}^{(2)}$ (coefficients of the second order normalizing transformation) is given by

$$\{B_{J(2, 0, \dots, 0)}^{(2)}\} = -\bar{\Lambda}_{22}^{-1} \{\phi_{J(2, 0, \dots, 0)}\} \quad (12)$$

(see Part I, section 3, (5)).

2.1 - Equilibrium Paths. Limit Point.

Thus far, we have considered systems of type (1) which have the trivial equilibrium solution independently of the parameter α . Such systems arise, either when the fundamental equilibrium path is $\underline{0}$, or when a sliding set of incremental coordinates is adopted. However, under this formulation, some loss of generality is implied; at a limit point the fundamental path is not defined beyond the critical value α^c . Moreover, utilizing sliding set of incremental coordinates is not simple, computationally. For the reasons, we

give a more general formulation to the normal form approach.

Suppose that $\alpha^C = 0$, as before. Then, let us study system (1) for $\alpha = \varepsilon$, where ε is a small parameter. Without loss of generality, let $F(0, 0) = 0$ in (1). However, $F(0, \varepsilon) = 0$ is not required in the following. Now, we consider the augmented system

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \varepsilon) ; \dot{\varepsilon} = 0, \quad (13)$$

where, as before, ε is considered as a variable. Obviously, the equilibrium point $\bar{x} = 0, \varepsilon = 0$ is critical, with two zero eigenvalues. Therefore, two cases must be distinguished: the zero eigenvalues are either simple or double.

Denoting $\bar{h} = \partial F / \partial \varepsilon |^C$ (i.e. calculated at $\bar{x} = 0, \varepsilon = 0$) we define the quantity

$$\delta_1 = V_1^T \cdot \bar{h} \quad (14)$$

where V_1^T is defined below (11). Then, the zero eigenvalues are simple if δ_1 and double, otherwise. Let us consider each case.

$\delta_1 \neq 0$: Asymmetric and symmetric bifurcations.

The reduced equation is of the form

$$\dot{u}_1 = \sum_{|p|=2}^{\infty} G_1^{(p)} (u_1, \varepsilon)^p, \quad (15)$$

$u = (u_1, u_2)$. The equilibrium paths are sought in the form

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_1^i \quad (16)$$

From (16) (15), with $\dot{u}_1 = 0$ we find

$$\begin{aligned} a_1 &= (-G_1^{(1,1)} \pm \sqrt{G_1^{(1,1)^2 - 4G_1^{(0,2)} G_1^{(2,0)}}) / 2G_1^{(0,2)} \\ a_2 &= - (G_1^{(3,0)} + G_1^{(0,3)} a_1^3 + G_1^{(1,2)} a_1^2 + G_1^{(2,1)} a_1) / 2a_1 G_1^{(0,2)} + \\ &+ G_1^{(1,1)} \end{aligned} \quad (17)$$

Then, the following cases are possible:

- (I) $G_1^{(2,0)} \neq 0$: there are two branches with nonzero slope at $u_1 = 0$ (including if $G_1^{(0,2)}$ when one slope is infinite). This characterizes an asymmetric point of bifurcation which is unstable;
- (II) $G_1^{(2,0)} = 0$: one branch has nonzero slope and the other one generally has an extremum for ϵ at $u_1 = 0$. This corresponds to a symmetric point of bifurcation and is stable if $G_1^{(3,0)}/G_1^{(1,1)} < 0$ and unstable if $G_1^{(3,0)}/G_1^{(1,1)} > 0$.

$\delta_1 \neq 0$: Limit Point

In this case, in order to avoid normal forms for the multiple eigenvalue situation we replace (13) by $\dot{\underline{x}} = F(\underline{x}, \gamma^2)$, $\dot{\gamma} = 0$ where $\gamma^2 = \epsilon$.

Thus, the reduced system is of the form

$$\dot{u}_1 = [G_1^{(2,0)}u_1^2 + G_1^{(0,2)}\gamma^2] + [G_1^{(3,0)}u_1^3 + G_1^{(1,2)}u_1\gamma^2] + \dots \quad (18)$$

and the corresponding equilibrium path is

$$\epsilon = \gamma^2 = a_2 u_1^2 + a_3 u_1^3 + \dots \quad (19)$$

where, $a_2 = -G_1^{(2,0)}/G_1^{(0,2)}$, $a_3 = (-G_1^{(3,0)} - G_1^{(1,2)}a_2)/G_1^{(0,2)}$, etc... Then, if $a_2 \neq 0$, the critical point is a limit point since ϵ has to maintain a fixed sign for $|u_1|$ sufficiently small. Note that $G_1^{(0,2)} = \delta_1$. Thus, the condition for a limit point is $\delta_1 = G_1^{(0,2)} \neq 0$, $G_1^{(2,0)} \neq 0$.

It is interesting to note that $G_1^{(2,0)}$ and $G_1^{(3,0)}$ are precisely the coefficients of the reduced equation in the critical case $\epsilon = 0$.

The above results are similar to those obtained for conservative systems [2].

In order to obtain the equilibrium paths in terms of the original variables \underline{x} , the normalizing transformations are used. In normal coordinates (u_1, v) , we have determined the equilibrium paths in the parametrized form:

$$\epsilon = \epsilon(\xi); u_1 = \xi; v = 0. \quad (21)$$

Let T_1 denote the linear transformation bringing (13) to the form (7) - Part I ($\ell = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$) and Let T_k ($k = 2, 3, \dots$) denote the transformations (8) - Part II. Then, in order to have the equilibrium paths with a precision of order ξ^N , one needs (N+1)-normal form and the N-normalizing transformation $T^{(N)}$ defined as

$$T^{(N)} = T_1 T_2 \dots T_N \quad (22)$$

This transformation transforms the curve (21) into original coordinates. Of course, this can be easily done in a computer in terms of the parameter ξ ; there is no need to find the explicit expressions for the N-normalizing transformation $T^{(N)}$.

3. BUCKLING OF CONSERVATIVE ELASTIC SYSTEMS

For elastic systems, divergence occurs (dynamically), only with double or multiple zero eigenvalues. Therefore, one should, in principle, have to use different normal forms (for the multiple eigenvalues case). However, since in the conservative case, the buckling analysis can be undertaken in a purely static manner, this difficulty can be circumvented by only considering the equilibrium equations.

Let $V(q, \alpha)$ be the total potential energy function of a conservative structural system, where q is the vector of generalized coordinates q_i ($i = 1, \dots, n$) and α is a loading parameter. Suppose that in the region of interest the n equilibrium equations $\partial V / \partial q_i = 0$ yield a single valued fundamental solution $q_i = q_i^F(\alpha)$. A sliding set of incremental coordinates x_i is then defined as $|^2| q_i = q_i^F(\alpha) + x_i$. Furthermore, let us perform in the new energy function $W(x_i, \alpha)$, a linear change of variables $x \rightarrow \underline{u}$ (dependent of α) such that the quadratic form of the resulting energy function $D(u_i, \alpha)$ is diagonal, that is, of the form

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i^2.$$

Consider the bifurcation at $\alpha = \alpha^C$ when $a_1 = 0$ and

$a_i > 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$). Then $|^2|$, denoting by a subscript the partial differentiation with respect to the corresponding variable, i.e., $D_{ij} = \partial^2 D / \partial u_i \partial u_j$ we have the following results,

- (a) if $D_{111}^c \neq 0$, the critical case is unstable;
 (b) if $D_{111}^c = 0$ and $\bar{D}_{1111}^c = D_{1111}^c - 3 \sum_{s=2}^{s=n} (D_{s11}^c)^2 / D_{ss}^c > 0 (< 0)$, the critical case is stable (unstable).

The superscript c denotes evaluation of the derivatives at $\alpha = \alpha^c$.

We can show that precisely the same stability conditions can be easily derived by the normal form approach. Indeed, it is sufficient to consider the differential equations

$$\dot{u}_i = -\partial D / \partial u_i ; i = 1, \dots, n, \quad (23)$$

which obviously have the same equilibrium points as the original problem. Then, for $\alpha = \alpha^c$ we construct the reduced system (2). We even have explicit expressions for G_2^{1c} , G_3^{1c} through (7). Since the equilibrium paths pattern leads, in the conservative case, to stability conclusions, from (9) and (10) we have that,

- (a') if $G_2^{1c} \neq 0$, the critical case is unstable
 (b') if $G_2^{1c} = 0$, $G_3^{1c} < 0 (> 0)$ the critical case is stable (unstable).

By calculating G_2^{1c} and G_3^{1c} (from (11)) we readily verify that $G_2^{1c} = -D_{111}^c/3$ and $G_3^{1c} = -\bar{D}_{1111}^c/3!$. We have thus established the same stability conditions as above ((a),(b)). The introduction of system (23) is rather artificial; we could have normalized the equilibrium equations directly. For conciseness this will not be done here.

3.1 - Imperfection Parameters and Multiple Buckling

In principle, there is no difficulty in considering imperfection parameters or more than one load parameter. They can all be considered in the normalization procedure by adding to the given differential system $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{\alpha})$ the

dummy equation $\dot{\underline{\alpha}} = 0$, where $\underline{\alpha}$ is the vector of parameters.

Multiple buckling is of some importance in elastic stability theory [2]. In this case, system (23) would have several zero eigenvalues, but these eigenvalues would be simple because the linear part of (23) is symmetric. Thus, no conceptual difficulty arise in applying the normal form algorithm; the reduced system would have dimension ℓ (the number of critical eigenvalues).

4. CONCLUSION

It is well known that the buckling or divergence analysis by a perturbational approach usually leads to cumbersome algebraic calculations (see [2], pp. 143, 194-195).

We have proposed a new perturbation method based on a normal form approach which relagates all lengthy calculations to the algorithm presented in Part I. In principle, arbitrary order approximations can be obtained for the equilibrium paths, load and imperfection parameters can be included and multiple buckling can be treated. Finally, we notice that, because we have considered normal form of dynamical (differential) equations, general dynamical features could be assessed (e.g., stability, transient behavior and dynamical buckling).

REFERENCES

- [1] Malkin, I. G. - "Stability and Dynamic Systems Translations Series 1", American Math. Soc. 1962, 5, pp. 242-290.
- [2] Thompson, J. M. T., Hunt, G. W. - "A General theory of Elastic Stability". New York: John Wiley and Sons Ltd. 1973.

**COBEM 81**VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981

TRABALHO
PAPER

N.º D-12

P. P. 113 - 119

PUC/RJ

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO VARIACIONAL
DO PROBLEMA DE DIRICHLET NUM SETOR PLANO

Cid Santos Gesteira

Professor Adjunto

Escola Politécnic a da UFBA

SUMÁRIO

Aborda-se, neste trabalho, a existência e unicidade da solução variacional do problema de Dirichlet definido sobre um setor plano, com ponto de partida para investigar as condições de convergência da solução numérica aproximada pelo método dos elementos finitos, de problemas com singularidades no contorno do seu domínio de definição.

SUMMARY

Here is discussed the existence and uniqueness of the variational solution of Dirichlet's problem defined on a plane sector, taken as a start point for further investigations on convergence of the numerical solution by finite element method for problems with boundary singularities.

1. Introdução

Uma das razões que motivou este trabalho foi a constatação de que a geometria (forma) do contorno do domínio de definição de alguns problemas de valor de contorno pode influenciar, sensivelmente, a convergência de sua solução numérica.

É sabido, por exemplo, que na resolução numérica dos problemas da mecânica da fratura, a maioria dos métodos utilizados conduz a valores pouco significativo do fator de intensificação de tensões. Assim sendo, acredita-se que um estudo objetivando elucidar essa questão possa conduzir a uma formulação numérica eficaz para a resolução de problemas desta natureza.

O trabalho aqui apresentado representa uma etapa deste estudo, em que é abordada a existência e unicidade da solução variacional do problema de Dirichlet, definido sobre um setor plano.

2. Apresentação do Problema P1

Determinar a função u tal que

$$\Delta u = f \quad \text{em } \Omega_\omega \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_\omega \quad (2)$$

Sendo Ω_ω um setor circular definido assim

$$\Omega_\omega = \{(r, \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < \omega\} \quad (3)$$

e $\partial\Omega_\omega$ é a união de abertos (Γ_j) de \mathbb{R} , cuja fronteira é uma variedade de \mathbb{R} com dimensão igual a zero.

3. Formulação Variacional do Problema P1

Para o estudo do problema variacional associado a P1, considere o espaço de funções

$$V = \{v \mid v/r, \nabla v \in L^2(\Omega_\omega) \text{ e } v|_\Gamma = 0\} \quad (4)$$

Sobre V define-se a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, dx \quad \forall v \in V \quad (5)$$

e o funcional linear e contínuo

$$\ell(v) = \int_{\Omega_\omega} f v \, dx \quad \forall v \in V \quad (6)$$

Tem-se, então, o seguinte problema variacional:

Problema Variacional - Dada uma função f tal que $rf \in L^2(\Omega_\omega)$, determinar uma função $u \in V$ que satisfaça a equação

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \quad (7)$$

4. Existência e Unicidade do Problema Variacional

Para demonstrar a existência e unicidade do problema variacional formulado é necessário o seguinte resultado.

Lema 1 - A forma bilinear da equação (7), tal como foi definida, é contínua e coerciva sobre $V \times V$.

Demonstração - Escrevendo $u(x)$ na forma

$$\begin{aligned} u(r \cos \omega, r \sin \omega) &= \int_0^\omega \frac{d}{d\theta} u(r \cos \theta; r \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^\omega (-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x_1} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial x_2}) u(x_1; x_2) d\theta \quad (8) \end{aligned}$$

tem-se

$$\left| \frac{u(x_1; x_2)}{r} \right| \leq \int_0^\omega |\underline{\nabla} u| \, d\theta \quad (9)$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz

$$\left| \frac{u(x_1; x_2)}{r} \right|^2 \leq \omega \int_0^\omega |\underline{\nabla} u|^2 d\theta \quad (10)$$

Integrando ambos os membros

$$\int_{\Omega_\omega} \left| \frac{u}{r} \right|^2 dx \leq \omega^2 \int_{\Omega_\omega} |\underline{\nabla} u|^2 dx ; \forall r > 0 \quad (11)$$

Observando que a norma de V

$$\|u\|_V^2 = \int_{\Omega_\omega} (|\frac{u}{r}|^2 + |\underline{\nabla} u|^2) dx \quad (12)$$

é equivalente à norma

$$|||u||| = \int_{\Omega_\omega} |\underline{\nabla} u|^2 dx \quad (13)$$

ou seja

$$c |||u||| \leq \|u\|_V \leq (\omega^2 + 1) |||u||| \quad (14)$$

consequentemente

$$|a(u, v)| \leq |||u||| \quad |||v||| \quad (\text{continuidade}) \quad (15)$$

$$|a(u, u)| \geq \alpha |||u|||^2 \quad (\text{coercividade}) \quad (16)$$

A existência de uma solução única $u \in V$ do problema variacional fica assegurada pelo teorema enunciado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em ODEN [6], GESTEIRA [2] e BABUSKA [1].

Teorema de Lax-Milgram-Babuska

Sejam U e V dois espaços de Hilbert, e $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre $U \times V$, com $u \in U$ e $v \in V$. Suponha também $f \in V'$ espaço dual de V . Então, existe um único elemento $u_0 \in U$ tal que

$$a(u_0, v) = \ell(v)$$

para todo $v \in V$; e mais

$$\|u_0\|_U \leq c \|f\|_{V'}$$

em que c é uma constante positiva.

5. Comentários sobre a Solução Variacional

Na definição do espaço V é importante notar a necessidade de se ter v/r e $\nabla v \in L^2(\Omega_\omega)$.

As condições para que isso aconteça dependem da geometria do contorno, e isso fica evidenciado no estudo da regularidade da solução u de (1) e (2).

Demonstra-se (veja por exemplo GESTEIRA [2]), que se o domínio Ω_ω for convexo ($\omega \leq \pi$) é possível identificar V com o espaço $H_0^1(\Omega_\omega)$ e, neste caso, a solução aproximada construída a partir do problema variacional possui a mesma taxa de convergência conhecida para os problemas com fronteira regular (ver Fig. 1).

Entretanto, se o domínio Ω_ω for côncavo, isto é $\omega > \pi$, não é mais possível identificar V com $H_0^1(\Omega_\omega)$, mas com um espaço intermediário entre $L^2(\Omega_\omega)$ e $H_0^1(\Omega_\omega)$ que depende de ω . Assim sendo, os resultados numéricos para soluções aproximadas de problemas desta natureza são de convergência muito lenta (ver Fig. 1)

LEGENDA — Torção numa haste com seção em "L"
 - - - Torção numa haste com seção quadrada

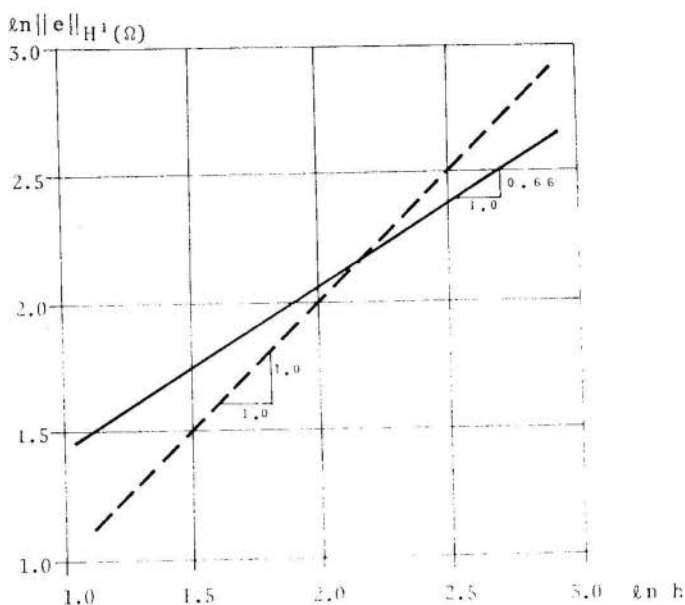


Fig. 1 - Taxa de convergência na norma $H^1(\Omega)$ para o problema da torção numa haste com seção transversal em forma de "L" e com seção quadrada.

6. Conclusões

Do exposto, conclui-se que é necessário investigar a regularidade da solução do problema de valor de contorno antes de efetuar tentativas de melhorar a aproximação numérica, visto que as condições de regularidade da solução poderão fornecer informações valiosas para uma correta formulação do problema aproximado.

Estudos nesse sentido vêm sendo desenvolvidos e espera-se, em futuro próximo, poder formular e resolver modelos apre-

ximados e resolver numericamente, com eficiência, problemas com singularidades no contorno.

7. Agradecimento

O autor agradece à Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio recebido durante a elaboração deste trabalho.

8. Referências Bibliográficas

- [1] BABUSKA, I. and AZIZ, A.K. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press (1972).
- [2] GESTEIRA, C.S. "Convergência do Método dos Elementos Finitos para o Problema de Dirichlet em Domínios com Fronteira Poligonal", Tese D.Sc COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro (1978).
- [3] GRISVARD, P. "Problème de Dirichlet dans un Cone" , Rcherche di Mat. 3 (1971) pp. 175-192.
- [4] MEDEIROS, L.A. "Tópicos de Equações Diferenciais Parciais", Monografia da I Escola de Matemática Aplicada, Lab. Computação Científica - CNPq (1978).
- [5] NECAS, J. Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptique, Masson et Cie. Paris (1967).
- [6] ODEN, J.T. and REDDY, J.N. Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, Wiley-Interscience (1976).



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981

TRABALHO
PAPER

N.º D-13

P.P. 121 - 128

PUC/RJ

AN ALGORITHM FOR THE DETERMINATION OF THE HELMHOLTZ FREE ENERGY AND DERIVED STATE PROPERTIES FOR CO₂ NEAR THE CRITICAL REGION.

Alejandro F. Romero López.

Full time professor, and Mech. Engrg. Dept. Head, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México 20, D.F.

Venus Siegmantel.

Graduate student, Lehrstuhl A für Thermodynamik, Technische Universität München, West Germany.

J. A. Caballero Tardaguila.

Graduate student, Centro de Cálculo, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Abstract.

The available information for state properties near the critical region is generally limited to the constants which describe the critical point. In order to get a better view of the associated phenomena, an equation for the Helmholtz free energy, based on scale equations is developed. Since the free energy is not measurable by direct means and the macroscopical thermodynamics states only the existence without any further information, regarding its explicit form, a very careful mathematical handling is required in order to obtain an expression for the free energy function.

1. Introduction.

The state of a pure fluid phase is determined through two independent intensive state properties. Thermodynamics also states that for every couple of such state properties, there is a characteristic state function, through which is possible to describe all of the thermodynamic properties of the fluid. This means that only one canonical state equation is required to fully describe all of the thermodynamic characteristic of a substance.

in table I, as well as the parameter values of the b_i s. For $\omega = 1$ and $\tau = 1$, the equation (2.1) must reproduce the critical parameters, P_c , ρ_c , T_c , however for slightly deviated values from the critical ones the equation fails to properly describe the state of the system, so one has to use an additional scale equation for the so called "critical field" the development of such an equation is made in the part 3. of this paper.

2.2 The Helmholtz free energy.

In addition to the zeroth law (state equation), the thermodynamic potentials are an excellent tool to describe the performance of compressible substances. In equilibrium thermodynamics, which is often called "thermostatistics" one of the best suitable functions to fully describe the state of a substance is the Helmholtz function or specific free energy

$$f = u - Ts = f(T, v) = f(T, \rho) \quad (2.3)$$

(2.3) can be successfully used to describe totally the fluid states of the substance (and even the solid states). With this potential it is possible to generate thermodynamic information, even in the two phase field between the two branches of the coexistence curve.

However, the specific free energy is not directly measurable but T and ρ are, and, what is most important, the entropy and all of the main state properties can be expressed as functions of f and its derivatives, which in turn are functions of T and ρ (or T and v).

In order to save time and space the following denomination system is adopted for the derivatives of f

$$f_T = (\partial f / \partial T)_V; \quad f_V = (\partial f / \partial v)_T; \quad f_{VT} = (\partial^2 f / \partial T \partial v), \text{etc.} \quad (2.4)$$

Making use of the convention (2.4), of the well known thermodynamic definitions, one can derive the table 2.1 which shows the different thermodynamic state properties expressed as functions of the specific free energy f and its derivatives. With this potential it is possible to choose a model function $\Psi = \Psi(T, \rho, \underline{a}) = f(T, \rho)$ where \underline{a} is a parameters vector, to be determined with the help of experimental data [3].

There are two fundamental reasons to choose T and v as a couple of specially adequate independent thermodynamic variables. First of all, T and v are easy to measure and last but not least, the correspondent characteristic function, the specific free energy or Helmholtz function

$$f = u - Ts = f(T, v) \quad (1.1)$$

represents an unambiguous function of T and v for all of the possible fluid states, including the two-phase field.

The specific free energy is not measurable by direct means, however the entropy and all of the most important state properties can be expressed as functions of f and its derivatives, which in turn depend only on (T, v)

This paper deals with the calculation of the specific free energy as a function of the specific density $\rho = \frac{1}{v}$ and the thermodynamic temperature T . Since it is the intention to present data around the critical point, the International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) [1] formulation is used. The polar coordinates of the scale equations are transformed to obtain the specific free energy of CO_2 and an algorithm is set up in order to calculate the most important thermodynamic properties.

2. The specific free energy.

2.1 The state equation for carbon dioxide.

Since the CO_2 is a real gas, it is not possible to utilize the ideal gas law and it is necessary to look for an empirical equation of state from which it is possible to derive an expression for the free energy. An accepted empirical equation taken from [2] and also adopted by the IUPAC [1], follows:

$$P = \rho RT \left(1 + \sum_{i=1}^{10} \omega \sum_{j=1}^7 b_{ij} (\omega - 1.004292)^{i-1} (\tau - 1.000329)^{j-1} \right) \quad (2.1)$$

where:

$$\omega = \rho / \rho_c ; \quad \tau = T_c / T \quad (2.2)$$

ρ_c and T_c are the critical values of the density and the temperature respectively, whose units and values are given

Table 2.1 State properties as function of f and its derivatives.

State property	relation with f
Pressure p	$- f_v$
Specific entropy s	$- f_T$
Specific internal energy u	$f - T f_T$
Specific enthalpy $h \equiv u + p v$	$f - T f_T - v f_v$
Isochoric specific heat c_v	$- T f_{TT}$
Isobaric specific heat c_p	$-T(f_{TT} - f_{TV}^2/f_{VV})$
Speed of sound $a = v \sqrt{(\partial p / \partial v)_s}$	$v(f_{VV} - f_{TV}^2/f_{TT})^{1/2}$
Joule-Thomson coefficient or throttling coeff. $\alpha_h = (\partial T / \partial p)_h$	$-(v + T f_{TV} / f_{VV}) / c_p$

To obtain the free energy from measured variables the procedure consist of three steps:

$$1. \quad u - u_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} (p/\rho^2 - (T/\rho^2)(\partial p / \partial T)_{\rho}) d\rho \quad (2.5)$$

$$2. \quad s - s_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} (-1/\rho^2) (\partial p / \partial T)_{\rho} d\rho \quad (2.6)$$

$$3. \quad f - f_0 = (u - u_0) - T(s - s_0) \quad (2.7)$$

Where the subindex "0" refers to an arbitrary reference level. From the expressions (2.5) to (2.7) can be easily seen that a state equation is needed to proceed further, the equations given in {1} are then used to be fed through a digital computer to solve these integro-diferential equations.

3. The scale equation of state.

As already mentioned in 2.2 the following equations will be used in order to produce a state equation for CO_2

$$\Delta \rho = \frac{\rho - \rho_c}{\rho_c} = r^{\beta} \theta g \quad (3.1)$$

$$\Delta p = \frac{p - p_c}{p_c} = r^{\beta\{\delta+1\}} a(\theta) + C_1 \Delta T + ar^{\beta\delta} \theta (1-\theta)^2 \quad (3.2)$$

$$\Delta T = \frac{T - T_c}{T_c} = r^\beta (1 - b^2 \theta^2) \quad (3.3)$$

The function $q(\theta)$ represents a polynomial of the following form:

$$q(\theta) = I_0 + I_2 \theta^2 + I_4 \theta^4 + c |1 - b^2 \theta^2|^{2-\alpha} \quad (3.4)$$

Where T_c , ρ_c and p_c are again the critical values of the temperature, density and pressure, all of the constants are listed in table II at the end of the paper.

The equations (3.1) to (3.4) are of course not linear and the elimination of the polar coordinates is rather complicated and leads to a very long expression:

$$\begin{aligned} \Delta \rho = & \frac{1}{2} X \cdot \left\{ I_0 + I_2 \frac{\Delta \rho}{\frac{1}{2} g X} \right\} + I_4 \left\{ \frac{\Delta \rho}{\frac{1}{2} g X} \right\}^4 \\ & + c \left| 1 - b^2 \left\{ \frac{\Delta \rho}{\frac{1}{2} g X} \right\}^2 \right|^{2-\alpha} + \\ & c, \Delta T + a \left\{ \frac{1}{2} X \right\}^\delta \cdot \frac{\Delta \rho}{\frac{1}{2} g X} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\Delta \rho}{\frac{1}{2} g X} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Where the following substitutions have been made:

$$X = \Delta T + \Delta t \quad (3.6)$$

$$\Delta t = \left\{ \Delta T + \left\{ (\Delta T)^2 + \frac{4b^2}{g^2} (\Delta \rho)^2 \right\}^{1/2} \right\} \quad (3.7)$$

(3.5) is then an equation of state for CO_2 in the critical region with p as function of T and ρ , to be handled in a computer program in order to obtain the state properties described in the table 2.1. The flow diagram is shown in fig.1. Some computer runs were carried on both at the technical University of Munich (4) and at the Computer Center of the Facultad de Ingeniería UNAM. The algorithm is available upon request.

4. Acknowledgments.

One of the authors is deeply indebted to the Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología of México (CONACYT) for a grant which permitted a research stay in Munich, to the Facultad de Ingeniería of the Universidad Nacional Autónoma de México for an academic leave of absence and specially to Herr Prof. Dr.-Ing.-habil. J. Straub of the Technische Universität München, who granted the use of the T.U.M. facilities as well as his continuous help, patience and unvaluable advice on technical matters.

References.

- {1} IUPAC, International Thermodynamic Tables of the Fluid State. Carbon Dioxide, edited by S. Angus, B. Armstrong and K.M. de Reuck, Pergamon Press, London, N.Y., 1973.
- {2} Chapela, G.A., and J.S. Rowlinson, "Accurate representation of thermodynamic properties near the critical -- point." J. Chem Society, Vol. 70 (1974) pp 584-593.
- {3} Ahrendts, J. und H.D. Bachr, "Die direkte Verwendung von Messwerten beliebiger thermodynamischer Zustandsgrossen zur Bestimmung kanonischer Zustandsgleichungen", Forsch. Ing.-Wes 45 (1979) Nr.1'
- {4} Romero, A.F. und Venus Siegmantel, "Berechnungen der freien Energie für CO₂ im 2-Phasen-Gebiet", theoretische Semesterarbeit, Technische Universität München, S.S. 1980.

Table I Critical and parameter values for the analytical state equation (2.1), {2}. ($\rho_C = 0.466 \text{ g/cm}^3$, $T_C = 304.21 \text{ K}$)

i	j	1	2	3	4	5	6	7
1		-0.22752	-1.676081	0.258461	0.375298	-0.667801	-0.867583	-0.148490
2		0.444043	1.249715	5.918263	15.361183	19.276572	8.573382	-
3		-0.169816	-1.811102	-4.555665	-3.772066	3.555267	4.853015	-
4		0.004387	-1.733004	-10.953678	-27.346306	-26.406603	-6.311699	-
5		0.250079	2.323768	7.349680	6.470629	-2.374910	-2.524378	-
6		0.054958	1.140034	7.247919	14.681055	9.330838	-	-
7		0.143590	-1.642296	-4.543618	-3.042281	-	-	-
8		0.013211	-0.097104	-1.581314	1.807640	-	-	-
9		0.037745	0.424796	0.853158	-	-	-	-
10		-0.011485	-0.081056	0.044506	-	-	-	-

Table II Parameter values for the state equation near the critical region (scale equation), {2}.

Constant	Value	Constant	Value
b^2	1.4402	c for $T > T_C$	240.4358
α	0.065	c for $T < T_C$	-58.38316
β	0.347	I_0	36.98893
g	1.4918	I_2	-82.07936
δ	4.576	I_4	56.66053
c_1	6.98		

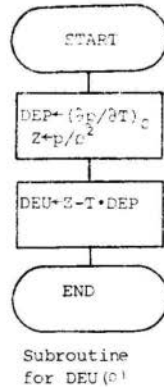
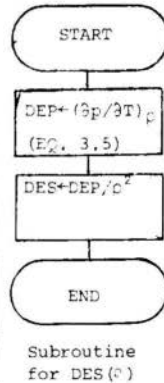
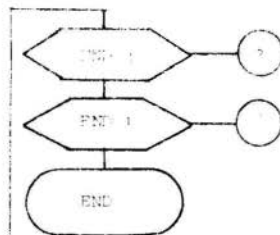
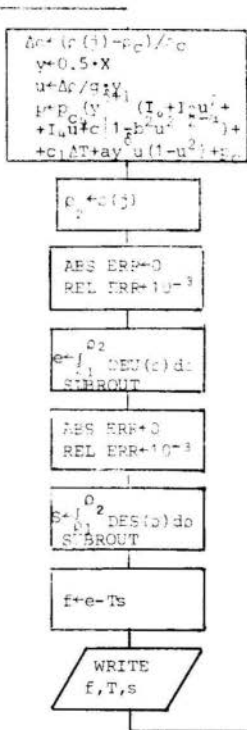
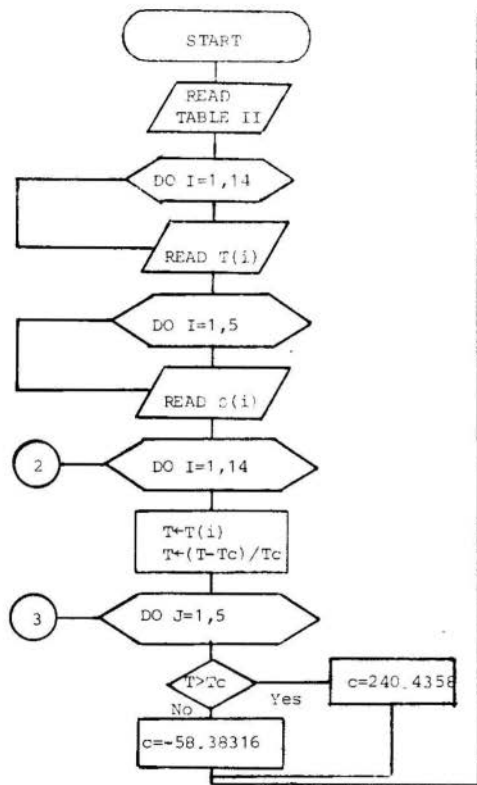


Fig. 1. Flow diagram to calculate the polymerization rate, energy with associated subroutines.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-14

P.P. 129 - 137

PUC/RJ

A PHOTOELASTIC STUDY OF THE EFFECTS OF AN
IMPULSIVE SEISMIC WAVE ON A NUCLEAR CONTAINMENT VESSEL

Christian P. Burger
 Professor

Engineering Research Institute and
 Department of Engineering Science and Mechanics
 Iowa State University
 Ames, IA 50011 USA

SUMARIO

Si una estructura esta localizada cerca del epicentro de un terremoto, la energia impulsiva en una onda de compresion (onda-P) puede ser suficiente para debilitarla en lugares criticos, de manera tal que su habilidad para soportar futuras vibraciones del terreno es reducida. El manuscrito describe el movimiento progresivo de la onda dilatacional (onda-P) en un modelo de un tanque de almacenamiento nuclear por medio de un estudio fotoelastico dinamico. Las reflexiones de los soportes de la cascara son observadas, y la fuerte onda de flexion, que deforma la cascara misma, es estudiada por medio de fotoelasticidad y procedimiento mediante el uso de indicadores de desplazamientos dinamicos.

SUMMARY

If a structure is located close to the epicenter of an earthquake, the energy in the impulsive wave (P-wave) can be sufficient to weaken the structure at critical locations such that its ability to survive subsequent vibratory ground motions is impaired. The paper described a dynamic photoelastic study of the progressive movement of a dilatational P-wave into a model of a nuclear containment vessel. The reflections at the dome abutments are observed and the strong flexural wave that deforms the dome itself is studied with photoelasticity and with dynamic strain gage procedures.

1. Introduction

Seismic analyses of large civil engineering structures generally consider the vibrational responses of such structures due to the horizontal and vertical ground motions as recorded by accelerograms. The possible dangers from the impulsive components of the dilatational or P-wave is usually considered to be minor. If, however, a structure is located close to the epicenter of a major earthquake, the energy in the impulsive waves can be significant and may be sufficient to cause structural damage. Such damage may be fatal by itself, but is more likely to weaken the structure at critical locations in such a way that it is less likely to survive the subsequent ground motions associated with the slower moving surface waves.

These impulse waves are amenable to study with the aid of dynamic photoelasticity involving the Cranz-Schardin high speed spark camera (1). This camera system can record the progression of an impulse wave as it moves into and through two-dimensional photoelastic models of various configurations. In order to evaluate the behavior and damage potential of such impulse waves on large structures, several series of dynamic photoelastic records were obtained for impulse waves in models of typical structures. The results for one specific case is presented in this paper because it represents a typical design for a large reactor containment shell (2).

The Cranz-Schardin camera and dynamic photoelastic procedures have been described elsewhere (1,3,4). The equipment normally operates as a light field polariscope with 16 spark gaps in air. The 16 arcs are fired sequentially with adjustable initial delay and variable intervals between arcs. The spectrum from the high voltage air arc is filtered through deep blue narrow band filters. Since the short wavelength blue light is emitted only during the peak intensity period of the arc, the resultant exposure is a short duration (600 ns) pulse of near monochromatic light on a film selected to be sensitive in the blue region of the spectrum. The film is pre-fogged to just before the knee of its density vs. exposure curve. It is then immediately responsive to the additional exposure from the short duration arcs and a single flash is enough to produce well exposed negatives. Sixteen sequential high speed photographs (at an equivalent framing rate of 1.7 million frames/s.) are obtained on a single sheet of 250 x 356 mm (11 x 14 in) film. The total event time spanned by these pictures can be varied, without changing the exposure times of the individual pictures, by adjusting the time inter-

val between the discharges of the arcs.

The procedure described above was modified in two major ways to overcome the peculiar difficulties of interpreting the photoelastic data from this and other structural models. Dynamic color photos of the isochromatics were used quantitatively to obtain accurate interpretations of the fringes. Good color rendering required that the polariscope operate with white light in the dark field mode. To this end the polariscope was altered for dark field operation and the blue filters were removed from the field. The exposure at each individual frame is not adjustable with diaphragm settings, as in other cameras. Since the precise energy and duration of the different arcs are not alike, the individual exposures had to be adjusted. This was done by inserting different neutral density filters behind each of the lenses until all 16 pictures were exposed correctly within the tight tolerances required for good color photography. Further color corrections were made with low level filters to compensate for the slightly different spectra at the arcs caused by variations in total discharge energy between different arcs. The color positive film could not be pre-fogged, so its "speed" was enhanced to 1100 ASA (32DIN) by special processing, requiring even tighter control over variations in exposure. Cibachrome process P-12 was used to make color enlargements from the color positive photographs.

The fringe orders of interest in this study were generally below 4 and at the times of greatest interest, below 3. At these levels, color photographs can be used effectively to estimate partial fringe order (5,6), provided a good monochromatic calibration standard is available. Two such standards were used here - a disk in diametral compression and a beam in pure bending. In both cases a model of the same material as was being used in the dynamic study was loaded statically to a useful fringe order of 5. A full set of 16 photographs were then taken of the statically loaded model in the dynamic polariscope. The first with monochromatic light on black and white film (blue filters in place) and the second in "white" light as described above. After processing and printing, there was now an accurate calibration for each arc up to the 5th order blue fringe. This permitted partial fringe order readings to be estimated well, especially at levels up to 2.5.

For the dynamic photographs, black and white negatives were obtained from the color positive (Ektachrome) transparencies by the following procedure:

- . Prefog a sheet of high contrast black and white film (Kodak 6127).
- . Place film in film holder of camera underneath the color positive film previously obtained.
- . Remove polarizers from the optical system.
- . Place deep blue narrow band filters in place.
- . Place previously selected neutral density filters in place for each individual arc.
- . Fire camera (arcs) through any normal procedure (No model and No explosive).
- . Develop the 6127 film in Kodak D-11 developer.
- . Make black and white prints in usual manner.

The resulting photographs were sharp and of high contrast. They matched the color photographs exactly so that the two sets of pictures can be interpreted with confidence.

The photoelastic model of the reactor vessel was machined integral with the "ground" from a 6 mm thick sheet of CR39 photoelastic material (Homolite 120). A 25 mm square grid was scribed onto the model. Since interest centered on the behavior of the dome and its abutments, the side walls of the model was only half as high as they would have needed to be for accurate geometric modeling of the structure on which it was based. The impulse was generated with a 100 mg charge of lead-oxide (PbN_6) in a line load 25 mm long placed 130 mm below the base of the reactor model. This produced a reasonably flat wavefront at the time that the dilatational P wave entered the model.

Compressive explosive loading functions of this kind tend to have strong tensile unloading tails. To reduce this effect the line charge of explosive was packed into a separate block of CR-39 material which was attached to the lower surface of the model with a bond that is weak in tension (double sided masking tape). The tensile unloading wave then causes the small block to separate from the main body of the model so that only the main compressive pulse and a very low amplitude tensile tail passes on into the main model. There was no additional control over the shape of the incident wave. The model dimensions were chosen to be in reasonable ratio with the wavelength of the incident wave which represented a seismic shock wave.

The photoelastic data strongly suggested that the dome flexes in reverse bending (tension-compression-tension) under the influence of the impulse wave. The optical information alone is not conclusive. So, to confirm that bending does indeed occur and to obtain information

on the sign of the bending stresses, strain gages were mounted at the crown of the dome, on the inside as well as on the outside. The strain gages were 120Ω , 1.57 mm single element foil gages in a dynamic potentiometric circuit with 10.62V D.C. excitations and a $1k\Omega$ balast resistor. The signals were recorded on a 2 channel oscilloscope with an input impedance of $1k\Omega$ 15 pf.

2. Results

Two sets of dynamic pictures have been selected to illustrate how the impulse wave behaves in the structure and how it can induce serious and unexpected tensile stresses. In Fig. 1 the impulse source was deeper and of lower amplitude than in Fig. 2. In both cases the times are given in micro-seconds after the explosion. The effect of the shorter travel time and the difference in intensity can be seen in

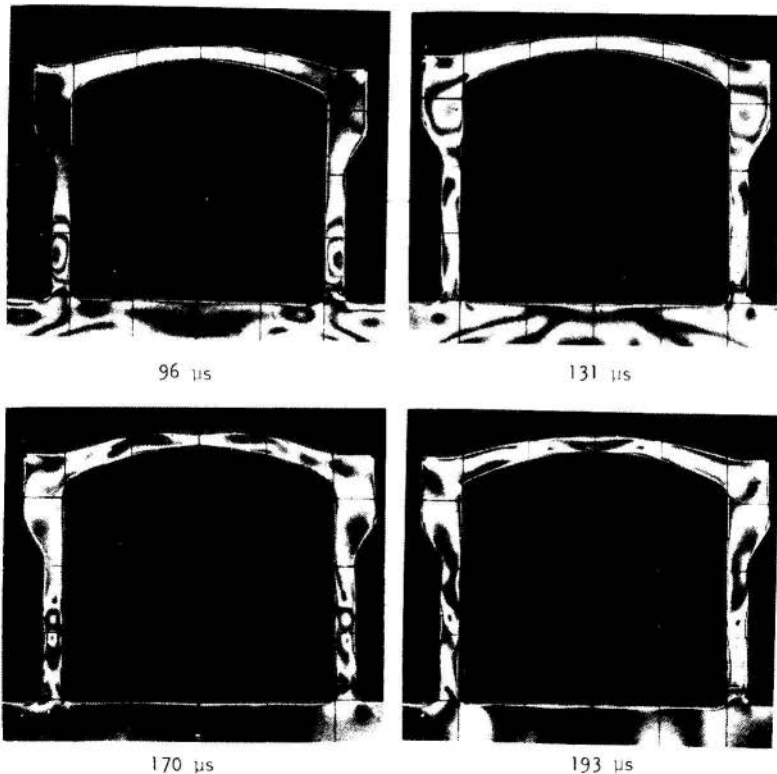


Fig. 1. Dynamic Photoelastic photographs at four different times after the explosion.

the two frames at 96 and 94 μs . In the former case (96 μs , Fig. 1), the impulse has moved only about 35 mm up the legs of the model and the maximum fringe order is just over 3. In the latter case (94 μs , Fig. 2), the wave is already entering the crown abutments (≈ 64 mm from base) and the maximum fringe order in the first compressive pulse is almost 4. In both cases the pulse shape is similar with a leading ramp length (wave front to first compressive peak) of 25 mm. The two sets of frames were selected to show how the passage of the impulse through the dome introduces stress patterns which are similar to bending patterns. The analysis given here does not address the reflections in the abutments nor does it consider the apparent flexure of the walls.

All impulses were placed symmetrical with respect to the vertical centerline of the model. Consider Fig. 1:

- . Frame 96 μs : The first compressive half-wave has just entered the walls. The light areas in the upper portions of the arch are residual values.
- . Frame 131 μs : The extreme front of the wave has just started to reflect from the top of the wall. The reflection is, of course, tension and cancels a certain amount of the compressive stresses in the part of the wave which now lies immediately below the top. The reflected wave front is now 8 mm below the top and the expansion of the compressive pulse into the roof has just started.
- . Frame 170 μs : The expansion into the dome has proceeded 75 mm; i.e., three quarters of the way across. The two compressive waves, which entered from opposite sides, reinforce each other so that maximum values are on either side of top center.
- . Frame 193 μs : The tensile reflections now reinforce each other with peak stress values near top center.

Consider Fig. 2:

- . Frames 80 and 94 μs : The wave enters and travels up the walls and into the expanded volume of material of the abutments.
- . Frame 153 μs : The fronts of the waves have crossed at top center. They are now almost at the far walls ready to expand into the abutment.
- . Frames 184 and 199 μs : The center of the dome experiences a complicated stress cycle.
- . Frame 214: The top center portion of the dome is in a clear bending mode.

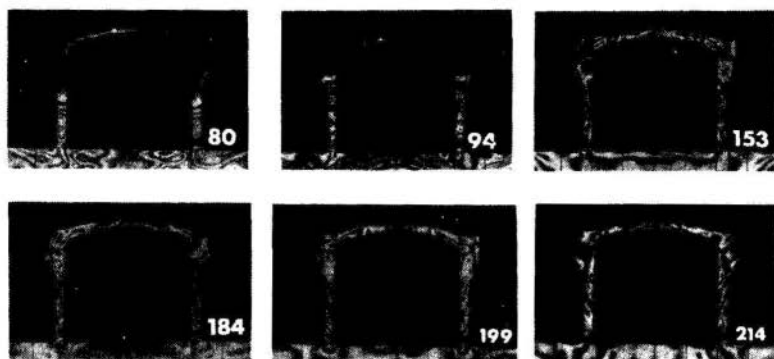


Fig. 2. Six dynamic isochromatic photographs for another model with a larger charge of explosive than in Fig. 1. Times are in micro-seconds after explosion.

In Fig. 3 the time histories at the top (outside) center and the bottom (inside) center of the dome are presented. The two central graphs compare the strains as recorded by the two strain gages. It is quite clear that from 200 μ s on the dome experiences bending oscillations with the bottom surface in *tension* when the top surface is in *compression*.

The uppermost and lowermost graphs present the fringe orders at the upper and lower surfaces at the center of the dome. It is, of course, not possible to assign positive or negative values to the fringes; hence, the lack of sign on the scales above and below the zero lines. The information on sign from the strain gages was used to plot the fringe orders either above or below the zero level. Once that is done, the whole picture emerges in a consistent way and the previous interpretation of the photoelastic photographs is possible.

3. Conclusions

It is evident from this very simplified and admittedly distorted model that there is a strong possibility that the impulse component of seismic waves may be a threat to the reliability of large structures

The most important experimental difficulty in this modeling approach is posed by the limited extent to which the shape of the impulse wave can be modified to simulate a real seismic wave. This problem can be overcome by using non-polymeric model materials such as glass where the waves can be excited with piezo-electric crystals. The wave shape can then be modified to reproduce, on a reduced scale, the

exact shape of seismic waves. Unfortunately, glasses have low birefringence; i.e., the models will display very low fringe orders. Present research at Iowa State University is concerned with developing a technique called half-fringe photoelasticity, which will permit highly sensitive photoelastic tests on glass models. If successful, the method will remove a major cause of distortion in the seismic photoelastic modeling.

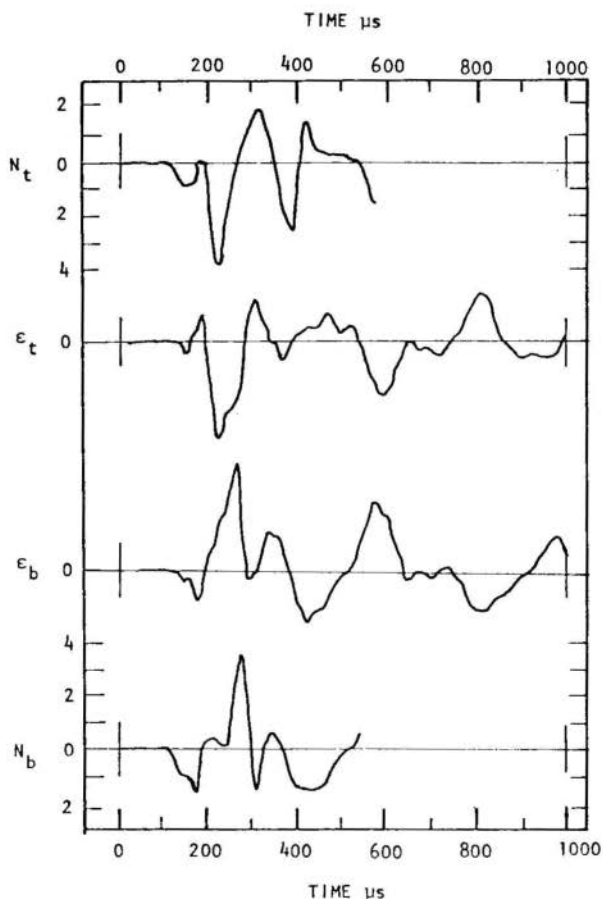


Fig. 3. Data for center of dome at times after explosion

N_t = Observed fringe orders on top of dome

ϵ_t = Measured strain on top of dome

ϵ_b = Measured strain on bottom of dome

N_b = Observed fringe order on bottom of dome

4. Acknowledgments

The research reported here was supported by the Engineering Research Institute and the Department of Engineering Science and Mechanics at Iowa State University. The assistance of an undergraduate student, Mr. David van Haften, was invaluable. His contribution is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] Riley, W. F. and Dally, J. W., "Recording Dynamic Fringe Patterns with a Cranz-Schardin Camera," Exp. Mech., 9(8) (1969), pp. 27N-33N.
- [2] Bazant, Z. P., "Creep and Shrinkage in Reactor Containment Shells," J. Structural Div., American Soc. of Civil Engrs., 101 (1975), pp. 2117-2131.
- [3] Burger, C. P. and Riley, W. F., "Effects of Impedance Mismatch on Waves in Layered Solids," Exp. Mech., 14(4) (1974), pp. 129-137.
- [4] Dally, J. W., "Data Analysis in Dynamic Photoelasticity," Exp. Mech., Vol. 8 (1967), pp. 332-338.
- [5] Dally, J. W. and Riley, W. F., Experimental Stress Analysis, McGraw-Hill, New York (1978) p. 552.
- [6] Holister, G. S., Experimental Stress Analysis, Cambridge University Press (1967), pp. 166-169.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º 0-15

p.p. 139 - 148

PUC/RJ

TENSÕES TÉRMICAS NO VASO DE PRESSÃO DE UM REATOR TIPO PWR

Wageeh Sidrak Bassel

Centro de Engenharia Nuclear

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares-São Paulo

José Antonio Diaz Dieguez

Centro de Engenharia Nuclear

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares-São Paulo

SUMÁRIO

Foi desenvolvido um método para cálculo das tensões térmicas na parte cilíndrica do vaso de pressão de um reator tipo PWR. As tensões térmicas analisadas são aquelas causadas pelo gradiente de temperatura radial, durante a operação do Sistema de Resfriamento de Emergência ou durante o resfriamento da usina nuclear. A distribuição de tensões foi obtida usando o conceito de deformação plana para cilindro oco. Dos seis casos de choque térmico analisados, concluiu-se que a condição limite para o máximo decréscimo na temperatura de resfriamento que não causa deformação plástica é 210 °F.

SUMMARY

A method for calculating the thermal stresses in the cylindrical part of a PWR pressure vessel was developed. The thermal stresses studied were created by radial temperature gradient during Emergency Core Cooling System operation or during plant cooling down. The stress distribution was obtained by using the concept of plain strain for hollow cylinder. The limiting condition for maximum sudden decrease in temperature which should not cause plastic collapse on the pressure vessel was concluded to be 210 °F.

1. Introdução

O vaso de pressão de um reator nuclear tipo PWR é projetado para suportar as mais rigorosas condições. Além de resistir a altas pressões e temperaturas (para o reator nuclear Angra I, a pressão e temperatura de projeto são, respectivamente, 175 ata e 343 °C), o vaso de pressão sofre o bombardeamento de nêutrons e a ação da radiação γ . Devido à ação dos nêutrons rápidos, o material do vaso tem diminuída a sua utilidade [5]. A absorção de raios γ ocasiona a geração de calor em toda a espessura do vaso de pressão [3] .

A parede do vaso de pressão é isolada termicamente no lado externo e é resfriada, pela água do circuito primário, no lado interno. Conseqüentemente, quando a temperatura do refrigerante é bruscamente diminuída, devido à entrada em funcionamento do Sistema de Resfriamento de Emergência [6] (por exemplo, decorrente de um LOCA - "Loss of Coolant Accident"), ou quando a potência do reator é alterada, levando à variação do fluxo de raios γ , o vaso de pressão é submetido a um choque térmico, gerando, assim, tensões térmicas .

O Código ASME-Seção III - Vasos Nucleares [1] determina que, para o vaso de pressão de um reator nuclear, as tensões térmicas, causadas por gradientes térmicos, sejam cuidadosamente calculadas e interpretadas, para garantir a integridade do vaso sob as condições mais adversas.

O objetivo deste trabalho é estabelecer um método de cálculo e de análise de tensões térmicas em um vaso de pressão de um reator tipo PWR. Para isso, foram calculadas as tensões térmicas decorrentes de choques térmicos causados por : 1) atuação do Sistema de Resfriamento de Emergência e 2) Resfriamento normal da usina .

2. Distribuição de temperatura na parede do vaso de pressão

A distribuição de temperatura na parede do vaso de pressão foi de terminada por muitos pesquisadores. Thomas e Coppari [4] e Eberwein [2] desenvolveram, independentemente, expressões analíticas para calcular a distribuição transiente de temperatura no vaso de pressão, nos casos em que a temperatura do fluido refrigerante cai de repente. Neste trabalho, foi desenvolvido um método de cálculo de distribuição de temperatura que permite variar, com o tempo, a temperatura do refrigerante do circuito primário (importante no caso de resfriamento do reator nuclear) .

A equação de condução de calor ao longo da espessura do vaso de pressão é dada por,

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{q_o''''}{k} e^{-\mu x} = \frac{1}{a_\alpha} \frac{\partial t}{\partial \theta} \quad (1)$$

onde, t é a temperatura, x é a coordenada ao longo da espessura do vaso ($x=0$, superfície interna; $x=h$, superfície externa), q_o'''' é o calor gerado na superfície interna devido à absorção dos raios γ , μ o coeficiente de absorção dos raios γ , k é a condutividade térmica do material do vaso, a_α é a difusividade térmica do material do vaso e θ é o tempo.

2.1. Distribuição de temperatura para caso estacionário

Para a solução da equação (1) no caso estacionário, são utilizadas as seguintes condições de contorno :

a) na superfície externa :

$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=h} = 0 \quad (2)$$

b) a temperatura na superfície interna do vaso de pressão, t_1 , pode ser estimada pelo fato de que o calor na parede do vaso é transferido por convecção para a água de resfriamento, assim,

$$h_f (t_1 - t_f) = \frac{q_o''''}{\mu} (1 - e^{-\mu h}) \quad (3)$$

onde, h_f é o coeficiente de convecção de calor, t_f é a temperatura do refrigerante e h a espessura do vaso. Integrando a equação (1), utilizando a condição de caso estacionário $\frac{\partial t}{\partial \theta} = 0$ e as condições de contorno (2) e (3), obtém-se a seguinte distribuição de temperatura ao longo da espessura do vaso :

$$t = t_f + \frac{q_o''''}{\mu^2 k} (1 - e^{-\mu k}) + \frac{q_o''''}{\mu h_f} (1 - e^{-\mu h}) - \frac{q_o''''}{\mu k} e^{-\mu h} \quad (4)$$

2.2. Distribuição de temperatura para o caso transiente

Dividindo a parede o vaso de pressão em i pontos, espaçados de Δx , e aplicando o método das diferenças finitas à equação (1), obtém-se, para o instante $\theta + \Delta \theta$ a seguinte distribuição de temperatura na parede do vaso de pressão :

$$t_i^{\theta + \Delta \theta} = (1 - 2F_o) t_i^\theta + F_o (t_{i-1}^\theta + t_{i+1}^\theta) + \frac{q_o'''' \Delta \theta}{\rho c} e^{-\mu x} \quad (5)$$

onde, t_i é a temperatura no ponto i da parede do vaso, F_0 é o número de Fourier, dado por $a_\alpha \cdot \Delta\theta / \Delta x^2$, ρ e c são densidade e calor específico do material, e $\Delta\theta$ é o incremento de tempo. As condições de contorno para a solução da equação (5), são :

a) na superfície externa ($i = ii$),

$$t_{ii}^{\theta+\Delta\theta} = t_{ii-1}^{\theta+\Delta\theta} \quad (6)$$

b) na superfície interna ($i = 1$),

$$t_1^{\theta+\Delta\theta} = t_1^\theta + 2F_0 \{ t_2^\theta - t_1^\theta + Bi_{\Delta x} (t_f^\theta - t_1^\theta) + \frac{\alpha_0''' \Delta x^2}{2k} \} \quad (7)$$

onde, $Bi_{\Delta x} = h_f \Delta x / k$ (nº de Biot)

3. Distribuição de tensões térmicas

O vaso de pressão de um reator nuclear é considerado como um cilindro oco onde o raio interno é "a" e o raio externo é "b". Assim, utilizando a teoria da elasticidade e usando o princípio das deformações planas, são obtidas as seguintes expressões que permitem o cálculo das 3 tensões principais : tensão radial (σ_r), tangencial (σ_θ) e axial (σ_z) causadas por um gradiente térmico radial [7].

$$\sigma_r = \frac{E \alpha}{(1-\nu)} \left[\frac{1}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \int_a^b t r dr - \frac{1}{r^2} \int_a^r t r dr \right] \quad (8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E \alpha}{1-\nu} \left[\frac{1}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \int_a^b t r dr + \frac{1}{r^2} \int_a^r t r dr - t \right] \quad (9)$$

$$\sigma_{z0} = \frac{E \alpha}{1-\nu} \left[\frac{2\nu}{b^2 - a^2} \int_a^b t r dr - t \right] \quad (10)$$

onde, E é o módulo de elasticidade do material do vaso, α é o coeficiente de expansão térmica, ν o coeficiente de Poisson, e t e r são a temperatura e o raio correspondentes.

A tensão axial, σ_{z0} , representada pela expressão (10), refere-se à condição em que há supressão completa da deformação relativa axial.

Portanto, para que a força resultante nas extremidades seja nula, é necessário introduzir uma tensão axial corretiva σ_z' dada por :

$$\sigma_z' = - \frac{1}{\pi (b^2 - a^2)} \int_a^b 2\pi r \sigma_{z0} dr \quad (11)$$

Pelo princípio da superposição tem-se, finalmente, que a tensão axial

total, σ_z , é dada por :

$$\sigma_z = \sigma_{z0} + \sigma_z' \quad (12)$$

o momento de Flexão Linear Equivalente, Q , é calculado pela expressão [1] :

$$Q = \frac{6}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \cdot x \cdot dx \quad (13)$$

Para a determinação das tensões, σ_r , σ_θ e σ_z , foi desenvolvido um programa de computador em linguagem FORTRAN IV. Nesse programa, inicialmente, são resolvidas, numericamente, as equações (4) e (5). A seguir, são calculadas as expressões (8) a (13), por meio de consecutivas integrações numéricas.

4. Resultados e discussão

O presente modelo matemático foi aplicado ao vaso de pressão de um reator PWR típico. Na Tabela 1, é apresentado um resumo dos casos analisados. O material do vaso de pressão é o aço carbono ASTM 533 Grade B (tensão limite = 1/3 tensão de ruptura = 30 KSI). Duas espessuras do vaso foram consideradas : 6,3 polegadas e 10 polegadas (diâmetro interno do vaso 154 polegadas). O choque térmico, caracterizado pela diferença de temperatura do refrigerante antes e após o transiente, é causado pela atuação do Sistema de Refrigeração de Emergência.

Na Figura 1, é apresentada a distribuição de temperatura ao longo da espessura do vaso de pressão para o Caso 1. É interessante notar que mesmo no caso estacionário, devido à absorção de raios γ , há uma diferença de temperatura de 21,1 °F entre as superfícies externa e interna do vaso. Na mesma figura foram colocados, também, os resultados obtidos por Eberwein [2] utilizando um método analítico diferente. Como pode ser observado, há uma ótima coincidência entre os dois resultados.

A distribuição de tensões tangenciais, σ_θ , para o caso 1, é apresentada na Figura 2. Como era esperado, as tensões máximas ocorrem na superfície interna do vaso e são tensões de tração, enquanto que, na superfície externa, temos tensões de compressão. Foi verificado que as tensões radiais, σ_r , são aproximadamente 100 vezes menores que as tensões σ_θ e σ_z e, portanto, praticamente não afetam o cálculo total de tensões.

Na Figura 3, são apresentadas as variações das tensões tangenciais máximas, $\sigma_{\theta\max}$, para os 6 primeiros casos. Os valores de Q e F (pico de

Tabela 1 - Resumo dos casos analisados.

Condições antes do transiente : temperatura do fluido 554 °F (290 °C), $q_0''' = 3,37 \times 10^4$ BTU/hr.ft³

Caso	Tipo de Transiente	Espessura da parede in (mm)	Condições após transiente	
			Temp. do Fluido °F (°C)	q_0''' $\frac{10^4 \text{ BTU}}{\text{hr} \cdot \text{ft}^3}$
1	Choque térmico	6.3 (160)	482 (250)	1,68
2	Choque térmico	6.3 (160)	437 (225)	1,68
3	Choque térmico	6.3 (160)	392 (200)	1,68
4	Choque térmico	10 (250)	482 (250)	1,68
5	Choque térmico	10 (250)	437 (225)	1,68
6	Choque térmico	10 (250)	392 (200)	1,68
7	Resfriamento da usina (desligamento normal)	10 (250)	taxa de resfriamento 100 °F/hr durante 4 h	0,337

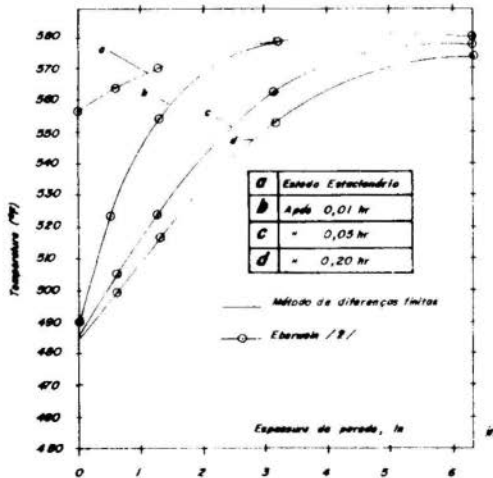


Fig. 1. Distribuição de temperatura ao longo da espessura do vaso de pressão, Caso 1.

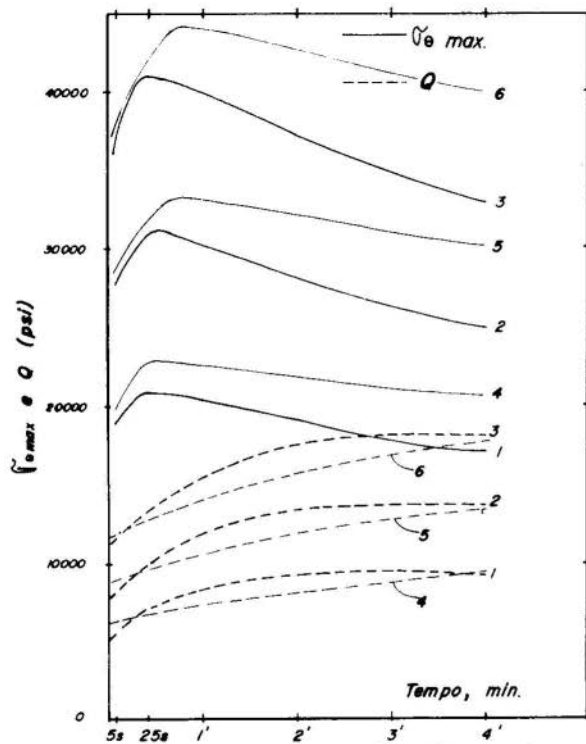


Fig. 3. Distribuição de tensões máximas, Casos 1 a 6.

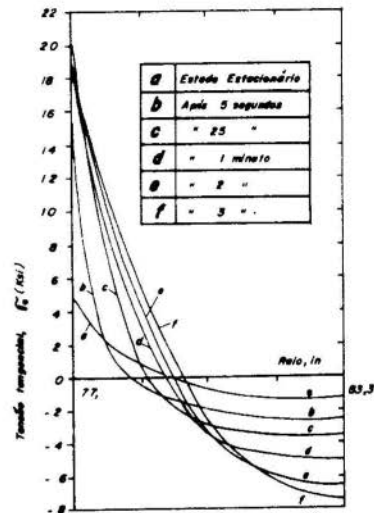


Fig. 2. Distribuição das tensões tangenciais, Caso 1.

tensão, $F = \sigma_{\theta_{\max}} - Q$, são também, apresentados. É conveniente ressaltar que a tensão máxima não ocorre no mesmo instante do choque térmico. As tensões máximas são atingidas, respectivamente, aos 25, 30, 33, 50, 55 e 60 segundos para os casos 1 a 6. Os valores máximos de Q são atingidos após 3 minutos (Casos 1, 2 e 3) e 4 minutos (Casos 4, 5 e 6).

A variação das tensões máximas, em função da temperatura do refrigerante, é apresentada na Figura 4. Na faixa de temperatura analisada, a tensão tangencial máxima, o momento de flexão equivalente e o pico de tensão têm comportamento linear. Do Código ASME [1] pode-se inferir (3a. condição de projeto) que Q_{total} não deve exceder uma vez e meia a tensão limite ($1,5 \times 30$ KSI). Neste valor limite de Q , estão incluídas as tensões mecânicas e as tensões térmicas, sendo estas últimas, devidas não só aos gradientes radiais, mas também aos gradientes axiais. Portanto, numa hipótese bem conservadora, a parcela de Q corresponde apenas aos gradientes térmicos radiais (este trabalho) não deve ultrapassar 50% do valor do Q_{total} . Assim, o valor limite deve ser 22.500 psi. Na Figura 4, este valor corresponde a uma diferença de temperatura de 210°F no fluido refrigerante. Nestas condições, o choque térmico não deve ser superior a 210°F , sob pena de serem ultrapassadas as condições limites.

No caso 7 foi analisado o resfriamento da usina nuclear a uma taxa de 100°F/hora . Na Figura 5 é apresentada a distribuição de temperatura e na Figura 6 são mostradas as distribuições de tensões máximas. Como pode ser observado, $\sigma_{\theta_{\max}}$, Q e F aumentam com o tempo, atingindo os valores máximos após 3 horas.

5. Conclusões

Pelo presente trabalho desenvolveu-se um método de cálculo de tensões térmicas devidas a gradientes térmicos radiais em vasos de pressão. Nos casos analisados, mostrou-se que, mesmo no caso estacionário, a distribuição de temperatura na parede do vaso é não linear, devido à absorção de radiação γ . Aumentando o Δt do choque térmico e a espessura do vaso, aumenta o tempo para ser atingida a tensão máxima. Nos transientes tipo choque térmico, as tensões $\sigma_{\theta_{\max}}$, Q e F são funções lineares do choque térmico. A máxima diminuição de água de resfriamento (Δt choque térmico máximo), que garante o comportamento elástico do vaso, é 210°F .

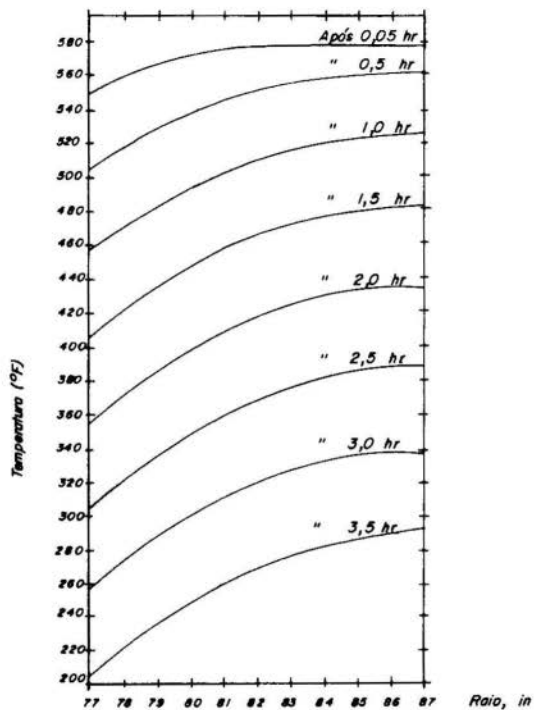


Fig. 5. Distribuição de temperatura ao longo da espessura do vaso de pressão, Caso 7 .

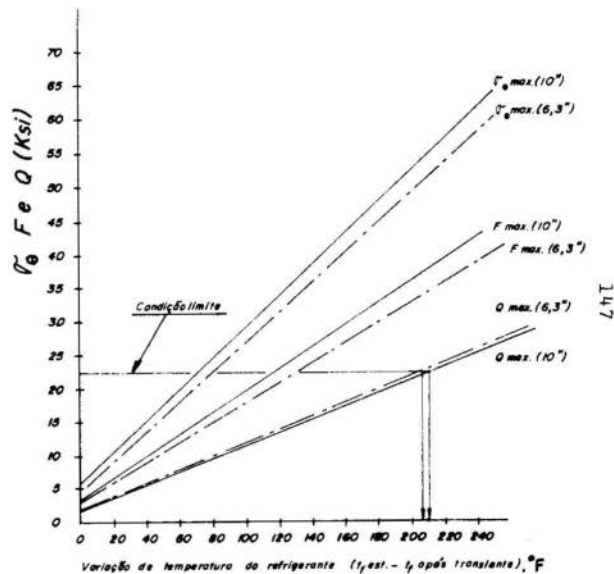


Fig. 4. Variação das tensões máximas, em função da temperatura do refrigerante .

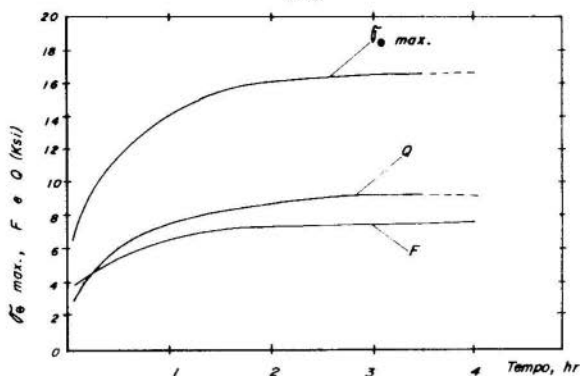


Fig. 6. Variação das tensões máximas, Caso 7 .

6. Bibliografia

- [1] | AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEER. ASME boiler and pressure vessel code, section III. New York, 1978 .
- [2] | EBERWEIN, J.: Transient temperature distribution in the reactor vessel wall by failure of a reactor cooling pump. Nucl. Eng. Des. 16 : 137, 1971 .
- [3] | ELWAKIL, M.M.: Nuclear Heat Transfer. New York, International Text Book, 1967 .
- [4] | THOMAS, J.R. & COPPARI, L.A.: Two dimensional steady state temperature distribution in composite geometry reactor vessel subjected to radiation - an analytical solution. Nucl. Eng. Des., 41 : 361 , 1977 .
- [5] | ULMAIER, H.: Lectures about radiation damage in reactor materials, conference at IPEN, June 1979 .
- [6] | UNITED STATES NUCLEAR REGULATORY COMMISSION, Washington. Reactor Safety Study. Springfield, National Technical Information Service, 1975, (NUREG. 75/014) .
- [7] | ZUDANS, Z et alii.: Thermal stresses techniques in the nuclear industry. New York, Elsevier, 1965 .



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECANICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-16

P.P. 149 - 156

PUC/RJ

DESIGN CONCEPT FOR VESSELS AND HEAT EXCHANGERS

Wolfgang W. ELMANN and

Lúcio D. B. FERRARI

Engineers

NUCLEN - Nuclebrás Engenharia S.A. - Dept.º TMS

Rua Visconde de Ouro Preto, 5 - 6.º andar

SUMÁRIO

Neste trabalho é apresentado um conceito de projeto para vasos e trocadores de calor, submetidos a carregamentos externos e internos, resultantes de operação normal e acidente.

Uma definição e explicação das condições de operação e níveis de tensão são fornecidos. Uma descrição do tipo de análise (tensão, fadiga, deformação, estabilidade e vibração) é apresentada em detalhe, e também, os procedimentos técnicos para os vasos, trocadores de calor e suas partes estruturais individuais.

SUMMARY

A design concept for vessels and heat exchangers against internal and external loads resulting from normal operation and accident is shown.

A definition and explanation of the operating conditions and stress levels are given. A description of the type of analysis (stress, fatigue, deformation, stability, earthquake and vibration) is presented in detail, also including technical guidelines which are used for the vessels and heat exchangers and their individual structure parts.

1. Introduction

Vessels and heat exchangers of nuclear plants are installed in primary systems as well as in other nuclear and conventional circuits. According to the classification of the system, the vessels and heat exchangers are designed for different operating conditions with different allowable stress levels.

For relevant technical safety systems also loads due to earthquake and, if necessary, loads due to postulated pipe rupture might be considered.

To meet these strains a proposal is done for the requirements of the design concept for vessels and heat exchangers.

2. Operating conditions and stress levels

2.1 General

For each system the operating conditions (load cases) are classified due to the postulated safety requirements.

For the vessels and heat exchangers the stress levels must be related to the load cases.

2.2 Operating conditions (load cases)

2.2.1 General

In general, load cases, can be:

- static
- dynamic
- non-steady state

2.2.2 Design load case

Usually this load cases cover the stresses which are the result of the maximum loads of normal operating conditions. Only those loadings are considered, which have components of primary stresses. Design pressure, temperature, dead weight and other design determining loads contribute to this load case.

2.2.3 Operation conditions

2.2.3.1 Normal operating conditions

This includes all those conditions which belong to the normal operational service inclusive the start up, shut down, full or partial load including the transients.

2.2.3.2 Abnormal operating conditions

These are the deviations from normal operating conditions, which occur through function, or switching effects in the system.

2.2.3.3 Test cases

The test cases cover initial as well as periodic pressure testing.

2.2.4 Failure modes

Distinction should be made between emergency conditions and faulted conditions.

Deviations with low probability from normal operational conditions are emergency conditions, but deviations with extremely low probability as well as postulated load cases, are considered as faulted conditions. The design earthquake is considered as emergency condition, the safe shutdown earthquake as faulted condition.

3. Stress levels for vessels and heat exchangers

Stress level 0 is related to the design load case. In this case the primary stresses (membrane and bending stress) are to be considered.

The stress level A for the normal operational condition includes a consideration of all primary (membrane and bending stress), secondary and peak stresses, especially because also the proof of the fatigue has to be done. The same is valid for stress level B for the abnormal operating conditions.

The stress level P is related to the testing conditions and only primary stresses are considered.

The emergency conditions are related to stress level C, the faulted conditions to stress level D. For both only the primary stresses are considered.

4. Loads on the vessels and heat exchangers

The stresses and strains created by mechanical loads should be determined and evaluated by an analysis of the component mechanical behaviour.

Mechanical loads are:

- dead weight
- pressure and pressure transient
- temperature and temperature transient
- loads from attached piping
- restraint free end displacement heat expansion
- vibration caused by earthquakes as well as
- flow induced forces and tube vibration especially in heat exchangers

The individual loads are superimposed according to the requirements of each load case.

5. Analysis of the mechanical behaviour

5.1 General

The analysis shows that the component (vessels and heat exchangers) will withstand the loads at each stress level. The stresses and deformations of the components and their parts are determined for the given loads and the correct design has to be proved with the corresponding allowable values.

The analysis can be carried out besides others also with the aid of a calculation model; with this model, the component is transferred to an idealized model, to which the component should correspond in its characteristics.

The following methods may be used:

- finite differences method
- finite elements method
- structural dynamic analysis

5.2 Types of analysis

In general the following analyses are made for vessels and heat exchangers; stress, fatigue, deformation, stability, earthquake and vibration analysis.

5.2.1 Stress analysis

The object of this analysis, with stress category and stress limits definition is to demonstrate that only allowable strains and by this only allowed deformations may result.

The stress categories shall be divided into primary stresses, secondary stresses and peak stresses.

Primary stresses:

Stress which is necessary for the laws of equilibrium. It is not self-limiting. Therefore a thermal stress can not be a primary stress. If the primary stress exceeds the yield strength, a global failure is the consequence. A primary stress can be of - local

- general character

Secondary stresses:

Stress which is self-limiting, that means if yield stress is exceeded, no global failure is existing usually a secondary stress is coming from constraints of adjacent material or (i.e. cladding) by

self constraints of structure. A secondary stress can be

- thermal stress
- bending at a gross structural discontinuity

Peak stresses:

A peak stress is a very localized stress without noticeable distortion. It is the increment of stress which is additive to the primary plus secondary stress and is mainly caused by local discontinuities or local thermal stress. It may be only necessary for the fatigue calculation, because it is only the source of a fatigue crack or a brittle fracture. Examples:

- a) thermal stress in the austenitic cladding of a carbonsteel component
- b) surface stresses produced by thermal shock

For evaluating the primary stresses the reference stress is determined; for the sum of the primary and secondary or for the sum of the primary, secondary and peak stresses the alternating stress intensity is formed.

The reference stresses are calculated on the basis of the shear stress hypothesis. To avoid the failure because of large deformation the primary and secondary stresses are determined; on the other hand, to avoid failure due to fatigue the sum of all stress components has to be considered.

For any case the following procedure has to be used (when the principal stress direction does not change) to determine the alternating stress intensity:

Consider the values of the three principal stresses at the point versus time for the complete stress cycle. These are designated as σ_1 , σ_2 and σ_3 . Determination of the stress differences $S_{12} = \sigma_1 - \sigma_2$, $S_{23} = \sigma_2 - \sigma_3$ and $S_{31} = \sigma_3 - \sigma_1$ versus time for the complete cycle. The symbol S_{ij} used to represent anyone of these three stress differences. Determination of the extremes of the range through which each stress difference S_{ij} fluctuates, and find the absolute magnitude of this range for each S_{ij} . Call this magnitude S_{rij} and let $S_{altij} = 0,5 S_{rij}$. The alternating stress intensity S_{alt} is the largest of the S_{altij} values.

The reference stress and the alternating stress intensity are dependently of the material characteristic values.

5.2.2 Fatigue analysis

This analysis type should be made to determine the usage factor of each part of the component. The usage factor must be lower than one.

A simplified fatigue analysis can be made, whereby six criteria have to be fulfilled which however will not be detailed here. Otherwise the elastic fatigue analysis will be used. If the criteria for this elastic fatigue analysis is not passed the simplified elastic - plastic fatigue analysis has to be made.

A special application is found in the heat exchangers with a crossflow of the medium for the tubes. The tubes are set vibrating, a vibration amplitude will be created by the crossflow.

However all vessels and heat exchangers with high number of load cycles must be taken into consideration.

5.2.3 Deformation analysis

This should only be carried out if for operational reasons deformation must be limited.

5.2.4 Stability analysis

In the stability analysis, structural stability with respect to inadmissible sliding and tilting of the component and its support under the superposed loads shall be examined.

In addition, sufficient strength and stability (buckling) of the component and its supports shall be proved.

Elements of components supports are points of attachment at the shell, such as lugs, joints and fastenings. This can be done with screws, bolts, welds and the foundation anchoring.

5.2.5 Seismic analysis

Vessels and heat exchangers are classified in accordance with their functions for the load case earthquake. A difference is made between Class I and Class II (A) components. Class I components are components which must be able to perform a safety-related function during and after or only after a DBE and SSE. Class II (A) components are components which are not required to perform a safety-related function during or after an SSE, but whose failure would, however, be an hazard to a Class I component. Additional to the loads due to earthquake other loads must be considered, such as dead weight, pressure, flow induced forces, etc. The protection objectives are defined of Class I components by the terms function,

tightness and stability, for Class II only tightness and stability.

To determine the loads and stresses caused by earthquakes different calculation methods may be used.

Quasi dynamic as well as dynamic methods are employed. As many of the vessels and heat exchangers are low-frequency, the response spectrum method is an adequate method. For this a response spectrum will be calculated for the horizontal and vertical directions. The spectra depends from the type of buildings, from the level of installation and from the damping value. The response spectrum shows the acceleration dependently of the frequency. To determine the eigen-frequencies and mode shapes, which must be known for the response spectrum analysis, calculation models on the bases of finite element programs are developed.

The displacements and forces and moments may be superimposed according to different methods; square root of the sum of the squares, group build up method and the 10 percent combination method.

The stress results are evaluated according to stress level C (for DBE) and to stress level D (for SSE).

5.2.6 Vibration analysis

At heat exchangers tubes subject to cross flow from experience vortex shedding frequencies and liftforces are observed.

The lift coefficient is used for the determination of the acting forces at the tube. Consequently the stresses of the whole tube caused by flow-induced forces can be determined. At still higher flow velocities there appears the effect "fluid-elastic coupling"; the velocities then occurring represent an upper limit.

For the flow-induced loads of the heating tubes due to vortex shedding, the margin between forcing frequencies and natural frequencies is sufficiently wide. The forcing frequencies are much lower than the natural frequencies of the parts of the heating tube.

The danger of vibrations due to "fluid - elastic coupling", especially in the upper regions of the steam generator, does not exist, because the actual flow velocity is substantially lower than the critical one.

6. Loads on vessels and heat exchangers from attached piping

A special item are the nozzle loads for connecting piping systems. The connection loads and moments are in many cases not available at the time of the first design. Therefore, one has to

define at the beginning of the calculation several maximum loads and moments, which are treated as an upper limit and which must not be exceeded at the later performed piping analysis. The formula utilized for determining loads and moments is based on experiments, calculations and assessments of other facilities and has been borne out in a modified form. These loads are also used for dimensioning nozzles.

7. Technical guidelines

Besides the already mentioned calculation methods, the finite element method is especially suitable for the more complex calculations that can not be analysed according to the technical guidelines. Its use is very efficient with corresponding experience, being however cost and time intensive.

The following technical guidelines are especially used for design dimensioning:

AD - guidelines	(Germany)
TRD	(Germany)
DIN - Standards	(Germany)
VDI - Guidelines	(Germany)
ASME Code	(USA)
British Standard (BS)	(England)

For the structural parts of vessels and heat exchangers the following guidelines are mainly used:

Vessel wall	- AD, ASME, BS 1515
Tube plate	- AD, ASME, BS 1515
Nozzles - reinforcement	- AD, TRD, ASME, BS
Flanges	- AD, DIN, ASME, BS 1515
Supports	- DIN, ASME, BS 1515



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-17

P.P. 157 - 166

PUC/RJ

LIMITE INFERIOR DA CARGA DE COLAPSO DE VASOS AXISSIMÉTRICOS

João de Deus Fonseca Neto

Departamento de Estruturas

Universidade Federal do Piauí

Nelson Francisco Favilla Ebecken

COPPE-Civil

Universidade Federal do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

Este trabalho trata da análise limite rígido-plástica de cascas de revolução sujeitas a carregamento rotacionalmente simétrico. Uma vez efetuado o processo de discretização pelo MEF, o problema da análise limite se reduz a aplicação de técnicas de programação não-linear, onde a técnica de minimização sequencial sem restrições (SUMT) foi adotada. Para aproximação estaticamente admissível, apresentam-se resultados de limites inferiores da carga de colapso e comparam-se os resultados com os existentes na literatura.

SUMMARY

This work is concerned with rigid-plastic limit analysis of shells of revolution subject to rotationally symmetric loadings. After assembling the finite elements, the limit analysis program is reduced to a simple application of the non-linear programming technique, where the sequential unconstrained minimization technique (SUMT) is utilized for the statically admissible approach. Lower bounds of the collapse loads are presented and compared with the results described in the literature.

1. Introdução

Para o estudo da carga limite de cascas de revolução submetidas a cargas axissimétricas Biron e Hodge [1,2] construíram os campos estaticamente admissíveis dependendo de um sistema de parâmetros arbitrários e obtiveram numerosos resultados, mostrados em [3-5]. A formulação completa que se vale do método dos elementos finitos é apresentada por Hodge e Belytscho [6] e Maier [7].

Neste trabalho utiliza-se o método dos elementos finitos empregando-se elementos tronco-cônicos de tal forma que fique preservada a estrutura de implementação computacional própria do método. Utiliza-se ainda programação não-linear através da técnica de minimização sequencial sem restrições [9] e métodos que usam variável métrica como sugerido em [8].

A formulação estática apresentada parte de valores fixados, dentro de uma parametrização que satisfaz as equações de equilíbrio, das tensões circunferenciais e da carga de ruína. É exigido do campo de tensões ser plasticamente admissível apenas em cada nó. Adota-se uma formulação de "cascas sandwich" com o critério de plasticidade de von Mises [10,11].

2. Relações Fundamentais

Em função das variáveis reduzidas, as equações de equilíbrio de casca de revolução [11,12] para o caso particular de casca cônica são:

$$\frac{d}{dS} (Sn) - n_0 - S \rho_\phi = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dS} (Sq) + n_0 \operatorname{tg} \alpha + 2S \rho = 0 \quad (2)$$

$$h \frac{d}{dS} (Sm) - h m_\theta - Sq = 0 \quad (3)$$

com as seguintes variáveis reduzidas:

$$\begin{aligned} n &= \frac{N_\phi}{N_0} ; n_\theta = \frac{N_\theta}{N_0} ; m = \frac{M_\phi}{M_0} ; m_\theta = \frac{M_\theta}{M_0} ; \\ h &= \frac{M_0}{N_0 \cdot L} = \frac{e}{4L} ; q = \frac{Q_\phi}{N_0} ; \rho_\phi = \frac{P_\phi \cdot L}{N_0} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\rho = \frac{PL}{2N_0} ; r = \frac{R}{L} ; r_1 = \frac{R_1}{L} ; r_2 = \frac{R_2}{L}$$

onde L é um comprimento característico da casca, e a sua espessura, M_0 , N_0 respectivamente o momento e o esforço normal limites por unidade de comprimento. $M_0 = \sigma_0 \cdot e^2 \cdot 4$ e $N_0 = \sigma_0 \cdot e$ onde σ_0 é a tensão de tração elástica limite do material.

Adotam-se os critérios de casca sandwich de von Mises expressos em função das resultantes reduzidas [11].

$$(n_\theta - m_\theta)^2 - (n_\theta - m_\theta)(n - m) + (n - m)^2 \leq 1 \quad (5)$$

$$(n_\theta + m_\theta)^2 - (n_\theta + m_\theta)(n + m) + (n + m)^2 \leq 1 \quad (6)$$

3. Formulação dos Elementos Finitos

Segundo o primeiro teorema fundamental da análise limite: Se existe um campo de tensões σ , o qual é estaticamente admissível para a carga $\lambda \cdot P$, e se λ'' determina o colapso, então $\lambda \leq \lambda''$ [13]. Portanto a carga limite real será a maior das cargas correspondentes ao campo de tensões estaticamente e plasticamente admissível [14-16].

Deve-se dar especial atenção aos modos de transmissão de tensões e supor um campo paramétrico de tensões σ para cada elemento k :

$$\sigma^k = S^k b^k + T^k c^k \quad (7)$$

$$\sigma^k = R^k a^k \quad (8)$$

B. Fraeijs de Veubeke [17] demonstra que os parâmetros b^k e c^k que equilibram respectivamente os campos que verificam as equações de equilíbrio homogêneos ($S^k b^k$) e as forças de superfície ($T^k c^k$), são arbitrários e independentes do princípio da energia complementar.

O vetor de forças generalizadas é expresso em função dos parâmetros b^k e c^k como segue:

$$g_1^k = C_b^k b^k + C_1^k c^k \quad (9)$$

Sendo os modos de carga de superfície $T^k C^k$ exteriorizadas por um sistema de forças generalizadas suplementares, pode-se escrever:

$$\dot{g}_2^k = C_2^k \dot{c}^k \quad (10)$$

Combinando-se as expressões anteriores tem-se:

$$\dot{g}^k = C^k \dot{a}^k \quad (11)$$

onde C^k é a matriz de conexão de forças do elemento k .

O relacionamento de forças devido as conexões segue diretamente da consideração do trabalho virtual das cargas externas atuando ao nível de nós. Se g denotar a matriz coluna dessas cargas, conjugadas com o vetor \dot{q} de velocidade de deslocamento geral da estrutura de Nq componentes; a o vetor do conjunto de parâmetros utilizados de Na componentes. tem-se:

$$\dot{q}^k = L^k \dot{q} \quad e \quad a^k = M^k a \quad (12)$$

onde L^k , M^k são as matrizes de localização.

A potência de dissipação total será a soma das potências de dissipação de cada elemento.

$$\dot{p} = \sum_k \dot{q}^k T \cdot g^k = \dot{q}^T \sum_k L^k T g^k = \dot{q}^T g \quad (13)$$

logo $g = Ca$ com:

$$C = \sum_k L^k T C^k M^k ; \quad g = \sum_k L^k T g^k \quad (14)$$

Essas equações mostram como as cargas num elemento isolado somam para equilibrar as cargas externas nos nós.

Em função dos parâmetros a definidos em (8), os critérios (5), (6) ficam:

$$\frac{1}{2} a^T V_1^k a \leq 1 ; \quad \frac{1}{2} a^T V_2^k a \leq 1 \quad (15)$$

De acordo com o primeiro teorema da análise limite e as equações (11) e (15) o problema se identifica com a programação matemática seguinte: maximizar $\lambda \{a\}$ sob as condições

$$g = \lambda \bar{g} = Ca \quad e \quad \frac{1}{2} a^T V^k a \leq 1 \quad (16)$$

4. Eliminação Automática dos Parâmetros Dependentes

Seja N_q a dimensão do vetor de forças generalizadas globais g , N_a o número total de parâmetros utilizados, N_r o número de modos rígidos da estrutura.

O número de parâmetros dependentes a_d do sistema a é igual ao rank da matriz C .

$$N_d = N_q - N_r \quad (17)$$

Como N_d é o número de variáveis dependentes da estrutura, sua variação virtual deve fornecer N_d equações de equilíbrio dependentes que determinam N_d parâmetros dependentes a_d . Esses últimos podem ser calculados em função dos N_i parâmetros independentes \bar{a} .

$$N_q \left\| \begin{array}{c} \lambda \bar{g}_f \\ \dots \\ g_r \end{array} \right\| = \begin{array}{c} N_d \\ \vdots \\ N_r \end{array} \left\| \begin{array}{cc} \overbrace{C_{ff}}^{N_d} & \overbrace{C_{fr}}^{N_i} \\ \dots & \dots \\ \underbrace{C_{rf}} & \underbrace{C_{rr}} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} a_d \\ \dots \\ \bar{a} \end{array} \right\| = N_a \quad (18)$$

onde \bar{g}_f são forças unitárias aplicadas, g_r as reações correspondentes aos modos rígidos. Deve-se observar que o número de deslocamentos livres é igual ao número de parâmetros dependentes, dessa forma C_{ff} é quadrada e não singular, logo:

$$a = \lambda a_0 + H \bar{a} \quad (19)$$

$$g_k = (C_{rr} - C_{rf} \cdot C_{ff}^{-1} \cdot C_{fr}) \bar{a} + C_{rf} \cdot C_{ff}^{-1} \cdot \lambda \bar{g}_f \quad (20)$$

e obtém-se um problema mais simples com novas grandezas.

maximizar λ ; (\bar{a}) sujeito as condições

$$\frac{1}{2} (\lambda^2 B^k + \lambda \bar{a}^T Z^k + \lambda \cdot Z_1^k \bar{a} + \bar{a}^T W^k \bar{a}) \leq 1 \quad (21)$$

5. Programação não linear

O problema (21) é uma forma especial de programação não linear. Utiliza-se a técnica de minimização sequencial sem restrições (SUMT) de Fiacco et Mc Cormick [9]. Adotando a função de penalização interna do tipo:

$$\ell(\bar{a}, \lambda, p) = f(\bar{a}, \lambda) + p \sum \frac{1}{h(\bar{a}, \lambda)} \quad (22)$$

$$f(\bar{a}, \lambda) = -\lambda \quad (23)$$

p - parâmetro sequencial, e as restrições:

$$h(\bar{a}, \lambda) = 1 - \frac{1}{2} (\lambda^2 B^k + \lambda \bar{a}^T Z^k + \lambda \cdot Z_1^k \bar{a} + \bar{a}^T W^k \bar{a}) \quad (24)$$

Métodos que usam variável métrica são métodos eficientes e tem sido largamente utilizados. O método gradiente de Davidon-Fletcher-Powell é o mais importante. Utiliza-se o eficiente método da seção áurea, busca unidimensional, o qual após algumas iterações é equivalente ao método de Fibonacci.

A minimização global da estrutura será dada por:

$$|\ell/f - 1| < 0.005 \quad (25)$$

6. Elemento de Equilíbrio Tronco-Cônico

Supõe-se que a carga de superfície p_ϕ não exista, o campo de tensões da casca cônica

$$\sigma^T = \begin{bmatrix} n_0 & m_0 & n & m \end{bmatrix} \quad (26)$$

satisfaz as equações (1), (2), (5) para $\sigma = R \alpha$, com os valores fixados de n_0 e m_0 tem-se:

$$n = a_1 + a_3 / \cos \alpha \quad (27)$$

$$q = -a_1 \operatorname{tg} \alpha - a_4 / \cos \alpha - \rho \cdot S \quad (28)$$

$$m = -a_1 \cdot S \cdot \operatorname{tg} \alpha / 2h + a_2 - a_4 / \cos \alpha + a_5 / \cos \alpha - \rho S^2 / 3h \quad (29)$$

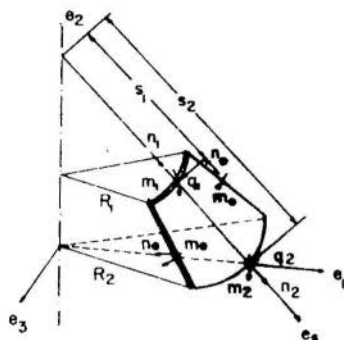


Fig. 1 - Elemento de equilíbrio tronco cônico

Os esforços de superfície definidos sobre as facetas perpendiculares a e_s são:

$$g^T = \begin{bmatrix} n_1 & q_1 & m_1 & n_2 & q_2 & m_2 & \rho \end{bmatrix} \quad (30)$$

e $g^k = c^k a^k$ de acordo com (27), (28), (29), sendo a sétima força generalizada tomada igual a própria pressão de ruína. Existirá uma só relação.

$$r_1 (q_1 \cos \alpha - n_1 \sin \alpha) + r_2 (q_2 \cos \alpha - n_2 \sin \alpha) = \rho (r_2^2 - r_1^2) \quad (31)$$

encontrada através da integração da equação de equilíbrio (2) sobre e_s . As outras equações de equilíbrio determinam as tensões n_0 e m_0 [8].

$$(r_2 - r_1) n_0 = r_1 n_1 + r_2 n_2 \quad (32)$$

$$h (r_2 - r_1) m_0 = (r_2 - r_1) (r_2 q_2 - r_1 q_1) / 2 \cos \alpha -$$

$$- h (r_2 m_2 + r_1 m_1) - (r_2 - r_1)^3 / 6 \cos^2 \alpha \quad (33)$$

7. Resultados Numéricos

Analisa-se uma casca cônica engastada, com inclinação de $63^{\circ}27'$ e uma relação entre a espessura e quatro vezes o comprimento característico de 0.01. Obtem-se diretamente a variável reduzida $\rho = PL/2 \cdot \sigma_0$ e de onde calcula-se o valor da carga crítica P . O critério de casca sandwich imposto aos pares em cada nó apresenta um número menor de restrições do que outros métodos. É também o número de variáveis efetivas trabalhadas durante o processo de minimização é menor. Os resultados numéricos estão na Tabela 1.

Tabela 1 - Cascas Cônicas Submetidas à Pressão Uniforme

	ρ	Nº de Variáveis Efetivas	Nº de Elementos	Nº de Restrições
Chwala e Birom	0.6303	47	4	88
Método	0.6462	13	4	16
Proposto [8]	0.6270	25	8	32
	0.6205	31	10	40

8. Conclusões

Apesar da análise elastoplástica ser atualmente efetuada com precisão pelo método dos elementos finitos com a utilização de algoritmos incrementais-iterativos, na prática surge a necessidade de se estabelecer métodos alternativos que possibilitam a determinação da carga de colapso de forma mais eficiente. Para tal no presente trabalho pretendeu-se discutir a performance de uma dessas técnicas.

Como o critério de plasticidade é imposto em um número finito de pontos o valor do parâmetro da carga crítica pode decrescer quando refina-se a discretização. A análise limite pelo método estático, impõe que o campo de tensões não viole o critério de plasticidade em ponto algum do meio contínuo da estrutura. Essa condição é relaxada permitindo que o campo de tensões viole o critério empregado no interior do elemento.

Pode ser necessário então, verificar o critério em um número maior de pontos no interior do elemento. Sugere-se

discretizar a estrutura em um número moderado de elementos, todos respeitando a geometria natural da estrutura, e determina-se aproximadamente a zona que produzirá a ruína. A seguir deve-se refinar as zonas críticas para se obter um resultado mais convergente.

A melhoria da performance do método pode ser conseguida utilizando-se elementos mais elaborados, representando melhor a geometria. O progresso nos métodos de programação linear e não-linear trará uma melhor utilização dessa formulação.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Biron e P.G. Hodge Jr., "Limit Analysis of Rotationally Symmetric Shells Under Central Boss Loading by a Numerical Method". J. Appl. Mech. 34, 644-650 (1967).
- [2] A. Biron e P.G. Hodge Jr. "Non-Linear Programming Method for Limit Analysis of Rotationally Symmetric Shells" Int. J. Non-Linear Mech. 3, 201-213 (1968).
- [3] U.S. Chwala e A. Biron. "Limit Analysis of Shells of Revolution of Arbitrary Shape Under Pressure". Rapport N° 1775. Labor de Rech. et d'Essais de Materiaux. Ecole Polytechnique de Montreal (1969).
- [4] A. Biron e U.S. Chwala. "Numerical Method for Limit Analysis of Rotationally Symmetric Shells". Bull Acad. Polon. Sci. 18, 109-117 (1970)
- [5] A. Biron e G. Chasleux. "Limit Analysis of Axisymmetric pressure vessel intersection of arbitrary shape". Int. J. Mech. Sci. 14, 25-41 (1972).
- [6] P.G. Hodge Jr e T. Belytscho, "Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates", J. Appl. Mech. 35, 797-802 (1968).
- [7] G. Maier. "A Quadratic Programming Approach for Certain Classes of Non-linear Structural Problems". Mecc. 3 (1968).

- [8] Nguyen Dang Hung, M. Trapletti e D. Ransart. "Bornes quasi-inferieures et bornes superiores de la pression de ruine des coques de revolution par la methode des elements finis et par la programmation non-lineaire". Int. J. Non-Linear Mechanics, 13, 79-102 (1978)
- [9] A.V. Fiacco e G.P. Mc Cormick, Non-linear Programming Sequential Unconstrained Minimization Technics. Wiley. New York (1968)
- [10] P.G. Hodge Jr. "The Mises Yield Condition for Rotationally Symmetric Shells". Q. appl. Math 18, 305-311 (1961)
- [11] P.G. Hodge Jr. Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells. Prentice Hall New York (1963)
- [12] W. Flügge. Stress in Shells. Springer. Berlin (1960)
- [13] Gianpietro Del Piero. "Variational Methods in Limit Analysis". Metodos Variacionais em Mecânica do Sólido. Laboratório de Cálculo CBPF. 3, 3-48 (1980)
- [14] Ch. Massonnet e M. Save. Calcul Plastique des Constructions, 2, CBLIA. Bruxelles (1963)
- [15] L.M. Kachanov. Foundation of the Theory of Plasticity. North - Holland - Amsterdam (1971)
- [16] W. Olszak e A. Sawczuk. Inelastic Behavior in Shells. Noordheff. Groningen (1967)
- [17] B. Fraeijs de Veubeke. "Displacement and equilibrium models in the finite element methods". Cap. 9 Stress Analysis. Ed. by O. Zienkiewicz. Wiley. New York (1965)



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-18

P. P. 167 - 179

PUC/RJ

OPTIMIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS
SUBJECTED TO DYNAMIC LOADINGS

Halei Fagundes de Vasconcelos

DTM/CT - UFPb

Stan Taylor

The University of Birmingham - U.K.

SUMÁRIO

A otimização de um sistema mecânico requer a definição de uma função de mérito a ser minimizada e de um conjunto de funções de restrição que assegurem o funcionamento do sistema otimizado. Estas funções são definidas a partir das características físicas do sistema, cujo comportamento dinâmico pode ser previsto pelo método dos elementos finitos, necessitando assim um esforço de computação elevado, o que aumenta os custos do projeto. Um procedimento geral para abordar tais problemas é apresentado.

SUMMARY

The optimization of a mechanical system requires the definition of a merit function to be minimized and a set of constraining functions for ensuring the feasibility of the minimum. Those functions are defined by the physical characteristics of the system, whose dynamic behaviour can be predicted by the finite element method, thus requiring a fairly large computer effort, which increases the design costs. A general procedure for dealing with those problems is presented.

1. Introduction

The process of designing a mechanical system is started by defining its overall objective. This is related to the mechanical behaviour of the system, as defined in terms of parameters that characterize its structure and the externally applied loadings, leading to the formulation of a mathematical model for describing this behaviour. The classical theory of elasticity can be used for predicting the behaviour of systems whose structures are fairly simple [1], otherwise it is necessary to employ the flexibility method [2] or the finite element method [3,4,5] to produce a suitable simulation of the system mechanical behaviour. The flexibility method requires a relatively small computer effort as compared with the finite element method. However, the latter is more versatile, specially for describing the displacements of complicated and redundant structures [6].

Improvements in the system performance can be introduced at the early stages of its design by a trial and error process. The feasibility of the system must be ensured throughtout this process of designing, what is achieved by the satisfaction of geometrical, material and functional constraints as appropriate. This heuristic approach for the desgning process offers to the designer the possibility of taking all the important design decisions but has the drawback of making difficult and time consuming to design complicated mechanical systems, subjected to many constraints and defined by many variables. This situation is overcome using a numerical optimization method, consisting of the maximization or minimization of a particular aspect of the system behaviour while its feasibility is ensured. Also, this method allows for the inclusion of a fairly large number of design variables in the design procedure.

Research regarding the application of optimization numerical methods to the design of mechanical systems have been developed [7,8,9], mainly for minimizing the weight of structures subjected to static [10,11] or dynamic [12,13] loadings. A great emphasys has been given by these developments to the computing efficiency of the optimization programs. This can be very low when the finite element method

is used but it is expected that the introduction of faster and more efficient computing machines will contribute to the application of the optimization techniques to an increasing variety of mechanical system designs.

A general procedure for the formulation and solution of the problem of optimizing mechanical systems is presented in this paper. Constraints to the characteristics of the structure of the system, to its externally applied loadings and to its dynamic response are included in the optimization procedure whose applicability is demonstrated by optimizing both the loading and structure of a high energy rate forming machine [14].

2. Dynamic response of a mechanical system

The dynamic equilibrium of the structure of a mechanical system with n degrees of freedom may be expressed by Lagrange's equation in matrix form as follows[15]:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right\} - \left\{ \frac{\partial T}{\partial u} \right\} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial u} \right\} = \{F\} \quad (1)$$

where T and V are the kinetic and potential energies of the structure, respectively, $\{u\}$ and $\{\dot{u}\}$ are the displacements and velocities at element nodes and $\{F\}$ is a set of non-conservative forces.

Assuming that the structure is elastic and linear and introducing the global mass and stiffness matrices, $[M]$ and $[K]$, respectively, the above equation yields:

$$\frac{d}{dt} [M] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (2)$$

Therefore, for $\{F\}$ consisting of the viscous damping forces $- [D] \{\dot{u}\}$ and the externally applied loading $\{R\} = \{R(t)\}$, equation (2) may be written as:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [D] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{R\} \quad (3)$$

The condition of free and undamped dynamic equilibrium is expressed by:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = [0]$$

from where are extracted the first $m \leq n$ mode shapes $[\Phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2 \dots \{\phi\}_m]$ and natural frequencies $[\omega] = [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_m]$. The m mode shapes permit the introduction of the generalized coordinates $\{r\} = [r_1 r_2 \dots r_m]^T$ which are defined by $\{u\} = [\Phi] \{r\}$, and the generalized mass matrix $\mathcal{M} = [\Phi]^T [M] [\Phi]$, the generalized damping matrix $\mathcal{D} = [\Phi]^T [D] [\Phi]$, the generalized stiffness matrix $\mathcal{K} = [\Phi]^T [K] [\Phi]$, and the generalized force matrix $\mathcal{R} = [\Phi]^T \{R\}$. Therefore, equation (3) can be transformed into the following expression:

$$\mathcal{M} \{\ddot{r}\} + \mathcal{D} \{\dot{r}\} + \mathcal{K} \{r\} = \mathcal{R} \quad (4)$$

which, when the system is assumed to be undamped becomes:

$$\mathcal{M} \{\ddot{r}\} + \mathcal{K} \{r\} = \mathcal{R} \quad (5)$$

The above system of equations has order m and is uncoupled, as \mathcal{M} and \mathcal{K} are diagonal matrices [16]. This transformation to generalized coordinates allows for a considerable economy in computing as only the first few mode shapes and natural frequencies are usually sufficient for an acceptable evaluation of the dynamic response of the structure.

The general solution of equation (5) is:

$$\begin{aligned} \{r\} = \{r(t)\} &= [\cos \omega t] \{a\} + [\sin \omega t] \{b\} + \\ &+ [\omega]^{-1} \mathcal{M}^{-1} \int_0^t [\sin[\omega(t-\tau)]] \mathcal{R}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

where $\{a\}$ and $\{b\}$ are evaluated from the conditions of the structure at $t = 0$, $[\cos \omega t] = [\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \dots \cos \omega_m t]$ and $[\sin \omega t] = [\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \dots \sin \omega_m t]$. The element node displacements in the time domain are obtained by pre-multiplying both sides of equation (6) by $[\Phi]$. With $\{u\}$ the stress distribution in the structure can be evaluated without major computer effort.

The total energy E_t which is transferred to the structure is given by:

$$E_t = V + T = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} + \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [M] \{\dot{u}\}$$

or, using generalized coordinates:

$$E_t = \sum_{j=1}^m E_j = \frac{1}{2} \{r\}^T \mathcal{K} \{r\} + \frac{1}{2} \{\dot{r}\}^T \mathcal{M} \{\dot{r}\} \quad (7)$$

where E_j is the energy transferred to the j th mode of vibration. The total energy E_t is a powerful indicator of the structure dynamic behaviour. Equation (7) permits its evaluation with a fairly small computer effort and with an accuracy which depends on the number m of modes considered in the analysis.

3. Formulating the optimization procedure

The optimization of a mechanical system is started by the definition of its basic objective and the constraints imposed upon its mechanical characteristics, as expressed in terms of the geometrical, material and functional parameters which define the system. The basic objective is expressed by the objective function $P = P(X)$, where X is a vector whose p components x_i , $i = 1, 2, \dots, p$, are the parameters selected to define the system, henceforth referred to as the optimization variables. The constraints included in the optimization procedure must reflect the limitations of the geometrical, material and functional characteristics which are relevant to the feasibility of the design. Those constraints should translate limitations of the strength and displacements of structural components of the system, limitations of its dynamic response and limitations of the shape of the applied loadings. Each constraint can be defined by an upper limit L_U , by a lower limit L_L , or both. In the first case are included the strength and the dynamic response of the structure while in the second case are included the efficiency, the energetic capacity and the loading characteristics of the structure. Geometrical boundaries are included in the third case. After simple algebraic transformations those constraints

can be expressed by $g_j = g_j(X) > 0$, $j = 1, 2, \dots, r$, where r is the number of constraints. The optimization variables are related to geometrical and material characteristics of the structure of the system and to characteristics of its loadings. Usually these variables are continuous. However, when they vary discretely, as in case of material characteristics, this problem can be avoided by approximating such a variation by a continuous one.

4. Objective function and constraints

The objective function $P = P(X)$ should represent a characteristic of the system whose extreme defines its optimum performance. This extreme can be the absolute maximum or the absolute minimum of P within the the feasibility region defined by the constraints g_j , $j = 1, 2, \dots, r$. Without loss of generality only the minimization of P will be considered henceforth. One of the major difficulties which is faced by a numerical optimization algorithm is how to find out the absolute extreme of P . Restarting the optimization process from different initial points may overcome this difficulty but can be too expensive in computational terms. Therefore, auxiliary methods, such as establishing a "dialogue" between the computer and the designer can be helpful, mainly when the finite element method is employed for simulating the mechanical behaviour of the structure of the system and the former is modified by the optimization procedure. An important decision during the optimization of a mechanical system is the choice of the characteristic to be optimized and the constraints to be included in the optimization process. The designer must make this choice with good judgement, otherwise little profit from the optimum solution will be obtained. There is no general rule to make such a choice, which should suit each particular problem. However, a few considerations regarding this problem can help in choosing the objective function and the constraints. First of all, a clear definition of which aspect of the system behaviour must be optimized and which of its characteristics must be used for defining the feasibility region of the project, is necessary. The next step is the definition of the objective func-

tion and constraints as continuous functions of X . These definitions may require approximations. Finally, it is worth to mention that not always must the objective function reflect the main objective of the optimization process. For example, a good stress distribution among the members of a structure can be achieved by minimizing its weight.

5. Optimization variables

Various characteristics of the structure and loading of the system are selected to compose the set X of optimization variables. Each component x_i , $i = 1, 2, \dots, p$, of X must be independent of the remaining variables and its influence on the system behaviour should be relevant and, if possible, a pronounced one. This relevance is closely related to the overall objective of the optimization of the system and must be weighted carefully from both, experimental and analytical data based on a model of the system. In fact, testing its mathematical model may supply the necessary information for accomplishing a good judgement of each optimization variable influence on the system behaviour while obtaining data from preliminary experimental measurements may be too expensive. However, experimental data obtained from an existing similar system may supply a good direction for choosing the variables. When a pronounced effect of a variable on the behaviour of a the system is not obtained expontaneously it may be accomplished by scaling the variable properly. This must be done with care in order to avoid too big variations of P and g_j , $j = 1, 2, \dots, r$, what could produce sharp valleys and great curvatures in these functions, thus creating numerical difficulties for the minimization algorithm [17].

6. The optimization procedure

The optimization procedure used in this investigation consists of successive minimizations of a series of penalty functions $\psi_k = \psi(X, r_k)$, $k = 1, 2, \dots$, where r_k is a decreasing penalty factor. The k th penalty function is defined by the following expression:

$$\psi_k(X, r_k) = P(X) - r_k \sum_{j=1}^r G_j(X) \quad (10)$$

where,

$$G_j(X) = \ln g_j(X) , \quad \text{for } g_j(X) > \xi > 0 \quad (11)$$

and,

$$G_j(X) = -\left(\frac{3}{2} - \ln \xi\right) + 2g_j(X)/\xi - [g_j(X)]^2/2\xi^2, \quad \text{for } g_j(X) \leq \xi \quad (12)$$

The parameter ξ is a transition value for substituting the action of a constraint by a quadratic function when the former gets too close to violation. Therefore the value of ξ can be set to 10^{-4} for numerical accuracy in equations (11) and (12) and because such a value would be 0.01% of the maximum value of $g_j(X)$, when it is scaled to be not greater than unity.

The k th penalty factor defines the k th penalty function whose local minimum is $\bar{\psi}_k = \psi(\bar{X}_k, r_k)$. The solution $\bar{X}_k = [\bar{x}_{k1} \ \bar{x}_{k2} \ \dots \ \bar{x}_{kp}]^T$ is used as the starting point for minimizing the $(k+1)$ th penalty function, whose penalty factor is defined by $r_{k+1} = 10^{-k/3} r_k$, while r_1 is set to the smaller of the two following values: 0.01 or 0.01ESTM, where ESTM is an estimate of the minimum of $P(X)$. After the minimization of a series of successive penalty functions a vector \bar{X}_k can be accepted as the minimizing vector when the difference between $\bar{\psi}_k$ and $F(\bar{X}_k)$ reaches a few per cent. The above development is explained in full in [14].

The optimization procedure employs a standard numerical minimization subroutine [18] for minimizing the penalty functions. Prior to the first call of this subroutine an evaluation of the mechanical behaviour of the system permits the setting of the boundaries for the constraints as required. Thus, the starting of the optimization process from within the feasible region is ensured.

7. Application

The above technique was used to optimize the loading and the structure of an impact forming machine [14]. The objective function was the fraction of the energy which is transmitted to those modes of vibration of the structure

whose natural frequencies are within the audible range. Thus,

$$P(X) = \sum_{j=q}^m E_j/E_t \quad (13)$$

where m is the number of mode shapes included in the analysis, q is the order of the lowest audible natural frequency and E_j and E_t are the individual and total modal energies transmitted to the structure by the working loadings, as defined earlier. Geometrical constraints were handled by a feature of the minimization routine permitting the application of boundaries to the optimization variables [19]. Thus, the association of these with the geometrical characteristics of the structure which should be modified by the optimization process set automatically the boundaries for the former. Therefore these constraints were not included in the penalty function as defined by equation (10). The remaining constraints were separated in two sub-sets. One of them was linear and ensured the feasibility of the loadings, which consisted of impulses shaped like trapezes [20]. The other set of constraints was non-linear and ensured that that the energy transmitted to each individual mode of vibration would not increase beyond an acceptable limit as a decrease in the objective function would not warrant a decrease in all E_j 's simultaneously.

Initially the loading only was optimized, without modifications in the machine structure. This phase of the optimization process was initiated from four different starting points in order to verify whether the solution was a local minimum or not. Four penalty optimizations were carried out with four penalty surfaces each. Only one finite element analysis of the structure was required during this phase of the optimization process and the defined optimum loading was employed for its second phase. This consisted of optimizing the structure without modifying the loading. During this phase a great computer effort was required as each new set of optimization variables defined a new structure, thus requiring a new finite element analysis of the latter. However an economizing algorithm was incorporated in the optimization program for taking advantage of an eventual reuse of a previously made finite element analysis. This would occur whenever

a set of optimization variables matched another one previously defined. Also, trial vectors were saved from every finite element analysis of the structure for facilitating the next evaluation of mode shapes and natural frequencies. Four penalty surfaces were employed for this phase of the optimization process. Finally an optimization of the loading applied to the optimized structure was carried out. No further finite element analysis of the structure was required. The overall results of the optimization process are listed in Table 1.

Table 1. Optimization Results

Trapezoidal Pulse Characteristics (ms)						
	duration	rising time	decaying time			
Initial value	1.00000	0.33000	0.33000			
Optimum value	1.99998	0.76378	0.76359			
Characteristics of the Structure						
	foundation rigidity (kN/m ²)	anvil thickness (m)	upper columns diameter (m)	upper plate thickness (m)	lower col. int. diameter (m)	
Initial	4.200	0.205	0.076	0.100	0.127	
Optimum	4.179	0.307	0.076	0.150	0.122	
Lower lim.	84.0	0.102	0.038	0.050	0.102	
Upper lim.	8.5x10 ³	0.307	0.114	0.150	0.152	
Modal Energies (J)						
Mode	5th	6th	7th	13th	14th	17th
Initial	2.0072	0.0136	0.0000	0.3428	12.5099	5.9382
Optimum	0.1594	0.0000	0.0154	0.0306	0.0505	0.1401
Objective Function (J)						
Initial value	20.8817 (11.30%)					
Optimum value	0.3760 (0.074%)					

8. Conclusions

The optimization procedure described above is a useful tool for helping in the design of complex mechanical systems subjected to dynamic loadings and taking into account a fairly large number of constraints. It can handle the parameters which define the loadings and the structure of the system and its economizing possibilities permit the use of the finite element method for predicting the system mechanical behaviour at a reasonable computer effort. A more direct approach for minimizing the objective function subjected to constraints could be employed, possibly with less computer effort than the penalty function method, the choice of the latter being only a matter of convenience for using an existing minimization routine and because of its flexibility in handling different types of constraints.

REFERENCES

- [1] Koenigsberger, F. and Tlustý, J., Machine Tool Structures, Vol. 1, Pergamon Press, (1970).
- [2] Taylor, S. and Tobias, S. A., "Lumped Constants Method for the Prediction of the Vibration Characteristics of Machine Tool Structures", Proceedings of the 5th Int. M.T.D.R. Conf., Pergamon Press, (1964).
- [3] Cowley, A. and Hinduja, S., "The Finite Element Method for Machine Tool Structural Analysis", Annals of the C.I.R.P., Vol. 19, (1971), pp. 171-181.
- [4] Hinduja, S., Analysis of Machine Tool Structures by the Finite Element Method, Ph.D. Thesis, UMIST, Manchester, U.K., (1971).
- [5] Kark, S.-K., Dynamic Analysis of Machine Tool Structures by the Finite Element Method, Ph.D. Thesis, UMIST, Manchester, U.K., (1974).
- [6] Vasconcelos, H.F., Taylor, S. and Sadek, M.M., "The Response of a TERE Machine to Impact Loading using Finite Elements", presented at the 7th ASME Conf. on Mechanical Vibrations, St. Louis, Mo., U.S.A., September (1979).

- [7] Fulton, R.E. and McComb, H.G., "Automated Design of Aerospace Structures", Jr. of Engineering for Industry, February (1974), pp. 217-225.
- [8] Fox, R.L., "Computers in Optimization and Design", ASME, 74-DE-31, (1974).
- [9] Fox, R.L. and Kapoor, M.P., "Structural Optimization in the Dynamic Response Regime: A Computational Approach", AIAA Jr., Vol. 8, No. 10, October (197), pp.1798-1804.
- [10] Brown, M.L., "Optimization of a Ribbed Table for Minimum Weight and Minimum Deflection", Jr. of Engineering for Industry, February (1976), pp. 30-33.
- [11] Khot, N.S., Venkayya, V.B. and Berke, L., "Experiences with Minimum Weight Design of Structures using Optimality Criterion Methods", AFFDL, Wright-Patterson Airforce Base, Ohio, U.S.A.
- [12] Venkayya, V.B. and Khot, N.S., "Design of Optimum Structures to Impulse Type Loading", AIAA Jr., Vol. 13, No. 8, August (1975), pp. 989-994.
- [13] Fox, R.L., Miura, H. and Rao, S.S., "Automated Design Optimization of Supersonic Airplane Wing Structures under Dynamic Constraints", Jr. of Aircraft (Synotics), Vol. 30, No. 6, June (1973), pp. 321-322.
- [14] Vasconcelos, H.F., Structural Optimization of an Impact Forming Machine by Finite Elements, Ph.D. Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, The Univ. of Birmingham, Birmingham, U.K., (1979).
- [15] Tauchert, T.R., Energy Principles in Structural Mechanics, McGraw-Hill, New York, (1974).
- [16] Przemieniecki, J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, (1968).
- [17] Fox, R.L., Optimization Methods for Engineering Design, Addison-Wesley, (1971).
- [18] Gill, P.E., Murray, W. and Pittfield, R.A., "The Implementation of Two Revised Quasi-Newton Algorithms for Unconstrained Optimization", National Physical Laboratory,

U.K., Report NAC 11, April (1972).

- [19] Gill, P.E. and Murray, W., "Minimization Subject to Bounds on the Variables", National Physical Laboratory, U.K., Report NAC 72, December (1976).
- [20] Vajpayee, S. and Sadek, M.M., "Analytical Study of Forming Efficiency as Influenced by the Process and the Machine Structure", Int. J. Prod. Res., Vol. 15, No. 2, (1977), pp. 205-218.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-19

P. P. 181 - 190

PUC/RJ

UM MÉTODO PARA O DIMENSIONAMENTO DE UMA VIGA EM BALANÇO SUBMETIDA A ESFORÇOS ALEATÓRIOS

Milton Gonçalves Sanchez

Prof. Assistente do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Moyses Szajnbok

Prof. Assistente Doutor do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

Em laboratório, estuda-se o comportamento de materiais à fadiga, aplicando quase sempre esforços senoidais de amplitude constante. Esses dados podem ser utilizados para o tratamento estocástico do fenômeno. Um dos métodos é o denominado RCA que incorpora a chamada Regra Linear ou de Miner do dano acumulado. Neste trabalho é apresentado um resumo da teoria e um programa de computador que executa os cálculos. Tomando-se como exemplo uma viga em balanço, é feita uma aplicação numérica, discutindo-se os resultados.

SUMMARY

The laboratory study of behavior of materials, related to fatigue, is generally done by applying constant amplitude sine wave excitation. The data can be used for the stochastic approach of the problem. One of the methods is called RCA, which incorporates the Linear Rule or Miner's Cumulative Damage Rule. A summary of the theory and a computer program for the calculations are here presented. A cantilever beam is studied as a numerical example and the results are discussed.

1. Introdução

Uma estrutura sujeita a tensões que variam com o tempo pode sofrer falha, ainda que submetida a tensões máximas inferiores à sua tensão de ruptura. Este fenômeno é denominado fadiga.

Os ensaios de fadiga, realizados em laboratório, costumam ter seus resultados apresentados sob forma de uma curva, denominada curva S-N, que relaciona a tensão S (do inglês - stress) a que o corpo de prova está submetido, com N - número de ciclos de aplicação da tensão necessários à ruptura. A figura 1 apresenta uma dessas curvas.

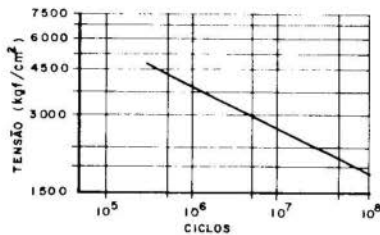


Fig.1. Curva S-N típica para uma liga de alumínio

O fenômeno de fadiga, para um dado material, sofre influência de muitos fatores [1], dentre os quais se destacam:

- o formato do corpo de prova, com ou sem pontos de concentração de tensões;
- o tamanho do corpo de prova;
- o processo de fabricação e o acabamento superficial dado à peça;
- o tipo de esforço aplicado, se de tração - compressão, flexão, flexão composta ou torção;
- a natureza ou caráter da tensão aplicada, em relação ao tempo.

Este último fator deve ser bem analisado pois os resultados disponíveis de ensaios consideram a aplicação cíclica de tensões senoidais de amplitude constante, e geralmente de frequência também constante. Eventualmente as tensões são aplicadas ao corpo de prova, sequencialmente, em blocos de

amplitude e frequência constantes, que variam discretamente a intervalos regulares de tempo ou de número de ciclos de aplicação. Entretanto, as tensões reais podem ser de natureza verdadeiramente aleatória.

Existem equipamentos de testes que aplicam, sobre corpos de prova, esforços aleatórios correspondentes à situação de serviço, mas a maioria das informações disponíveis ainda se refere a tensões aplicadas com lei senoidal. [2]

2. Métodos para a predição da vida útil

O conceito de acúmulo gradual considera que os danos causados pela aplicação de n_i ciclos de tensão ao material, sob certa amplitude de tensão S_i à qual corresponde a falha após N_i ciclos, de algum modo se somam aos danos provocados pela aplicação posterior de n_j ciclos sob outra tensão máxima S_j , correspondente à falha após N_j ciclos.

Os métodos de predição mais simples são os chamados Métodos de Dano Cumulativo Linear. Desta categoria destacam-se dois, o de Miner e o RCA.

a. O método de Miner

O método aplica-se aos casos de esforços com variação senoidal de amplitude constante, agrupados ou não em blocos temporais uniformes de esforços desse tipo. Como critério vale a regra de que o dano parcial seja expresso por n_i/N_i , onde n_i e N_i têm os significados já expostos. A condição de falha, ou ruptura, corresponde a $\sum (n_i/N_i) = 1$.

b. O método RCA

Nele é adotada uma abordagem probabilística, estendendo a regra de Miner e calculando somatórias de n_i/N_i , a partir de dados que dependem da distribuição dos picos de tensão na estrutura, da inclinação da curva $\log S - \log N$ e do coeficiente de amortecimento e frequência natural da estrutura.

3. O método de Miner, ou da regra linear

Miner [3], em 1945, adotou a hipótese fundamental de que o dano acumulado sob tensões cíclicas é proporcional à energia efetivamente absorvida pelo corpo, provocando defor-

mações permanentes na sua estrutura cristalina. O número de ciclos de tensão aplicado, expresso como porcentagem do número total de ciclos que causaria a falha ou ruptura naquele nível de tensão máxima, seria a própria fração da vida útil já dispendida. Deste modo, quando o dano total acumulado atingir 100%, o corpo sob tensão deve falhar ou romper, isto é, ocorrerá o aparecimento de uma trinca visível, o que impede o uso do objeto como parte de uma estrutura.

Miner fixou em 10^7 o número máximo de ciclos, N_{\max} ; a este valor corresponde uma tensão mínima que deve sempre ser excedida pelos picos das tensões cíclicas aplicadas para que ocorra falha por fadiga.

Designando por E a energia absorvida pelo corpo até a falha, e por e_i a energia absorvida pelo corpo durante n_i - ciclos sob tensão correspondente à falha em N_i ciclos, sendo

$$\frac{n_i}{N_i} = \frac{e_i}{E} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } \sum_{i=1}^m e_i = E \text{ resulta,}$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (1)$$

Miner procurou verificar empiricamente a validade da relação acima ensaiando 22 corpos de prova de alumínio. Dos resultados ele concluiu que a relação (1) era válida para o material utilizado nos ensaios.

Posteriormente, outros ensaios [4], [5] indicaram ser válida a relação (1) para outros materiais metálicos, inclusive aços.

Estudos cuidadosos [6] mostraram que a adoção da regra de Miner leva a resultados conservadores, em particular se a estrutura estiver submetida a tensões aleatórias.

4. O método RCA [2] ou de cálculo probabilístico do dano acumulado.

Vamos supor que os esforços externos são de natureza aleatória e com densidade espectral conhecida.

As hipóteses para a aplicação do método são:

- a estrutura solicitada pelo esforço aleatório comporta-se como um oscilador linear.
- o esforço externo é uma vibração aleatória com características de processo estacionário, ergódico e de banda estreita.

Considera-se, no fenômeno da fadiga, que os danos acumulados dependem da ocorrência de picos de tensão provocados pelo esforço externo aplicado. Admite-se que a distribuição de probabilidade da variável aleatória "picos de tensão", quantificada pela aceleração \ddot{x} sofrida pelo ponto da estrutura de abscissa x , seja a de Rayleigh, representada na Figura 2 e cuja expressão é

$$f(\ddot{x}) = \frac{\ddot{x}}{\sigma_{\ddot{x}}^2} \exp\left(-\frac{\ddot{x}^2}{2\sigma_{\ddot{x}}^2}\right) \quad (2)$$

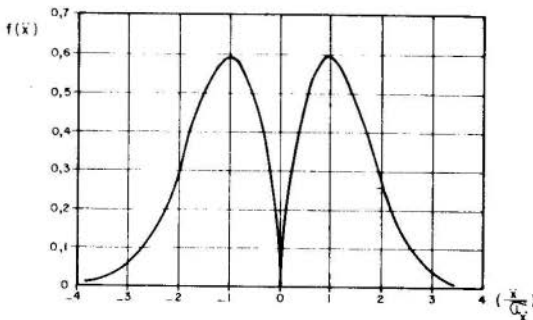


Fig.2. Função distribuição de probabilidades de Rayleigh

Da teoria do oscilador linear, a variância das acelerações resposta é dada por

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\pi \sqrt{n} S_{\ddot{x}_0} (1+4\zeta^2)}{4\zeta} \quad (3)$$

sendo $S_{\ddot{x}_0}$ a densidade espectral da aceleração imposta pelo esforço externo, suposta constante, e ν_n e ζ a frequência própria e o coeficiente de amortecimento da estrutura, respectivamente.

O número de ciclos n_i sofridos pela estrutura, sob um certo nível de resposta \ddot{x}_i , durante t segundos de aplicação do esforço externo é dado por $n_i = \nu_n t \int f(\ddot{x}) d\ddot{x}$ ou

$$n_i = \nu_n t \int \frac{\ddot{x}}{\sigma_{\ddot{x}}^2} \exp\left(-\frac{\ddot{x}^2}{2\sigma_{\ddot{x}}^2}\right) d\ddot{x} \quad (4)$$

Pelo critério de Miner,

$$\sum \frac{n_i}{N} = C \quad (5)$$

sendo C um número positivo que mede o dano acumulado tolerável, incorporando eventualmente um coeficiente de concentração de tensões. O máximo valor de C é a unidade, correspondente à falha da estrutura.

A curva S-N pode, para a grande maioria dos materiais, ser representada por uma equação da forma

$$N = \left(\frac{S_0}{S}\right)^\alpha \quad (6)$$

na qual S_0 é a tensão de ruptura do material sob um esforço do tipo a que está submetido. O expoente α pode ser obtido diretamente da curva S-N.

Chamando Y a tensão máxima admissível por unidade de aceleração, substituindo as equações (4) e (6) na (5) e considerando a variação contínua de \ddot{x} no intervalo $[0; \infty)$ pois um ciclo, no fenômeno da fadiga, corresponde a um ciclo completo de aplicação de tensões, vem

$$C = \int_0^{\infty} \frac{\nu_n (t/\sigma_{\ddot{x}}) (\ddot{x}/\sigma_{\ddot{x}}) \exp(-x^2/2\sigma_{\ddot{x}}^2)}{(S_o/\gamma\ddot{x})^\alpha} dx \quad (7)$$

Indicando por I a integral $\int_0^{\infty} x^{1+\alpha} \exp(-x^2/2) dx$ cujo valor é $2^{\alpha/2} \Gamma(\alpha/2 + 1)$, resulta finalmente

$$\gamma = \frac{S_o}{\sigma_{\ddot{x}}} \left(\frac{C}{\nu_n t I} \right)^{1/\alpha} \quad (8)$$

Num problema típico, C e t são fixados, α e S_o são conhecidos, ν_n e ζ são conhecidos ou estimados e $\sigma_{\ddot{x}}$ é calculado pela equação (3). O esforço externo é caracterizado pela densidade espectral $S_{\ddot{x}_o}$ e pela faixa de frequências abrangidas.

Usualmente a tensão máxima admissível S_{ad} é calculada - por

$$S_{ad} = 3 \sigma_{\ddot{x}} \gamma \quad (9)$$

adotando-se o corte usual de $3 \sigma_{\ddot{x}}$ na distribuição das acelerações da resposta.

5. O programa de computador

Para aplicar a teoria vista na seção anterior e evitar os tediosos cálculos envolvidos nas fórmulas (3) e (8), desenvolveu-se um programa de computador para resolver o problema de uma viga prismática de seção retangular em balanço, submetida a um esforço externo aleatório.

As principais etapas do procedimento computacional são as seguintes:

1. Leitura dos dados, compreendendo as propriedades mecânicas do material, a geometria da estrutura e as condições de operação.

2. Cálculo da integral I, função de α .
3. Cálculo da frequência natural, do desvio-padrão e da tensão admissível na seção do engastamento.
4. Comparação entre a altura da viga analisada e a altura - que resultaria adotando-se para o dimensionamento o método clássico de concentração de tensões, para a mesma tensão admissível.
5. Impressão dos dados e, para cada uma das alturas H especificadas, as correspondentes frequência própria $FREQ$, o desvio σ_x - DESVIO, a tensão admissível TADM e a altura H NORM correspondente pelo dimensionamento clássico.

O programa foi escrito em FORTRAN-IV-G e encontra-se à disposição dos interessados, com os autores.

6. Exemplo e Resultados

Para testar o programa foi resolvido o seguinte caso:

- Viga de liga de alumínio
- Comprimento da viga = 200 mm
- Tensão de ruptura = 4200 kgf/cm²
- Tempo de aplicação do esforço aleatório = 1500 min
- Tensão, da curva S-N, para o número médio de ciclos = 2450 kgf/cm²
- Coeficiente de concentração de tensões = 4
- Coeficiente de amortecimento = 0,05
- Densidade espectral do esforço externo, suposto ruído branco de faixa estreita = 10 m²/s².s
- Inclinação da curva S-N = variável, de 6,0 a 7,0.

O programa foi rodado para três valores de α : 6,0 - 6,5 e 7,0 e para alturas da viga entre 2,5 mm e 12 mm, variando de 0,5 em 0,5 mm.

A resolução dos três casos consumiu:

I/O 0,74 segundos e

CPU 0,46 segundos.

Como ilustração, apresenta-se a seguir a saída para o caso $\alpha = 6,5$.

ALFA = 6.5 INTEGRAL = 76.162

H	FREQ	DESvio	TADM	H NORM
2.5	50.9	89.9	493.7	2.24
3.0	61.1	98.4	490.1	2.66
3.5	71.3	106.3	468.8	3.06
4.0	81.5	113.7	459.3	3.46
4.5	91.6	120.6	451.0	3.86
5.0	101.8	127.1	443.8	4.26
5.5	112.0	133.3	437.3	4.65
6.0	122.2	139.2	431.5	5.04
6.5	132.4	144.9	426.2	5.42
7.0	142.5	150.4	421.4	5.81
7.5	152.7	155.7	416.9	6.19
8.0	162.9	160.8	412.8	6.57
8.5	173.1	165.7	409.0	6.95
9.0	183.3	170.5	405.4	7.32
9.5	193.5	175.2	402.0	7.70
10.0	203.6	179.7	398.9	8.07
10.5	213.8	184.2	395.9	8.44
11.0	224.0	188.5	393.1	8.81
11.5	234.2	192.8	390.4	9.18
12.0	244.4	196.9	387.9	9.55

Por limitação de espaço não se publicam os resultados correspondentes aos casos $\alpha = 6,0$ e $\alpha = 7,0$. Qualitativamente são semelhantes aos resultados acima e se encontram à disposição dos interessados com os autores.

7. Conclusões

O programa de computador desenvolvido atingiu ao objetivo de dimensionar, a baixo custo, uma estrutura simples para resistir a esforços externos de natureza aleatória. O método apresenta possibilidade de análise de estruturas mais complexas.

Os resultados obtidos pela aplicação do programa foram coerentes com a teoria: para α fixo, a frequência própria e o desvio-padrão da resposta cresceram, enquanto a tensão máxima admissível à fadiga decresceu com o aumento da altura da viga.

Para uma dada altura H da viga, notou-se crescimento sensível da tensão admissível com α , o que indica ser necessário uma escolha criteriosa desse parâmetro, a partir de dados experimentais, para o dimensionamento correto da estrutura. No exemplo limitou-se uma faixa razoável de valo

res dentro da qual deve se encontrar o verdadeiro α , pois é difícil estimar precisamente essa inclinação a partir dos dados disponíveis em curvas S-N.

Em todos os casos verificou-se que $H_{NORM} > H$, para a mesma tensão admissível, significando que o método clássico leva a um certo superdimensionamento à fadiga quando os esforços externos são de natureza aleatória.

REFERÊNCIAS

- [1] Chiaverini, V., "Tecnologia Mecânica", McGraw-Hill do Brasil, (1978).
- [2] Osgood, C., "Fatigue Design" J. Wiley & Sons, New York, (1970).
- [3] Miner, M.A., "Cumulative Damage in Fatigue", Trans. ASME, Vol. 67, A159, (1945).
- [4] "Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals", British Inst. Mech. Engrs. & ASME, Londres, (1956).
- [5] "Full-Scale Fatigue Testing of Aircraft Structures", - ICAF-AGARD Symposium at Amsterdam, 1959, Pergamon Press, New York, (1961).
- [6] Kowalewski, J., "On the Relation between Fatigue Lives under Random Loading and under Corresponding Program - Loading", publicado em [5].



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-20

P. P. 191 - 203

PUC/RJ

A DISCRETE ELEMENTS PERTURBATION APPROACH TO THE
HOPF BIFURCATION OF RODS UNDER FOLLOWER FORCES

M.S. El Naschie and S. Al Athel
University of Riyadh, Saudi Arabia.

Summary

The present work relates the post critical behaviour to statical and dynamical catastrophe which are investigated quantitatively for a class of elastic structures under circulatory loading using a finite elements perturbation technique.

1. Stability, bifurcation and catastrophe - general remarks

A question which must have bothered structural civil engineers meditating about the many disasters attributed to stability and buckling failures is why their colleagues in aeronautical engineering for instance, dealing with by and large much more complex dynamical stability problems have relatively speaking been more successful in their designs against buckling. Leaving standard jokes about this aside, the answer partially lies in the fact that the dynamical aspects of buckling were ignored for a long time in structural engineering. However, only in the last few years the complete explanation became very clear. It is a mode of nature which made statical buckling highly sensitive to imperfection so that the usual linearised eigenvalue analysis is rarely sufficient for a real world structure. On the other hand, dynamical buckling problems, usually of the flutter type, are structurally stable bifurcation in the topological sense and therefore the eigenvalue critical buckling parameter found from a linearised analysis is quite reliable as a practical design criterion. The critical flutter load is affected by the real world imperfection only in a minor way compared with statical buckling [1]. In this sense statical bifurcation and paradoxically enough, the simplified Hamiltonian systems in general are more complex to investigate than dynamical bifurcation problems because their phase portrait is structurally unstable. This point will be elaborated further at several later occasions. On the other hand, for someone who is familiar only with statical buckling of the euler bifurcational type, dynamical stability includes frequently unexpected and strange phenomena. An example might be that recently given by Plaut who found in a non-conservative divergence system a critical point in a stable path without intersection with another secondary branch or the appearance of a stable or unstable limit cycle (Fig. 1). This would seem to contradict a fundamental theorem by Thompson. However, one should bear in mind that although Thompson did not mention it explicitly

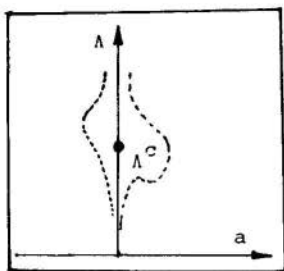


Fig. 1 Critical point with-
out a secondary branch

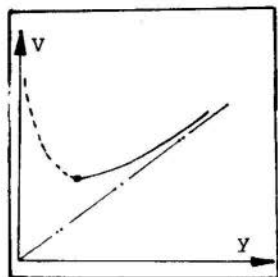


Fig. 2 Galloping instability
without a point of
bifurcation

he probably meant by his theorem only distinct critical points in gradient systems for which the path should become unstable when exceeding Λ^C . This is not the case in Fig. 2. There are also cases where a bifurcation can exist without a bifurcation point (Fig. 2). This would be the counterpart of the case discussed by Plaut and is analogous to the non-classical contact buckling found for instance in pressurised rings confined in a rigid surrounding such as that considered by Tsang and El Naschie.

There are two main approaches to the theory of bifurcation, statical or dynamical. The first is the topological approach of Poincare, Andronov and Pontriagin. The second approach is the quantitative approach which mainly uses power series methods.

The advantage of the quantitative methods is in obtaining numerical results. Their drawback is that they do not give an insight into the globality of all possible situations as do the topological methods. In view of the lack of a complete general theory of bifurcation, it was always advisable to explore a new problem using topological methods and determine the main characteristics of the solution before starting the quantitative calculations. This trend is illustrated in several recent papers. Although a complete general classification of bifurcation is

far from being at hand, several considerable advancements were made in modern times for specialised fields. The most important development with regard to the present work is Koiter's classifications of elastic conservative bifurcation and Thom's catastrophe theory classifying singularities of structurally stable gradient systems.

Koiter's theory uses perturbation methods and the energy theorems of Lagrange while Thom uses modern topological methods. The interaction of these two theories resulted in a wealth of hard core applications of catastrophe theory and a deeper insight into the post critical behaviour of structures. In Ref. [1] El Naschie gave a classification of bifurcation arising from a center or a point attractor in connection with Koiter's theory and post flutter bifurcation.

In elastic stability the question arose quite early as to whether nonconservative systems could be classified in a similar way to that of Koiter's theory, also with respect to imperfection sensitivity. In the meantime there seems to be a revived interest in elastic buckling under polygenetic loading due to the increased interest in flow induced vibration and certain analogies to problems including follower forces. The main problem in investigating nonconservative systems is that there are no theorem like that of Dirichlet-Lagrange guaranteeing stability. It is frequently taken for granted that a rising post critical branch is stable and a falling one is unstable which is a misconception except for conservative systems which was proven by Koiter using energy theorems. Such classification cannot be made a priori for nonconservative systems. However, in the case of a point attractor or a center bifurcating at a distinct point, the stability of the new regime could be determined using some of the results of the theory of differential equations and the main problem thereafter is the quantitative analysis. Several buckling problems were recently considered by the authors from the point of view of topological and quantitative analysis

simultaneously and several discretisation methods were presented [1-7]. These efforts are continued here using a finite element like discrete perturbation procedure. It is believed that the method of discrete perturbation provides a much more practical method for electronic computation than the classical continuum perturbation procedures.

2. General bifurcation of conservative systems

Consider a conservative system described by the connected potential W which is a function of a finite number of variables a_i representing the behaviour space and linear in one controlling parameter Λ . We confine our attention to the Hessian of the quadratic form W_2 at a certain point (c) lying on the equilibrium path given by $W = W_1 = 0$ which in general yields some equilibrium curves in the configuration space. Suppose that the Hessian at this point is degenerate in one direction only as is easily revealed by inspection of the diagonal form [6]. The point is thus non-morse discrete of the corank one. Following the splitting lemma we can thus eliminate $(i-1)$ variables and still fully capture the bifurcation of the system using one single critical coordinate a_i and the controlling parameter Λ . We note that the non-morse critical point is Poincaré unstable and that the minimum codimension is two. Thus taking a single imperfection parameter would, together with Λ , completely unfold the singularity as shown in Ref. [1] where the transformation of the phase portrait is explained. We do not intend to carry on with the general theory but will rather give an explicit discrete perturbation for a two degrees of freedom system. This, rather than the one degree of freedom system already exhibits all the special features of the discrete perturbation.

3. Discrete perturbation for conservative sets

Consider the fixed free elastica. The total potential energy of two elements is

$$W = \frac{1}{2} C_1 \phi_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \phi_2^2 - \frac{PL}{2} \phi_1^2 - \frac{PL}{2} \phi_1 \phi_2 - \frac{PL}{4} \phi_2^2 + \frac{PL}{24} \phi_1^4 + \frac{PL}{12} \phi_1^3 \phi_2 + \frac{PL}{8} \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{PL}{12} \phi_1 \phi_2^3 + \frac{PL}{48} \phi_2^4 \quad (1)$$

where following Ref. 2 C_1 and C_2 are the localised stiffness, $a_1 = \phi_1$ is the rotation at the fixed end, $a_2 = \phi_2$ is the difference in rotation between the two elements, $\Lambda = P$ is the axial load and L is the length of the strut. Following the principles of Dirichlet the equilibrium equations are found from $\partial V / \partial \phi_i = 0$ to be

$$C_1 \phi_1 - PL \phi_1 - \frac{PL}{2} \phi_2 + \frac{PL}{6} \phi_1^3 + \frac{PL}{4} \phi_1^2 \phi_2 + \frac{PL}{4} \phi_1 \phi_2^2 + \frac{PL}{12} \phi_2^3 = 0 \quad (2)$$

and

$$C_2 \phi_2 - \frac{PL}{2} \phi_1 - \frac{PL}{2} \phi_2 + \frac{PL}{12} \phi_1^3 + \frac{PL}{4} \phi_1^2 \phi_2 + \frac{PL}{4} \phi_1 \phi_2^2 + \frac{PL}{12} \phi_2^3 = 0 \quad (3)$$

In an analogous way to that of Lindstedt-Poincare, we expand ϕ_1 , ϕ_2 and P in a Taylor series with respect to a small parameter ϵ and obtain

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{1,1} \epsilon + \frac{1}{2} \phi_{1,2} \epsilon^2 + \dots \\ \phi_2 &= \phi_{2,1} \epsilon + \frac{1}{2} \phi_{2,2} \epsilon^2 + \dots \\ P &= P^C + P^{(1)} \epsilon + \frac{1}{2} P^{(2)} \epsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

where $\phi_{i,r} = \partial^r \phi_i / \partial \epsilon^r |_C$, $P^{(r)} = \partial^r P / \partial \epsilon^r |_C$, $i=1,2$, $\phi_{1,0} = \phi_{2,0} = 0$ and $P^{(0)} = P^C$ for the trivial fundamental path. Inserting in the equilibrium equations we notice that since ϵ is small but non zero, the coefficients of ϵ^r must vanish separately if the equilibrium equations are to be satisfied. Thus a comparison of coefficients would lead to two sets of sequentially solvable linear equations exactly as in the continuum perturbation. Here, however, these equations are algebraic. Identifying ϵ with ϕ_1 we see that

$$\phi_{1,1} = 1 \quad \text{and} \quad \phi_{1,2} = \phi_{1,3} = \dots = 0 \quad (5)$$

Here $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, --- are termed the path derivatives while $\phi_{i,r}$ are termed the rates. The first set of perturbation equations is

$$\epsilon^1 \{ C_1 \phi_{1,1} - P^C L \phi_{1,1} - \frac{L}{2} P^C \phi_{2,1} \} = 0 \quad (6)$$

and

$$\epsilon^1 \{ C_2 \phi_{2,1} - \frac{L}{2} P^C \phi_{1,1} - \frac{L}{2} P^C \phi_{2,1} \} = 0 \quad (7)$$

A non trivial solution of these equations exists if, and only if, the matrix of the coefficients vanish. Expanding the stability determinant a secular equation for P is found. Solving this equation we find the critical load

$$P^C = \frac{1}{L} \{ C_1 + 2C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + 4C_2^2} \} \quad (8)$$

and remembering that $\phi_{1,1}=1$ the rate $\phi_{2,1}$ is

$$\phi_{2,1} = \{ 2C_1 / (C_1 + 2C_2 - \sqrt{C_1^2 + 4C_2^2}) \} - 2 \quad (9)$$

This is obviously identical to the usual eigenvalue analysis. Now one proceeds to the second order set of perturbation equations

$$\epsilon^2 \{ \frac{1}{2} C_1 \phi_{1,2} - \frac{1}{2} P^C \phi_{1,2} - P^{(1)} L \phi_{1,1} - \frac{L}{4} P^C \phi_{2,2} - \frac{L}{2} P^{(1)} \phi_{2,1} \} = 0 \quad (10)$$

and

$$\epsilon^2 \{ \frac{1}{2} C_2 \phi_{2,2} - \frac{L}{4} P^C \phi_{1,2} - \frac{L}{2} P^{(1)} \phi_{1,1} - \frac{L}{4} P^C \phi_{2,2} - \frac{L}{2} P^{(1)} \phi_{2,1} \} = 0 \quad (11)$$

Here it is noted that $\phi_{1,1}=1$, $\phi_{1,2}=0$ and P^C , $\phi_{2,1}$ are known from the preceding step. Again the solvability condition is that the determinant of the coefficient of the unknowns $P^{(1)}$ and $\phi_{2,2}$ should vanish. However that cannot be the case since the determinant is equal to a constant. Thus the only solution is the trivial one, namely that

$$P^{(1)} = 0 \quad \text{and} \quad \phi_{2,2} = 0 \quad (12)$$

The bifurcation is clearly of the symmetric type and thus would unfold to the cusp catastrophe. To decide on imperfection sensitivity the curvature $P^{(2)}$ must be determined. To do this we proceed to higher order perturbation, namely the third set of equations

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \left\{ \frac{1}{6} C_1 \phi_{1,3} - \frac{L}{6} P^C \phi_{1,3} - \frac{1}{2} P^{(1)} L \phi_{1,2} - \frac{1}{2} P^{(2)} L \phi_{1,1} - \frac{L}{12} P^C \phi_{2,3} - \right. \\ \left. \frac{L}{4} P^{(1)} \phi_{2,2} - \frac{L}{4} P^{(2)} \phi_{2,1} + \frac{L}{6} P^C \phi_{1,1}^3 + \frac{L}{4} P^C \phi_{1,1}^2 \phi_{2,1} + \right. \\ \left. \frac{L}{12} P^C \phi_{2,1}^3 + \frac{L}{4} P^C \phi_{1,1} \phi_{2,1}^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \left\{ \frac{1}{6} C_2 \phi_{2,3} - \frac{L}{12} P^C \phi_{1,3} - \frac{L}{4} P^{(1)} \phi_{1,2} - \frac{L}{4} P^{(2)} \phi_{1,1} - \frac{L}{12} P^C \phi_{2,3} - \right. \\ \left. \frac{L}{4} P^{(1)} \phi_{2,2} - \frac{L}{4} P^{(2)} \phi_{2,1} + \frac{L}{12} P^C \phi_{1,1}^3 + \frac{L}{4} P^C \phi_{1,1}^2 \phi_{2,1} + \right. \\ \left. \frac{L}{4} P^C \phi_{1,1} \phi_{2,1}^2 + \frac{L}{12} P^C \phi_{2,1}^3 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

where the only unknowns are $P^{(2)}$ and $\phi_{2,3}$. The two equations are easily solved to give $P^{(2)}$ and $\phi_{2,3}$. Following Ref. [2] this result is evaluated now for the localised stiffness C_i and we find that

$$\begin{aligned} P^C &= 2.552 \frac{EI}{L^2}, & \phi_{2,1} &= 1.762 \\ P^{(2)} &= 5.836 \frac{EI}{L^2} > 0 & \text{and} & \phi_{2,3} = -3.7384 \end{aligned} \quad (15)$$

Thus the structure is imperfection insensitive in the engineering sense although it is structurally unstable in the topological sense. The equation of the initial post buckling for two elements approximation is thus

$$P^C = 2.552 \frac{EI}{L^2} + \frac{1}{2} (5.836) \frac{EI}{L^2} \phi_1^2 \quad (16)$$

To obtain a more accurate result the number of elements should be increased. It should be mentioned that the choice of ϕ_1 as a perturbation parameter is ill-suited for the convergence since ϕ_1 should ultimately be zero. Therefore we should take ϕ_2 or generally ϕ_n . Second it is better to formulate the problem in terms of principle coordinate ϕ_i which is measured from the vertical axis. This way the result for 10 elements is

$$P = 2.471 \frac{EI}{L^2} + 0.311 \frac{EI}{L^2} \phi_{10}^2 \quad (17)$$

This is almost identical to the exact expression [3]. It

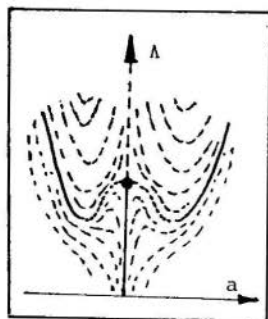


Fig. 3 Folded butterfly singularity

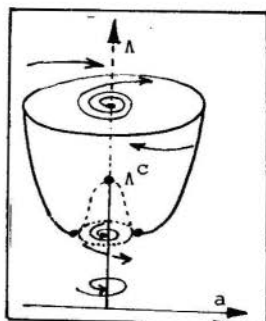


Fig. 4 Phase portrait transformation of subcritical Hopf bifurcation in the large

should also be noted that a discrete Ritz procedure of Ref. 3 would have lead to identical results. The reason is that in our simple two coordinate analysis for instance $\phi_{2,1} = 1.762$ means that $\partial\phi_2/\partial\phi_1 = 1.766$ for which $\phi_2 = \phi_1 \cdot 1.762$ which is exactly the linear relationship between ϕ_1 and ϕ_2 as obtained for the eigenvalue equation. Thus, here lies the justification of the discrete Ritz method [3]. So far the analysis is analogous to that of Lindstedt-Poincare method except for the elimination of the secular terms which turned out to be useful in determining the path derivatives without actually solving the higher order perturbation equations. To do this one multiplies each perturbation equation with its corate. For the third order perturbation equation that would mean the first should be multiplied with $\phi_{1,1}$ the second with $\phi_{2,1}$ then added. This way one will notice that by virtue of the preceding perturbation equation an equation for determining $p^{(2)}$ is immediately available. An alternative scheme, a so called extraction perturbation method was formulated in Ref. [4].

Here we should draw attention to a short coming in all classical bifurcation analysis which concentrate on evaluating slope and curvature only where some significant features, away from the bifurcation point, may be missed as

only when we depict the stable part of the surface after exceeding the stability switching curve as shown in Fig. 4. On general theoretical ground one namely expects an unstable conservative or Hopf bifurcation diagram to gain stability when the amplitude is sufficiently large, something which would escape the classical initial post buckling analysis as pointed out on previous occasions [6,7].

5. Finite element discrete perturbation analysis

In the following we will outline the analysis of post flutter behaviour using a discrete perturbation analysis similar to that used earlier. Here however, we will have to carry on the discretisation systematically to an x and t dependent system. Further more, since we are dealing with a surface rather than a curve, two appropriate perturbation parameters are needed. Considering the post flutter behaviour of the Beck strut under a follower tangential load for instance, the structure can be discretised using the preceding elements technique of localising stiffness (c), rotation (ψ) and in the dynamical case, the mass (m). Subsequently, the vibration itself can be discretised using a Fourier expansion. Finally, two parameters associated with amplitude and frequency are identified as perturbation parameters. For two elements approximation for instance, the equations of motion are given up to third order terms exact and are easily found from the equilibrium condition using the D'Lambert principle. We further assume the following Fourier expansion for the vibration

$$\begin{aligned}\phi_1 &= a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3 \omega t \\ \phi_2 &= b_1 \cos \omega t + b_3 \cos 3 \omega t\end{aligned}\tag{18}$$

where ω is the frequency and t is the time. An elementary justification for this step can be found in the classical booklet of McLachlan. However it can be shown that it is sufficient here to consider only the first terms. Thus

$$\phi_1 = a_1 \cos \omega t \quad \text{and} \quad \phi_2 = a_2 \cos \omega t\tag{19}$$

Inserting in the Lagrangian equations a comparison of the coefficients of $\cos \omega t$ leads to

illustrated in Fig. 3. There the singularity would unfold into a butterfly catastrophe. However, the 6th jet is needed as shown by the first author for stiffened cylindrical shells [5,6].

4. Nonconservative bifurcation from a focus

Following Andronov we consider the bifurcation from a multiple focus to a limit cycle and look at the very important special case when one and only one pair of eigenvalues of the linearised equations cross the imaginary axes of the Gauss plane for $\Lambda > \Lambda^C$. As pointed out in Ref. [1] this is the same subject of the classical work of Hopf. However, the earliest treatment seems to be that of Andronov and Witt for the minimum dimension required for flutter ($n=2$) while Hopf generalised the results to $n \geq 2$. That way we meet some analogous results to Koiter's theory of conservative systems in so far as there are a stable and unstable bifurcation to a limit cycle. Moreover, the stability of the limit cycle depends on the sign of the curvature of the surface of limit cycles as shown in Fig. 4, Ref. [1]. However, here the analogy ceases and we make the interesting observation that the quadratic projection vanishes automatically leaving us with no possibility of getting the transcritical case contrary to the statical conservative bifurcation where the asymmetric (transcritical) point of bifurcation, well known from Poincare's exchange of stability exists. Consequently, the slope of the critical point of the surface of limit cycles is always zero. It should be noted that this is, of course, valid for a bifurcation diagram in Λ - a space and not for the occasionally used Λ - a^2 space where a is the amplitude. The second point where this bifurcation differs from Koiter's bifurcation is that it is a structurally stable bifurcation in the topological sense. Imperfection sensitivity is thus a minor effect as for a limit point which is the only structurally stable singularity in a conservative system [1]. It is also worth noting that obtaining the curvature of the surface of limit cycles alone can describe the phenomena of hard self excitation but not the hysteresis behaviour. The latter can be seen

$$(-3\xi^2 + 2 - \Lambda) a_1 + (-\xi^2 - 1 + \Lambda) a_2 + \frac{1}{8}\Lambda a_1^3 + \left(\frac{3}{8}\xi^2 - \frac{3}{8}\Lambda\right) a_1^2 a_2 + (\alpha\xi^2 + \frac{3}{8}\Lambda) a_1 a_2^2 + (\beta\xi^2 - \frac{1}{8}\Lambda) a_2^3 = 0 \quad (20)$$

$$(-\xi^2 - 1) a_1 + (-\xi^2 + 1) a_2 + \frac{1}{8}\xi^2 a_1^3 - \frac{1}{2}\xi^2 a_1^2 a_2 + \frac{3}{8}\xi^2 a_1 a_2^2 = 0 \quad (21)$$

where $\Lambda = PL/C$, $\xi = \omega L \sqrt{m/C}$, $C = C_1 = C_2$, $\alpha = 1/2$ and $\beta = -1/2$. There is no problem extending our previous discrete perturbation to the present case using two parameters as shown elsewhere by El Naschie and Wu. However, here we will follow another way. Consider the linear eigenvalue first, then from the characteristic equation and following the Burchard criteria the critical value and critical frequency are

$$\Lambda^C = 3.5 - \sqrt{2} = 2.486 \quad \text{and} \quad \xi^C = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.841 \quad (22)$$

Now we express a_2 in terms of the critical coordinate using the eigenvalue equations. Thus

$$a_2^C = \rho a_1^C \quad \text{where} \quad \rho = 3 + 2\sqrt{2} = 5.83 \quad (23)$$

Introducing the increments u_1 and u_2 we have

$$a_1 = a_1^C + u_1 \quad \text{and} \quad a_2 = a_2^C + u_2 \quad (24)$$

Inserting in the nonlinear equation and writing them as two linear homogeneous equation in u_1 and u_2 the solvability condition for these equations is that the determinant of the coefficients of u_1 and u_2 should vanish. That way a second characteristic determinant is obtained which upon expansion gives

$$2\xi^4 - 7\xi^2 + 2\Lambda\xi^2 + 1 + \left\{ \left(\frac{9}{4} - 4\rho - \alpha\rho^2 + 2\alpha\rho + 3\beta\rho^2 + \frac{3}{8}\rho^2\right) \xi^4 + \left(\frac{7}{4} - \frac{5}{8}\Lambda + \frac{5}{4}\rho + \frac{7}{4}\rho\Lambda - \frac{9}{8}\rho^2\Lambda + \alpha\rho^2 + 2\alpha\rho + 3\beta\rho^2 + \frac{3}{8}\rho^2\right) \xi^2 + \frac{3}{8}\Lambda \right\} a_1^C{}^2 = 0 \quad (25)$$

Finally the increment of loading and frequency can be introduced so that

$$\Lambda = \Lambda^C + \lambda \quad \xi = \xi^C + \eta \quad (26)$$

Inserting in the last equation one obtains

$$\Lambda = \Lambda^c - 4\eta^2 + 32.5 a_1 c^2 \quad (27)$$

Thus the coefficients of η^2 is negative as should be while that of a_1^2 is positive, indicating a stable limit cycle. In fact, by increasing the number of elements we see that the Beck problem exhibits a super Hopf bifurcation. The critical eigenvalue is therefore a sufficient design criteria.

Acknowledgement

This work was made possible by a research grant from the University of Riyadh, Saudi Arabia to the first author.

References

1. EL NASCHIE, M.S. and AL ATHEL, S. On the morphology of controlled systems, Structural Control, Ed. H. Leipholz, North Holland Pub. Co. (1980).
2. EL NASCHIE, M.S. and AL ATHEL, S. On certain finite element like methods for nonconservative stability sets. S.M. Archive, Vol. 4 (1979) pp. 173-182.
3. AL ATHEL, S., GALALY, I. and EL NASCHIE, M.S. A discrete element approach to nonlinear bifurcation of elastic rods. Proc. of The Third Int. Conf. on Finite Element Methods in Australia. (1979) pp. 361-364.
4. AL ATHEL, S. and EL NASCHIE, M.S. A discrete solution for nonlinear eigenvalue problems. Proc. of Sixteenth Midwestern Mechanics Conf. (1979) pp. 119-113.
5. EL NASCHIE, M.S. Initial post buckling of axially compressed orthotropic cylindrical shells. AIAA Journal, Vol. 14, No. 10, Oct. (1976) pp. 1052-1054.
6. EL NASCHIE, M.S. and AL ATHEL, S. Numerical analysis of eigenvalue and initial post buckling problems using the principle of Castigliano. Proc. of Int. Congress on Numerical Methods for Eng. Pub. Dunod, Paris (1980).
7. EL NASCHIE, M.S. and AL ATHEL, S. Global and numerical analysis of nonconservative and nonlinear sets under follower forces, XV IUTAM Congress, (1980) Abs. pp. 92.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-21

P. P. 205 - 214

PUC/RJ

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO DE ELEMENTOS DE HASTE CURVA PA
RA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Antônio Bento Filho

Professor Assistente - Deptº Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Clovis Sperb de Barcellos

Professor Titular - Deptº Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Sumário

No presente trabalho é desenvolvido um procedimento para determinar a matriz de rigidez de um elemento finito de viga curva espessa, através do princípio da **energia** potencial mínima. O campo de deslocamento é interpolado por polinômios de Hermite de 3º grau. São apresentados resultados da análise de vigas curvas com uma relação entre o raio de curvatura e a largura da base igual a 10.

Summary

A procedure to evaluate the stiffness matrix for a thick curved beam element is developed by means of the minimum potential energy principle, applied to finite elements. The displacement field is prescribed though 3rd degree Hermite polynomial expansions. A curved beam with radii to thickness relation equal to is analysed.

1 - Introdução

Elementos finitos sólidos, do tipo isoparamétrico, fornecem soluções bastante precisas para problemas envolvendo vigas curvas. Entretanto, devido às suas características de interpolação, tais elementos requerem malhas bastante refinadas nesses casos. Esse fato os torna antieconômicos para aplicações práticas e tem motivado o desenvolvimento de elementos com características de viga que apresentem razoável precisão na análise desses problemas, sem necessitarem de malhas muito refinadas.

Com o presente trabalho, pretende-se desenvolver um elemento finito de viga curva com boa sensibilidade às solicitações de flexão, torsão e cisalhamento, através do método dos deslocamentos.

2 - Relações Deformações Deslocamentos

O elemento tem sua fórmula baseada na geometria de um segmento de haste circular plana, cujos sistema de coordenadas e parâmetros dimensionais são apresentados na figura 1.

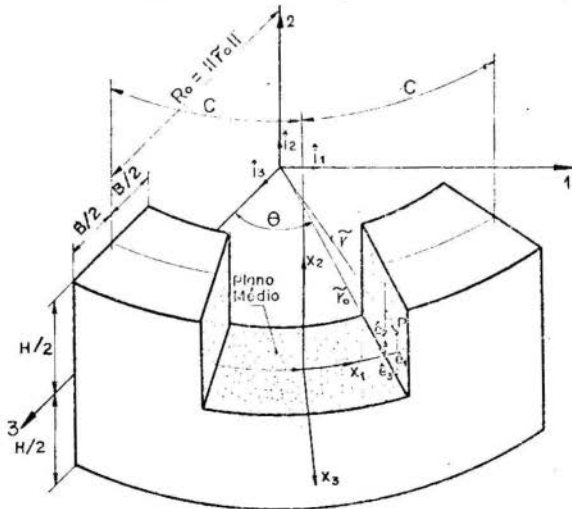


Figura 1 - Segmento de haste circular plana; sistemas de referência e dimensões.

Para essa geometria, as relações de deformações- deslocamentos assumem a forma [2].

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} = & \frac{R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} + \frac{1}{R_0 + x_3} w + \frac{1}{R_0^2} (w^2 + u^2) + \frac{2R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} \\ & \left[\frac{1}{R_0} (w - u) + v_{,1} + w_{,1} \right] - \frac{2}{R_0} u w_{,1} + \frac{1}{2} [(u_{,1})^2 + (v_{,1})^2 + \\ & (w_{,1})^2]. \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\epsilon_{22} = v_{,2} + \frac{1}{2} [(u_{,2})^2 + (v_{,2})^2 + (w_{,2})^2] \quad (1b)$$

$$\epsilon_{33} = w_{,3} + \frac{1}{(R_0 + x_3)} u u_{,3} + \frac{1}{2} [(u_{,3})^2 + (v_{,3})^2 + (w_{,3})^2] \quad (1c)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} = & \frac{1}{2A} [u_{,2} A + v_{,1} + \frac{u}{R_0} (w - w_{,2}) - \frac{u}{R_0 + x_3} (u + w) + \\ & + A(u_{,1} u_{,2} + v_{,1} v_{,2} + w_{,1} w_{,2})] \end{aligned} \quad (1d)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{13} = & \frac{1}{2A} [u_{,3} A + w_{,1} - \frac{1}{R_0 + x_3} u - \frac{u_{,3} w}{R_0 + x_3} - \frac{u w_{,3}}{R_0} - \\ & - \frac{u}{R_0 + x_3} (u_{,1} + \frac{w}{R_0}) + A(u_{,1} u_{,3} + v_{,1} v_{,3} + w_{,1} w_{,3})] \end{aligned} \quad (1e)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left[v_{,3} + w_{,2} - \frac{u u_{,2}}{(R_0 + x_3)} + u_{,2} u_{,3} + v_{,2} v_{,3} + w_{,2} w_{,3} \right]$$

sendo:

$$A = (1 + x_3/R_0)$$

u, v, w - deslocamentos nas direções 1, 2 e 3, respectivamente, e

$$(\)_{,i} = \frac{\partial (\)}{\partial x_i}$$

Admitindo-se que as deformações são pequenas, pode-se desprezar as tensões cisalhantes resultantes das distorções no plano da seção, em presença das tensões cisalhantes devidas ao empenamento [4,6]. Se os deslocamentos são também pequenos, existe uma relação linear entre deformação e deslocamento. Então, as equações (1) assumem a forma:

$$\epsilon_{11} = \frac{R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} + \frac{1}{R_0 + x_3} w \quad (2a)$$

$$\epsilon_{22} = v_{,2} \quad (2b)$$

$$\epsilon_{33} = w_{,3} \quad (2c)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(u_{,2} + \frac{R_0}{R_0 + x_3} v_{,1} \right) \quad (2d)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{3} \left(u_{,3} + \frac{R_0}{R_0 + x_3} w_{,1} \right) - \frac{u}{R_0 + x_3} \quad (2e)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} (v_{,3} + w_{,2}) = 0 \quad (2f)$$

As equações (2) podem ser organizadas na forma de um operador diferencial e apresentadas matricialmente como:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{12} \ \epsilon_{13}\}^t = [B^*] \{\bar{\delta}\} \quad (3a,b)$$

onde

$\{\epsilon\}$ - Campo de deformações

$[B^*]$ - Operador diferencial obtido a partir de (1a,...,f).

$\{\bar{\delta}\}$ - Campo de deslocamentos no elemento.

3 - Formulação do elemento finito

Os deslocamentos no elemento são interpolados a partir dos deslocamentos nodais, na forma:

$$\{\bar{\delta}\} = [N] \{\delta\} \quad (4)$$

onde

$[N]$ - Matriz das funções de interpolação

$\{\delta\}$ - Vetor deslocamentos nodais.

e os elementos da matriz $[N]$ são funções polinômiais do tipo:

$$N_{ij}^k = a_{ij}^k \psi_i^k(x_2, x_3) \phi_j(x_1), \quad i=1, m; j=1, n \quad (5a, b)$$

$$H_{ij}^k = b_{ij}^k \psi_i^k(x_2, x_3) \xi(x_1), \quad i=1, m; j=1, n$$

sendo:

a_{ij}^k, b_{ij}^k - Componentes constantes das funções de interpolação.

$\psi_i^k(x_2, x_3)$ - i -ésima componente polinomial no plano da secção.

$\phi_j(x_1)$ - j - ésimas componentes de interpolação na direção axial.

$\xi(x_1)$ - função de interpolação que satisfaz condições de contorno homogêneas nos nós.

$k=1, 2, 3$ - indica função de interpolação de u, v, w respectivamente.

m, n - nº de funções ψ e ϕ respectivamente.

Da maneira como foram interpolados os deslocamentos observa-se que o vetor deslocamentos nodais terá $(m \cdot n)$ componentes. Considerando-se o elemento com 6 graus de liberdade por nó, torna-se necessária a condensação de $(m \cdot n - 12)$ parâmetros não nodais do vetor deslocamento. Para facilitar essa operação, reorganiza-se o vetor deslocamentos $\{\bar{\delta}\}$ na forma

$$\{\bar{\delta}\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\delta} \\ \delta \end{array} \right\} \quad (6)$$

onde:

$\{\hat{\delta}\}$ - vetor dos deslocamentos e rotações nodais do elemento

$\{\bar{\delta}\}$ - vetor dos parâmetros não nodais do elemento.

Para um material homogêneo, isotrópico e com comportamento elástico linear, tem-se:

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (7)$$

onde:

$\{\sigma\}$ - vetor tensões no elemento

$[C]$ - matriz das propriedades elásticas [1,3,5]
Substituindo-se (3b) e (4) em (7) resulta:

$$\{\sigma\} = [C] [B^*] [N] \{\delta\} = [C] [B] \{\delta\} \quad (8a,b)$$

onde:

$[B]$ - matriz das relações deformações - deslocamentos nodais, resultantes da aplicação das relações deformações deslocamentos ao campo de deslocamentos, expresso na equação (4).

Na ausência de forças de corpo e estados de deformação inicial, a energia potencial total de um corpo elástico linear é dada por: [1, 3; 5].

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dv - \int_S \{T\}^T \{\bar{\delta}\} ds \quad (9)$$

onde:

$\{\epsilon\}$ - campo de deformações

$\{\sigma\}$ - campo de tensões

$\{T\}$ - forças de superfície na região do contorno

$\{\bar{\delta}\}$ - campo de deslocamentos.

Substituindo-se (3b), (4) e (8b) em (9) e realizando o processo variacional para obtenção da primeira variação, tem-se:

$$[K] \{\delta\} = \{\bar{F}\} \quad (10a)$$

sendo:

$$[\bar{K}] = \int_v [B]^T [C] [B] dv \quad (10b)$$

a matriz de rigidez intrínseca do elemento

$\{\bar{F}\}$ - Vetor força resultante

$\{\delta\}$ - Vetor deslocamentos nodais.

Realizando-se o processo de condensação estática, de acordo com (6), resulta:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}]^t & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\delta} \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F} \\ \bar{F} \end{Bmatrix} \quad (11a)$$

que pode ser reescrita como

$$[[K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{12}]^t] \{\hat{\delta}\} = \{\hat{F}\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1} \{\bar{F}\} \quad (11b)$$

onde:

$$[K] = [[K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{12}]^t] \quad (11c)$$

é a matriz de rigidez intrínseca do elemento em termos dos deslocamentos nodais e,

$$\{F\} = \{\hat{F}\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1} \{\bar{F}\} \quad (11d)$$

é o vetor força resultante reduzido do elemento.

4 - Análise de resultados

O campo de deslocamentos utilizado, foi obtido a partir da análise de vários campos de deslocamentos, para os

quais se verificou a convergência e precisão na interpolação dos deslocamentos no elemento |2|.

$$\phi_1(x_1) = 0,25(x_1^3 - 3x_1 + 2)$$

$$\phi_2(x_1) = 0,25(-x_1^3 + 3x_1 + 2)$$

$$\phi_3(x_1) = 0,25(x_1^3 - x_1^2 - x_1 + 1) \quad (12a, a, c, d, e, f, g, h)$$

$$\phi_4(x_1) = 0,25(x_1^3 + x_1^2 - x_1 - 1)$$

$$\xi(x_1) = (1-x_1^2)^2$$

$$\{\psi^1\} = \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_2^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_3^3, x_2^4, x_2^3x_3, x_2^2x_3^2, x_2x_3^3, x_3^4, x_2^5, x_2^4x_3, x_2^3x_3^2, x_2^2x_3^3, x_2x_3^4, x_3^5\}$$

$$\{\psi^2\} = \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_2^3\}$$

$$\{\psi^3\} = \{1, x_2, x_3, x_3^2, x_3^3\}$$

Os resultados obtidos são comparados com os da referência |10|, tomados como exatos.

Todas solicitações que ocorrem numa carga genérica perpendicular ao plano de curvatura da viga, podem ser testadas por uma carga concentrada na extremidade, já que ocorrerão torção, flexão e cisalhamento ao longo da viga como num caso de carga mais complexa.

A tabela 3 apresenta os resultados da flexão, ângulo de torção e ângulo de giro da seção na extremidade livre de uma viga curva mostrada na Figura 5.

Observa-se, nos dados abaixo um enrijecimento da estrutura quando a relação $L/H < 2,62$ para o elemento.

Por outro lado, os valores de solicitações internas mostram-se bastante bons, o que permite afirmar que os modos de deformação constante não são plenamente satisfeitos com a formulação proposta.

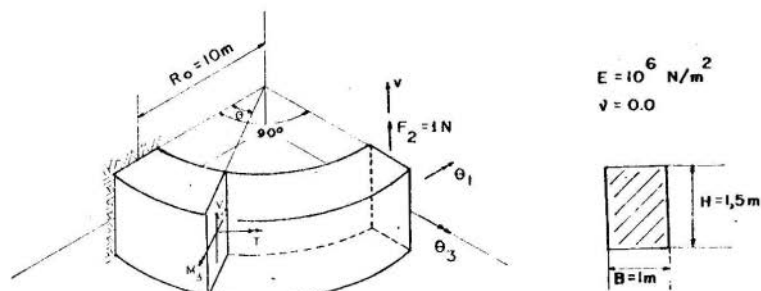


Figura 3 - Viga curva engastada.

Tabela 1 - Ângulo de tração θ_1 , ângulo de tração θ_3 e deflexão v na extremidade livre.

Nº	Ângulo de torção		Ângulo de giro		Deslocamento v	
	Modelo	Erro%	Modelo	Erro%	Modelo	Erro%
1	$1,1599 \times 10^{-4}$	12,69	$4,4382 \times 10^{-4}$	14,41	$4,5676 \times 10^{-3}$	12,50
2	$1,4279 \times 10^{-4}$	2,41	$4,8903 \times 10^{-4}$	5,69	$5,0093 \times 10^{-3}$	4,04
4	$1,4780 \times 10^{-4}$	1,06	$4,9822 \times 10^{-4}$	3,92	$5,0835 \times 10^{-3}$	2,62
8	$1,4109 \times 10^{-4}$	5,53	$4,7577 \times 10^{-4}$	8,25	$4,9348 \times 10^{-3}$	5,47
	Exato: $1,4625 \times 10^{-4}$		Exato: $5,1854 \times 10^{-4}$		Exato: $5,2202 \times 10^{-3}$	

Tabela 2 - Distribuição do esforço cortante V , torque I e momento fletor M_3 na viga.

θ ($^\circ$)	V_2 (N)	ERRO (%)	T (Nm)	ERRO (%)	Mf_3 (Nm)	ERRO (%)
0	1,0000	0,0	9,9999	0,001	9,9992	0,018
11,25	1,0000	0,0	8,0490	0,001	9,8072	0,007
22,5	1,0000	0,0	6,1730	0,003	9,2384	0,004
35,75	1,0000	0,0	4,4442	0,002	8,3145	0,002
45,0	1,0003	0,030	2,9290	0,003	7,0715	0,006
56,25	1,0005	0,050	1,6854	0,006	5,5557	0,0
67,5	1,0005	0,050	0,7613	0,011	3,8269	0,003
78,75	1,0000	0,0	0,1922	0,026	1,9509	0,0
90,0	1,0000	0,0	0,0	-	0,0	-



5 - Conclusões

Os resultados apresentados mostram que a formulação apresentada oferece resultado bastante bons na determinação de deslocamentos e solicitações internas em vigas curvas de grande curvatura.

Para complementar a formulação proposta, pode-se desenvolver um processo para determinação de tensões, já que o princípio variacional usado, bem como o campo de deslocamentos, não permitiram boa convergência no cálculo direto das tensões.

6 - Referências

- 1 - Bethe, K.J e Wilson, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, 1976.
- 2 - Bento, F., e Barcellos, C.S., "Desenvolvimento de um modelo de elemento de haste curva para o método de elementos finitos", Tese de Mestrado, UFSC,
- 3 - Cook, R.D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Willey, 1974.
- 4 - Ferguson, G.H., e Clark, R.D., "A variable thickness, curved beam and sheel stiffening element with shear deformations", International Journal of Numerical Methods in Engineering, 4, pp. 581-592, 1979.
- 5 - Huebner, K. H., "The Finite Element Method for Engineers", Willey, 1975.
- 6 - Langhaar, H. L., "Torsion of curved beams od rectangular cross section", Journal of the Applied Mechanicc - Transactions of the ASME, March, pp. 49-53, 1952.

ANAIS		PROCEEDINGS
	COBEM 81 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA	
	RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981	
TRABALHO PAPER	N.º D-22	P. P. 215 - 224 PUC/RJ

ANÁLISE DE DEFORMAÇÕES DE UNIÕES PARAFUSADAS PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS

Adyles Arato Junior, M. Sc.

FEIS/UNESP, Ilha Solteira, SP.

Nelson Back, Ph. D.

Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC

SUMÁRIO

O presente trabalho apresenta um método de cálculo das deformações em uniões parafusadas, adotando o método de elementos finitos como ferramenta de cálculo. O procedimento desenvolvido também permite o cálculo da pressão nas superfícies de contato das peças unidas por parafusos. Para mostrar a validade do método, foram analisados dois tipos de uniões parafusadas e os resultados teóricos são comparados com dados medidos em modelos experimentais.

SUMMARY

This work presents a method, developed to calculate the deformations in bolted joints, using the finite element method as a tool. The procedure, also permits de calculation of the pressure distribution at the contacting surfaces of the clamped components. To show the precision of the theoretical results, these are compared with the measured results from test rigs.

1 - Introdução

Em certas aplicações práticas de uniões parafusadas, tem-se por principal atividade a análise da resistência estática e a resistência à fadiga dos parafusos, sem maiores preocupações com relação à rigidez do conjunto e da distribuição de pressão de contato das peças. Há casos, como em máquinas ferramentas, nos quais o principal objetivo é o projeto de uniões rígidas e para que isto seja possível, é necessário que se tenha um método que permite uma determinação precisa das deformações no sistema da junção parafusada. Em flanges parafusados de vasos sob pressão é necessário que se garanta uma boa vedação e isto é viável quando se tem um bom conhecimento da distribuição de pressão de contato no flange.

A formulação teórica do método, de cálculo das deformações e da distribuição de pressão de contato de corpos elásticos em contato, encontra-se descrita nas referências [1, 2, 3]. A adaptação do método para a análise de uniões parafusadas encontra-se, em detalhes, nas referências [4 e 5] e no próximo ítem será apresentado um resumo do mesmo.

2 - Método de Cálculo

O primeiro passo do método consiste em traçar uma malha de elementos finitos do sistema da junta parafusada, tendo como única restrição que os nós sobre as superfícies de contato sejam coincidentes como mostra a figura 1. Estes nós são interligados por elementos especiais de barra, com uma rigidez axial e de cisalhamento dadas por:

$$K_n(i) = \left[\frac{\lambda_n^{(1-m)}(i)}{C} \right]^{1/m} \Lambda(i) \quad (1)$$

$$K_s(i) = \frac{\Lambda(i)}{R} \left(\frac{\lambda_n(i)}{C} \right)^{S/m} \quad (2)$$

Nestas equações C, m S e R são parâmetros dependentes do par de materiais e do acabamento superficial no contato

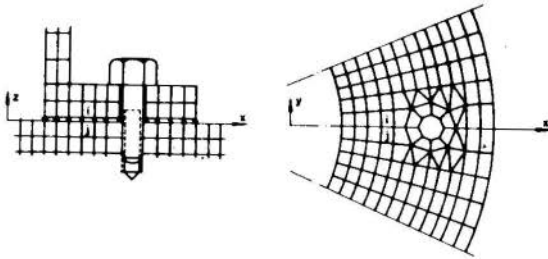


Figura 1 - Malha de elementos finitos de um flange parafusado.

das peças unidas [2], $A(i)$ é a área de contato de influência de cada par de nós i . O valor de $\lambda_n(i)$ é a deformação de contato ou seja a compressão das asperezas das superfícies quando submetidas a uma pressão de contato $p_n(i)$. Estes dois valores estão relacionados pela equação

$$\lambda_n(i) = C(p_n(i))^m \quad (3)$$

onde adota-se as unidades de $\lambda_n(i)$ em μm e de $p_n(i)$ em N/cm^2 .

Definida a malha de elementos finitos e para uma primeira iteração, arbitrada uma distribuição de pressão função do carregamento externo, pode-se com o auxílio da equação (3) definir, para todos os pares de nós, os valores de rigidez dadas pelas equações (1) e (2). Tem-se assim os dados preparados para submeter a um programa de elementos finitos, obtendo a configuração deformada da estrutura. Através desta configuração, os valores da rigidez das barras serão re-definidas para uma nova iteração e assim sucessivamente até conseguir a convergência como descrito nas referências [1,2].

A seguir serão apresentados os resultados teóricos obtidos, adotando o método de cálculo proposto no ítem anterior e que são comparados com resultados teóricos [6] ou medidos em modelo experimental.

3 - Modelo de dois discos com um parafuso central

A figura 2a mostra o modelo de dois discos com um parafuso central. Para a análise teórica, o efeito do parafuso foi substituído por uma pressão, resultante da força de aperto, uniformemente distribuída na região de contato da cabeça e da porca. Este modelo, adotado na referência [6], apresenta um raio de furo nas chapas $R_i=2,54$ mm, um raio externo da porca $R_c=7,87$ mm, raio extremo dos discos $R_e=39,12$ mm e espessuras h das chapas de 1,27, 2,54, 3,38 e 5,08 mm. A força de aperto do parafuso foi de 4994N, o que corresponde a uma pressão média no contato de $1,04$ N/mm².

A malha de elementos finitos, empregada na solução do problema, está apresentada nas figuras 2b e 2c. A figura 2b mostra um corte dos discos com a representação dos elementos binodais e a figura 2c mostra a malha adotada num setor de 30°. Nos discos foram adotados elementos quadrangulares com rigidez de membrana e flexão e para a solução foi adotada o programa PROASE [7]. Na figura 2b tem-se, também, indicados os carregamentos nodais resultantes do carregamento do aperto do parafuso.

Considerando o aço para material dos discos e acabamento superficial, o retificado, então, tem-se para os parâmetros das superfícies em contato, $C=0,09$, $m=0,5$, $R=0,12$ e $S=0,5$. Resolvendo tem-se, na figura 3, a distribuição de pressão no contato dos dois discos considerando diferentes espessuras dos mesmos. Nesta figura tem-se $p_{n,q}$, a pressão de contato num ponto q e p é a pressão resultante da força de aperto do parafuso como mostra a figura 2a. A figura 4 mostra a deformação normal à superfície de contato. Na região próxima do parafuso central tem-se valores negativos de λ_n e que representam a metade da compressão das asperezas e na região mais afastada, os valores positivos representam a metade da separação dos discos.

A figura 5 mostra uma comparação entre os resultados da distribuição de pressão de contato obtida pelo método proposto neste trabalho e o método proposto na referência [6].

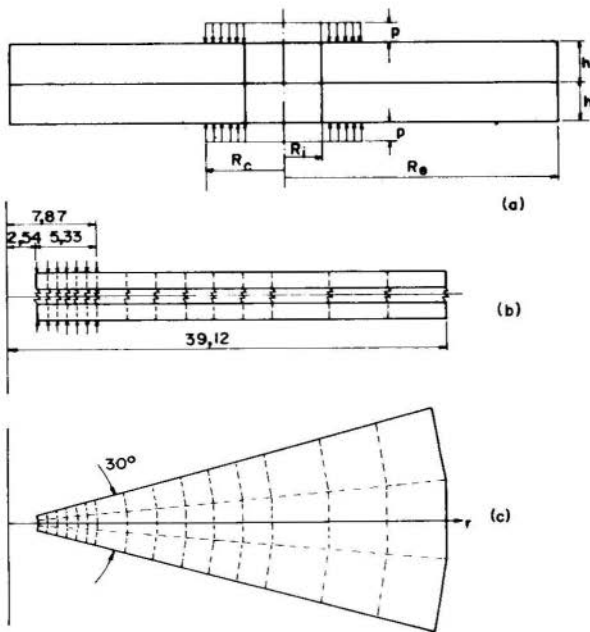


Figura 2 - Modelo de discos com parafuso central e malha de elementos finitos.

Neste último, também, foi adotado o método dos elementos finitos, mas na região de contato, onde havia tensões de compressão, considerou-se uma ligação integral dos dois discos ou seja um nó comum no contato e na região onde haviam tensões de tração considerou-se uma separação das duas peças e um nó foi substituído por dois, um em cada peça. Analisando os resultados verifica-se que os mesmos são coerentes com os esperados quando a espessura dos discos é aumentada. Para a maior espessura dos discos, figura 5c, o valor obtido na referência [6] apresenta uma maior diferença, mas analisando os resultados no seu conjunto, este último resultado não apresenta uma tendência lógica.

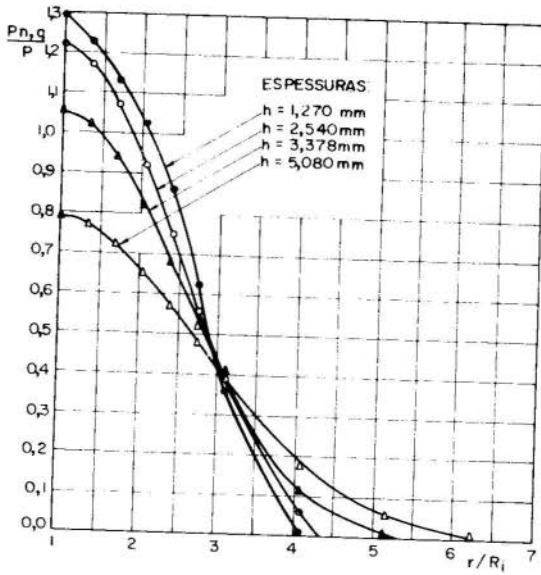


Figura 3 - Distribuição de pressão de contato dos discos ao longo do raio, para diferentes espessuras.

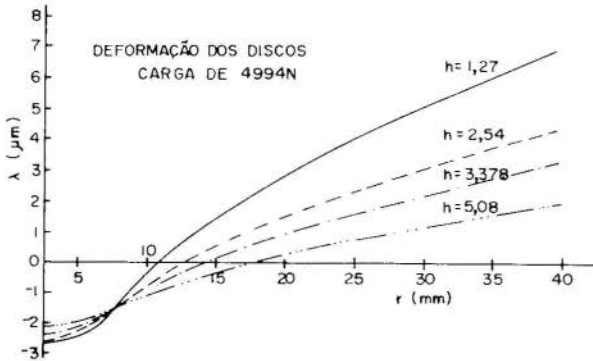


Figura 4 - Deflexão dos discos, normal ao contato dos mesmos.

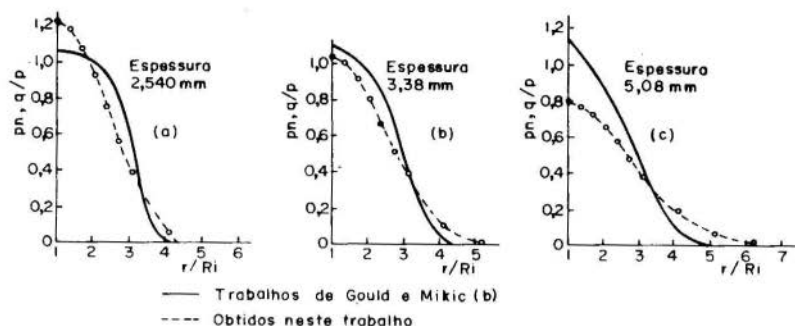


Figura 5 - Comparação dos resultados da distribuição de pressão no contato dos discos.

4 - Modelo de uma coluna de secção circular parafusada na base

Na figura 6 tem-se o modelo de uma coluna fixa, a uma base rígida, através de quatro parafusos M6 igualmente espaçados. A base e a coluna são de aço e as superfícies de contato foram retificadas e desta forma adotou-se os valores de $C=0,09$ e $R=0,12$. Na figura 7 está indicada a malha de elementos finitos de metade do flange uma vez que o modelo apresenta um plano de simetria de carregamento e geometria. Para o flange e a coluna foram usados elementos planos quadrangulares e triangulares com rigidez de membrana e flexão. Os furos circulares, de passagem dos parafusos, foram aproximados por furos hexagonais e a força de aperto de cada parafuso, de 21000N, foi distribuída, igualmente, entre os seis nós do entorno dos mesmos.

Considerando os carregamentos, a mesma força de aperto nos quatro parafusos e uma força pontual horizontal a uma altura de 320mm e adotando o programa PROASE [7], obtém-se os deslocamentos nodais mostrados na figura 6. Para verificar a precisão do método de cálculo foi construído um modelo experimental, nas dimensões da figura 6 e mediu-se os deslocamentos horizontais na coluna dos pontos 1 e 2, respectivamente, nas alturas de 280mm e 400mm, A tabela 1 mostra uma compara-

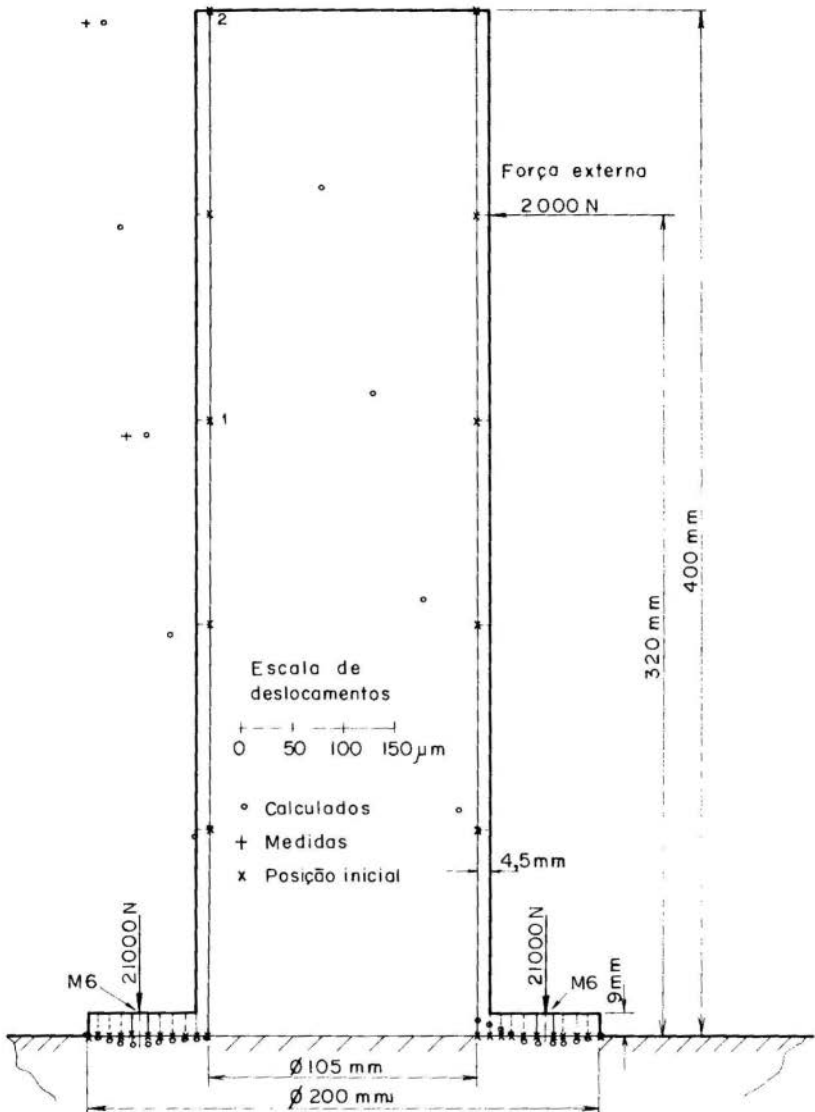


Figura 6 - Modelo da coluna tubular parafusada numa base rígida e indicação dos deslocamentos calculados e medidos devidos ao carregamento externo e de aperto dos parafusos.

ção entre os resultados teóricos e experimentais bem como a diferença entre os resultados da coluna com a junta flexível e a junta rígida.

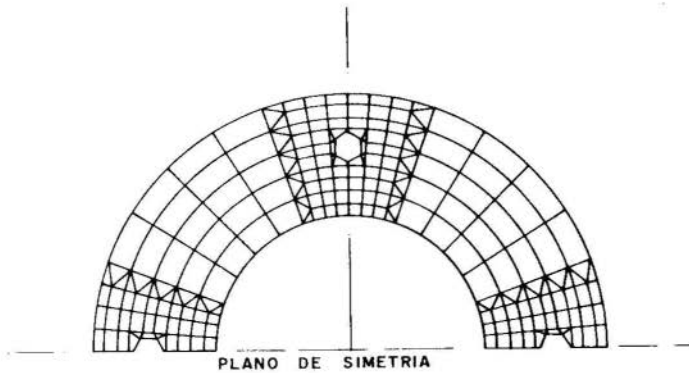


Figura 7 - Malha de elementos finitos do flange da coluna.

Tabela 1 - Deflexões calculadas e medidas na coluna

Método Posição	Teórico com a junta flexível $ \mu\text{m} $	Teórico com a junta $ \mu\text{m} $	Medições $ \mu\text{m} $
1	59,3	17,9	80,0
2	104,27	29,5	117,0

Tomando os valores medidos como referência, as diferenças entre os resultados experimentais e os teóricos nos pontos 1 e 2 são respectivamente, de 25,0% e 10,9%.

5 - Conclusões

Na figura 5 tem-se a comparação dos resultados, da distribuição de pressão de contato dos discos, obtidos por dois métodos teóricos. Os resultados do método proposto apresentam uma tendência de diminuição da pressão, próxima do parafuso e distribuição sobre uma área maior, quando a espessura dos discos aumenta. Estes resultados são os esperados. A simulação do contato na referência [6], na região onde os dis-

cos entram em contato, não é adequada, isto porque, considera uma ligação rígida entre os mesmos, logo as diferenças podem ser justificadas.

No modelo da coluna tubular obteve-se uma razoável aproximação entre os resultados teóricos e os medidos. As diferenças podem ser atribuídas aos erros da própria solução por elementos finitos, adotando uma malha de elementos mais apropriadas, erros de fabricação do modelo, principalmente, no plano de contato com a base e os erros da medição.

6 - Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, à FINEP e à CNEN pelo apoio recebido.

7 - Referências

- [1] - BACK, N., Deformations in Machine Tool Joints, Ph. D. Theses, University of Manchester Institute of Science and Technology, UMIST (1972).
- [2] - BACK, N., BURDEKIN, M., and COWLEY, A., Pressure Distribution and Deformations of Machined Components in Contact, Int. Journal of Mechanical Science, Vol. 15, pp. 993-1010 (1973).
- [3] - BURDEKIN, M., BACK, N., and COWLEY, A., Analysis of Local Deformations in Machine Joints, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 21, nº1, pp. 25-32 (1979).
- [4] - ARATO JUNIOR, A., Distribuição de Pressão e de Deformações em Uniões Parafusadas, Dissertação de Mestrado, UFSC, dezembro (1979).
- [5] - BACK, N., e ARATO JUNIOR, A., Um método de Cálculo da Distribuição de Pressão e das Deformações de Uniões Parafusadas, Anais do V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Trabalho Tecnológico Nº CT-14, pp.270-279, Campinas, dezembro (1979).
- [6] - GOULD, H. H. and MIKIC, B. B., Arcas of Contact and Pressure Distribution in Bolted Joints, Journal of Engineering for Industry, pp. 864.870 (1972).
- [7] - ALVES, D. B., PROASE - Programa Analisador de Sistemas Estruturais, Centro Tecnológico, UFSC.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-23

P.P. 225 - 230

PUC/RJ

FINITE ELEMENT ANALYSES OF SHELLS USING LARGE ELEMENTS AND A COLLOCATION METHOD OF SOLUTION

Dr. John Sutcliffe
Department of Mechanical Engineering,
University of Liverpool,
Liverpool,
United Kingdom.

1. First Abstract

Une méthode par collocation pour la solution des problèmes de coques demande qu'un nombre suffisant d'équations, obtenues à partir des conditions d'équilibre et de deflexion existent pour que l'on puisse évaluer toutes les constantes des termes de la solution.

En séparant les effets dues aux conditions d'équilibre statique des autres conditions on propose pour la solution des problèmes de coques l'utilisation d'éléments finis de tres grande dimensions.

2. Second Abstract

A collocation method of solution for shell problems requires sufficient equations, from the application of equilibrium and deflection conditions, to enable all the constants in a series solution to be obtained.

By separating the effects of statically determinate equilibrium conditions from the remainder, it is proposed that very large finite elements may be used for shell problems.

3. Introduction

The most common procedure for stress analysis using finite elements is to use a minimum energy principle to evaluate the constants of a series solution. In the case of shell problems this usually leads to the approximation of distributed pressure loads by concentrated loads at the node points.

By contrast, the collocation method, while still using a series solution, evaluates the constants by direct solution of a system of shell equilibrium and compatibility equations at the nodal points. It is not necessary to approximate distributed loads by concentrated loads.

The principle of this approach has been demonstrated using quite large elements for a number of shell problems in Reference [1] and refined for reduced computer storage requirements in Reference [2].

The object of this present paper is to outline a method of extending this method to higher order elements in order to attempt solutions of higher accuracy with a given number of elements or alternatively to use fewer elements with the same accuracy.

4. Series Displacement Relations and Shell Equations

Any system of shell equations can in principle be used as a basis of this collocation method. The formulation based on the well known equations of Flügge [3] for shells with symmetrical geometry and loading, as detailed in [1], involves the following variables.

$$\begin{aligned}
 &\text{Force and moments per unit length: } N_{\varphi}, N_{\theta}, Q_{\varphi}, M_{\varphi}, M_{\theta}. \\
 &\text{Displacements: } v, w, \delta, \beta \qquad \qquad \qquad (1) \\
 &\text{Loads: pressure } p_{\varphi} \text{ and } p_r, \text{ components of edge loads, } V \text{ and } H.
 \end{aligned}$$

The notation and sign conventions are as given in the above references. A ring shaped finite element is assumed and any shell structure to be analysed is divided up into a number of such rings. Thus this method is applicable to shells made up of axi-symmetric sections. Now the series displacement relations for the components of displacement v (along the meridian) and w (perpendicular to the meridian) are assumed to be:

$$\begin{aligned} v &= k_1 + k_2 s + k_3 s^2 \dots\dots\dots \\ w &= k_6 + k_7 s + k_8 s^2 \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2)$$

where s is a distance along the shell meridian.

In references [1] and [2] the series for v terminated with the s^4 term and the series for w terminated with the s^5 term.

Now by using the stress equations, which interconnect all the stress resultants, displacements and loads, it is possible to express all these variables in terms of these displacements v and w (or their differentials).

Further, the boundary conditions at the two edges of a ring element consist of equilibrium conditions and matched displacement conditions. These boundary conditions can therefore be given in terms of the variables (1), which in turn can be given in terms of the constants k_1 etc. at the two ends of an element ($s = 0$ would be taken at one end of an element and $s = l$, the meridional length of the element, at the other end). Now these boundary conditions have been shown to be 11 in number and so the eleven constants $k_1 - k_{11}$ can be found by computer solution of the corresponding eleven linear algebraic equations.

If an actual shell structure is divided into n elements, $11n$ equations will have to be solved simultaneously to obtain all the constants for the displacement series for all the elements.

However, it was shown in Reference [2] that six of the eleven conditions can be considered as determined by overall equilibrium conditions, independently of inter-element boundary conditions.

This enables the solution for the six corresponding constants to be carried out separately for each element. The final simultaneous equation set for all the elements is therefore greatly reduced to $4n$ in size. (The remaining constant is for zero rigid body motion.)

5. Internal Collocation Points

It is now suggested that the series solutions for the displacements v and w are extended to cover larger s values and thus the corresponding larger elements would reduce the number of equations required for the solution of a given shell. Accuracy would be maintained by the use of internal collocation points between the two end nodes at the edges of a ring element. At these internal 'nodes', equations for the 'statically

determinate' loading conditions would be obtained. This would lead to overall economy of constants and corresponding equations. Extra terms and constants would be added to the series solutions (2) for v and w . This may be illustrated by considering the analysis of a shell of total meridional length $3s$ in two alternative ways.

(a) A solution by the procedure of Reference [1]

Divide the shell into three elements, each of meridional length s . Then 3×11 equations would be required for a solution of all constants and so all stresses and displacements.

These equations correspond for each element to a total of four conditions of loading and displacement at the two outer edges and there are three 'statically determinate' loading conditions at each edge of each element. Finally there must be one displacement condition corresponding to zero axial body displacement for each element.

The numbers of equations for the various boundary conditions would be:

No axial rigid body motion displacement	- 3
Total mixed boundary conditions at outside edges of outside elements	- 4
3 loading conditions at each edge of each element	- 18
2 displacement and 2 force continuity conditions at each internal edge	- 8
Total	<u>33</u>

(b) A solution using one large element of meridional length $3s$

with internal nodes only at $s = s$ and $s = 2s$. The numbers of equations for the various boundary conditions would now be:

No axial rigid body motion displacement	- 1
Total mixed boundary conditions at outside edges	- 4
3 loading conditions at 2 outside edges and 2 internal nodes	- 12
Total	<u>17</u>

The difference between procedures (a) and (b) amounts therefore to the use of 16 less constants. These correspond to the 4

continuity conditions of deflection and loading at the 2 edges at each of the 2 nodes at $s = s$ and $s = 2s$ in case (a).

As the assumption is for one continuous function in case (b), which acts over the whole length $3s$, then continuity of deflection and loads must be automatically achieved. (As there are power functions in s for the displacement v and w , there must be corresponding power functions in s , for all other displacements and all stress resultants).

However, it is clear, that if these power functions of s are to be matched to the requirement of, for example, 17 conditions for the solution of one element with 2 internal nodes, then 17 constants must be provided in the series for v and w .

This could be done, for example, by series:

$$\begin{aligned} v &= k_1 + k_2 s + k_3 s^3 \dots \dots \dots k_8 s^7 \\ w &= k_9 + k_{10} s + k_{11} s^3 \dots \dots \dots k_{16} s^7 + k_{17} s^8 \end{aligned} \quad (3)$$

It is clear that the number of equations and corresponding constants for the two outside edges of an element is a total of 11 and the number of equations and constants for each internal node is 3. Therefore for n internal nodes the total equations and constants will be $11 + 3n$ per element.

Hence for m elements in a complete shell structure a total of $m(11 + 3n)$ constants will be required.

6. Alternative Power Series

Although no difficulty has been found in solving problems using power series with terms up to s^5 , it might be that computational problems could result in using power series with high powers such as s^8 or greater.

One possible solution in the event of such problems might be to write the series in terms of $\frac{s}{A}$ where A is a constant so that $\frac{s}{A}$ is of the order 1.

Another suggested possibility for experimentation would be to use fractional indices instead of whole numbers for the series representing the displacements, e.g. instead of $k_1 + k_2 s + k_3 s^2 + k_4 s^3 \dots$ use: $k_1 + k_2 s + k_3 s^{1.1} + k_4 s^{1.2} + \dots$

Whereas when using 'closed' mathematical solutions such series may be intractable and therefore lack interest, using computers, the computation of such series would introduce new possibilities of

functional representation.

7. Conclusions

A proposal for a finite element analysis applicable to thin shells has been made. Using large ring elements power series solutions are to be assumed for displacement with distance along the shell. A comparatively large number of terms is to be used in the series. The exact total number of terms used must match the requirements corresponding to the number of internal nodes, or internal collocation points, assumed for each element. A formula has been derived for these numbers.

As shell equations are satisfied within the high accuracy arising from an appropriately larger number of collocation points a high efficiency, of maximum accuracy of results versus minimum total calculation effort, is hoped for.

It seems difficult to establish general balance between numbers of elements and numbers of internal nodes but numerical experimentation could establish guide lines.

Although this procedure has been outlined for axi-symmetric loading conditions it can be readily extended to unsymmetrical loading. It is possible that these procedures of collocation application might be used in other areas than shell stress analysis, if based on similar differential equations and boundary conditions.

8. References

- [1] Sutcliffe, W. J. "A Collocation Method for Stress Analysis of Shells Using Finite Elements", from 'Developments in Stress Analysis for Pressurised Components', by R. W. Nichols (ed.), Chapter 4, pp. 99-117, Applied Science Publishers, London (1977).
- [2] Sutcliffe, W. J. "A Collocation Finite Element Method with Prior Matrix Condensation", Proc. of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, (1977).
- [3] Flügge, W. "Stresses in Shells", Springer-Verlag, Berlin (1967).



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECANICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-24

P.P. 231 - 241

PUC/RJ

UM MODELO DE SÓLIDO ESFÉRICO PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

João Pedro Quirino

Depto. de Engenharia Mecânica
 UNESP/FEIS, Ilha Solteira-SP

Clóvis Snerb de Barcellos, Ph.D.

Depto. de Engenharia Mecânica
 UFSC, Florianópolis-SC

SUMÁRIO

O presente trabalho apresenta um modelo de sólido esférico com formulação isoparamétrica de elementos finitos o qual foi desenvolvido com base no princípio da energia potencial mínima utilizando o procedimento conhecido como método dos deslocamentos.

SUMMARY

This work presents a solid spheric model within isoparametric formulation of finite elements which was developed within based in the minimum potential energy principles using the proceeding known as displacement methods.

1. Introdução

Devido ao fato de os elementos de geometria esférica serem bastante comuns em estruturas, formulou-se o presente modelo de cálculo visando explorar esta propriedade geométrica a fim de tornar a análise estrutural destes elementos mais prática e econômica pelo Método de Elementos Finitos.

2. Definição do Modelo

O modelo é definido por 20 pontos nodais sendo 8 nos vértices e os demais nos pontos intermediários das arestas (fig. 1). É um elemento quadrático que utiliza funções de interpolação do tipo "serendipity" de 2º grau. Elas interpolam tanto geometria como deslocamentos sobre o elemento [3].

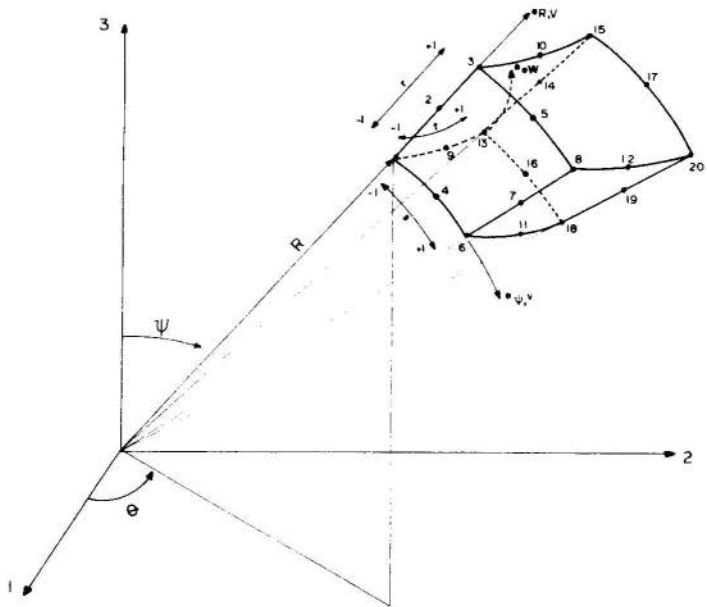


FIG 1: O MODELO DE SÓLIDO ESFÉRICO COM A NUMERAÇÃO INTRÍNSECA DOS NÓS, COORDENADAS NATURAIS (r, s, t) , COORDENADAS ESFÉRICAS (R, ψ, θ) , COORDENADAS CARTESIANAS $(1, 2, 3)$

Satisfazem a continuidade entre elementos, são conformes e satisfazem também o critério de completividade. Estes requisitos são necessários para a convergência do modelo.

A especificação das funções de interpolação é feita como uma combinação das coordenadas intrínsecas (r, s, t) do elemento e das coordenadas dos pontos de integração considerados [1]. Nos pontos nodais sobre os vértices, as funções de interpolação são definidas como [3]:

$$FI(k) = (1/8) (1 + rr_k) (1 + ss_k) (1 + tt_k) (rr_k + ss_k + tt_k - 2) \quad (1)$$

onde $r_k, s_k, t_k = \pm 1$ e r, s, t variam entre -1 e $+1$. As funções de interpolação para os pontos intermediários das arestas são definidas por:

$$FI(k) = (1/4) (1 - r^2) (1 + ss_k) (1 + tt_k) \quad (2a)$$

para $r_k = 0, s_k = \pm 1, t_k = \pm 1$.

$$FI(k) = (1/4) (1 - s^2) (1 + rr_k) (1 + tt_k) \quad (2b)$$

para $s_k = 0, r_k = \pm 1, t_k = \pm 1$.

$$FI(k) = (1/4) (1 - t^2) (1 + rr_k) (1 + ss_k) \quad (2c)$$

para $t_k = 0, r_k = \pm 1, s_k = \pm 1$.

As coordenadas esféricas de um ponto qualquer do elemento são dadas por uma combinação linear das funções de interpolação e das coordenadas nodais:

$$R = \sum_{i=1}^n FI(i) R(i)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^n FI(i) \psi(i) \quad (3a, b, c)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^n FI(i) \theta(i)$$

onde $R(i)$, $\psi(i)$, $\theta(i)$ são coordenadas dos pontos nodais. Analogamente, para os deslocamentos temos:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^n FI(i) U(i) \\ V &= \sum_{i=1}^n FI(i) V(i) \\ W &= \sum_{i=1}^n FI(i) W(i) \end{aligned} \quad (4a,b,c)$$

Sendo $U(i)$, $V(i)$, $W(i)$ os deslocamentos nodais.

3. Formulação do Modelo

A formulação se baseia no Método dos Deslocamentos utilizando para tanto o Princípio da Mínima Energia Potencial. Este princípio requer que a 1.^a variação da energia potencial total Π seja nula, ou seja: $\delta\Pi = 0$.

São assumidos campos de deslocamento contínuos sobre cada elemento a fim de garantir a compatibilidade de deslocamento entre eles.

Seja Π a energia potencial total do corpo. Então, a 1.^a variação [3] é:

$$\delta\Pi = \int_V \delta\varepsilon^T D \varepsilon \, dv - \int_V (\delta\varepsilon^T D \varepsilon^0 + \delta u^T b) \, dv - \int_{sp} \delta u^T P \, ds = 0 \quad (5)$$

onde

$$u = \sum_j FI(j) U^j \quad (6)$$

Tendo em conta as relações deformações-deslocamentos [7, 8], podemos derivar (6) obtendo

$$\varepsilon = BU^i \quad (7)$$

Substituindo as equações (6,7) em (5) e tendo em vis-

ta que os deslocamentos U^i e as variações δU^i não dependem da posição e tendo em vista também que os $\delta U^i, T$ são arbitrários tem-se que

$$K^i U^i = p^i \quad (8)$$

sendo

$$K^i = \int_{V_i} B^T D B dV \quad (9)$$

a matriz de rigidez do elemento;

$$p^i = \int_{V_i} (B^T D \epsilon^0 + F I^T b) dV + \int_{S_p} F I^T P ds \quad (10)$$

o vetor equivalente de carga nos pontos nodais; ϵ^0 , vetor de deformações iniciais; b , vetor de forças de corpo atuando no volume V_i do elemento; P , vetor forças de superfície atuando na superfície prescrita S_p do elemento.

Para uma estrutura dividida em n elementos escreve-se o sistema de equações como

$$\sum_{i=1}^n K^i U^i = \sum_{i=1}^n p^i \quad (11)$$

ou seja

$$K U = P \quad (12)$$

Antes de resolver o sistema de equações (12), o mesmo deve ser modificado com a introdução das condições de contorno do problema.

4. Montagem da Matriz B

A matriz B da equação (7) é montada a partir de uma combinação das funções de interpolação e das derivadas destas. Escrevendo as relações deformação-deslocamento [7, 8] em coordenadas esféricas tem-se:

$$\epsilon_r = \frac{\partial U}{\partial R}$$

$$\epsilon_{\psi} = \frac{1}{R \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{U}{R} + \frac{W}{R} \cotan(\theta)$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{U}{R} \quad (13a, b, \dots, f)$$

$$\gamma_{R\psi} = \frac{1}{R \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R}$$

$$\gamma_{\psi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{V}{R} \cotan(\theta) + \frac{1}{R \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{\theta R} = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{W}{R} + \frac{\partial W}{\partial R}$$

Agora, as equações (7), tendo em vista as equações (13), tornam:

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} E_R \\ E_{\psi} \\ E_{\theta} \\ \gamma_{R\psi} \\ \gamma_{\psi\theta} \\ \gamma_{\theta R} \end{array} \right] = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} B(1, K+1) & 0 & 0 \\ B(2, K+1) & B(2, K+2) & B(2, K+3) \\ B(3, K+1) & 0 & B(3, K+3) \\ B(4, K+1) & B(4, K+2) & 0 \\ 0 & B(5, K+2) & B(5, K+3) \\ B(6, K+1) & 0 & B(6, K+3) \end{array} \right]}_{1^{\circ} \text{ Bloco}} \dots \underbrace{\left[\begin{array}{c} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{20} \\ V_{20} \\ W_{20} \end{array} \right]}_{20^{\circ} \text{ Bloco}} \quad (14)$$

onde: $B(1, k+1) = H(1)$
 $B(2, k+1) = FI(NB)/RPI$
 $B(3, k+1) = FI(NB)/RPI$
 $B(4, k+1) = H(2)/[RPI * \operatorname{sen}(TPI)]$
 $B(6, k+1) = H(3)/RPI$
 $B(2, k+2) = H(2)/[RPI * \operatorname{sen}(TPI)]$
 $B(4, K+2) = H(1) - FI(NB)/RPI$

$$B(5, k+2) = H(3)/RPI - [FI(NB) * \cotan(TPI)]/RPI$$

$$B(2, k+3) = [FI(NB) * \cotan(TPI)]/RPI$$

$$B(3, k+3) = H(3)/RPI$$

$$B(5, k+3) = H(3)/[RPI * \sen(TPI)]$$

$$B(6, k+3) = H(1) - FI(NB)/RPI$$

sendo:

NB = número do bloco de B

k = 3(NB - 1)

H(i) = derivadas das funções de interpolação segundo as direções (R, ψ , θ). Elas são calculadas com auxílio da matriz Jacobiano [3,4].

RPI, TPI são, respectivamente, o raio e o ângulo θ do ponto de integração considerado.

5. Cálculo da Matriz de Rigidez K^e

O cálculo da matriz de rigidez do elemento é feito no sistema de referência esférico sendo usado o processo de integração numérica de Gauss-legendre para avaliar a integral proposta em (9). No presente modelo foi suficiente utilizar dois pontos de integração em cada direção para avaliar o volume do elemento exatamente, sendo satisfeita a condição para a convergência do método de elementos finitos [3, 6].

A integral $K^e = \int_V B^T DB dv$ é escrita na forma:

$$K^e = \sum B^T DB \det [J] R^2 \sen(\theta) A_{ijk} \quad (15)$$

onde: $A_{ijk} = (A_i) (A_j) (A_k)$ pesos de integração;

R = RPI, raio do ponto de integração;

θ = TPI, ângulo θ do ponto de integração;

D = matriz de propriedades constitutivas do material [4].

6. Carregamento Distribuído

O carregamento distribuído pode ser devido a uma pres

são normal à superfície ou devido a cargas cisalhantes agindo tangencialmente à superfície. Tal carregamento recebe um tratamento especial [1]. As forças nodais equivalentes são calculadas no sistema esférico e alguns cuidados são tomados a fim de que elas possam ser usadas corretamente pelo método de Elementos Finitos. A equivalência é estabelecida pela igualdade entre o trabalho realizado pela carga distribuída e o trabalho realizado pela força nodal equivalente.

O trabalho realizado pelo carregamento superficial atuando sobre um elemento de área dA é

$$dWe = Q^T T dA \quad (16)$$

onde $Q^T = [q_1, q_2, q_3]$ é o vetor deslocamento e $T^T = [T_1, T_2, T_3]$ é o vetor força distribuída. Com $q_i = FI(i) U(ij)$; $T_i = FI(i) T(ij)$. Substituindo estes valores em (16) chega-se que

$$dWe = U^T (FI)^T (FI) T dA \quad (17)$$

E o trabalho sobre toda a superfície carregada do elemento é

$$We = \int_A U^T (FI)^T (FI) T dA \quad (18)$$

Para obter as forças equivalentes ao carregamento externo distribuído deve ser feita a 1ª variação de We , ou seja,

$$\delta We = \sum_i W_{,ui} \delta u_i \quad (19)$$

onde $W_{,ui}$ é a força nodal equivalente que corresponde ao grau de liberdade U_i do elemento. Derivando a expressão (18) em relação a U_i tem-se

$$W_{,ui} = \int_A \underbrace{[00\dots 1 \dots 00]}_{\text{posição de } U_i} (FI)^T (FI) T dA \quad (20)$$

A matriz $(FI)^T$ quando prê-multiplicada pelo vetor, f_i

ca na forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ FI(i) \leftarrow \text{posição de } U_i \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que devido a natureza de FI , o vetor $FI(i)$ possui apenas um elemento não nulo, que depende da direção do grau de liberdade U_i no sistema de referência intrínseco.

O vetor T representa o carregamento distribuído no ponto de integração. É obtido pelos valores nodais e pelas funções de interpolação. Para obter a força equivalente, que corresponde a um dado grau de liberdade, faz-se a integração numérica onde o integrando é o produto do vetor $FI(i)$ pelo vetor T de carregamento distribuído. É calculado em cada ponto de integração. Deve ser levado em conta o peso de integração e o determinante do Jacobiano modificado [1] a fim de passar do sistema natural (r, s, t) para o esférico (R, ψ, θ) .

Cargas concentradas são somadas diretamente no vetor carga do ponto considerado.

Com essas considerações e na ausência de forças de corpo o vetor carga p^i da equação (10) pode ser calculado.

7. Condições de contorno

As condições de contorno são inerentes à solução de cada problema proposto em uma dada análise estrutural. Podem ser tomadas como, por exemplo, a restrição de deslocamentos nas direções ψ, θ quando se tem apenas carregamento na direção radial. Outras situações podem ser previstas quando necessário.

8. Procedimento Computacional

Para que o sistema computacional seja o mais geral possível levando em conta economia de tempo no processamento, este é feito por módulos com funções bem definidas. A referência [9] mostra uma descrição de cada fase do processamento, dos módulos e subrotinas utilizadas.

É levado em conta a simetria do modelo para calcular o Jacobiano e para realizar as integrações numéricas. Uma sequência lógica para o tratamento do problema é dada como:

- Leitura de dados definindo a topologia do elemento;
- Leitura das coordenadas dos nós;
- Leitura e definição da matriz de propriedades do material;
- Leitura de carregamentos térmicos e distribuídos;
- Rearranjo dos dados;
- Montagem das matrizes elementares em termos de valores nodais;
- Sobreposição das matrizes;
- Leitura das condições de contorno;
- Solução do sistema de equações para cada tipo de condições de contorno;
- Relatórios: balanços de energia global, externa e interna, componentes de tensão, tensões principais, valores dos graus de liberdade nodais, etc.

9. Aplicações

Solução de Problemas de Análise de Tensões. Outros problemas tais como Transmissão de Calor e Ondas podem ser resolvidos bastando que, para isto, sejam efetuadas adaptações apropriadas decorrentes da substituição das equações de transmissão de calor e ondas.

10. Conclusões

A implantação do modelo encontra-se atualmente em fase de testes tendo apresentado boa performance e aplicabilidade.

Resultados numéricos estão sendo gerados, utilizando-se um computador IBM 4341, os quais serão apresentados no congresso.

11. Referências

- [1] Barcellos, C.S., Rosa, E. "Expansão do Sistema Modular de Elementos Finitos - SIMELF", Grante, Publicação - 09/80 - CT - UFSC.
- [2] Barcellos, C.S., Rosa E. "Modelo de Transferência Dinâmica de Dados - Buffer - Arquivo - Versão II". UFSC - CNEN - 07/80.
- [3] Brebbia, C.A., Ferrante, A.J. "The Finite Element Technique". Editora da UFGS - Porto Alegre (1975).
- [4] Bathe, K.J., Wilson, E.L. "Numerical Methods in Finite Element Analysis". Prentice-Hall, Inc. (1976).
- [5] Huebner, K.H., "The Finite Element Method for Engineers", John Willey, (1975).
- [6] Zienkiewicz, O.C. "The Finite Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill, (1971).
- [7] Alves, D.B. "Elasticidade". UFSC, (1979).
- [8] Boresi A.P., Lyn, P.P., "Elasticity in Engineering Mechanics". Prentice-Hall, (1974).
- [9] Barcellos, C.S., Rosa, E. "Arquitetura de um Sistema Modular de Elementos Finitos II - Aplicações". V COBEM, Campinas, nº DT-05, p.p. 181-190, dezembro 1979.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-25

P. P. 243 - 253

PUC/RJ

ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DA INTERACÇÃO
SÓLIDO-LÍQUIDO SOB A ACÇÃO DE SOLICITAÇÕES DINÂMICAS

R. Delgado

Assistente da Faculdade de Eng.^a do Porto

R. Martins

Professor Associado da Fac. de Eng.^a do Porto

R. Owen

Reader da Universidade de Gales, Swansea

SUMÁRIO

É apresentada a formulação de elementos que traduzem o comportamento dum fluido, com deslocamentos limitados, a partir de elementos sólidos, anulando a sua rigidez distorsional. É exposto o algoritmo de resolução das equações de equilíbrio dinâmico, bem como o modelo de simulação de zonas de fluido de comprimento indefinido. São feitas aplicações tendo em vista fazer ressaltar a eficiência e possibilidades do modelo descrito.

SUMMARY

A finite element formulation for liquid elements is presented. This is based on a formulation for solid elements in which the torsional rigidity is eliminated. The solution algorithm for the dynamic equilibrium equations is briefly referred and a special model for the simulation of a fluid with infinite length is presented. Some examples are considered showing the efficiency and possibilities of the model described.

1. Introdução

Em alguns domínios da Engenharia põe-se o problema da determinação dos estados de tensão desenvolvidos em estruturas sólidas devidas à acção de fluidos que com elas confinam. É óbvio que o problema não se reveste de qualquer dificuldade em situações estáticas mas apenas em situações dinâmicas.

É o caso do estudo da resposta de barragens a acções sísmicas, de estruturas "offshore" a ondas ou sismos, etc..

Nesta comunicação descreve-se a abordagem deste tipo de problemas usando o método dos elementos finitos num domínio a duas dimensões. Sendo os deslocamentos do fluido limitados, este é tratado do mesmo modo que a estrutura sólida, sendo caracterizado o seu movimento através dos seus deslocamentos. Assim o fluido é considerado como um sólido elástico, mas com um módulo de rigidez distorsional desprezível [1], [2].

A resolução do sistema de equações de equilíbrio dinâmico é feita usando o método de Newmark [3].

O problema de modulação de fluidos de comprimento indefinido [4], é abordado utilizando elementos capazes de absorver a energia das ondas de pressão que a eles chegam, sem as reflectir.

2. Matriz de rigidez dos elementos sólidos e fluidos

A formulação do método dos elementos finitos para problemas de elasticidade plana é do conhecimento geral [5].

Assim a matriz de rigidez é obtida a partir de

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (1)$$

em que [B] é a matriz de deformações e [D] é a matriz de elasticidade.

Para o caso de estados planos de deformação esta matriz tem a seguinte forma:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Como atrás foi dito os elementos de tipo fluido vão ser definidos como um caso particular dos elementos sólidos em que a rigidez distorsional é nula. Para o efeito vamos dar outro aspecto à matriz de rigidez.

A energia de deformação do sistema, sendo a soma da energia devida à distorsão, mais a devida à variação de volume, mais a devida às forças exteriores (de volume e superfície) assumirá o seguinte aspecto:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_d\}^T [D_d] \{\epsilon_d\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_v\}^T [D_v] \{\epsilon_v\} dV - \int_V \{a\}^T \{b\} dV - \int_S \{a\}^T \{t\} dS \quad (3)$$

em que, sendo u e v deslocamentos segundo os eixos coordenados,

$$\{a\} = \{u, v\}^T \quad (4)$$

$$\{\epsilon_d\} = \{\partial u/\partial x, \partial v/\partial y, \partial u/\partial y + \partial v/\partial x\} \quad (5)$$

$$\{\epsilon_v\} = \{\partial u/\partial x + \partial v/\partial y\} \quad (6)$$

sendo materiais isotrópicos

$$[D_d] = 2G \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$[D_v] = k = 2G(1/3 + \nu/(1-2\nu)) = E/3(1-2\nu) \quad (8)$$

1. Introdução

Em alguns domínios da Engenharia põe-se o problema da determinação dos estados de tensão desenvolvidos em estruturas sólidas devidas à acção de fluidos que com elas confinam. É óbvio que o problema não se reveste de qualquer dificuldade em situações estáticas mas apenas em situações dinâmicas.

É o caso do estudo da resposta de barragens a acções sísmicas, de estruturas "offshore" a ondas ou sismos, etc..

Nesta comunicação descreve-se a abordagem deste tipo de problemas usando o método dos elementos finitos num domínio a duas dimensões. Sendo os deslocamentos do fluido limitados, este é tratado do mesmo modo que a estrutura sólida, sendo caracterizado o seu movimento através dos seus deslocamentos. Assim o fluido é considerado como um sólido elástico, mas com um módulo de rigidez distorsional desprezível [1], [2].

A resolução do sistema de equações de equilíbrio dinâmico é feita usando o método de Newmark [3].

O problema de modulação de fluidos de comprimento indefinido [4], é abordado utilizando elementos capazes de absorver a energia das ondas de pressão que a eles chegam, sem as reflectir.

2. Matriz de rigidez dos elementos sólidos e fluidos

A formulação do método dos elementos finitos para problemas de elasticidade plana é do conhecimento geral [5].

Assim a matriz de rigidez é obtida a partir de

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (1)$$

em que [B] é a matriz de deformações e [D] é a matriz de elasticidade.

Para o caso de estados planos de deformação esta matriz tem a seguinte forma:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Como atrás foi dito os elementos de tipo fluido vão ser definidos como um caso particular dos elementos sólidos em que a rigidez distorsional é nula. Para o efeito vamos dar outro aspecto à matriz de rigidez.

A energia de deformação do sistema, sendo a soma da energia devida à distorsão, mais a devida à variação de volume, mais a devida às forças exteriores (de volume e superfície) assumirá o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_d\}^T [D_d] \{\epsilon_d\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_v\}^T [D_v] \{\epsilon_v\} dV - \\ & - \int_V \{a\}^T \{b\} dV - \int_S \{a\}^T \{t\} dS \end{aligned} \quad (3)$$

em que, sendo u e v deslocamentos segundo os eixos coordenados,

$$\{a\} = \{u, v\}^T \quad (4)$$

$$\{\epsilon_d\} = \{\partial u/\partial x, \partial v/\partial y, \partial u/\partial y + \partial v/\partial x\} \quad (5)$$

$$\{\epsilon_v\} = \{\partial u/\partial x + \partial v/\partial y\} \quad (6)$$

sendo materiais isotrópicos

$$[D_d] = 2G \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$[D_v] = k = 2G(1/3 + \nu/(1-2\nu)) = E/3(1-2\nu) \quad (8)$$

Usando o procedimento usual no método dos elementos finitos, obter-se-á a matriz [B] que define as extensões em função dos deslocamentos nodais, através das funções de forma N_i

$$[B_i^d] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[B_i^v] = [\partial N_i / \partial x \quad \partial N_i / \partial y] \quad (10)$$

Substituindo em (5) e efectuando o usual processo de minimização da energia obteremos a seguinte expressão para a matriz de rigidez

$$k_{ij} = \int_V [B_i^d]^T [D_d] [B_j^d] dV + \int_V [B_i^v] [D_v] [B_j^v] dV \quad (11)$$

Com este aspecto podemos agora fazer o módulo de rigidez distorsional $G=0$, e fazer intervir as duas características mecânicas do fluido, o módulo de rigidez volumétrico k , e o coeficiente de Poisson, $\nu=0.5$. Repare-se que $\nu=0.5$ implica, para um valor finito de E , que $k \rightarrow \infty$. Para resolver este problema é fornecido, como dado, um valor de $1-2\nu$ muito pequeno, por exemplo 10^{-8} , e para módulo de elasticidade um valor tal que substituído em (8) nos dê o valor de k desejado.

Acrescente-se finalmente que esta formulação permite o tratamento de materiais incompressíveis, ou seja com $\nu=0.5$. Neste caso surge no entanto uma dificuldade que é a de o módulo de elasticidade E não poder assumir valor qualquer, mas ter de ser o valor característico do material em análise. Isto implica, como é evidente, que o k assumia valores exageradamente elevados, determinando uma tendência para soluções excessivamente rígidas, ou mesmo soluções sem qualquer significado. Esta dificuldade é ultrapassada introduzindo uma singularidade na matriz $[K_v]$, através duma

técnica numérica que consiste em usar uma ordem de integração numérica abaixo da que seria necessária para uma integração exacta. Isto pode ser feito quer usando uma integração selectiva (3×3 na matriz $[K_D]$ e 2×2 em $[K_V]$), quer usando uma integração reduzida (2×2 em ambas as matrizes).

3. Algoritmo de resolução das equações de equilíbrio dinâmico

As equações de equilíbrio dinâmico têm a seguinte forma:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F(t)\} \quad (12)$$

em que \dot{u} e \ddot{u} são a primeira e segunda derivada dos deslocamentos u em relação ao tempo, $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ a matriz de amortecimento, $[K]$ a matriz de rigidez definida em 2. e $\{F(t)\}$ o vector das forças exteriores, em geral dependente do tempo.

Foi utilizado para a resolução numérica do sistema de equações (12) um método tipo implícito, o método de Newmark [5].

As hipóteses que há a fazer são

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{u}_t\} + [(1-\delta) \{\ddot{u}_t\} + \delta \{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}] \Delta t \quad (13)$$

$$\{u_{t+\Delta t}\} = \{u_t\} + \{\dot{u}_t\} \Delta t + [(1/2-\alpha) \{\ddot{u}_t\} + \alpha \{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}] \Delta t^2 \quad (14)$$

Os parâmetros α e δ podem ser definidos tendo em vista uma determinada aproximação, utilizando-se dum modo geral $\delta=0.5$ e $\alpha=0.25$, obtendo-se um esquema incondicionalmente estável.

Considere-se agora o equilíbrio no instante $t+\Delta t$

$$[M] \{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} + [C] \{\dot{u}_{t+\Delta t}\} + [K] \{u_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} \quad (15)$$

Resolvendo (14) em ordem a $\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}$ e substituindo em (13) obteremos $\{\dot{u}_{t+\Delta t}\}$ e $\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}$ em termos de $\{u_{t+\Delta t}\}$.

O sistema de equações (15) pode agora ser resolvido

para determinação de $\{a_{t+\Delta t}\}$.

Foram considerados, no desenvolvimento do estudo, dois tipos de matrizes de massa, uma consistente e outra condensada.

A matriz de massa consistente foi obtida da forma habitual

$$[M] = \int_V [N]^T [\rho] [N] dV \quad (16)$$

em que $[\rho]$ é uma matriz diagonal de massas específicas.

A matriz de massa condensada é obtida distribuindo a massa total proporcionalmente aos elementos da diagonal principal de (16).

Dos ensaios efectuados verificou-se que a matriz de massa consistente modulava de forma mais eficiente o comportamento do fluido, como se pode constatar no exemplo 2.

A matriz de amortecimento é definida como sendo proporcional à matriz de massa

$$[C] = \alpha [M] \quad (17)$$

4. Domínio líquido com comprimento infinito

Um dos pontos que merece atenção no tratamento de problemas com fluidos é a situação dum domínio fluido com comprimento infinito. Vejamos em particular como se poderá simular por exemplo a albufeira duma barragem cujo desenvolvimento a montante se pode considerar praticamente infinito. É, portanto, necessário introduzir a uma distância finita, um tipo de fronteira que não permita a reflexão das ondas que a ela vão chegando.

Situações deste tipo têm sido tratadas sobretudo utilizando elementos infinitos [4] ou integrais fronteira [2].

No presente estudo ensaiou-se uma outra forma de abordagem que consiste em criar nas zonas que nos interessam elementos com umas características tais que tenham a possibilidade de dissipar a energia das ondas que a eles chegam, sem, contudo, darem origem a qualquer tipo de reflexão na superfície de separação dos dois materiais.

O efeito de dissipação é obtido através da matriz de amortecimento [C]. Procurou-se então utilizar valores de α que conduzissem a situações próximas do amortecimento crítico. Este facto acarreta, por sua vez, que os elementos onde é introduzido amortecimento, se tornam mais "rígidos", implicando que se tenha que reduzir o seu módulo de rigidez volumétrica, para que não se verifique reflexão na separação dos dois materiais.

Para o estudo da relação que deve existir entre os módulos de deformação volumétrica das duas zonas, foi implementado, num minicomputador, um programa que simula o tubo do exemplo 2, através de molas elásticas.

Utilizando este modelo mais simples determinou-se com toda a simplicidade a ordem de grandeza da relação procurada, que depois foi testada com os elementos que se têm vindo a descrever.

Dos estudos feitos até ao momento concluiu-se, como se constatará no exemplo 2, que o efeito de dissipação é obtido, com boa aproximação, com um material com a mesma massa específica, com um coeficiente de amortecimento próximo do crítico, mas com uma deformabilidade maior (relação entre as deformabilidades próxima de 5).

5. Aplicações

5.1. Resposta de uma viga encastrada a uma carga uniformemente distribuída subitamente aplicada

A figura 1 representa uma viga encastrada em ambas as extremidades na qual é aplicada subitamente uma carga uniformemente distribuída de 300 lb/in^2 .

A viga é modelada com 5 elementos parabólicos e foi usado um intervalo de tempo $\Delta t = 0.0001 \text{ sec}$ para a sua análise.

Constata-se que os resultados são razoavelmente aproximados com os apresentados por outros autores [6].

5.2. Propagação duma onda de pressão num fluido

A figura 2 representa um tubo fechado numa das extremidades e sujeito a uma pressão de 1 lb/in^2 , aplicada subitamente, na outra extremidade [1]. Para este caso simples

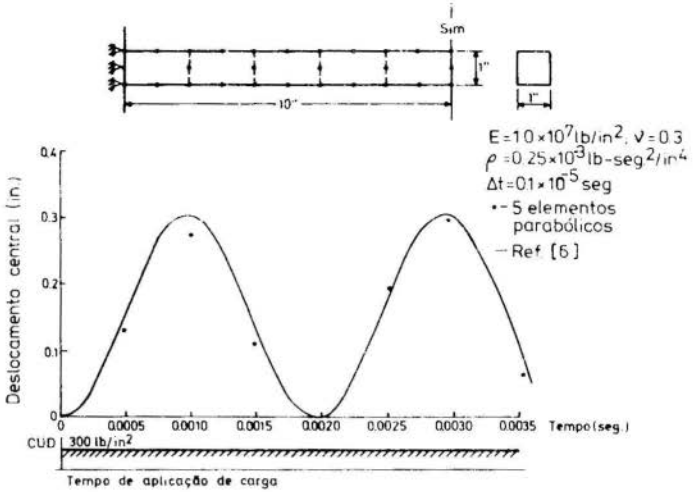


Fig. 1. Resposta dinâmica duma viga encastrada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída subitamente aplicada

é conhecida a solução teórica, da propagação da onda de pressão.

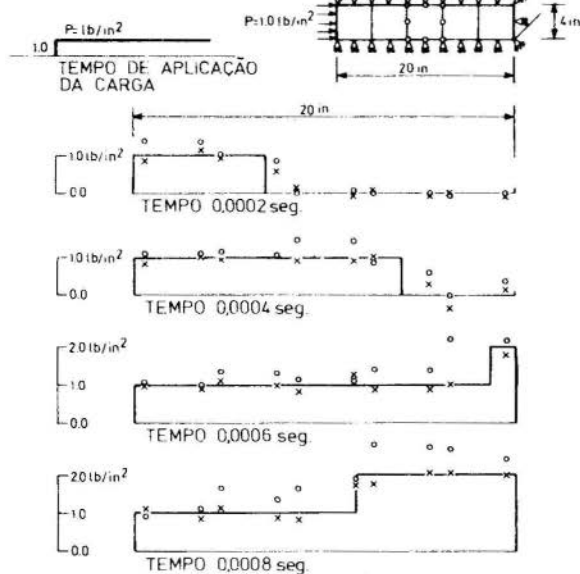
Em primeiro lugar o tubo foi discretizado com 5 elementos parabólicos, todos do mesmo tipo, e foi analisado usando a matriz de massa consistente e a condensada. A utilização da matriz de massa consistente conduziu a resultados muito mais satisfatórios, aproximando-se razoavelmente da solução teórica.

Em segundo lugar procurou-se testar a solução proposta no ponto 4. Para isso introduziu-se mais um elemento de comprimento duplo, e nos dois últimos elementos amortecimento.

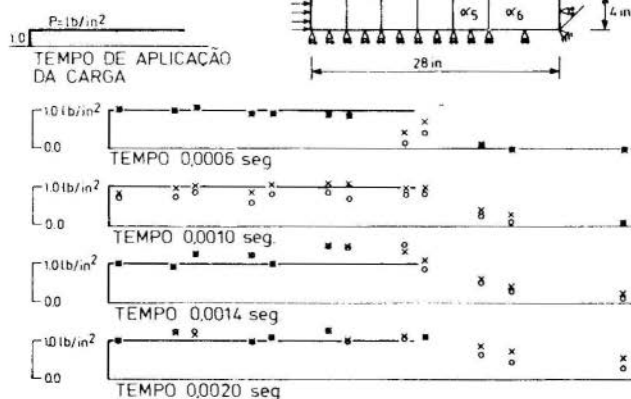
Apresenta-se as soluções correspondentes a $k_1/k_2=5$ e $k_1/k_2=10$.

Verifica-se que em particular para a relação $k_1/k_2=5$ a pressão no tubo se mantém aproximadamente constante e igual ao valor da pressão exterior, não se verificando a duplicação da pressão, por reflexão no fundo, como se verifi-

a) SEM AMORTECIMENTO



b) COM AMORTECIMENTO



a) - Solução teórica

x Matriz de massa consistente

o Matriz de massa condensada

b) $K_1/K_2=10$, $\alpha_5=5564$, $\alpha_6=2832$ $K_1/K_2=5$, $\alpha_5=8010$, $\alpha_6=4005$ DADOS: $K=120000 \text{ lb/in}^2$, $\nu=0.5$, $1-2\nu=10^8$, $\rho=0.935 \times 10^{-4} \text{ lbs}^2/\text{in}^4$, $\Delta T=0.4 \times 10^{-4} \text{ s}$

Fig. 2. Propagação da onda de pressão num fluido

ca na primeira situação.

6. Conclusões

Mostrou-se como num programa standard de elasticidade plana, e com poucas alterações se pode incluir o tratamento de fluidos, e materiais incompressíveis.

A utilização dum algoritmo de tipo explícito mostrou-se eficiente no tratamento de ambos os materiais sólidos e fluidos. Verificou-se no entanto que no tratamento dos elementos fluidos a utilização de matrizes consistentes conduz a resultados muito mais aproximados.

A inclusão de elementos com amortecimento para simular domínios de fluido infinitos mostrou-se promissora, desenvolvendo-se neste momento investigação no sentido de dar maior generalidade às conclusões apresentadas.

7. Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente subsidiado pela Bolsa de Investigação NATO 1779.

REFERÊNCIAS

- [1] Shantaram, D., Dynamic Transient Analysis of Structures Including Geometric and/or Material Non-linearity Effects, Ph.D.Thesis, c/Ph/41/76, Univ. of Wales, Swansea, October 1976.
- [2] Zienkiewicz, O.C. and Bettess, P., "Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment", Int. J. num. Meth. Engng, Vol. 13 (1978), pp. 1-6.
- [3] Bathe, K.J. and Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, (1976).
- [4] Saini, S.S., Zienkiewicz, O.C. and Bettess, P., Coupled Hydrodynamic Response of Concrete Gravity Dams Using Finite and Infinite Elements, C/R/271/76, Univ. of Wales, Swansea, (1976).
- [5] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, 3rd edn,

Mc Graw-Hill, London, 1977.

- [6] Owen, D.R.J., Hinton, E. and Shantaram, D., Nonlinear Dynamic Transient Analysis of Plates Using Parabolic Isoparametric Elements, Private Report, Univ. of Wales, Swansea.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-26

p. p. 255 - 264

PUC/RJ

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA COM ENDURECIMENTO
ISÓTROPO-CINEMÁTICO NÃO LINEAR

Ademar Gilberto Groehs
Professor Assistente
CPGEC-UFERS
Guillermo Juan Creus
Professor Visitante
CPGEC-UFERS

SUMÁRIO

Neste trabalho estudamos o caso de endurecimento não linear misto isótropo-cinemático, usando o critério de escoamento de Mises e o critério cinemático de Prager. A teoria considera pequenas deformações elásticas e plásticas. Como exemplo é analisada uma placa circular simplesmente apoiada submetida a um ciclo de carga e descarga.

SUMMARY

This work concerns the application of isotropic-kinematic hardening, using the Mises yield criterium and Prager's hardening rule. A situation of small strains (elastic and plastic) is considered. As an example, a simply supported circular plate is analyzed under a loading-unloading cycle.

1. Introdução

Neste trabalho apresentamos uma aplicação do método dos elementos finitos à análise de estruturas elastoplásticas considerando endurecimento misto isótropo-cinemático. Este trabalho faz parte de uma série de estudos realizados pelos autores sobre o mesmo assunto e que estão sendo reunidos num programa bastante geral, que se encontra em elaboração e teste [1], [2].

Como é bem conhecido, o critério de endurecimento isótropo, o mais usado pela sua simplicidade, não representa adequadamente o efeito Bauschinger. Para corrigir este defeito, Prager [3] introduziu o critério cinemático. Muitos resultados experimentais, no entanto, são melhor aproximados usando uma combinação de ambos os métodos [4]. O endurecimento misto foi aplicado por Tanaka [5] e por Hunsaker [6], usando de uma variante do endurecimento cinemático devida a Ziegler.

2. Relações constitutivas elastoplásticas

Limitaremos nossa atenção ao caso de pequenas deformações elásticas e plásticas. Nestas circunstâncias o tensor de deformações é indicado por $\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$ onde u_i são os deslocamentos do sólido e $(\)_{,k}$ indica derivação com respeito à ordenada x_k . Em plasticidade é usual trabalhar com taxas, como por exemplo $\dot{\epsilon}_{ij} = \partial \epsilon_{ij} / \partial t$, onde t é o tempo. As deformações plásticas ϵ_{ij}^p são definidas como a diferença entre as deformações totais ϵ_{ij} e as deformações elásticas ϵ_{ij}^e (recuperáveis):

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (1)$$

A relação entre tensões σ_{ij} e deformações elásticas é

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon}^e \quad (2)$$

onde \underline{D} é a matriz constitutiva elástica do material (ao longo do trabalho usaremos indistintamente as notações matricial e indicial).

As relações elastoplásticas presumem a existência de uma superfície de escoamento ou carga definida por

$$f(\sigma, \xi) = 0 \quad (3)$$

onde ξ indica um conjunto de tensores de ordem par que caracterizam o estado do material. Tomando a (3) como superfície potencial da deformação plástica temos

$$\dot{\xi} \cdot D^* = A \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4)$$

onde f é um escalar não negativo. Durante a deformação elastoplástica o estado de tensões deve satisfazer a condição de consistência

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\sigma} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T \dot{\xi} = 0 \quad (5)$$

Da (1), (2), (4) e (5) obtemos

$$\dot{\sigma} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \\ A + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) D \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \end{bmatrix} \dot{\epsilon} \quad (6)$$

onde

$$A = - \frac{1}{A} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\xi} \quad (7)$$

A (6) é a relação entre taxas de tensão e deformação durante processos elastoplásticos; o termo entre colchetes é a matriz elastoplástica D_{ep} . Naturalmente, para processos elásticos a D_{ep} será substituída pela D .

5. Endurecimento isotropo-cinemático

Neste caso temos $\xi = \{\alpha, \chi\}$, onde α é um tensor de segunda ordem simétrico, com as dimensões da tensão, que determina a mudança de posição da superfície de carga no espaço de

tensões, enquanto que χ é um escalar que controla o tamanho da mesma. As relações usadas neste trabalho são da forma

$$f = \left\{ \frac{3}{2} (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) \right\}^{1/2} - \chi = 0 \quad (8)$$

$$\alpha'_{ij} = c \dot{\epsilon}^p_{ij} \quad (9)$$

$$\chi' = H \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p_{ij} \dot{\epsilon}^p_{ij}} \quad (10)$$

onde $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \left(\frac{1}{3} \sigma_{kk}\right) \delta_{ij}$ é o tensor desviador. Para calcular o valor de Λ a ser substituído em (6), desenvolvemos a (7)

$$\Lambda = - \frac{1}{\Lambda} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^T \underline{\alpha}' + \frac{\partial f}{\partial \chi} \chi' \right\} \quad (11)$$

Das relações (4), (8) e (10) temos

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} \chi' = \frac{\partial f}{\partial \chi} H \Lambda \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)} = - \Lambda H \quad (12)$$

para o caso de escoamento uniaxial, onde $\partial f / \partial \sigma = \partial f / \partial \chi = -1$ e $H = \partial \sigma / \partial \epsilon^p$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^T \underline{\alpha}' &= - c \Lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \\ &= - \frac{3}{2} \Lambda c \end{aligned} \quad (13)$$

levando em consideração a (1) e a (9) e dado que por (8) $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\} = - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}$. Substituindo (12) e (13) na (11) e esta na (6) temos

$$D_{ep} = D - \frac{D \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left(\frac{3}{2} c + H + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \right)} \quad (14)$$

4. Determinação das constantes H e c

A Fig. 1.b indica a curva tensão-deformação plástica

do material, assim como o deslocamento b do centro da superfície de escoamento.

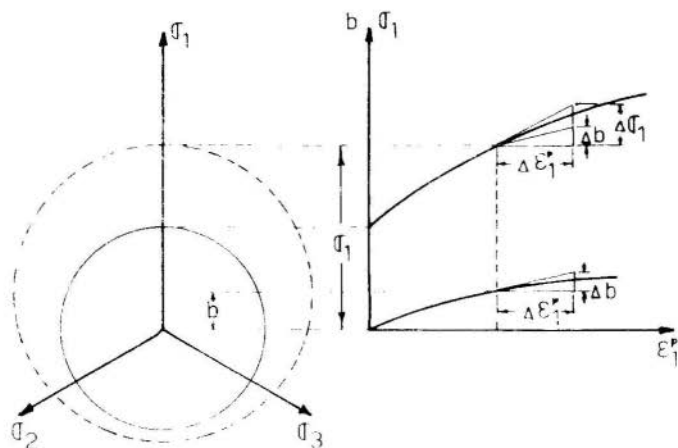


Fig. 1

A partir de (9) obtemos [10]:

$$c = \lim_{\Delta \epsilon_1^p \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \epsilon_1^p} \frac{\Delta \sigma_1}{\Delta \epsilon_1^p} = \frac{1}{\Delta \epsilon_1^p} \frac{db}{d\epsilon_1^p} \quad (15)$$

Na Fig. 1.b vemos que o acréscimo $\Delta \sigma_1$ é constituído por duas parcelas: uma devida ao endurecimento cinemático (Δb) e outra devida ao endurecimento isotrópico ($\Delta \sigma_1 - \Delta b$). Assim, o valor de H será dado por

$$H = \lim_{\Delta \epsilon_1^p \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma_1 - \Delta b}{\Delta \epsilon_1^p} = \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1^p} - \frac{db}{d\epsilon_1^p} \quad (16)$$

Considera-se que as constantes determinadas para o caso de

deformação axial sejam válidas também para estados de tensões mais complexos.

No programa computacional, a relação entre os acréscimos de $\Delta\sigma_1$ e Δb é feita de forma que para qualquer valor ϵ_1^p temos uma relação constante ($\Delta b/\Delta\sigma_1 = FC$), onde FC é um valor entre 0 e 1. Deve-se observar, também, que no programa a curva tensão-deformação plástica é aproximada por meio de uma poligonal. Cada lado da poligonal é caracterizado por um valor de c e H .

Os valores de H , c e FC correspondentes as formulações isotrópicas, cinemática e mista são tais que as relações (14) para o caso de tensão uniaxial monotonicamente crescente são iguais. Em caso de descarga, χ' e α' variam de maneira diversa, em quanto que c e H assumem sequencialmente valores diferentes.

5. Esquema geral do programa

Um esquema geral do programa é indicado na Fig. 2. O cálculo de r_{\min} segue o mesmo procedimento descrito na ref. [8]. A única observação que deve ser feita diz respeito à descarga de um ponto já plastificado. Vamos supor que um ponto nestas condições sofre descarga. Neste caso o programa guardará o valor de $\bar{\alpha}^* = \sqrt{\frac{5}{2}} \alpha_{ij} \alpha_{ij}$ bem como $\bar{\sigma}^* = \sqrt{\frac{5}{2}} (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij})$ correspondentes ao instante da descarga.

Se o ponto volta a plastificar, o programa funcionará para ele como cinemático puro, mantendo a superfície de escoamento no valor $\chi = \bar{\sigma}^*$ até o instante em que $\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{5}{2}} \alpha_{ij} \alpha_{ij}$ iguale ou supere o valor $\bar{\alpha}^*$. A partir deste instante o programa volta a operar, em relação ao ponto, no regime misto. Desta maneira evita-se a diminuição do tamanho da superfície de escoamento durante o período mencionado. A Fig. 5 representa o processo indicado para uma situação uniaxial.

6. Exemplo

Como exemplo de aplicação considera-se a placa circular indicada na Fig. 4 submetida a um ciclo de carga e descarga, para a qual existem resultados numéricos e experimen-

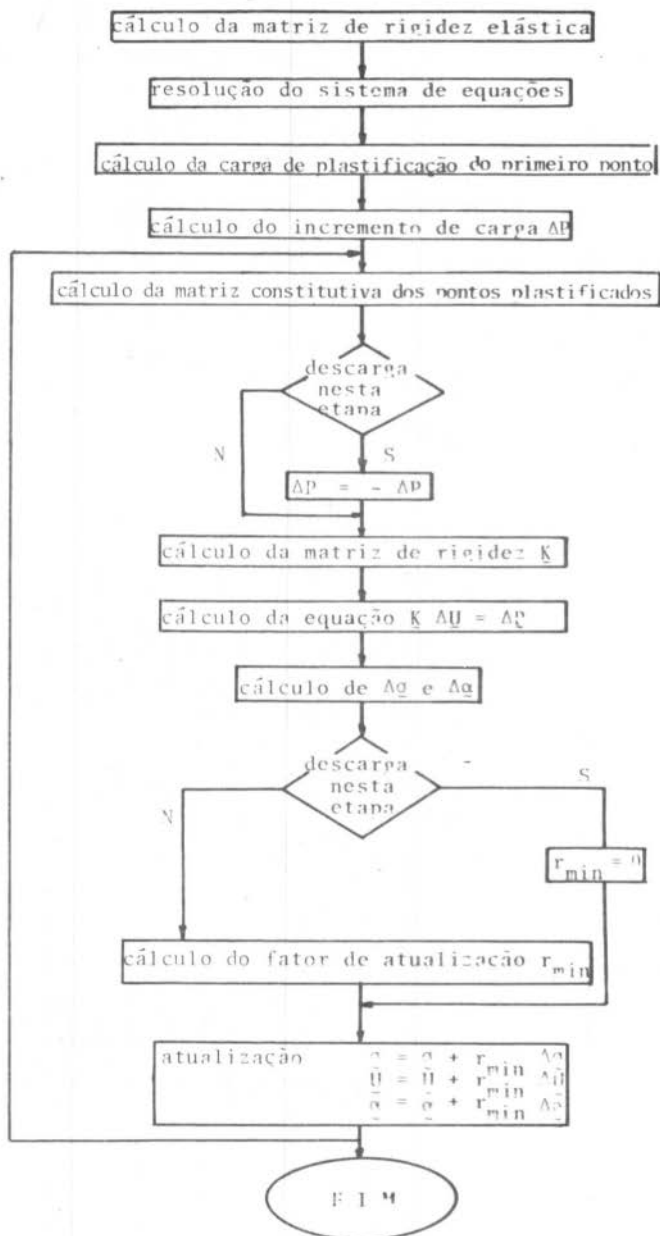


Figura 2

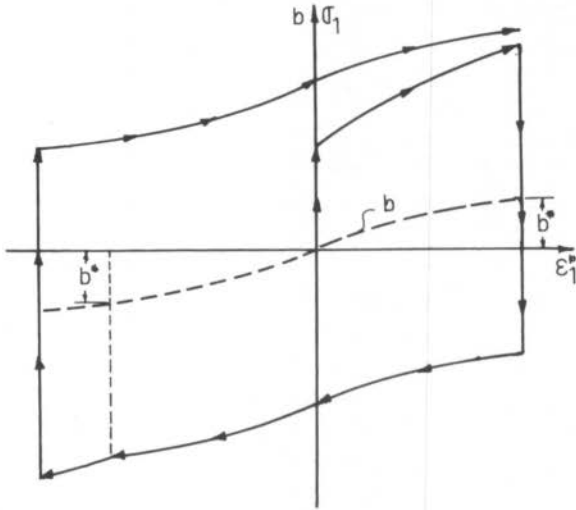


Fig. 3

tais 6 . A curva tensão deformação adotada é determinada pe los pares ordenados $\epsilon = 0.000976$, $\sigma = 55.16 \text{ MN/m}^2$; $\epsilon = 0.0025$, $\sigma = 82.74 \text{ MN/m}^2$; $\epsilon = 0.00925$, $\sigma = 124.11 \text{ MN/m}^2$; $\epsilon = 0.1$, $\sigma = 241.33 \text{ MN/m}^2$.

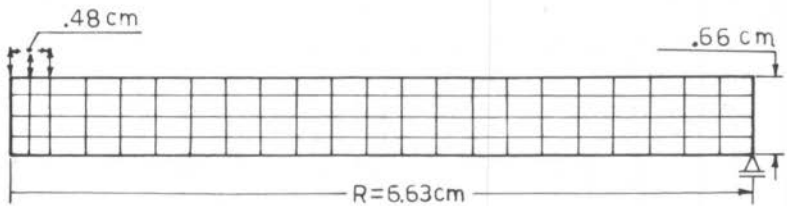


Fig. 4

O exemplo foi analisado usando os critérios isótropo, cinemático e misto (com $FC = 0,5$). Este valor foi determinado com base nos valores indicados na ref. [6]. Apresentamos na Fig. 5 os correspondentes resultados obtidos para a relação carga-deslocamento no centro da placa e o resultado experimental de ref. [6]. Pode-se ver que o critério misto dá uma melhor aproximação na descarga, com resultados intermediários entre os correspondentes ao endurecimento isótropo e cinemático. Durante a carga e parte inicial da descarga os três procedimentos conduzem aos mesmos resultados.

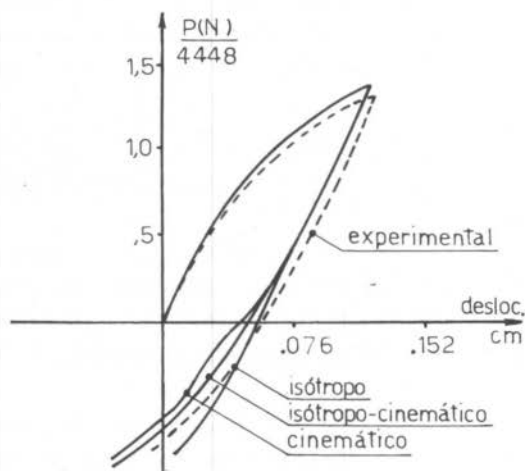


Fig. 5

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro prestado por CNPq e FINEP à realização da presente pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] Grochs, A.G., Creus, G.J., "Análise elastoplástica de Estado Plano de Tensões Utilizando o Método dos Elementos Finitos", IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, 1976, Vol. 11, pp.601-616.
- [2] Grochs, A.G., Creus, G.J., "Análise de Grandes Deformações Plásticas", 11 Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, São Paulo, 1978.
- [3] Prager, W., "An Introduction to Plasticity", Addison Wesley, 1959.
- [4] Onat, E.T., "Representation of Inelastic Behavior", Yale University Report ORNL - SUB - 3863-2, 1976.
- [5] Tanaka, M., "Large Deflection Analysis of Elastic-Plastic Circular Plates with Combined Isotropic and Kinematic Hardening", Ingenieur Archiv, Vol. 41, 1972, pp.342-356.
- [6] Hunsaker, B., Haisler, W.E., Stricklin, J.A., "On the use of two hardening rules of plasticity in incremental and pseudo-force analysis", Proceedings, Winter Annual Meeting of ASME, December 1976.
- [7] Dutra, S.C., Grochs, A.G., Creus, G.J., "Aplicação de Elementos Finitos ao Estudo de Problemas de Não Linearidade Física e Endurecimento Cinemático", IV Simpósio sobre Métodos Computacionais para Engenharia Civil, Curitiba, 1980.
- [8] Dutra, S.C., Grochs, A.G., Creus, G.J., "Alguns Aspectos Relacionados com a Resolução de Problemas de Não Linearidade Física e Endurecimento Cinemático por Meio de Elementos Finitos", XXI Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Maio 1981.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-27

P. P. 265 - 274

PUC/RJ

SIMULAÇÃO DE TRANSIENTES TÉRMICOS UTILIZANDO CSMP

Ahmet Aydin Konuk

Prof. Colaborador - Depto. de Engenharia Química
UNICAMP

Henrique Martini Paula

Pesquisador, IPEN, SP.

SUMÁRIO

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo matemático para simulação de transientes térmicos no Circulador de Hélio (CH) do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo. O modelo baseia-se nas equações de energia aplicadas aos diversos componentes do CH. O sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e de equações algébricas não-lineares assim obtido é resolvido usando o "System/360-Continuous System Modeling Program - CSMP" da IBM. A validade do modelo foi comprovada mediante comparações com resultados experimentais.

SUMMARY

A mathematical model has been developed to simulate thermal transients for the Helium Loop of the "Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares", São Paulo. The model is based on the energy equation applied to the various components of the loop. The não-linear system of first order ordinary differential equation and algebraic equations has been solved using IBM'S "System/360-Continuous System Modeling Program- CSMP". The model has been tested satisfactorily with experimental results.

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é desenvolver e testar um modelo para simulação de transientes térmicos no Circulador de Hélio (CH) do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN), SP., que consiste basicamente de um aquecedor elétrico, tubulações e trocadores de calor.

O modelo é obtido através do balanço de energia em estado não-estacionário, global (i.e. derivadas espaciais são evitadas), aplicado aos vários componentes de CH. O resultado é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeiro grau e de equações algébricas, que é resolvido utilizando um programa do IBM, chamado "Continuous System Modeling Program CSMP".

As temperaturas calculadas e experimentais são comparadas para avaliar a validade do modelo.

2. Modelo Básico

O modelo consiste da equação de conservação de energia em estado não-estacionário aplicada aos trocadores de calor de carcaça e tubos e as tubulações.

Para trocadores de calor (Figura 1), usa-se as equações a seguir:

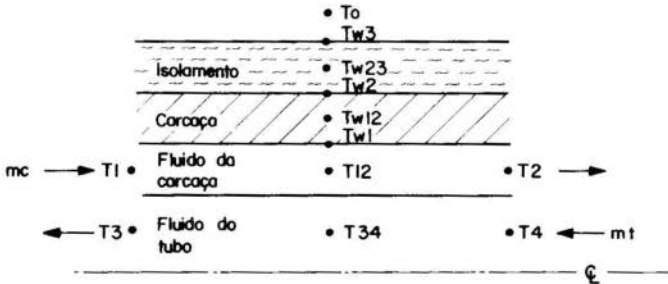


Fig. 1 Esquema de trocador de calor

$$C_{v_t} M_t \frac{dT_{34}}{dt} = m_t C_{p_t} (T_4 - T_3) + UA (T_{12} - T_{34}) \quad (1)$$

$$C_{v_c} M_c \frac{dT_{12}}{dt} = m_c C_{p_c} (T_1 - T_2) + UA (T_{34} - T_{12}) + hA_1 (T_{w1} - T_{12}) \quad (2)$$

$$C_w M_w \frac{dT_{w12}}{dt} = h (T_{12} - T_{w1}) + K_w (T_{w2} - T_{w1}) \quad (3)$$

$$C_i M_i \frac{dT_{w23}}{dt} = K_w (T_{w1} - T_{w2}) + K_i (T_{w3} - T_{w2}) \quad (4)$$

$$h_o A_o (T_{w3} - T_o) - K_i (T_{w2} - T_{w3}) = 0 \quad (5)$$

$$T_{34} = \frac{T_3 + T_4}{2} \quad (6)$$

$$T_{12} = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (7)$$

$$T_{w12} = \frac{T_{w1} + T_{w2}}{2} \quad (8)$$

$$T_{w23} = \frac{T_{w2} + T_{w3}}{2} \quad (9)$$

Equações (1) a (5) são balanços de energia respectivamente para o fluido dos tubos, o da carcaça, parede da carcaça e o isolamento da carcaça, e para a superfície externa da isolação da carcaça. Nas equações (1) a (5), C_v , C_p , m e M são respectivamente calores específicos a volume e pressão constantes, vazão mássica e massa, todos considerados constantes; subscritos t e c se referem ao fluido do tubo e o da carcaça respectivamente. U é o coeficiente global de transferência de calor entre o fluido dos tubos e o fluido da carcaça. A_1 é a área interna da carcaça e h o coeficiente de transferência de calor entre o fluido da carcaça e a carcaça.

T_1 , T_2 , T_{12} e T_4 , T_3 , T_{34} são temperaturas de entrada, de saída e temperatura média do fluido da carcaça e do fluido dos tubos respectivamente. T_{w1} , T_{w2} e T_{w3} são as temperaturas das superfícies interna e externa da carcaça, da superfície externa do isolamento, e T_{12} e T_{13} as temperaturas médias da carcaça e do isolamento. C_w e C_i são calores específicos respectivamente da carcaça e do isolamento. A_o e h_o são a área da superfície externa da isolação e o coeficiente da transferência de calor entre a superfície externa do isolamento e o ar ambiente, à temperatura T_o . K_w e K_i são definidos como:

$$K_w = \frac{2 k_w A_2}{D_2 \ln \frac{D_2}{D_1}} \quad (10)$$

$$K_i = \frac{2 k_i A_o}{D_o \ln \frac{D_o}{D_2}} \quad (11)$$

onde k_w e k_i são condutividades térmicas da carcaça e do isolamento, considerados constantes. D_1 , D_2 e A_2 são os diâmetros interno e externo e a área externa da carcaça, e D_o e A_o diâmetro externo e a área externa do isolamento. Nota-se que a condução axial não aparece em nenhuma das equações do modelo.

As temperaturas médias T_{12} , T_{34} , T_{w12} e T_{w23} são consideradas como médias aritméticas das temperaturas nos extremos do trocador como indicam as equações (6) a (9).

O modelo referente ao trocador de calor consiste então de um total de 9 equações, das quais 4 são equações diferenciais ordinárias de primeiro grau (eqs. (1) a (4)) e 5 equações algébricas ((5) a (9)). As nove temperaturas incógnitas são T_2 , T_3 , T_{34} , T_{12} , T_{w1} , T_{w2} , T_{w3} , T_{w12} e T_{w23} . Os parâmetros do modelo, que podem variar com o tempo são T_1 , T_4 , T_o , m_t e m_c .

Para as tubulações (Figura 2), usam-se as equações (3) a (5), (7) a (9) e (10) e (11), substituindo o fluido da carcaça e a parede da carcaça pelo fluido na tubulação e parede da tubulação. Um balanço de energia para o fluido na tubulação da a equação a seguir, obtendo-se um sistema de 7 equações e 7 temperaturas incógnitas.

$$C_v C_c M_c \frac{T_{12}}{dt} = m_c C_{p_c} (T_1 - T_2) + h A_l (T_{w1} - T_{12}) \quad (12)$$

Nota-se que a eq. (12) difere da (3) somente pela falta do termo UA $(T_{34} - T_{12})$, e os subscritos c, 1, 2 e 12 se referem agora ao fluido na tubulação e w refere-se a parede da tubulação.

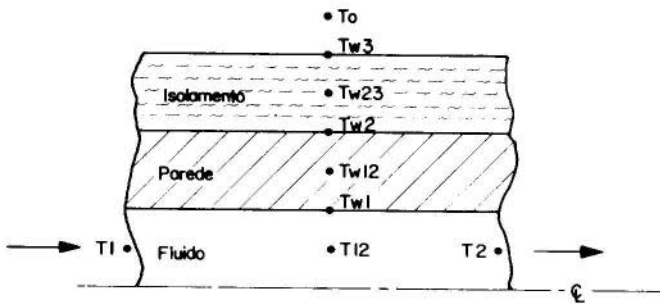


Fig. 2 Esquema de tubulação

Nas junções das tubulações (Figura 3), é aplicado um balanço de energia em estado estacionário, dando:

$$C_{p1} m_1 T_1 = C_{p2} m_2 T_2 + C_{p3} m_3 T_3 \quad (13)$$

onde os subscritos 1, 2 e 3 são definidos na Figura 3.

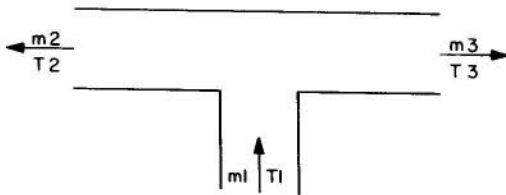


Fig. 3 Esquema de junção

3. Método de resolução

As equações apresentadas, aplicadas aos trocadores de calor, às tubulações e às junções do circuito que está sendo modelado constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeiro grau com valores iniciais e de equações algébricas, que são lineares quando os coeficientes das temperaturas são constantes, e não lineares, quando eles dependem da temperatura. Foi escolhido o "S/360 Continuous System Modeling Program CSMP" da IBM para solução numérica das equações. CSMP resolve sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeiro grau com valores iniciais, lineares ou não-lineares, e permite também, que se incluam equações algébricas, lineares ou não-lineares.

Os métodos de integração usados no CSMP (Runge-Kutta, Adam, Simpson, Euler) estão sujeitos à limitação do maior passo de integração Δt , denominado passo crítico Δt_c , para fornecerem soluções estáveis. Para um sistema linear de n equações, dado por:

$$\frac{dX}{dt} = AX + b \quad (14)$$

onde X é o vetor das incógnitas, A a matriz dos coeficientes, ($n \times n$), e b o vetor do lado direito, pode mostrar-se que o método de Euler (retangular) e Runge-Kutta requerem $\Delta t_c = \frac{2}{\rho(A)}$ e $\Delta t_c = \frac{3}{\rho(A)}$ respectivamente, onde $\rho(A)$ é o raio espectral da matriz A . Como o cálculo exato de $\rho(A)$ é muito trabalhoso, considera-se neste trabalho como boa aproximação para tal a seguinte expressão:

$$\rho(A) \approx \max |a_{ii}|, \quad i = 1, n \quad (15)$$

onde $\max |a_{ii}|$ é o maior elemento diagonal em módulo da matriz A .

Valores pequenos de Δt_c em relação a duração do transiente significa que um número grande de passos de integração tem que ser utilizado. Para evitar este inconveniente, as equações diferenciais com elemento diagonal pequeno podem ser transformadas em equações algébricas, desprezando o termo de acumulação. Por exemplo, se $|a_{ii}|$ varia de $.01$ a 10 S^{-1} , para um transiente de 1000 segundos, o sistema original terá $\Delta t_c \approx .2$ segundo, requerendo um mínimo de 5000 passos de integração. Desprezando as derivadas temporais nas equações com $|a_{ii}| > 0.1$, necessita-se somente de um Δt_c de 20 segundos e 50 passos de integração (utilizando o método de Euler).

Este procedimento foi utilizado na simulação do circulador de hélio, como é discutido no próximo ítem.

4. Aplicação ao Circulador de Hélio do IPEN

Descrição do Circulador

O circulador do hélio (CH) instalado no IPEN tem por objetivo ensaiar os vários componentes em desenvolvimento dos reatores nucleares de alta temperatura, arrefecidos com hélio (HTGR). Recentemente tem sido utilizado para ensaios de isolamento térmico dos dutos de gás quente dos HTGR'S.

As partes principais do CH e suas interligações estão esquematizadas na Figura 4.

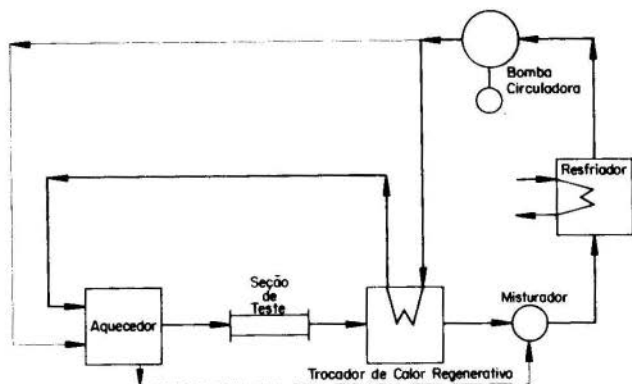


Fig. 4 Esquema do circulador de Hélio

O aquecedor consiste de blocos de cerâmica refratária com 402 canais verticais contendo fitas aquecedoras. O conjunto cerâmica-aquecedores fica dentro de um recipiente revestido de isolamento térmico, que por sua vez está dentro de um vaso de pressão. Na saída da bomba circuladora, o gás é dividido em duas partes. Uma segue em direção ao aquecedor e circula no espaço anular entre o recipiente interno e o vaso de pressão externa, protegendo assim a parede do vaso das altas temperaturas. A segunda parte segue para o trocador de calor regenerativo (TCR) onde recebe um preaquecimento. Esse trocador é do tipo carcaça e tubos, com chicanas tipo disco-anel, operando em contra-corrente. Do TCR tal fluido é conduzido ao aquecedor onde se efetua o aquecimento final do gás durante sua passagem nos canais dos blocos de cerâmica. Depois do aquecedor, essa parcela do fluido percorre a seção de teste, que consiste de uma tubulação com isolamento interno, e retorna ao TCR onde é resfriado cedendo sua energia para o preaquecimento citado anteriormente. Em seguida, os dois fluxos descritos encontram-se no misturador. Do misturador, o gás passa pelo resfriador que é tipo carcaça-tubo em U com chicanas segmentais, no qual é novamente parcelado em dois, pela ação de um "by-pass" interno. Uma das parcelas entra nos tubos em U onde cede energia para a água de arrefecimento, enquanto que outra passa diretamente pelo by-pass. Em seguida, unem-se, e deixam o resfriador em direção a bomba circuladora.

O modelo do CH

O CH foi dividido em várias partes e para elas aplicaram-se as equações do modelo básico anteriormente apresentadas. As equações diferenciais com Δt_c menos do que 10 segundos foram transformadas em equações algébricas e o modelo final consistiu de 15 equações diferenciais e 51 equações algébricas.

Para modelar o aquecedor, foram usadas as equações válidas para as tubulações, e no lado direito da eq.(12) acrescentou-se um termo referente a potência do aquecedor.

O coeficiente global de transferência de calor U , foi calculada utilizando-se o método de Donohue (2). Os coeficientes de transferência de calor por convecção forçada, h , e por convecção natural, h_o , foram calculados através de correlações conhecidas.

Os valores da potência do aquecedor, vazões de hélio e a vazão da água de arrefecimento são tabelados em função do tempo.

Resultados

A seguir são apresentados resultados típicos da simulação de uma operação de 12 horas e 30 minutos. Para essa simulação foi utilizado, por ser mais econômico o método retangular, com $\Delta t = 9$ segundos.

Os testes mostraram que para passos de integração iguais ou menores que 1 segundo o erro numérico é desprezível e que tal erro para passo de integração igual a 9 segundos é de no máximo 10% durante a primeira meia hora de operação, diminuindo rapidamente a medida que as temperaturas vão aumentando.

A Figura 5 mostra os valores experimentais e os calculados da temperatura à saída do aquecedor (entrada da seção de teste) e as variações com tempo da potência do aquecedor, vazão total de hélio e vazão da água de arrefecimento. Os valores calculados estão cerca de 5 a 30% abaixo dos valores experimentais. Essa faixa de erro pode ser considerada pequena, visto as simplificações do modelo e as incertezas nos valores numéricos de alguns parâmetros, como por exemplo, calor específico dos blocos de cerâmica do aquecedor, que foi estimado em comparação com os valores de cerâmicas parecidas.

5. Conclusões

O modelo de trocadores de calor e tubulações, consistindo basicamente de balanços de energia globais para estado não-estacionário, foi aplicado ao circulador do hélio do IPEN, resultando num sistema de equa

- Temperaturas calculadas
- o o o o Temperaturas experimentais
- - - Potência do aquecedor
- Vazão de água de resfriamento
- Vazão de hélio

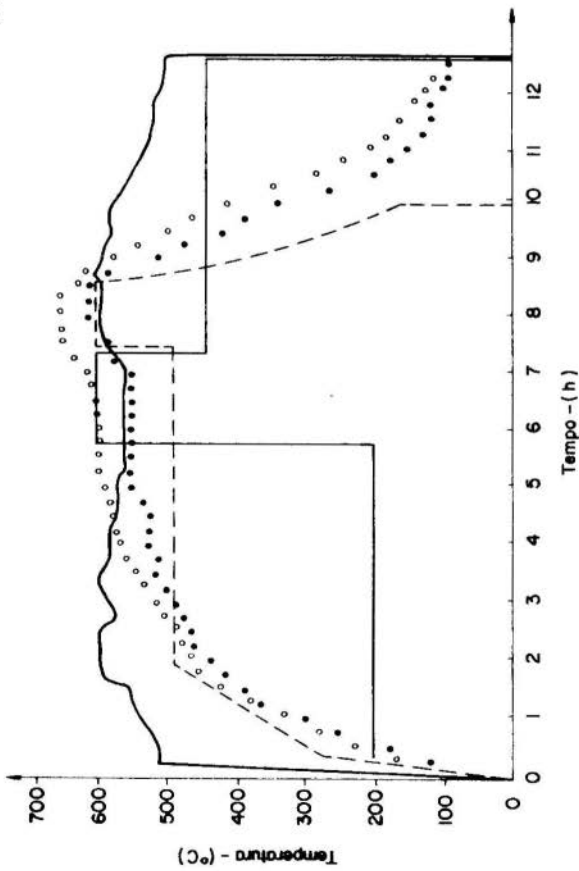


Fig. 5 Os resultados

ções diferenciais ordinárias de primeira ordem e de equações algébricas. Visando a uma redução do tempo total de processamento e em consequência, os custos, algumas equações diferenciais foram transformadas em equações algébricas e o sistema resultante foi resolvido utilizando CSMP. Os resultados numéricos e experimentais concordaram satisfatoriamente.

REFERÊNCIAS

- {1} Donohue, D.A., "Heat transfer and pressure drop in heat exchangers", Ind. Engng. Chem. Vol. 41 (1949), pp. 1357-1362.
- {2} International Business Machines - IBM. System/360 Continuous System Modeling Program. White Plains, N.Y., sem data (User's Manual). Program Number 360A - (x - 16x).



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECÂNICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-28

p. p. 275 - 284

PUC/RJ

CÁLCULO DE TRANSIENTES TÉRMICOS BIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DOS
 ELEMENTOS FINITOS

JOSÉ LUIZ ALVES DA FONTOURA RODRIGUES

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - UnB

CLOVIS SPERB DE BARCELLOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - U.F.S.C.

S U M Á R I O

O objetivo deste trabalho é a análise de problemas lineares de condução de calor em materiais anisotrópicos e ou heterogêneos, sob regime transiente, através de domínios bidimensionais com qualquer tipo de geometria ou domínios tridimensionais axisimétricos. São admitidas somente condições de contorno constantes com o tempo além da possibilidade de geração interna de calor no interior do domínio de solução. A resolução do problema é efetuada por análise modal e o método numérico utilizado é a técnica de elementos finitos segundo a formulação de Galerkin.

S U M M A R Y

The object of this paper is the unsteady linear heat conduction through anisotropic and/or heterogeneous matter, in either two-dimensional fields with any kind of geometry or three-dimensional fields with axial symmetry. It only accepts time-independent boundary conditions and it is possible to have internal heat generation. The solution is obtained by modal analysis employing the finite element method under Galerkin formulation.

1. Introdução

Sabe-se que em estruturas termicamente carregadas é possível muitas vezes desacoplar as equações termo-elásticas daquelas que descrevem a distribuição de temperatura. Assim, é desejável resolver o problema de transmissão de calor e usar os valores das temperaturas resultantes para determinar os campos de tensão e deformação da estrutura. Desse modo, propõe-se aqui um programa numérico capaz de equacionar problemas lineares de condução de calor através de materiais anisotrópicos em domínios bidimensionais, sejam superfícies de contorno qualquer ou sólidos axisimétricos, em regime transiente ou permanente, submetidos a condições de carregamento térmico constantes com o tempo, admitindo ainda a existência de fontes internas de geração de calor. Tais condições se classificam em dois grupos básicos:

1 - Condições de contorno especificadas (condições de Dirichlet) - temperaturas especificadas no contorno.

2 - Condições de contorno naturais (condições de Cauchy) -

2.1. fluxo de calor especificado no contorno e/ou condições adiabáticas especificadas através de isolamento térmico ou pela existência de planos de simetria (fluxo nulo):

2.2. convecção especificada no contorno.

Foi utilizado como técnica de resolução o método dos elementos finitos, a fim de manter a uniformidade do conjunto a que pertence este trabalho. Trata-se do sistema de cálculo estrutural desenvolvido pelo Grupo de Análise de Tensões do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC para o estudo do comportamento dos vasos de pressão de reatores nucleares, particularmente durante as operações de início e término de funcionamento. Este trabalho é uma de suas etapas preliminares e tem como objetivo central a análise dos longos transientes térmicos que se estabelecem nestas ocasiões.

2. Formulação por Elementos Finitos da Equação Matricial do Problema

A análise dos fenômenos de transferência de calor é toda desenvolvida a partir da equação da conservação da energia térmica que sob notação diferencial toma a forma

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \vec{q} = Q \quad (1)$$

Particularizando a equação básica (1) para o problema de condução térmica em sólidos heterogêneos e isotrópicos obtém-se

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + Q \quad (2)$$

A modelação matricial, por elementos finitos, de problemas físicos descritos por equações diferenciais parabólicas como é a equação (2), tem como principal meio de implementação a formulação de Galerkin, segundo a qual um domínio de solução bidimensional pode ser discretizado através da relação

$$T^{(e)}(x,y,t) = \sum_{i=1}^m N_i(x,y) T_i(t) \quad (3)$$

onde $T^{(e)}(x,y,t)$ é a solução aproximada sobre o elemento bidimensional, m é o número de nós do elemento, N_i são as funções interpoladoras usadas na definição do elemento e T_i é o valor da temperatura em cada um dos m nós do elemento.

Sob notação matricial tem-se

$$T^{(e)}(x,y,t) = [N]^{(e)} \{T\}^{(e)} \quad (4)$$

onde $[N]^{(e)}$ são as funções interpoladoras definidas sobre o elemento genérico (e) e $\{T\}^{(e)}$ são as temperaturas nodais do elemento (e) .

Neste trabalho foram empregados elementos triangulares com um nó em cada vértice, sendo em consequência lineares as funções interpoladoras N_i .

A solução para todo o domínio é obtida pelo somatório das soluções aproximadas para cada um dos elementos componentes da malha

$$T(x,y,t) = \sum_{e=1}^n T^{(e)}(x,y,t) \quad (5)$$

Como resultado da aplicação da formulação de Galerkin obtém-se a equação matricial do problema sob a forma

$$[A] \dot{\{T\}} + [B] \{T\} + \{C\} = \{0\} \quad (6)$$

onde $[A]$ representa a matriz condutância térmica, $[B]$ é a matriz condutividade térmica englobando fenômenos de condução e convecção, $\{C\}$ é o

vetor carga térmica, $\{T\}$ é o vetor temperatura e $\{\dot{T}\}$ é o vetor derivada primeira da temperatura em relação ao tempo.

A obtenção da equação correspondente à equação (6) para domínios tridimensionais axisimétricos não apresenta dificuldades. Seu detalhamento é apresentado por Huebner [1].

3. Resolução por Análise Modal

Para solucionar um sistema de equações diferenciais lineares na forma matricial por análise modal, é desejável o desacoplamento do conjunto de equações do sistema de maneira a possibilitar seu manuseio individual.

A solução adotada foi a utilização do método proposto pelo Prof. Domingos Boechat Alves [2] capaz de desacoplar o sistema matricial de equações do problema e determinar seus autovalores e autovetores através do conjunto de subrotinas CLVT, DPCHOL e DEIGEN. O sistema é desacoplado sem que suas matrizes percam a simetria, através da decomposição da matriz condutiva térmica $|B|$ pela técnica conhecida como "Redução de Cholesky", seguida de duas transformações de coordenadas

A redução de Cholesky [2] é uma técnica para o cálculo da matriz triangular inferior e não singular $|R|$, efetuada pela subrotina DPCHOL, tal que $|R|$ seja capaz de tornar verdadeira a igualdade

$$|B| = |R||P|^t \quad (7)$$

Substituindo a relação (7) na equação (6) chega-se a

$$|A| \{\dot{T}\} + |R||R|^t \{T\} + \{C\} = \{0\} \quad (8)$$

A primeira transformação de coordenadas do sistema se baseia no fato de que sendo $|R|$ uma matriz não singular, existirá sempre um vetor $\{S\}$ que como o vetor temperatura $\{T\}$ será função do tempo e

$$|R|^t \{T\} = \{S\} \quad (9)$$

Explicitando o vetor temperatura e sua derivada em função do tempo obtém-se a transformação de coordenadas conveniente que, substituída na equação (8), resulta na forma

$$|A| (|R|^t)^{-1} \{\dot{S}\} + |R|\{S\} + \{C\} = \{0\} \quad (10)$$

A nova configuração da equação matricial do sistema, se pré-multiplicada pela matriz $|R|^{-1}$, estará desacoplada a menos de seu termo em $\{\dot{S}\}$

$$|R|^{-1} |A| (|R|^t)^{-1} \{\dot{S}\} + |I| \{S\} + |R|^{-1} \{C\} = \{0\} \quad (11)$$

Fazendo

$$|R|^{-1} |A| (|R|^t)^{-1} = |D| \quad (12)$$

obtém-se a forma mais compacta

$$|D| \{\dot{S}\} + |I| \{S\} + |R|^{-1} \{C\} = \{0\} \quad (13)$$

A segunda transformação de coordenadas do sistema, obtida através da análise modal, completa o desacoplamento e segue a sequência de operações descrita abaixo.

Supõe-se que o vetor $\{S\}$, representativo da temperatura do novo sistema de coordenadas, possa ser substituído pela combinação linear

$$\{S\} = |V| \{Z\} \quad (14)$$

onde a matriz $|V|$ representa o conjunto de autovetores da matriz $|D|$ e o vetor $\{Z\}$ é um multiplicador função do tempo.

A determinação dos autovetores $|V|$ e dos autovalores $\{\lambda\}$ da matriz $|D|$ é efetuada pelas subrotinas CLMT e DEIGEN, constituindo a parte mais extensa e importante de todo o processo de resolução por computador do sistema matricial de equações.

Substituindo o vetor $\{S\}$ na equação (13) e pré-multiplicando a igualdade assim formada pela matriz de autovetores invertida $|V|^{-1}$ chega-se à relação

$$|V|^{-1} |D| |V| \{\dot{Z}\} + |I| \{Z\} + |V|^{-1} |R|^{-1} \{C\} = \{0\} \quad (15)$$

Os autovalores $\{\lambda\}$ e autovetores $|V|$ da matriz condutância térmica $|D|$ são por definição o vetor e a matriz capazes de satisfazer a igualdade

$$(\{\lambda\} - |V|^{-1} |D| |V|) \{Z\} = \{0\} \quad (16)$$

onde

$$|\lambda| = |I| \{ \lambda \} \quad (17)$$

Evidentemente, a solução trivial para a equação (16) não tem valor prático, restando

$$|\lambda| = |V|^{-1} |D| |V| \quad (18)$$

A relação (18) substituída na equação (15) fornece o sistema matricial de equações diferenciais lineares desacoplado, já que $|\lambda|$ é uma matriz diagonal.

$$|\lambda| \{\dot{Z}\} + |I| \{Z\} + \{F\} = \{0\} \quad (19)$$

onde

$$\{F\} = |V|^{-1} |R|^{-1} \{C\} \quad (20)$$

O sistema matricial desacoplado de \bar{r} equações diferenciais lineares é representado pela equação (19), onde cada equação

$$\dot{z}_i + \left(\frac{z_i}{\lambda_i}\right) + \left(\frac{f_i}{\lambda_i}\right) = 0 \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, \bar{r}$$

será resolvida individualmente através de integração direta segundo a relação abaixo.

$$z_i = \left(CI + \int_0^t -\frac{f_i}{\lambda_i} \exp \left(\int_0^\tau \frac{d\alpha}{\lambda_i} \right) d\tau \right) \exp \left(-\int_0^t \frac{dt}{\lambda_i} \right) \quad (22)$$

sendo CI a constante de integração.

Admitindo-se apenas condições de contorno constantes com o tempo, os termos f_i do vetor carga térmica também serão constantes com o tempo. Este fato somado à não variação dos autovalores λ_i durante o transiente, torna possível a simplificação da relação (22)

$$z_i = CI \left(\exp \left(-\frac{t}{\lambda_i} \right) \right) + f_i \left(\exp \left(-\frac{t}{\lambda_i} \right) - 1 \right) \quad (23)$$

Uma vez obtidos todos os \bar{r} componentes do vetor solução $\{Z\}$ são necessárias duas mudanças de coordenadas para que se retorne ao sistema original. Pela combinação das transformações (9) e (14) chega-se à relação que soluciona o problema

$$\{T\} = \{[R|t]^{-1} |V| \{Z\} \quad (24)$$

4. Resultados

É analisado neste ítem o problema proposto por Livingood e Sams, apresentado por Schneider [3].

O objetivo da análise é a determinação do campo de temperaturas que se estabelece na secção reta da pá de turbina a gás esquematizada na figura (1). A pá é atravessada no sentido longitudinal por dois dutos de refrigeração por onde circula água a 200°F. Livingood e Sams estudam o problema da condução permanente de calor através de técnicas de relaxação.

Com o objetivo de testar o funcionamento do método em domínios de contorno irregular, foram feitas algumas alterações na proposta original, de forma a reconstituir o período que se inicia com a entrada da turbina em funcionamento e perdura até as lâminas entrarem em equilíbrio térmico, quando o campo de temperatura se estabelece de forma permanente.

Para a resolução do problema foram feitas as seguintes hipóteses simplificativas:

1 - Todas as propriedades físicas são constantes e correspondem ao campo permanente de temperatura.

2 - No início do transiente o campo de temperatura da pá é uniforme e igual a 200°F.

3 - O início do problema se dá quando a turbina é acionada, o que provoca o estabelecimento instantâneo de uma temperatura ambiente de 2000°F.

4 - A pá só troca calor com o meio por convecção, através dos dutos de refrigeração e pela superfície externa em contacto com o ambiente a 2000°F.

O coeficiente de película na superfície externa da pá é variável com a posição.

O domínio de solução foi discretizado através de 165 elementos definidos por 121 nós.

5. Conclusões

Comparando a figura (3) que representa o campo de temperatura permanente na pá calculado por elementos finitos com o resultado apresentado por Livingood e Sams na figura (2), observa-se que a distribuição e a forma das isotermas são semelhantes em ambos os casos. Porém nas regiões do contorno, em particular nos bordos de ataque e fuga, e na parte superior da pá, existem diferenças de até 100°F entre as duas soluções.

Esta pequena discrepância pode ser facilmente explicada, pois são exatamente nestas regiões onde a malha de relaxação empregada por Livingood e Sams não tem a flexibilidade suficiente para modelar com precisão equivalente à modelação por elementos finitos, o contorno da pá.

O grau de precisão dos resultados obtidos e a facilidade de discretização e montagem da malha, mesmo sobre domínios heterogêneos com contorno irregular e características anisotrópicas, confirmaram plenamente a versatilidade e segurança da técnica de elementos finitos aplicada à análise térmica.

A utilização do método dos elementos finitos é obtida com o sacrifício da simplicidade de programação e dos baixos custos de processamento, exigindo sempre um volume de dados de entrada superior a qualquer outro processo de cálculo numérico.

É evidente que, montado o sistema, sua aplicação fica facilitada. Ainda assim não é conveniente o uso indiscriminado desta técnica, principalmente pela diferença nos custos de processamento se comparada aos métodos convencionais de cálculo numérico.

O campo de aplicação dos elementos finitos surge à medida que o contorno do domínio toma formas mais complexas, impossibilitando o uso dos métodos numéricos tradicionais.

6. Referências

- [1] HUEBNER, Kenneth H. The finite element method for engineers. New York, John Wiley & Sons. Inc., 1975.
- [2] ALVES, Domingos Boechat. Métodos Numéricos - Relatório preliminar de pesquisa. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1978.
- [3] SCHNEIDER, P.J. Conduction Heat Transfer. 2a. edição, Massachusetts Addison-Wesley Publishing Co., 1975.

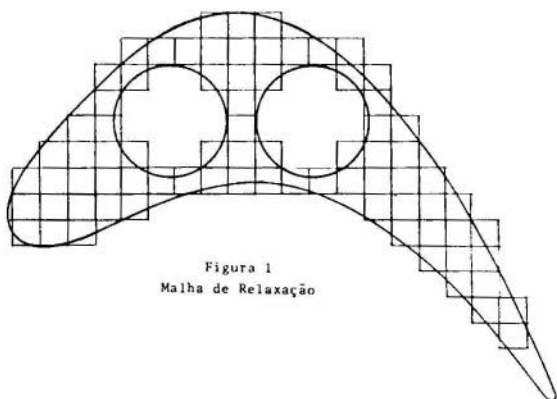


Figura 1
Malha de Relaxação

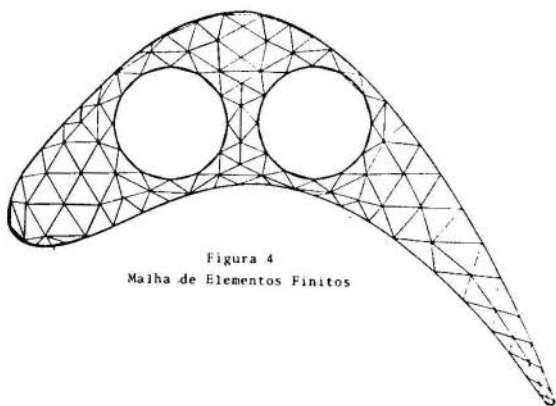


Figura 4
Malha de Elementos Finitos

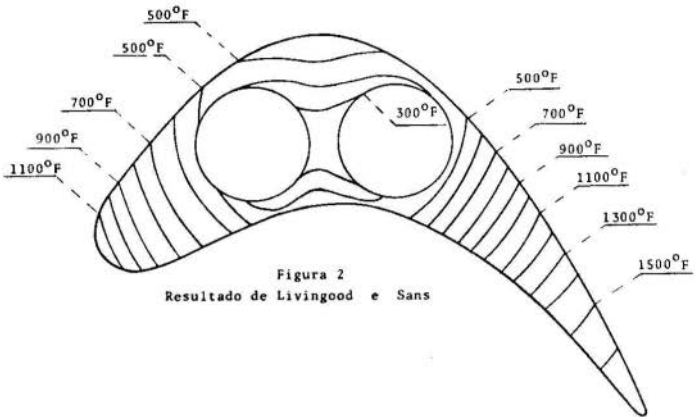


Figura 2
Resultado de Livingood e Sans

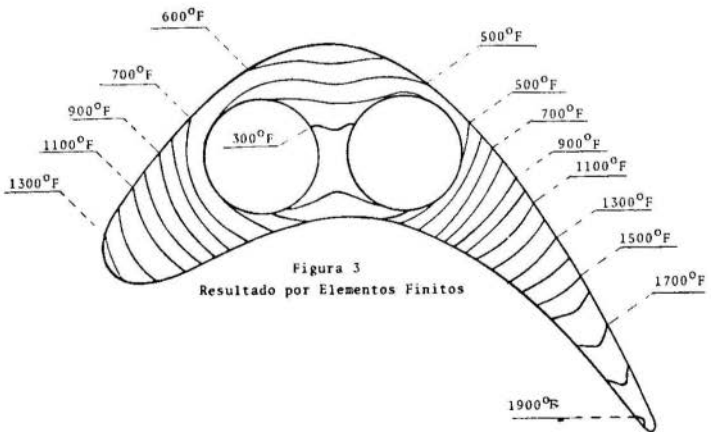


Figura 3
Resultado por Elementos Finitos



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-29

P.P. 285 - 296

PUC/RJ

APLICAÇÃO DE "ALTERNATING DIRECTION METHODS" À SOLUÇÃO DA
EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR COM FONTE E EM REGIME TRANSITÓRIO

Antonio Carlos de Oliveira Barroso

Antonio Carlos Marques Alvim

COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR

Anibal N. Gebrin

Deptº de Engenharia Nuclear - COPPE - UFRJ

Rubens S. dos Santos

Seção de Engenharia Nuclear - IME

SUMÁRIO

Diversos tipos e variantes dos "alternating direction methods", (ADM) foram aplicados à solução da equação de condução de calor, com fonte, regime transitório, em regiões axissimétricas. Os resultados obtidos, mostram as vantagens de algumas variantes em relação ao método tradicional de Crank-Nicolson. O "alternating direction explicit", (ADE), foi entre os ADM básicos, o que mais se destacou. Entre todos, o ADE acoplado a uma transformação exponencial parece ser a variante com maior potencial, principalmente, quando usada com intervalo de tempo variável.

SUMMARY

Various types and variants of alternating direction methods, (ADM), were applied to the solution of the time-dependent heat conduction equation, with source, in regions with axial symmetry. Among the basic ADM's, the alternating direction explicit was the one which performed better. An exponential transformation coupled to the ADE seems to be the variant with greater potencial, especially if used with a variable time step scheme.

1. Introdução

Em trabalhos anteriores [1], [2] e [3], o método "alternating direction implicit" (ADI), proposto por Peaceman e Rachford [4] e modificado por Douglas [3], foi aplicado à solução temporal de equação da condução de calor em duas e três dimensões. Nesses trabalhos foi constatada uma clara vantagem desse método sobre o processo tradicional de Crank - Nicolson para a maioria das aplicações estudadas.

Também em cinética de neutrons, os "alternating direction methods" (ADM) foram aplicados com sucesso à solução da equação da difusão considerando vários grupos de energia [5], [6] e [7]. Nesta área contudo, para os problemas de real interesse o ADI mostrou-se apenas equivalente [7] a uma variante otimizada do método de Crank - Nicolson, implementada no programa TWIGL [8]. Tal comportamento atribuído à "stiffness" das equações de cinética, pode ser em parte compensado com a transformação exponencial [5], [6]. Desta forma, o ADI aparecia como uma boa opção, contudo foi um outro tipo de ADM, proposto por Larkin [9] e denominado "alternating direction explicit" (ADE), que quando aplicado às equações de cinética [5], [6], mostrou ser a melhor opção.

Nesse trabalho, as alternativas apresentadas na literatura consultada, bem como algumas variantes investigadas pelos autores, foram testadas para uma classe reduzida de problemas. Foram tratados problemas bidimensionais com simetria axial e geometria semelhante a de uma vareta combustível de um reator PWR. Os testes realizados foram todos muito simples, pois o objetivo do trabalho nesta fase é apenas selecionar as variantes mais promissoras que seriam então implementadas num código para análise da distribuição de temperaturas numa vareta de combustível durante um acidente de perda de refrigerante primário.

2. A Equação da Difusão de Calor Espacialmente Discretizada

Em regiões heterogêneas, mas que apresentam isotropia e simetria axial, a condução de calor é descrita pela seguinte equação:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' \quad (1)$$

onde ρ , c , k e q''' são respectivamente massa específica, calor específico, condutividade térmica e densidade volumétrica da fonte de calor.

Usando-se o processo de "box integration" [10], obtém-se uma discretização espacial de diferenças finitas do tipo "corner mesh", com a

seguinte forma:

$$\beta_{ij} \frac{d}{dt} T_{ij} = \alpha_{ij-1} T_{ij-1} + \alpha_{i-1j} T_{i-1j} - \alpha_{ij} T_{ij} + \alpha_{i+1j} T_{i+1j} + \alpha_{ij+1} T_{ij+1} + q_{ij}''' \quad (2)$$

onde os coeficientes α 's e β 's dependem dos parâmetros k , ρ , c e do espaçamento da malha em volta do ponto (i, j) .

A equação (2), juntamente com as formas discretizadas das condições de contorno podem ser escritas na seguinte forma compacta:

$$\frac{d}{dt} \underline{T} = - \underline{A} \underline{T} + \underline{S} \quad (3)$$

onde: \underline{T} é um vetor coluna cujos componentes são as temperaturas nodais. \underline{A} é a matriz que traduz o acoplamento entre os pontos nodais, de acordo com a discretização efetuada. \underline{S} é o vetor com os termos de fonte, seus componentes são do tipo q_{ij}'''/β_{ij} .

3. Integração Temporal da Equação Semi-discretizada

O método de Crank - Nicolson generalizado, aproxima a solução da equação (3) do seguinte modo:

$$\underline{T}^{(n+1)} - \underline{T}^{(n)} = \left[\theta \underline{A} \underline{T}^{(n+1)} - (1-\theta) \underline{A} \underline{T}^{(n)} \right] + \theta \underline{S}^{(n+1)} + (1-\theta) \underline{S}^{(n)} \quad (4)$$

ou seja,

$$\underline{T}^{(n+1)} = (1+\theta A)^{-1} \left\{ \left[1+(1-\theta)A \right] \underline{T}^{(n)} + \theta \underline{S}^{(n+1)} + (1-\theta) \underline{S}^{(n)} \right\} \quad (5)$$

onde I é a matriz identidade, θ é um fator peso, $(0 \leq \theta \leq 1)$, entre as partes implícitas e explícitas e os sobre-escritos usados indicam o instante de tempo no qual a grandeza está sendo avaliada. Com a escolha de $\theta = 0,5$, a equação (5) recairia no método original de Crank - Nicolson.

A ideia básica do método acima ao avançar um intervalo de tempo (Δt) , é fazê-lo de forma parcialmente implícita e parcialmente explícita, concomitantemente em todos os pontos nodais. Desta forma, as equações algébricas resultantes têm que ser resolvidas simultaneamente.

Dentro da motivação de se obter sistemas algébricos mais simples, surgem os métodos ADM. Nesses métodos, para problemas bidimensionais, por

exemplo, o intervalo de tempo (Δt) é fracionado em duas partes, na primeira metade o avanço é feito de forma implícita para um conjunto de pontos e explícita para os outros pontos nodais. Na segunda parte é feita uma inversão quanto aos pontos que foram calculados explícita e implicitamente.

Considere as matrizes,

$$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3 \text{ e } \underline{A}_4 / \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \underline{A} \text{ e } \underline{A}_3 + \underline{A}_4 = \underline{A}. \quad (6)$$

Lançando mão desta notação, os métodos ADM, para duas dimensões, podem ser descritos de uma forma geral. Na primeira parte do intervalo Δt , a equação (3) seria assim integrada,

$$\begin{aligned} \underline{T}^{(n+1/2)} - \underline{T}^{(n)} &= -\frac{\Delta t}{2} \left[\underline{A}_1 \underline{T}^{(n+1/2)} + \underline{A}_2 \underline{T}^{(n)} \right] + \frac{\Delta t}{2} \underline{S}^{(n)} \\ \underline{T}^{(n+1/2)} &= \left(\underline{I} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_1 \right)^{-1} \left[\left(\underline{I} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_2 \right) \underline{T}^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \underline{S}^{(n)} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

na segunda parte, a integração seria feita da seguinte forma:

$$\underline{T}^{(n+1)} = \left(\underline{I} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_4 \right)^{-1} \left[\left(\underline{I} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_3 \right) \underline{T}^{(n+1/2)} + \frac{\Delta t}{2} \underline{S}^{(n+1)} \right] \quad (8)$$

e combinando-se as equações (7) e (8) obtém-se:

$$\underline{T}^{(n+1)} = \left(\underline{I} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_4 \right)^{-1} \left\{ \left(\underline{I} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_3 \right) \left(\underline{I} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_1 \right)^{-1} \left[\left(\underline{I} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_2 \right) \underline{T}^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \underline{S}^{(n)} \right] + \frac{\Delta t}{2} \underline{S}^{(n+1)} \right\} \quad (9)$$

3.1. Os Métodos ADM Básicos

Considere as matrizes \underline{L}_r e \underline{L}_z , tais que \underline{L}_r , contenha os elementos de \underline{A} , que correspondem à discretização do operador diferencial da equação (1) com relação à direção r e \underline{L}_z aqueles correspondentes à direção z . Note que $\underline{L}_r + \underline{L}_z = \underline{A}$

O ADI de Peaceman e Rachford [4]

Neste caso, as seguintes partições são usadas:

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_3 = \underline{L}_r, \quad \underline{A}_2 = \underline{A}_4 = \underline{L}_z$$

O ADI de Douglas [3]

Neste caso toma-se:

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{2} \underline{L}_R, \underline{A}_2 = \frac{1}{2} \underline{L}_R + \underline{L}_Z, \underline{A}_3 = \underline{L}_R + \frac{1}{2} \underline{L}_Z \text{ e } \underline{A}_4 = \frac{1}{2} \underline{L}_Z$$

O ADE Proposto por Larkin [9]

Considere as matrizes \underline{E} , \underline{D} e \underline{C} , tais que \underline{D} contenha os termos da diagonal principal de \underline{A} , e \underline{E} e \underline{C} , respectivamente, os termos abaixo e acima desta diagonal.

Neste caso \underline{A} é fracionada da seguinte forma:

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_3 = \frac{1}{2} \underline{D} + \underline{E} \text{ e } \underline{A}_2 = \underline{A}_4 = \frac{1}{2} \underline{D} + \underline{C}$$

O "Alternating Direction Checkerboard" (ADC), [11]

Considere as matrizes:

$$\underline{I}_0, \underline{I}_X / \underline{I}_0 + \underline{I}_X = \underline{I}, \underline{I}_0 \underline{I}_X = \underline{I}_X \underline{I}_0 = \underline{0}$$

escolhendo-se,

$$\underline{I}_X = \text{matriz diagonal } \left\{ 1, 0, 1, 0, \dots \right\}$$

$$\underline{I}_0 = \text{matriz diagonal } \left\{ 0, 1, 0, 1, \dots \right\}$$

o método ADC será descrito pela seguinte partição:

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_3 = \underline{I}_X \underline{A} \text{ e } \underline{A}_2 = \underline{A}_4 = \underline{I}_0 \underline{A}$$

O Método de Linhas Alternadas, "Line Hopscotch," (ADL), [12]

Considere as matrizes:

$$\underline{I}_1, \underline{I}_2 / \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}, \underline{I}_1 \underline{I}_2 = \underline{I}_2 \underline{I}_1 = \underline{0}$$

Neste caso, \underline{I}_1 e \underline{I}_2 serão matrizes bloco-diagonais cujos blocos são alternadamente matrizes identidade e matrizes nula.

Desta forma, este método é descrito pela seguinte partição:

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_3 = \underline{I}_1 \underline{A} \text{ e } \underline{A}_2 = \underline{A}_4 = \underline{I}_2 \underline{A}$$

Vale a pena notar, que com esta partição, ao se avançar $\Delta t/2$ são resolvidos 2 sistemas de equações separados, um totalmente explícito e outro equivalente a um ADI. Tais sistemas têm como incógnitas as temperaturas em linhas alternadas da malha de discretização.

3.2. Consistência, Estabilidade e Erro de Truncamento

As propriedades dos métodos acima quanto à estabilidade e consistência, não serão aqui discutidas, pois já foram claramente abordadas em trabalhos anteriores. A referência [5] por exemplo, apresenta uma prova da estabilidade e consistência do ADI e ADE, válida também para o caso de regiões heterogêneas.

Quanto ao erro de truncamento, apresentaremos uma derivação da forma de seu termo principal, posto que esta servirá de base à proposição de algumas variantes dos ADM básicos.

Em uma forma mais compacta, a equação (1) pode ser escrita como,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -MT + q''' \quad (10)$$

onde M é um operador diferencial linear que pode ser definido por comparação entre as equações (1) e (10).

A equação (3), obtida de uma discretização espacial, é uma aproximação da equação (10), onde ao se aproximar o operador M pela matriz \underline{A} , introduziu-se um erro de ordem $O(\Delta r^2) + O(\Delta z^2)$.

Por outro lado, a solução formal da equação (3), ao se avançar um intervalo de tempo Δt , é dada por:

$$\underline{T}^{(n+1)} = \exp[-\Delta t \underline{A}] \underline{T}^{(n)} + \exp[-\Delta t \underline{A}] \int_0^{\Delta t} \exp[u \underline{A}] \underline{S}(t_n + u) du \quad (11)$$

Note-se contudo, que em relação à solução exata das equações (1) ou (10), os valores dados pela equação (11) estão afetados de um erro de truncamento de 3ª ordem, ou seja $O(\Delta t \Delta r^2) + O(\Delta t \Delta z^2)$.

Por meio de algumas expansões em série, a equação (11) pode ser posta na seguinte forma:

$$\underline{T}^{(n+1)} = \left[\underline{I} - \Delta t \underline{A} + \frac{\Delta t^2}{2} \underline{A}^2 - \frac{O(\Delta t^3)}{6} \right] \underline{T}^{(n)} + \frac{1}{2} \left[\Delta t \underline{I} - \Delta t^2 \underline{A} + O(\Delta t^3) \right] \underline{S}^{(n)} + \frac{1}{2} \left[\Delta t \underline{I} - O(\Delta t^3) \right] \underline{S}^{(n+1)} \quad (12)$$

Procedendo-se de forma análoga e considerando-se apenas partições simétricas ($\underline{A}_1 = \underline{A}_3$ e $\underline{A}_3 = \underline{A}_4$), a equação (9) pode ser reescrita,

$$\begin{aligned} \underline{T}^{(n+1)} = & \left[\underline{I} - \Delta t \underline{A} + \frac{\Delta t^2}{2} \underline{A}^2 - \underline{O}(\Delta t^3) \right] \underline{T}^{(n)} + \frac{1}{2} \left[\Delta t \underline{I} - \frac{\Delta t^2}{2} (\underline{A} + \underline{A}_2) - \underline{O}(\Delta t^3) \right] \underline{S}^{(n)} + \\ & + \frac{1}{2} \Delta t \underline{I} - \frac{\Delta t^2}{2} \underline{A}_1 + \underline{O}(\Delta t^3) \underline{S}^{(n+1)} \end{aligned} \quad (13)$$

Comparando-se as expressões (12) e (13) e lembrando o erro já implícito na equação (11), obtém-se uma expressão para o erro de truncamento, válida para os ADM simétricos. Definindo-se o erro de truncamento (E.T.) como a diferença entre os valores aproximados e exatos, pode-se escrever:

$$E.T. = -\frac{\Delta t^2}{4} \underline{A}_1 \left[\underline{S}^{(n+1)} - \underline{S}^{(n)} \right] + \underline{O}(\Delta t^3) + \underline{O}(\Delta t \Delta \tau^2) + \underline{O}(\Delta t \Delta z^2) \quad (14)$$

3.3. Algumas Variantes dos ADM Básicos

Os ADM Pós-Corrigidos (ADPC)

A idéia básica é se adicionar um "termo corretor" de modo a cancelar o termo de ordem Δt^2 na equação (14). Desta forma, após se computar $\underline{T}^{(n+1)}$ usando a equação (9), adiciona-se a este o termo $\frac{\Delta t^2}{4} \underline{A}_1 \left[\underline{S}^{(n+1)} - \underline{S}^{(n)} \right]$, para melhorar a ordem do erro de truncamento do método.

Note que com exceção do ADI de Douglas, esse tipo de variante pode ser aplicado a qualquer um dos métodos básicos.

A Transformação Exponencial

Utilizando-se a seguinte mudança de variável,

$$\underline{T}(t) = \exp(\underline{\Omega}t) \underline{\theta}(t), \quad (15)$$

onde $\underline{\Omega}$ é uma matriz diagonal, a equação (3) transforma-se em:

$$\frac{d}{dt} \underline{\theta} = \exp(-\underline{\Omega}t) \exp(-\underline{\Omega}t) \underline{\theta} \quad (16)$$

A motivação desta transformação é atenuar possíveis variações de ordem exponencial na variável original, obtendo-se desta forma, uma variável transformada de comportamento temporal mais suave. Espera-se portanto, que a equação (16) possa ser integrada com intervalos de tempo

maiores do que a equação (3).

Na prática, para se usar esta transformação é necessário os elementos da matriz $\underline{\Omega}$ a cada intervalo de tempo. Vários algoritmos foram tentados com essa finalidade [5], [6] e os melhores resultados foram obtidos com a expressão abaixo:

$$\Omega_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{T_{i,j}^{(n)}}{T_{i,j}^{(n-1)}}, \quad t_n < t \leq t_{n+1} \quad (17)$$

Métodos de Partição Variável

A motivação aqui é também melhorar o erro de truncamento, porém ao invés de se adicionar um termo corretor, tenta-se anular o termo principal através de uma partição adequada. Desta forma, os termos das diagonais de \underline{A}_1 e \underline{A}_2 seriam escolhidos, a cada intervalo de tempo, de modo que

$$\underline{A}_1 \left[\underline{S}^{(n+1)} - \underline{S}^{(n)} \right] = \underline{0}$$

O Método "Locally One-Dimensional" (LOD)

Este método surgiu da classe de métodos de intervalos fracionados, propostos na literatura russa.

Usando o mesmo formalismo empregado na descrição do ADI, tem-se:

$$\underline{A}_1 = \underline{L}_T, \quad \underline{A}_3 = \underline{L}_Z, \quad \underline{A}_2 = \underline{A}_4 = \underline{0}$$

Como pode ser notado, este método não é um ADM no sentido estrito, mas foi testado por haver boas indicações na literatura, quanto ao seu potencial.

4. Resultados e Conclusões

Foram utilizados seis problemas-teste, todos com a mesma geometria, mas com diferentes combinações de condições de contorno e fonte térmica.

A respeito das variantes descritas na seção 3.3, observou-se que a adição do termo de correção, testada com o ADE e com o ADC, não acarretou mudanças sensíveis nos resultados. Das possíveis variantes com partição variável, foi testada apenas uma, com partições de configuração semelhantes a do ADE. Como os resultados obtidos não foram consistentes, desistiu-se dessas variantes.

Quanto ao LOD, foi abandonado por apresentar desempenho muito inferior ao dos ADM básicos.

Exceto para as variantes citadas acima, são apresentados resultados obtidos com os vários métodos testados, para um cilindro de 12,85 ft de comprimento e 0,21 in de diâmetro, com as seguintes propriedades: $\rho = 649 \text{ lbm/ft}^3$, $k = 1,54 \text{ Btu / hr.ft.}^\circ\text{F}$ e $c = 0,059 \text{ Btu/lbm }^\circ\text{F}$. As condições de contorno correspondem às de convecção para a água à temperatura de 550°F e coeficiente de transferência de calor $h = 5364 \text{ Btu/hr.ft}^2 \text{ }^\circ\text{F}$.

As tabelas 1, 2 e 3 a seguir resumem os resultados obtidos para transitórios com fonte em rampa, fonte simulando calor de decaimento e fonte em degrau. O erro máximo E, referido nestas tabelas, foi definido como:

$$E = \max_{ij} \frac{T_{ij} - T_{ij}^*}{T_{ij}^*} \times 100 \quad (\%),$$

onde T_{ij}^* é o valor da temperatura no ponto (i,j), dada por uma solução convergida.

Tabela 1. Fonte em Rampa - Incremento de Tempo (Δt) para um Erro Máximo de 1%

Método	Incremento de Tempo, Δt (seg)
CN	≤ 32
ADE	≤ 4
ADF	≤ 8
ADC	< 4
ADL	< 4
ADI	< 4
$q''' = \begin{cases} q_0''' & , t < 0 \\ q_0''' + \gamma t & , t \geq 0 \end{cases}$	$q_0''' = 2.12 \times 10^7 \text{ Btu/ft}^3 \text{ hr}$ $\gamma = 1.27 \times 10^8 \text{ Btu/ft}^3 \text{ hr}^2$

Tabela 2. Calor de Decaimento - Incremento de Tempo para um Erro Máximo de 1%

M é t o d o	Incremento de Tempo, Δt (seg)
CN	$\leq 1,0$
ADE	$< 0,5$
ADF	$\leq 0,5$
ADC	$\leq 0,5$
ADL	$< 0,5$
ADI	$< 0,5$
$q''' = \begin{cases} q_0''' & , t < 0 \\ c q_0''' t & - 0,26 \end{cases} \quad \begin{matrix} q_0''' = 2,65 \times 10^7 \text{ Btu/ft.}^3 \text{ hr} \\ c = 0,095 \end{matrix}$	

Tabela 3. Fonte em Degrau - Incremento de Tempo para um Erro Máximo de 1%

M é t o d o	Incremento de Tempo, Δt (seg)
CN	≤ 8
ADE	≤ 4
ADF	≤ 4
ADC	≤ 4
ADL	≤ 4
ADI	≤ 4
$q''' = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ q_0''' & , t > 0 \end{cases} \quad q_0''' = 2,65 \times 10^7 \text{ Btu/ft.}^3 \text{ hr}$	

Observando os resultados obtidos pode-se verificar que, para a mesma precisão, o CN admite, em geral, intervalos de tempo de 2 a 8 vezes maiores que os necessários aos demais métodos. O pior desempenho desse método foi para a perturbação em degrau. Entretanto, o tempo de processamento é cerca de 15 vezes maior, que, por exemplo, o ADE.

A transformação exponencial parece ajudar, quando usada para modificar o ADE. O método resultante foi designado ADF. Este método mostrou ser apenas marginalmente superior ao ADE quanto à precisão, tendo porém, a desvantagem de um tempo de computação 2 vezes maior que o ADE. Deve-se observar, contudo, que algumas melhorias estão sendo introduzidas e que poderão mudar a conclusão acima. Por exemplo, as "frequências" Ω_{ij} poderiam ser avaliadas para o comportamento médio de um grupo de pontos e não para a totalidade dos mesmos. Outra modificação seria a introdução de um

controle de intervalo de tempo, mantendo o erro abaixo de determinado limite. O ADF mostrou ser o método mais sensível a este controle, uma vez que no início dos transientes, ao se usar um Δt maior do que o indicado para o ADE simples, "injeta-se" um erro que será realimentado pelo próprio cálculo das frequências. Isto foi verificado ao se testar o caso em degrau, onde se utilizou intervalos de tempo variáveis para o ADF, tendo este desempenhado bem melhor que o ADE.

O ADC admitiu intervalos de tempo quase do mesmo tamanho que o ADE, sendo tão eficiente computacionalmente quanto este. O ADL é mais rápido que o ADI, sendo ambos equivalentes em precisão ao ADE. Entretanto, ficam aquém do ADE ou do ADC em rapidez de computação.

Com base nos casos analisados, concluimos pela seguinte hierarquia de métodos, considerando precisão e tempo de processamento: ADE, ADF ou ADC e ADI.

REFERÊNCIAS

- [1] Smith, J.H., "Engineering Applications of ADI Methods to Piecewise Linear Multidimensional Heat Transfer", J.Comp.Phys. vol.17 (1975), pp. 181 - 191.
- [2] Smith, J.H., "Survey of Three Dimensional Finite Differences of Heat Equation", Sandia Laboratories Report SC-M-7083 (1970).
- [3] Douglas, J.Jr., "Alternating Direction Methods for Three Space Variables", Numerische Mathematik, vol. 4 (1962), pp. 41 - 63.
- [4] Peaceman, D.W., Rachford, H.H., "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", J. Soc.Ind.Appl.Math., vol. 3 (1955), 28 - 41.
- [5] Read, W.H., Hansen, K.F., "Alternating Direction Methods for the Reactor Kinetics Equations", Nucl.Sci.Eng., vol.41(1970), pp.431-442.
- [6] Ferguson, D.R., Hansen K.F., "Solution of the Space - Dependent Reactor Kinetics Equations in Three Dimensions", Nucl. Sci. Eng., vol. 51 (1973), pp. 189 - 205.
- [7] Hageman, L.A., Yasinsky, J.B., "Comparison of Alternating-Direction Time - Differencing Methods with other Implicit Methods for the Solution of the Neutron Group Diffusion Equations", Nucl. Sci. Eng. vol. 38 (1969), pp. 8-32.
- [8] Yansinsky, J.B., Natelson, M., Hageman, L.A., "TWIGL - A Program to Solve the Two - Dimensional, Two-Group, Space-Time Neutron Diffusion Equations with Temperature Feedback", WAPD-TM-743, Bettis Atomic Power Laboratory (1968).

- [9] Larkin, B.K., "Some Stable Explicit Difference Approximations to the Diffusion Equation", Math. Comp., vol. 18 (1964), pp. 196-204.
- [10] Varga, R.S., Matrix Iterative Analysis, ch. 6, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962).
- [11] Gourlay, A.R., "Hopscotch: A Fast Second - Order Partial Differential Equation Solver", J. Inst. Maths. Applics., vol. 6 (1970), pp. 375 - 384.
- [12] Gourlay, A.R., McGuire, G.R., "General Hopscotch Algorithm for the Numerical Solution of Partial Differential Equations", J. Inst. Maths. Applics., vol. 7 (1971), pp. 216 - 227.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-30

p.p. 297 - 305

PUC/RJ

CONDUÇÃO DE CALOR EM ELEMENTOS COMBUSTÍVEIS COM
CONDIÇÕES DE CONTORNO VARIANDO COM O TEMPO

Artur José Gonçalves Faya

Pesquisador

Centro de Engenharia Nuclear - IPEN - São Paulo, SP

José Rubens Maiorino

Pesquisador

Centro de Engenharia Nuclear - IPEN - São Paulo, SP

SUMÁRIO

Um método de solução de problemas de valor no contorno com dependência temporal nas condições de contorno é aplicado na resolução de um problema de condução de calor em elementos combustíveis tipo placa com coeficiente de transferência de calor variável com o tempo. Os resultados numéricos apresentados demonstram a viabilidade do método na solução desta classe de problemas .

SUMMARY

A method for the solution of boundary-value problems with variable boundary conditions is applied to solve a heat conduction problem in a plate-type fuel element with time dependent film coefficient. The numerical results show the feasibility of the method in the solution of this class of problems .

1. Introdução

Problemas de condução de calor em condições de transientes podem ser resolvidos por técnicas usuais da Física-Matemática [1], tais como, separação de variáveis, transformadas integrais, etc., ou por técnicas numéricas. Entretanto, existe uma grande classe de problemas nos quais as condições de contorno variam com o tempo, em que é impossível a aplicação das técnicas acima, em virtude dos autovalores e autofunções associadas ao problema serem, também, funções do tempo. Exemplos dessa situação aparecem em vários ramos da Física e Engenharia: (i) condução de calor num sólido sujeito a condições de contorno convectivas dependentes do tempo; (ii) moderação e termalização de nêutrons com condições de contorno dependentes da energia; (iii) difusão de massa com fronteiras móveis [2], etc.

Recentemente, Özisik e Murray [3] introduziram um método de solução para esta classe de problemas, o qual é uma extensão do método da transformada integral. No presente trabalho, aplica-se esta técnica a um problema de condução de calor em elementos combustíveis tipo placa refrigerados por um fluido, com coeficiente de transferência de calor convectivo variável no tempo. Uma situação típica de interesse é o transiente em que a refrigeração do circuito primário torna-se deficiente em virtude de falha de bomba. Tal fato pode implicar em condições de fluxo crítico de calor em reatores refrigerados por água sendo, portanto, de relevância na análise de acidentes de reatores nucleares.

Neste trabalho apresenta-se uma descrição do desenvolvimento analítico aplicado a este problema particular.

2. Análise

Considere um elemento combustível tipo placa plana sem encamisamento refrigerado lateralmente por um fluido monofásico com uma distribuição de temperatura no estado estacionário. Suponha que as condições do escoamento do fluido são perturbadas resultando numa variação temporal do coeficiente de transferência de calor convectivo. A distribuição de temperatura no combustível nessa situação é descrita por:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q''''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \quad (1)$$

com as condições de contorno e inicial dadas por

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} + h(t) T(L,t) = 0 \quad (3)$$

e $T(x,0) = f(x),$

respectivamente. Aqui $T(x,t)$ representa a variável temperatura, q''' a densidade de potência, k o coeficiente de condutividade térmica do combustível, L a meia espessura da placa de combustível, α a difusividade térmica do combustível, $f(x)$ a distribuição de temperatura no estado estacionário e $h(t)$ a variação temporal do coeficiente de transferência de calor. Supõe-se que as propriedades físicas e a densidade de potência são constantes.

Para a aplicação do método de Özisik e Murray [3] é conveniente adimensionar as equações acima. Para tanto define-se as seguintes variáveis adimensionais .

$$x^* = x/L,$$

$$t^* = \alpha t/L^2,$$

$$T^* = kT/q'''L^2,$$

e o número de Biot, $Bi(t)$, dado por

$$Bi(t) = h(t) L/k .$$

Com essas definições as equações (1) a (4) tornam-se

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + 1 = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (5)$$

com

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0. \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + Bi(t^*) T^* \right]_{x^*=1} = 0 \quad (7)$$

$$T^*(x^*, 0) = f(x^*) \quad (8)$$

No método em questão deve-se inicialmente resolver o seguinte problema de autovalores associado :

$$\frac{d^2 \psi_m(x^*; t^*)}{(dx^*)^2} = -\lambda_m(t^*) \psi_m(x^*; t^*) \quad (9)$$

com as condições de contorno

$$\left. \frac{d\psi_m}{dx^*} \right|_{x=0} = 0 \quad (10)$$

e

$$\left[\frac{d\psi_m}{dx^*} + Bi(t^*) \psi_m \right]_{x^*=1} = 0 \quad (11)$$

Note que as autofunções $\psi_m(x^*, t^*)$ e autovalores λ_m dependem parametricamente da variável tempo, sendo dadas por

$$\psi_m(x^*; t^*) = \cos[\lambda_m(t^*) x^*] \quad (12)$$

e os autovalores obtidos como solução de

$$\lambda_m(t^*) \tan[\lambda_m(t^*)] = Bi(t^*) \quad (13)$$

Portanto seguindo o clássico método de transformadas integrais a distribuição de temperatura pode ser escrita como

$$T^*(x^*, t^*) = \sum_m^{\infty} K_m(x^*; t) \bar{F}_m(t^*) \quad (14)$$

onde $\bar{F}_m(t^*)$ é a transformada de $T^*(x^*, t^*)$, sendo dada por

$$\bar{F}_m(t^*) = \int_0^1 K_m(x^*; t^*) T(x^*, t^*) dx^*, \quad (15)$$

e as autofunções normalizadas, $K_m(x^*; t^*)$, por

$$K_m(x^*; t^*) = \frac{\psi_m(x^*; t^*)}{N_m(t^*)} = \frac{\cos \left[\lambda_m(t^*) x^* \right]}{N_m(t^*)} \quad (16)$$

onde o fator de normalização

$$N_m(t^*) = \int_0^1 \psi_m^2(x^*; t^*) dx^*, \quad (17)$$

pode ser obtido da expressão

$$N_m(t^*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_m(t^*)} \sin \left[2\lambda_m(t^*) \right] \quad (18)$$

Seguindo o método de Özisik e Murray pode-se mostrar que as transformadas das distribuições adimensionais são soluções do seguinte sistema de equações diferenciais acopladas :

$$\frac{d\bar{F}_m}{dt^*} + \lambda_m^2 \bar{F}_m - \sum_n B_{mn} \bar{F}_n = A_m \quad (19)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

onde

$$A_m(t^*) = \int_0^1 K_m(x^*; t^*) dx^* \quad (20)$$

e

$$B_{mn}(t^*) = \int_0^1 K_m(x^*; t^*) \frac{\partial K_n(x^*; t^*)}{\partial t^*} dx^* \quad (21)$$

resultando

$$A_m(t^*) = \frac{\sin \lambda_m}{\lambda_m \sqrt{N_m}} \quad (22)$$

e

$$B_{mn} = \frac{1}{2} N_m^{-1/2} N_n^{-1/2} \frac{d(Bi)}{dt^*} \left[\lambda_n \sec^2 \lambda_n + \tan \lambda_n \right]^{-1}$$

$$\times \left[\frac{\sin(\lambda_m + \lambda_n)}{(\lambda_m + \lambda_n)^2} - \frac{\cos(\lambda_m + \lambda_n)}{\lambda_m + \lambda_n} + \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_m)}{\lambda_n - \lambda_m} - \frac{\cos(\lambda_n - \lambda_m)}{\lambda_n - \lambda_m} \right] \quad (23)$$

Portanto, solucionando-se o sistema de equações representado por (19) por uma técnica conveniente a distribuição de temperatura adimensional pode ser obtida através da equação (14) .

3. Resultados numéricos

Com o intuito de ilustrar numericamente o método aqui descrito , considera-se nesta seção um transiente em que o coeficiente de transferência de calor é função do tempo. Uma situação típica em que este fenômeno ocorre é no acidente de perda de vazão de refrigerante resultante, por exemplo, de falha de bomba no circuito primário. Conforme descrito por Tong e Weisman [4] em tal acidente a velocidade no refrigerante varia de acordo com

$$V(t) = V_0 (KV_0 t + 1)^{-1}$$

onde V_0 é a velocidade do fluido refrigerante antes do acidente ocorrer e K uma constante que depende do canal de refrigeração e tipo de fluido refrigerante. Usando o fato conhecido que h é proporcional a potência 0.8 do número de Reynolds e, portanto, da velocidade do refrigerante, pode-se descrever a dependência temporal do número de Biot por

$$Bi(t) = Bi(0) (KV_0 t + 1)^{-0.8}$$

Aqui considerou-se como valores típicos [4] para o canal quente de um reator tipo PWR, $K = 0,27 \text{ cm}^{-1}$ e $V_0 = 5 \text{ m/s}$. Desta forma todas as grandezas necessárias para a solução do sistema de equações diferenciais acopladas, podem ser encontradas pelas equações descritas na seção 2 . O sistema de equações diferenciais foi solucionado pelo método de Euler modificado [5] .

Na Figura 1 ilustra-se a distribuição de temperatura , para diferentes valores da variável tempo, obtida pela aproximação de ordem 3 , i.e., considerou-se apenas as tres primeiras equações do sistema dado por (19). A Tabela 1 mostra o comportamento da temperatura central em

Tabela 1

Temperatura Central, T^* ($0, t^*$), para as várias ordens da aproximação

Tempo Adimensionado t^*	Ordem da aproximação		
	1	2	3
0	0.867	0.848	0.851
0.4	0.877	0.865	0.867
0.8	0.932	0.921	0.923
1.2	1.007	0.996	0.998
1.6	1.094	1.079	1.081
2.0	1.176	1.166	1.168

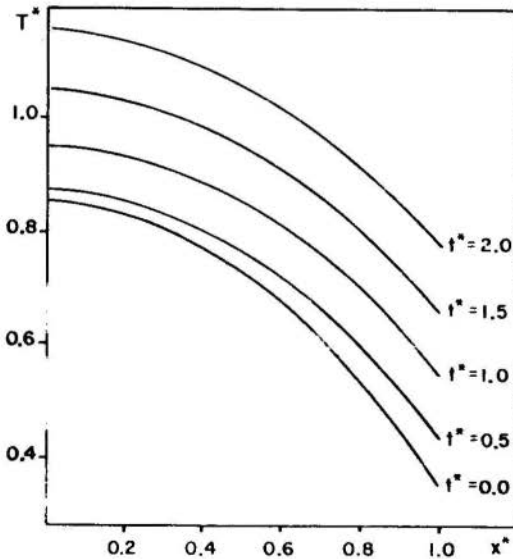


Figura 1 - Distribuição de temperatura no elemento combustível

função do tempo para as tres primeiras ordens da aproximação. Como era de se esperar a harmônica de ordem 3 pouco contribui ao valor da temperatura.

Deve-se ressaltar que na solução numérica do sistema de equações a escolha do incremento de tempo dependerá da ordem de aproximação. Obviamente deve-se cuidar para que o incremento seja substancialmente inferior ao período da harmônica de ordem superior para evitar problemas de estabilidade numérica .

4. Conclusão

A aplicação do método proposto por Özisik e Murray no problema aqui apresentado levou a obtenção de resultados satisfatórios com o uso de baixas ordens de aproximação tornando o método atrativo sob o ponto de vista computacional. Assim no IBM-370/155 usou-se 29 milisegundos/intervalo de tempo/aproximação, sem qualquer preocupação de se otimizar o programa. Para a aplicação do método em problemas "realísticos" e uma melhor avaliação de sua competitividade, torna-se imperativo extende-lo a outras geometrias, incluir o encamisamento, incluir a dependência da condutividade térmica com a temperatura e também permitir que a densidade de potência varie espacial e temporalmente. Por outro lado, a única limitação do método, no que diz respeito a precisão numérica, reside na solução do sistema de equações diferenciais acopladas e, em "teoria", poder-se-ia obter soluções exatas aumentando-se a ordem da aproximação . Portanto o método deve ser considerado de grande valia como padrão para a verificação de métodos aproximados .

REFERÊNCIAS

- [1] Morse, P.M. & Feshbach., Methods of Theoretical Physics, MacGraw Hill, New York, (1953) .
- [2] Bogado, L.S., Özisik, M.N., & Verghese, K., On the Solution of Linear Difusion Problems in Media with Moving Boundaries. Nucl. Sci. Engng. 76, 345, (1980) .
- [3] Özisik, M.N., & Murray, R.L., On the solution of Linear Difusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters, Journal of Heat Transfer, 96, 48, (1974) .

- |4| Tong, L.S., & Weisman, J., Thermal Analysis of Pressurized Water Reactors, American Nuclear Society, La Grange Park, Illinois (1979) .
- |5| Carnahan, B., Luther, H.A., & Wilkes, J.O., Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1969) .



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-31

P. P. 307 - 317

PUC/RJ

A VARIATIONAL METHOD FOR RADIANT
EMISSION FROM DIFFUSE V-GROOVE CAVITIES

Rogério Martins Saldanha da Gama

Francisco Eduardo Mourão Saboya

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

Um método variacional foi usado para se obter as características de emissão de energia radiante em cavidades difusas com a configuração de V. O problema é governado pela equação integral de Fredholm de segunda espécie. Emissividades aparentes foram calculadas supondo-se radiosidades uniformes e variáveis. As paredes da cavidade foram supostas isotérmicas e cinzas.

SUMMARY

A variational method was used to obtain the radiant energy emission characteristics of diffuse V-groove cavities. The problem is governed by the Fredholm integral equation of second kind. Apparent emittances were calculated with uniform and variable radiosities. The cavity walls were assumed isothermal and gray.

1. Introduction

A cavity is a partially enclosed space in which there is an augmentation of the absorptance or emittance due to the multiple reflections of the radiant energy. This augmentation is termed the cavity effect and is used, in practice, in the design of energy sources and in the design of absorbers of solar radiation.

The present research is concerned with the radiant energy transfer characteristics of diffuse V-groove cavities. The bounding walls of the cavity are taken to be isothermal and gray.

A survey of the literature revealed that Sparrow and Lin [1] have solved this problem by finite-difference method. However, such a method does not give good results for small opening angles and low surface emittances. This is due to a singularity in the governing equation, at the origin.

In the present paper, the Fredholm integral equation of second kind, which governs the problem, was solved by a variational method. With this method, the singularity at the origin was not a difficulty and very small opening angles (1 degree) and low surface emittances (0.1) were considered.

It is customary to measure the cavity effect by means of the apparent emittance, which will be defined later. Apparent emittances were determined by solving the radiosity equations of the diffuse cavity. The results were calculated assuming uniform and variable radiosities on the cavity walls. Only in the second case the problem is governed by an integral equation. In the first case one has to solve an algebraic equation.

A schematic diagram of the V-groove cavity is presented in Fig. 1. The diagram is regarded as being very long in the direction into and out of the plane of the figure.

The surface 3 of Fig. 1 is a fictitious black surface stretched across the opening and radiating into the cavity. In this way, the incoming radiation is diffuse and can be characterized by an effective black-body temperature T_e . Surfaces 1 and 2 (see Fig. 1) are the walls of the cavity and they have constant temperature T_w and common emittance ϵ_w . Fig. 1 also contains the x, y coordinates and the cavity

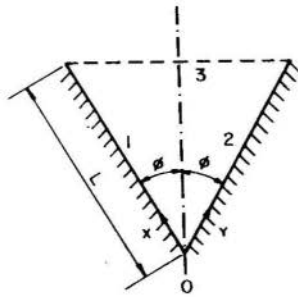


Fig. 1. V-groove cavity

angle designated by 2ϕ . L is the length of the wall surfaces.

Apparent emittance results were obtained for surface emittances ϵ_{ω} from 0.1 to 0.9. The cavity angle was varied from 1 degree to 180 degrees. As said before, the problem has a singularity at the origin which precludes the use of conventional numerical methods for small opening angles and low surface emittances. However, the variational method used here surpassed this difficulty.

2. Analysis

The analysis will be based on the general theory of radiant transport among gray, diffuse surfaces. Such a theory is presented with exceptional clarity in reference [2]. Only a brief description will be given here.

Consideration is given to Fig. 1, where the V-groove cavity is pictured. The local rate of heat transfer at surfaces 1 or 2 is expressed by the equation

$$q_{\omega} = \frac{\epsilon_{\omega}}{1 - \epsilon_{\omega}} (\sigma T_{\omega}^4 - B_{\omega}) \quad (1)$$

where σ is the Stefan-Boltzmann constant and B_{ω} the cavity wall radiosity. At the wall surfaces, due to the symmetry of the problem, it is clear that $q_{\omega}(x) = q_{\omega}(y)$ and $B_{\omega}(x) = B_{\omega}(y)$, when $x = y$.

The radiosity B_{ω} can be evaluated from the following integral equation

$$B_{\omega}(x) = \epsilon_{\omega} \sigma T_{\omega}^4 + (1 - \epsilon_{\omega}) \left[\int_{\Lambda_2} B_{\omega}(y) dF_{d\Lambda_1-d\Lambda_2} + \sigma T_c^4 \int_{\Lambda_3} dF_{d\Lambda_1-d\Lambda_3} \right] \quad (2)$$

or

$$B_{\omega}^+(X) = 1 + (1 - \epsilon_{\omega}) \int_0^1 B_{\omega}^+(Y) dF_{d\Lambda_1-d\Lambda_2} \quad (3)$$

In equation (3) one has the following definitions:

$$B_{\omega}^+ = \frac{B_{\omega} - \sigma T_c^4}{\epsilon_{\omega} \sigma (T_{\omega}^4 - T_c^4)} \quad (4)$$

$$X = x/L \quad ; \quad Y = y/L \quad (5)$$

$$dF_{d\Lambda_1-d\Lambda_2} = \frac{X Y \sin^2 (2\phi)}{2 [X^2 + Y^2 - 2XY \cos (2\phi)]^{3/2}} dY \quad (6)$$

Equation (6) is the expression of the angle factor between two infinitesimal elements $d\Lambda_1$ and $d\Lambda_2$. Once the solution of equation (3) has been found, the corresponding distribution of the local heat flux q_{ω} follows directly from equation (1). In dimensionless form equation (1) can be rewritten as

$$q_{\omega}^+ = \frac{\epsilon_{\omega}}{1 - \epsilon_{\omega}} (1 - \epsilon_{\omega} B_{\omega}^+) \quad (7)$$

where

$$q_{\omega}^+ = \frac{q_{\omega}}{\sigma (T_{\omega}^4 - T_c^4)} \quad (8)$$

The overall rate of heat transfer, per unit length perpendicular to the plane of Fig. 1, is calculated from

$$Q_{\omega} = \int_0^L q_{\omega}(x) dx \quad (9)$$

or in dimensionless form

$$\bar{q}_{\omega}^+ = \frac{Q_{\omega}^+}{L} = \int_0^1 q_{\omega}^+ dX \quad (10)$$

A mean value for the radiosity is given by

$$\bar{B}_{\omega}^+ = \int_0^1 B_{\omega}^+ dX \quad (11)$$

The apparent emittance ϵ_a is defined as

$$\epsilon_a = \frac{Q_\omega}{\sigma L \sin \phi (T_\omega^4 - T_c^4)} \quad (12)$$

or

$$\epsilon_a = \left[\int_0^1 q_\omega^+ dx \right] \frac{1}{\sin \phi} \quad (13)$$

On the other hand, if the radiosity is assumed uniform, results:

$$\bar{B}_\omega^+ = B_\omega^+ = \frac{1}{1 - (1 - \epsilon_\omega)(1 - \sin \phi)} \quad (14)$$

$$\bar{q}_\omega^+ = q_\omega^+ = \frac{\epsilon_\omega \sin \phi}{1 - (1 - \epsilon_\omega)(1 - \sin \phi)} \quad (15)$$

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_\omega}{1 - (1 - \epsilon_\omega)(1 - \sin \phi)} \quad (16)$$

The calculation procedure for obtaining equations (14), (15) and (16) is quite straightforward and will not be given here.

3. The Variational Method

Equation (3) can be rewritten as

$$B_\omega^+(X) = 1 + (1 - \epsilon_\omega) \int_0^1 B_\omega^+(Y) K(X, Y) dY \quad (17)$$

From equation (6) it is seen that

$$K(X, Y) = \frac{dF_{dA_1-dA_2}}{dY} = \frac{XY \sin^2 (2\phi)}{2[X^2 + Y^2 - 2XY \cos (2\phi)]^{3/2}} \quad (18)$$

Equation (17) is a classical mathematical equation, called a Fredholm equation of the second kind [3]. $K(X, Y)$, defined by equation (18), is the kernel of the integral equation. It should be noticed that $K(X, Y) \rightarrow \infty$ as $X, Y \rightarrow 0$. Such a singularity, at the origin, may be a difficulty in the solution of equation (17) if finite difference approximations are employed.

The technique of solving Fredholm equation by variational calculus consists of a fitting procedure. A particular function $B_\omega^+(X)$ is chosen as the solution of

equation (17). Then, the variational expression I given by equation (19) will be a minimum [4].

$$I = (1-\epsilon_\omega) \int_0^1 \int_0^1 B_\omega^+(X) B_\omega^+(Y) K(X,Y) dX dY + \\ + 2 \int_0^1 B_\omega^+(X) dX - \int_0^1 [B^+(X)]^2 dX \quad (19)$$

A restriction upon the method is that the kernel must be symmetrical, that is, $K(X,Y) = K(Y,X)$.

Let us assume that the solution is given by the following power series

$$B_\omega^+(X) = \sum_{i=0}^n C_i X^i \quad (20)$$

The next step is the substitution of equation (20) into equation (19). After integration the variational expression becomes

$$I = I(C_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (21)$$

The value of I, given by equation (21), will be a minimum when

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0 \quad (i=0,1,2,\dots,n) \quad (22)$$

The algebraic system of equations (22) is linear and its solution gives $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$. From equation (20), $B_\omega^+(X)$ is determined. In the present work the following solutions were obtained: $n=1$ (linear), $n=2$ (quadratic), $n=3$ (cubic), $n=4$ (quartic).

Another approach is to assume B_ω^+ constant over n intervals between 0-1. The equation (19) becomes

$$I = (1-\epsilon_\omega) \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_j C_i \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(i-1)h}^{ih} K(X,Y) dX dY + \\ + 2 \sum_{j=1}^n C_j \int_{(j-1)h}^{jh} dX - \sum_{j=1}^n C_j^2 \int_{(j-1)h}^{jh} dX \quad (23)$$

where $B_\omega^+ = C_i$ ($i=1,2,3,\dots,n$) and $h = 1/n$.

Since equation (23) must be a minimum, results

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0 \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (24)$$

The system (24) gives de n values of $B_{\omega}^+ = C_i$. The results, that will be presented in the next section, were determined with $n = 50$ and $n = 100$.

4. Results and Discussion

The dimensionless radiosity distribution $B_{\omega}^+(X)$ was determined by solving equation (17). Typical results are presented in Tables 1, 2, 3, 4, 5 and 6 for the various approaches discussed in the section 3. A more complete set of results is available in [5].

Table 1. Comparison of $B_{\omega}^+(X)$. $\phi = 5$ degrees, $\epsilon_{\omega} = 0.1$

X →	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
Linear	10.1445	8.7249	7.3053	5.8856	4.4660	3.0464
Quadratic	9.1740	8.5536	7.5903	6.2841	4.6349	2.6428
Cubic	9.7097	8.4533	7.4284	6.3063	4.7582	2.4553
Quartic	12.2791	7.7988	7.3484	6.6470	4.5460	3.0290
n = 50	9.3156	8.5080	7.5264	6.3022	4.7099	2.5733
n = 100	9.3395	8.5089	7.5267	6.3026	4.7094	2.5706

Table 2. Comparison of $B_{\omega}^+(X)$. $\phi = 5$ degrees, $\epsilon_{\omega} = 0.9$

X →	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
Linear	1.1205	1.1125	1.1046	1.0966	1.0886	1.0807
Quadratic	1.1032	1.1117	1.1121	1.1042	1.0882	1.0639
Cubic	1.1145	1.1077	1.1089	1.1073	1.0922	1.0531
Quartic	1.1117	1.1088	1.1083	1.1066	1.0933	1.0506
n = 50	1.1102	1.1096	1.1085	1.1055	1.0943	1.0490
n = 100	1.1102	1.1096	1.1085	1.1055	1.0943	1.0489

From the Tables, it is seen that the results of the various computation procedures agree better when ϕ and ϵ_{ω} increase. Once $B_{\omega}^+(X)$ is known, $q_{\omega}^+(X)$ can be determined from equation (7).

Table 3. Comparison of $B_{\omega}^{+}(X)$. $\phi = 10$ degrees, $\epsilon_{\omega} = 0.1$

X →	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
Linear	7.1534	6.1424	5.1314	4.1204	3.1094	2.0984
Quadratic	7.2990	6.1711	5.0938	4.0671	3.0910	2.1656
Cubic	7.4776	6.1374	5.0425	4.0783	3.1304	2.0844
Quartic	7.6931	6.0693	5.0507	4.1146	3.0942	2.1784
n = 50	7.6329	6.0989	5.0602	4.0951	3.1079	2.1513
n = 100	7.7132	6.0983	5.0593	4.0951	3.1076	2.1526

Table 4. Comparison of $B_{\omega}^{+}(X)$. $\phi = 10$ degrees, $\epsilon_{\omega} = 0.5$

X →	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
Linear	2.0420	1.9156	1.7892	1.6629	1.5365	1.4101
Quadratic	1.9215	1.9051	1.8363	1.7151	1.5416	1.3158
Cubic	1.9402	1.8993	1.8307	1.7188	1.5477	1.3017
Quartic	1.9506	1.8952	1.8324	1.7211	1.5445	1.3095
n = 50	1.9411	1.8983	1.8304	1.7210	1.5454	1.3143
n = 100	1.9414	1.8985	1.8303	1.7211	1.5454	1.3148

Table 5. Comparison of $B_{\omega}^{+}(X)$. $\phi = 20$ degrees, $\epsilon_{\omega} = 0.5$

X →	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
Linear	1.7959	1.6819	1.5678	1.4538	1.3397	1.2257
Quadratic	1.7872	1.6811	1.5711	1.4574	1.3399	1.2186
Cubic	1.7798	1.6833	1.5733	1.4560	1.3376	1.2246
Quartic	1.7868	1.6806	1.5744	1.4575	1.3354	1.2303
n = 50	1.7880	1.6808	1.5746	1.4572	1.3355	1.2291
n = 100	1.7892	1.6809	1.5745	1.4572	1.3355	1.2288

Table 6. Comparison of $B_{\omega}^{+}(X)$. $\phi = 20$ degrees, $\epsilon_{\omega} = 0.9$

X →	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
Linear	1.1033	1.0903	1.0773	1.0643	1.0512	1.0382
Quadratic	1.0975	1.0900	1.0798	1.0668	1.0511	1.0326
Cubic	1.0961	1.0905	1.0802	1.0664	1.0506	1.0340
Quartic	1.0970	1.0901	1.0804	1.0666	1.0502	1.0349
n = 50	1.0969	1.0902	1.0804	1.0666	1.0502	1.0348
n = 100	1.0969	1.0902	1.0803	1.0666	1.0502	1.0347

A comparison between results determined with variable and constant radiosities is given in Table 7. In the case of variable radiosities, the method employed was that given by

equations (23) and (24), with $n = 100$.

Table 7. Results with Variable and Uniform Radiosities

ϕ deg.	ϵ_ω	Uniform Radiosity			Variable Radiosity		
		\bar{B}_ω^+	\bar{q}_ω^+	ϵ_a	\bar{B}_ω^+	\bar{q}_ω^+	ϵ_a
0.5	0.1	9.2718	0.0081	0.9272	9.5705	0.0048	0.5468
0.5	0.5	1.9827	0.0087	0.9913	1.9849	0.0075	0.8642
0.5	0.9	1.1100	0.0087	0.9990	1.1101	0.0086	0.9808
5.0	0.1	5.6041	0.0488	0.5604	6.6238	0.0375	0.4304
5.0	0.5	1.8397	0.0802	0.9198	1.8572	0.0714	0.8193
5.0	0.9	1.1005	0.0863	0.9904	1.1006	0.0849	0.9738
10.0	0.1	3.9019	0.0678	0.3902	4.6272	0.0597	0.3438
10.0	0.5	1.7041	0.1480	0.8520	1.7277	0.1361	0.7840
10.0	0.9	1.0901	0.1704	0.9811	1.0904	0.1680	0.9675
20.0	0.1	2.4521	0.0839	0.2452	2.7197	0.0809	0.2365
20.0	0.5	1.4903	0.2549	0.7451	1.5108	0.2446	0.7152
20.0	0.9	1.0704	0.3295	0.9634	1.0708	0.3268	0.9555

In Table 7, \bar{B}_ω^+ , \bar{q}_ω^+ and ϵ_a were defined in the section 2 of the present work. Examination of Table 7 shows that, for a given angle ϕ , the two methods agree better when ϵ_ω increases. For a fixed ϵ_ω , a better agreement is verified when ϕ increases. In all cases $\epsilon_a > \epsilon_\omega$. The departure of ϵ_a from ϵ_ω is a measure of the cavity effect. The maximum value of ϵ_a that can be attained is unity.

Typical results for the distribution of the local heat flux q_ω^+ are presented in Figs. 2, 3 and 4.

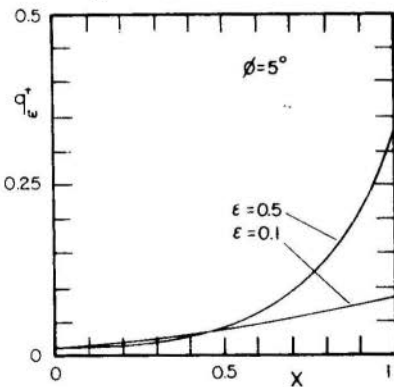


Fig. 2. Local heat flux.
 $\phi = 5$ degrees

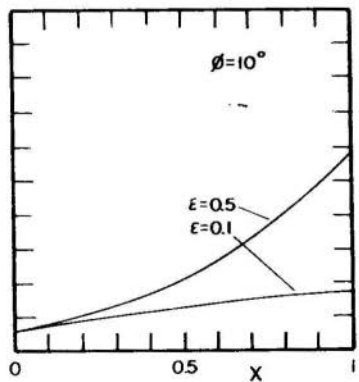


Fig. 3. Local heat flux.
 $\phi = 10$ degrees

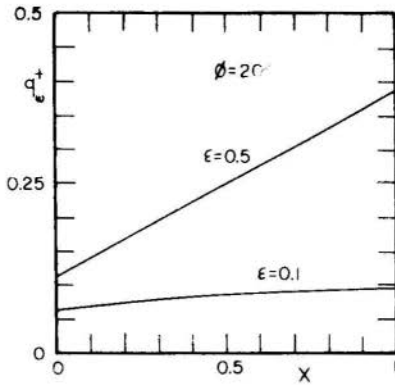


Fig. 4. Local heat flux. $\phi = 20$ degrees

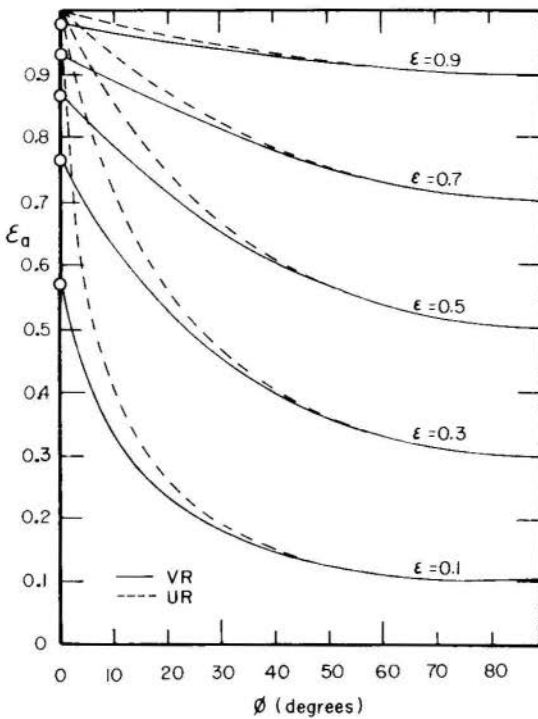


Fig. 5. Apparent emittance results

Figure 5 shows the apparent emittance ϵ_a as a function of the angle ϕ (see Fig. 1). Results are given for surface emittance values ranging from 0.1 to 0.9; solid and dashed lines are respectively employed to designate variable radiosity and uniform radiosity. In all cases the apparent emittance increases as ϕ becomes smaller. Since the cavity surfaces are gray, the ordinate variable ϵ_a of Fig. 5 can also be interpreted as an apparent absorptance α_a .

5. Conclusions

The principal objective of this work was to determine the solution of a Fredholm integral equation of the second kind by means of variational calculus. With this method, the singularity of the kernel of the integral equation, at the origin, was automatically surpassed.

Results have been obtained for very small cavity angles ($2\phi = 1$ degree) and low surface emittances ($\epsilon_\omega = 0.1$). For higher values ($\phi > 15$ degrees, $\epsilon_\omega > 0.3$) the present results were compared with those of [1]. The agreement is exact and lends support to the present paper.

REFERENCES

- [1] Sparrow, E.M. and Lin, S.H., "Absorption of Thermal Radiation in a V-Groove Cavity", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 5 (1962), pp. 1111-1115.
- [2] Sparrow, E.M. and Cess, R.D., Radiation Heat Transfer, Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, California, (1970).
- [3] Lovitt, W.V., Linear Integral Equations, McGraw-Hill, New York, (1954).
- [4] Hildebrand, F.B., Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1952).
- [5] Gama, R.M.S., "Métodos Numéricos na Solução de Problemas de Radiação Pura". Tese de Mestrado, Deptº de Eng. Mecânica. PUC/RJ, Rio de Janeiro, Brasil, (1981).



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-32

p. p. 319 - 328

PUC/RJ

MISTURAS DE GASES: UM MODELO CINÉTICO NÃO-LINEAR PARA PROBLEMAS A NÚMEROS DE KNUDSEN ARBITRÁRIOS

Paulo C. Philippi, Dr. Ing., Professor Adjunto
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, SC, Brasil

Raymond Brun, Docteur d'État, Maître de Recherches C.N.R.S.
Laboratoire de Dynamique et Thermophysique des Fluides
Université de Provence
Marseille, França

SUMÁRIO

Um modelo cinético é apresentado para o operador de colisão da equação de Boltzmann, associado às colisões entre moléculas de espécies diferentes de gases poliátômicos. O modelo é construído de modo a satisfazer as leis de conservação e o teorema-H, oferecendo o nível de detalhes exigido para a descrição dos fenômenos de relaxação em sistemas gasosos submetidos a fortes desequilíbrios. Uma versão linearizada é apresentada e uma comparação é feita do presente modelo com o modelo de Gross-Krook para misturas de gases monoatômicos, no caso limite de colisões inelásticas inexistentes.

SUMMARY

A kinetic model is presented for the collision operator of the Boltzmann equation, related with the cross-collisions between molecules belonging to different species of polyatomic gases. The model satisfies the conservation laws and the H-theorem, giving the required level of details for the description of the relaxation processes in gaseous systems submitted to strong non-equilibria. A linearised version is also presented, the present model being compared with the Gross-Krook model for monatomic gas mixtures, in the limiting case of non-existing inelastic collisions.

1. Introdução

Um modelo cinético se constitui numa aproximação ao termo de colisão da equação de Boltzmann, usado sempre que se necessita descrever apenas algumas de suas propriedades macroscópicas. A equação resultante representa um modelo para a equação de Boltzmann, sendo portanto adequada para a análise de problemas a números de Knudsen arbitrários ($Kn = \lambda/L$, λ = livre percurso médio, L = comprimento característico), onde não se requeira o nível de detalhes fornecido pelo uso do termo de colisão completo.

Modelos cinéticos para gases poliatômicos foram introduzidos por Morse [1], que estende o modelo de Bhatnagar, Gross e Krook [2] para gases monoatômicos, separando as colisões elásticas das colisões inelásticas através da introdução de dois tempos de relaxação distintos. Desta forma se obtém um modelo não-linear, simples, a duas frequências de colisão, adequado para a descrição dos processos de relaxação associados a estados de forte desequilíbrio em sistemas gasosos.

Para problemas linearizados, modelos cinéticos de maior precisão podem ser obtidos através do uso do método de Gross-Jackson [3]. Para gases poliatômicos, tais modelos foram obtidos por Hanson e Morse [4], para a situação de equilíbrio e por Brun e Zappoli [5], para o caso de não-equilíbrio vibracional.

Para misturas de gases poliatômicos, modelos cinéticos linearizados sobre a distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann foram obtidos por Philippi e Brun [6], [7], usando um método generalizado de Gross-Jackson.

Neste trabalho apresenta-se um modelo cinético não-linear para o operador de colisão J_{pq} , que concerne as colisões entre moléculas poliatômicas pertencentes a espécies diferentes p e q , obtido de forma a satisfazer as leis de conservação em colisões p - q e ao teorema-H. Uma versão linearizada do modelo é exibida. O modelo de Gross-Krook [8], para misturas de gases monoatômicos, é reobtido para o caso limite de colisões inelásticas inexistentes.

2. Um Modelo Não-Linear para Misturas de Gases Poliatômicos

Seja $f_{ip} = f(\underline{v}_p, E_{ip}, \underline{r}, t)$ a função distribuição para a velocidade molecular \underline{v}_p e energia interna E_{ip} de uma molécula do componente p no estado quântico i e localizada num ponto \underline{r} do espaço. A equação de Boltzmann para um componente genérico p da mistura, com a hipótese de simetria de Wang-Chang e Uhlenbeck se escreve [6],

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{ip} + \underline{v}_p \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}} f_{ip} = \sum_q J_{pq} = \sum_q \sum_{jk\ell} \iiint (f'_{kp} f'_{\ell q} - f_{ip} f_{jq}) g_{pq} I_{ij}^{k\ell} \sin\chi \, d\chi \, d\phi \, d\underline{v}_q \quad (1)$$

onde $I_{ij}^{k\ell}$ designa a seção diferencial de colisão, $\underline{g}_{pq} = \underline{v}_q - \underline{v}_p$ a velocidade relativa das moléculas antes da colisão e χ e ϕ os ângulos polar e azimutal que fornecem a orientação de \underline{g}'_{pq} (velocidade relativa após a colisão) em relação a \underline{g}_{pq} .

Os termos de colisão J_{pq} se referem à colisão entre moléculas da mesma espécie para $q=p$ e espécies diferentes para $q \neq p$. Um modelo não linear simples para os termos de colisão J_{pq} , $q \neq p$, pode ser conseguido, admitindo-se que os mesmos possam ser escritos nas formas

$$J_{pq} = (f_{ip}^{q,0} - f_{ip}) / \tau_{pq} \quad (2)$$

onde τ_{pq} é um tempo de relaxação que caracteriza as colisões p - q e $f_{ip}^{q,0}$ é uma distribuição de Maxwell-Boltzmann

$$f_{ip}^{q,0} = \frac{n_p}{Q_p(T_{pq}^{in})} \left(\frac{m_p}{2\pi k T_{pq}^{tr}} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m_p}{2k T_{pq}^{tr}} |\underline{v}_p - \underline{u}_{pq}|^2 - \frac{E_{ip}}{k T_{pq}^{in}} \right] \quad (3)$$

construída com os parâmetros \underline{u}_{pq} , T_{pq}^{tr} e T_{pq}^{in} , no momento, indefinidos, mas que podem ser associados a quantidades efetivas, diferindo respectivamente da velocidade macroscópica \underline{u}_p e das temperaturas de translação T_p^{tr} e da temperatura interna T_p^{in} do componente p , devido as colisões p - q . Na eq-(3), n_p = número de moléculas p por unidade de volume, m_p = massa

de uma molécula p, $k =$ constante de Boltzmann e Q_p é a função partição do componente p.

O modelo, eq.(2), é não linear no sentido de que a distribuição $f_{ip}^{q,0}$ contém os parâmetros u_{pq} , T_{pq}^{tr} e T_{pq}^{in} que por sua vez se mostrarão como funções de momentos da função distribuição f_{ip} . Desconsiderado este fato, a eq.(2) fornece um modelo simples do tipo BGK, [2], para colisões entre moléculas de espécies distintas de gases poliatômicos.

O tempo de relaxação τ_{pq} pode ser escrito na forma

$$\tau_{pq} = \tau/n_q \quad (4)$$

onde τ é um parâmetro característico das colisões cruzadas p-q (e q-p) e n_q assegura a anulação de J_{pq} quando $n_q \rightarrow 0$ (caso em que a distribuição f_{ip} não se altera por colisões com moléculas da espécie q).

Por outro lado, os parâmetros u_{pq} , T_{pq}^{tr} e T_{pq}^{in} devem ser escolhidos de modo a que o modelo, eq.(2), satisfaça as leis de conservação da massa, quantidade de movimento e energia para as colisões p-q. A equação de conservação da massa é trivialmente satisfeita pelo modelo. No que concerne a conservação da quantidade de movimento para as colisões p-q

$$\sum_i \int m_p v_p J_{pq} dv_p + \sum_i \int m_q v_q J_{qp} dv_q = 0, \quad (5)$$

esta condição é satisfeita em se fazendo

$$u_{pq} = u_p + \alpha_{pq}(u_q - u_p), \quad \alpha_{pq} = \frac{m_q \alpha}{m_p + m_q}, \quad (6)$$

Na equação acima, α designa um parâmetro independente das propriedades dos componentes; o parâmetro α_{pq} está associado à frequência de colisão que caracteriza o processo de relaxação das velocidades macroscópicas u_p e u_q dos componentes p e q, com

$$u_p = \frac{1}{n_p} \sum_i \int f_{ip} v_p dv_p \quad (7)$$

Consideremos agora a equação de conservação de energia

$$\sum_i \int J_{pq} \left(\frac{1}{2} m_p v_p^2 + E_{ip} \right) dv_p + \sum_i \int J_{qp} \left(\frac{1}{2} m_q v_q^2 + E_{iq} \right) dv_q = 0. \quad (8)$$

Esta equação é satisfeita, fazendo-se,

$$T_{pq}^{tr} = T_{p|q}^{tr} + \frac{2}{3} \alpha_{tr} (T_{q|p}^{tr} - T_{p|q}^{tr}) + \frac{2}{3} \alpha'_{pq} (T_p^{in} - T_{p|q}^{tr}) + \frac{2}{3} \alpha''_{pq} (T_q^{in} - T_{p|q}^{tr}), \quad (9)$$

$$T_{pq}^{in} = T_p^{in} + \frac{k}{C_p^{in}} \alpha_{in} (T_q^{in} - T_p^{in}) + \frac{k}{C_p^{in}} \alpha'_{pq} (T_{p|q}^{tr} - T_p^{in}) + \frac{k}{C_p^{in}} \alpha''_{pq} (T_{q|p}^{tr} - T_p^{in}), \quad (10)$$

onde, C_p^{in} é o calor específico interno a volume constante por molécula do componente p,

$$T_{p|q}^{tr} = \frac{1}{\frac{3}{2} n_p k} \sum_i \int f_{ip} \frac{1}{2} m_p |v_p - u_{pq}|^2 dv_p, \quad (11)$$

é a temperatura de translação das moléculas p calculada com relação a velocidade efetiva u_{pq} e

$$T_p^{in} = \frac{1}{C_p^{in} n_p} \sum_i \int f_{ip} E_{ip} dv_p, \quad (12)$$

é a temperatura interna das moléculas p. O parâmetro α_{tr} está relacionado com os processos de transferência de energia de translação entre as moléculas p e q, o parâmetro α_{in} com o processo de transferência de energia interna, α'_{pq} com os processos de transferência de energia entre os modos internos e de translação de uma mesma molécula p graças às colisões p-q e α''_{pq} com os processos de transferência de energia entre os modos interno e de translação, de moléculas pertencendo à espécies diferentes p e q.

O modelo caracterizado pelas eqs. (2), (3), (7), (9) e (10) é portanto um modelo à várias temperaturas, que descreve os vários processos de relaxação por colisões p-q, associados a desequilíbrios entre estas temperaturas. É, daí, um modelo adequado para a descrição de sistemas gasosos poliatômicos, submetidos a fortes desequilíbrios, onde os efeitos de rela-

xação sejam predominantes em relação aos efeitos dissipativos: expansões em tuburas supersônicas, e escoamentos posteriores a ondas de choque se constituem como alguns exemplos, onde a aplicação do modelo poderia ser bem sucedida.

O modelo acima descrito não leva em conta a relaxação de momentos de ordem 3 da função distribuição, não sendo portanto adequado à descrição de sistemas gasosos quando $Kn \rightarrow 0$, isto é, em regimes dominados por colisões. Um modelo mais elaborado pode ser encontrado na ref. [6]. Todavia, a aplicação deste último modelo em situações práticas envolvendo o uso direto da equação de Boltzmann nos parece particularmente difícil.

3. O Teorema H

Além das condições impostas pelas leis de conservação para colisões p-q o modelo, eq.(2), deve satisfazer

$$\frac{\partial}{\partial t} H \leq 0 \quad (13)$$

onde H é a função H de Boltzmann,

$$H = \sum_p \sum_i \int f_{ip} \ln f_{ip} dv_p \quad (14)$$

Pode-se mostrar [9], que a condição (13) implica em

$$1/\tau, \alpha, \alpha_{tr}, \alpha_{in}, \alpha'_{pq}, \alpha''_{pq} \leq 0 \quad (15)$$

que não é, todavia, uma condição necessária para a conservação dos invariantes colisionais. O teorema H nos assegura, portanto, que os parâmetros colocados na eq.(15) são efetivamente quantidades possíveis de serem associadas a frequências de colisão, positivas.

4. Linearização de J_{pq} . Comparação com casos limites

Para uma determinada classe de problemas, é possível de considerar $f_{ip} \sim f_{ip}^{(0)}$, onde $f_{ip}^{(0)}$ é uma distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann construída com os parâmetros de referência \bar{n}_p , \bar{T} e \bar{u} :

$$f_{ip}^{(o)} = \frac{\bar{n}_p}{Q_p(\bar{T})} \left(\frac{m_p}{2\pi k\bar{T}} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m_p}{2k\bar{T}} |v_p - \bar{u}|^2 - \frac{E_{ip}}{k\bar{T}} \right] \quad (16)$$

Desta forma, linearizando $f_{ip}^{q,o}$ eq.(3) sobre a distribuição $f_{ip}^{(o)}$ caracterizada acima, obtemos para o operador de colisão J_{pq} eq.(2),

$$\begin{aligned} J_{pq}/f_{ip}^{(o)} &= \bar{n}_q/\tau [\delta n_p + 2 \underline{u}_p \cdot \underline{C}_p + \delta T_p^{tr} (C_p^2 - 3/2) + \delta T_p^{in} (\epsilon_{ip} - \bar{\epsilon}_p) \\ &- \phi_{ip}] + \frac{3}{2} \bar{n}_q (\alpha_{tr}/\tau) (\delta T_q^{tr} - \delta T_p^{tr}) (C_p^2 - 3/2) + \\ &\frac{k}{C_p^{in}} \bar{n}_q (\alpha_{in}/\tau) (\delta T_q^{in} - \delta T_p^{in}) (\epsilon_{ip} - \bar{\epsilon}_p) + \\ &\bar{n}_q M_q (\alpha/\tau) [(M_p/M_q)^{1/2} \underline{u}_q - \underline{u}_p] \cdot \underline{C}_p + \\ &\frac{k}{C_p^{in}} \frac{\bar{n}_q}{\tau} [\alpha'_{pq} (\delta T_p^{tr} - \delta T_p^{in}) + \alpha''_{qp} (\delta T_q^{tr} - \delta T_p^{in})] (\epsilon_{ip} - \bar{\epsilon}_p) + \\ &\frac{2}{3} \frac{\bar{n}_q}{\tau} [\alpha'_{pq} (\delta T_p^{in} - \delta T_p^{tr}) + \alpha''_{qp} (\delta T_q^{in} - \delta T_p^{tr})] (C_p^2 - 3/2), \quad (17) \end{aligned}$$

onde,

$$M_p = \frac{m_p}{m_p + m_q}, \quad \delta T_p^{tr} = \frac{T_p^{tr} - \bar{T}}{\bar{T}}, \quad \delta T_p^{in} = \frac{T_p^{in} - \bar{T}}{\bar{T}},$$

$$\phi_{ip} = \frac{f_{ip} - f_{ip}^{(o)}}{f_{ip}^{(o)}}, \quad \underline{u}_p = \left(\frac{m_p}{2k\bar{T}} \right)^{1/2} (\underline{u}_p - \bar{u}), \quad (18)$$

$$\underline{C}_p = \left(\frac{m_p}{2k\bar{T}} \right)^{1/2} (\underline{v}_p - \bar{u}), \quad \epsilon_{ip} = \frac{E_{ip}}{k\bar{T}}$$

O modelo acima eq.(17) foi utilizado para o cálculo do desequilíbrio térmico induzido na camada de Knudsen de uma mistura gasosa, devido a uma acomodação térmica diferenciada dos componentes, e/ou seus modos [10]. A fig. 1 apresenta um resultado específico, para o caso limite de uma mistura de gases monoatômicos (mistura Ar - Kr, 50% fração molar).

Como se observa, o desequilíbrio entre as temperaturas dos componentes da mistura pode ser significativo para uma

distância à superfície inferior a dez livres percursos médios. Cumpre observar que, nesta região, o número de Knudsen é diferente de zero variando de 0,1 a ∞ (na parede) e as equações da hidrodinâmica não podem aí ser aplicadas.

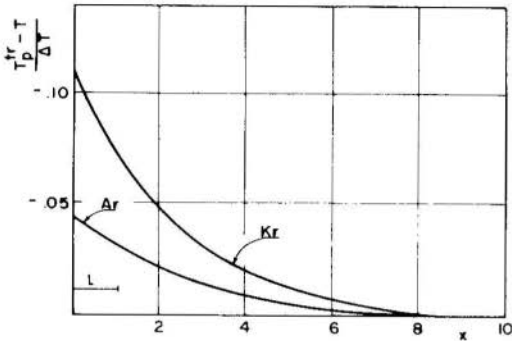


Fig. 1. Desequilíbrio de temperaturas na camada de Knudsen de uma mistura Ar-Kr, 50% fração molar (x = distância à parede em unidades de livre percurso médio, ΔT = salto de temperatura na parede).

Retornando agora ao modelo cinético, eq.(2), observa-se que, para o caso limite da possibilidade de ocorrência de colisões elásticas somente, entre as moléculas componentes da mistura, ter-se-á,

$$\alpha_{in} = \alpha'_{pq} = \alpha''_{pq} = 0, \quad (19)$$

nas eqs.(9)-(10). Desta forma, o modo interno não participa das colisões envolvendo trocas de energia, ficando congelado durante o processo.

As equações (2),(3),(6),(9) e (10), juntamente com a hipótese (19), constituem o modelo cinético de Gross-Krook, [8], para misturas de gases monoatômicos, originalmente desenvolvido para misturas de gases com massas moleculares muito diferentes e portanto com a possibilidade de desequilí-

brios importantes entre as suas respectivas temperaturas de translação.

Em relação ao modelo de Gross-Krook, o presente modelo fornece portanto uma descrição colisional acrescida de três frequências de colisão (α_{in} , α'_{pq} e α''_{pq}), associadas às colisões inelásticas entre moléculas pertencentes a espécies diferentes p e q.

5. Conclusões

Um modelo cinético não-linear foi obtido para misturas de gases poliatômicos. O modelo oferece uma aproximação à equação de Boltzmann, possível de ser usada em problemas a nùmeros de Knudsen arbitrários caracterizados pela presença de fortes desequilíbrios, e onde não se requeira uma precisão acima daquela obtida pela descrição dos processos de relaxação dos momentos de ordem inferior ou igual a 2 da função distribuição. O modelo é linearizado sobre uma distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann e comparado, para o caso limite de colisões inelásticas inexistentes, com o modelo de Gross-Krook.

Uma aplicação da versão linearizada do presente modelo é exibida, para a descrição da camada de Knudsen de uma mistura de gases.

Espera-se que a versão completa não-linear possa ser usada para a análise de problemas envolvendo misturas gasosas submetidas a fortes desequilíbrios.

REFERÊNCIAS

- [1] Morse, T.F., "Kinetic Models for Gases with Internal Degrees of Freedom", The Physics of Fluids, Vol.7 (1964), pp. 159-169.
- [2] Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. e Krook, M., "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems" Physical Reviews, Second Series (1954), pp. 511-525.
- [3] Gross, E.P. e Jackson, E.A., "Kinetic Models and the

- Linearized Boltzmann Equation", The Physics of Fluids, Vol. 2 (1959), pp. 432-441.
- [4] Hanson, F.B. e Morse, T.F., "Kinetic Models for a Gas with Internal Structure", The Physics of Fluids, Vol.10 (1967), pp. 345-353.
- [5] Brun, R. e Zappoli, B., "Model Equations for a Vibrationally Relaxing Gas", The Physics of Fluids, Vol. 20 (1977), pp. 1441-1448.
- [6] Philippi, P.C. e Brun, R., "Kinetic Modeling of Polyatomic Gas Mixtures", Physica - A, Vol. 105 (1981), pp. 147-168.
- [7] Philippi, P.C. e Brun, R., Rarefied Flows and Gas Surface Interactions, Euromech Colloquium no. 125, Oxford, jan. 1980.
- [8] Gross, E.P. e Krook, M., "A Kinetic Model for Disparate Mass Monatomic Gas Mixtures", Physical Reviews, Vol.102 (1956), pp. 593-560.
- [9] Philippi, P.C., "Modèles Cinétiques pour les Mélanges de Gaz Polyatomiques: Application à la Couche de Knudsen", Thèse - Dr. Ing., Université de Provence, Marseille (1980).
- [10] Philippi, P.C. e Brun, R., "Kinetic Models and Relaxation Effects in the Knudsen Layer of Gas Mixtures", Twelfth International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Charlottesville, Va, 7-12 julho (1980), paper 124.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-33

P. P. 329 - 342

PUC/RJ

SOBRE A REGRA DAS FASES DE GIBBS

Antonio Gomes de Mattos Neto

Instituto de Rádio-Dosimetria - CNEN

Antonio Santos Vargas

Professor Associado

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

GIBBS, em seu célebre trabalho "Sobre o Equilíbrio de Substâncias Heterogêneas", formulou o que agora é conhecido como a "Regra das Fases". Em suas próprias palavras, na sua argumentação usa a expressão "provavelmente" quanto a validade dessa regra. A partir daí, tomou-se essa regra, ignorando-se o "provavelmente", até que trabalhos de COLEMAN, NOLL, FEINBERG, DUNN e FOSDICK vieram a esclarecer melhor o assunto. No espírito do trabalho desses pesquisadores, o presente artigo fornece uma demonstração dessa regra para misturas com reação química.

SUMMARY

GIBBS formulated and studied in his famous work "ON THE EQUILIBRIUM OF HETEROGENEOUS SUBSTANCES" the "Phase Rule". In his argumentation he uses the expression "probable" about the validity of his rule. His doubts were soon forgotten, until recently when the work of COLEMAN, NOLL, FEINBERG, DUNN and FOSDICK made his results precise. In the framework of these researchers we will show the validity of the phase rule for mixtures with chemical reactions.

1. Introdução

GIBBS, há pouco mais de cem anos atrás, em "On the Equilibrium of Heterogeneous Substances" [1], formulou uma regra para o número máximo de "fases em coexistência estável", agora conhecida como a Regra das Fases. Na sua argumentação quanto a tal regra usou as seguintes palavras: "It does not seem probable that r can ever exceed $n+2$. An example of $n=1$ and $r=3$ is seen in the coexistent solid, liquid and gaseous forms of any substance of invariable composition" [1, p.97]. Aqui, n representa o número de espécies químicas em uma mistura e r o número de fases em equilíbrio. De fato, o argumento de GIBBS foi incompleto, e mesmo livros-textos modernos perpetuam tal argumento em uma ou outra forma, muitas vezes sem a cautela do uso da expressão "provavelmente", como GIBBS teve o cuidado de fazer [5,6].

Mais recentemente, tendo sido despertado o interesse em elucidar alguns dos fecundos mas obscuros conceitos da termostática, alguns pesquisadores dedicaram-se ao estudo da Regra das Fases, procurando colocá-la dentro da estrutura geral da termodinâmica moderna. NOLL [3] desenvolve um aparato matemático acerca de conjuntos convexos e aplica-o na demonstração de que, quando uma "mistura em isolamento" encontra-se em um "estado estritamente estável", o número de suas fases não pode exceder $n+2$. FEINBERG [5], com base em NOLL [3], obtém o mesmo resultado e discute a validade da fórmula $f = 2+n-r$, onde f é comumente interpretado como o grau de liberdade da mistura. Tanto NOLL [3] quanto FEINBERG [5] tomam como hipótese o caráter discreto das misturas em equilíbrio, ou seja, que as misturas em equilíbrio são formadas por fases uniformes. DUNN e FOSDICK [6] oferecem um exaustivo estudo dessa regra, formulando várias regras de coexistência de fases, mas restringem-se ao caso de misturas com uma só espécie química.

Aqui, no espírito do trabalho desses pesquisadores e de um artigo de COLEMAN [2], fornecemos uma prova para o número máximo de "fases em coexistência estritamente estável", para o caso de misturas com reação química. Analisamos também algumas hipóteses que deem substância a esse resultado, referentes ao caráter discreto das misturas em equilíbrio.

2. Hipóteses Básicas da Termostática

Nesse trabalho consideramos a termostática como definida em [8] por COLEMAN e NOLL. Parafraseando-os: "É um ramo da termodinâmica que lida com corpos em repouso no tempo presente e que, para todos os fins práticos, podem ser considerados como tendo estado em repouso por todo o tempo passado".

Seja ξ o espaço Euclidiano pontual tri-dimensional. Uma mistura em repouso com n espécies químicas será tratada como um corpo único B , uma variedade tri-dimensional [9], ao qual associaremos uma medida m , positiva e finita, chamada de medida de massa da mistura B . Os pontos materiais X serão os elementos de B . Assim, em cada ponto material X de B podemos encontrar as n espécies químicas da mistura. A região ocupada por B em ξ é chamada de configuração de B . Aqui estaremos interessados em misturas com corpos para os quais os conjuntos de pontos materiais com medida nula ocupam uma região em ξ que ã a união finita de superfícies em ξ ou (não exclusivo) a união finita de pontos em ξ .

Não vamos considerar efeitos de capilaridade, efeitos relacionados com interfaces entre fases e efeitos do campo como o do campo gravitacional. Consideraremos também que em um ponto material X da mistura B em repouso não podemos encontrar mais do que uma fase da mistura. Isto significa algo como se nos processos que ocorram com a mistura, as fases ao se formarem, separam-se por mecanismos quaisquer, e que os efeitos associados às interfaces entre essas fases são desprezíveis, como, por exemplo, a energia associada a essas interfaces; e que efeitos como uma distribuição de concentrações das espécies químicas na mistura causada pelo potencial gravitacional são desprezíveis.

Chamaremos $m(B)$ de massa da mistura B , dada por

$$m(B) = \int_B dm . \quad (1)$$

Dadas essas considerações, a hipótese básica da termostática que tomaremos aqui é a de que em uma mistura B em repouso a energia interna ϵ (por unidade de massa), a temperatura θ , a pressão p e os potenciais químicos reduzidos μ_a ($a=1, \dots, n-1$) em cada ponto material X da mistura são determi-

nados se a entropia específica η , o volume específico v e as concentrações C_a ($a=1, \dots, n-1$) das espécies químicas são especificadas em X , ou seja,

$$\begin{aligned} \varepsilon(X) &= \hat{\varepsilon}(g(X)) , \quad \theta(X) = \hat{\theta}(g(X)) , \quad p(X) = \hat{p}(g(X)) \text{ e} \\ \mu_a(X) &= \hat{\mu}(g(X)) \quad (a=1, \dots, n-1) , \end{aligned} \quad (2)$$

onde $g(X) \equiv (\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1})(X)$. As funções $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\theta}$, \hat{p} e $\hat{\mu}_a$ ($a=1, \dots, n-1$), de R^{n+1} em R , são chamadas de funções de equilíbrio para a mistura considerada. As funções $\hat{\theta}$ e \hat{p} são supostas estritamente positivas, ou seja, com imagem em $(0, \infty)$. A função de equilíbrio $\hat{\varepsilon}$ é suposta contínua e derivável, com suas derivadas parciais determinando $\hat{\theta}$, \hat{p} e $\hat{\mu}_a$ ($a=1, \dots, n-1$) através da relação

$$\nabla \hat{\varepsilon} \equiv \left(\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \eta} , \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial v} , \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial C_1} , \dots , \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial C_{n-1}} \right) = \left(\hat{\theta} , -\hat{p} , \hat{\mu}_1 , \dots , \hat{\mu}_{n-1} \right) . \quad (3)$$

Supomos também que para cada conjunto fixo de valores v , C_1 , C_{n-1} , acontece

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{\varepsilon}(y) = \infty , \quad (4)$$

onde $y \equiv (\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1})$.

Nossa atenção será dedicada a corpos chamados de corpos materialmente homogêneos, que são aqueles para quais a função de equilíbrio $\hat{\varepsilon}$ não varia com o ponto material X .

3. O Critério de Estabilidade de Gibbs

Sejam P^i ($i=1, \dots, q < \infty$) subconjuntos disjuntos da mistura B , tais que $B = \bigcup_{i=1}^q P^i$. Cada P^i será chamado de uma parte da mistura B , e a família de conjuntos P^i ($i=1, \dots, q < \infty$) de uma partição finita de B . Definiremos um estado estático da mistura B como o campo $g \equiv (\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1})$ sobre B com valores em R^{n+1} , com medida m (massa) positiva e finita sobre B , se: i) existe uma partição finita P^i ($i=1, \dots, q < \infty$) de B tal que g é uma função contínua em cada parte P^i de B , com $m(P^i) > 0$; ii) os números E , S , V , M_a ($a=1, \dots, n-1$) definidos abaixo são finitos.

$$E \equiv \int_B \hat{\epsilon}(g(X)) \, dm, \quad S \equiv \int_B \eta(X) \, dm, \quad V \equiv \int_B v(X) \, dm \quad e$$

$$M_a \equiv \int_B C_a(X) \, dm \quad (a=1, \dots, n-1). \quad (5)$$

Os números $E, S, V, M_a (a=1, \dots, n-1)$ são chamados de, respectivamente, energia interna total, entropia total, volume total e massa total da espécie química a , da mistura B no estado estático g . $m(P^i)$ é a massa da parte P^i do B , ou seja,

$$m(P^i) = \int_{P^i} dm. \quad (6)$$

Dois estados estáticos g e g^1 de B são ditos equivalentes se existe uma transformação f que preserva medida, de B em B , tal que $g^1 = g \cdot f$. Por uma transformação que preserva medida f de B entendemos uma bijeção de B tal que a imagem de cada subconjunto m -mensurável ζ de B é m -mensurável e $m(f(\zeta)) = m(\zeta)$. Um estado estático de B não equivalente a g é dito distinto de g .

COLEMAN [2] fornece uma formulação de campo para o conceito de estabilidade de GIBBS e aqui o extendemos para o caso de uma mistura com reação química a partir do postulado da indestrutibilidade das espécies atômicas na mistura.

Vamos definir um número $a_\alpha^a (a=1, \dots, n; \alpha=1, \dots, u)$ como a fração mássica da espécie atômica α na espécie química a , dado por

$$a_\alpha^a \equiv \frac{w_\alpha^a t_\alpha^a}{m^a} \quad (a=1, \dots, n; \alpha=1, \dots, u), \quad (7)$$

onde t_α^a é um inteiro não-negativo representando o número de moles da espécie atômica α na espécie química a , m^a a massa molecular da espécie química a , w_α^a o peso atômico da espécie atômica α e finalmente u , que denota o número de espécies atômicas que formam as n espécies químicas presentes na mistura.

Chamaremos de massa total da espécie atômica α da mistura B em um estado estático $g \equiv (\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1})$ o número $N_\alpha (\alpha=1, \dots, u)$ definido como

$$N_\alpha \equiv \int_B \sum_{a=1}^n a_\alpha^a C_a(X) \, dm \quad (\alpha=1, \dots, u). \quad (8)$$

Dado um conjunto fixo de valores $E, V, N_\alpha (\alpha=1, \dots, u)$, tal que uma mistura B em um estado estático g tem energia to tal E, volume V e massa total N_α da espécie atômica α , então diremos que B é uma mistura em isolamento nos valores E, V, $N_\alpha (\alpha=1, \dots, u)$, e o estado estático g nessas condições é dito estado estático compatível com o isolamento de B nos valores E, V, $N_\alpha (\alpha=1, \dots, u)$.

Dessa maneira definimos: Um estado estático g^* de uma mistura B é estável em isolamento se todo estado estático g de B, distinto de g^* , obedecendo a

$$(E, V, N_1, \dots, N_u) = (E^*, V^*, N_1^*, \dots, N_u^*) , \quad (9)$$

também satisfaz a desigualdade

$$S \leq S^* . \quad (10)$$

Em outras palavras, um estado estático g^* de B compatível com o isolamento de B nos valores $E^*, V^*, N_\alpha^* (\alpha=1, \dots, u)$ é estável em isolamento se e somente se, na classe de todos os estados estáticos g do B compatíveis com o isolamento de B nos valores $E^*, V^*, N_\alpha^* (\alpha=1, \dots, u)$, a entropia total de B no estado estático g^* é máxima.

Nas expressões (9) e (10) os números S, E, V, $N_\alpha (\alpha=1, \dots, u)$ são, respectivamente, a entropia total, a energia total, o volume total e a massa total da espécie atômica α , da mistura B no estado estático g; $S^*, E^*, V^*, N_\alpha^* (\alpha=1, \dots, u)$ tem o mesmo significado, mas para a mistura B no estado estático g^* . Adotaremos essa notação daqui para a frente, variando quando necessário, o símbolo super-escrito.

Valendo a desigualdade estrita na expressão (10), o estado estático da mistura B satisfazendo aquela definição será dito estado estático estritamente estável em isolamento. Omitiremos frequentemente as palavras "em isolamento".

Convém frisar nesse ponto que esse critério de estabilidade aparece aqui como uma simples definição, não fornecendo nenhum sentido para a palavra "estável", frustrando a expectativa de uma termodinâmica de um processo que leve um corpo material a um estado de equilíbrio estável [2,6]. Não

trataremos desse assunto aqui, o que de resto só poderia ser feito na termodinâmica, e não na termostática.

4. O Critério de Estabilidade Alternativo de Gibbs

GIBBS argumenta em [1, pp.56-62] que uma condição necessária e suficiente para que um estado estático de um corpo seja estável em isolamento é que forneça um mínimo da energia interna total comparado com todos estados estáticos do corpo, dele distintos, mas com mesma entropia total e mesmo volume total. Aqui, expressamos esse fato da seguinte maneira:

TEOREMA 1. Um estado estático g^* de uma mistura B é estável (estritamente estável) em isolamento se e somente se todo estado estático g de B, distinto de g^* , obedecendo a

$$(S, V, N_1, \dots, N_u) = (S^*, V^*, N_1^*, \dots, N_u^*) \quad (11)$$

satisfaz a desigualdade (desigualdade estrita), $E \geq E^*$.

COLEMAN dá uma prova para esse resultado em 2, quando $g \equiv (\eta, v)$, isto é, para corpos com uma só espécie química. A generalização para o caso em que o corpo é uma mistura com n espécies químicas, quando $g \equiv (\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1})$, é uma generalização imediata.

Percebemos que o critério de estabilidade alternativo de GIBBS leva a um problema de minimização de um funcional, que pode ser definido da seguinte maneira: Dados os números S, V, N_1, \dots, N_u , achar o campo $g \equiv (\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1})$ sobre B tal que minimiza o funcional $E \equiv \int_B \hat{e}(g(X)) \, dm$ sob as restrições:

$$\int_B \eta(X) \, dm = S \quad , \quad \int_B v(X) \, dm = V \quad e \quad (12)$$

$$\int_B \sum_{a=1}^{n-1} b_a^a C_a(X) \, dm = N_\alpha - a_\alpha^n m(B) \quad (\alpha = 1, \dots, u) \quad ,$$

onde b_α^a é um número definido por $b_\alpha^a \equiv a_\alpha^a - a_\alpha^n$ ($a=1, \dots, n$; $\alpha=1, \dots, u$). Observe que o campo g sobre B também deve obedecer à restrição $\sum C_a = 1$. Da definição desse problema decorre o teorema abaixo, que apresenta condições necessárias para que um estado estático g de uma mistura B seja estável em

isolamento.

TEOREMA 2. Seja g^* um estado estático estável em isolamento de uma mistura B. Então, para quase todo ponto material $X \in B$ de continuidade para g^* : i) a temperatura, a pressão e os potenciais químicos reduzidos são constantes, ou seja, existem números $\theta^* > 0$, $p^* > 0$ e $\mu_a^* (a=1, \dots, n-1)$ tais que

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(g^*(X)) &= \theta^* , \quad \hat{p}(g^*(X)) = p^* , \quad \hat{\mu}_a(g^*(X)) = \mu_a^* , \\ \text{com} \quad \mu_a^* &= \sum_{\alpha=1}^u \lambda_{\alpha} b_{\alpha}^a \quad (a=1, \dots, n-1) , \end{aligned} \quad (13)$$

onde $\lambda_{\alpha} (\alpha=1, \dots, u)$ são constantes; ii) se a função de equilíbrio \hat{e} da mistura B tem segundas derivadas,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \geq 0 \quad , \quad - \frac{\partial \hat{p}}{\partial v} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mu_a}{\partial C_a} \geq 0 \quad (a=1, \dots, n-1) ; \quad (14)$$

iii) os pontos $g^*(X) \in R^{n+1}$ da imagem de g são pontos de convexidade para a função de equilíbrio \hat{e} , ou seja $\hat{e}(g^*(X)) \leq t \hat{e}(g^1(X)) + (1-t) \hat{e}(g^-(X))$ para todo $t \in (0,1)$ e para todo g^1 e g^- obedecendo a $g^*(X) = t g^1(X) + (1-t) g^-(X)$, onde g^1 e g^- são estados estáticos de B contínuos nas mesmas partes $P^i \subset B$ que g^* , com $m(P^i) > 0$.

5. Estados Estáticos Polifásicos

Seja $P^i (i=1, \dots, q < \infty)$ uma partição finita de uma mistura B, indexada de tal forma que para $i=1, \dots, r \leq q$ acontece $m(P^i) > 0$. Obviamente $m(B - \bigcup_{i=1}^r P^i) = 0$. Sejam $y^i (i=1, \dots, r)$ pontos discretos do domínio da função de equilíbrio \hat{e} , tal que $y^i \neq y^j$ para $i \neq j$. Seja g um estado estático da mistura B tal que $g(X) = y^i$, para quase todo $X \in P^i (i=1, \dots, r)$. Se existem uma partição finita de B e um estado estático g de B nessas condições, então chamaremos g de estado estático r-fásico da mistura B. Se $r=1$, g será dito estado estático monofásico de B. Cada parte $P^i (i=1, \dots, r)$ será chamada de uma fase ou parte uniforme da mistura B.

Uma prova para este teorema encontra-se na referência [7].

Se g é um estado estático r-fásico estável (estritamente estável) em isolamento de uma mistura B, então as fases

de B serão ditas fases em coexistência estável (estritamente estável).

As definições dadas aqui parecem estar de acordo com o que entendia GIBBS por fase e fases em coexistência [1, p.96]. Em palavras, estamos entendendo fase como um subconjunto da mistura B no qual suas propriedades (aqui entropia específica, volume específico e concentrações das espécies químicas) são uniformes, e um estado polifásico de B é um estado estático de B tal que B é a união disjunta de diversas fases, a menos dos subconjuntos de B com medida nula, que não nos interessam. Um estado estático monofásico é um estado estático de B no qual B tem apenas uma fase.

Observe que se g é um estado estático r -fásico de uma mistura B, tal que $g(X) = y^i$ para quase todo X em uma fase P^i de B, com $y^i \equiv (\eta^i, v^i, C_1^i, \dots, C_{n-1}^i)$ constante ($i=1, \dots, r$), então podemos construir uma matriz F, associada ao estado estático r -fásico g , da seguinte maneira:

$$F \equiv \begin{bmatrix} \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^r \\ v^1 & v^2 & \dots & v^r \\ C_1^1 & C_1^2 & \dots & C_1^r \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^r \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde cada y^i ($i=1, \dots, r$) forma um vetor coluna, a coluna i , da matriz F, a qual chamaremos de matriz das fases do estado estático r -fásico g de B. Existe uma arbitrariedade na indexação das fases de B. Notamos que mais de um estado estático r -fásico de B podem ter uma mesma matriz das fases.

Vamos definir o número α_i como: $\alpha_i \equiv m(P^i)/m(B)$ ($i=1, \dots, r$), onde P^i é uma fase da mistura B no estado estático r -fásico g . Obviamente $\sum \alpha_i = 1$. Construiremos um vetor α , associado ao estado estático r -fásico g , como $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Chamaremos α de vetor proporção das fases de B no estado estático r -fásico g .

OBSERVAÇÃO 1. Seja g um estado estático r -fásico de uma mistura B, onde P^i ($i=1, \dots, r$) é uma fase de B, tal que $g(X) = y^i \in \mathbb{R}^{n+1}$, para quase todo X em P^i . Seja $y^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ um número definido por $y^0 \equiv \int_B g(X) dm/m(B)$. Se F e α são, respecti

vamente, a matriz das fases e o vetor proporção de fases de B no estado estático r-fásico g, então acontece $F \alpha = y^0$.

OBSERVAÇÃO 2. Sejam g e g^1 dois estados estáticos r-fásicos de uma mistura B, com matrizes das fases F e F^1 e vetores proporção de fases α e α^1 , respectivamente. Se $F = F^1$ e $\alpha = \alpha^1$, então g e g^1 são estados estáticos equivalentes.

Obviamente o recôproco é verdadeiro.

6. O Caráter Discreto das Misturas em Equilíbrio

Na próxima seção discutiremos um resultado quanto ao número máximo de fases em coexistência estritamente estável para uma mistura com reação química. No entanto, em relação a esse resultado há uma questão intrigante. Parafraseando FEINBERG: "Se, por um lado, sabemos que uma mistura que não esteja em equilíbrio pode exibir uma infinidade de composições distintas e se, por outro lado, podemos conceder que uma mistura em equilíbrio não precisa ser uniforme, por que devemos presumir que uma mistura em equilíbrio consista em, no máximo, um número finito de partes uniformes?... GIBBS atribuiu um caráter discreto às misturas em equilíbrio desde o começo de sua argumentação. Sem dúvida, essa hipótese é bem fundamentada nas observações empíricas, mas parece ser razoável tentar a conciliação entre essas observações e os princípios da termodinâmica sem o recurso de qualquer imagem preconcebida para as misturas em equilíbrio" [5, p.7].

Dado isso, procede a seguinte pergunta: Qual o sentido da Regra das Fases (e como veremos, o número de fases em coexistência estável é um resultado válido para estados estáticos estritamente estáveis) se admitimos que há estado estático estritamente estável g de uma mistura B para o qual em algum subconjunto P de B, com $m(P) > 0$, g é uma função contínua não constante? A regra não se aplicaria nesse caso e se pensarmos, de uma forma não muito rigorosa, que esse estado é composto por um número infinito de fases, a regra falha para a mistura B nesse estado.

Dadas essas digressões e com esse problema em mente, o que faremos a seguir é tomar uma hipótese sobre a função de equilíbrio é tal que nos leve ao seguinte resultado: Todos estados estáticos estritamente estáveis de uma mistura B são

são polifásicos. Esse fato é expresso no teorema abaixo, e uma prova para o mesmo pode ser encontrada na referência [7].

TEOREMA 3. Seja g um estado estático estritamente estável de uma mistura B . Se a função de equilíbrio \hat{e} da mistura B é convexa a menos de um conjunto compacto convexo, então g é polifásico.

7. A Regra das Fases

Se tomarmos como hipótese sobre a função de equilíbrio \hat{e} de uma mistura B aquela dada no teorema 3, então um estado estático estritamente estável em isolamento de B é necessariamente um estado polifásico. No entanto, não pode ter um número qualquer de fases em coexistência estável. Existe um número máximo possível que é dado pela Regra das Fases, um resultado que deriva diretamente do critério de estabilidade termostática de GIBBS, válido apenas para estudos estáticos estritamente estáveis, como veremos adiante.

Seja $g \equiv (\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1})$ um estado estático r -fásico de uma mistura B , e $P^i (i=1, \dots, r)$ as fases de B nesse estado, tal que $g(X) = y^i \equiv (\eta^i, v^i, C_1^i, \dots, C_{n-1}^i)$ constante, para quase todo X em P^i . Exigimos na definição de um estado r -fásico de uma mistura B que $y^i \neq y^j$, para $i \neq j$. Vamos construir associado a esse estado estático r -fásico um vetor $d^0 \equiv (\eta^0, v^0, d^0, \dots, d_u^0)$, onde definimos

$$\begin{aligned} \eta^0 &\equiv \frac{1}{m(B)} \int_B \eta(X) \, dm & , & & v^0 &\equiv \frac{1}{m(B)} \int_B v(X) \, dm & \text{ e} \\ d^0 &\equiv \frac{1}{m(B)} \int_B \sum_{a=1}^{n-1} b_{\alpha}^a C_a(X) \, dm & (\alpha=1, \dots, u) & , \end{aligned} \quad (16)$$

as integrais calculadas nos campos de entropia específica $\bar{\eta}$, volume específico v e concentrações das espécies químicas $C_a (a=1, \dots, n-1)$, sobre B , dados pelo estado estático r -fásico g . Se $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ é o vetor proporção de fases do estado estático r -fásico g , então é fácil perceber que, para esse estado estático, vale o sistema de equações

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \alpha_i &= 1 & , & & \sum_{i=1}^r \eta^i \alpha_i &= \eta^0 & , & & \sum_{i=1}^r v^i \alpha_i &= v^0 \\ \text{e} & & & & \sum_{i=1}^r \sum_{a=1}^{n-1} b_{\alpha}^a C_a^i \alpha_i &= d_{\alpha}^0 & (\alpha=1, \dots, u) & . \end{aligned} \quad (17)$$

O sistema de equações (17) é equivalente à equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_u^1 & b_u^2 & \dots & b_u^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^r \\ v^1 & v^2 & \dots & v^1 \\ C_1^1 & C_1^2 & \dots & C_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1} & C_{n-1} & \dots & C_{n-1}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta^0 \\ v^0 \\ d^0 \\ d^0 \\ \vdots \\ d_u^0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

que vamos escrever como, $A B \alpha = d^0$.

Analisando os postos das matrizes A e B chegaremos ao número máximo de fases em coexistência estritamente estável, conforme enuncia o teorema 4. Antes porém, necessitamos do seguinte resultado:

LEMA. O posto da matriz (b_α^a) ($a=1, \dots, n-1$; $\alpha=1, \dots, u$) é menor ou igual a $n-p-1$, onde p representa o número de reações químicas independentes entre as espécies químicas a ($a=1, \dots, n$).

TEOREMA 4. Seja g um estado estático r-fásico estritamente estável em isolamento de uma mistura B. Então, $r \leq 2+n-p$.

PROVA: Se g é monofásico, $r=1$ e a desigualdade é trivialmente satisfeita, pois $p \leq n$. Vamos supor então que $r > 1$. Vemos que, definido um vetor d^0 como em (16) para o estado estático r-fásico g, o vetor proporção de fases α de B no estado estático g é solução, por construção, da equação matricial (18), pois (18) vem do sistema de equações (17), que foi construído para este estado estático r-fásico.

Por outro lado, do lema temos que posto $(b_\alpha^a) \leq n-p-1$, e logo posto A $\leq 2+n-p$. Ora, posto B $\leq \min \{2+n, r\}$ e de um teorema da álgebra linear, posto AB $\leq \min \{\text{posto A}, \text{posto B}\}$. Portanto, posto AB $\leq \min \{2+n-p, r\}$.

Vamos supor que $r > 2+n-p$, e então a equação matricial (18) tem mais de uma solução. Tome $\alpha^1 \neq \alpha$ uma outra solução de (18). Construamos um estado estático r-fásico g^1 de B tal que tenha a mesma matriz das fases que o estado estático g, mas com vetor proporção de fases α^1 . Então da observação 2 vemos que g^1 é distinto de g. Mas como α^1 também é uma solução da equação (18), ou seja, do sistema de equações (18), integran

do essas equações em B e lembrando a definição de d^0 em (16), e b_α^a ($a=1, \dots, n-1$; $\alpha=1, \dots, u$) em (16), fica claro que $(S^1, V^1, N_1^1, \dots, N_u^1) = (S, V, N_1, \dots, N_u)$, onde S^1, V^1, N_α^1 ($\alpha=1, \dots, u$) são, respectivamente, a entropia total, o volume total e as massas totais das espécies atômicas, da mistura B no estado estático r-fásico g . S, V, N_α ($\alpha=1, \dots, u$) tem o mesmo significado, mas com a mistura B no estado estático r-fásico g .

Como g^1 tem a mesma matriz das fases que g , das condições i) e iii) do teorema 2 fica claro que, para quase todo X em B, os pontos $(\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1}, \hat{\epsilon}(g))(X)$ e $(v^1, v^1, C_1^1, \dots, C_{n-1}^1, \hat{\epsilon}(g^1))(X)$, onde $g \equiv (\eta, v, C_1, \dots, C_{n-1})$ e $g^1 \equiv (\eta^1, v^1, C_1^1, \dots, C_{n-1}^1)$, pertencem a um mesmo hiper-plano tangente a graf $\hat{\epsilon}$, e logo, para quase todo em B, $\hat{\epsilon}(g(X)) = \hat{\epsilon}(g^1(X)) + \nabla \hat{\epsilon}(g(X)) \cdot (g^1(X) - g(X))$. Integrando essa expressão em B e usando (13), vemos que $E^1 = E$, ou seja, a energia interna total de B no estado estático g^1 é igual aquela de B no estado estático g . Pelo teorema 1, chegamos a uma contradição ao fato de ser g um estado estático estritamente estável. Logo, a suposição de que $r > 2+n-p$ é absurda.

Com outras palavras, o que concluímos foi que se α , solução de (18), é o vetor proporção de fases de um estado estático r-fásico estritamente estável em isolamento, então deve ser solução única. Logo $r \leq$ posto AB. Mas, por outro lado, posto AB $\leq \min\{3+u, r\}$, e então devemos ter posto AB = $r \leq 2+n-p$, pois também mostramos que posto AB $\leq \min\{2+n-p, r\}$. COROLÁRIO. Seja g um estado estático r-fásico estritamente estável em isolamento de uma mistura B. Se posto $(t^\alpha) = u$, então vale: $r \leq 2+u = 2+n-p$.

Obviamente, isto só acontece se $u \leq n$ e quando o número de reações químicas independentes na mistura for o número de espécies químicas menos o número de espécies atômicas, isto é, $p = n-u$. Isto acontece, por exemplo, para misturas de H_2O, O_2 e H_2 ou para misturas de CH_4, H_2O, CO, CO_2 e H_2 .

8. Conclusões

Mostramos que a Regra das Fases para misturas com reação química é um resultado que deriva diretamente do critério de estabilidade termostática de GIBBS, sem a necessidade do uso dos argumentos tradicionais (geralmente contar o número

ro de incógnitas menos o número de equações em um sistema de equações) que são incompletas e/ou incorretas, como bem o mostram FEINBERG [5] e DUNN e FOSDICK [6]. Analisamos uma hipótese que leva as misturas em equilíbrio a serem polifásicas, um fato comum às observações empíricas.

Como consequência imediata do teorema 1 podemos mostrar: 1) a equivalência do critério de minimização da energia interna total com o da minimização da entalpia total, ou energia livre de Helmholtz total, ou energia livre de Gibbs total, etc.; 2) a afinidade de cada reação química numa mistura em um estado estático estável é nula; 3) o calor específico a volume constante e coeficiente de compressibilidade isotérmica são positivos em um estado estático estável. Outros resultados da termodinâmica clássica podem ser derivados.

REFERÊNCIA

- [1] GIBBS, J.W., "The Scientific Papers of J. Willard Gibbs", Vol. I, pp. 55-353, New York, Dover (1961).
- [2] COLEMAN, B.D., "On the stability of equilibrium states of general fluids", Arch.Rat.Mech.Anal. 36, (1970), 1-32.
- [3] NOLL, W., "On certain convex sets of measures and on phase of reacting mixtures", Arch.Rat.Mech.Anal. 38, (1970), 1-12.
- [4] BOWEN, R.M., "On the stoichiometry of chemically reacting materials", Arch.Rat.Mech.Anal. 29, (1968), 114-124.
- [5] FEINBERG, M., "On Gibbs' Phase Rule", Arch.Rat.Mech.Anal. 70, (1979), 219-234.
- [6] DUNN, J.E. & FOSDICK, R.L., "The Morphology and Stability of Material Phases", Arch.Rat.Mech.Anal. 74, (1980), 1-99.
- [7] DE MATTOS, A.G., "Sobre o Critério de Estabilidade Termostática de Gibbs: A Regra das Fases e Estabilidade Dinâmica", Tese de Mestrado, (Orientador: A.S. Vargas), COPPE/UFRJ, (1980).



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N^o D-34

P. P. 343 - 352

PUC/RJ

ESTUDO DAS CARACTERÍSTICAS DE RIGIDEZ DE UMA ESTRUTURA PELA ANÁLISE ESPECTRAL

Ney Augusto Dumont, Dr.-Ing.

Professor Assistente - Dept. Eng. Civil
PUC/RJ - Rio de Janeiro - Brasil

José Napoleão Filho

Aluno de Mestrado - Dept. Eng. Civil
PUC/RJ - Rio de Janeiro - Brasil

SUMÁRIO

São descritas as violações das condições de admissibilidade na solução do problema de equilíbrio pelo método dos elementos finitos. Em particular, estudam-se as consequências da integração reduzida em elementos isoparamétricos. Exemplifica-se a formação de mecanismos em elementos lineares e quadráticos. Analisa-se o efeito conjunto da integração reduzida e não-linearidades físicas do concreto armado sobre a geração de mecanismos. Apresentam-se mecanismos adicionais, presentes no comportamento não linear do concreto armado.

SUMMARY

The violations of admissibility conditions in the equilibrium problem solution by the finite element method are described. Particularly, it is studied the reduced integration effect on isoparametric elements. Mechanisms for linear and quadratic elements are exemplified. It is showed that the adoption of reduced integration in addition to the non-linear physical behaviour of reinforced concrete elements causes further mechanisms.

1. Introdução

Este trabalho é parte de um estudo mais amplo, que se encontra em fase de conclusão no Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ, com o intuito de se fundamentar teoricamente as características de convergência dos modelos de estruturas de concreto armado ora em desenvolvimento [15].

A avaliação aproximada da rigidez no método dos elementos finitos, através da adoção de integração reduzida e seletiva, tem se constituído em procedimento simples e eficiente para solucionar problemas que envolvem excesso ou mal condicionamento da rigidez [1,2]. Mecanismos em elementos isoparamétricos, causados por tal tipo de integração e com materiais de lei física linear, vêm sendo objeto de algumas pesquisas recentes [3,4].

Neste trabalho, estudam-se os efeitos da adoção de integração reduzida, vista como uma violação à condição de avaliação exata da rigidez no método dos elementos finitos. Analisam-se os mecanismos em elementos isoparamétricos planos, que surgem em consequência desta integração, bem como mecanismos adicionais em elementos de concreto armado, com comportamento físico não linear. A mudança de posição do elemento unidimensional que representa o aço, por exemplo, influi no número de mecanismos do elemento de concreto armado, conforme se apresenta no final.

2. Violações das Condições de Admissibilidade

A formulação variacional do equilíbrio estático do sistema elástico tem como funcional característico sua energia potencial total,

$$F(\{U\}) = \frac{1}{2} \int_V ([D]\{U\})^T [E] ([D]\{U\}) dV - \int_V \{U\}^T \{P\} dV - \int_{S_T} \{U\}^T \{T\} dS, \quad (1)$$

onde $([D]\{U\})$, $[E]$, $\{P\}$, $\{T\}$, representam respectivamente deformações, constantes elásticas, forças de massa e de superfície. Obtém-se a função que descreve a configuração de equilíbrio estável do sistema pela minimização do funcional (2), o que resulta nas equações de equilíbrio e condições naturais [5]:

$$\delta F(\{U\}) = 0 \quad (2)$$

- Para o problema, a função $\{U\}$ é admissível se satisfaz:
- As condições essenciais de contorno $\{U\} = \{\bar{U}\}$ em S_0
 - A finitude da energia (1). A função $\{U\} \in C^{m-1}$, desde que as derivadas de ordem máxima (m) em $[D]$ sejam finitas [6].
 - A condição de exatidão na avaliação das integrais em (1).

No método dos elementos finitos [7] estas condições de admissibilidade são muitas vezes violadas. Elementos não-conformes [7] violam a condição de conformidade da função $\{U\}$ na fronteira entre elementos. Tal violação é comum em problemas que exigem continuidade C^1 , como ocorre no elemento de viga (Fig. 1).

A avaliação exata das integrais em (1) não ocorre quando adota-se a integração numérica de Gauss-Legendre. Em elementos isoparamétricos [8], em que o integrando da energia envolve funções racionais, o uso de integração numérica é obrigatório [9]. Em um elemento, a energia é avaliada em p pontos de integração, gerando o funcional aproximado

$$\bar{F}_e(\{U\}) = \sum_{i=1}^p W_i \bar{F}_e(\alpha_i), \quad (3)$$

em que W_i e $\alpha_i = (x_i, y_i, z_i)$ são parâmetros obtidos pela ordem adotada.

As implicações provenientes da violação da condição e são estudadas a seguir, com aplicações a elementos isoparamétricos.

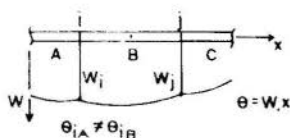


FIG. 1. VIOLAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONFORMIDADE EM ELEMENTO DE VIGA QUADRÁTICO

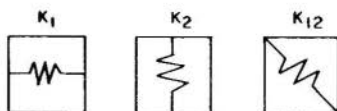


FIG. 2. RELAÇÕES DE RIGIDEZ EM UM PONTO DE INTEGRAÇÃO

3. Mecanismos em Elementos Isoparamétricos

A análise do equilíbrio de um sistema pelo método dos elementos finitos, adotada a formulação em deslocamentos, resulta na equação de equilíbrio,

$$\{f\} = \left(\sum_{e=1}^N [K]_e \right) \{q\}, \quad (4)$$

sendo $\{f\}$ e $\{q\}$ forças e deslocamentos nodais respectivamente, e

$$[K]_e = \int_{V_e} ([D] [N])^T [E] ([D] [N]) dV_e \quad (5)$$

a matriz de rigidez do elemento. Dadas as funções de interpolação em $[N]$, obtém-se o conjunto dos modos de deformação - espectro - que o elemento é capaz de representar, resolvendo o problema:

$$[K]_e \{Y\} = \lambda \{Y\}. \quad (6)$$

Matematicamente, buscam-se os autovalores e autovetores da matriz (5). Fisicamente, procuram-se os modos ou estados de deformação $\{Y\}_i$, equilibrados por forças proporcionais $\lambda_i \{Y\}_i$, onde o autovalor representa a rigidez associada ao respectivo modo [10].

Conceitua-se mecanismo como um modo de deformação associado a uma rigidez nula. Existem dois tipos de mecanismos:

- O mecanismo real, em que a rigidez é nula em qualquer ponto na região do elemento. Os modos de corpo rígido constituem tal tipo.
- O mecanismo falso, em que a rigidez se anula somente nos pontos de integração do elemento, conforme será visto, dado que a ordem de integração é incompleta na avaliação de (5).

A presença de mecanismos torna (5) singular. Se $\{Y\}_i$ define um mecanismo, então

$$\lambda_{e_i} = 0. \quad (7)$$

Agrupando todas as soluções de (6), tem-se

$$[K]_e [Y]_e = [Y]_e [\Lambda]_e, \quad (8)$$

onde $[Y]_e$ é a matriz nodal, cujas colunas são os autovalores de (5) e $[\Lambda]_e$ é a matriz diagonal dos autovalores. Pela propriedade de ortonormalidade dos autovetores [11],

$$\{Y\}_i^T \{Y\}_j = \delta_{ij}, \text{ o que conduz a } [Y]_e^T [Y]_e = [I]. \quad (9), (10)$$

Multiplicando ambos os lados de (8) por $[Y]_e^T$ tem-se de (10)

$$[Y]_e^T [K]_e [Y]_e = [A]_e, \quad (11)$$

que representa a matriz de rigidez na base de seus autovetores. Constatam-se singularidades em (11) através de (7), e como consequência,

$$\text{Det} [A]_e = \prod_i \lambda_i = 0. \quad (12)$$

Para uma malha de elementos, sendo $[Y]$ uma base [11] para o espaço onde se define o problema, a solução \tilde{c} é uma combinação linear dos autovetores,

$$\{q\} = [Y] \{\alpha\}, \quad (13)$$

em que α_i indica a participação do modo $\{y\}_i$ na solução do problema. Substituindo (13) em (4), resulta

$$\{f\} = [K][Y] \{\alpha\}, \quad (14)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez da malha. Multiplicando por $[Y]^T$ e por considerações análogas a (11), tem-se

$$[Y]^T \{f\} = [A] \{\alpha\} \text{ ou } \{f'\} = [A] \{\alpha\}, \quad (15), (16)$$

que significa a equação de equilíbrio no sistema de coordenadas definido pelos autovetores. Determina-se cada coeficiente de participação por (15),

$$\alpha_i = \{y\}_i^T \{f\} / \lambda_i. \quad (17)$$

Mecanismos de corpo rígido desaparecem com a imposição das condições de contorno em (4), porém mecanismos falsos podem em alguns casos propagar-se na malha, impossibilitando a solução do sistema ($\lambda_i = 0$) [3]. Uma solução totalmente irreal pode ser obtida pela presença de um quase-mecanismo [12], caracterizado por uma rigidez muito pequena, a não ser que o numerador de (17) se anule, indicando ortogonalidade entre

as forças nodais e o modo de deformação.

Avalia-se o número total de mecanismos pelo indicador

$$m_T = n - p \cdot d, \quad (18)$$

em que n , p e d significam respectivamente o número de graus de liberdade, pontos de integração e relações de rigidez avaliadas em cada ponto. O número de mecanismos falsos é dado por

$$m_F = m_T - r, \quad (19)$$

onde r designa o número de mecanismos reais ou de corpo rígido [13]. Em problemas de estado plano, avaliam-se em cada ponto de integração três relações de rigidez, correspondentes às deformações ϵ_x , ϵ_y e ϵ_{xy} . Representam-se tais relações por analogia a um sistema de molas, acoplado a cada ponto de integração (Fig. 2).

Sendo p^2 a ordem mínima que integra $[K]$ completamente, define-se integração reduzida a de ordem $(p-1) \times (p-1)$ e integração seletiva a de ordem p^2 para $[K]_V$ e $(p-1) \times (p-1)$ para $[K]_F$, tal que $[K] = [K]_V + [K]_F$, onde as parcelas se referem às alterações de volume e forma respectivamente.

Mecanismos reais e falsos em elementos isoparamétricos linear e quadráticos são mostrados nas figuras 3, 4 e 5. Adotou-se integração reduzida para cada caso. Foi observado que, adotando-se integração completa, os modos de corpo rígido aparecem explicitamente, o que não acontece necessariamente neste caso, em que eles são combinações dos outros modos.

4. Aplicação: Deterioração da Rigidez do Concreto Armado

A análise não linear de estruturas de concreto armado prescreve diversos critérios de resistência com o fim de detectar não-linearidades físicas em qualquer ponto da estrutura. No concreto, tais não-linearidades são fissuração e plastificação e, no aço, escoamento. Em [14], os critérios de resistência adotados testam em cada ponto de integração tensões ou deformações máximas do estado principal com valores críticos dados. Uma não-linearidade é detectada pela superação de um determinado valor crítico, anulando-se em seguida a propriedade física correspondente e, por conseguinte, a rigidez

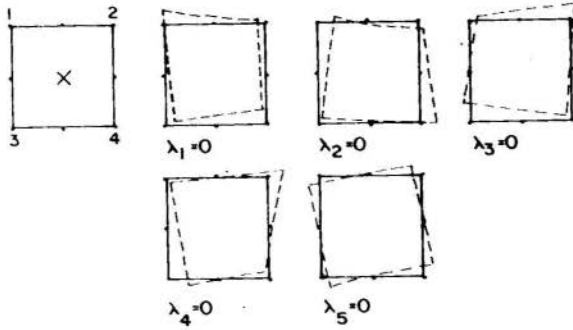


FIG. 3. MECANISMOS NO ELEMENTO ISOP. LINEAR. INTEGRAÇÃO REDUZIDA 1×1 .

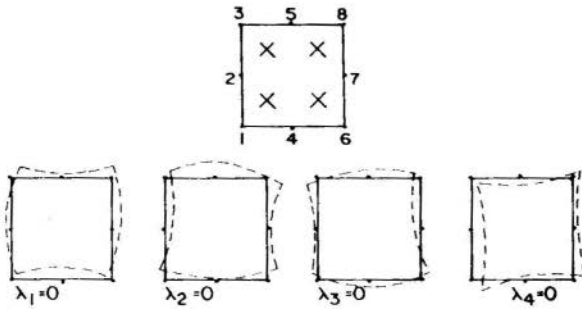


FIG. 4. MECANISMOS NO ELEMENTO ISOP. QUADRÁTICO. INTEGRAÇÃO REDUZIDA 2×2 .

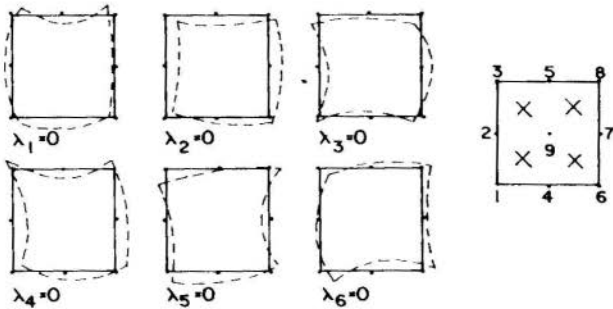


FIG. 5. MECANISMOS NO ELEMENTO ISOP. QUADRÁTICO COM NÓ INTERNO. INTEGRAÇÃO REDUZIDA 2×2 .

($K_1 = 0$). Assim, deteriora-se a matriz de rigidez da estrutura pela presença de não-linearidades nos pontos de integração. Isto equivale a desacoplar molas (Fig. 2) nesses pontos.

O efeito conjunto de integração reduzida com não-linearidades na avaliação da rigidez gera mecanismos adicionais. Nas figuras 7 e 9, mostram-se os mecanismos no elemento isoparamétrico quadrático que representa um tirante de concreto armado (Figs. 6 e 8), no nível de carga correspondente à fissuração no concreto, em que se anulam os módulos de elasticidade longitudinal horizontal e de cisalhamento. Observa-se que o número de mecanismos varia com a alteração de posição da barra de aço. Na Fig. 8B, os pontos de integração para o aço e concreto coincidem, o que causa a presença do mecanismo falso (quarto da Fig. 4), cuja influência é identificada nos mecanismos 1, 3, 7 e 8 da Fig. 9, fato não observado quando os pontos de integração estão dispostos distintamente (Fig. 6B), onde tal mecanismo não está presente (Fig. 7). No exemplo da Fig. 8A, após a fissuração do concreto, não se obteve convergência de solução, pois a rigidez horizontal transferida do concreto para o aço, nos pontos de integração coincidentes, é nula, o que não acontece no exemplo da Fig. 6.

5. Conclusões

A adoção de integração reduzida em elementos isoparamétricos permite economia no tempo computacional referente à integração numérica da rigidez, bem como propicia soluções simples e acuradas para problemas-limites [1,2]. Contudo, a possibilidade de propagação de mecanismos na malha de elementos pode camuflar a solução do problema, quando não impossibilitá-la, a não ser que as condições de contorno anulem tais mecanismos. Recomenda-se o elemento de oito nós, cujo mecanismo falso impede propagação, pois é incompatível com os mecanismos adjacentes [3]. Atenção deve ser dada aos mecanismos adicionais causados por não-linearidades, que podem dificultar a convergência de solução para o problema.

REFERÊNCIAS

- [1] Hughes, J.R, Cohen, M., Haroun, M., "Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Element Analysis of Plates", Nucl. Eng. & Design, vol. 46 (1978), pp.203-222

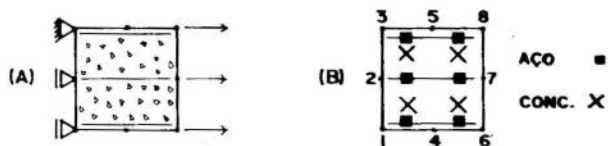


FIG. 6. (A) TIRANTE DE CONCRETO ARMADO (B) PONTOS DE INTEGRAÇÃO PARA O AÇO E CONCRETO EM POSIÇÕES DISTINTAS.

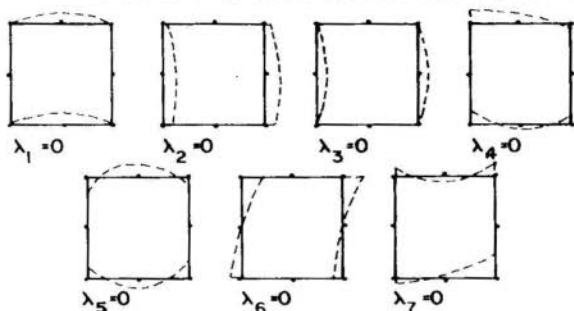


FIG. 7. MECANISMOS NO ELEMENTO ISOP. QUADRÁTICO EM REGIME NÃO-LINEAR. ALTERAÇÃO NA POSIÇÃO DO AÇO. INTEGRAÇÃO REDUZIDA.

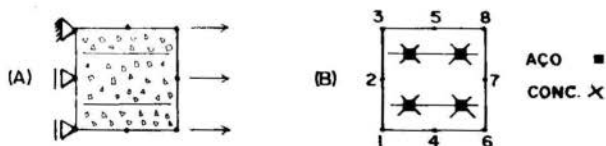


FIG. 8. (A) TIRANTE DE CONCRETO ARMADO (B) PONTOS DE INTEGRAÇÃO PARA O AÇO E CONCRETO COINCIDENTES.

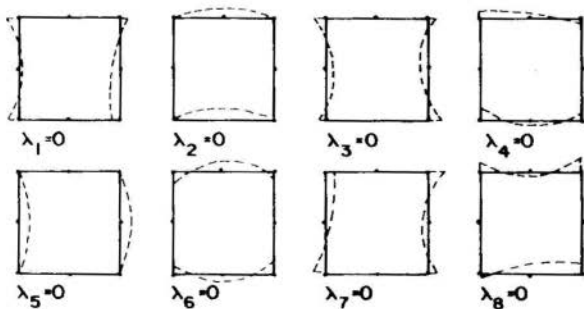


FIG. 9. MECANISMOS NO ELEMENTO ISOP. QUADRÁTICO EM REGIME NÃO-LINEAR. INTEGRAÇÃO REDUZIDA.

- [2] Hinton, E., Salonen, E.M., Bićanić, N., "A Study of Locking Phenomena in Isoparametric Elements", The Mathematics of Finite Elements and Applications III, Ed. Whitman, J.R., Academic Press, London (1979), pp 437-447
- [3] Bićanić, N., Hinton, E., "Spurious Modes in Two-Dimensional Isoparametric Elements", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 14 (1979), pp. 1545-1557
- [4] Kosloff, D., Frazier, G.A., "Treatment of Hourglass Patterns in Low Order Finite Element Codes", Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 2 (1978), pp. 57-72
- [5] Langhaar, H.L., Energy Methods in Applied Mechanics, John Wiley and Sons, New York, (1962)
- [6] Strang, G., Fix, G.J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1973)
- [7] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, McGraw-Hill, London, (1977)
- [8] Ergatoudis, I., Irons, B.M.R., Zienkiewicz, O.C., "Curved, Isoparametric, Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis", Int. J. Solids Struct., Vol. 4 (1968)
- [9] Irons, B.M.R., "Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods", AIAA Journal, Vol. 4 (1966), pp. 2035-2037
- [10] Murray, D.W., "Notes on Spectral Analysis and Applications", Univ. of Alberta, Edmonton (1980 - não publicado)
- [11] Hildebrand, F.B., Methods of Applied Mathematics, Prentice Hall, New York (1952)
- [12] Irons, B.M.R., Hellen, T.K., "On Reduced Integration in Solid Isoparametric Elements when Used in Shells with Membrane Modes", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 10 (1976)
- [13] Zienkiewicz, O.C., Hinton, E., "Reduced Integration, Function Smoothing and Non-Conformity in Finite Element Analysis", J. Franklin Inst., Vol. 302 (1976), pp. 443-461
- [14] Moura, J.R.B., Análise de Estruturas de Concreto Armado pelo M.E.F. Usando Relações Constitutivas Bidimensionais de Base Experimental, T. Mestrado, PUC/RJ (1980)
- [15] Filho, J.N., "Estudo das Características de Rigidez no Método dos Elementos Finitos com Aplicação a Concreto Armado", T. Mestrado, PUC/RJ (1981 - a ser publicada)



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-35

P.P. 353 - 365

PUC/RJ

A NUMERICAL SOLUTION TECHNIQUE FOR ELASTIC-PLASTIC PLATE BENDING

Subhash C. Anand

Professor of Civil Engineering
Clemson Univ., Clemson, S.C. 29631, U.S.A.

Richard F. Bertz

Henry County Bridge Engrg. Dept., Napoleon, OH., U.S.A.
Formally, Research Fellow, Dept. of Civil Engrg.,
Clemson Univ., Clemson, S.C. 29631, U.S.A.

SUMARIO

Soluções para o problema da flexão elástica-plástica de placas através da técnica de elementos finitos são geralmente obtidas pela assimilação da placa a uma construção de "sandwich" ou pela sua divisão em várias camadas formadas por elementos de tensão plana. O segundo modelo é mais preciso mas necessita mais tempo no computador eletrônico. Um modelo simplificado é apresentado neste trabalho, com resultados mais precisos do que os obtidos com o modelo da placa "sandwich".

SUMMARY

The solutions for elastic-plastic bending of plates using the finite element technique have so far been obtained in which the plate is modelled as a sandwich construction or is divided into many layers of plane stress elements. The second model is more accurate but requires substantially more computer time. A simplified model is presented in this paper. It is shown that the results obtained with this model are more accurate than those with the sandwich plate model.

1. Introduction

Primarily two approaches have been used in the literature for the solution of elastic-plastic plate bending problems using the finite element technique. The first utilizes a simplified model commonly referred to as a 'sandwich' plate model [1,2]. It is composed of a core material, which carries all of the transverse shear, sandwiched between two thin cover plates, which support only membrane stresses, whose middle surfaces are separated by the real plate thickness, h . For the purely elastic situation, an exact equivalency is possible with the homogeneous thin plate if the cover plate thickness is taken as one-sixth the thickness of the true plate. The sandwich plate arrangement simplifies the inelastic analysis considerably. The cover sheets are composed of an elastic-plastic material whereas the core is assumed to remain elastic for every load. In the completely plastic state, equivalency of a homogeneous plate to a sandwich plate can be established by taking the thickness of each cover plate to be equal to one-fourth the thickness of the real plate. As such, the plate is taken to be either completely elastic or completely plastic with no provision made for a transition from one state to the other.

In the second approach, a more exact technique of layering the plate into a discrete number of plane stress elements is utilized [3,4,5]. The elastic-plastic state of each layer is determined and numerical integration is carried out to form the stiffness of the layered element. This method, although quite accurate, is nonetheless prohibitive in terms of computer storage and execution time requirements.

Another approach which incorporates the simplicity of the sandwich model and much of the accuracy of the layered-element model has been developed and is presented in this paper. The basic concept of the new model is that a plate element, after it reaches the initial plastic state, is divided into two regions. The outermost regions are represented as plastic fibers and the inner region is composed of the remaining elastic fibers through the plate thickness. The extent of the plastic zone in the cross-section of a plate at any load can be determined by equating the expression of the equivalent strain to the strain at the initial yield. The stiffness of the partially plastic plate element is obtained by summation of the stiffnesses of the elastic and plastic parts. During a load increment, the contribution to the incremental moments for the plastic zone are calculated based upon the

strains at the mid-depth of the plastic region as an approximation of the strains throughout the plastic zone. Although this assumption is strictly not correct, it can be justified if the deflections, and the corresponding strains, remain within the small deflection range and the depth of the developed plastic zone is small enough not to allow significant stress variation within the plastic region. The accuracy of the proposed model is demonstrated by comparison of some typical results with other available models.

For the purpose of this development, it is assumed that the material of the plate is homogeneous and isotropic, behaves as elastic-perfectly plastic, and obeys von Mises' yield condition. In addition, only small deflections are considered in this development. The determination of the elastic-plastic bending stiffness for the plate element is described in the following section.

2. Elastic-Plastic Bending Stiffness for an Element

The standard rectangular plate bending element with three degrees of freedom per node is utilized in this study. The stiffness matrix within the elastic range is standard and is available in the literature [6]. The development of the bending stiffness matrix for a partially plastic element as proposed here, on the other hand, requires a determination of the extent of the plate depth upto which the plate thickness has become plastic. This may be determined as follows:

Plastic Zone Extent Factor - For small deformations, the assumption of plane sections remain plane holds and, consequently, strains within the plate thickness vary linearly. At the boundary of the elastic and plastic regions of the partially plastic section, stresses reach a level such that the von Mises yield condition is just satisfied. As measured from the neutral axis, all fibers located at a depth greater than this 'initial yield' depth have already yielded. If one defines the equivalent stress, σ_{eq} , as

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\sigma_{xy}^2, \quad (1)$$

then, for perfectly plastic materials, σ_{eq} is equal to the yield stress σ_0 in the plastic region and less than σ_0 in the elastic region of the plate cross-section.

The stresses within the elastic region of a cross-section may be related to the strains by the well-known elastic stress-strain

relationships that may be written as

$$\begin{aligned}\sigma_x &= D^*(\epsilon_x + \nu\epsilon_y), \\ \sigma_y &= D^*(\epsilon_y + \nu\epsilon_x), \\ \sigma_{xy} &= D^*(1 - \nu)\epsilon_{xy},\end{aligned}\quad (2)$$

in which $D^* = E/(1 - \nu^2)$, ν = Poisson's ratio, and E = modulus of elasticity. Substituting Eq. (2) into Eq. (1) gives

$$\begin{aligned}\sigma_{eq}^2 &= D^{*2}[(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)^2 - (\epsilon_x + \nu\epsilon_y)(\nu\epsilon_x + \epsilon_y) \\ &\quad + (\nu\epsilon_x + \epsilon_y)^2 + 3\{(1 - \nu)\epsilon_{xy}\}^2],\end{aligned}\quad (3)$$

in which σ_{eq} is less than or equal to σ_0 . Expanding and collecting terms leads to

$$\begin{aligned}\epsilon_{eq}^2 &= (1 - \nu + \nu^2)(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2) - (1 - 4\nu + \nu^2)\epsilon_x\epsilon_y \\ &\quad + 3\{(1 - \nu)\epsilon_{xy}\}^2,\end{aligned}\quad (4)$$

in which ϵ_{eq} = reduced strain = σ_{eq}/D^* .

According to the von Mises yield criterion it is required that at the initial yield fiber depth, σ_{eq} be equal to σ_0 . Therefore,

$$\epsilon_{eq} = \sigma_{eq}/D^* = \sigma_0/D^* = \epsilon_0, \quad (5)$$

in which ϵ_0 is the reduced strain at the initial yield fiber depth. Consequently, the depth of yielding in an element at any load level can be determined by equating the expression of the reduced strain given by Eq. (4) to ϵ_0 . It now remains to relate this information in such a way that the extent of the plastic zone in the cross-section can be determined.

From the linearity of the strain variation, the strain at any depth, d , of the plate can be related to that at the outer fibers by

$$\epsilon_{ij}^d = (2d/h)\epsilon_{ij}^h, \quad (6)$$

where ϵ_{ij}^h and ϵ_{ij}^d are the strains at depth $h/2$ and d , respectively, and h is the thickness of the plate. It can be seen in Eq. (4) that the reduced strain also varies linearly. Therefore, Eq. (6) can be rewritten in terms of the reduced strain as

$$\epsilon_{eq}^d = (2d/h)\epsilon_{eq}^h \quad (7)$$

Although the reduced strain, as given by Eq. (4), is valid only in the elastic region of the plate thickness, this expression may be

utilized for determining ϵ_{eq}^h . The reduced strain at the outer fibers of the plate thickness is required in order to find the location for which ϵ_{eq}^d is equal to ϵ_0 . From Eq. (7), this relationship is seen to be

$$\epsilon_0 / \epsilon_{eq}^h = 2d/h \quad (8)$$

Rearranging and letting $\phi = d/h$, yields the plastic zone extent factor, ϕ , as

$$\phi = 1/2(\epsilon_0 / \epsilon_{eq}^h) \quad (9)$$

which is shown in Fig. 1.

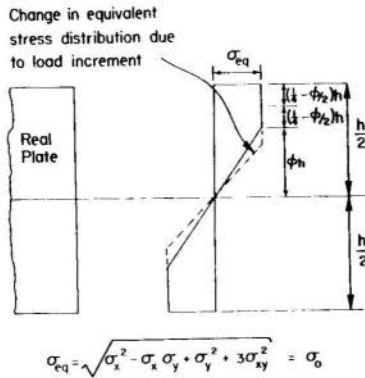


Fig. 1. Equivalent Stress Distribution in Elasto-Plastic Element

Stiffness of a Partially Plastic Element - For the non-linear analysis procedure, the standard piece-wise linear incremental technique well known in the literature [7,8] is utilized in which the incremental stiffness matrix for each plate element must be recalculated for each load increment. In order to find the incremental stiffness relationship for the partially plastic plate bending element, the incremental moment-curvature relationships are required. Defining the incremental moment and curvature vectors by

$$\{\Delta M\} = \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\{\Delta\kappa\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

the generalized incremental relationship is given by

$$\{\Delta M\} = \int_{-h/2}^{h/2} [D] z^2 dz \{\Delta\kappa\}, \quad (12)$$

in which $[D]$ is the generalized incremental stress-strain transformation matrix. The matrix $[D]$ can be expanded into elastic and plastic parts as $[D]^e$ and $[D]^p$, respectively, which are defined in Appendix A.

Within the plastic region, the equivalent stress remains uniform for the perfectly plastic material, so the moments depend not on a variation of z but rather on ϕ (refer to Fig. 1). The contribution to the incremental moments from the plastic zone, using strains at the mid-depth of the plastic region as an approximation of the strains throughout the plastic region, can be given by

$$\{\Delta M\}^p = 2\left(\frac{1}{2} - \phi\right) h \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \phi\right)^2 [D]^p \{\Delta\kappa\} \quad (13)$$

which, upon simplification, yields

$$\{\Delta M\}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{\phi}{4} - \frac{\phi^2}{2} - \phi^3\right) h^3 [D]^p \{\Delta\kappa\} \quad (14)$$

The corresponding moment contribution from the elastic portion of the cross-section is given by

$$\{\Delta M\}^e = \frac{2}{3} \phi^3 h^3 [D]^e \{\Delta\kappa\}. \quad (15)$$

The total incremental moment is, then, the sum of Eqs. (14) and (15).

Note that for the purely elastic case the plastic zone extent factor, ϕ , is equal to $1/2$. The resulting moment-curvature relationship is given by Eq. (15) and takes the familiar form

$$\{\Delta M\} = \frac{h^3}{12} [D]^e \{\Delta\kappa\}. \quad (16)$$

The plastic contribution to the element stiffness matrix is determined by the usual methods employed in the finite element technique [6]. In place of the elastic moment-curvature expression given by Eq. (16), the incremental plastic constitutive matrix, $[D]^p$, is substituted for $[D]^e$ and the term $h^3/12$ is replaced by $[1/2(1/8 + \phi/4 - \phi^2/2 - \phi^3)h^3]$

in Eq. (16). The corresponding elastic portion of the incremental stiffness is determined in the same manner by using the elastic constitutive matrix, $[D]^e$, and replacing the term $(h^3/12)$ with $(2/3 \epsilon^3 h^3)$. The total incremental stiffness matrix is then found by superposition of the individual stiffness matrices representing the plastic and elastic contributions.

As can be readily seen, this development assumes that all stress components are uniform throughout the depth of the plastic zone. This is strictly not true in spite of the fact that the equivalent stress in the plastic zone is constant for a perfectly plastic material. It is obvious that this apparent discrepancy can be minimized by dividing the plastic zone into a series of layers, each of which is treated individually as a plane stress case. This would require a large increase in computer storage and execution time. This is, of course, undesirable and may not be warranted. By limiting the magnitudes of the deflections and corresponding strains within the small deformation range, the extent of the plastic zone developed in the plate thickness is not enough to allow for significant stress variation. The difference between the assumed and real stress components can, therefore, be disregarded.

3. Example Problem

A connection system consisting of a 4" x 3/8" or 8" x 3/8" tension plate welded to a W10 x 21 wide-flange section of three-foot length, as shown in Fig. 2, is used in the analysis for comparison of the proposed and the sandwich plate model. This model conforms to the one that was used in the previously conducted experimental tests [9]. Due to symmetry, only one-fourth of the connection need be modelled. The rectangular plate bending element with three degrees of freedom per node employed for the analysis was first developed for the elastic case by Zienkiewicz and Cheung [6] and incorporates modifications required for the non-linear analysis technique already described. The element configuration used for the study is shown in Fig. 3 and consists of 210 rectangular plate bending elements interconnected by 242 nodes with three degrees of freedom per node.

Experimental evidence [9] indicates that plasticity is of minor concern in the flanges and that any flange model need only simulate the flanges in an elastic manner. As such, a simple model consisting of a

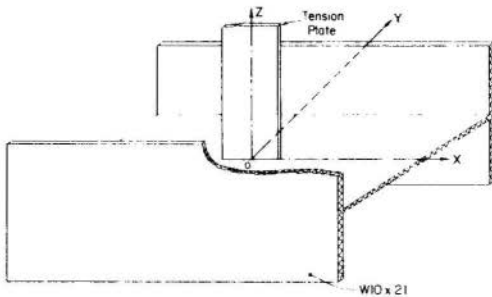


Fig. 2. Light Bracing Connection Used in Analysis

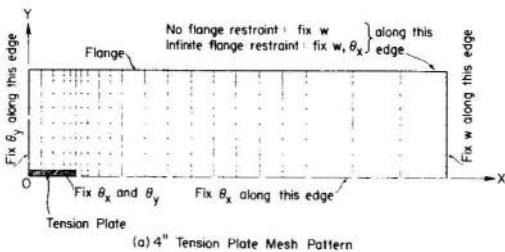


Fig. 3. Mesh Patterns and Boundary Conditions Used in Finite Element Analysis

two-node beam element with torsional capability having one displacement and two rotational degrees of freedom per node is utilized for the flanges. A comparison made with experimental strain gage data at a load of one thousand pounds, as shown in Fig. 4, indicates a very close agreement between the measured and calculated strains in the elastic range, thereby, assuring the accuracy of the proposed finite element model.

Sandwich Plate vs. the Proposed Elasto-Plastic Formulation -

A comparison of the sandwich plate and proposed elasto-plastic models indicated that the development of the yield patterns predicted by the use of the models is essentially the same. The growth of yield zones for an 8 inch tension plate is shown in Fig. 5.

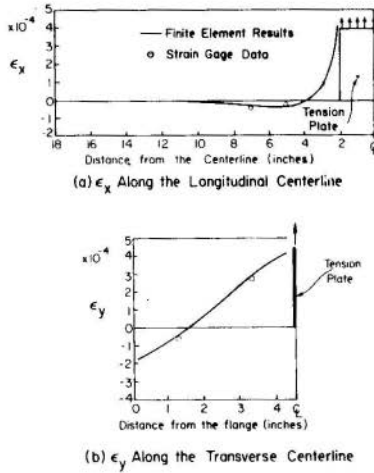


Fig. 4. Comparison of Analytical and Experimental Strains with 4" Tension Plate

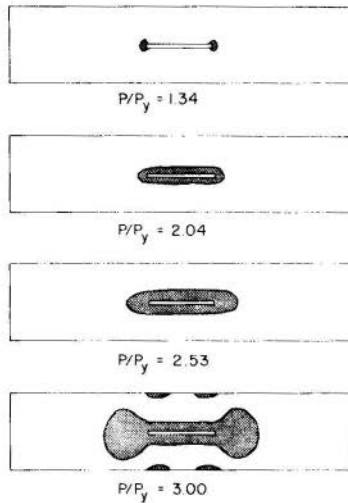


Fig. 5. Yield Zones at Various Loads for a 8" Tension Plate. $P_y = 2.37$ kips

The collapse load, on the other hand, predicted by the proposed elasto-plastic model is significantly higher (on the order of 25 to 30%) than that given by the sandwich plate model. A comparison of the ultimate loads for the two models for various tension plate widths is given in Table I.

Table I. Ultimate Loads Using Sandwich and Proposed Elasto-Plastic Models.

Tension Plate Width	Ultimate Load (kips)	
	Sandwich Model	Proposed Model
4"	4.4	5.4
8"	6.0	7.1

A more apparent difference between the two models can be seen in Fig. 6. in which the deflection curve for the sandwich model flattens out very rapidly after plasticity begins to develop. The curve for the elasto-plastic model shows a much more gradual flattening. A slower degradation of the bending stiffness is indicative of the inherent strength of the remaining elastic portion of the plate. On the other hand, the moment resisting capacity of the sandwich plate element is exhausted once the cover plates reach the state of initial yield.

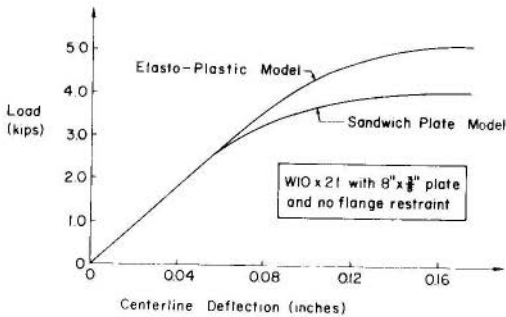


Fig. 6. Stiffness Comparison of Sandwich and Proposed Elasto-Plastic Plate Models

4. Discussion and Conclusions

As determined in this study, the ultimate loads predicted by the sandwich model are significantly lower than those predicted by the

proposed elasto-plastic model. This is a consequence of the assumed stress state in the sandwich cover plates that are considered either entirely elastic or entirely plastic with no transitional stress state incorporated into the model. Therefore, the sandwich model does not adequately represent the load-deformation history of a real plate in bending. On the other hand, it is found that similar plastic zone development patterns are obtained by the sandwich and proposed elasto-plastic models indicating that the sandwich plate technique will accurately predict the progression of plasticity throughout the plate under increasing load. However, the results obtained with the sandwich plate representation may be misleading and so its use for the determination of ultimate loads in plastic plate analysis is not advised. Models, such as that developed herein, provide the necessary accuracy in elastic-plastic plate bending analysis.

A cautionary note should be added to this discussion. While the proposed elasto-plastic plate bending model is accurate for load-deformation and plastic progression studies, stresses can be determined accurately only within the elastic portion of the plate thickness. In the plastic region of a plate cross-section, only average stresses at the centroid of this region can be calculated.

The following conclusions can be drawn based upon the results of this study: 1). The finite element plate bending model developed in this paper provides a simple yet accurate technique for non-linear elastic-plastic analysis. 2). Accurate determination of stress variation through the plastic region of the plate is not possible. 3). The use of the sandwich model for elastic-plastic plate bending analysis is not advised.

5. Acknowledgements

The research reported in this study was supported by a fellowship award to the second author by the American Institute of Steel Construction while he was pursuing graduate studies leading towards the degree of Master of Science in Civil Engineering at Clemson University. The financial support of AISC is gratefully acknowledged.

6. References

1. Ang, A. H. and Lopez, L. A., "Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plates," J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 94, No. EMI, 1968, pp. 271-293.
2. Shoeb, N. A. and Schnobrich, W. C., "Analysis of Elasto-Plastic Shell Structures," Civil Eng. Studies, Structural Research Series No. 324, University of Illinois, August, 1967.
3. Marcal, P. V. and Mallet, R. H., "Elastic-Plastic Analysis of Flat Plates by the Finite Element Method," Paper No. 68-WA/PVP-10, ASME Winter Annual Meeting, New York, 1968.
4. Whang, B., "Elasto-Plastic Orthotropic Plates and Shells," Proceedings, Symposium on Applications of Finite Element Methods in Civil Engineering, Vanderbilt Univ., Nashville, TN, November 13-14, 1969 pp. 481-515.
5. Wegmüller, A. W., "Full Range Analysis of Eccentrically Stiffened Plates," J. Struc. Div., ASCE, Vol. 100, No. ST1, 1974, pp. 143-159.
6. Zienkiewicz, O. C. and Chueng, Y. K., "The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs," Proceedings, Inst. Civil Engrs., Vol. 28, 1964, pp. 471-488.
7. Yamada, Y., Yoshimura, N., and Sakurai, T., "Plastic Stress-Strain Matrix and Its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method," Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 1968, pp. 343-354.
8. Bertz, R. F., "Post-Elastic Analysis of a Web Connection in Direct Tension," a Thesis Submitted to the Graduate School of Clemson University, Clemson, S.C., in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Civil Engineering, August, 1980.
9. Csernak, S. F., "Evaluation of the Strength of Column Web Connections," A Report Submitted to the Department of Civil Engineering in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science, Clemson University, February 1976.

7. Appendix A

The stress and strain vectors in plane stress can be defined, respectively as

$$\{\sigma\} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\}, \text{ and} \quad (\text{A-1})$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} . \quad (\text{A-2})$$

For the elastic case, the well-known stress-strain relationship in plane stress is written as

$$\{\sigma\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} = [D]^e \{\epsilon\} \quad (\text{A-3})$$

for which the incremental moment-curvature relationship is given by Eq. (15).

Yamada et al. [7] have developed an explicit expression for a plastic stress rate-strain rate matrix which is derived by inverting the Prandtl-Reuss equations in plasticity theory. The matrix is simple, straightforward and facilitates the incremental treatment of elastic-plastic problems. Assuming a non-strain hardening material, incremental stress-strain relations in the plastic range for plane stress may be written as

$$\{\Delta\sigma\} = [D]^p \{\Delta\epsilon\} \quad (\text{A-4})$$

in which

$$[D]^p = \frac{E}{\zeta} \begin{bmatrix} S_y^2 + 2\eta & -S_x S_y + 2\nu\eta & -\frac{\sigma_{xy}}{1+\nu} (S_x + \nu S_y) \\ & S_x^2 + 2\eta & -\frac{\sigma_{xy}}{1+\nu} (S_y + \nu S_x) \\ \text{SYMM.} & & \epsilon/[2(1+\nu)] \end{bmatrix} . \quad (\text{A-5})$$

In Eq. (A-5),

$$\eta = \sigma_{xy}^2 / (1+\nu) \quad , \quad \epsilon = S_x^2 + 2 S_x S_y + S_y^2 \quad , \quad (\text{A-6})$$

and

$$\begin{aligned} \zeta &= \epsilon + 2(1-\nu^2)\eta \quad , \\ S_x &= (2\sigma_x - \sigma_y)/3 \quad , \\ S_y &= (2\sigma_y - \sigma_x)/3 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-36

P.P. 367 - 374

PUC/RJ

ANÁLISE TRANSIENTE NÃO LINEAR DE SISTEMAS RÍGIDO-FLEXÍVEIS

Nelson Francisco Favilla Ebecken
COPPE/UF RJ - Programa de Engenharia Civil

Roberto Dalledone Machado
COPPE/UF RJ - Programa de Engenharia Civil

SUMÁRIO

Neste trabalho estuda-se a análise dinâmica de sistemas do tipo rígido-flexíveis, através de um esquema de integração no tempo do tipo implícito-explicito: a resposta do domínio flexível é integrada utilizando-se um método explícito, (diferença central) e a resposta do domínio rígido é integrado com o uso de técnica implícita (método de Newmark). A principal característica deste algoritmo é que a matriz de rigidez do domínio flexível não é calculada, e pode-se adotar um intervalo de integração relativamente maior, para a solução incremental.

SUMMARY

In this work implicit-explicit finite element mesh partitions are developed for transient problems of nonlinear interacting media. Implicit-explicit schemes offer a unified approach to problems of structural transient dynamics and can lead to significant computational advantages. Some numerical examples are solved to show some of the capabilities of this approach.

1. Introdução

Em problemas que envolvem a interação de diversos meios, torna-se vantajoso tratar as regiões de características diferentes que constituem a análise por algoritmos implícitos e explícitos simultaneamente.

Neste trabalho, discutem-se as principais características de implementação de um programa, que utiliza integração implícita através do operador de Newmark e integração explícita através do método de diferença central.

A análise é dirigida a problemas que envolvem a interação de sistemas solo-fluido-estrutura, valendo-se de elementos isoparamétricos com número variado de pontos nodais.

2. Algoritmo Implícito-Explícito

O modelo de elementos finitos é composto de dois grupos: os elementos implícitos (I) e os elementos explícitos (E). Neste algoritmo itera-se em cada intervalo de tempo para satisfazer a equação:

$$\underline{M} \underline{a}_{t+\Delta t} + \underline{P}^I (\underline{d}_{t+\Delta t}, \underline{v}_{t+\Delta t}) + \underline{P}^E (\underline{\hat{d}}_{t+\Delta t}, \underline{\hat{v}}_{t+\Delta t}) = \underline{F}_{t+\Delta t}$$

onde:

$\underline{M} = \underline{M}^I + \underline{M}^E$	- matriz de massa discreta
$\underline{F}_{t+\Delta t} = \underline{F}_{t+\Delta t}^I + \underline{F}_{t+\Delta t}^E$	- vetor de forças aplicadas
\underline{P}	- vetor de forças internas
$\underline{d}_{t+\Delta t}, \underline{v}_{t+\Delta t}$	- vetor de deslocamentos e velocidade em $t + \Delta t$

A seqüência de operações de cada ciclo iterativo é descrita a seguir:

a) início do processo iterativo: $i = 0$

b) fase de estimativas:

$$\underline{d}_{t+\Delta t}^i = \underline{\hat{d}}_{t+\Delta t} = \underline{d}_t + \Delta t \underline{v}_t + \Delta t^2 (1 - 2\beta) \underline{a}_t / 2$$

$$\underline{v}_{t+\Delta t}^i = \underline{\hat{v}}_{t+\Delta t} = \underline{v}_t + \Delta t (1 - \gamma) \underline{a}_t$$

$$\underline{a}_{t+\Delta t}^i = (\underline{d}_{t+\Delta t}^i - \underline{\bar{d}}_{t+\Delta t}^i) / (\Delta t^2 \cdot \beta) = 0$$

c) cálculo de forças residuais:

$$\underline{\psi}^i = \underline{F}_{t+\Delta t} - \underline{M} \underline{a}_{t+\Delta t}^i - \underline{P}^I(\underline{d}_{t+\Delta t}^i, \underline{v}_{t+\Delta t}^i) - \underline{P}^{II}(\underline{\bar{d}}_{t+\Delta t}^i, \underline{\bar{v}}_{t+\Delta t}^i)$$

d) se requerido, atualiza-se a matriz de rigidez efetiva:

$$\underline{K}^* = \underline{M} / (\Delta t^2 \cdot \beta) + \gamma \underline{C}_T^I / (\Delta t \cdot \beta) + \underline{K}_T^I(\underline{d}_{t+\Delta t}^i)$$

Em caso contrário utiliza-se a última \underline{K}^* calculada. Convém salientar que

$$\underline{K}_T^I = \frac{\partial \underline{P}^I}{\partial \underline{d}} \text{ e } \underline{C}_T^I = \frac{\partial \underline{P}^I}{\partial \underline{v}}$$

e) efetua-se a fatorização, redução e retrosubstituição para:

$$\underline{K}^* \Delta \underline{d}^i = \underline{\psi}^i$$

f) introduz-se a correção:

$$\underline{d}_{t+\Delta t}^{i+1} = \underline{d}_{t+\Delta t}^i + \Delta \underline{d}^i$$

$$\underline{a}_{t+\Delta t}^{i+1} = (\underline{d}_{t+\Delta t}^{i+1} - \underline{\bar{d}}_{t+\Delta t}^i) / (\Delta t^2 \cdot \beta)$$

$$\underline{v}_{t+\Delta t}^{i+1} = \underline{v}_{t+\Delta t}^i + \Delta t \cdot \gamma \cdot \underline{a}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

g) se $\Delta \underline{d}^i$ não atende ao critério de convergência, então toma-se $i = i + 1$ e retorna-se ao item c.

h) caso contrário leva-se para o próximo intervalo:

$$\underline{d}_{t+\Delta t} = \underline{d}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$\underline{v}_{t+\Delta t} = \underline{v}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$\underline{a}_{t+\Delta t} = \underline{a}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

Nesta sequência utilizou-se a formulação proposta por Hughes e Liu. Este algoritmo pode ser convenientemente adap-

tado na fase de estimativas utilizando-se:

$$\underline{d}_{t+\Delta t}^0 = \underline{d}_t$$

$$\underline{v}_{t+\Delta t}^0 = \underline{v}_t$$

$$\underline{a}_{t+\Delta t}^0 = (\underline{d}_{t+\Delta t}^0 - \underline{d}_{t+\Delta t}) / (\Delta t^2 \cdot \beta)$$

onde

$$\underline{d}_{t+\Delta t} = \underline{d}_t + \Delta t \cdot \underline{v}_t + \Delta t^2 (1 - 2\beta) \underline{a}_t / 2$$

Esta aproximação é especialmente recomendada para problemas elastoplásticos com elementos implícitos ($\gamma = 0.5$) e quando se empregam poucos intervalos de integração.

Se $\gamma \geq 1/2$ e $\beta = (\gamma + 0.5)^2 / 4$ obtém-se estabilidade incondicional para o grupo de elementos implícitos. O intervalo de integração é definido pelo grupo de elementos explícitos. Para o caso de $\gamma = 0.5$ o intervalo de integração crítico é dado por $2/w_{\max}$ onde w_{\max} é a frequência máxima da subregião de elementos explícitos.

3. Resultados de Análise

Analisa-se a resposta dinâmica de uma fundação circular assente sobre uma maciço de solo argiloso. A fundação circular é submetida a um carregamento distribuindo súbito e constante e é considerada rígida o suficiente de tal modo a não se considerar a possibilidade de sua plastificação. Os detalhes da geometria estão indicados na figura (1).

Admite-se que em decorrência do transiente de curta duração estudado, não haja possibilidade de drenagem, analisando-se o solo segundo tensões totais em regimes elástico e plástico. Sob tais condições o solo é considerado seguir o critério de Von Mises, como material plástico perfeito.

Os resultados obtido são coincidentes com os da referência [10], e estão plotados na figura (2).

Para ilustrar a eficiência computacional do algoritmo implementado, indicam-se na tabela I os tempos de processamento para diversas análises, até $t = 0.1s$, em um Burroughs B6700.

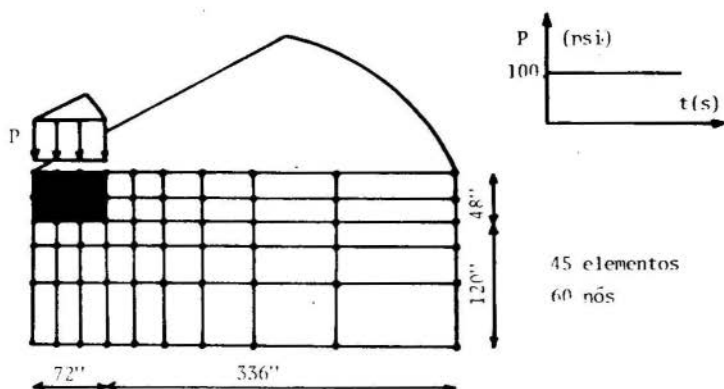


Fig. 1. Sistema Fundação-Macioso Terroso

Tabela 1

TIPO DE ANÁLISE	TEMPO DE CPU EM SEGUNDOS
Implícita $\Delta t = 0.0001s$	2690.
Implícita $\Delta t = 0.005s$	1920.
Explícita $\Delta t = 0.0001s$	1980.
Implícita-Explícita $\Delta t = 0.0001s$	2115.

4. Conclusão

Neste trabalho comentou-se a aplicação de um algoritmo implícito-explícito para a análise de transientes não lineares de sistemas rígido-flexíveis. Procurou-se examinar particularmente as características de meios elasto-plásticos, discretizado por elementos finitos isoparamétricos com variado número de pontos nodais. Este esquema fornece um enfoque unificado aos problemas da dinâmica não-linear e pode oferecer significantes atrativos, no que diz respeito a performance e implementação computacional.

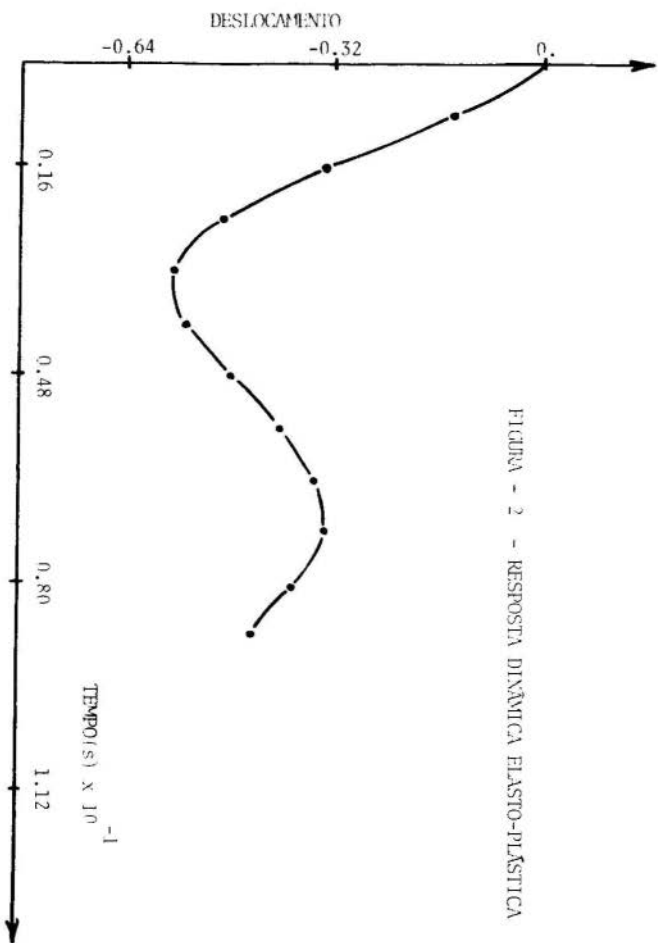


FIGURA - 2 - RESPOSTA DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA

Fundação:

$E = 1000000 \text{ psi}$

$\nu = 0.25$

$\rho = 0.0002243$

SOLO:

$E = 10000 \text{ psi}$

$\nu = 0.45$

$\rho = 0.0001682$

$\sigma = 28.4 \text{ lbf/in}^2$

$\rho \text{ em } \text{lb. s}^2/\text{in}^4$

REFERÊNCIAS

- [1] Belytschko, T. and Mullen, R., "Mesh Partitions of Explicit Implicit Time Integration, In: Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis". Ed. K.J. Bathe et al. MIT Press (1977).
- [2] Belytschko, T. and Mullen, R., "Stability of Explicit-Implicit Mesh Partitions in Time Integration" Int. J. Num. Meth, Engng. 12, 1575-1586 (1978).
- [3] Belytschko, T., Yen, H.J. and Mullen, R., "Mixed Methods for Time Integration". Proc. Int. Conf. on Finite Elements in Non-linear Mechanics (FENOMECH 78)", Univ. Stuttgart, Germany (Sept. 1978).
- [4] Hughes, T.J.R. and Liu, W.K., "Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory", J. Appl. Mech. 45, 371-374 (1978).
- [5] Hughes, T.J.R. and Liu, W.K., "Implicit-explicit finite elements in transient analysis: implementation and numerical examples", J. Appl. Mech. 45, 375-378 (1978).
- [6] Hughes, T.J.R., Pister, K.S. and Taylor, R.L., "Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 17/18, 159-182 (1979).
- [7] Park, K.C., Felippa, C.A. and Deruntz, H.A., "Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis, In: Computational Methods for Fluid-Structure Interaction Problems", Ed. T. Belytschko and T.L. Geers, ASME Applied Mechanics Symposia Series, AMD, 26, 94-124 (1977).
- [8] Park, K.C., "Partitioned transient analysis procedures for coupled field problems", to be published J. Appl. Mech. (1980).
- [9] Bathe, K.J. and Wilson, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
- [10] Costa, A.M., "Análise Dinâmica Elasto-Plástica de Transientes de Curta Duração Incluindo os Efeitos da Interação Solo-Fluido-Estrutura" - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, (1978).

- [11] Nagarajan, S. and Popov, E.P., "Elastic-plastic dynamic analysis of axisymmetric solids", *Computers and Structures*, 4, 1117-1134 (1974).
- [12] Bathe, K.J. and Ozdemir, H., "Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis", *Computers and Structures*, 6, 81-90 (1976).
- [13] Hughes, T.J.R., Implicit-explicit finite element techniques for symmetric and nonsymmetric systems, *Proc. Int. Conf. Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Swansea, 127-139, Pineridge Press, Swansea, U.K. (1980).
- [14] Ebecken, N.F.F. e Machado, R.D., "Análise Transiente Não-Linear de Vasos de Pressão Considerando-se a Interação Fluido-Estrutura" - Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador, 19-21 de novembro, (1980).



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º D-37

P.P. 375 - 387

PUC/RJ

SIMULATION OF LARGE MOTIONS OF RESTRAINED SPACE TRUSSES

Gil Augusto Tavares

Graduate Student
 Applied Mechanics Division
 Mechanical Engineering Department
 Stanford University, Stanford, CA. 94305, U.S.A.

SUMÁRIO

No presente trabalho desenvolve-se um algoritmo que permite a simulação de grandes movimentos de treliças espaciais restringidas a se moverem juntamente com um corpo rígido.

Um tratamento especial é dado as condições iniciais tornando a sua introdução mais geral e realista, e forças externas aplicadas ao sistema são levadas em consideração. A teoria usada para criar o algoritmo é apresentada, assim como os passos básicos necessários à sua implementação para fins de análise numérica.

SUMMARY

An algorithm permitting the simulation of large motions of restrained space trusses is developed. Provision is made for the accommodation of general, realistic initial conditions, and external forces applied at joints taken into account. The theory used to create the algorithm is set forth. Also a guideline for its implementation suitable for numerical analysis is presented.

1. Introduction

In the literature concerned with dynamics and structural analysis one finds works that deal with systems performing large motions, but possessing relatively few degrees of freedom and systems performing small motions, but possessing many degrees of freedom. There exist situations in which one must deal with large motions of a system possessing many degrees of freedom. The purpose of the present work is to create an explicit algorithm that simulates large motions of a system formed by a rigid body supporting a truss whose mass is quite large and cannot be neglected.

References (1) - (5) dealt with the various effects of elastic deformations on the motion and stability of systems comprised by rigid and flexible bodies. For the formulation of equations of motion a technique presented in Ref. (6) was utilized with extensive modifications in order to accommodate the presence of a rigid body attached to the truss. Although the present work and Ref. (6) dealt with simulation of large motions of trusses, the substantial difference between them is that the earlier work involved a non-physical reference frame, whereas this work does not become the rigid body that forms a part of the system considered here can play the role earlier assigned to a necessarily non-physical entity. When the number of degrees of freedom is large it becomes unfeasible to solve exactly the partial differential equations governing the motion of the system. In this circumstance, one is generally forced to discretize the structure by "lumping" masses at joints of the truss and using a technique which we shall call "exclusion of modes" or "modal coordinate truncation."

2. Development of the Algorithm

Consider a rigid body B with mass m_B and, central principal moments of inertia I_1, I_2, I_3 . Attached to B there is a truss T having m members and n joints. The system S comprised by B and T has $6 + 5(n-k)$ degrees of freedom where k is the number of joints connected to B.

Let N^* be a point fixed in a Newtonian reference frame N, and $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ a dextral set of orthogonal unit vectors fixed in N. Similarly $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ form a dextral set of orthogonal unit vectors parallel to the central principal axes of inertia of B.

$\underline{v}_{N^*B^*}$, the velocity in N of the mass center B^* of B, and $\underline{\omega}_{NB}$, the angular velocity of B in N may be, respectively, expressed as

$$\underline{N}_{V,B^*} = u_1 b_{-1} + u_2 b_{-2} + u_3 b_{-3} \quad (1)$$

and

$$\underline{\omega}^B = u_4 b_{-1} + u_5 b_{-2} + u_6 b_{-3} \quad (2)$$

Let P_i be a typical joint of the truss T and define \hat{r}_i as the position vector of P_i with respect to B^* when the truss is undeformed. Let \underline{r}_i be the position vector of P_i with respect to B^* at a general time t ; for $i=1, \dots, k$, $\underline{r}_i = \hat{r}_i$ for all time.

Let \underline{r}^* be the position vector of B^* relative to N^* at any instant of time and define \hat{y}_{3i-3+j} , y_{3i-3+j} , x_j and $c_{j\ell}$ as

$$\hat{y}_{3i-3+j} \triangleq \hat{r}_i \cdot b_j \quad (i=1, \dots, n; j=1, 2, 3) \quad (3)$$

$$y_{3i-3+j} \triangleq \underline{r}_i \cdot b_j \quad (i=1, \dots, n; j=1, 2, 3) \quad (4)$$

$$x_j \triangleq \underline{r}^* \cdot n_j \quad (j=1, 2, 3) \quad (5)$$

and

$$c_{j\ell} \triangleq \underline{n}_j \cdot b_{\ell} \quad (j, \ell=1, 2, 3) \quad (6)$$

The velocity of joint P_i in N can be expressed as (see Ref. (7), p. 31)

$$\underline{N}_{V}^{P_i} = \underline{N}_{V}^{\bar{B}_i} + \underline{R}_{V}^{P_i} = \underline{N}_{V}^{B^*} + \underline{\omega}^B \times \underline{r}_i + \dot{\underline{r}}_i \quad (7)$$

where $\underline{N}_{V}^{\bar{B}_i}$ is the velocity of \bar{B}_i in N , \bar{B}_i being the point of B that coincides with P_i and $\underline{R}_{V}^{P_i}$ is the velocity of B_i in B . (a dot above a symbol represents differentiation with respect to time.) For any k nodes connected to the rigid body B , $\underline{R}_{V}^{P_i}$ vanishes.

Next, we define and express the displacements Δ_{3k+i} in terms of v generalized coordinates $q_1(t), \dots, q_v(t)$, as

$$\Delta_{3k+i} \triangleq y_{3k+i} - \hat{y}_{3k+i} = \sum_{j=1}^v E_{ij} q_j \quad [i=1, \dots, 3(n-k)] \quad (8)$$

where E_{ij} is the element of i^{th} row and j^{th} column of the modal matrix associated with free vibrations of T when B is held fixed in N . Also let us define v generalized speed as

$$u_{6+\ell} \triangleq \dot{q}_\ell \quad (\ell=1, \dots, v) \quad (9)$$

Differentiation of Eq. (8) with respect to time and using Eq. (9), leads to

$$\dot{\hat{\Delta}}_{3k+i} = \dot{\hat{y}}_{3k+i} = \sum_{j=1}^{\nu} E_{ij} u_{6+j} \quad [i=1, \dots, 3(n-k)] \quad (10)$$

Substituting Eqs. (1)-(4) and (10) into (7) one obtains, for the restrained joints

$$\begin{aligned} \underline{N}_V^{P_i} = & (u_1 + u_5 \hat{y}_{3i} - u_6 \hat{y}_{3i-1}) \underline{b}_1 + (u_2 - u_4 \hat{y}_{3i} + u_6 \hat{y}_{3i-2}) \underline{b}_2 \\ & + (u_3 + u_4 \hat{y}_{3i-1} - u_5 \hat{y}_{3i-2}) \underline{b}_3 \quad (i=1, \dots, k) \end{aligned} \quad (11)$$

while for the unrestrained joints

$$\begin{aligned} \underline{N}_V^{P_i} = & (u_1 + u_5 y_{3i} - u_6 y_{3i-1} + \sum_{j=1}^{\nu} E_{3(i-k)-2j} u_{6+j}) \underline{b}_1 + (u_2 - u_4 y_{3i} + u_6 y_{3i-2} \\ & + \sum_{j=1}^{\nu} E_{3(i-k)-1j} u_{6+j}) \underline{b}_2 + (u_3 + u_4 y_{3i-1} - u_5 y_{3i-2} + \sum_{j=1}^{\nu} E_{3(i-k)j} u_{6+j}) \underline{b}_3 \\ & (i=k+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (12)$$

The acceleration of B^* in N and the angular acceleration of B in N are found by differentiation of Eqs. (1) and (2) with respect to time and turn out to be

$$\underline{N}_a^{B^*} = \frac{d}{dt} \underline{N}_V^{B^*} = (\dot{u}_1 + u_5 u_3 - u_6 u_2) \underline{b}_1 + (\dot{u}_2 + u_6 u_1 - u_4 u_3) \underline{b}_2 + (\dot{u}_3 + u_4 u_2 - u_5 u_1) \underline{b}_3 \quad (13)$$

and

$$\underline{N}_\alpha^{B^*} = \dot{u}_4 \underline{b}_1 + \dot{u}_5 \underline{b}_2 + \dot{u}_6 \underline{b}_3 \quad (14)$$

Differentiation of Eqs. (11) and (12) with respect to time leads to the acceleration of joint P_i in N :

$$\begin{aligned} \underline{N}_a^{P_i} = & (\dot{u}_1 + \dot{u}_5 \hat{y}_{3i} - \dot{u}_6 y_{3i-1} + \alpha_{i1}) \underline{b}_1 + (\dot{u}_2 - \dot{u}_4 \hat{y}_{3i} + \dot{u}_6 \hat{y}_{3i-2} + \alpha_{i2}) \underline{b}_2 \\ & + (\dot{u}_3 + \dot{u}_4 y_{3i-1} - \dot{u}_5 \hat{y}_{3i-2} + \alpha_{i3}) \underline{b}_3 \quad (i=1, \dots, k) \end{aligned} \quad (15)$$

and

$$\begin{aligned}
 N_{\underline{a}}^P i &= \left(\dot{u}_1 + \dot{u}_5 y_{3i} - \dot{u}_6 y_{3i-1} + \sum_{j=1}^v E_{3(i-k)-2j} \dot{u}_{6+j} + \alpha_{i1} \right) \underline{b}_1 \\
 &+ \left(\dot{u}_2 - \dot{u}_4 y_{3i} + \dot{u}_6 y_{3i-2} + \sum_{j=1}^v E_{3(i-k)-1j} \dot{u}_{6+j} + \alpha_{i2} \right) \underline{b}_2 \\
 &+ \left(\dot{u}_3 + \dot{u}_4 y_{3i-1} - \dot{u}_5 y_{3i-2} + \sum_{j=1}^v E_{3(i-k)j} \dot{u}_{6+j} + \alpha_{i3} \right) \underline{b}_3 \\
 &\qquad\qquad\qquad (i=k+1, \dots, n) \qquad\qquad\qquad (16)
 \end{aligned}$$

where

$$\alpha_{i1} = \Delta u_5 (u_3 + u_4 \hat{y}_{3i-1} - u_5 \hat{y}_{3i-2}) - u_6 (u_2 - u_4 \hat{y}_{3i} + u_6 \hat{y}_{3i-2}) \quad (i=1, \dots, k) \quad (17)$$

$$\alpha_{i2} = \Delta u_6 (u_1 + u_5 \hat{y}_{3i} - u_6 \hat{y}_{3i-1}) - u_4 (u_3 + u_4 \hat{y}_{3i-1} - u_5 \hat{y}_{3i-2}) \quad (i=1, \dots, k) \quad (18)$$

$$\alpha_{i3} = \Delta u_4 (u_2 - u_4 \hat{y}_{3i} + u_6 \hat{y}_{3i-2}) - u_5 (u_1 + u_5 \hat{y}_{3i} - u_6 \hat{y}_{3i-1}) \quad (i=1, \dots, k) \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i1} &= \Delta u_5 (\dot{y}_{3i} + u_3 + u_4 y_{3i-1} - u_5 y_{3i-2} \dot{y}_{3i}) - u_6 (\dot{y}_{3i-1} + u_2 - u_4 y_{3i} + u_6 y_{3i-2} \dot{y}_{3i-1}) \\
 &\qquad\qquad\qquad (i=k+1, \dots, n) \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i2} &= \Delta u_6 (\dot{y}_{3i-2} + u_1 + u_5 y_{3i} - u_6 y_{3i-1} \dot{y}_{3i-2}) - u_4 (\dot{y}_{3i} + u_3 + u_4 y_{3i-1} - u_5 y_{3i-2} \dot{y}_{3i}) \\
 &\qquad\qquad\qquad (i=k+1, \dots, n) \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i3} &= \Delta u_4 (\dot{y}_{3i-1} + u_2 - u_4 y_{3i} + u_6 y_{i-2} \dot{y}_{3i-1}) - u_5 (\dot{y}_{3i-2} + u_1 + u_5 y_{3i} - u_6 y_{3i-1} \dot{y}_{3i-2}) \\
 &\qquad\qquad\qquad (i=k+1, \dots, n) \quad (22)
 \end{aligned}$$

The partial velocities and partial angular velocities are found by inspection of Eqs. (1), (2), (11) and (12) and may be expressed as

$$N_{\underline{u}_j}^{B*} = N_{\underline{u}_j}^P i \quad (i=1, \dots, k) = N_{\underline{u}_j}^P i \quad (i=k+1, \dots, n) = \underline{b}_j \quad (j=1, 2, 3) \quad (23)$$

$$N_{\underline{u}_j}^{\omega B} = \underline{b}_{j-3} \quad (j=4, 5, 3) \quad (24)$$

$$N_{\underline{u}_4}^P i = -\hat{y}_{3i} \underline{b}_2 + \hat{y}_{3i-1} \underline{b}_3 \quad (i=1, \dots, k); N_{\underline{u}_4}^P i = -y_{3i} \underline{b}_2 + y_{3i-1} \underline{b}_3 \quad (i=k+1, \dots, n) \quad (25)$$

$$N_{\underline{u}_5}^{P_i} = \hat{y}_{3i-1} \underline{b}_1 - \hat{y}_{3i-2} \underline{b}_3 \quad (i=1, \dots, k); \quad N_{\underline{u}_5}^{P_i} = y_{3i} \underline{b}_1 - y_{3i-2} \underline{b}_3 \quad (i=k+1, \dots, n) \quad (26)$$

$$N_{\underline{u}_6}^{P_i} = -\hat{y}_{3i-1} \underline{b}_1 + \hat{y}_{3i-2} \underline{b}_2 \quad (i=1, \dots, k); \quad N_{\underline{u}_6}^{P_i} = y_{3i-1} \underline{b}_1 + y_{3i-2} \underline{b}_2 \quad (i=k+1, \dots, n) \quad (27)$$

$$N_{\underline{u}_{6+\ell}}^* = N_{\underline{\omega}_{6+\ell}}^B = N_{\underline{u}_{6+\ell}}^{P_i} = 0 \quad (\ell=1, \dots, \nu) \quad (i=1, \dots, k) \quad (28)$$

and

$$N_{\underline{u}_{6+\ell}}^{P_i} = E_3(i-k) \cdot 2\ell \underline{b}_1 + E_3(i-k) \cdot \ell \underline{b}_2 + E_3(i-k) \ell \underline{b}_3 \quad (\ell=1, \dots, \nu; i=k+1, \dots, n) \quad (29)$$

We can express the inertia torque \underline{T}_B^* for body B in N as [see Ref. (7), p. 118]

$$\underline{T}_B^* = [(I_2 - I_3) u_5 u_6 \cdot \dot{u}_4 I_1] \underline{b}_1 + [(I_3 - I_1) u_4 u_6 \cdot \dot{u}_5 I_2] \underline{b}_2 + [(I_1 - I_2) u_4 u_5 \cdot \dot{u}_6 I_3] \underline{b}_3 \quad (30)$$

\underline{F}_B^* , the inertia force for body B in N is defined and expressed as

$$\underline{F}_B^* \triangleq -m_B \underline{N}_B^* = -m_B [(\dot{u}_1 + u_5 u_3 - u_6 u_2) \underline{b}_1 + (\dot{u}_2 + u_6 u_1 - u_4 u_3) \underline{b}_2 + (\dot{u}_3 + u_4 u_2 - u_5 u_1) \underline{b}_3] \quad (31)$$

Similarity, \underline{F}_i^* , the inertia force for joint P_i in N is defined and expressed as

$$\begin{aligned} \underline{F}_i^* \triangleq -m_i \underline{N}_i^{P_i} = & -m_i (\dot{u}_1 + u_5 \hat{y}_{3i} - \dot{u}_6 \hat{y}_{3i-1} + \alpha_{i1}) \underline{b}_1 + (\dot{u}_2 - \dot{u}_4 \hat{y}_{3i} + \dot{u}_6 \hat{y}_{3i-2} + \alpha_{i2}) \underline{b}_2 \\ & + (\dot{u}_3 + \dot{u}_4 \hat{y}_{3i-1} - \dot{u}_5 \hat{y}_{3i-2} + \alpha_{i3}) \underline{b}_3 \quad (i=1, \dots, k) \end{aligned} \quad (32)$$

and

$$\begin{aligned} \underline{F}_i^* = -m_i \underline{N}_i^{P_i} = & -m_i \left[(\dot{u}_1 + \dot{u}_5 y_{3i} - \dot{u}_6 y_{3i-1} + \sum_{j=1}^{\nu} E_3(i-k) \cdot 2j \dot{u}_{6+j} + \alpha_{i1}) \underline{b}_1 \right. \\ & + (\dot{u}_2 - \dot{u}_4 y_{3i} + \dot{u}_6 y_{3i-2} + \sum_{j=1}^{\nu} E_3(i-k) \cdot j \dot{u}_{6+j} + \alpha_{i2}) \underline{b}_2 \\ & \left. + (\dot{u}_3 + \dot{u}_4 y_{3i-1} - \dot{u}_5 y_{3i-2} + \sum_{j=1}^{\nu} E_3(i-k) j \dot{u}_{6+j} + \alpha_{i3}) \underline{b}_3 \right] \quad (i=k+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (33)$$

where m_i is the lumped mass at joint P_i . The complete generalized inertia forces can be written as (see Ref. (9) page 16).

$$\underline{F}_r^* = N_{\underline{u}_r}^{B^*} \cdot \underline{F}_B^* + N_{\underline{\omega}_r}^{B^*} \cdot \underline{T}_B^* + \sum_{i=1}^n N_{\underline{u}_i}^{P_i} \cdot \underline{F}_i^* \quad (r=1, \dots, 6+\nu) \quad (34)$$

When T is deformed, certain forces of interaction between truss members are exerted on the joints P_i . These forces, as well as external forces applied to P_i , contribute to the generalized active forces. In addition, external forces applied to B also contribute to the generalized active forces.

$\underline{S}_i^{P_i}$, the resultant of all forces exerted on P_i by truss members, can be expressed as

$$\underline{S}_i^{P_i} = - \sum_{j=1}^{3n} [(K_{3i-2j} \Lambda_j) b_{-1} + (K_{3i-1j} \Lambda_j) b_{-2} + (K_{3ij} \Lambda_j) b_{-3}] \quad (i=1, \dots, 3n) \quad (35)$$

where $K_{j\ell}$ is the element in the j^{th} row and ℓ^{th} column of the "overall" stiffness matrix of T.

$\underline{Q}_i^{P_i}$, the external force applied to P_i , must be specified as a function of, in general $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{3k}, y_{3k+1}, \dots, y_{3n}, \dot{y}_{3k+1}, \dots, \dot{y}_{3n}$, and t, but it can always be written as (see Ref. (6)).

$$\underline{Q}_i^{P_i} = Q_{3i-2} + Q_{3i-1} b_{-2} + Q_{3i-3} b_{-3} \quad (i=1, \dots, n) \quad (36)$$

The system of forces acting on B is equivalent to a force \underline{Q}_B applied to B^* together with a couple of torque \underline{T}^B expressed respectively as

$$\underline{Q}_B = Q_1^B b_{-1} + Q_2^B b_{-2} + Q_3^B b_{-3} \quad (37)$$

and

$$\underline{T}^B = T_1^B b_{-1} + T_2^B b_{-2} + T_3^B b_{-3} \quad (38)$$

The complete generalized active forces can be written as (see Ref. (9), p. 25)

$$F_r = N_{\underline{u}_r}^{V_B} \cdot \underline{Q}^B + N_{\underline{u}_r}^{u_B} \cdot \underline{T}^B + \sum_{i=1}^n N_{\underline{u}_r}^{P_i} \cdot (\underline{S}_i^{P_i} + \underline{Q}_i^{P_i}) \quad (39)$$

The dynamical equations of motion may be obtained by adding Eqs. (34) and (39) to give (see Ref. (7), p. 177).

$$F_i^* + F_r = 0 \quad (r=1, \dots, 6+v) \quad (40)$$

This relation is known as Lagrange's form of D'Alembert's principle.

The expressions for generalized inertia and active forces coming from Eqs. (34) and (39) can be greatly simplified if one takes advantage of the orthogonality property of the modes of vibration for the truss and the properties obtained from the definition of the stiffness matrix \underline{K} (see Ref. (9), p. 18, 22, 24). Making use of those properties the

equations of motion may be written in the simplified form as

$$\begin{aligned}
 & - \left(m_B + \sum_{i=1}^n m_i \right) \dot{u}_i - \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i} \right) \dot{u}_5 + \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-1} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-1} \right) \dot{u}_6 \\
 & - \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^v m_i E_{3(i-k)-2j} \dot{u}_{6+j} = m_B (u_5 u_3 - u_6 u_2) + \left(\sum_{i=1}^k m_i \alpha_{i1} + \sum_{i=k+1}^n m_i \alpha_{i1} \right) - \sum_{i=1}^n Q_{3i-2} Q_1^B
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(m_B + \sum_{i=1}^n m_i \right) \dot{u}_2 + \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i} \right) \dot{u}_4 \\
 & - \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-2} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-2} \right) \dot{u}_6 - \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^v m_i E_{3(i-k)-1j} \dot{u}_{6+j} \\
 & = m_B (u_6 u_1 - u_4 u_3) + \left(\sum_{i=1}^k m_i \alpha_{i2} + \sum_{i=k+1}^n m_i \alpha_{i2} \right) - \sum_{i=1}^n Q_{3i-1} Q_2^B
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(m_B + \sum_{i=1}^n m_i \right) \dot{u}_3 - \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-1} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-1} \right) \dot{u}_4 + \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-2} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-2} \right) \dot{u}_5 \\
 & - \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^v m_i E_{3(i-k)j} \dot{u}_{6+j} = m_B (u_4 u_2 - u_5 u_1) + \left(\sum_{i=1}^k m_i \alpha_{i3} + \sum_{i=k+1}^n m_i \alpha_{i3} \right) - \sum_{i=1}^n Q_{3i} Q_3^B
 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i} \right) \dot{u}_2 - \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-1} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-1} \right) \dot{u}_3 \\
 & - \left[I_1 + \sum_{i=1}^k m_i (\hat{y}_{3i}^2 + \hat{y}_{3i-1}^2) + \sum_{i=k+1}^n m_i (y_{3i}^2 + y_{3i-1}^2) \right] \dot{u}_4
 \end{aligned}$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-1} \hat{y}_{3i-2} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-1} y_{3i-2} \right) \dot{u}_5$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i} \hat{y}_{3i-2} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i} y_{3i-2} \right) \dot{u}_6$$

$$+ \sum_{j=1}^v \left[\sum_{i=k+1}^n (m_i y_{3i} E_{3(i-k)-1j} - m_i y_{3i-1} E_{3(i-k)j}) \right] \dot{u}_{6+j}$$

$$= -(I_2 - I_3) u_5 u_6 + \sum_{i=1}^k m_i (-\hat{y}_{3i} \alpha_{i2} + \hat{y}_{3i-1} \alpha_{i3})$$

$$+ \sum_{i=k+1}^n m_i (-y_{3i} \alpha_{i2} + y_{3i-1} \alpha_{i3}) - \sum_{i=1}^k (-\hat{y}_{3i} Q_{3i-1} + \hat{y}_{3i-1} Q_{3i})$$

$$- \sum_{i=k+1}^n (-y_{3i} Q_{3i-1} + y_{3i-1} Q_{3i}) - T_1^B \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i} \right) \dot{u}_1 + \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-2} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-2} \right) \dot{u}_3 \\
& + \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-2} \hat{y}_{3i-1} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-2} y_{3i-1} \right) \dot{u}_4 \\
& - \left[I_2 + \sum_{i=1}^k m_i (\hat{y}_{3i}^2 + \hat{y}_{3i-2}^2) + \sum_{i=k+1}^n m_i (y_{3i}^2 + y_{3i-2}^2) \right] \dot{u}_5 \\
& + \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i} \hat{y}_{3i-1} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i} y_{3i-1} \right) \dot{u}_6 \\
& - \sum_{j=1}^v \left[\sum_{i=k+1}^n (m_i y_{3i}^{E_3(i-k)-2j} m_i y_{3i-2}^{E_3(i-k)j}) \right] \dot{u}_{6+j} \\
& - (I_3 - I_1) u_4 u_6 + \sum_{i=1}^k m_i (\hat{y}_{3i}^{\alpha_{i1}} \hat{y}_{3i-2}^{\alpha_{i3}}) + \sum_{i=k+1}^n m_i (y_{3i}^{\alpha_{i1}} y_{3i-2}^{\alpha_{i3}}) \\
& - \sum_{i=1}^k (\hat{y}_{3i}^{Q_{3i-2}} \hat{y}_{3i-2}^{Q_{3i}}) - \sum_{i=k+1}^n (y_{3i}^{Q_{3i-2}} y_{3i-2}^{Q_{3i}}) - T_2^B
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-1} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-1} \right) \dot{u}_1 - \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-2} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-2} \right) \dot{u}_2 \\
& + \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-2} \hat{y}_{3i} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-2} y_{3i} \right) \dot{u}_4 + \left(\sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-1} \hat{y}_{3i} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-1} y_{3i} \right) \dot{u}_5 \\
& - \left[I_3 + \sum_{i=1}^k m_i (\hat{y}_{3i-1}^2 + \hat{y}_{3i-2}^2) + \sum_{i=k+1}^n m_i (y_{3i-1}^2 + y_{3i-2}^2) \right] \dot{u}_6 \\
& + \sum_{j=1}^v \left[\sum_{i=k+1}^n (m_i y_{3i-1}^{E_3(i-k)-2j} m_i y_{3i-2}^{E_3(i-k)-1j}) \right] \dot{u}_{6+j} \\
& = -(I_1 - I_2) u_4 u_5 + \sum_{i=1}^k m_i (-\hat{y}_{3i-1}^{\alpha_{i1}} + \hat{y}_{3i-2}^{\alpha_{i2}}) \\
& + \sum_{i=k+1}^n m_i (-y_{3i-1}^{\alpha_{i1}} + y_{3i-2}^{\alpha_{i2}}) - \sum_{i=1}^k (-\hat{y}_{3i-1}^{Q_{3i-2}} + \hat{y}_{3i-2}^{Q_{3i-1}}) \\
& - \sum_{i=k+1}^n (y_{3i-1}^{Q_{3i-2}} + y_{3i-2}^{Q_{3i-1}}) - T_3^B
\end{aligned} \tag{46}$$

and

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_{i=k+1}^n m_i E_3^{(i-k)-2\ell} \right) \dot{u}_1 - \left(\sum_{i=k+1}^n m_i E_3^{(i-k)-1\ell} \right) \dot{u}_2 \\
 & - \left(\sum_{i=k+1}^n m_i E_3^{(i-k)\ell} \right) \dot{u}_3 + \left[\sum_{i=k+1}^n m_i (y_{3i} E_3^{(i-k)-1\ell} y_{3i-1} E_3^{(i-k)\ell}) \right] \dot{u}_4 \\
 & - \left[\sum_{i=k+1}^n m_i (y_{3i} E_3^{(i-k)-2\ell} y_{3i-2} E_3^{(i-k)\ell}) \right] \dot{u}_5 \\
 & + \left[\sum_{i=k+1}^n m_i (y_{3i-1} E_3^{(i-k)-2\ell} y_{3i-2} E_3^{(i-k)-1\ell}) \right] \dot{u}_6 - \dot{u}_{6+\ell} \\
 & = \sum_{i=k+1}^n m_i (E_3^{(i-k)-2\ell} \alpha_{i1} + E_3^{(i-k)-1\ell} \alpha_{i2} + E_3^{(i-k)\ell} \alpha_{i3}) \\
 & - \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^3 E_3^{(i-k)-3+j\ell} Q_{3i-3+j} + \lambda_\ell Q_\ell \quad (\ell=1, \dots, \nu) \quad (47)
 \end{aligned}$$

where λ_ℓ is the ℓ^{th} eigenvalue associated with free vibration for the truss.

To relate the motion of the flying reference frame B with respect to the Newtonian reference frame N we introduce twelve kinematical differential equations as follows (see Ref. (9) p. 30, and Ref. (8) pp. 81-83)

$$\dot{x}_j = \underline{N}_V^{B*} \cdot \underline{n}_j = (u_1 b_{-1} + u_2 b_{-2} + u_3 b_{-3}) \cdot \underline{n}_j = \sum_{\ell=1}^3 u_\ell c_{j\ell} \quad (j=1, 2, 3) \quad (48)$$

and

$$\dot{c}_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{h=1}^3 c_{j\ell} u_{3+h} (\ell-h)(h-k)(k-\ell) \quad (j, k=1, 2, 3) \quad (49)$$

Equations (9), (41)-(49) form a set of $18+2\nu$ first order non-linear differential equations governing the unknown quantities q_i ($i=1, \dots, \nu$), u_r ($r=1, \dots, 6+\nu$), x_j ($j=1, 2, 3$), c_{jk} ($j, k=1, 2, 3$), all of whose initial values must be known before a solution of the equations can be undertaken.

The initial values of u_1, \dots, u_6 , x_j and c_{jk} can be presumed to be given, whereas those of q_j and u_{6+j} ($j=1, \dots, \nu$) remain to be determined. We shall assume that \hat{y}_i ($i=1, \dots, 3n$), $y_j(0)$ and $\dot{y}_j(0)$ ($j=3k+1, \dots, 3n$) are given. From Eqs. (8) and (10) follows immediately that

$$\Delta_{3k+i}^{(0)} = y_{3k+i}^{(0)} - \hat{y}_{3k+i}^{(0)} = \sum_{j=1}^{\nu} E_{ij} q_j^{(0)} \quad [i=1, \dots, 3(n-k)] \quad (50)$$

and

$$\dot{\Delta}_{3k+1}^{(0)} = \dot{y}_{3k+1}^{(0)} = \sum_{j=1}^{\nu} E_{1j} u_{6+j}^{(0)} \quad [i=1, \dots, 3(n-k)] \quad (51)$$

The quantities $q_j(0)$ and $u_{6+j}(0)$ are found by using the orthogonality property of the eigenvectors. The pre-multiplication of Eqs. (50) and (51) by $\underline{E}^T \underline{M}$, where \underline{M} is the mass matrix for the truss leads to

$$q_{\ell}^{(0)} = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{3(n-k)} E_{j\ell} M_{ji} \Delta_i^{(0)} \quad (\ell=1, \dots, \nu) \quad (52)$$

and

$$u_{6+\ell}^{(0)} = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{3(n-k)} E_{j\ell} M_{ji} \dot{\Delta}_i^{(0)} \quad (\ell=1, \dots, \nu) \quad (53)$$

Equations (9), (41)-(49) can be expressed as (see Ref. (7), p. 192)

$$\underline{W} \dot{\underline{U}} = \underline{Y} \quad (54)$$

where \underline{W} and \underline{Y} are $18+2\nu \times 18+2\nu$ and $18+2\nu \times 1$ matrices, implicitly functions of time. For example using Eq. (41) one obtains

$$W_{16} = \sum_{i=1}^k m_i \hat{y}_{3i-1} + \sum_{i=k+1}^n m_i y_{3i-1} \quad (55)$$

and

$$Y_1 = m_B (u_5 u_3 - u_6 u_2) + \sum_{i=1}^k m_i \alpha_{i1} + \sum_{i=k+1}^n m_i \alpha_{i1} - \sum_{i=1}^n Q_{3i-2} Q_1^B \quad (56)$$

$\dot{\underline{U}}$ is an $18+2\nu+1$ matrix whose elements are defined as

$$\dot{U}_j \triangleq \dot{u}_j \quad (j=1, \dots, 6) \quad (57)$$

$$\dot{U}_{6+\ell} \triangleq \dot{u}_{6+\ell} \quad (\ell=1, \dots, \nu) \quad (58)$$

$$\dot{U}_{6+\nu+k} \triangleq \dot{q}_k \quad (k=1, \dots, \nu) \quad (59)$$

$$\dot{U}_{6+2\nu+j} \triangleq \dot{x}_j \quad (j=1, 2, 3) \quad (60)$$

$$\dot{U}_{9+2\nu+i} \triangleq \dot{c}_{1i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (61)$$

$$\dot{U}_{12+2v+j} \triangleq \dot{c}_{2j} \quad (j=1,2,3) \quad (62)$$

$$\dot{U}_{15+2v+k} \triangleq \dot{c}_{3k} \quad (k=1,2,3) \quad (63)$$

There exist algorithms, such as one presented in Ref. (9), that permits one to integrate equations having the form of Eq. (54). Regarding the value of v , if $v=3(n-k)$, the total number of degrees of freedom of T , then the differential equations governing q_1, \dots, q_v are the exact equations of motion of S . By taking $v < 3(n-k)$ we shall obtain approximate descriptions of motion of S .

3. Implementation of the Algorithm

This section lists the basic steps which may be used to create computational schemes suitable for numerical analysis of the system. The order in which these steps are given was selected for clarity of presentation rather than computational efficiency, and a change in this order may produce a more efficient procedure. The basic steps are as follows:

(a) Input initial values for u_1, \dots, u_6 , x_i ($i=1,2,3$), c_{jk} ($j,k=1,2,3$), \hat{y}_i ($i=1, \dots, 3n$), $y_j(0)$, $y_j(0)$ ($j=3k+1, \dots, 3n$); m_B , m_i ($i=1, \dots, n$), Q_{3i-3+j} ($i=1, \dots, n$; $j=1,2,3$), Q_k^B , T_k^B ($k=1,2,3$), I_i ($i=1,2,3$), v . Also input all truss constraints relative to the rigid body.

(b) Assemble stiffness and mass matrices for the truss. Calculate the eigenvalues and eigenvectors and normalize the eigenvectors with respect to the mass matrix.

(c) Calculate Δ_{3k+i} and $\dot{\Delta}_{3k+i}$ [$i=1, \dots, 3(n-k)$] using Eqs. (8) and (10), respectively.

(d) Find the values of $q_j(0)$ and $u_{6+j}(0)$ ($j=1, \dots, v$) with the aid of Eqs. (52) and (53), respectively.

(e) Assemble \tilde{W} and \tilde{V} matrices from Eqs. (9) and (41)-(49).

(f) Integrate the system of equations $\dot{\tilde{U}} = \tilde{W}^{-1}\tilde{V}$.

(g) Repeat the process starting at step (e) after an increment in the independent variable t .

4. Acknowledgements

The author thanks Prof. Thomas Kane for his helpful advice and valuable discussions, and the National Nuclear Energy Commission of Brazil for their financial support. This work was supported in part by the National Aeronautics and Space Administration (NASA) under Grant NAG1-97 to Stanford University.

REFERENCES

- (1) "Dynamics of an Elastic Satellite," Robe, T.R.-Ph.D. dissertation, Stanford University 1965.
- (2) "The Influence of Structural Flexibility on the Dynamic Response of Spinning Spacecraft," Bodley, C.S. and Park, A.C., AIAA Paper 72-348, San Antonio, Texas, 1972.
- (3) "Analytical Dynamics and Nonrigid Spacecraft Simulation," Likins, P.W., Jet Propulsion Laboratory, T.R. 32 - 1593, Pasadena, CA. July 1974.
- (4) "The Dynamics of Flexible Bodies," deVeubeke, B.F., Int. J. of Engineering Science, Vol. 14, 1976, pp. 895-913.
- (5) "Exact Equations of Motion for a Deformable Body," Jerkovsky, W., SAMS0, T.R. 77-133; March 1977.
- (6) "Large Motions of Unrestrained Space Trusses," Kane T. and Levinson, D., Journal of Astronautical Sciences, Jan.-March 1980.
- (7) "Dynamics," Kane, Thomas R., Third Edition, Stanford University, 1978.
- (8) "Spacecraft Dynamics," Kane, Thomas R., Likins, Peter W. and Levinson, David A., McGraw-Hill Book Company, 1981.
- (9) "Large Motion Dynamics of a Rigid Body-truss System," Gil A. Tavares, Engineer Dissertation, Stanford University, May 1981.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º D-38

P.P. 389 - 398

PUC/RJ

ANÁLISE DE SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS-ASAS-TD

José Mendes Damian

Analista de Sistemas - GRANTE/UFSC

José Luiz A. F. Rodrigues

Prof. Assistente Deptº Eng. Mecânica UnB

Clovis Sperb de Barcellos

Prof. Titular Deptº Eng. Mecânica CT/UFSC

Sumário

A ocorrência de peças de revolução submetidas a cargas axissimétricas é frequente em estruturas. Visando a análise de segurança de tais componentes foi desenvolvido o sistema de programas ASAS-TD. O processo de solução utilizado é baseado no método de elementos finitos tanto para a análise de transmissão de calor em regime transitório como para a análise de tensões resultantes dos carregamentos mecânicos e térmicos.

Summary

The use of solids of revolution under axisymmetric loading is frequently found in mechanical components. In order to make a safety analysis of such components the code ASAS-TD was developed. The numerical procedure is based on the finite element method for the thermal transient analysis as well as for the stress analysis due to thermal and mechanical loading.

1 - Introdução

Este sistema destina-se a aplicações em análise de tensões em corpos de revolução solicitados a carregamentos (térmicos e mecânicos) axissimétricos em regime transiente. O Processo de solução utiliza o método de elementos finitos e análise modal para o cálculo do transiente térmico, tal processo é desenvolvido nas referências [1] e [2] respectivamente.

O sistema foi proposto e desenvolvido de forma bastante flexível, permitindo a inclusão de novos métodos de solução, como por exemplo no cálculo de autovalores e autovetores utilizando apenas a banda da matriz, análise de modelos com diferentes tipos de carregamentos térmicos e mecânicos, utilização de coordenadas cilíndricas ou retangulares, bem como diferentes opções de processamento.

2 - Arquitetura do sistema

O sistema é formado por quatro fases distintas, interligadas entre si por um programa gerenciador o qual permite as seguintes formas de processamento:

a) Processamento Global - neste caso são processadas todas as fases para cada modelo.

b) Processamento Inicial - neste caso cada modelo é processado nas fases LEDAD, PTEMP e CTEMP.

c) Processamento Final - este processamento é a continuação do processamento inicial, porém com a vantagem de selecionar (restringir) os dados para a análise termo-elástica.

A transferência de dados entre as fases é feita através de arquivos em disco, arquivos em fitas e áreas comuns de memória, sendo a maioria dos dados agrupados em bibliotecas.

A flexibilidade do sistema é suficiente para permitir além da análise do comportamento termo-elástico devido à carregamentos térmicos e mecânicos, fazer a análise devido a carregamentos apenas térmicos ou apenas mecânicos ou apenas análise das temperaturas da peça.

Os programas deste sistema foram desenvolvidos com uma estrutura propícia a utilização de overlays, (fi. 1) e em alocação dinâmica de memória alocada.

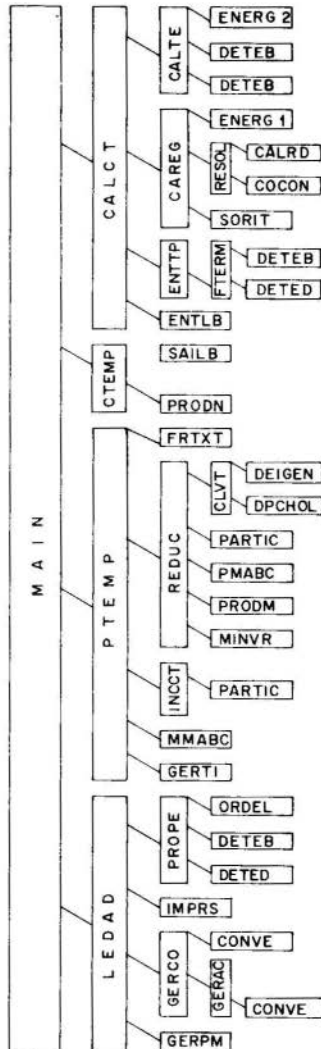


Figura 1 - Estrutura do ASAS-TD.

3 - Arquitetura das fases

Cada fase do sistema ASAS-TD são controladas por uma subrotina de mesmo nome as quais executam tarefas específicas de gerenciamento tais como: inicializar variáveis, definir e redefinir endereços inerentes a alocação dinâmica de memória, leitura de informações de controle, transferência de dados da memória principal para arquivos secundários e vice-versa, preparar dados que serviram de entrada para outras fases, além de uma precisa interface com o programa principal (programa gerenciador).

A fase LEDAD faz a leitura das condições de contorno e topologia, quando então determina as propriedades que definem a topologia da estrutura em análise, as quais são armazenadas em bibliotecas. Esta fase monta três bibliotecas (figura 2) que são: Biblioteca de propriedades mecânicas e térmicas dos materiais (XMAT), Biblioteca de coordenadas dos nós (CO) e biblioteca de propriedades dos elementos (PROPE).

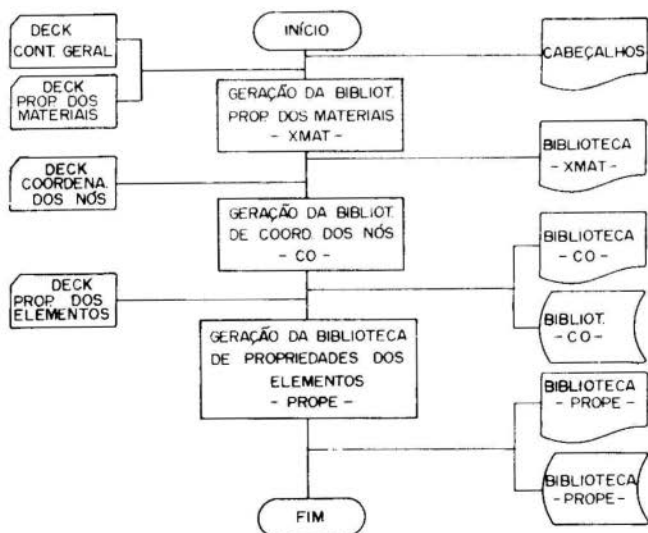


Figura 2 - Fluxograma da fase LEDAD.

A fase PTEMP faz a leitura das condições de contorno térmica, determina os coeficientes matriciais das matrizes da equação matricial do problema $AT + BT + C = \theta$ a biblioteca TERMO. A ordem destas matrizes é reduzida se houver nós com temperaturas especificadas (NNST) e/ou for usado o processo economizador (NS). Após, a equação matricial é desacoplada sendo a redução de Choleski e os autovalores e autovetores são obtidos pelo método de GIVEN, ver figura 3.

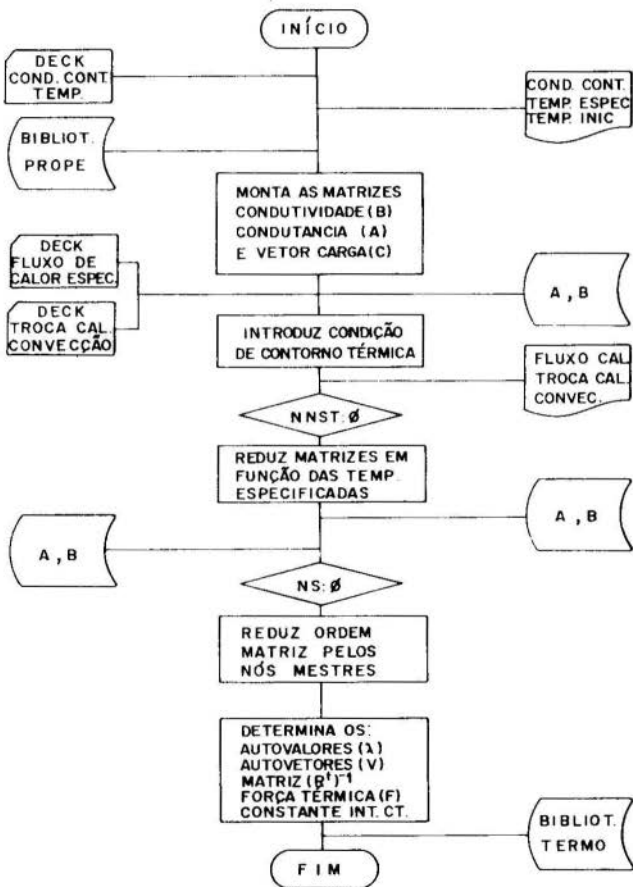


Figura 3 - Fluxograma da fase PTEMP.

A fase CTEMP faz a leitura dos transientes térmicos, utiliza a biblioteca TERMO para a cada transiente, calcula as temperaturas dos nós e a temperatura dos elementos, bem como procede a montagem de um arquivo em fita contendo as bibliotecas XMAT, CO e PROPE e as temperaturas dos elementos para cada transiente (figura 4).

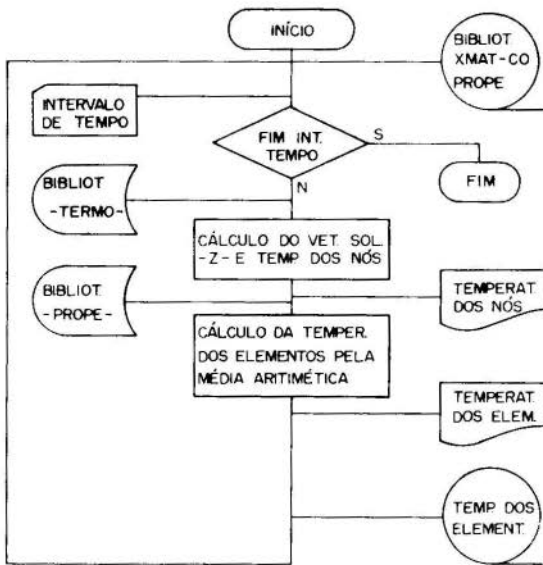


Figura 4 - Fluxograma da fase CTEMP.

A fase CALCT transfere as bibliotecas do arquivo em disco, faz a leitura das condições de contorno mecânicas e após faz a leitura das temperaturas dos elementos, do arquivo em fita e análise do comportamento termo-elástico para cada transiente. As informações constantes no arquivo em fita são suficientes para o processamento independente desta fase (figura 5).

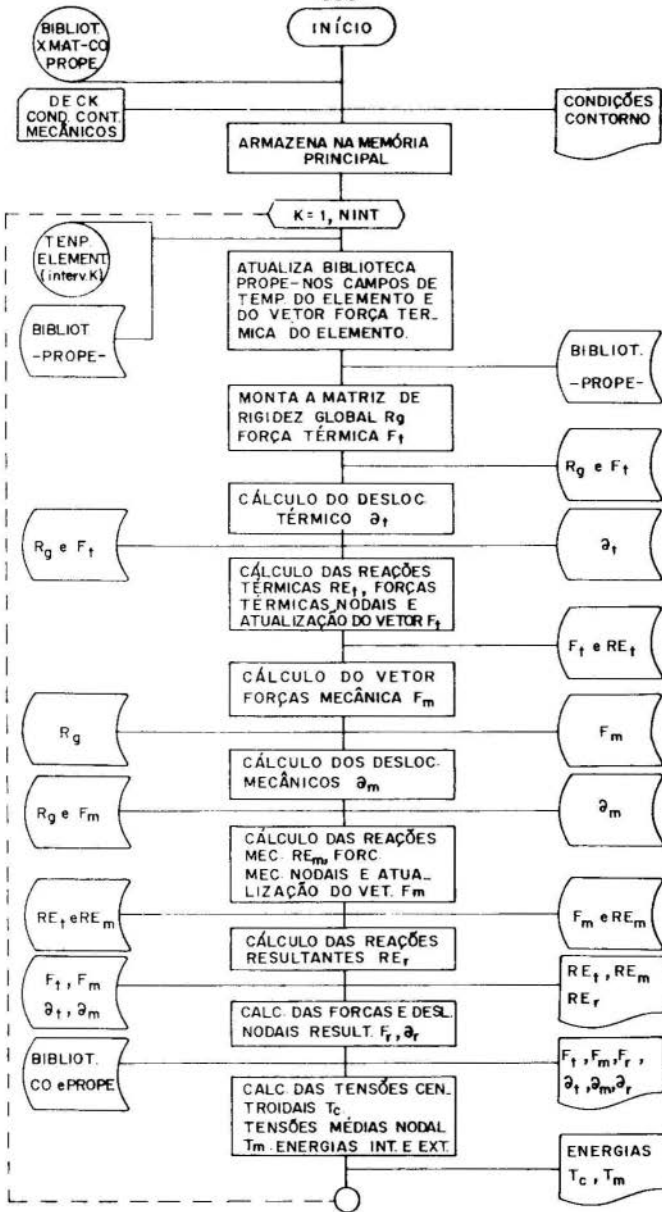


Figura 5 - Fluxograma da fase CALCT.

4 - Estrutura dos arquivos

O sistema ASAS-TD utiliza dois arquivos em disco e um em fita definidos pelas variáveis NA, NW, NFTA respectivamente. Estes arquivos são utilizados para armazenar dados a serem processados e ou dados já processados, ocorrendo deste modo uma grande minimização de memória. O arquivo NA é usado para armazenar dados inerentes a topologia (biblioteca CO, biblioteca PROPE) e informações temporárias referentes a análise termo-elásticas (matriz de rigidez global R_g , vetor força térmica F_t , deslocamentos térmicos ∂t , vetor força mecânicas F_m , deslocamentos mecânicos ∂m , reações térmicas REt , reações mecânicas REm) dispostos conforme figura 6.

CO	PROPE	R_g	F_t	∂t	F_m	∂m	REt	REm	
NRE		NRC		NRF					

Figura 6 - Disposição do arquivo NA.

O arquivo NW é usado inicialmente como área de trabalho e após para armazenar a biblioteca TERMO. Este arquivo é montado na fase PTEMP e utilizado na fase CTEMP e suas principais variáveis de controle são: NRA (nº de registros usados para armazenar a matriz $(R^t)^{-1}$), NRB (nº de registros usados para armazenar a matriz de autovalores V), NP21 (nº de registros gastos para armazenar a matriz $(J_{22}J_{11}^{-1})$ se existir), NRI (nº de registros usados para armazenar os vetores força térmica, constantes de integração e autovalores F, CI, VAL respectivamente),

O arquivo NFTA é montado na fase CTEMP e permite o processamento independente da fase CALCT. Neste arquivo é montado um bloco de informações para cada modelo os quais são compostos por:

a) um registro de informações gerais tais como nº de nós do modelo, nº de elementos, largura da banda etc.

b) bibliotecas XMAT,CO,PROPE.

c) temperaturas dos elementos de cada transiente dispostos conforme figura 7.

IG	XMAT	CO	PROPE	TEMP. ELEM.	...	IG	XMAT	CO	PROPE
----	------	----	-------	----------------	-----	----	------	----	-------

Figura 7 - Estrutura do arquivo NFTA.

5 - Estrutura das bibliotecas

O sistema ASAS-TD possui as bibliotecas XMAT,CO,PROPE e TERMO usadas para agrupar os dados com determinadas características.

A biblioteca XMAT contém as propriedades mecânicas e térmicas dos materiais, sendo para cada material montado um bloco com as seguintes informações: - módulo de elasticidade, - coeficiente de Poisson, - coeficiente de dilatação térmica, - constante - constante - constante - constante, - condutividade térmica, - densidade, - calor específico. Esta biblioteca é definida em tempo de processamento e pode ter qualquer número de materiais.

A biblioteca CO contém as coordenadas axial e radial dos nós já no sistema retangular de coordenadas.

A biblioteca PROPE contém as propriedades elásticas dos elementos agrupadas em NEL (nº elementos) blocos de sessenta dados. Durante o processamento cada bloco passa por duas configurações semelhantes conforme figura 8a e 8b.

NE	MAT	NO1	NO2	NO3	a) QQ b) TE	PAREM.GEOM.	XKE	a) COORD. NÓS ELEM b) FE
----	-----	-----	-----	-----	----------------------	-------------	-----	--------------------------------

Figura 8a - Configuração inicial.

Figura 8b - Configuração final.

sendo: NE (nº do elemento), NO1,NO2,NO3 (nós que formam o elemento), MAT (material). QQ (geração interna de calor), TE (temperatura do elemento) FE (Vetor força térmica do elemento).

Biblioteca TERMO - Esta biblioteca armazena os parâmetros (matrizes e vetores) constantes no tempo que são: Inversa da matriz de deslocamento do sistema de equações matriciais $(R^t)^{-1}$, autovalores (λ), autovetores (V), força térmica (F), constantes de integração (CI) e matriz que permite o cálculo das temperaturas dos nós secundários ($P=(J_{21} \ J_{11}^{-1})$). Estes parâmetros estão dispostos conforme a figura 11.

6 - Conclusão

Foi desenvolvido um programa de acordo com a metodologia apresentada e executados vários modelos testes. Verificou-se então que:

a) Para uma mesma capacidade de memória, como previsto, o ASAS-TD, processa modelos bem maiores em relação a programas original, sem acréscimo sensível no tempo de execução.

b) O tempo de acesso a disco é insignificante comparado com os benefícios, por exemplo - o tempo total de processamento do sistema termo-elástico é menor do que a soma dos tempos de execução da análise térmica e elástica isoladamente.

c) A precisão dos resultados foram as previstas pelos métodos utilizados.

d) O sistema é flexível permitindo introdução e teste de métodos para determinação do regime transiente e interação subspecial para determinar autovalores e autovetores.

7 - Bibliografia

- 1 - Barcellos, C. S., "Análise de Tensões em Corpos de Revolução sob Carregamentos e Gradientes Térmicos Axi-Simétricos".
- 2 - Rodrigues, J.L.A., "Cálculo de Transientes Térmicos Bidimensionais pelo Método de Elementos Finitos".



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981

TRABALHO
PAPER

N.º D-39

P.P. 399 - 409

PUC/RJ

COMPLEMENTARY ENERGY FOR BUCKLING PROBLEMS

Maurizio Angelillo
Researcher
Architectural Dept. University of Naples

Liana Dodaro
Assistant Professor
Architectural Dept. University of Naples

RÉSUMÉ

Les matériaux élastiques semilinéaires peuvent être convenables pour la description des problèmes d'instabilité infinitésimale. Pour cette classe de matériaux les conditions de compatibilité neutre, dérivées du principe de l'énergie complémentaire stationnaire, sont utilisées pour la détermination des charges critiques ou des "lower bounds" ou même charges. En particulier on analyse des structures à treillis pour lesquelles la méthode est extrêmement efficace dans l'évaluation des "lower bounds" aux charges critiques. On propose une solution des équations de l'équilibre pour les états à deux dimensions en termes de deux fonctions scalaires, à fin de séparer dans le tenseur de tension les effets géométriques de ceux redondants.

SUMMARY

Semilinear elastic materials seem to be appropriate in describing buckling problems for small strains. For this class of materials neutral compatibility conditions, derived by the principle of stationary complementary energy, are used to get either critical loads or lower bounds to them. In particular pin-jointed frameworks are analyzed, for which the complementary energy method in obtaining lower bounds to critical loads is effective. For plane states, a solution of the equilibrium conditions is proposed in terms of two stress functions, in order to separate geometrical from redundant stress effects.

1. Introduction

The first consistent attempts in generalizing the principle of stationary complementary energy, in a truly complementary form, are due to Levinson [2] and Zubov [4]. The implicit assumption of an inversion in the constitutive law, contained in [2] and [4], was denied by the later criticism that, disproving in general the existence of such an inversion, rejected the possibility of the complementary approach.

It was an exhaustive paper by Koiter [8] to make clear the restrictions under which a truly complementary formulation is available and to show the capability of the method in obtaining critical loads.

However the more fascinating prospect of such a dual formulation consists in the possibility, firstly claimed by Popelar [5], of obtaining lower bounds to the first eigenvalue using procedures less involved than the conventional ones.

In this note it is shown as it is possible to succeed in getting lower bounds for systems with a finite number of degrees of freedom. In particular pin-jointed frameworks are analyzed, for which the rotation field is easily expressible in terms of incremental Piola stresses, solving a number of linear statically determinate problems; it is seen that this approach is more suitable in reaching lower bounds to the first eigenvalue than the classical potential energy formulation, because of the possibility to apply a priori bounds to the internal energy with respect to the rotation field. Finite element techniques, based on this method, could be developed for obtaining approximate critical loads of continuum elastic structures.

Going on the same lines followed in the approach to discrete systems, for plane states, two statically admissible stress functions are assumed: one related to the self equilibrated stresses only, the other one depending on geometrical

effects.

2. Complementary energy for isotropic elastic bodies

Let Ω^0 be the region of the Euclidean 3-dimensional space E_3 occupied by an isotropic elastic body in a fixed reference configuration. The position vector of the material point \underline{x} after deformation, is denoted by $\underline{y}(\underline{x})$, \underline{y} being a smooth homeomorphism of Ω^0 onto a region $\underline{y}(\Omega^0)$ in E_3 , with $\nabla \underline{y} > 0$. We assume the body to be characterized by a specific elastic energy function W for which:

$$\underline{T} = \nabla_{\underline{\epsilon}} W(\underline{\epsilon})$$

where $\underline{\epsilon}$ and \underline{T} are the right extensional strain tensor and the symmetric Jaumann stress tensor respectively.

If the material properties of the body are such that $W(\underline{\epsilon})$ is a continuously differentiable, strictly convex and coercive function of his arguments, then a stress elastic energy density $W_c(\underline{T})$ exists verifying

$$\underline{\epsilon} = \nabla_{\underline{T}} W_c(\underline{T})$$

For isotropic elastic bodies, the total complementary energy E_c , in terms of statically admissible stress fields, is defined by [8] :

$$E_c = \int_{\Omega^0} (\text{tr} \underline{T} - \text{tr} \underline{D} + W_c(\underline{T})) \, dV - \int_{\partial \Omega_u^0} \underline{p} \cdot \underline{u}^0 \, dA \quad 2.1$$

where $\partial \Omega_u^0$ is the boundary surface of Ω^0 on which the displacements are prescribed, \underline{D} the unsymmetric Piola stress tensor, connected with \underline{T} by the relation

$$\underline{T} = \underline{D} \underline{R} \quad 2.2$$

\mathbb{R} being the proper orthogonal rotation tensor of the principal directions.

If we assume a constitutive law of semilinear elastic type [1], W_c results a quadratic form of \mathbb{T} :

$$W = W_c = \frac{1}{4G} [\text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{T}) - \frac{\nu}{1+\nu} (\text{tr}\mathbb{T})^2] \quad 2.3$$

and, taking into account (2.2), (2.1) can be written in terms of \mathbb{D} and \mathbb{R}

$$E_c = \int_{\Omega^0} \left\{ \text{tr}(\mathbb{D}\mathbb{R}) - \text{tr}\mathbb{D} + \frac{1}{4G} \left[\text{tr}(\mathbb{D}\mathbb{D}^T) - \frac{\nu}{1+\nu} (\text{tr}(\mathbb{D}\mathbb{R}))^2 \right] \right\} dv - \int_{\partial\Omega^0} \underline{p} \cdot \underline{u}^0 da \quad 2.4$$

where \mathbb{D} has to verify the equilibrium conditions:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{D} + \rho \underline{\chi} &= 0 && \text{in } \Omega^0 \\ \underline{n} \cdot \underline{D} &= \underline{p} && \text{on } \partial\Omega^0_d \\ \underline{D}\mathbb{R} &= (\underline{D}\mathbb{R})^T && \text{in } \Omega^0 \end{aligned} \quad 2.5$$

$\partial\Omega^0_d$ being the boundary surface of Ω^0 on which stresses are prescribed.

Consequently, in the case of semilinear elastic materials the possibility to express E_c in a truly complementary form depends on the solution of (2.5''') written as function of \mathbb{R} (that is of three independent parameters).

For elastic bodies under conservative loads, the stress-strain relation assumed in (2.3) furnishes a suitable approximation to the actual behaviour in problems of infinitesimal stability. Although the necessary and sufficient criteria of stability by means of a complementary energy method are still an open problem, stationarity conditions on E_c lead again to critical loads, being the transition from stable to unstable states always characterized by the existence of compati-

ble and equilibrated configurations infinitely adjacent to the reference one.

To simplify our analysis we restrict to a linear known prebuckling state F^0 for which:

$$\underline{S}^0 = \underline{D}^0 = \underline{T}^0$$

$$\underline{R}^0 = \underline{I}$$

Considering a loading law expressible by a load parameter λ , the associated value of the stress tensor in the prebuckling state is given by:

$$\underline{S}^0 = \lambda \underline{s}$$

where \underline{s} is independent of λ .

For any adjacent state we have:

$$\underline{R} = \underline{I} + \underline{r} + \frac{1}{2} \underline{r} \underline{r}^T + O(\underline{r}^3) \quad 2.6$$

$$\underline{D} = \underline{S}^0 + \underline{d} + O(\underline{d}^2) \quad 2.7$$

\underline{r} being the skewsymmetric tensor associated to the infinitesimal rotation vector $\underline{\theta}$. Taking into account (2.6) and (2.7), classical equilibrium equations (2.5), in absence of body forces, become

$$\begin{array}{lll} \nabla \cdot \underline{S}^0 = 0 & \nabla \cdot \underline{d} = 0 & \text{on } \Omega^0 \\ \underline{n} \cdot \underline{S}^0 = \underline{p} & \underline{n} \cdot \underline{d} = 0 & \text{in } \partial\Omega_d^0 \\ \underline{S}^0 = \underline{S}^{0T} & \underline{d} \times = (\text{tr} \underline{S}^0 \underline{I} - \underline{S}^0) \underline{\theta} & \text{on } \Omega^0 \end{array} \quad 2.8$$

$\underline{d} \times$ denoting the axial vector corresponding to the skewsymmetric tensor $(\underline{d} - \underline{d}^T)$.

The linear system of equations (2.8''') enable us to express univocally $\underline{\theta}$ as a function of $\underline{d} \times$ provided that the matrix $(\text{tr} \underline{S}^0 \underline{I} - \underline{S}^0)$ is not singular everywhere; under this assumption the incremental complementary energy between the fundamental and any

adjacent equilibrated state (considering terms till second order only) is given by:

$$\Delta E_c = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \left(1 - \frac{\nu\lambda}{E} \text{tr} \underline{s} \right) \left[(\text{tr} \underline{s} \underline{I} - \underline{s})^{-1} \underline{d} \times \right] \cdot \underline{d} \times + \frac{1}{4G} [\text{tr} (\underline{d} \underline{d}^T) + \right. \\ \left. - \frac{\nu}{1+\nu} (\text{tr} \underline{d})^2 \right] \right\} dv \quad 2.9$$

The stationarity of the second variation of E_c in the class of all statically admissible stress fields only, yields the neutral compatibility equations.

3. Discrete systems

The first integrand in (2.9), depending on λ , is a function of the skewsymmetric part of \underline{d} only, while the stress energy density is a positive definite quadratic form of \underline{d} ; consequently a sufficient condition for the stability of the fundamental state is the first integrand to be positive definite too, that is: $s_I + s_{II} > 0$, $s_I + s_{III} > 0$, $s_{II} + s_{III} > 0$. Such a condition, obviously not necessary, is lacking in practical interest, hence, in the sequel, we shall refer to the case of a negative definite first integrand for which (2.9) is not definite in the class of all the statically admissible fields \underline{d} for any $\lambda \neq 0$.

From the above arguments we deduce that the critical loads corresponding to assumed statically admissible fields \underline{d} may represent either upper or lower bounds to the first eigenvalue λ_1 ; assured lower bounds would be obtained giving arbitrarily the part of \underline{d} independent of geometrical effects and minimizing with respect to $\underline{d} \times$.

The aforesaid procedure applies plainly to finite dimensional systems: in this case, following the same arguments, leading to (2.9), the complementary energy function is:

$$\frac{1}{\lambda} \Delta E_c (\bar{M}, \tilde{M}, \lambda) = \lambda \langle K \bar{M}, \bar{M} \rangle + 2\lambda \langle K \bar{M}, \tilde{M} \rangle + \lambda \langle K \tilde{M}, \tilde{M} \rangle + \langle s \bar{M}, \bar{M} \rangle \quad 3.1$$

where \bar{M} are the statical variables, depending on the rotational effects by means of relations of (2.8''') type, while \bar{M} represent the possibly existing redundant statical unknowns, s being a matrix depending on the initial stress state and K the linear operator of the elastic moduli, supposed positive definite. It is easily seen that, being (3.1) not definite also for small values of λ , it gives for λ a minimum zero value. If we minimize (3.1) with respect to \bar{M} , a unique solution of \bar{M} in terms of \bar{M} is obtained. Such a procedure is equivalent to restrict the range of M by an orthogonality condition between M and the class of all self equilibrated \bar{M} under zero load. The resulting expression for E_c is:

$$\frac{1}{\lambda} \Delta E_c(\bar{M}, \lambda) = \lambda \langle B\bar{M}, \bar{M} \rangle + \langle s\bar{M}, \bar{M} \rangle \quad 3.2$$

The first buckling load factor will be furnished by the solution of the minimum problem

$$\lambda_1 = \min \frac{\langle s\bar{M}, \bar{M} \rangle}{\langle B\bar{M}, \bar{M} \rangle} \quad 3.3$$

this minimum being actually attained for some vector \bar{M}_1 with $\lambda > 0$.

Since the stationary value of \bar{M} renders minimum the elastic stress energy, arbitrary expansions of \bar{M} in terms of \bar{M} will furnish a buckling load factor λ' not greater than the actual one:

$$\lambda' = \min \frac{\langle s\bar{M}, \bar{M} \rangle}{\langle B'\bar{M}, \bar{M} \rangle} \leq \lambda_1 \quad 3.4$$

Besides, it very often is possible to reach a $\lambda'' \leq \lambda'$ applying a priori bounds to $\langle B'\bar{M}, \bar{M} \rangle$ in terms of $\langle s\bar{M}, \bar{M} \rangle$, by means of simple algebraic inequalities.

We observe that the hypothesis, assumed in deriving (3.1), is hardly necessary, except for more evidence in results; we can allow a nonlinear fundamental configuration without sub-

stantial modification in the procedure.

The simplicity of the approach is tested on the significant example of a plane truss consisting of m straight rods of constant cross section connected by n pin-joints. To avoid trivial instability we suppose the mechanical system to be at least isostatic. Assuming in each rod q a local Cartesian frame with the x_1 -axis coincident with the centroidal axis, the linear prebuckling state of stress is:

$$\underline{S}^0(q) = \lambda s(q) = \lambda s(q) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

while the incremental Piola stress field is

$$\underline{d}(q) = \sigma(q) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \tau(q) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$$

and the infinitesimal rotation vector \underline{r} has the single component

$$\underline{r}(q) = \theta(q) \underline{e}_3$$

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ being the basis in the local frame.

In order \underline{d} to be statically admissible it has to satisfy the equilibrium conditions at the joints and the moment equilibrium equations

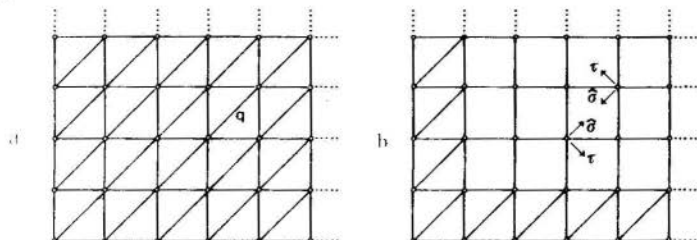
$$\tau(q) = \lambda s(q) \theta(q) \tag{3.5}$$

System (3.5) enable us to obtain the m angles of rotation in terms of stresses univocally, except in case some $\lambda s(q)$ vanishes; but that does not constitute an obstacle in deriving the energy function in a truly complementary form because E_c would be independent of $\theta(q)$.

If the truss is redundant, choosing a number of appropriate unknowns $\hat{\sigma}$ as parameters, the complementary energy function is:

$$\frac{1}{\lambda} E_c (\hat{\sigma}, \tau) = \lambda \langle K \tau, \tau \rangle + 2\lambda \langle K \tau, \hat{\sigma} \rangle + \lambda \langle K \hat{\sigma}, \hat{\sigma} \rangle + \langle S \tau, \tau \rangle \quad 4.07$$

For a modular structure, as in figure 1a, it is always possible to refer to statically determined equivalent systems (fig. 1b) whose solution in terms of $\hat{\sigma}$ and τ is of recurring type.



Considering these kinds of modular structures as a finite elements discretizations of continuum systems, approximate critical loads are easily gained (also in comparison with similar techniques in the potential energy frame); but it is to be pointed out that it is not possible to state "a priori" if these approximations represent upper or lower bounds to the first eigenvalue.

4. Plane States

Expression (2.9), for plane states, transforms into:

$$\Delta E_c = \int_{\Omega} v \left[\frac{1}{4G} d\alpha\beta d\alpha\beta - v' (d\alpha\alpha)^2 + \frac{1}{2\lambda} \left[(S\alpha\alpha)^{-1} - \frac{v}{E} \lambda \right] (e\alpha\beta d\beta\alpha)^2 \right] d\alpha \quad 4.1$$

where α, β range over 1, 2; $e\alpha\beta$ is the two dimensional permutation tensor; $v' = v$ in the case of plane strain and $v' = v/(1+v)$ in the case of generalized plane stress.

Equilibrium equations (1.8') may be solved in terms of a two dimensional vector field \underline{a} on Ω^0 , with Cartesian components a_α :

$$d_{\alpha\beta} = e_{\alpha\gamma} a_{\beta, \gamma} \quad 4.2$$

Applying Helmholtz's decomposition theorem to \underline{a} , (4.2) becomes

$$\underline{d}_{\alpha\beta} = e_{\alpha\gamma} (e_{\beta\delta} \phi_{,\gamma\delta} + \psi_{,\beta\gamma}) \quad 4.3$$

where ϕ and ψ are two scalar fields on Ω° ; from (4.3)

$$\underline{d} \times = \Delta \psi \underline{e}_3$$

so that the part of \underline{d} related to the geometrical effects depends on ψ only. (4.1), written in terms of ϕ and ψ , gives:

$$\begin{aligned} \Delta E_C = \int_{\Omega^\circ} \frac{1}{4G} \{ \phi_{,\alpha\beta} \phi_{,\alpha\beta} + \psi_{,\alpha\beta} \psi_{,\alpha\beta} + 2e_{\alpha\beta} \phi_{,\beta\delta} \psi_{,\alpha\delta} - \nu' (\phi_{,\alpha\alpha})^2 + \\ \left[\frac{2G}{\lambda} (s_{\alpha\alpha})^{-1-\nu'} \right] (\psi_{,\alpha\alpha})^2 \} da \end{aligned} \quad 4.4$$

under the boundary conditions

$$e_{\alpha\beta} \frac{d}{ds} \phi_{,\beta} = \frac{d}{ds} \psi_{,\alpha} \quad \text{on } \partial\Omega^\circ_d \quad 4.5$$

and the natural boundary conditions resulting from the variational problem.

In the case of traction problems and of homogenous initial stress state, performing the variation, the resulting neutral equilibrium equations are separated:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\phi = 0 \\ \Delta\Delta\psi = 0 \end{aligned} \quad \text{in } \Omega^\circ \quad 4.6$$

under the boundary conditions 3.5 and the natural boundary conditions:

$$\begin{aligned} (1-\nu' + \frac{2G}{\lambda}) \frac{d}{ds} \Delta\psi + (1-\nu') \frac{d}{dn} \Delta\phi = 0 \\ (1-\nu' + \frac{2G}{\lambda}) \frac{d}{dn} \Delta\psi + (1-\nu') \frac{d}{ds} \Delta\phi = 0 \end{aligned} \quad \text{on } \partial\Omega^\circ_d \quad 4.7$$

This formulation seems to be promising in giving lower bounds to the first eigenvalue assuming an appropriate field ϕ , compatible with boundary conditions (4.5) and (4.7"), and minimizing exactly with respect to ψ .

REFERENCES

- [1] John F., Plane strain problems for perfectly elastic material of harmonic type. Comm. Pure Appl. Math., 2 (1960).
- [2] Levinson M., The complementary energy theorem in finite elasticity. Journ. Appl. Mech. 32 (1965).
- [3] Oran G., Complementary energy method for buckling ASCE. Eng. Mech. Divs. febr. (1967).
- [4] Zubov L.M., The stationary principle of complementary work in nonlinear elasticity. Prikl. Math. Mek. 34(1970).
- [5] Popelar C.H., Lower bounds for the buckling loads. Journ. Appl. Mech., march (1974).
- [6] Bill E.H., The complementary energy principle in nonlinear elasticity theory. Dept. of Aer. and Astr. University of Washington (1974).
- [7] Koiter W.T., On the complementary energy theorem in nonlinear elasticity theory. Report WTHD 72 (1975).
- [8] Koiter W.T., Complementary energy, neutral equilibrium and buckling. KON. Ned. Akad. A'Dam. Proceedings series B 79-3 (1976).
- [9] Masur E.F. and Popelar C.H., On the use of complementary energy in the solution of buckling problems. Inter. Journ. Sol. Struct. 12 (1976).
- [10] Del Piero G., Sull'impiego di alcune disuguaglianze a priori del calcolo dei carichi critici Euleriani. III Aimeta Congress, Cagliari, (1976).
- [11] Angelillo M., Dodaro L., Critical loads via complementary energy: upper and lower bounds. Istituto di Costruzioni, Facoltà di Architettura di Napoli, 153, (1980).