

COBEM 81

RIO DE JANEIRO

15 - 18 de dezembro de 1981



ANAIS DO
VI CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

VOLUME A

COMISSÃO ORGANIZADORA

Presidente:

Pedro Carajilescov

Vice-Presidente:

Luiz Bevilacqua

Secretários:

José de Mendonça Freire

Alcir de Faro Orlando

Tesoureiro:

José Luiz de França Freire

Editor-Chefe:

Francisco Eduardo Mourão Saboya

Secretárias:

Jovelina Maria Moraes

Terezinha Carajilescov

PATROCÍNIO

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, ABCM
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO, PUC/RJ



EDITORIA

**ANAIS DO
VI CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**HOTEL INTER-CONTINENTAL RIO
Rio de Janeiro**

15 - 18 de dezembro de 1981

COBEM 81

VOLUME A

**APROVEITAMENTO E CONSERVAÇÃO DE ENERGIA
ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E BIFÁSICOS
TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO
TRANSFERÊNCIA DE CALOR E TURBULÊNCIA
MECÂNICA DOS FLUIDOS
PROJETO TÉRMICO DE EQUIPAMENTOS**

EDITORIAL

O esforço de desenvolvimento industrial do Brasil nas últimas décadas, deu origem a um processo de formação de pessoal altamente qualificado para as áreas tecnológicas. Os resultados deste processo, obviamente, não foram imediatos, mas já começam a ser sentidos. Nos últimos anos, temos observado a proliferação de encontros científicos, publicações técnicas, associações de pesquisadores debates, etc. Entretanto, alguns elos da cadeia de inovação tecnológica, associada à evolução científica, ainda não se completaram. Esforços devem ser empreendidos neste sentido, reforçando-se, ao mesmo tempo, os elos mais fracos. Tal atitude resultará no aproveitamento racional do potencial humano disponível, necessário para que o país se beneficie dos investimentos efetuados.

A atividade científica nas áreas de Ciências Mecânicas tem sido intensa e seus pesquisadores tem revelado elevado grau de sofisticação. Estes anais do COBEM 81 atestam tais fatos. Este congresso cobre um amplo espectro de assuntos e reúne especialistas do Brasil e de vários países do mundo para a apresentação de trabalhos e troca de idéias.

Espera-se que os leitores destes anais encontrem material útil que estimule desenvolvimentos adicionais nas áreas de Ciências Mecânicas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o esforço dos autores e conferencistas convidados. Agradecemos, também, a cooperação das pessoas que, dotadas de preparo nas áreas de Ciências Mecânicas, contribuíram na revisão dos trabalhos submetidos a este Congresso. Finalmente, queremos agradecer o apoio financeiro e material prestado pelas instituições: CNPq, CNEN, CAPES, FINEP, PUC/RJ, Banco Itaú S/A e Mercedes Benz do Brasil S/A.

CONTEÚDO DOS ANAIS DO COBEM 81

- VOLUME A Aproveitamento e conservação de energia. Escoamentos compressíveis e bifásicos. Transferência de calor por convecção. Transferência de calor e turbulência. Mecânica dos fluidos. Projeto térmico de equipamentos.
- VOLUME B Conformação mecânica e análise experimental de tensões. Propriedades dos materiais. Elasticidade e plasticidade. Análise experimental de tensões. Placas e cascas. Mecânica clássica.
- VOLUME C Vibrações e acústica. Amortecedores e vibrações. Projeto e teste de equipamentos. Projeto de transmissões e rotores. Processos de fabricação e usinagem. Projeto mecânico de veículos e mancais.
- VOLUME D Tubulações. Sistemas computacionais e algoritmos. Projeto mecânico de componentes nucleares. Elementos finitos em mecânica dos sólidos. Métodos analíticos e numéricos em fenômenos de transporte. Métodos analíticos e numéricos em mecânica dos sólidos.

REVISORES

Alcir F. Orlando (PUC/RJ)	José M. Freire (PUC/RJ)
Antonio C.O. Barroso (CNEN)	Julio Militzer (EPUSP)
Antonio I. Ruiz (UnB)	Kamal A.R. Ismail (UNICAMP)
Antonio S. Vargas (PUC/RJ)	Leopoldo E.G. Bastos (COPPE)
Arno Blass (UFSC)	Liu Hsu (COPPE)
Berend Snoeijer (UFSC)	Luiz Bevilacqua (PUC/RJ)
Carlos A.F. Thompson (IME)	Marcos M. Pimenta (EPUSP)
Celso P. Bottura (UNICAMP)	Martin Schmal (COPPE)
Clovis S. Barcellos (UFSC)	Mauricio P. Campos Fo. (UNICAMP)
Domingos Boechat Alves (UFSC)	Miguel H. Hirata (COPPE)
Duraíd Mahrus (Metal Leve)	Moyses Zindeluk (COPPE)
Edson Monteiro (PUC/RJ)	Nelson Back (UFSC)
Eitaro Yamane (EPUSP)	Otavio M. Silveas (EPUSP)
Euclides C. Fernandes (ITA)	Otavio Maizza Neto (EPUSP)
Fathi A.J. Darwish (PUC/RJ)	Paulo A. Gomes (COPPE)
Fausto Rodrigues Fo. (UNICAMP)	Paulo Rizzi (ITA)
Fernando L.L. Carneiro (COPPE)	Pedro Carajilescov (PUC/RJ)
Gordiano F. Alvim Fo. (ITA)	Pio Caetano Lobo (UFPb)
Halei F. Vasconcelos (UFPb)	Raad Y. Qassim (COPPE)
Hans Ingo Weber (UNICAMP)	Raul A. Feijoô (CBPF)
Hazim A. Al-Qureshi (ITA)	Rubens Sampaio Fo. (PUC/RJ)
Henner A. Gomide (UF/Uberlândia)	Samir N.Y. Gerges (UFSC)
Hyppolito V. Pereira Fo. (UFSC)	Saul D'Avilla (UNICAMP)
Isaias C. Macedo (UNICAMP)	Sergio Colle (UFSC)
Jaime Szajner (UNICAMP)	Sergio M.M. Ferreira (PETROBRÁS)
Jan Leon Scieszko (COPPE)	Sergio N. Monteiro (COPPE)
Joaquim S. Cintra (UF/S. Carlos)	Sergio V. Guerreiro (CNEN)
Joaquim S. Paiva Neto (UNICAMP)	Sidney Stuckenbruck (PUC/RJ)
José A.D. Diegues (IPEN)	Solly A. Segenreich (PUC/RJ)
José J. Espindola (UFSC)	Victor Prodonoff (PETROBRÁS)
José L.F. Freire (PUC/RJ)	William M. Mansour (COPPE)

INDICE POR INSTITUIÇÕES

- Bachum-Linden*
(Alemanha)
Leimbach, K.R., D-2
- CBPF
Feijoo, R.A., B-16, B-32
Taroco, E., B-16
- Clemson U.*
(USA)
Anand, S.C., D-35
Bertz, R.F., D-35
- CNEN
Alvim, A.C.M., D-29
Andrade, J.E.L., D-5
Barroso, A.C.O., A-42, D-29
Madeira, A.A., A-42
Mattos Neto, A.G., D-33
Ribeiro, S.V.G., D-5
- COBRAPI
Trindade, M.B., B-13
- COPPE
Almeida, L.H., B-9
Bastian, F.L., B-26
Buchmann, J.H., A-22
Ebecken, N.F.F., D-17, D-36
Gebrin, A.N., D-29
Hirata, M.H., A-29
Hsu, L., D-10, D-11
Kinrys, S., A-13
Luiz, A.M., A-5
Machado, R.D., D-36
Mansour, W.M., C-1, C-17
Miranda, P.E.V., B-13
Monteiro, S.N., B-9, B-13,
B-20
Qassim, R.Y., A-11, A-13
A-22
Scieszko, J.L., C-26
Zindeluk, M., C-12
Zoratto, D.L., C-26
- CSN/Centro de Pesquisas
Caminha Jr., H.M., B-26
- EFEI
Almeida, M.T., C-13
Dias, J.C., C-13
- E.E. Mauã*
Bacarat, D.E., A-39
Lauria, D., C-19
Leite, C.C., C-3
- EESC-USP
Lirani, J., C-23, C-29, D-8
Piccoli, H.C., C-23
Porto, A.J.V., C-23, D-8
Rehder, O.A., A-24
Selegim, P., C-13
- E. Polytechnique de
Montreal (Canada)*
Robillard, L., A-19, A-20
Shekar, B.C., A-19
Vasseur, P., A-19, A-20
- EPUSP
Alves, V.F.A., C-9
Conti, M.B., C-42
Maizza Neto, O., C-4
Martins, R.M., A-28
Miltzer, J., A-28
Paiva, J.B., B-28
Salvagni, R.B., C-9
Sanchez, M.G., D-19
Szajn bok, M., A-39, C-41,
C-42, D-19
Veiga, J.P.C., C-41, C-42
- F. Architettura-Napoli*
(Italia)
Anselmi, C.A., B-29
Fino, L., B-29
- F.Sci.Tech. Besancon*
(França)
Dahan, M., B-27
- F.Sci. Tech. La Bouloie*
(França)
Balbi, J., B-19
Kharrat, B., B-19
Lecoanet, H., B-19
Pernin, J., B-19
- F. E. Bauru*
Fernandes, J.C., C-5

FEIS/UNESP

Arato Jr., A., D-22
Quirino, J.P., D-24

F.E. Porto

(Portugal)

Delgado, R., D-25
Martins, R., D-25

F.E. Souza Marques

Couto, P.R.G., B-20
Silveira, T.L., B-20

FEUP

Dinis, L.M.J.S., B-17

F. Medicina/USP

Nakiri, K., C-20
Suzuki, T., C-20
Verginelli, G., C-20
Zerbini, E.J., C-20

FURNAS

Maneschy, J.E.A., D-4

IAE/CTA

Augusto, E.A., B-37
Bello, E.M., C-35
Correa, R., C-34
Damanet, P., C-35
Sato, A., B-37
Sorensen, S.B., C-35
Vetterle, J.F., A-16

IEN

Lima, M.A., B-9

IME

Santos, R.S., D-29
Thompson, C.A., A-8

Imperial College

(Inglaterra)

Balthazar, J., B-10
Culver, L.E., B-10
Radon, J., B-10

INMET

Souza, Y.M., A-3

INMETRO

Araujo, M.A.N., C-6

INPE

Cardoso, H.P., A-23
Kuga, H.K., B-39
Lourenção, P.T.M., B-36

Oliveira Filho, O.B., A-23
Rios Neto, A., B-39
Tavares, S.A., B-36
Venkataraman, N.S., A-23

Iowa S.U.

(USA)

Burger, C.P., B-4, B-5, B-21,
D-14
Miskioglu, I., B-5
Riley, W.F., B-21

IPEN

Baptista Filho, B.D., A-2,
A-38, A-40
Bassel, W.S., D-15
Diegues, J.A.D., D-15
Faya, A.J., D-30
Maiorino, J. R., D-30
Paula, H.M., D-27

IPqM

Camelier, I.A., B-35

ITA

Al-Qureshi, H.A., C-34
Altman, W., B-31
Castro, P.R., A-32
Fernandes, E.C., A-16, A-32
Flores, P.T., B-31
Saboya, S.M., A-15

NUCLEN

Cutrin, J.H.C., D-3
Elfmann, W.W., D-16
Ferrari, L.D.B., D-16
Sterkel, H.P., D-2, D-3

PETROBRÁS

Caetano Filho, E., A-11
Pedrosa Jr., O.A., A-29

Politecnico di Torino
(Itália)

Socio, L.M., A-12, A-18

PUC/RJ

Almeida, C.A., D-1
Ballvé, H., A-34
Bevilacqua, L., B-32, D-6
Braga, C.V.M., A-41
Carajilescov, P., A-34, A-41
Costa, H.B., B-24
Costa Filho, P.A., D-7
Darwish, F.A.I., B-12, B-24
Dumont, N.A., B-30, D-34
Fernandez, E.F., A-34

Freire, J.L.F., B-6, B-22,
B-25

Frota, M.N., A-27
Gama, R.M.S., D-31
Ghavami, K., C-18
Graça, M.C., A-34
Lage, J.D., B-6
Marchesin, D., A-33
Maues, J.A., A-3
Muller, A., B-32
Napoleão Filho, J., D-34
Orlando, A.F., A-3
Ouro, C.R., B-24
Paes-Leme, P.J., A-33
Pereira, L.C., B-12
Rosas e Silva, R., B-33
Saboya, F.E.M., A-15, D-31
Sampaio Filho, R., A-5, A-33
Segenreich, S.A., D-7
Stramandinoli Jr., A., B-30
Vargas, A.S., D-33
Vieira, R.D., B-6, B-22
Villas-Bôas, F.A.M., D-6

Sid. N.S. Aparecida

Amaro, J.P.M., C-32
Gonzalez, G., C-32
Jeszensky, G., C-32
Kajita, T., C-32

*Stanford University
(USA)*

Moffat, R.J., A-27
Tavares, G.A., D-37

*THD - Darmstadt
(Alemanha)*

Nascimento, N., C-4, C-11

*U. Aachen
(Alemanha)*

Armstroff, O., C-33

*U. Birmingham
(Inglaterra)*

Das, M.K., C-8
Taylor, S., D-18

*U. of Cairo
(Egito)*

Hassan, S.D., B-38

*U. Camerino
(Itália)*

Gaffuri, G., A-12
Misici, L., A-18
Polzonetti, A., A-18

*U. de Chile
(Chile)*

Zambrano, W., A-10

UFBa

Gesteira, C.S., D-12

UFES

Amaral, P.F.S., C-15
Pinto, B.G.M., C-15
Sacinnelli Filho, M., C-15

UFMG

Paula e Silva, E.M., B-11

UFPa

Rendeiro, G., A-1

UFpb

Arruda, J.R.F., C-39
Cunha, J.C.S., B-25
Wasconcelos, H.F., D-18

UFPe

Brito Filho, J.P., A-7
Feitosa, E.A.N., C-17
Fraidenaich, N., A-7
Mesquita, N.G.M., C-33
Verçosa, C.A.M., B-18

UF/Piauí

Fonseca Neto, J.D., D-17

UFRGS

Awruch, A.M., A-30
Creus, G.J., D-26
Groehs, A.G., D-26

UFRJ

Oliveira, A.R.E., C-1

UFRN

Aquino, E.M.F., C-12
Medeiros, J.T.N., C-29

UFSC

Altafini, C.R., A-9
Amaral, R., C-30
Back, N., B-34, D-22
Barcellos, C.S., D-9, D-21,
D-24, D-28, D-38
Bento Filho, A., D-21
Bez, U.N., C-7
Blass, A., B-1, B-8
Buschinelli, A., B-14
Damian, J.M., D-38
Ferreira, A.C., C-33

Ferreira, R.T.S., A-9, A-31
 Gerges, S.N.Y., C-6, C-7
 Lima, J.A.S., A-4
 Linsingen, I., A-31
 May, W., B-14
 Moro, N., B-1
 Nicolau, V.P., A-26
 Pereira Filho, H.V., A-26
 Pereira, L.T.V., B-34
 Philippi, P.C., D-32
 Rosa, E., B-18, D-9
 Schneider, C.A., A-4
 Scotti, A., B-14
 Snoeijer, B., C-30
 Zanini, J.C., C-22

UF/S. Carlos

Cintra Filho, J.S., A-25
 Rachid, M., B-28

UF/Uberlândia

Cruz, C., C-21
 Gomide, H.A., B-4, B-23
 Lépore Neto, F. P., C-36,
 C-38
 Raslan, A.A., B-11
 Ribeiro, C.R., C-41
 Smith Neto, P., B-7
 Steffen Jr., V., C-2, C-27

U. Franche

(França)

Lecoanet, J., C-27

U. Gales

(País de Gales)

Owen, R., D-25

U. Lagos

(Nigéria)

Akinsete, V.A., A-17
 Bello-Ochende, F.L., A-17

U. Liverpool

(Inglaterra)

Sutcliffe, J., D-23

U. Los Andes

(Venezuela)

Lema, J.M., A-36

UMIST

(Inglaterra)

Cartwright, W.G., A-35
 Parise, J.A., A-35

U. Munchen

(Alemanha)

Siegmantel, V., D-13

UNAM

(México)

Fernandez-Zayas, J.L., A-21
 Lópes, A.F.R., D-13
 Tardaguila, J.A.C., D-13

U. Nac. Ingenieria

(Peru)

Luque, A.L., A-37

U. Napoli

(Itália)

Angelillo, M., D-39
 Dodaro, L., D-39

UnB

Malik, R.A., C-40
 Neves, F.J.R., C-10
 Rodrigues, J.L.A.F., D-28, D-38
 Ruiz, A.I., C-8

UNESP, Guarã

Murcia, N., A-14

U. New Brunswick

(Canadá)

LaPlante, M., A-6
 Lenard, J.G., B-2
 Souza, A.C.M., A-6
 Venart, J.E.S., A-6

UNICAMP

Almeida, N., C-31
 Bresciani Filho, E., C-31
 Ismail, K.A.R., A-14
 Konuk, A.A., A-38, A-40,
 D-27
 Liu, C.Y., A-14
 Lunazzi, J.J., C-21
 Mesquita Neto, E., C-25
 Nery, F.A.C., C-31
 Pederiva, R., C-14, C-16
 Rodrigues Filho, F., C-16
 Rosário, J.M., C-24
 Sollero, P., C-28
 Stavropoulou, K., C-37
 Szajner, J., C-37
 Weber, H.I., C-14, C-16, C-24,
 C-25, C-36, C-37, C-38

U. Provence

(França)

Brun, R., D-32

*U. of Riyadh**(Arābia Saudita)*

Asfar, O.R., B-38
Athel, S.A., B-38, D-20
El-Naschie, M.S., D-20

*U. Stuttgart**(Alemanha)*

Stierner, S.F., B-7

*U. Titograd**(Iugoslavia)*

Lubarda, V., B-15

*U. Toronto**(Canadā)*

Fenton, R.G., B-3
Khataan, H.A., B-3

Volkswagen

Cotait Neto, I., C-16

Worthington

Costa, F.A., B-25

ÍNDICE - VOLUME A

APROVEITAMENTO E CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

SESSÃO A - 1

A-1	Coletor solar com leito de grês do Parã, Rendeiro, G. (UFPA)	1
A-2	A eficiência térmica de coletores planos de energia solar, Baptista Filho, B.D., (IPEN)	15
A-3	Bennett correlation for analyzing available data in Brazil - Validation and analysis of model, Maués, J.A. (PUC/RJ), Orlando, A.F. (PUC/RJ), Souza, Y.M. (INMET)	27
A-4	Desenvolvimento de uma unidade de medição de energia eólica, Lima, J.A.S., Schneider, C.A. (UFSC)	39
A-5	Modelo da capilaridade para a análise da secagem, Luiz, A.M. (COPPE), Sampaio Filho, R. (PUC/RJ)	49
A-6	Perdas de calor em tanques de estocagem, Souza, A.C.M., LaPlante, M., Venart, J.E.S. (U. New Brunswick, Canadá)	59
A-7	Simulação da transferência dinâmica de calor entre o meio ambiente e um recinto, Brito Filho, J.P., Fraidennaich, N. (UFPE)	71

ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E BIFÁSICOS

SESSÃO A - 2

A-8	Escoamento supersônico em tuberias, Thompson, C.A. (IME)	83
A-9	Simulação do escoamento compressível de gases através do escoamento de água com superfície livre, Altafini, C.R., Ferreira, R.T.S., (UFSC)	97

XVI

A-10	On the determination of the resonance frequency of a Helmholtz resonator with variable section neck, <i>Zambrano, W.</i> (U. de Chile)	109
A-11	Diffusion in Poiseuille and Couette flows of binary mixtures of incompressible newtonian fluids, <i>Caetano Filho, E.</i> (Petrobrás), <i>Qassim, R.V.</i> (COPPE)	115
A-12	Two-phase flow and heat transfer in cavities, <i>Socio, L.M.</i> (Politecnico di Torino), <i>Gaffuri, G.</i> (U. Camerino, Itália)	125
A-13	On the Davies-Taylor equation for the fluidization bubble, <i>Kinrys, S.</i> , <i>Qassim, R.V.</i> , (COPPE)	133
A-14	Estudo analítico experimental com tubos de calor, <i>Ismail, K.A.R.</i> (UNICAMP), <i>Liu, C.Y.</i> (UNICAMP), <i>Murcia, N.</i> (UNESP, Guarã)	145

TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO

SESSÃO A - 3

A-15	Transfer coefficients for plate fin and elliptical tube heat exchangers, <i>Saboya, S.M.</i> (ITA), <i>Saboya, F.E.M.</i> (PUC/RJ)	153
A-16	Coefficientes de transferência para o escoamento turbulento entre placas planas paralelas, <i>Vetterle, J.F.</i> (IAE-CTA), <i>Fernandes, E.C.</i> (ITA)	163
A-17	Combined free and forced laminar convection in inclined rectangular channels heated from below and cooled from above, <i>Akinsete, V.A.</i> , <i>Bello-Ochende, F.L.</i> (U. Lagos, Nigéria)	173
A-18	Slow forced and free convection in inclined channels, <i>Socio, L.M.</i> (Politecnico di Torino), <i>Misici, L.</i> , <i>Polzonetti, A.</i> (U. Camerino, Itália)	183
A-19	Free convection between horizontal cylinders in water at low temperature, <i>Vasseur, P.</i> , <i>Robillard, L.</i> , <i>Shekar, B.C.</i> (E. Polytechnique de Montreal, Canadá)	193

A-20	Thermal response of a mass of fluid to a constant cooling rate applied on its boundaries, Robillard, L., Vasseur, P. (E. Polytechnique de Montreal, Canadá)	203
A-21	Incremento en la capacidad convectiva mediante vibraciones inducidas por el flujo, Fernandez-Zayas, J.L. (UNAM, México)	213
A-22	Similarity flows between a rotating and a stationary disk, Buchmann, J.H., Qassim, R.V., (COPPE)	225

TRANSFERÊNCIA DE CALOR E TURBULÊNCIA

SESSÃO A - 4

A-23	Thermal resistance of a convectively cooled plate with applied heat flux and variable internal heat generation, Venkataraman, N.S., Cardoso, H.P., Oliveira Filho, O.B., (INPE)	233
A-24	Sensor dinâmico de temperatura, Rehder, O.A. (EESC-USP)	245
A-25	Modelos axisimétricos na descrição do campo de flutuações de temperatura e no cálculo da difusividade térmica turbulenta, Cintra Filho, J.S. (UF/São Carlos)	253
A-26	Modelo matemático para o cálculo de escoamento turbulento interno, Nicolau, V.P., Pereira Filho, H.V., (UFSC)	263
A-27	Advances in triple hot-wire technique for measurements of turbulence structure, Frota, M.N. (PUC/RJ), Moffat, R.J. (Stanford U., USA)	273
A-28	A escolha do sistema de coordenadas na solução de problemas de fenômenos de transporte, Martins, R.M., Militzer, J., (EPUSP)	287

MECÂNICA DOS FLUIDOS

SESSÃO A - 5

A-29	Hydrodynamic aspects of a floating wave-breaker, <i>Hirata, M.H.</i> (COPPE), <i>Pedrosa Jr., O.A.</i> (CENPES/Petrobrás)	299
A-30	Fluxo não estacionário em redes de rios ou canais, <i>Awruch, A.M.</i> (UFRGS)	309
A-31	Análise do escoamento junto a ressaltos em canalizações, <i>Linsingen, I.</i> , <i>Ferreira, R.T.S.</i> , (UFSC)	319
A-32	Análise do escoamento em grades lineares, <i>Castro, P.R.</i> , <i>Fernandes, E.C.</i> , (ITA)	331
A-33	Transients in pipes, <i>Marchesin, D.</i> , <i>Paes-Leme, P.J.</i> , <i>Sampaio Filho, R.</i> , (PUC/RJ)	341
A-34	Medidas de pressão estática e perda de carga do escoamento em um feixe de sete barras com espaçadores helicoidais, <i>Graça, M.C.</i> , <i>Ballvé, H.</i> , <i>Fernandez, E.F.</i> , <i>Carajilescov, P.</i> , (PUC/RJ)	355

PROJETO TÉRMICO DE EQUIPAMENTOS

SESSÃO A - 6

A-35	Simulation of a refrigeration multi-cylinder single stage reciprocating compressor, <i>Cartwright, W.G.</i> , <i>Parise, J.A.</i> , (UMIST, Inglaterra)	363
A-36	Design and construction of a new rotating combustion engine prototype, <i>Lema, J.M.</i> , (U.de Los Andes, Venezuela)	373
A-37	Estudio sobre la influencia de la altura en los motores de combustion interna, <i>Luque, A.L.</i> , (U.Nac.Ingeniería, Peru)	383
A-38	Um novo método para cálculos de perda de carga e transferência de calor em trocadores de calor de carcaça e tubos, <i>Baptista Filho, B.D.</i> (IPEN), <i>Konuk, A.A.</i> (UNICAMP)	395

XIX

A-39	Um método para o projeto de fornos com o uso de computador, <i>Bacarat, D.E. (E.E.Mauã), Szajnbock, M. (EPUSP)</i>	405
A-40	Projeto de trocadores de calor por métodos numéricos, <i>Konuk, A.A. (UNICAMP), Baptista Filho, B.D. (IPEN)</i>	415
A-41	Simulação numérica do comportamento termo hidráulico de geradores de vapor típicos de usinas PWR, <i>Braga, C.V.M., Carajilescov, P., (PUC/RJ)</i>	423
A-42	Um novo modelo para simulação de pressurizadores de centrais PWR, <i>Madeira, A.A., Barroso, A.C.O., (CNEN)</i>	437



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-1

p. p. 1 - 14

PUC/RJ

COLETOR SOLAR COM LEITO DE GRÊS DO PARÁ

GONÇALO RENDEIRO

PROF. COLABORADOR - DEPTº DE ENG: MECÂNICA
UFPA. - BELÉM - PARÁ - BRASIL

SUMÁRIO

Neste trabalho é apresentado um estudo teórico-experimental do comportamento diário de um coletor solar com leito de Grês do Pará para fins de secagem. O protótipo construído é composto de uma superfície absorvedora de pedra de 3 m² de superfície, isolada por um canal impermeabilizante de plástico transparente, sendo utilizado ar como fluido de trabalho. O protótipo foi testado para diferentes condições diárias de insolação, temperatura ambiente e velocidade do vento.

Para as mesmas condições de insolação a comparação entre os resultados obtidos pelo modelo desenvolvido e o protótipo se mostraram em boa concordância.

SUMMARY

In this work shows a theoretic-experimental analysis of the daily performance of a solar collector with stone bed (Grês do Pará) to dry pepper, cereals and special plants. The prototype had a stone absorber surface, sealed with a channel of the transparent plastic, and the work fluid is air. The prototype was tested to different daily conditions as insulations, ambient temperatures and wind speeds.

For the same conditions of insulations, the comparison between the results obtained of the theoretic-model and the prototype were considered satisfactory.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas de secagem de grãos em estufas com ar forçado à temperatura ambiente ou aquecido de alguns graus mediante um coletor solar simples é uma forma de secagem que tem demonstrado ser mais econômico que os outros sistemas de aquecimento comumente utilizados⁽¹⁾, tais como: queimador a combustíveis fósseis ou aquecimento por energia elétrica.

O interesse principal é a verificação da possibilidade de uso de tais coletores em sistemas de secagem em camadas de produtos agrícolas, na região Amazônica, tais como: pimenta do reino, goma, patchoulli, etc.

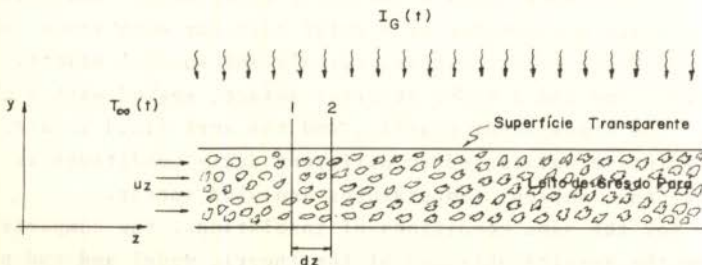
O coletor solar desenvolvido tem a vantagem de absorver e armazenar a energia solar incidente, evitando assim gastos adicionais com sistemas de estocagem e permitindo um maior tempo de funcionamento.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um estudo teórico-experimental de um coletor solar com leito de Grês do Pará para fins de secagem, utilizando ar como fluido de trabalho.

A partir do balanço de energia no coletor, foram obtidos um sistema de equações não lineares representando o comportamento térmico diário. A solução do sistema de equações foi obtido através de um programa automatizado de cálculo via computador digital, cujos resultados teóricos foram comparados com os obtidos pelo protótipo construído.

2. O MODELO TEÓRICO DO COLETOR

Considere o sistema mostrado na Fig.(1).



Figura(1) - COLETOR SOLAR COM LEITO DE GRÃS DO PARÁ.

O modelo matemático para simular o comportamento térmico do coletor-armazenador é realizado através de um balanço de energia assumindo as seguintes hipóteses:

(i) A temperatura do leito é uniforme em todo o seu comprimento.

(ii) O gradiente de temperatura no interior do leito de Grês do Pará com respeito a ordenada y é desprezada, visto que a relação b/y ser pequena.

(iii) A temperatura do ar que flui através do leito varia somente com respeito ao comprimento Z do coletor.

(iv) As perdas de calor por radiação na superfície transparente são negligenciadas, em face da temperatura na referida superfície ser pequena.

2.1 - BALANÇO DE ENERGIA PARA LEITO (Absorvedor)

(Energia transmitida ao leito) = (Energia recebida pelo coletor) - (Energia cedida pelo leito ao ar)

ou seja:

$$(m C_p) \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = I_g(t) \tau \alpha b dz - \psi A_p \bar{h} c (\theta(t) - T(z)) \quad (1)$$

onde:

m - massa do leito de Grês do Pará

C_p - calor específico do Grês do Pará

b - largura do coletor

dz - elemento infinitesimal de comprimento

$I_g(t)$ - radiação solar global numa superfície horizontal

τ - transmissividade da superfície transparente

α - absorptividade do Grês do Pará

ψ - fração de vazio ou porosidade do leito

$\bar{h}c$ - coeficiente médio de transferência de calor por convecção do leito ao ar

A_p - área da superfície total da partícula no leito ⁽¹⁾

$$A_p = \frac{6(1-\psi)bydz}{dk}$$

Fazendo na Eq. (1)

$$A_1 = \rho C_p y (1-\psi), \quad A_2 = I_g(t) \tau \alpha \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{6(1-\psi)yhc}{dk}$$

$$A_1 b dz \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = A_2 b dz - A_3 b dz \theta(t) + A_3 b dz T(z)$$

$$\ln \left[\frac{A_2 + A_3 T(z)}{A_1} - \frac{A_3}{A_1} \theta(t) \right] = - \frac{A_3}{A_1} t + C$$

Em $t = 0$

$$C = \ln \left[\frac{A_2 + A_3 T(z)}{A_1} - \frac{A_3}{A_1} \theta(0) \right]$$

Substituindo o valor de C, tem-se:

$$\frac{A_2 + A_3 T(z)}{A_1} - \frac{A_3}{A_1} \theta(t) = e^{-\frac{A_3}{A_1} t} \left[\frac{A_2 + A_3 T(z)}{A_1} - \frac{A_3}{A_1} \theta(0) \right] \quad (2)$$

Fazendo na Eq. (2):

$$A_4 = \frac{A_2}{A_1} \qquad A_5 = \frac{A_3}{A_1}$$

Tem-se:

$$\theta(t) = \frac{A_4}{A_5} (1 - e^{-A_5 t}) + T(z) (1 - e^{-A_5 t}) + e^{-A_5 t} \theta(0) \quad (3)$$

A Eq. (3) calcula a temperatura do leito a cada tempo t .

2.2 - BALANÇO DE ENERGIA PARA O AR

(Aumento de energia interna) = (Energia cedida do leito para o ar) - (Energia perdida por convecção para o ambiente)

ou seja:

$$(\dot{m} C_p)_{ar} \frac{\partial T(z)}{\partial z} dz = A_p \bar{h} c \{ \theta(t) - T(z) \} - b dz U \{ T(z) - T_{\infty}(t) \} \quad (4)$$

Sendo:

\dot{m} - vazão mássica do ar no coletor

C_p - calor específico do ar

U - coeficiente médio de transferência de calor por convecção entre a superfície transparente e o ambiente.

$T_{\infty}(t)$ - temperatura ambiente variável com o tempo.

Fazendo na Eq. (4)

$$B_1 = (\dot{m} C_p)_{ar}$$

$$B_2 = \frac{6(1-\psi)^2 by}{dk} hc \quad B_3 = b \cdot U$$

$$B_1 \frac{\partial T(z)}{\partial z} dz = B_2 dz \{ \theta(t) - T(z) \} - B_3 dz \{ T(z) - T_\infty(t) \} \quad (5)$$

Fazendo na Eq. (5):

$$B_4 = \frac{B_2}{B_1} \quad B_5 = \frac{B_3}{B_1}$$

Tem-se:

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z} = B_4 \theta(t) + B_5 T_\infty(t) - (B_4 + B_5) T(z)$$

Integrando, tem-se:

$$\ln B_4 \theta(t) + B_5 T_\infty(t) - (B_4 + B_5) T(z) = - (B_4 + B_5) z + \mathcal{C}$$

Em $z = 0$

$$\mathcal{C} = \ln B_4 \theta(t) + B_5 T_\infty(t) - (B_4 + B_5) T(0)$$

Substituindo \mathcal{C} :

$$\ln B_4 \theta(t) + B_5 T_\infty(t) - (B_4 + B_5) T(z) = - (B_4 + B_5) z +$$

$$\ln B_4 \theta(t) + B_5 T_\infty(t) - (B_4 + B_5) T(0)$$

Na forma exponencial:

$$\frac{B_4 \theta(t) + B_5 T_\infty(t) - (B_4 + B_5) T(z)}{B_4 \theta(t) + B_5 T_\infty(t) - (B_4 + B_5) T(0)} = e^{-(B_4 + B_5) z} \quad (6)$$

Fazendo na Eq. (6):

$$B_6 = B_4 + B_5$$

$$T(z) = \frac{B_4}{B_6} \theta(t) + \frac{B_5}{B_6} T_\infty(t) - \frac{B_4}{B_6} \theta(t) e^{-B_6 z} - \quad (7)$$

$$\frac{B_5}{B_6} T_\infty(t) e^{-B_6 z} + T(0) e^{-B_6 z}$$

Fazendo na Eq. (7):

$$B_7 = \frac{B_4}{B_6}$$

$$B_8 = \frac{B_5}{B_6}$$

Tem-se finalmente:

$$T(z) = B_7 \theta(t) (1 - e^{-B_6 z}) + B_8 T_{\infty}(t) (1 - e^{-B_6 z}) + T(0) e^{-B_6 z} \quad (8)$$

A Eq. (8) representa o perfil de temperatura do ar no coletor com respeito a um comprimento z

AVALIAÇÃO DOS COEFICIENTES MÉDIOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Para o coeficiente médio de transferência de calor por convecção do leito ao ar (\bar{h}_c), KNEULE(1) sugere que:

$$\bar{h}_c = u_z \cdot \rho \cdot C_p \cdot Pr^{-0,6667} j \quad (9)$$

Sendo:

u_z - velocidade do ar no leito

ρ - massa específica do ar

C_p - calor específico do ar

Pr - número de Prandtl

j - Fator de Colburn, sendo:

$$j = 1,95 Re^{-0,51} \quad \text{se } Re < 350$$

$$j = 1,064 Re^{-0,41} \quad \text{se } Re > 350$$

Com o número de Reynolds baseado no diâmetro hidráulico(1):

$$DH = \frac{\psi dk}{3f(1-\psi)}$$

onde: dk o diâmetro de uma esfera com volume de um corpo compacto e f o fator de forma (relação entre a superfície de um corpo compacto de uma forma qualquer sobre a superfície de uma esfera de mesmo volume). No caso do Grês do Pará, $f = 1,3$

Para o coeficiente médio de transferência de calor por convecção entre a superfície transparente e o ambiente, Isachenko⁽²⁾ sugere que para a velocidade do vento $u_{\infty} \neq 0$, convecção forçada:

$$\bar{Nu} = 0,037 Re_f^{0,8} Pr_f^{0,43} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}$$

Para a velocidade do vento $u_{\infty} = 0$, convecção natural Holman⁽³⁾ sugere:

$$U = 1,32 (T_w - T_{\infty})/L \quad \text{se} \quad 10^4 < Gr_f Pr_f < 10^9$$

$$U = 1,43 (T_w - T_{\infty})^{0,25} \quad \text{se} \quad Gr_f \cdot Pr_f > 10^9$$

Sendo U em $W/m^2 \cdot ^\circ C$

A queda de pressão no leito, pode ser avaliada por⁽¹⁾:

$$\Delta P = \frac{\rho u^2 L C_w}{2 g d k} \quad (10)$$

Sendo: Δp a queda de pressão em Kg/m^2 , U a velocidade média da corrente referida a totalidade da seção transversal suposta livre, ρ a densidade do ar, g a aceleração da gravidade, L o comprimento do leito, dk o diâmetro do corpo compacto de forma esférica e C_w o coeficiente de resistência dada em função do número de Reynolds

$$C_w = 94/Re^{0,16}$$

$$Re > 300$$

$$C_w = 2000/Re$$

$$Re < 10$$

$$Re = u \cdot dk / \nu$$

ν - viscosidade do ar

3. PROCEDIMENTO PARA AVALIAÇÃO DA TEMPERATURA DA SAÍDA DO AR, TEMPERATURA DO LEITO, QUEDA DE PRESSÃO E UMI DADE RELATIVA FINAL DO AR.

A partir das equações resultantes do balanço de energia no coletor dadas pelas Eqs. (3) e (7) com as respectivas condições de contorno, será possível avaliar as temperaturas

de entrada e saída do ar no coletor bem como a temperatura do leito.

O método de cálculo consiste em avaliar a temperatura de saída do ar no primeiro elemento dz do coletor e considerá-la como sendo a temperatura de entrada na próxima seção até que se estabeleça a temperatura na última seção do coletor. Para isto, um programa automatizado de cálculo via computador digital foi desenvolvido.

Será considerado que cada 15 min. a radiação solar e a temperatura ambiente permanecerão constantes.

Para calcular a eficiência térmica instantânea do sistema, será usada a relação:

$$\eta(t) = \frac{\dot{m}C_p(T(z) - T_m(t))}{b.z.Ig(t)}$$

As propriedades termofísicas do Grês do Pará foram obtidas no laboratório de Engenharia Mecânica da UFPa, como sendo: calor específico do Grês do Pará $0,198 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ e a densidade do Grês do Pará $2,539 \text{ g/cm}^3$.

A absorvidade do Grês do Pará, assim como a transmissividade da superfície transparente foram estimadas a partir de Sayigh⁽⁴⁾ como: absorvidade do Grês do Pará $\alpha = 0,60$ e a transmissividade da superfície transparente $\tau = 0,80$.

A queda de pressão dada pela Eq. (10) pode ser avaliada para vários números de Reynolds e relações entre comprimento de coletor (z) e altura de camada (y) de Grês concomitantemente com as equações de balanço de energia no coletor-armazenador.

A umidade relativa do ar será calculada pela Eq. (11) desenvolvida a partir de Van Wylen⁽⁵⁾ na forma:

$$\phi_2 = w_2 P_2 / P_{s_2}(w_2 + 0,622) \quad (11)$$

Sendo: ϕ_2 umidade relativa final do ar, P_{s_2} pressão de saturação do vapor d'água a temperatura $T(z)$ na saída do coletor, P_2 a pressão total necessária na saída do coletor e w_2 a umidade absoluta final do ar: Como no processo a umidade

absoluta permanece inalterada, logo:

$$w_1 = w_2 = 0,622 \cdot \phi_1 \cdot P_{s1} / (P_1 - \phi_1 P_{s1})$$

P_{s1} a pressão de saturação do vapor d'água avaliado a temperatura de entrada do coletor $T(0) = T_{\infty}(t)$, ϕ_1 a umidade relativa inicial do ar na entrada do coletor, considerada como sendo a umidade relativa da região no dia considerado e P_1 a pressão total na entrada do coletor calculada por:

$$P_1 = P_2 + \Delta P$$

com ΔP avaliado através da Eq. (10).

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foram realizados uma corrida de medidas utilizando o sistema coletor protótipo, correspondente ao dia 29.06.81. As medidas a cada 15 minutos a partir das 9:30 horas de manhã compreenderam: Intensidade de radiação solar global numa superfície horizontal (durante um período de 8 horas), temperatura ambiente, temperatura de entrada e saída do fluido de trabalho, umidade relativa inicial e final do fluido de trabalho, vazão do fluido de trabalho (controlada em 480 l/min) e velocidade do vento.

A Fig. (2) mostra a curva de radiação solar global medida numa superfície horizontal. Nas Figs. (3) e (4) são mostradas as temperaturas do ar e do leito durante a corrida de medidas. A Fig. (5) mostra a temperatura final do ar na saída do coletor medida e calculada. Observa-se a boa concordância entre os valores medidos e calculados. A Fig. (6) mostra as umidades iniciais e finais medidas no coletor.

Na Fig. (7) é mostrado a eficiência instantânea do coletor medida e calculada onde se nota a boa concordância dos resultados obtidos neste trabalho.

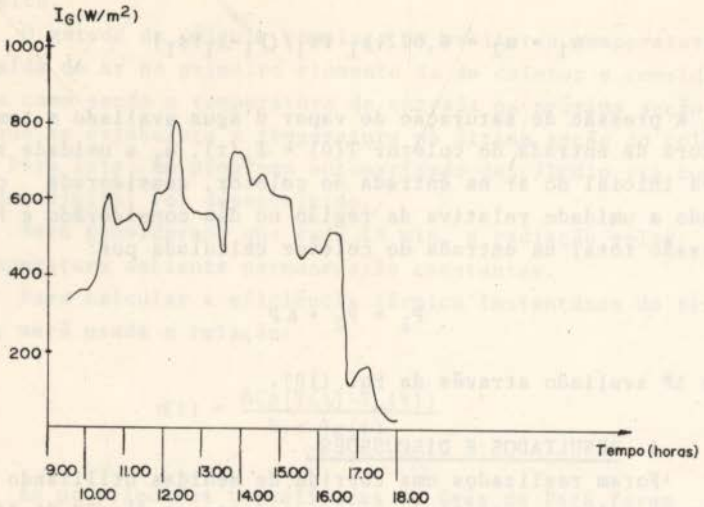


FIGURA (2) - RADIAÇÃO SOLAR GLOBAL (MEDIDA)

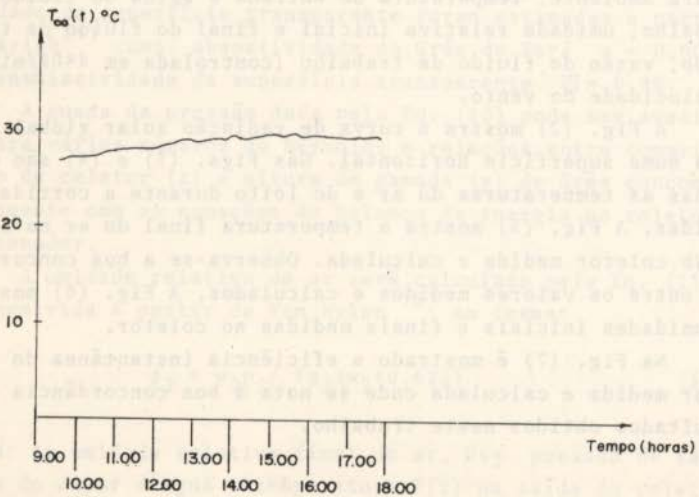


FIGURA (3) - TEMPERATURA AMBIENTE (MEDIDA)

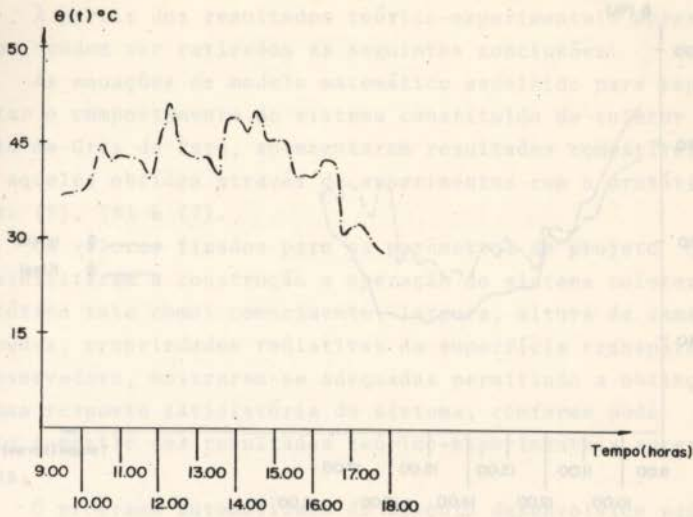


FIGURA (4) - TEMPERATURA DO LEITO (CALCULADA)

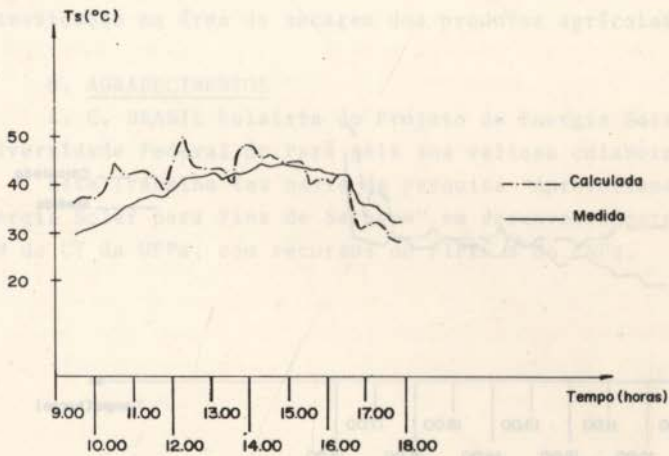


FIGURA (5) - TEMPERATURA DE SAÍDA DO AR (MEDIDA E CALCULADA)

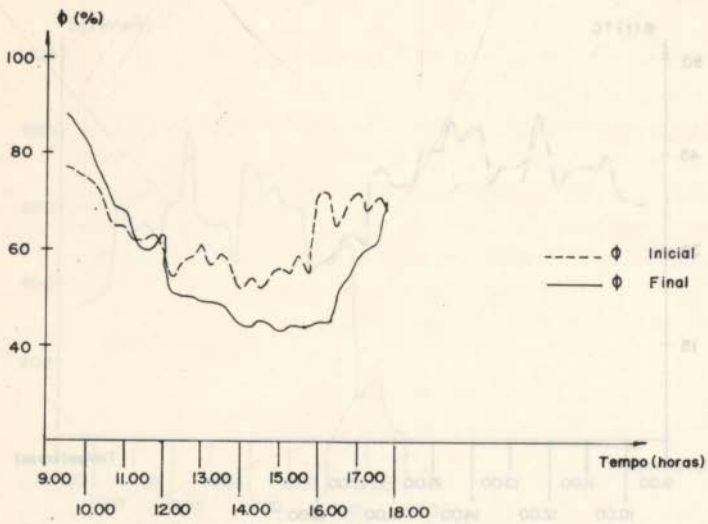


FIGURA (6) - UMIDADE RELATIVA INICIAL E FINAL DO AR (MEDIDA)

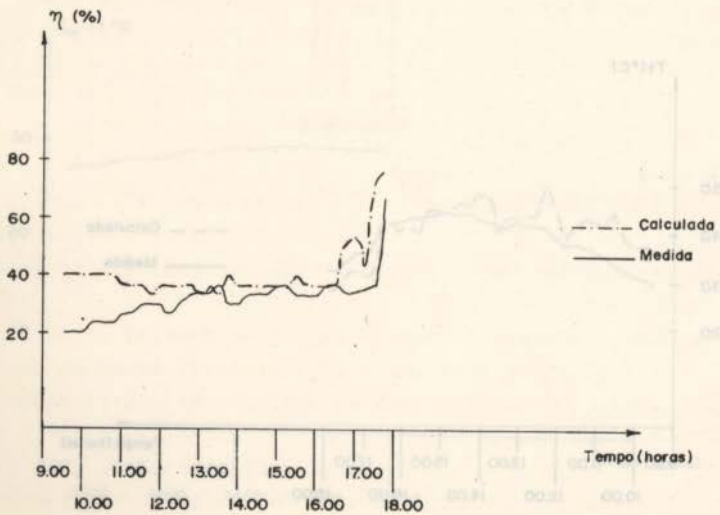


FIGURA (7) - EFICIÊNCIA TÉRMICA INSTANTÂNEA (MEDIDA E CALCULADA)

5 - CONCLUSÕES

À partir dos resultados teórico-experimentais apresentados, podem ser retirados as seguintes conclusões:

As equações de modelo matemático escolhido para representar o comportamento do sistema constituído de coletor com leito de Grês do Pará, apresentaram resultados compatíveis com aqueles obtidos através de experimentos com o protótipo. Figs. (5), (6) e (7).

Os valores fixados para os parâmetros de projeto que possibilitaram a construção e operação do sistema coletor protótipo tais como: comprimento, largura, altura da camada de pedra, propriedades radiativas da superfície transparente e absorvedora, mostraram-se adequadas permitindo a obtenção de uma resposta satisfatória do sistema, conforme pode ser visto a partir dos resultados teórico-experimentais apresentados.

O programa automatizado de cálculo desenvolvido pode ser aplicado para o dimensionamento e a previsão do comportamento de maiores unidades daquela utilizada.

Em termos construtivos, pode-se dizer que a elaboração do sistema coletor protótipo foi bastante simples podendo ser reproduzido em escalas maiores para atender diferentes necessidades na área de secagem dos produtos agrícolas.

6. AGRADECIMENTOS

A. C. BRASIL bolsista do Projeto de Energia Solar da Universidade Federal do Pará pela sua valiosa colaboração.

Este Trabalho faz parte da pesquisa "Aproveitamento de Energia Solar para Fins de Secagem" em desenvolvimento, no DEM do CT da UFPa, com recursos do FIEPEC e do CNPq.

7. BIBLIOGRAFIA

- (1) KNEULE, F. - "EL SECADO", Ediciones Urmo, 1966
- (2) ISACHENKO, V. et al - "HEAT TRANSFER", Mir Publishers, 1969
- (3) HOLMAN, J.P. - "HEAT TRANSFER", McGraw-Hill Book Company, 1972.
- (4) SAYGH, A.A.M. - "SOLAR ENERGY APPLICATION IN BUILDINGS", Academic Press, 1972.
- (5) VAN WYLEN, G.J. e SONTAG, R.E. - "FUNDAMENTOS DA TERMODINÂMICA CLÁSSICA, Editora Edgard Blucher Ltda, 1973.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-2

P. P. 15 - 25

PUC/RJ

A EFICIÊNCIA TÉRMICA DE COLETORES PLANOS DE
ENERGIA SOLAR

Benedito Dias Baptista Filho
Engenheiro, Pesquisador
Centro de Engenharia Nuclear
Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares
São Paulo - SP - Brasil

SUMÁRIO

Foram desenvolvidos alguns modelos numéricos para simular a operação dos principais tipos de coletores planos de energia solar. É discutido brevemente um dos modelos elaborados. É analisada a variação da eficiência térmica instantânea de alguns coletores em função de alguns parâmetros de projeto cuja análise experimental é inviável. Dados experimentais disponíveis de um coletor foram previstos com alta precisão por um dos modelos. São apresentados alguns resultados que permitem algum conhecimento necessário para a avaliação da qualidade de diferentes projetos de coletores planos.

SUMMARY

Several models have been developed to simulate the thermal performance of the main types of flat-plate solar collectors. An elaborate model is briefly discussed. The variation of the instantaneous thermal efficiency is investigated as a function of several design parameters which experimental study is economically not feasible. Calculated results present a good agreement with available experimental data. The results also provide a guidance to evaluate the quality of the different types of design of plate collectors.

1. Introdução

A utilização de coletores planos de energia solar, para qualquer que seja sua aplicação, pode propiciar uma substancial economia de óleo combustível, gás ou eletricidade, dependendo porém da qualidade e desempenho do projeto considerado. Por isso, uma série de cuidados devem ser tomados na escolha de um coletor solar, principalmente no que se refere à "qualidade do projeto", o que vai além da qualidade dos materiais utilizados na sua confecção .

Os coletores solares, já sujeitos à concorrência de mercado no Brasil, requerem de imediato uma orientação técnica à comunidade através de dados que caracterizem o seu desempenho. Os principais grupos de pesquisa em energia no Brasil têm se preocupado com o estabelecimento de normas e padrões de testes de bancada dos coletores planos, tendo sido realizados diversos encontros com a finalidade de se sugerir uma política normativa desses equipamentos. Os testes de coletores porém, envolvem um considerável dispêndio de tempo, inviabilizando qualquer tentativa de se correlacionar o desempenho com todos os parâmetros de um dado projeto. Resta assim uma lacuna que somente pode ser preenchida com a utilização de modelos numéricos como forma de acoplamento de correlações gerais que representem todos os mecanismos de conversão e transferência de energia existentes em um coletor solar .

O objetivo deste trabalho é a exposição resumida de um modelo teórico para a simulação de um coletor plano e, a apresentação de alguns resultados que correlacionam o desempenho do coletor com alguns parâmetros de projeto cuja análise experimental é inviável [1,2] .

2. Considerações Teóricas

Como consideração inicial vamos introduzir a denominada eficiência térmica instantânea de um coletor (η), definida pela razão entre o calor útil retirado pelo fluido de trabalho (Q_u) e a potência luminosa incidente (W_1) .

$$\eta = Q_u / W_1 \quad (1)$$

Pode-se provar que essa eficiência é uma função do projeto do coletor, da diferença de temperaturas entre o fluido (T_f) e ambiente (T_{amb}) e da intensidade da radiação solar total no plano do cole-

tor (I) [3]. Assim, foi padronizado um diagrama de desempenho que correlaciona a eficiência com uma diferença de temperaturas normalizada em relação à radiação solar, definida na forma da Equação (2).

$$T^* = (T_f - T_{amb}) / I \quad (2)$$

Esse diagrama de desempenho é construído através da avaliação experimental de uma considerável amostragem de pares (η, T^*) , obtidos sob condições de estado estacionário [4], o que requer um grande dispêndio de tempo e trabalho.

Nesta seção do trabalho, vamos exemplificar a elaboração de um modelo teórico para a avaliação numérica do diagrama de desempenho de um coletor, mostrando as equações representativas de seu funcionamento. Para tanto, vamos analisar o mecanismo de operação de um coletor, como mostra a Figura 1.

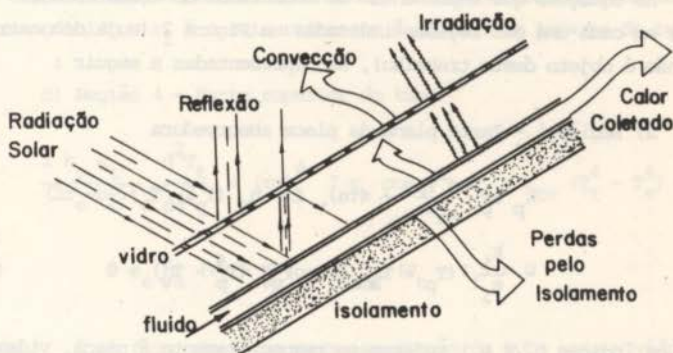


Figura 1 - Coletor Solar - Mecanismo de funcionamento.

Podemos notar nessa Figura que a energia útil coletada é a diferença entre a energia solar incidente e as parcelas de reflexão, perdas por irradiação, por convecção do ar aprisionado e ar atmosférico e por condução através do isolamento inferior. Com essas considerações podemos elaborar um modelo geral, baseado em balanços térmicos de estado estacionário em cada região de um trecho representativo de um coletor como por exemplo o ilustrado na Figura 2.

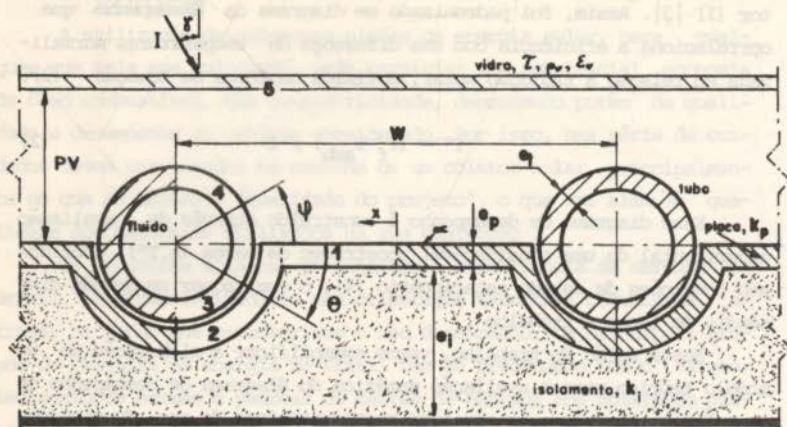


Figura 2 - Coletor Solar - Modelo Geometria I

As equações que representam os mecanismos de transferência de calor em cada uma das regiões indicadas na Figura 2 (cuja demonstração não é objeto deste trabalho), são apresentadas a seguir :

a) Região 1 - Parte plana da placa absorvedora

$$\begin{aligned}
 & k_p e_p \frac{d^2 T_p}{dx^2} + (\tau\alpha)_\gamma I - h_a (T_p - T_v) - \\
 & - \frac{k_i}{e_i} (T_p - T_{amb}) - \sigma F_{pv} (T_p^4 - T_v^4) = 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

onde os índices p, v e i referem-se respectivamente à placa, vidro e isolamento; T é a temperatura absoluta, γ é o ângulo de incidência solar; k a condutividade térmica; e a espessura; $(\tau\alpha)$ o produto da absorvância da placa pela transparência do vidro efetivos [3], h_a o coeficiente de transferência de calor por convecção natural do ar aprisionado [5]; σ a constante de Stefan-Boltzman e F_{pv} um fator de forma para irradiação da placa para o vidro. Os termos definidos da esquerda para a direita representam respectivamente a condução de calor na placa; a conversão e absorção da luz; a transferência de calor por convecção, por condução no isolamento e por irradiação.

b) Região 2 - Parte curva da placa (acoplamento)

$$\frac{2}{(2r_e + e_p)} k_p e_p \frac{d^2 T_p}{d\theta^2} - \frac{k_i}{e_i} (r_e + e_p) (T_p - T_{amb}) - h_g r_e (T_p - T_t) = 0 \quad (4)$$

onde r_e é o raio externo do tubo; h_g a condutância de contato entre o tubo e a placa [6] e T_t a temperatura absoluta na parede do tubo.

c) Região 3 - Parte inferior do tubo (contato com a placa)

$$\frac{2 k_t e_t}{(2r_e - e_t)} \frac{d^2 T_t}{d\theta^2} + h_g r_e (T_p - T_t) - h_f r_i (T_t - T_f) = 0 \quad (5)$$

onde os índices t e f referem-se respectivamente ao tubo e fluido, h_f é o coeficiente de transferência de calor por convecção do tubo para o fluido e r_i é o raio referente à superfície interna do tubo.

d) Região 4 - Parte superior do tubo

$$\frac{2 k_t e_t}{(2r_e - e_t)} \frac{d^2 T_t}{d\phi^2} + (\tau\alpha)_v I r_e \cos \phi - r_e \sigma F_{tv} (T_t^4 - T_v^4) - r_e h_a (T_t - T_v) - r_i h_f (T_t - T_f) = 0 \quad (6)$$

onde F_{tv} é um fator de forma para irradiação do tubo para o vidro.

e) Região 5 - Cobertura de vidro (caso de uma cobertura)

$$\alpha_v I + \sigma F_{pv} (T_p^4 - T_v^4) + h_a (T_{p,t} - T_v) - R \epsilon_v \frac{(1 - \cos\beta)}{2} - h_v (T_v - T_{amb}) = 0 \quad (7)$$

onde R é o valor líquido da energia irradiada para o céu por uma superfície horizontal; ϵ_v é a emissividade do vidro; β o ângulo de inclinação do coletor em relação ao plano horizontal e h_v o coeficiente

de transferência de calor por convecção do ar atmosférico [3].

Essas equações foram transformadas em um sistema de equações algébricas não-lineares pelo método das diferenças finitas. O modelo foi discretizado e as equações de diferenças escritas para todas as células do modelo em uma forma linearizada. A solução do sistema resultante, segundo um procedimento iterativo, fornece a distribuição das temperaturas e portanto do fluxo de calor para o fluido de trabalho para dadas condições de temperatura do fluido e ambiente e intensidade da radiação solar, determinando assim a eficiência térmica instantânea do coletor. Analogamente a este exemplo, foram elaborados outros modelos para outros tipos de coletores planos, a serem apresentados na íntegra em uma publicação futura.

No capítulo seguinte vamos comentar alguns resultados obtidos que podem fornecer importantes informações sobre a influência de alguns parâmetros de projeto no desempenho dos coletores planos.

3. Resultados

Inicialmente vamos comparar os diagramas de eficiência de um coletor da IEA ("International Energy Agency") obtidos experimentalmente na KFA ("Kernforschungsanlage Jülich GmbH", Alemanha) [7] com os resultados obtidos numericamente através de um dos modelos desenvolvidos (Figura 3).

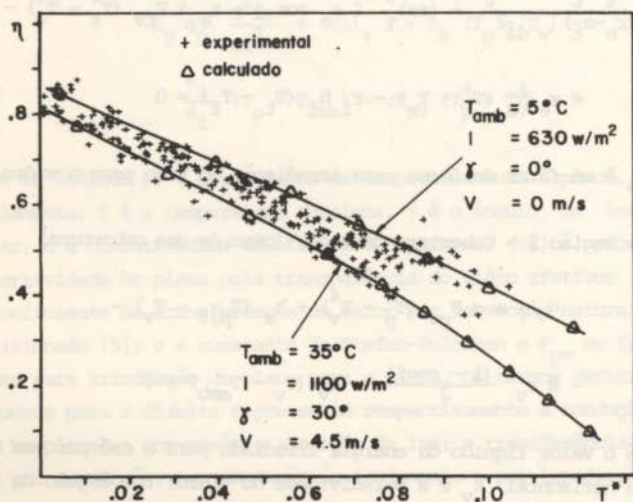


Figura 3 - Comparação com resultados experimentais.

Nota-se o perfeito ajuste dos resultados teóricos com os dados experimentais. Os desvios estão dentro dos erros experimentais de medida. A seguir vamos resumir alguns resultados obtidos com a variação dos principais parâmetros de projeto de alguns coletores de geometria análoga à apresentada na Figura 2 .

Na Figura 4 observamos a variação da eficiência térmica de um coletor do tipo I com a relação espaçamento / diâmetro dos tubos .

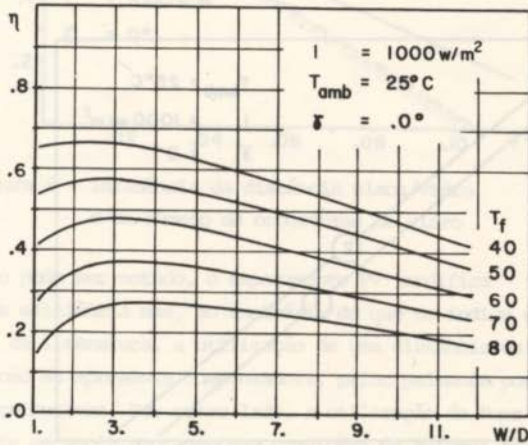


Figura 4 - Diagrama η vs (W/D) .

Deve-se notar o aumento da eficiência com a relação W/D até ser compensado o efeito de menor absorção na curvatura do tubo a partir daonde se inicia o declínio provocado pelo aumento da temperatura da placa e conseqüente aumento das perdas para o ambiente. Nota-se também a acentuação desse efeito com o aumento da temperatura do fluido, principalmente por ter sido considerado um material de relativamente baixa condutividade térmica (aço) como exemplo ilustrativo. É evidente que a utilização de cobre ou alumínio na confecção das placas e tubos é mais vantajosa, principalmente no que refere à durabilidade, mas também, uma simples comparação das propriedades desses metais conduz à mesma escolha ($k_{\text{aço}} \approx 40\text{-}50 \text{ w/m.k}$; $k_{\text{al}} \approx 200 \text{ w/m.k}$ e $k_{\text{cu}} \approx 220\text{-}300 \text{ w/m.k}$). Fora o espaçamento entre tubos e a condutividade térmica dos metais, um outro fator responsável pelo nível de temperatura da placa é a resistência no acoplamento da placa com o tubo.

Este fator dependente de considerações de materiais, pressão de contato e grau de oxidação [6], pode ser analisado na comparação entre um coletor de concepção idêntica à da Figura 2 com um coletor de mesmos materiais e espaçamento entre tubos mas considerando-se um contato perfeito (tubo perfeitamente soldado à placa). A Figura 5 mostra as curvas de eficiência para um coletor aonde foi considerada uma resistência de contato (curva 1) e para um coletor com tubo soldado à placa (curva 2).

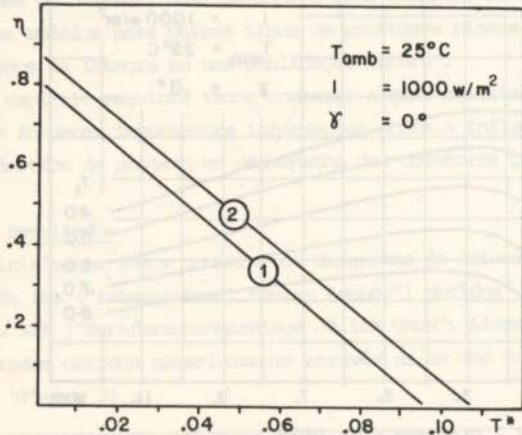


Figura 5 - Influência do acoplamento placa/tubo .

Nota-se pelos diagramas da Figura 5 a nítida vantagem da utilização de um bom acoplamento da placa ao tubo. Convém destacar que o modelo aqui representado pela Geometria I refere-se a um tipo de ajuste placa/tubo de concepção ultrapassada mas ainda muito utilizada em todo o mundo. Melhores eficiências são atingidas com o uso de placas extrudadas ("roll-bond") aonde placa e tubo formam um único conjunto. Em seguida vamos analisar alguns dos fatores ligados à convecção natural do ar aprisionado entre a placa e o vidro. Sabe-se que o coeficiente de convecção (h_a das equações 3, 6 e 7) é uma função da inclinação do coletor, da diferença de temperaturas entre a placa e a cobertura de vidro e da distância placa/vidro (PV) [5]. Uma vez que a inclinação do coletor é determinada por considerações geográficas, vamos analisar os resultados obtidos com a variação

da distância PV e com a utilização de duas placas de vidro (Figura 6).

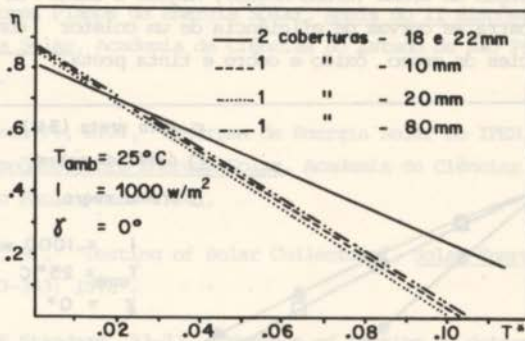


Figura 6 - Influência da distância placa/vidro e do número de coberturas de vidro .

Como pode ser notado, o espaçamento PV modifica ligeiramente a curva de eficiência mas, ao contrário do que se indica em alguns trabalhos da literatura, a utilização de uma distância da ordem de 7 a 8 cm não se apresenta compensadora, principalmente por considerações construtivas. Por outro lado, a utilização de duas coberturas resulta em ampla vantagem nas condições de maiores temperaturas .

Considerando-se agora as perdas por condução no isolamento inferior, convém relatar que em todos os exemplos estudados notamos uma alta influência na declividade dos diagramas η vs T . Notamos também que essa influência se torna quase desprezível à partir de condutâncias superiores a $1. w/m^2.k$ (4-5 cm de isolamento de fibras), quando as outras perdas são muito maiores. Conclui-se ser muito importante o estudo detalhado do tipo e condutância econômica do isolamento uma vez que ele pode representar uma considerável parcela no custo e desempenho dos coletores .

Finalmente, vamos considerar as perdas por irradiação que, representam uma das maiores limitações na obtenção de altas temperaturas em coletores planos. As tintas pretas normalmente utilizadas possuem uma alta absortividade ($\alpha \approx 93-95\%$) porém, possuem também uma alta emissividade ($\epsilon \approx 92\%$). Por outro lado, as denominadas superfícies seletivas apesar de possuírem uma boa absortividade ($\alpha \approx 90\%$) emitem muito pouco na faixa de luz infravermelha ($\epsilon \approx 8-20\%$) . Essas

superfícies têm sido muito investigadas [8] e muitas considerações foram feitas principalmente em relação às superfícies obtidas pela eletrodeposição de cromo (cromo-negro), níquel e óxido de cobre. A Figura 7 mostra as curvas de eficiência de um coletor considerando-se superfícies de cromo, óxido e cobre e tinta preta.

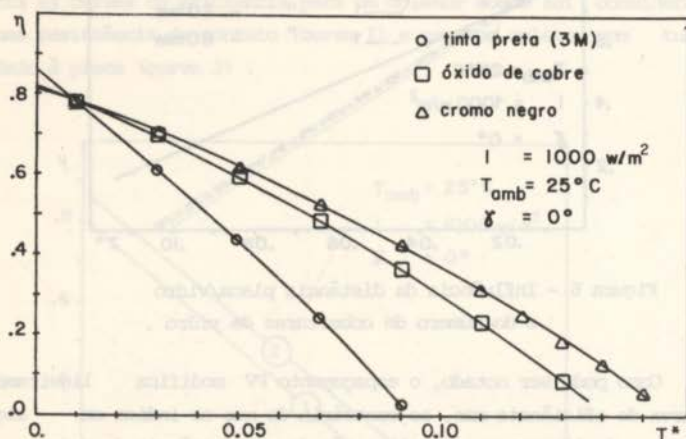


Figura 7 - Comparação entre superfícies absorvedoras.

Nota-se a nítida vantagem das superfícies seletivas, principalmente o cromo-negro que além disso tem mostrado uma maior resistência às condições de alta umidade que as demais superfícies.

4. Conclusões

Os modelos numéricos desenvolvidos permitem a avaliação da influência de diversos parâmetros de projeto na eficiência térmica instantânea dos coletores planos de energia solar o que em muitos casos é inviável de se obter experimentalmente.

Um dos modelos reproduziu com alta precisão as curvas de desempenho de um coletor testado experimentalmente. Como os modelos desenvolvidos são baseados em correlações empíricas gerais e os métodos numéricos empregados permitem uma alta precisão na solução das equações de condução, pode-se esperar a mesma ordem de precisão dos outros modelos.

Os resultados aqui representados já permitem um certo grau de conhecimento para a avaliação do projeto de um coletor solar.

REFERÊNCIAS

- [1] Baptista FQ, B.D., Considerações sobre a eficiência Térmica de Coletores Planos de Energia Solar, Anais do II Simpósio sobre Energia Solar, Academia de Ciências do Estado de São Paulo, out. 1980 .
- [2] Baptista FQ, B.D., Programa de Energia Solar no IPEN, Anais do II Simpósio sobre Energia Solar, Academia de Ciências do Estado de São Paulo, out. 1980 .
- [3] Tabor, H., "Testing of Solar Collectors", Solar Energy, vol. 20 pp 293-303; 1978 .
- [4] ASHRAE Standard 93-77, "Methods of Testing to determine the Thermal Performance of Solar Collectors", ASHRAE, 345 East 47 th Street, New York, N.Y. 10017, 1977 .
- [5] Hollands, K.G.T.; Unny, T.E.; Raithby, G.D. and Konicek, L. "Free Convective Heat Transfer Across Inclined Air Layers", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, pp 189-193, May 1976 .
- [6] Boeschoten, F. and Van Der Held, E.F.M., "The Thermal Conductance of Contacts between Aluminium and other Metals", Physica, vol. XXIII, pp 37-44; 1957 .
- [7] Talarek, H.D., "Testing of Liquid-Heating Flat-Plate Collectors Based on Standard Procedures", KFA - Interner Bericht, KFA-IKP-IB - 4/79, Jülich, Dez. 1979 .
- [8] Willrath, H. and Gammon, R.B. "The Measurement of Optical Properties of Selective Surfaces using a Solar Calorimeter" Solar Energy, Vol. 21, pp 193-199; 1978 .



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-3

P. P. 27 - 37

PUC/RJ

BENNETT CORRELATION FOR ANALYZING AVAILABLE
DATA IN BRAZIL - VALIDATION AND ANALYSIS OF MODEL

Jair Arone Maués

Mechanical Engineering Student - PUC/RJ

Alcir de Faro Orlando

Associate Professor - Mech.Eng.Dept. - PUC/RJ

Yomar Morada Souza

Chief Meteorologist - INMET

SUMÁRIO

A correlação de Bennett é analisada para dados do Brasil, com o intuito de se utilizar os dados disponíveis de horas de insolação para mapeamento do potencial de energia solar. A incerteza da previsão da radiação horizontal total, a partir dos dados de horas de insolação, é estimada em $\pm 10-22\%$, conforme o mês considerado. Para a radiação total anual, a incerteza é estimada em $\pm 10\%$. Recomenda-se portanto esta correlação, na ausência de medidas diretas, para obtenção de dados de insolação, constituindo-se num elemento valioso de projeto de sistemas que utilizam energia solar.

SUMMARY

Bennett correlation is analyzed for data in Brazil and its utilization is recommended for mapping the potential of solar energy, from sunshine hour data. The uncertainty (95% confidence level) of total horizontal radiation prediction is estimated in the range of $\pm 10-22\%$, depending on the considered month, and $\pm 10\%$ for total annual radiation. The data thus obtained from sunshine hours is recommended as an important parameter for designing solar energy systems.

1. Introduction

The long term performance of solar water heating systems can be estimated by means of the monthly average daily solar energy incident onto the collector plane and the monthly average daily ambient temperature.

Records of both monthly average daily minimum and maximum temperatures have been available from INMET (Instituto Nacional de Meteorologia) for a wide range of years (more than fifty years) and are quite accurate.

Sunshine hours have been available from INMET for a wide range of years and a great number of Brazilian cities. They have been gathered, chiefly, by means of Campbell Stokes type of pyranometer which are very simple and foolproof devices, seldomly requiring recalibration. Thus, records for remote cities, lacking skilled operators for their acquisition, have been available in Brazil for a long time, which could be very useful in determining the potential of solar energy utilization.

Their uncertainty, however, result from the interpretation of the instrument tapes, mainly when deciding whether the tape has been burned or not by a low intensity solar energy radiation.

Records of solar energy radiation on a horizontal surface became widespread only recently, and only for a small number of cities. Old data are not reliable mainly because of lack of calibration of the instruments (sometimes 10 years). The analysis of the data, for example shows in some cases a continuous degradation of the calibration curve of the pyranometers by a 40% factor.

Only recently, however, data became more reliable, when INMET started the operation of a solar energy radiation network, with collaboration of FINEP (Financiadora de Estudos e Projetos).

Long term averages of solar energy radiation are not available for design purposes and only short term averages for a limited number of cities are available.

Thus, if a way can be found to predict accurately the solar energy intensity from sunshine hours, a large amount of data could be immediately available for design purposes

of solar energy systems.

This paper deals with the analysis and validity of a model that correlates the sunshine hours to the intensity of solar energy radiation, incident onto a horizontal plane.

2. The Bennett Correlation for Sunshine Hours

Correlations involving sunshine hours and radiation intensity have been available for a number of years.

Basically, the Angstrom type equation, which is used most of the time, consists of a linear relationship between the monthly average daily horizontal radiation and the monthly average daily sunshine hours.

$$\frac{\bar{H}}{H_0} = a + b\left(\frac{n}{N}\right) \quad (1)$$

where a and b can be determined for each locality, n the sunshine hours, N the length of the day, and \bar{H} the horizontal radiation.

The use of such correlations in Brazil has been done by several authors like Cervellini et al [1], Villa Nova et al [2]. The main problem related to the use of a particular correlation is that a previous study of the correlation between sunshine hours and intensity of radiation must have been done, to determine constants a and b , if a future use of the correlation is desired. Although very precise correlations can be determined, such as in [3], which even consider a monthly variation of the constants a and b with each city, there is little value in developing particular correlations if the radiation data for most of the cities in Brazil are not available.

Bennett [4] succeeded in developing a universal correlation which additionally includes the local altitude h as a parameter. The coefficients were developed from data of 41 cities in the United States and a set of three coefficients is available for each month of the year.

$$\frac{\bar{H}}{H_0} = a + b\left(\frac{n}{N}\right) + ch \quad (2)$$

The use of the Bennett correlation for the Southern

Hemisphere requires that the path of the solar radiation through the atmosphere be the same for the correspondent months between the two hemispheres. This means that a shift of six months must be imposed, that is, the developed coefficients for the month of January in the northern hemisphere should be used for the month of July in the southern hemisphere.

Table 1 presents the coefficients of the Bennett correlation for the Southern Hemisphere.

Table 1. Coefficients of Bennett Correlation for the Southern Hemisphere

Month	a	b	$c \cdot 10^4$ (m^{-1})
January	0.264	0.4386	0.396
February	0.291	0.3768	0.576
March	0.260	0.4242	0.527
April	0.235	0.4744	0.448
May	0.207	0.4816	0.689
June	0.237	0.4343	0.671
July	0.225	0.4812	0.649
August	0.221	0.5026	0.591
September	0.221	0.5142	0.439
October	0.188	0.5574	0.466
November	0.197	0.5423	0.384
December	0.235	0.4780	0.405

H_o is the extraterrestrial solar radiation incident onto a horizontal surface over a period of one day. For the purpose of this study, it is calculated at the 15th day of each month, and is expressed in kWh/m² day according to the following expression (5):

$$H_o = \frac{24}{\pi} I_{sc} \left\{ \left[1 + 0.033 \cdot \cos\left(\frac{2\pi d}{365}\right) \right] \cdot [\cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(w_s) + w_s \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\delta)] \right\} \quad (3)$$

where all angles are expressed in radians and

d = is the day of the year (from January 1st)

ϕ = latitude (south, negative)

I_{sc} = solar constant = 1.353 kW/m²

w_s is the sunset hour angle (in degrees)

$$w_s = \cos^{-1}\{-\tan(\phi) \cdot \tan(\delta)\} \quad (4)$$

N is the length of the day (in hours)

$$N = \frac{2}{15} w_s \quad (w_s \text{ in degrees}) \quad (5)$$

h is the local altitude (m)

δ is the declination (in degrees, argument in degrees)

$$\delta = 23.45 \sin \left\{ \frac{360}{365} (d + 284) \right\} \quad (6)$$

For the present analysis, the declination is always calculated at the 15th day of the month, Table 2.

Bennett through his curve fitting between sunshine hours and radiation intensity for 41 USA stations obtained a reliable correlation. Data ranging from 1950 to 1962, latitude 25°48'N to 48°11'N, altitude from 0 to 2066 m.

Nunes et al [5] pioneered the utilization of Bennett correlation to Brazil, although with a limited amount of data testing. The Bennett expressions were correctly adapted to Southern Hemisphere and two stations were used to check the validity.

Table 2. Declination at the 15th Day of Each Month

Month	d	ϕ (degrees)
January	15	-21.27
February	46	-13.29
March	74	- 2.82
April	105	9.41
May	135	18.79
June	166	25.31
July	196	21.52
August	227	13.78
September	258	2.22
October	288	- 9.60
November	319	-19.15
December	349	-23.34

of the correlation: Piracicaba-SP (22°43'S) and Cabrobô-PE

(08°31'S).

The monthly average daily radiation on a horizontal surface was calculated and compared to the available data.

Piracicaba: maximum monthly deviation +4,9%

yearly deviation +2,5%

Cabrobô : maximum monthly deviation -6,7%

yearly deviation +3,3%

Thus they concluded that the correlation was good enough for the purpose of predicting the horizontal radiation and Bennett correlation was used to estimate monthly average daily radiation from up to 10 year sample of sunshine data for 187 stations in Brazil.

Centro de Tecnologia Promon [6] analyzed the validity of the correlation for about 97 stations, with the data reduced and analyzed for consistency by Villa Nova and Salati [2]. It is believed that errors could result from the lack of calibration of the pyranometers over a period of years. Also, because the data for many stations were missing only 74 stations could be included in this analysis. Additional errors could result from the integration procedure done individually for each day from records of instantaneous solar radiation. The following stations were analyzed ACRE (Cruzeiro do Sul, Rio Branco, Macapã), BAHIA (Bom Jesus da Lapa, Caravelas, Irecê, Salvador), CEARÁ (Barbalho, Fortaleza, Jaguaruana, Quixeramobim, Sobral), DF (Brasília), MARANHÃO (Barra da Corda, Carolina, São Luiz), MATO GROSSO (Cuiabá, Ponta Porã), MINAS GERAIS (Barbacena, Belo Horizonte), Capinópolis, Caratinga, Diamantina, Lavras, Machado, Montes Claros, Patos, Sete Lagoas, Uberaba, Viçosa), PARÁ (Belém, Belterra, Marabá, São Félix do Xingu), PARAÍBA (Areia, Campina Grande, João Pessoa, Monteiro) PARANÁ (Castro, Curitiba, Foz do Iguaçu, Guaira, Irati, Palmas, Ponta Grossa), PERNAMBUCO (Curado, Petrolina, Surubim), PIAUÍ (Floriano, Morro dos Cavalos), RIO GRANDE DO NORTE (Cruzeta, Macau), RIO GRANDE DO SUL (Bagé, Dom Petrolini, Encruzilhada do Sul, Farroupilha, Ijuí, Julio de Castilhos, Osório-Maquiné, Uruguaiana, Veranópolis), SÃO PAULO (Ataliba Leonel, Campinas, Colina, Mococa, Monte Alegre do Sul, Panquera Açu, Pindamonhagaba, Pindorama, Piracicaba, Ribeirão Preto,

A careful analysis showed that the data from 3 states, namely, ACRE, MINAS GERAIS and PARANÁ, presented a wide discrepancy, always to the lower side of the model, indicating a degradation of the calibration curve. They were taken off the list and the remaining stations were analyzed, giving the following result.

Table 3. Analysis of Vilanova and Salati (2) Data

Month	Sample (N)	Standard Deviation (S) (kWh/m ² /day)	Percent Standard Deviation (S _p) (%)
January	55	0.69	13
February	54	0.64	13
March	54	0.60	12
April	53	0.57	14
May	54	0.46	12
June	53	0.47	12
July	54	0.59	12
August	53	0.61	13
September	56	0.66	13
October	53	0.55	10
November	54	0.63	11
December	54	0.58	11
Yearly		0.51	10

The standard deviation (S) is calculated as

$$S = \left[\frac{1}{N-1} \sum (x_i - x_{\text{mod}})^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

The percent standard deviation is calculated as

$$S_p = \left[\frac{1}{N-1} \sum \left(\frac{x_i - x_{\text{mod}}}{x_{\text{mod}}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (8)$$

where x_i - experimental data
 x_{mod} - Bennett correlation
 N - number data points

Using Bennett correlation, Centro de Tecnologia Promon estimated the monthly average daily and yearly radiation for 97 stations, utilizing up to 46 year samples.

This paper deals with examining carefully the discrepancies by utilizing data taken at 19 standard stations that INMET is running for the national network.

3. Validation of Bennett Correlation

Bennett correlation has been verified with reliable data taken at 19 standard stations, that INMET is running, for the years of 1978 and 1979: Manaus, Belém, São Luiz, Carolina, Floriano, Fortaleza, Petrolina, Salvador, Bom Jesus da Lapa, Caravelas, Brasília, Cuiabá, Campo Grande, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo, Curitiba, Foz do Iguaçu, Porto Alegre.

The analysis of the data showed that Campo Grande data were not reliable and taken off the list.

Table 4. Analysis of 19 Standard Stations

Month	Sample	Standard Deviation (kWh/m ² day)	Percent Standard Deviation
January	23	0.42	8
February	25	0.43	8
March	26	0.41	8
April	24	0.25	6
May	29	0.38	10
June	28	0.39	11
July	28	0.30	8
August	33	0.27	6
September	32	0.27	6
October	31	0.27	5
November	32	0.43	9
December	24	0.31	6
Yearly		0.25	5

It can be seen that the scatter in the data is twice as much lower than earlier data. It is believed that this is due to a better calibration control of the instruments and to an automatic integration of the instantaneous data, which even reduces the required labor.

A careful analysis of data showed that the scatter can be further reduced if some stations are eliminated from the sample, because most of them present a low deviation with respect to Bennett correlation. Thus, further improvement on the data taking procedure will include more often checks on both calibration and integration procedures.

Because of the fact that the Bennett correlation is supposed to be an universal correlation, there is no

assurance, a priori, that the local data will fit better the correlation or not, thus, an uncertainty analysis of the data has to be based on the overall behavior of all stations as a whole, although eventually, the scatter can be much lower.

The above Tables show that both standard deviation and percent standard deviation have been calculated. They provide approximately the same percent uncertainty for the data, with slightly better results for the standard deviation. When the radiation level is very low, however, the percent standard deviation will better fit the data.

It is also shown that the scatter of the data on a yearly basis is much lower than on a monthly basis. This fact raised the question of the scatter on a daily basis. Table 5 presents the results for 19 stations.

It can be seen that the scatter is much larger on a daily basis. However it can be used to estimate radiation data from sunshine hours.

As a general rule, Bennett correlation is better when long periods are concerned.

Table 5. Daily Basis Analysis of the Data (1978-1979)

Sunshine Hours	Sample (no of days)	Frequency (%)	Standard Deviation (kWh/m ² day)
0- 1	1152	11.4	1.04
1- 2	437	4.3	0.85
2- 3	469	4.7	0.83
3- 4	517	5.1	0.85
4- 5	572	5.7	0.85
5- 6	678	6.7	0.71
6- 7	779	7.7	0.69
7- 8	993	9.8	0.67
8- 9	1145	11.4	0.72
9-10	1443	14.3	0.71
10-11	1345	13.3	0.65
11-12	492	4.9	0.80
12-13	63	0.6	0.89
13-14	4	0.1	0.30

The analysis of Table 5 also indicates that the frequency of occurrence of days with 0-1 and 9-10 sunshine hours is larger, and that the percent standard deviation can be larger when the sunshine hours are lower.

4. Uncertainty Analysis

If a 95% confidence level is considered, the uncertainty can be defined as twice the standard deviation.

Thus, it can be said that the monthly average daily radiation on a horizontal surface can be predicted from Bennett correlation, to within $\pm 10-22\%$, according to the month of the year. On a yearly basis, the radiation can be predicted to within $\pm 10\%$.

5. Conclusions

Bennett correlation is used to predict the data in Brazil and it is found that the uncertainty can be in the range of $\pm 10-20\%$ (95% confidence level) on a monthly basis and $\pm 10\%$ on a yearly basis. This makes the correlation very useful for design purposes of solar energy systems and also to establish the solar energy potential from sunshine hours data, which are very abundant in Brazil.

6. Acknowledgements

The authors are indebted to CNPq (National Research Council) for having supported the first author for this research. Also, the authors are indebted to FINEP (Financiadora de Estudos e Projetos), particularly Dr. Rolf Töpke, for having financed the data taking procedure at INMET, and provided all the facilities for reducing the data.

REFERENCES

- [1] Cervellini, A., Salati, E. & Godoy, H., Estimativa da Distribuição Solar no Estado de São Paulo, Bragantia 25(3), 31-41, 1966.
- [2] Villa Nova, N.A., Salati, E., Radiação Solar no Brasil, Departamento de Física e Meteorologia - ESASQ-USP, 1977.
- [3] SEPLANTEC, "Potencial de Energia Solar no Estado da Bahia", Subsecretaria de Ciência e Meteorologia, Seplantec, Governo do Estado da Bahia, Fevereiro 1979.
- [4] Bennett, I., Monthly Maps of Mean Daily Insolation for

the United States. Solar Energy, 9(3): 145-158, 1975.

- [5] Nunes, G.S.S., Andre, R.G.B., Vianello, R.L., Marques, V. S., Estudo da Radiação Solar Incidente sobre o Brasil, Relatório INPE-1190-NTE/110, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Janeiro 1978.
- [6] CENTRO DE TECNOLOGIA PROMON, Energia Solar - Estado da Arte e Viabilidade Técnico Econômica de Aquecimento D'água, Estudo Multicliente, 1979.

Engenheiro Mecânico

Carlos Alberto Schneider, Jr. Ing.
Professor Titular

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
88.000 - Florianópolis - SC - Brasil

SUMÁRIO

Este trabalho apresenta a projeto e construção de um transdutor de sinais elétricos, que permite medir, para a direção da energia dos ventos, conjuntamente com sua direção, a velocidade característica meteorológica de tempo médio e é desenvolvida uma metodologia para sua utilização com um sistema de aquisição e processamento de sinais, que possibilita a obtenção de dados sobre a velocidade de direção automática registrada em relação ao eixo de referência do vento. O transdutor apresenta um método de conversão de dados para permitir a obtenção de dados sobre a direção e velocidade dos ventos, bem como a obtenção de dados sobre a direção e velocidade dos ventos.

SUMMARY

This paper presents the design and construction of a transducer, with no moving parts, which provides electrical signals for the measurement of the wind energy together with its direction. The meteorological characteristics of the transducer are analyzed, and a methodology is developed for its utilization with a data acquisition and processing system, which allows reference data to be obtained and automatic measurements to be performed, also, in wind direction. The actual system designed and built allows the adaptation of the transducer for the combined measurement of incident and reflected wind energy, as well as wind temperature, pressure and air relative humidity.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-4

P.P. 39 - 48

PUC/RJ

DESENVOLVIMENTO DE UMA UNIDADE DE MEDIÇÃO DE ENERGIA EÓLICA

José Aldo Silva Lima
Engenheiro Mecânico

Carlos Alberto Schneider, Dr. Ing.
Professor Titular

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
88.000 - Florianópolis - SC - Brasil

SUMÁRIO

Este trabalho apresenta o projeto e construção de um transdutor de sinais elétricos, sem partes móveis, para a medição da energia dos ventos, conjuntamente com sua direção. Nele são analisadas as características metroológicas do transdutor e é desenvolvida uma metodologia para sua utilização com um sistema de aquisição e processamento de sinais, que permitirá a obtenção de dados reduzidos e a realização de medições automatizadas também em unidades de observação em campo. O transdutor apresentado prevê e permite a adaptação de sensores para medição conjunta da radiação solar incidente, direta e difusa, bem como de temperatura, pressão e umidade relativa do ar.

SUMMARY

This paper presents the design and construction of a transducer, with no moving parts, which provides electrical signals for the measurement of the wind energy together with its direction. The metrological characteristics of the transducer are analysed, and a methodology is developed for its utilization with a data acquisition and processing system, which allows reduced data to be obtained and automatic measurements to be performed also in field observations. The actual system foresees and allows the adaptation of the transducers for the combined measurement of incident sun radiation, both direct and diffuse, as well as temperature, pressure and air's relative humidity.

1. Introdução

A necessidade de avaliação da energia dos ventos, com vistas a seu aproveitamento, deu origem ao desenvolvimento de um sistema que possa medir a sua potência (potenciômetro eólico). Tem-se também como ponto de partida, a utilização do mesmo como unidade de estudo do aproveitamento da energia solar, bem como estação metereológica. Prevê-se para todos os casos, operação totalmente automatizada, através da utilização de microprocessador, necessitando-se em função disto, transdutores que forneçam sinais elétricos proporcionais.

Neste trabalho focaliza-se com maior ênfase, o sistema de medição da energia dos ventos (velocidade vetorial), reportando-se os resultados experimentais obtidos na simulação em laboratório.

2. Sistema de Medição

O modelo construído é composto, como mostra a fig. 1, de um sistema de molas paralelas, entre o cilindro, como elemento de arrasto, e uma base. Estas molas são formadas por quatro barras retas de seções circulares engastadas, de tal forma que, a constante elástica é igual em todas as direções. A base é mantida fixa, de maneira que, ao atuar numa força sobre o cilindro, ocorre um deslocamento linear relativo entre ambos. Tal movimento é detectado por quatro transdutores indutivos sem contato [1], ortogonais dois a dois, os quais fornecem um par de sinais elétricos x e y, cuja composição vetorial nos fornece o valor do arrasto.

$$F = k|x^2 + y^2|^{1/2} \quad (1)$$

A direção do vento, em relação a um sistema de eixos ortogonais, é portanto

$$\theta = \text{tg}^{-1}(y/x) \quad (2)$$

Na direção do arrasto a componente estática $|z|$ é dada pela expressão

$$F = \frac{1}{2} C_d \rho A \bar{V}^2 \quad (3)$$

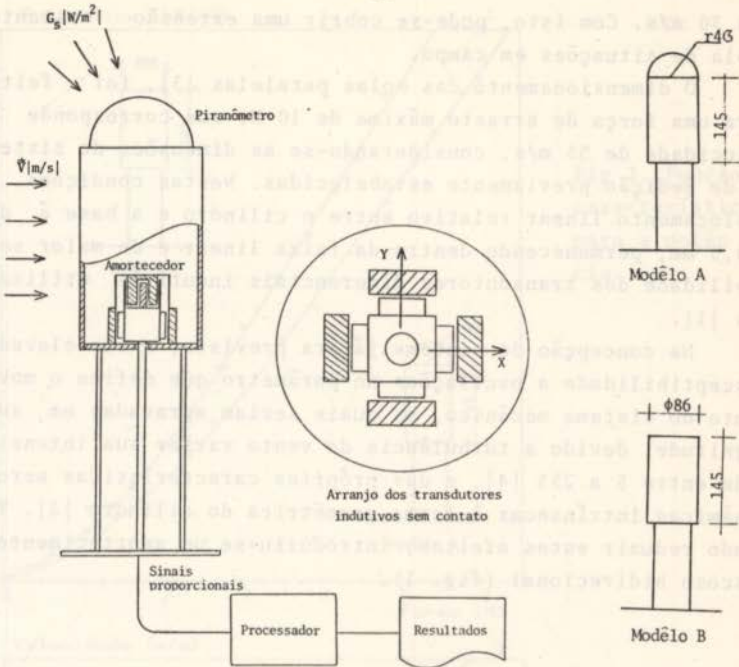


Fig 1. Sistema de medição

da qual, pode-se determinar a velocidade média, através do valor obtido em (1).

A equação simplificada da potência, que pode ser extraída do vento, vem a ser

$$W = \left| \sqrt{2} \frac{A_s}{\rho A_c^{3/2}} \frac{1}{C_d^{3/2}} \right| F^{3/2} \quad (4)$$

A possibilidade de integração de diversos transdutores em uma unidade compacta, foi um dos fatores decisivos, na escolha do cilindro como forma geométrica básica, a qual é também de fácil construção. O sistema descrito tem ainda como vantagem, ser destituído de partes móveis que requeiram lubrificação periódica. Apresentando um coeficiente de arrasto com pequenas flutuações dentro de certa faixa de Reynolds $|2|$, o cilindro pode ser dimensionado de forma que, seja viabilizada sua operação dentro do intervalo de velocidades de

0 a 30 m/s. Com isto, pode-se cobrir uma extensão bastante ampla de situações em campo.

O dimensionamento das molas paralelas [3], foi feito para uma força de arrasto máxima de 10 N, que corresponde à velocidade de 35 m/s, considerando-se as dimensões do sistema de medição previamente estabelecidas. Nestas condições, o deslocamento linear relativo entre o cilindro e a base é de $\pm 0,5$ mm, permanecendo dentro da faixa linear e de maior sensibilidade dos transdutores diferenciais indutivos utilizados [1].

Na concepção do sistema já era prevista, a sua elevada susceptibilidade a oscilações no parâmetro que define o movimento do sistema mecânico, as quais seriam agravadas em sua magnitude, devido a turbulência do vento variar sua intensidade entre 5 a 25% [4], e das próprias características aerodinâmicas intrínsecas à forma geométrica do cilindro [2]. Visando reduzir estes efeitos, introduziu-se um amortecimento viscoso bidirecional (fig. 1).

3. Ensaio do Modelo

A fig. 1 mostra, esquematicamente, os casos extremos a veriguados. Através de calibrações, foram estabelecidos, os parâmetros metrológicos do sistema de medição de força de arrasto bidimensional. Estes apresentaram uma relação, força/sinal, bastante linear para as duas direções. A independência do deslocamento em um eixo, relativo ao outro, ficou bem caracterizada. Tendo sido sua precisão determinada, como sendo igual a $\pm 0,3\%$.

As principais experiências, foram realizadas com o auxílio do túnel de vento [5], conforme esquema mostrado na fig. 2, O sistema de aquisição de sinais (SAS) [6], manipula com rapidez, precisão e confiabilidade um grande volume de dados, fazendo o processamento automático dos mesmos. O andamento e controle dos experimentos, é feito segundo planos de medições pré-estabelecidos, exercendo o operador, apenas a supervisão dos ensaios.

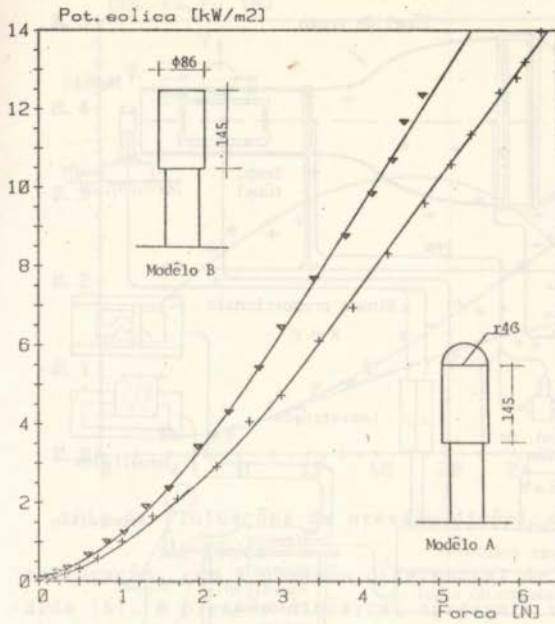


Fig 3. Função característica para a potência.

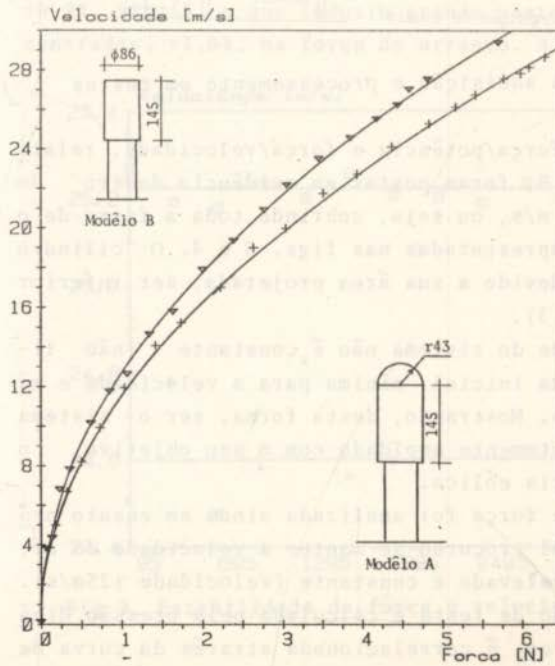


Fig 4. Função característica para a velocidade.

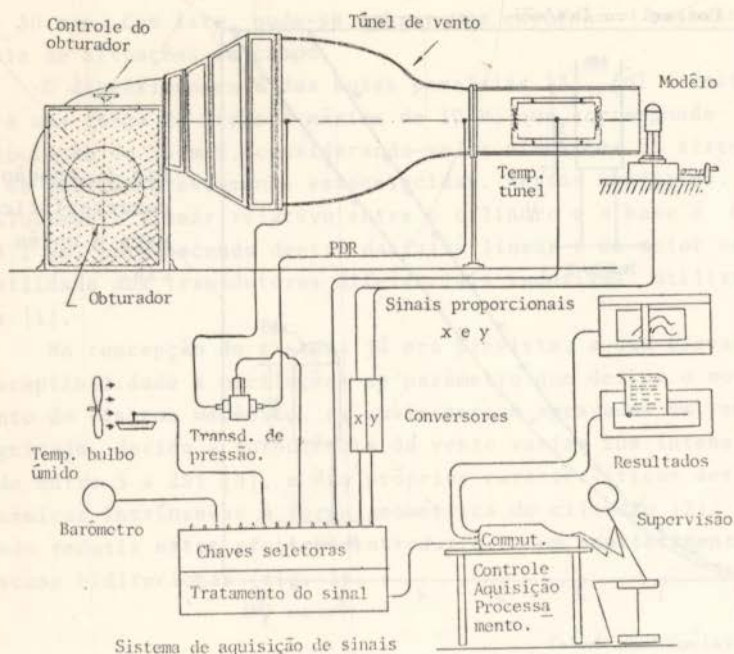


Fig 2. Esquema da aquisição e processamento em testes

As relações, força/potência e força/velocidade, relativas aos modelos A e B, foram postas em evidência dentro do intervalo de 0 a 30 m/s, ou seja, cobrindo toda a faixa de operação. Estas são apresentadas nas figs. 3 e 4. O cilindro tem arraste menor, devido a sua área projetada, ser inferior à do modelo A (fig. 3).

A sensibilidade do sistema não é constante (não linear). Sendo na faixa inicial, mínima para a velocidade e máxima para a potência. Mostrando, desta forma, ser o sistema de medição convenientemente amoldado com o seu objetivo, o de medir de potência eólica.

A flutuação de força foi analisada ainda em ensaio próprio, fig. 6, no qual procurou-se manter a velocidade do ar, no túnel, com valor elevado e constante (velocidade ± 25 m/s). A velocidade na seção de teste é calculada pela pressão dinâmica. Esta por sua vez, é correlacionada através da curva de

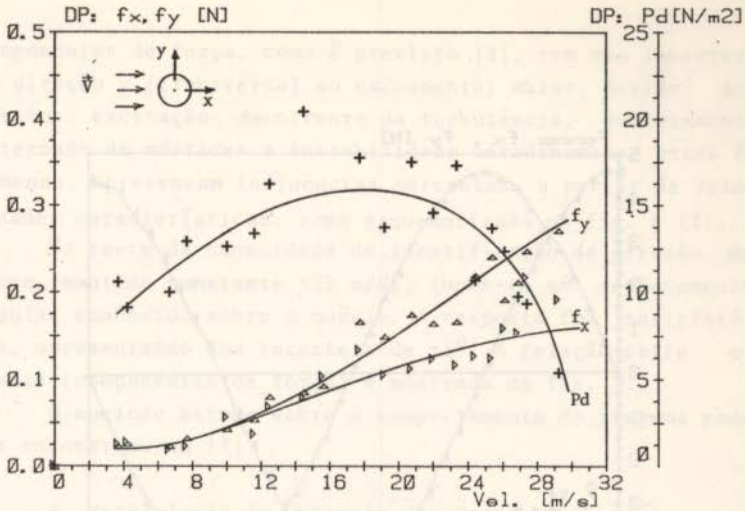


Fig 6. Flutuações da pressão dinâmica e das componentes da força calibração, com a pressão diferencial de referência (PDR), medida $|5|$. A pressão dinâmica, apresenta uma instabilidade de $\pm 0,8\%$, fig. 5, o que induziu grande parte das flutuações encontradas, $\pm 1,6\%$, na força de arrasto. A instabilidade das

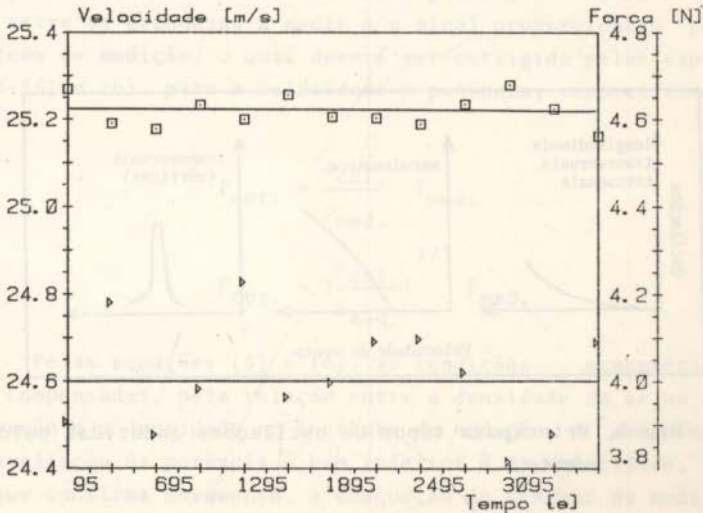


Fig 5. Estabilidade da força e velocidade.

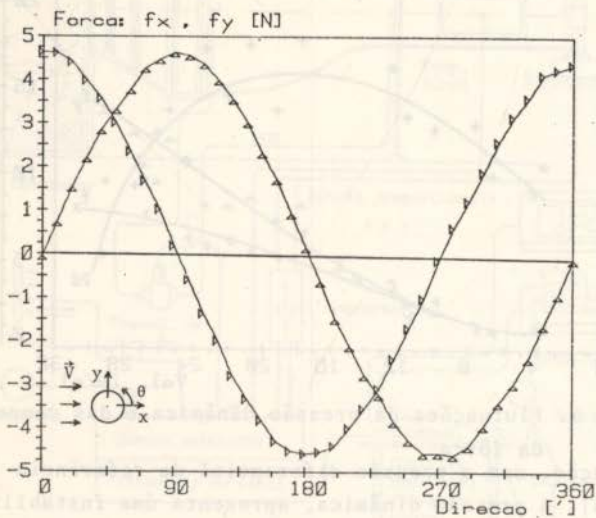


Fig 7. Relação entre as componentes da força.

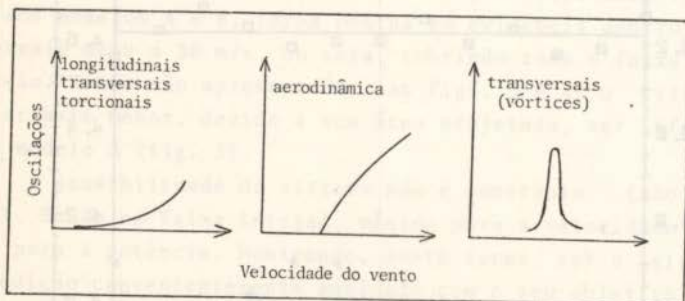


Fig 8. Principais tipos de oscilações induzidas pelo vento.

componentes de força, como é previsto [2], tem uma incerteza na direção y (transversal ao escoamento) maior, devido aos efeitos: excitação decorrente da turbulência, descolamento alternado de vórtices e instabilidade aerodinâmica. Estes fenômenos, apresentam influências marcantes, a partir de velocidades características, como esquematizado na fig. 8 [2].

No teste da capacidade de identificação de direção do vento (mantido constante ± 25 m/s), impôs-se um deslocamento angular conhecido sobre o modelo. A resposta foi satisfatória, apresentando uma incerteza de $\pm 1^\circ$. A relação entre os sinais (componentes de força) é mostrada na fig. 7.

Minucioso estudo sobre o comportamento do sistema pode ser encontrado em [7].

4. Metodologia de Obtenção dos Dados

O sistema será automatizado com microprocessador, o qual fará no local, aquisição, processamento e redução de dados. Não linearidades do sistema serão compensadas através das funções de transferência. Estas funções, no entanto, são válidas para as condições atmosféricas particulares, no instante do levantamento destas. Nas figuras 3 e 4 vê-se a relação entre as grandezas a medir e o sinal proporcionado pelo sistema de medição, o qual deverá ser corrigido pelas expressões (5) e (6), para a velocidade e potência, respectivamente.

$$F_{\text{cor.}} = \frac{\rho_{\text{cal.}}}{\rho_{\text{med.}}} F_{\text{med.}} \quad (5)$$

$$F_{\text{cor.}} = \left| \frac{\rho_{\text{cal.}}}{\rho_{\text{med.}}} \right|^{1/3} F_{\text{med.}} \quad (6)$$

Pelas equações (5) e (6), as condições atmosféricas são compensadas, pela relação entre a densidade do ar na calibração e a densidade no instante da medição. A influência na avaliação da potência é bem inferior à da velocidade, fato que confirma novamente, a adequação do sistema de medição como medidor de potencial eólico.

O sistema de processamento, avaliará a energia total e outros parâmetros associados conforme pré-estabelecido no programa, os quais serão coletados e conduzidos a uma central por procedimento adequado.

5. Conclusão

O sistema de medição dos parâmetros do vento, necessários ao levantamento do potencial energético |4|, é o elemento mais complexo do trabalho em andamento. Os resultados mostram, que o sistema testado, apresenta desempenho metrológico satisfatório, sendo vantajoso ainda, sua forma construtiva bastante simples, refletindo diretamente em baixo custo de construção, operação e manutenção.

BIBLIOGRAFIA

- |1| Doebelin, Ernest O., "Measurement Systems: Application and Design": McGraw-Hill Book Company, 1966.
- |2| Schlichting, H. and Kestin. "Boundary Layer Theory"; 7th ed., McGraw-Hill, New York, 1979.
- |3| Breitingner, R., "Lösungskataloge für Sensoren. Teil I: Federführungen and Federgelenke": Otto Krausskopf-Verlag GmbH, Mainz., 1976.
- |4| Putnam, Palmer C., "Power from the Wind". Van Nostrand Reinhold Company, 1948.
- |5| Plint & Partiners Limited, "18 in Blower Tunnel with Three Component Balance, Instruments and Models. Description, Tests Results and Operating Instructions", England, 1971.
- |6| Schneider, Carlos A. e Lücke Hermann H., "Emprego de Sistemas de Aquisição de Sinais": V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1979.
- |7| Lima, J. A. S. - "Desenvolvimento de uma Unidade Integrada de Medição de Energia Eólica e Energia Solar": Dissertação de Mestrado, CT/UFSC, Florianópolis, 1981.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-5

p.p. 49 - 57

PUC/RJ

MODELO DA CAPILARIDADE PARA A ANÁLISE DA SECAGEM

Adir Moysés Luiz

Instituto de Física, UFRJ e COPPE/UFRJ

Rubens Sampaio Filho

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

O estudo da secagem de meios porosos é feito através de um modelo que dá ênfase ao papel desempenhado pela capilaridade na migração do líquido para a superfície do material. Propomos uma função para relacionar a pressão capilar com a saturação e outra função para relacionar a condutividade hidráulica com a saturação. Verifica-se uma boa concordância entre os dados experimentais existentes na literatura e os valores previstos pelas relações propostas.

SUMMARY

A capillarity model is used to study the drying process of a porous medium. It is proposed two material functions: one relating capillary pressure with saturation and another relating hydraulic conductivity with saturation. It is found a good agreement between the available experimental data and the values predicted by these relations.

1. Introdução

Com o encarecimento dos preços das fontes energéticas, está na ordem do dia o esforço da comunidade científica no sentido da otimização dos processos que consomem energia. Conforme observado por Reay [1] a quantidade de energia consumida nos processos de secagem corresponde a cerca de 10% do consumo total de energia num país industrializado. Para o dimensionamento de um secador é necessário compreender bem os fenômenos que ocorrem nos processos de secagem. Num trabalho recente [2] verificamos que a secagem de materiais como a madeira e a serragem é dominada por um processo de difusão; além disto, verificamos que a secagem de materiais granulares não é governada pelo mecanismo da difusão. Conforme comprovado por diversos autores [3-8] na secagem de materiais granulares a pressão capilar causa a força motriz que impulsiona o líquido para a superfície do material. Contudo, ainda não existe uma explicação convincente para o mecanismo de capilaridade que ocorre durante a secagem de diversos materiais granulares (tais como: areias, argilas, solos, pigmentos, etc.).

Uma melhor compreensão dos fenômenos de capilaridade em meios porosos pode auxiliar não só os estudos sobre secagem como também as pesquisas de Hidráulica Subterrânea, as investigações para a extração secundária e terciária de petróleo, e, de um modo geral, a todas as pesquisas relacionadas com o escoamento bifásico em meios porosos.

Num trabalho [8] mostramos como a água flui por capilaridade durante a secagem de meios porosos. Neste trabalho proporemos uma relação para determinar a pressão capilar em função da saturação e outra para determinar a permeabilidade relativa em função da saturação. Além disto, usaremos estas relações para obter a equação diferencial apropriada para o estudo da transferência de massa durante a secagem de meios porosos e de materiais granulares.

2. Modelo da Capilaridade

Considerando um meio poroso como uma mistura podemos escrever a equação da continuidade para a fase líquida do seguinte modo:

$$\frac{\partial \rho_{\ell}}{\partial t} = -\text{div} (\rho_{\ell} v_{\ell}) \quad (1)$$

onde ρ_{ℓ} é a densidade parcial da água, t é o tempo, v_{ℓ} é a velocidade intersticial da água. Designando por ϵ a porosidade, por S a saturação e por d a densidade real da água, obtemos:

$$\rho_{\ell} = \epsilon d S \quad (2)$$

Como durante a secagem o escoamento é muito lento, podemos usar a seguinte hipótese:

$$\epsilon S v = -K \text{ grad} (p_{\ell} + x) \quad (3)$$

onde K é a condutividade hidráulica, x é a altura do ponto em relação à base do meio poroso e p é a pressão na fase líquida. A hipótese constitutiva (3) nada mais é do que uma generalização da famosa lei de Darcy. Considerando os pontos ao longo do eixo de simetria do meio poroso, podemos dizer que as variáveis S , K e p dependem somente de x e de t . A pressão capilar p é definida pela diferença: $p = p_{ar} - p_{\ell}$. Além disso, supondo d e ϵ constantes e usando as relações (1), (2) e (3) resulta:

$$\epsilon \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial K}{\partial x} \quad (4)$$

A relação (4) é a equação diferencial apropriada para o estudo da transferência de massa durante a secagem de meios porosos. Para solucioná-la é necessário relacionar as variáveis p , S e K . Nos trabalhos existentes na literatura (ver as referências feitas por Philip [9] e por Tobinaga [10]), podemos observar que as tentativas para solucionar a equação (4) se baseiam na seguinte substituição:

$$\epsilon D = K (\partial p / \partial S) \quad (5)$$

onde D é a chamada difusividade hidráulica. Para escoamentos na direção horizontal, uma vez que não existe queda de pressão com a altura, não existe o termo em x da hipótese consti

tutiva (3); sendo assim, a introdução da relação (5) simplifica um pouco a matemática do problema. Contudo, para escoamentos na direção vertical, a substituição (5) não traz nenhuma vantagem matemática, uma vez que continuam existindo três funções (D , K e p) e, para resolver a equação, é necessário correlacioná-las de algum modo. Além disto, a introdução da difusividade hidráulica D não é aconselhável do ponto de vista físico, uma vez que ao criar uma relação entre D , K e uma derivada parcial de p , não podemos pesquisar diretamente a dependência entre a saturação S e as variáveis básicas p e K . Achamos mais razoável não introduzir a difusividade D e estudar diretamente o problema em função das variáveis básicas p e K . A originalidade do modelo da capilaridade que estamos propondo consiste justamente em se tentar a solução do problema em termos destas grandezas básicas. Para solucionar a questão precisamos então obter uma relação entre S e p e uma outra relação entre K e p ; estas relações serão propostas nas próximas seções.

3. Relação entre a Pressão Capilar e a Saturação

Embora a relação entre p e S não seja uma função e sim uma funcional (por causa dos efeitos de histerese), para poder tratar os problemas de escoamentos em meios porosos é necessário obter uma função apropriada para cada processo de modo a ser possível relacionar analiticamente p com S . Analisando os dados experimentais existentes na literatura, concluímos que a função que melhor ajusta estes dados é dada por:

$$S = 1 - S_0 \exp(-b/p^2) \quad (6)$$

Na literatura já existem algumas correlações propostas para ligar as variáveis p e S (ver, por exemplo, o livro de Hillel [11]); a mais famosa destas relações foi proposta por Leverett [12]. Contudo, a relação (6) é mais simples do que as demais relações propostas por outros autores (ver as referências citadas). Num trabalho recente [8] apresentamos uma discussão mais detalhada sobre a função proposta e sobre a determinação do parâmetro b . A relação (6), com o parâmetro b apropriado para cada caso, reproduz de modo razoável os da

dos experimentais apresentados por diversos pesquisadores [2-8]. Para exemplificar, comparamos na Fig. 1 a relação (6), indicada pela curva contínua na figura, com os dados experimentais obtidos por Northfleet [13] para a secagem da areia. Denomina-se saturação irreduzível (S_i) a menor saturação atingida quando a pressão capilar tende ao infinito; fazendo p tender ao infinito na relação (6), obtemos: $S_i = 1 - S_0$.

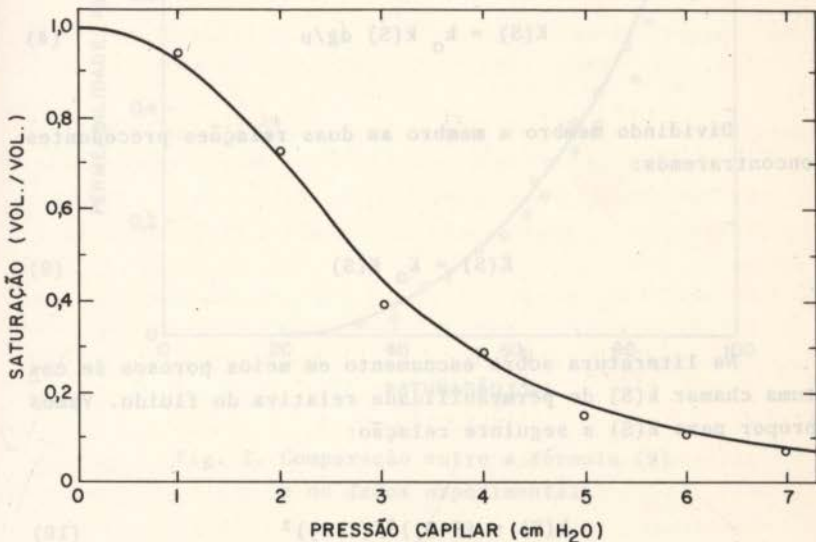


Fig. 1. Comparação entre a fórmula (6) e os dados experimentais

4. Relação entre a Permeabilidade Relativa e a Pressão Capilar

A condutividade hidráulica K é também chamada de permeabilidade. Seja K_0 a permeabilidade quando o meio poroso está completamente saturado pela fase que molha as paredes dos poros; podemos escrever:

$$K_0 = k_0 \, dg/\mu \quad (7)$$

onde k_0 é a permeabilidade intrínseca do meio poroso, g é a aceleração da gravidade e μ é a viscosidade do fluido que molha as paredes do meio. A permeabilidade intrínseca k_0 é uma propriedade da matriz porosa e não depende das propriedades do fluido. Quando o meio poroso não está completamente saturado, a permeabilidade K será função da saturação S ; neste caso, podemos escrever:

$$K(S) = k_0 k(S) dg/\mu \quad (8)$$

Dividindo membro a membro as duas relações precedentes encontraremos:

$$K(S) = K_0 K(S) \quad (9)$$

Na literatura sobre escoamento em meios porosos se costuma chamar $k(S)$ de permeabilidade relativa do fluido. Vamos propor para $k(S)$ a seguinte relação:

$$k(S) = (S - S_1)^3 / (1 - S_1)^3 \quad (10)$$

Confrontando a relação (10) com os dados experimentais publicados por diversos autores [14-17] constatamos que esta relação reproduz com boa aproximação os referidos dados experimentais. Para exemplificar, comparamos na Fig. 2 a equação (10) com os dados experimentais obtidos por Santana [14] para o fluido que molha a matriz porosa. Neste caso: $S_1 = 0,2$.

Usando as relações (6) e (10) encontraremos:

$$K = K_0 \left[1 - \exp(-b/p^2) \right]^3 \quad (11)$$

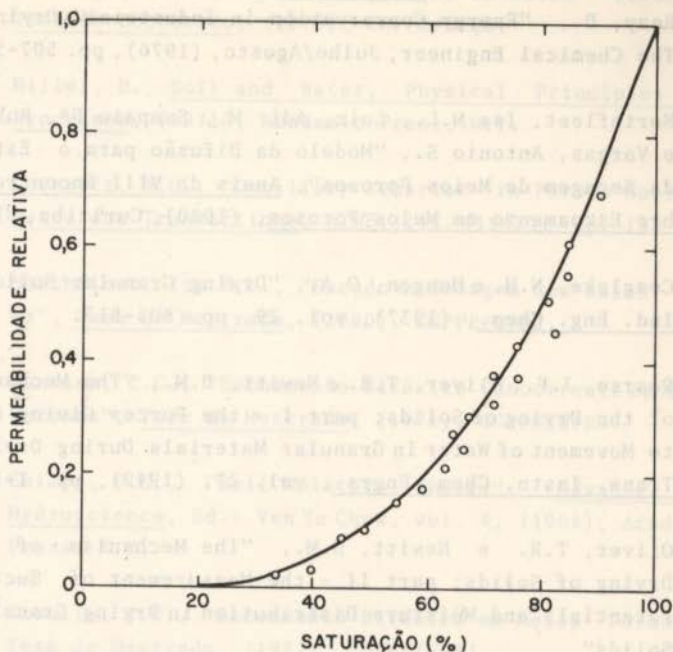


Fig. 2. Comparação entre a fórmula (9) e os dados experimentais

5. Conclusões

A relação (6) é de nossa autoria [8]. Embora a equação (10) já tenha sido proposta por Irmay [18], a relação (11) está sendo proposta pela primeira vez neste trabalho. A vantagem do modelo da capilaridade proposto consiste em se poder obter através das relações (6) e (11) a solução do problema. Substituindo as relações (6) e (11) na equação (4) resulta uma equação diferencial parabólica não linear cuja solução fornecerá p em função de x e de t . Para se calcular os valores de S em função de x e de t basta usar a equação (6). Como esta equação não possui solução analítica, tentaremos resolvê-la por métodos numéricos. A solução desta equação com as condições de contorno apropriadas será objeto da continuação desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] Reay, D., "Energy Conservation in Industrial Drying", The Chemical Engineer, Julho/Agosto, (1976), pp. 507-509.
- [2] Northfleet, Isa M.L., Luiz, Adir M., Sampaio F^o, Rubens e Vargas, Antonio S., "Modelo da Difusão para o Estudo da Secagem de Meios Porosos", Anais do VIII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, (1980), Curitiba, UFPR.
- [3] Ceaglske, N.H. e Hougen, O.A., "Drying Granular Solids", Ind. Eng. Chem., (1937), vol. 29, pp. 805-813.
- [4] Pearse, J.F., Oliver, T.R. e Newitt, D.M., "The Mechanism of the Drying of Solids; part I - the Forces Giving Rise to Movement of Water in Granular Materials During Drying", Trans. Instn. Chem. Engrs., vol. 27, (1949), pp. 1-8.
- [5] Oliver, T.R. e Newitt, D.M., "The Mechanism of the Drying of Solids; part II - the Measurement of Suction Potentials and Moisture Distribution in Drying Granular Solids",
- [6] Gomings, E.W. e Sherwood, T.K., "The Drying of Solids, VII, Moisture Movement by Capillarity in Drying Granular Materials", Ind. Eng. Chem., vol. 26, (1934), pp. 1096-1098.
- [7] Hassler, G.L. e Brunner, E., "Measurement of Capillary Pressures in Small Core Samples", Petroleum Transactions, vol. 160, (1945), pp. 114-123.
- [8] Luiz, Adir M. e Sampaio F^o, Rubens, "A Influência da Capilaridade na Secagem de Meios Porosos", III Encontro Nacional de Secagem, Julho(1981), UFV, Viçosa, MG.
- [9] Philip, J.R., "Flow in Porous Media", Annual Review of Fluid Dynamics Mechanics, Editores: M.V. Dyke, W.G. Vincenti e J.V. Webausen, vol. 2 (1970), pp. 177-204.

- [10] Tobinaga, S., "Escoamento Bifásico em Meios Porosos", Tese de Doutorado, (1979), COPPE/UFRJ.
- [11] Hillel, D., Soil and Water, Physical Principles and Processes, (1971), Academic Press, N.Y.
- [12] Leverett, M.C., "Capillary Behavior in Porous Solids", Petroleum Transactions, AIME, 142, (1941), pp. 152-169.
- [13] Northfleet, Isa M.L., "Estudo da Secagem com Raios Gama", Tese de Mestrado, (1980), COPPE/UFRJ.
- [14] Santana, C.C., "Escoamento Bifásico Concorrente em Meios Porosos", Tese de Mestrado, (1971), COPPE/UFRJ.
- [15] Childs, E.C., "Soil Moisture Theory", Advances in Hydroscience, Ed.: Ven Te Chow, vol. 4, (1968), Academic Press, N.Y.
- [16] Gubulin, J.C., "Escoamento Bifásico em Meios Porosos", Tese de Mestrado, (1977), COPPE/UFRJ.
- [17] Rapoport, L.A. e Leas, W.J., "Relative Permeability to Liquid in Liquid-gas Systems", Petroleum Transactions, vol. 192, (1951), pp. 83-98.
- [18] Irmay, S., "On the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", Trans. Amer. Geophys. Union, vol. 35, (1954), pp. 463-468.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA
RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-6

P.P. 59 - 69

PUC/RJ

PERDAS DE CALOR EM TANQUES DE ESTOCAGEM

A.C.M.Sousa

Prof.Associado

M.LaPlante

Candidato a Mestrado

J.E.S.Venart

Professor

Department of Mechanical Engineering
 University of New Brunswick
 Fredericton, N.B. , Canada E3B 5A3

SUMARIO

É descrita a instrumentação utilizada na obtenção dos dados que permitem o cálculo de perdas de calor num tanque de superfície, de 64 metros de diâmetro, para estocagem de óleo pesado. O escoamento convectivo é calculado com um esquema de diferenças finitas, aplicado às equações de energia e escoamento, e as soluções numéricas apresentam um aceitável nível de concordância com os dados experimentais. Dados típicos de históricos de temperaturas são igualmente incluídos neste trabalho.

SUMMARY

The instrumentation used in a 64-meter diameter surface oil storage tank to obtain data for heat losses evaluation is described. The oil convective flow is predicted via a finite-difference scheme applied to the energy and flow equations. The main features of the numerical technique are outlined, and the solutions generated present a fair agreement with the experimental data. Some typical experimental temperature histories are also included in this work.

1. Introdução

O estudo de modelos matemáticos de tanques de superfície para estocagem de óleos pesados continua atraindo considerável interesse, em grande parte devido aos constantes aumentos dos custos de energia.

A temperatura nos tanques é controlada com o objetivo de manter a viscosidade do óleo a níveis operacionais para o processo de bombeamento. Porém, sempre que a temperatura ambiente é inferior a temperatura "operacional" do tanque, a qual tipicamente para um óleo do tipo Bunker "C" é de cerca de 50°C, necessário se torna transferir calor para o tanque. Esta operação, em se tratando de tanques de grandes dimensões como é o caso do do presente estudo, e em condições climáticas desfavoráveis, pode se tornar extremamente dispendiosa. Como ordem de grandeza destes custos, fazemos notar que para o caso presente, em que o tanque tem 64 metros de diâmetro e 14 metros de altura, e para uma temperatura média de 12.5°C, os custos estimados foram superiores a US\$400.000/ano !

Assim, a quantificação e distribuição das perdas de calor são de primordial relevância quando se conduz uma avaliação econômica da insulação dos tanques. Um outro aspecto, igualmente importante, é a possibilidade de utilização destes tanques para estocagem térmica, é consequente retificação de energia, no caso de fontes intermitentes de energia (p.ex. energia solar).

E particularmente com este segundo objetivo em vista, que se desenvolveu o estudo do escoamento convectivo do óleo por via numérica.

2. Medidas experimentais

Com o objetivo de obter dados experimentais suficientemente precisos, o tanque acima referido, um dos três idênticos tanques situados na Central Termo-Elétrica de Coleson Cove (1000 MWe) da New Brunswick Electric Power Commission, foi instrumentado com 45 termopares e um sensor de pressão diferencial. Os termopares permitem determinar temperaturas nas várias regiões de interesse para execução de um balanço térmico, nomeadamente paredes, teto e interior do tanque,

incluindo o ar acima da superfície do óleo, de acordo com a Figura 1. Igualmente são medidas as temperaturas de entrada do óleo e entrada e saída do fluido de aquecimento, uma solução de água e glicol, utilizado nos aquecedores do óleo no interior do tanque.

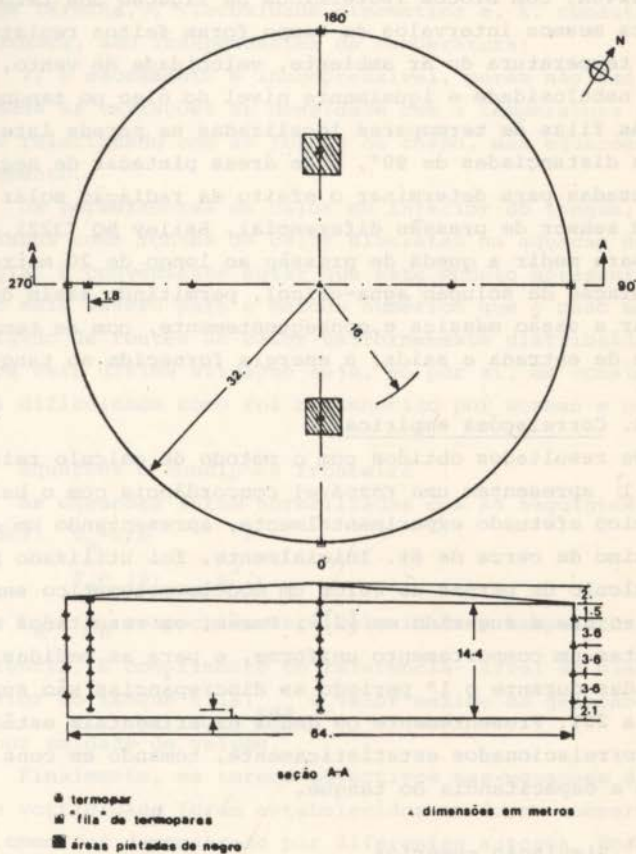


Fig.1 Dimensões do tanque de estocagem e localização dos termopares.

Os testes foram conduzidos durante dois períodos distintos: 1. julho 14 a agosto 26, 1980 e 2. fevereiro 19 a março 15, 1981, com o objetivo de determinar o comportamento térmico em diferentes condições climáticas. As medidas de temperatura foram tomadas em intervalos de 4 horas e com piladas diretamente com o registrador de dados de 60 canais Fluke 2240A, com blocos isotérmicos de ligação dos termopares. Nos mesmos intervalos de tempo foram feitos registros para a temperatura do ar ambiente, velocidade do vento, nível de nebulosidade e igualmente nível do óleo no tanque.

As filas de termopares localizadas na parede lateral externa distanciadas de 90° , e as áreas pintadas de negro, foram usadas para determinar o efeito da radiação solar.

O sensor de pressão diferencial, Bailey BQ 73221, foi usado para medir a queda de pressão ao longo de 20 metros de tubulação da solução água-glicol, permitindo assim determinar a vazão mássica e, conseqüentemente, com as temperaturas de entrada e saída, a energia fornecida ao tanque.

3. Correlações empíricas

Os resultados obtidos com o método de cálculo relatado em [1] apresentam uma razoável concordância com o balanço térmico efetuado experimentalmente, apresentando um desvio máximo de cerca de 8%. Inicialmente, foi utilizado para o cálculo de perdas de calor um modelo matemático semelhante ao que é sugerido em [2]. Porém, os resultados não apresentam um comportamento uniforme, e para as medidas executadas durante o 1º período as discrepâncias são superiores a 20%. Presentemente os dados experimentais estão sendo correlacionados estatisticamente, tomando em consideração a capacitância do tanque.

4. Simulação numérica

Formulação do problema

Com o objetivo de simular o escoamento convectivo do óleo no interior do tanque, as equações acopladas de energia e escoamento foram resolvidas por via numérica, com a hipótese do escoamento ser laminar e bidimensional. As equa-

ções foram escritas em termos de função de corrente e vorticidade para coordenadas cilíndricas. Adicionalmente, foi introduzida nas equações a aproximação de Boussinesq. Esta aproximação considera de forma geral que:

1) o coeficiente de expansão volumétrico β , e adicionalmente os parâmetros de transporte do fluido, α , difusividade térmica, ν , viscosidade cinemática e , k , condutividade de térmica, são independentes da temperatura;

2) o escoamento é incompressível, porém não são desprezadas as variações de densidade com a temperatura no termo relacionado com as forças de corpo, nas equações de escoamento.

Os permutadores de calor no interior do tanque, são modelados como fontes de calor discretas na equação de energia. É conveniente notar que este modelo apresenta um teste mais severo para o método numérico que o caso mais divulgado de fontes de calor uniformemente distribuídas, embora esta última situação seja, só por si, de considerável dificuldade como foi reconhecido por Gosman e outros [3].

Equações e condições fronteira

As equações foram normalizadas com as seguintes quantidades: $U_R = \alpha/b$

$$T_R = (S)_{\max} \cdot b^2/\kappa$$

sendo U_R e T_R respectivamente velocidade e temperatura de referência, b comprimento de referência- nível do óleo no interior do tanque e $(S)_{\max}$ o valor máximo da geração de calor por unidade de volume.

Finalmente, os termos advectivos nas equações de energia e vorticidade foram estabelecidos em forma conservativa pois como foi demonstrado por diferentes autores, Roache [4], esta formulação compacta de diferenças finitas conduz a uma melhor precisão nos resultados.

Introduzindo as seguintes quantidades sem dimensões:

Coordenadas vertical e radial $X=x/b, R=r/b$

Componentes vertical e radial da velocidade $U=u/U_R, V=v/U_R$

Temperatura, $\Theta = T/T_R$

obtemos as equações:

$$U = \partial_R \Psi / R ; \quad V = -\partial_X \Psi / R \quad (1)$$

$$-\Omega = \partial_X^2 \Psi / R + \partial_R (\partial_R \Psi / R) \quad (2)$$

$$\partial_X (U\Omega) + \partial_R (V\Psi) = -Gr \cdot Pr^2 \cdot \partial_R \Theta + Pr \cdot [\partial_X^2 \Psi + \partial_R (\partial_R (R\Psi) / R)] \quad (3)$$

$$\partial_X (U\Theta) + \partial_R (RV\Theta) / R = \partial_X^2 \Theta + \partial_R (R\partial_R \Theta) / R + S/S_{\max} \quad (4)$$

em que os operadores ∂_R , ∂_X , ∂_R^2 , ∂_X^2 , significam respectivamente $\frac{\partial}{\partial R}$, $\frac{\partial}{\partial X}$, $\frac{\partial^2}{\partial R^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial X^2}$.

Ψ e Ω são respectivamente a função de corrente e vorticidade em forma normalizada.

A equação (3) contém o número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$ e o número de Grashof modificado $Gr = g\beta T_R b^3/\nu^2$, com g representando a aceleração da gravidade.

As equações em forma conservativa para a vorticidade e energia são (3) e (4) respectivamente.

Considerando a tensão tangencial na interface entre o óleo e o ar, na superfície livre do óleo, igual a zero e simétrica em relação a linha de centro, as seguintes condições fronteiras hidrodinâmicas são obtidas:

$$U = \partial_X V = \Psi = \partial_X^2 \Psi = \Omega = 0 \quad \text{em } (1, R)$$

$$\partial_R U = V = \Psi = \partial_R (\partial_R \Psi / R) = \Omega = 0 \quad \text{em } (X, 0)$$

$$U = V = \Psi = \partial_R \Psi = 0 \quad \text{em } (0, R)$$

$$U = V = \Psi = \partial_R \Psi = 0 \quad \text{em } (X, R_0)$$

onde R_0 é a razão entre o raio do tanque e a altura do óleo no tanque.

As condições fronteiras térmicas foram aproximadas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} -\partial_X \theta &= h_{a_i} (\theta - \theta_{a_i}) / \kappa && \text{em } (1, R) \\ \partial_R \theta &= 0 && \text{em } (X, 0) \\ \partial_X \theta &= 0 && \text{em } (0, R) \\ -\partial_R \theta &= h_{a_o} (\theta - \theta_{a_o}) / \kappa && \text{em } (X, R_0) \end{aligned}$$

θ_{a_i} e θ_{a_o} são as temperaturas sem dimensões, médias do ar no interior do tanque e no ambiente; h_{a_o} e h_{a_i} são os coeficientes de transferência de calor entre a parede lateral do tanque e o ar ambiente, e, entre a superfície livre do óleo e o ar no interior do tanque, respectivamente.

Nos cálculos executados foram tomados valores constantes e determinados através de correlações empíricas. É aparente que das correlações testadas para a parede lateral a fórmula de Churchill e Bernstein [5] apresenta uma melhor concordância com os resultados experimentais. Deve ser mencionado que a condição adiabática no fundo do tanque, $(1, R)$, não é exatamente verdadeira mas satisfaz o nosso presente propósito.

Diferenças-finitas e malha

As equações diferenciais parciais (2), (3) e (4) que regem o escoamento, são resolvidas por via numérica visto não existir solução analítica.

As equações foram reformuladas em forma discreta, através de diferenças finitas, numa malha uniforme, (Fig.2), com pontos nodais coincidentes com as fronteiras do domínio de interesse. Em cada ponto nodal são estocados os valores de θ , ψ , Ω , U e V . Os valores de U e V são calculados através da equação (1), utilizando aproximações centradas de três pontos, como foi sugerido por Torrance [8].

Assim, por exemplo, para V na posição genérica (i, j) :

$$V_{i,j} = -(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) / [2(j-1) \cdot \Delta R \cdot \Delta X]$$

com $\Delta X=1/M$ e $\Delta R=R_0/N$.

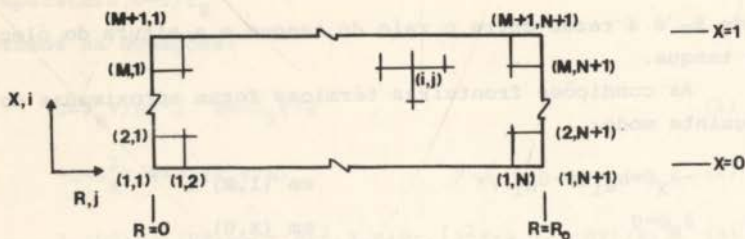


Fig.2 Malha e nomenclatura utilizada na formulação de diferenças finitas.

A vorticidade nas fronteiras $(1,R)$ e (X,R_0) é aproximada utilizando expansões da função de corrente em série de Taylor. Por exemplo para $R=R_0$, obtemos:

$$\Omega_{i,N+1} = -(8\Omega_{i,N} - \Omega_{i,N-1}) / [2 \cdot R_0 \cdot (\Delta R)^2]$$

Os termos no lado direito das equações (2), (3) e (4) são aproximados com diferenças de três pontos, por exemplo tomemos o termo $[\partial_R (\partial_R (R\Omega) / R)]_{i,j}$ cuja aproximação discreta é dada por:

$$\begin{aligned} & [j\Omega_{i,j+1} - (j-1)\Omega_{i,j}] / [(j-0.5) \cdot (\Delta R)^2] - \\ & [(j-1)\Omega_{i,j} - (j-2)\Omega_{i,j-1}] / [(j-1.5) \cdot (\Delta R)^2] \end{aligned}$$

Para os termos advectivos nas equações (3) e (4) foram tentados vários esquemas de diferenças finitas. Os melhores resultados em termos de precisão e tempos de computação foram obtidos com o esquema "donor cell" na forma sugerida por Turcotte e outros [6] num diferente contexto. Diferenças centradas conduzem a uma séria instabilidade e nenhuma solução foi obtida com este esquema. Os esquemas de "hybrid central/skew-upwind" e "quadratic, upstream-weighted" tendem a ultrapassar as condições impostas nas fronteiras, confirmando os experimentos numéricos realizados por Leschziner [7].

Para exemplificar a aplicação do "donor-cell", tomemos o termo $\partial (RV\theta) / R$ na equação (4). Tomando o referido termo para um ponto genérico (i,j) , temos $(V_M^{\theta M} - V_J^{\theta J}) / \Delta R$,

onde $\theta_M = \theta_{i,j}$ para $V_M > 0$; $\theta_J = \theta_{i,j-1}$ para $V_J > 0$; $\theta_M = \theta_{i,j+1}$ para $V_M < 0$; $\theta_J = \theta_{i,j}$ para $V_J < 0$ com:

$$V_M = (j-0.5) (V_{i,j+1} + V_{i,j}) / [2(j-1)]$$

$$V_J = (j-1.5) (V_{i,j} + V_{i,j-1}) / [2(j-1)]$$

Na fronteira (X,0), as condições de simetria impõem $V_J = -V_M$, consequentemente o esquema de diferenciação é consistente com $\partial_R (VR\theta) / R$ para $R=0$.

Procedimento de cálculo

As equações de energia e escoamento na forma de diferenças finitas são resolvidas na seguinte sequência: (4), (3), (2) e (1), por um ciclo iterativo consistindo de três subciclos, correspondendo as equações de energia, vorticidade e função de corrente. Em cada subciclo somente uma única variável toma novos valores. Quando os três subciclos são completados, as velocidades são calculadas e um novo ciclo é iniciado.

O processo utiliza para a equação de energia o método de Gauss-Seidel, e para a equação de vorticidade o método de Jacobi. Porém, estabilidade numérica foi estabelecida somente quando uma fração do valor obtido com o método de Jacobi participa no cálculo dos novos valores de vorticidade, como é sugerido por Torrance e Turcotte [8]. A função de corrente é iterada com sobre-relaxação (S.O.R.), com um fator de 1.55 para uma malha de 11×15 . Para cada subciclo é verificada a convergência e, se existem sinais de divergência, o referido ciclo é reiterado. Tipicamente, um ciclo iterativo completo toma aproximadamente 1.8×10^{-4} segundos por ponto nodal da malha, numa máquina IBM 3032.

O critério de convergência utilizado é:

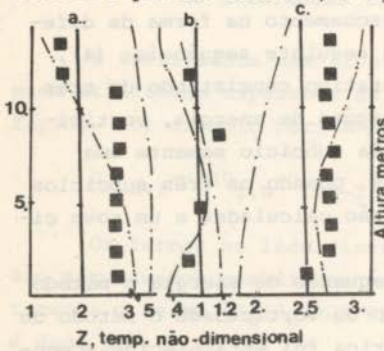
$$2 \cdot \left| \sum_{i,j} (\psi_{i,j}^{k+1} - \psi_{i,j}^k) \right| / \left| \sum_{i,j} (|\psi_{i,j}^{k+1}| + |\psi_{i,j}^k|) \right| \leq 10^{-5}$$

onde ψ toma os valores de θ , Ω e Ψ em cada subciclo, e o índice k é referido ao nível de iteração. Quando as três variáveis satisfazem simultaneamente o critério de convergên-

cia, o processo iterativo é terminado. Típicamente são necessárias 400 a 600 iterações para convergir uma solução. Com um critério de convergência mais restritivo (10^{-7}), o número de iterações aumentou dramaticamente mas a solução não apresentou alterações significativas.

3. Resultados e conclusões

A simulação numérica do escoamento convectivo com fontes de calor, mostra a existência de dois vórtices de circulação de sentidos opostos descendo ao longo da linha de centro e parede lateral, respectivamente.



a. linha de centro; b. parede; c. junto à parede
 ■ exp., --- teórico com 1.49 MW
 - - - teórico sem potência (0 MW)

Fig. 3 Z vs. posição no tanque, $Z = (\theta - \theta_{a_0}) / [(\theta_{R_0})_{\text{médio}} - \theta_{a_0}]$



Fig. 4 Temp. do óleo vs. Temp. ambiente

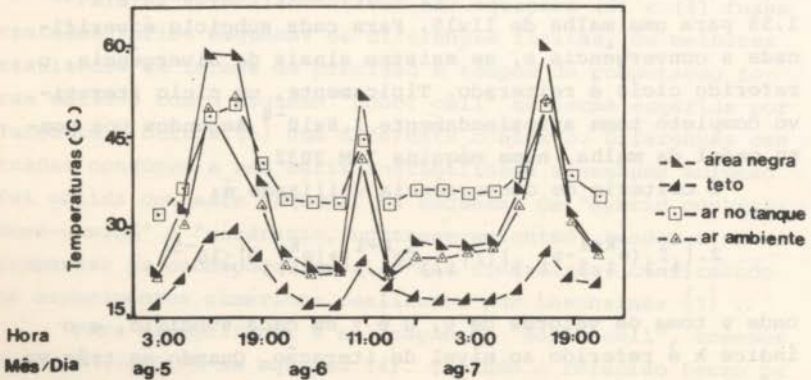


Fig. 5 Histórico de temperaturas no tanque

A simulação apresentada (Fig.3) foi efetuada para julho 30, devido as condições quase estacionárias no tanque (Fig.4). O caso de escoamento sem fontes de calor é igualmente apresentado, mas não é possível comparação com os dados experimentais devido ao longo período de decaimento de calor do tanque. A Fig.5 mostra, como antecipado, a importância da radiação solar neste tipo de problema.

4. Agradecimentos

Um dos autores (ACMS) agradece o tempo de computação oferecido pela UNB e NSERC no desenvolvimento do algoritmo.

REFERENCIAS

- 1 Busson, C. et Miniscloux, C., "Modèle technico-économique de calorifugeage des réservoirs de fuel lourd", Rev. Gén. Them., Fr., No.226 (1980), pp.785-797.
- 2 Menicatti, S., "Check Tank Insulation Economics", Hydrocarbon Processing, Vol.48, No.4 (1969), pp.133-136.
- 3 Gosman, A.D., Pun, W.M., Runchal, A.K., Spalding, D.B., and Wolfshtein, M., "Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows", Academic Press, London, (1969), p.136.
- 4 Roache, P.J., "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M. (1976), p.32.
- 5 Churchill, S.W., and Bernstein, M., "A Correlating Equation for Forced Convection from Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Crossflow", J.Heat Transfer, Vol.99 (1977), pp.300-306.
- 6 Turcotte, D.L., Torrance, K.E., and Hsui, A.T., "Convection in the Earth's Mantle", Methods in Computational Physics Vol.13 (1973), pp.431-454.
- 7 Leschziner, M.A., "Practical Evaluation of Three Finite-Difference Schemes for the Computation of Steady-State Recirculating Flows", Comp.Methods in Appl.Mech.and Engg Vol23 (1980), pp.293-312.
- 8 Torrance, K.E., and Turcotte, D.L., "Thermal Convection with Large Viscosity Variations", J.Fluid Mech., Vol.47, Part 1 (1971), pp.113-125.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-7

P.P. 71 - 81

PUC/RJ

SIMULAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DINÂMICA DE CALOR ENTRE O MEIO AMBIENTE E UM RECINTO

João Pereira de Brito Filho

Departamento de Eletrônica e Sistemas
UFPE - Recife - Pernambuco - Brasil

Naum Fraidenraich

Departamento de Energia Nuclear
UFPE - Recife - Pernambuco - Brasil

SUMÁRIO

Neste trabalho são apresentadas soluções numéricas do problema da troca dinâmica de calor entre o meio ambiente e um recinto. A temperatura do interior do recinto foi obtida para diversas situações de interesse, tais como: produção interna de calor positiva (aquecimento) ou negativa (esfriamento) com e sem massa térmica no recinto e diversas espessuras da parede que recebe radiação solar. As soluções numéricas são discutidas.

SUMMARY

In this paper, numerical solutions are obtained for the heat transfer problem between a closed region and the environment. The temperature of the enclosure was obtained for several situations of interest, as the following: internal production of heat, positive (heating) or negative (cooling), with and without thermal mass of the closed region and several thicknesses of the external wall receiving solar radiation. A discussion is made of the numerical solutions.

1- Introdução

O problema da transferência de calor entre o meio ambiente e um recinto tem sido bastante estudado nos últimos anos (1), (2). No Brasil esta linha de pesquisa se mostra particularmente atrativa visto que dos 19% do consumo de energia elétrica destinado ao uso residencial uma parcela considerável se destina ao acondicionamento dos mesmos (3).

Através da formulação de um modelo que reproduza com relativa precisão os mecanismos de transferência de calor pretende-se minimizar o consumo desta energia.

Neste trabalho se procede uma análise temporal da troca de calor entre o meio ambiente e um recinto. O problema foi resolvido levando-se em conta dentre outros parâmetros os seguintes: radiação solar, produção interna de calor e massa térmica.

A função incôgnita temperatura do interior foi relacionada com a temperatura do exterior através de uma função que envolve todos os parâmetros considerados. Esta relação pode ser considerada como uma função transferência na linguagem dos problemas de controle, permitindo sua utilização em projetos de engenharia.

2- Modelo Matemático

Seja R um recinto limitado lateralmente pelas paredes 1 e 2, conforme a figura 1:

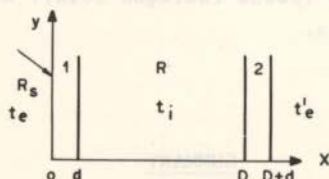


FIG. 1 - RECINTO LIMITADO PELAS PAREDES 1 e 2

Considere t_e e t_i as temperaturas do exterior e do interior do recinto como funções apenas do tempo em um regime permanente. Os índices e e i indicam a região exterior e interior do recinto respectivamente. As paredes de espessura d são infinitas longitudinalmente e estão espaçadas de uma distância D . Foi suposto que apenas a face externa da

parede 1 recebe radiação solar.

Para paredes de difusibilidade térmica α , condutividade térmica k , coeficientes de emissividade e absorção nas duas faces ϵ_i e α_p , respectivamente e para um recinto que contém uma massa térmica total G e uma produção interna de calor P por unidades de superfície da parede 1, a transferência de calor entre o ambiente e o recinto pode ser avaliada pela solução das equações de difusão das paredes 1 e 2:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} \quad (2)$$

sujeitas as condições de contorno:

$$\alpha_p R_s + h_{1e}(t_e - t_{1e}) = -k \frac{\partial t_1}{\partial x} \quad \left| \quad x = x_{1e} \right. \quad (3)$$

$$h_{1i}(t_{1i} - t_i) + h_r(t_{1i} - t_{2i}) = -k \frac{\partial t_1}{\partial x} \quad \left| \quad x = x_{1i} \right. \quad (4)$$

$$P + h_{1i}(t_{1i} - t_i) + h_{2i}(t_{2i} - t_i) = G \frac{dt_i}{d\tau} \quad (5)$$

$$h_{2i}(t_i - t_{2i}) + h_r(t_{1i} - t_{2i}) = -k \frac{\partial t_2}{\partial x} \quad \left| \quad x = x_{2i} \right. \quad (6)$$

$$h_{2e}(t_{2e} - t'_e) = -k \frac{\partial t_2}{\partial x} \quad \left| \quad x = x_{2e} \right. \quad (7)$$

onde R_s em (3) é a radiação solar instantânea que incide sobre a face externa da parede 1 (4):

$$R_s = R_d \{ \cos \beta (t_g \lambda (\sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cos \omega h) - \sin \delta \sin \lambda) - \sin \beta \cos \delta \sin \omega h \} \quad (8)$$

R_d = Radiação solar direta que incide sobre uma superfície normal dos raios solares.

β = Ângulo que a projeção da normal da parede forma no plano horizontal com o meridiano do lugar (positivo de sul para leste).

λ = Latitude

δ = Declinação solar.

Na equação (4), h_p representa um coeficiente de convecção que leva em conta a troca radiativa entre as paredes (5):

$$h_p = \frac{4T_{oi}^3 \epsilon \sigma}{2 - \alpha_p} \quad (9)$$

onde T_{oi} é uma temperatura absoluta média do recinto e σ é a constante de Stefan-Boltzman. Os demais são coeficientes de convecção ligados às faces externas e internas das paredes com as temperaturas do exterior e do interior do recinto.

3- Solução Analítica

O problema como está formulado apresenta como funções incógnitas:

$$t_1(x, \tau) \quad t_2(x, \tau) \quad t_i(\tau)$$

uma vez que a troca de calor convectiva entre a parede 2 e o recinto foi incluída (6). No entanto, este modelo pode ser simplificado no sentido de se evitar obter a função $t_2(x, \tau)$. Como foi suposto que apenas a parede 1 recebe radiação solar, o salto de temperatura entre a sua face interna e o recinto deve ser bem maior que o salto equivalente para a parede 2. Esta suposição permite eliminar a troca convectiva mencionada nas equações (5) e (6) e desacoplar a solução da equação de difusão (2) do restante do problema.

Para este modelo simplificado, temos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\alpha_n R_e + h_{1e}(t_e - t_{1e}) = -k \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=x_{1e}} \quad (3)$$

$$h_t(t_{1i} - t_i) = -k \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=x_{1i}} \quad (10)$$

$$P + h_{1i}(t_{1i} - t_i) = G \frac{dt_i}{d\tau} \quad (11)$$

onde $h_t = h_{1i} + h_p$ é um coeficiente de convecção total. Propondo uma solução produto do tipo:

$$t_1(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(x) e^{jn\omega\tau} \quad (12)$$

para a equação (1), obtemos:

$$V_n(x) = a_n e^{(1+j)\left(\frac{n\omega}{2\alpha}\right)^{1/2} x} + b_n e^{-(1+j)\left(\frac{n\omega}{2\alpha}\right)^{1/2} x} \quad (13)$$

onde a_n e b_n são funções complexas de cinco coeficientes de convecção, dos quais dois são virtuais, e de quatro temperaturas. O primeiro coeficiente expressa a influência da massa térmica quanto a atenuação das flutuações de temperatura ($h_a(n) = n\omega G$) e o segundo evidencia as propriedades físicas da parede 1 ($h_b(n) = k(n\omega/2\alpha)^{1/2}$). Os demais são os coeficientes h_{1e} , h_{1i} e h_t inerentes ao mecanismo de troca de calor.

Além da temperatura do exterior, duas temperaturas ligadas à produção interna de calor $p_n/h_a(n)$ e p_n/h_{1i} e uma outra ligada a radiação solar r_n/h_{1e} completam a composição dos coeficientes a_n e b_n .

Procedendo uma decomposição em série de Fourier das grandezas dinâmicas: radiação solar, produção interna de calor e temperaturas se obtém a solução de ordem zero:

$$t_{0i} = t_{0e} + \frac{h_t}{h_{1i}} \frac{p_0}{U} + \frac{r_0}{h_{1e}} \quad (14)$$

onde

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1 e} + \frac{1}{h_t} + \frac{d}{k} \quad (15)$$

é a resistência térmica total da parede e uma solução de ordem n (6):

$$t_{in} = V_n(x) \left|_{x=0} + \frac{k}{h_t} \frac{dV_n(x)}{dx} \right|_{x=d} \quad (16)$$

As expressões (14) e (16) podem ainda ser escritas de modo a se ter o primeiro membro independente da temperatura do exterior:

$$t_{oi}^* = 1 + N_P(o) \frac{h_t}{U} + N_R(o) \quad (17)$$

$$t_{in}^* = X(1 + N_T z) e^z + Y(1 - N_T z) e^{-z} \quad (18)$$

onde $z = (1 + j)N_D(n)$ (18a)

$$X = \frac{1}{2D} \{-h_1 e^{(1+N_R(n))} \left(\frac{N_G(n)+j}{N_G^2(n)+1} N_G(n) h_t - h_b(n)(1+j) \right) e^{-z} - (h_1 e^{(1+j)} h_b(n)) \left(\frac{jN_G(n)-1}{N_G^2(n)+1} N_P(n) h_t \right)\} \quad (18b)$$

$$Y = \frac{1}{2D} \{h_1 e^{(1+N_R(n))} \left(\frac{N_G(n)+j}{N_G^2(n)+1} N_G(n) h_t + h_b(n)(1+j) \right) e^{-z} + (h_1 e^{-(1+j)} h_b(n)) \left(\frac{jN_G(n)-1}{N_G^2(n)+1} N_P(n) h_t \right)\} \quad (18c)$$

$$D = \{h_1 e \frac{N_G(n)+j}{N_G^2(n)+1} N_G(n) h_t + ((1+j)h_b(n))^2 \} \operatorname{senh} z + (1+j)h_b(n) \left(\frac{N_G(n)+j}{N_G^2(n)+1} N_G(n) h_t + h_1 e \right) \operatorname{cosh} z \quad (18d)$$

em que os números adimensionais $N_R(n)$, $N_G(n)$, $N_D(n)$, $N_P(n)$ e N_T são assim definidos:

$N_R(n) = \frac{r_n}{h_{1e}t_{en}}$ expressa o efeito da radiação solar.

$N_G(n) = \frac{h_a(n)}{h_{1i}}$ expressa o efeito da massa térmica do recinto.

$N_D(n) = \frac{d}{d_p}$ expressa o efeito da espessura da parede
($d_p = (2\alpha/nw)^{+1/2}$ é a profundidade de penetração).

$N_P(n) = \frac{pn}{h_{1i}t_{en}}$ expressa o efeito da produção interna de calor.

$N_T = \frac{k}{h_t d}$ representa a transmissão relativa de calor.

4- Resultados numéricos e discussão

Foram realizadas várias simulações em computador utilizando Fortran IV para diversos valores dos números adimensionais citados acima.

Com a utilização da sub-rotina FORIT, se obteve os coeficientes de Fourier de um perfil de temperatura do exterior real. A função produção de calor escolhida teve a forma de uma onda quadrada de amplitude P, positiva (aquecimento) ou negativa (resfriamento, no intervalo compreendido entre 8h e 16h. A tabela I traz um resumo das situações analisadas e os gráficos a, b, c e d da figura 2 apresentam as curvas da temperatura do interior para as diversas simulações.

TABELA 1 - S₁: Efeito da espessura da parede; S₂: Efeito da radiação solar; S₃: Efeito da produção interna de calor; S₄: Efeito da massa térmica do recinto.

	S ₁			S ₂	S ₃		S ₄	
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈
N _D	0.44	0.89	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33
N _R	0	0	0	0.37	0	0	0	0
N _G	0	0	0	0	0	0	0.7	0.7
N _P	0	0	0	0	+0.38	-0.45	+0.38	-0.45

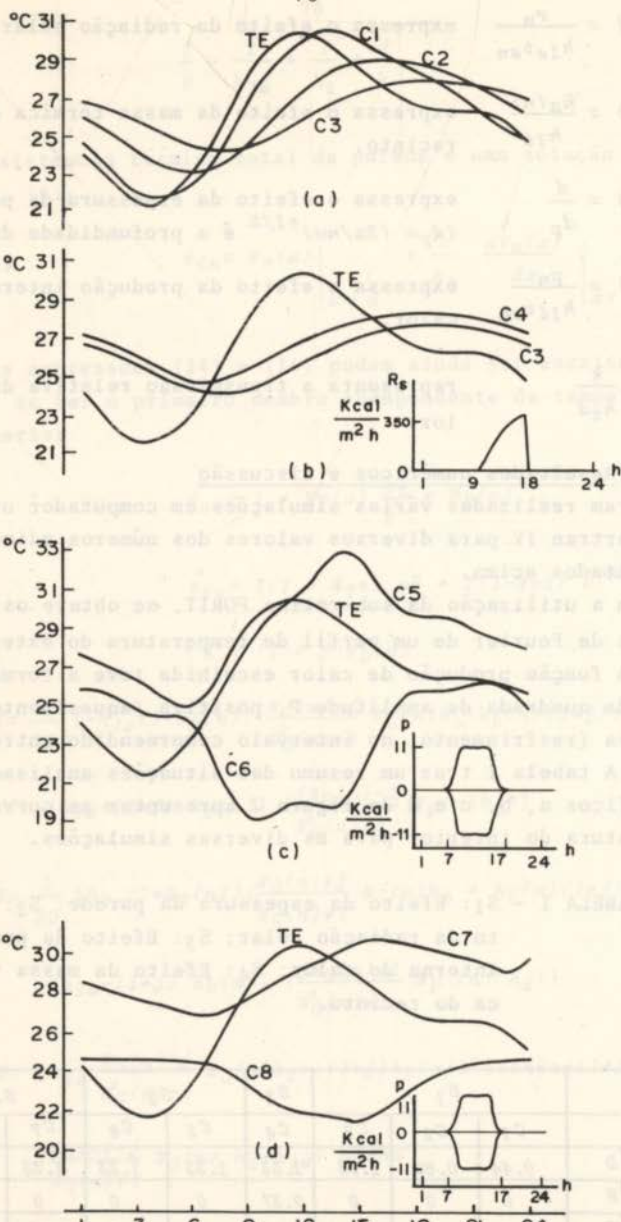


FIG. 2 - (a) SIMULAÇÃO S₁; (b) SIMULAÇÃO S₂; (c) SIMULAÇÃO S₃; (d) SIMULAÇÃO S₄

A expressão (18) permite calcular a variável t_{in}^* em função de quatro números adimensionais que dependem da ordem n e que expressam a influência das propriedades e espessura da parede, da radiação solar, do termo de produção e da inércia térmica, bem como do parâmetro $N_T = \frac{k}{h_t d}$. O segundo membro da equação (18) pode, portanto, ser considerado uma função transferência que expressa a resposta do sistema a uma solicitação t_{in} .

No gráfico (a) se observa que a temperatura do interior sofre uma atenuação e uma defasagem quando comparada com a temperatura do exterior para diversos valores do número adimensional N_D .

Este número relaciona a espessura da parede com a distância característica d_p , que pode ser pensada como uma distância de penetração, a semelhança dos fenômenos de difusão de ondas eletromagnéticas em sólidos condutores. Para valores característicos dos materiais que constituem as paredes, $d_p = 11,4$ cm, quando $N_D = 1,33$ ou seja $d = 15$ cm, o efeito de atenuação é considerável.

No gráfico (b) está representado o efeito da radiação solar que produz um acréscimo significativo da temperatura em relação ao caso C_3 , sem radiação, no período de incidência dos raios solares. A diferença de temperatura diminui no período sem radiação, aproximando-se do perfil C_3 .

O efeito da produção de energia, positiva (aquecimento) e negativa (esfriamento) na temperatura interior se representa no gráfico (c). Podemos comprovar que não existe, como era de se esperar, defasagem entre a função produção e seus efeitos na temperatura do interior. Esta função pode ser utilizada como variável de controle na climatização do recinto, em especial visando minimizar o consumo de energia necessário para a obtenção de determinadas condições de temperatura do mesmo.

Finalmente os efeitos combinados da inércia térmica e da produção de energia podem ser observados no gráfico (d), em especial a atenuação do perfil de temperatura interna devido ao efeito de armazenamento de energia na massa térmica. Como se pode constatar através da expressão (17) as tempera-

turas médias dos perfis C_7 e C_8 deverão ser as mesmas que as temperaturas médias dos perfis C_5 e C_6 , já que o efeito da massa térmica não aparece na equação mencionada, reduzindo-se somente a atenuar as oscilações de temperatura. Isso tem relação com os valores que assume a temperatura média do recinto nos diversos casos analisados. Obviamente t_{oi} será modificada como resultado de todo fator que introduz ou subtrai energia do recinto, como pode se verificar a partir da expressão (17), no caso a radiação solar e o termo de produção de energia. Portanto, não somente será necessário atuar sobre as oscilações de temperatura, como sobre o valor médio da mesma.

5- Conclusões

A partir dos resultados apresentados, verifica-se que a escolha de uma espessura da parede que torne o número $N_D \sim 1,4$ faz com que se obtenha uma importante atenuação da temperatura do exterior. A combinação de uma adequada função produção com os efeitos da massa térmica e uma favorável orientação do recinto poderá reduzir o consumo de energia necessário para a obtenção de condições preestabelecidas do mesmo.

Este objetivo pode ser especialmente interessante em sistemas de armazenamento de produtos perecíveis que devem ser mantidos em determinadas condições de temperaturas e umidade.

O modelo formulado assim como os resultados obtidos permitem pensar na possibilidade de utilizá-lo na otimização de processos da troca de calor entre recintos e o meio ambiente. Em próximos trabalhos pretende-se explorar essa possibilidade.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Balcomb, J.D., Hedstrom J.C. and McFarland R.D. - "Simulation Analysis of Passive Solar Heated Buildings" - Los Alamos Scientific Laboratory.
- (2) Mathur, S.S. - "Application of Effects of Periodic Variation of Solar Radiation on the Ground"

Temperature at Various Depths and the Heat Flux Through a Roof with a Water Film". Energie Solaire - Conversion et applications, Editions DU CNRS - pg. 291-302 (1977).

- (3) "Anuário Estatístico do Brasil" - IBGE-1977 - pg. 487.
- (4) Meinel, Aden B. e Meinel, Marjorie P.-"Applied Solar Energy. An Introduction".- Addison Wesley , pg. 92 (1977).
- (5) McAdams, H. William - "Heat Transmission" - McGraw-Hill, pg. 63 (1954).
- (6) Brito Filho, J.P. de e Fraidenraich, Naum - "Análise Dinâmica do Problema da Troca de Calor Entre um Recinto e o Meio Ambiente" - Publicação interna do Deptº de Energia Nuclear-UFPE (1981).



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA
RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-8

P.P. 83 - 96

PUC/RJ

ESCOAMENTO SUPERSÔNICO EM TUBEIRAS

Carlos Alberto Thompson
 Prof. Titular, IME
 Rio de Janeiro - Brasil

SUMÁRIO

Este trabalho trata da análise numérica dos escoamentos supersônicos em tubeiras com simetria axial para diversos ângulos do divergente. Tanto os pontos, como os respectivos parâmetros do escoamento são obtidos pelo método das características.

São apresentadas as distribuições da pressão, temperatura e velocidade adotando-se como hipótese o regime permanente, gás perfeito, escoamentos ideal e irrotacional. O escoamento é suposto como isoentrópico em todo seu domínio exceto nas regiões onde ocorrem os choques oblíquos.

SUMMARY

This work deals with the numerical analysis of an axially symmetric supersonic flow for different angles of the nozzle. The locations and the respective properties of the flow are obtained by the characteristic method.

The pressure, temperature and velocity distributions are obtained assuming the flow as steady, irrotational and ideal. The gas is considered as perfect and the flow is isentropic except in the regions where oblique shock occur.

1. INTRODUÇÃO

Nos projetos de foguetes admite-se geralmente o escoamento nas tuberias como unidimensionais. Este procedimento é válido quando se deseja obter apenas valores qualitativos para o empuxo.

Este estudo tem como objetivo obter a distribuição da pressão, temperatura e velocidade dentro das tuberias dos foguetes para diferentes incidências. O escoamento é suposto como irrotacional, regime permanente, ideal isoentrópico e com simetria axial. As forças gravitacionais são desprezíveis e os gases provenientes da queima do propelente são admitidos como perfeitos.

A partir da linha geradora na região transônica, resolve-se numericamente o sistema de equações diferenciais parciais pelo método das características.

2. ANÁLISE TEÓRICA

A equação da quantidade de movimento linear para regime permanente, ausência de forças gravitacionais e viscosas, gás perfeito é escrita por (1)

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \frac{V^2}{2} - a^2 \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

Onde \vec{V} é o vetor velocidade, V o seu módulo e a a velocidade de propagação.

A equação da continuidade para regime permanente é dada por (2),

$$\nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (2)$$

onde ρ é a massa específica do fluido.

Combinando-se as relações (1) e (2) e supondo-se sime

tria axial, escreve-se o sistema de equações (5)

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2} \right) u_x - \frac{uv}{a^2} u_y - \frac{uv}{a^2} v_x + \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) v_y + \frac{v}{y} = 0$$

$$v_x = u_y \quad (4)$$

onde a relação (4) é obtida pela condição de irrotacionalidade. As componentes escalares da velocidade segundo as coordenadas longitudinal (x) e radial (y) são representadas por u e v respectivamente. As derivadas parciais são representadas pelos respectivos subscritos x ou y.

Para se obter a solução do sistema representado pelas equações (3) e (4) pelo método das características, utiliza-se da equação de compatibilidade (2). Esta equação é obtida pela combinação linear das equações (3) e (4). Portanto, sendo A_1 e A_2 constantes, escreve-se

$$A_1 (u^2 - a^2) \left(u_x + \frac{A_1 (2uv) + A_2}{A_1 (u^2 - a^2)} u_y \right) + (-A_2) \left(v_x + \frac{A_1 (v^2 - a^2)}{-A_2} v_y \right) = 0 \quad (5)$$

Por outro lado, sendo u e v funções de x e y,

$$\frac{du}{dx} = u_x + \frac{dy}{dx} u_y \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dx} = v_x + \frac{dy}{dx} v_y \quad (7)$$

Fazendo-se em (5) os coeficientes de u_y e v_y iguais as inclinações $\frac{dy}{dx}$ ou λ_{\pm} ,

$$\lambda_{\pm} = \frac{A_1 (2uv) + A_2}{A_1 (u^2 - a^2)} \quad (8)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{A_1 (v^2 - a^2)}{-A_2} \quad (9)$$

Consequentemente, de (5), (6), (7), (8) e (9) escreve-se

$$(u^2 - a^2) du_{\pm} - (u^2 - a^2) \lambda_{\pm} - 2uv \, dv_{\pm} - \frac{a^2 v}{y} dx_{\pm} = 0 \quad (10)$$

Sendo as linhas de Mach coincidentes com as características 4, pela figura 1 escreve-se (1)

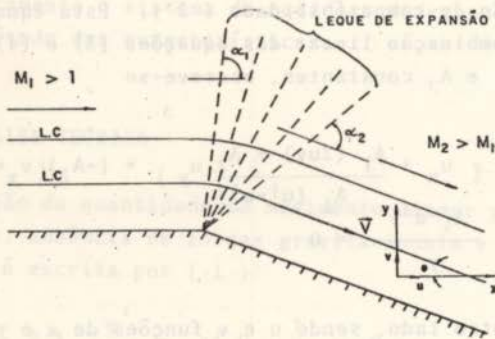


Fig.1 Representação do campo do escoamento supersônico

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_{\pm}} = \lambda_{\pm} = \tan(\theta_{\pm} + \alpha) \quad (11)$$

onde α é o ângulo formado pela linha de Mach e a direção do escoamento e θ é o ângulo formado pela linha de corrente e a coordenada x .

O sistema de equações formado por (10) e (11) é resolvido pelo método das diferenças finitas através das características C_+ e C_- como são mostradas na figura 2.

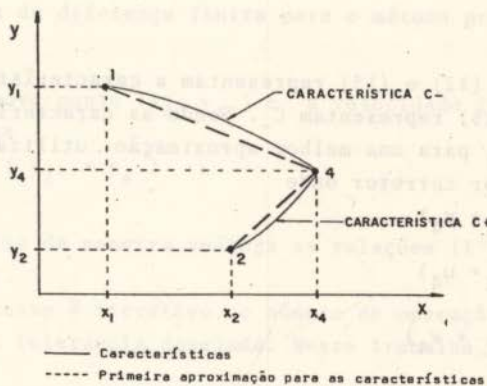


Fig.2 Malha de diferença finita onde a linha tracejada representa a primeira aproximação.

Conhecidos os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e as respectivas velocidades (u_1, v_1) e (u_2, v_2) determina-se a localização (x_4, y_4) e a velocidade (u_4, v_4) pelo sistema de equações algébricas.

$$(u_2^2 - a_2^2)(u_4 - u_2) + 2u_2v_2 - (u_2^2 - a_2^2)\lambda_2 (v_4 - v_2) - \alpha_2 = 0 \quad (12)$$

$$y_4 - y_2 = \lambda_2 (x_4 - x_2) \quad (13)$$

$$(u_1^2 - a_1^2)(u_4 - u_1) + 2u_1 v_1 - (u_1^2 - a_1^2) \lambda_1 (v_4 - v_1) - \alpha_1 = 0 \quad (14)$$

$$y_4 - y_1 = \lambda_1 (x_4 - x_1) \quad (15)$$

onde α_2 e α_1 são dados por:

$$\alpha_1 = \frac{a_2^2 v_2}{y_2} (x_4 - x_2)$$

$$\alpha_2 = \frac{a_1^2 v_1}{y_1} (x_4 - x_1)$$

As equações (12) e (13) representam a característica C_+ e as (14) e (15) representam C_- . Sendo as características linhas curvas, para uma melhor aproximação, utiliza-se do mé todo previsor corretor onde

$$y_{1'} = \frac{1}{2} (y_1 + y_4) \quad (16)$$

$$u_{1'} = \frac{1}{2} (u_1 + u_4) \quad (17)$$

$$v_{1'} = \frac{1}{2} (v_1 + v_4) \quad (18)$$

$$y_{2'} = \frac{1}{2} (y_2 + y_4) \quad (19)$$

$$u_{2'} = \frac{1}{2} (u_2 + u_4) \quad (20)$$

$$v_{2'} = \frac{1}{2} (v_2 + v_4) \quad (21)$$

As coordenadas x_1 e x_2 são mantidas constantes como / mostra a figura 3

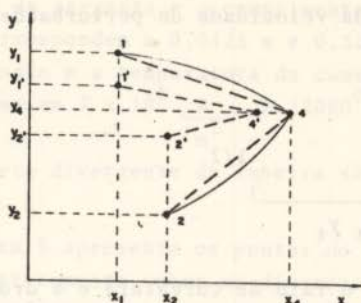


Fig.3 Malha de diferença finita para o método previsor corretor.

Obtidos o novo ponto (x_4, y_4) e a velocidade (u_4, v_4) , determina-se

$$y_{1'} = \frac{1}{2} (y_1 + y_4) \quad (22)$$

procedendo-se de maneira análoga as relações (17), (18), (19), (20) e (21).

Como o processo é iterativo, o número de operações é determinado pela tolerância desejada. Neste trabalho, foi estipulado que

$$u_{4n} - u_{4n-1} < 10^{-6} \quad (23)$$

A linha geradora, para a determinação dos pontos e das propriedades do escoamento, é obtida pela teoria das pequenas perturbações onde impõe-se a condição da componente da velocidade perturbada v' ser identicamente nula. Portanto, escreve-se para a região próxima à garganta a equação da linha geradora (2)

$$x = \frac{-(k+1)\bar{\alpha}y^2}{8} \quad (24)$$

onde k é dado pela relação entre os calores específicos a pressão e volume constantes e $\bar{\alpha}$ é por hipótese relacionado a componente da velocidade de perturbações u' por (2)

$$u' = \bar{\alpha} x \quad (25)$$

onde

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{2}{(k+1) R_t y_t} \right) \quad (26)$$

sendo R_t e y_t o raio de curvatura e a ordenada da garganta.

A figura 4 mostra a linha geradora obtida fazendo-se a componente v igual a zero na região da garganta (2). A linha sônica não é adequada para gerar os pontos do escoamento pois abrange pontos anteriores à garganta onde o número de Mach é menor do que um.

Na análise numérica o eixo y é deslocado de modo a conter o ponto T.

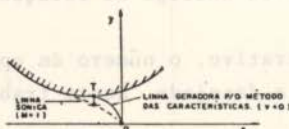


Fig. 4 Linha geradora obtida pela teoria da perturbação.

Obtidos os pontos e as respectivas componentes da velocidade u, v , determina-se as distribuições da temperatura e da pressão ao longo da tubeira utilizando-se da equação da energia e da condição de isentropia. Assim,

$$\frac{T(x,y)}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (27)$$

$$\frac{p(x,y)}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-k}} \quad (28)$$

3. RESULTADOS

O raio da garganta e o comprimento da tubeira empregados, correspondem à 0,0425 m e 0,325 m respectivamente. A pressão e a temperatura da câmara de combustão / são fixadas em $7 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ e 22000°K e os semiângulos - los da parte divergente da tubeira são de 5° , 11° , 13° , 15° e 17° .

A figura 5 apresenta os pontos do escoamento calculados numericamente sobre as diversas linhas de Mach / ou características para o semiângulo de 15° e para 11 pontos localizados sobre a linha geradora.

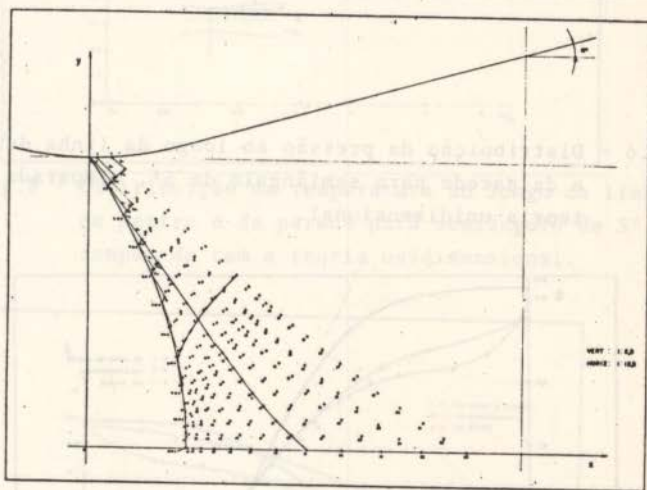


Fig. 5-Pontos do domínio do escoamento na malha das características.

As figuras 6 e 7 mostram a distribuição da pressão ao longo da linha de centro e da parede para semiângulos de 5° e 17° respectivamente.

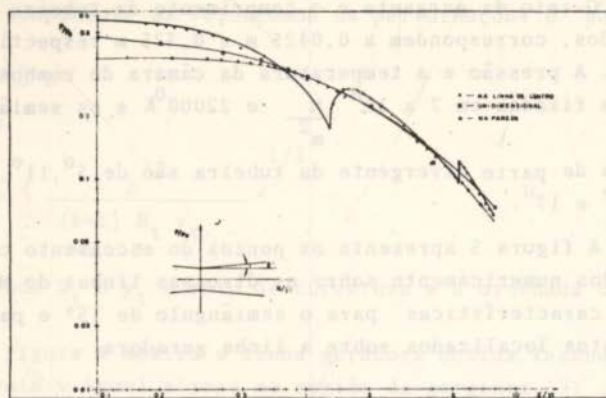


Fig.6 - Distribuição da pressão ao longo da linha de centro e da parede para semiângulo de 5° , comparada com a teoria unidimensional.

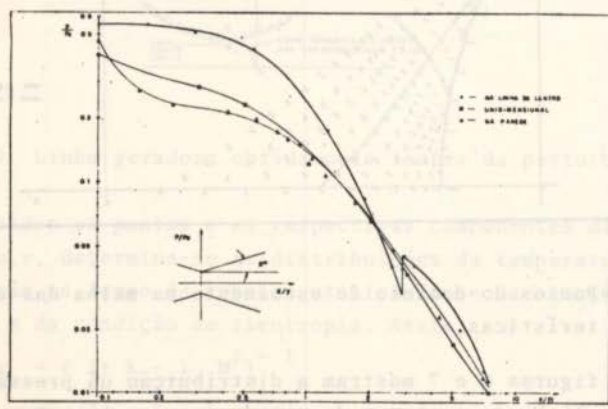


Fig.7 - Distribuição da pressão ao longo da linha de centro e da parede para semiângulo de 17° .

As figuras 8 e 9 referem-se a distribuição da temperatura e as figuras 10 e 11 mostram a distribuição da velocidade para os mesmos semiângulos apontados anteriormente. São apresentadas curvas na linha de centro, na parede e a respectiva distribuição considerando-se o modelo unidimensional.

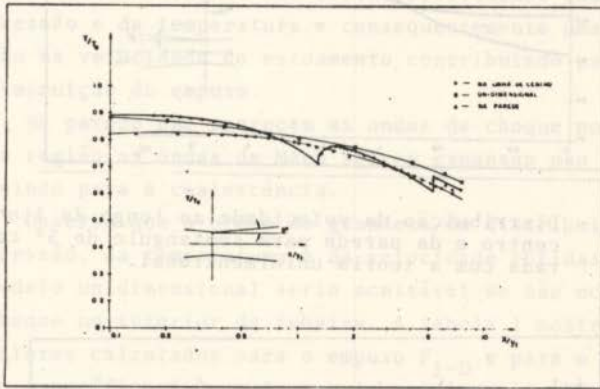


Fig.8 - Distribuição da temperatura ao longo da linha de centro e da parede para semiângulo de 5° / comparada com a teoria unidimensional.

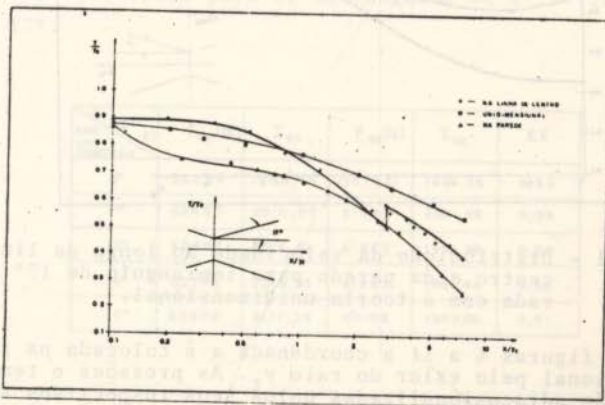


Fig.9 - Distribuição da temperatura ao longo da linha de centro e da parede para semiângulo de 17° comparada com a teoria unidimensional.

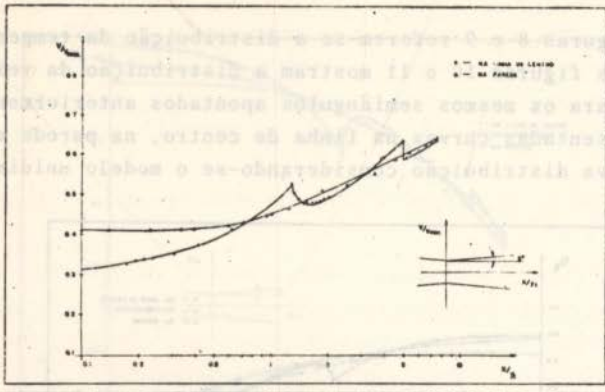


Fig. 10 - Distribuição da velocidade ao longo da linha de centro e da parede para semiângulo de 5° comparada com a teoria unidimensional.

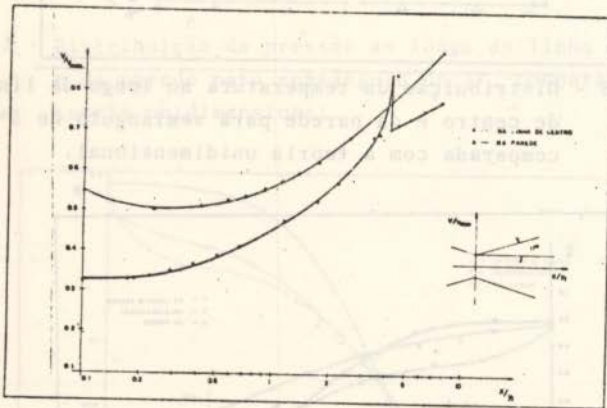


Fig. 11 - Distribuição da velocidade ao longo da linha de centro e da parede para semiângulo de 17° comparada com a teoria unidimensional.

Nas figuras 6 a 11 a coordenada x é colocada na forma adimensional pelo valor do raio y_0 . As pressões e temperaturas são adimensionalizadas pelos seus respectivos valores de estagnação. A velocidade é adimensionalizada por v_{max} que é constante nos escoamentos homoentálpicos.

4. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Os gráficos 6 a 11 revelam descontinuidades na linha de centro referentes às distribuições da pressão, temperatura e velocidade. Estas descontinuidades são provocadas pelas ondas de choque oblíquas devidas à coalescência das ondas de Mach. Observe que o aparecimento das ondas de choque no interior da tubeira provoca tanto o aumento das irreversibilidades como da pressão e da temperatura e conseqüentemente uma redução na velocidade do escoamento, contribuindo para a diminuição do empuxo.

Na parede não aparecem as ondas de choque pois nesta região as ondas de Mach sofrem expansão não contribuindo para a coalescência.

Observe que a ordem de grandeza da distribuição da pressão, da temperatura e da velocidade obtidas pelo modelo unidimensional seria aceitável se não ocorresse choque no interior da tubeira. A tabela 1 mostra os valores calculados para o empuxo F_{1-D} e para o impulso específico I_{SD} pela teoria unidimensional. São também mostrados o empuxo F_{3D} e o impulso I_{S3} para o modelo tridimensional. Na última coluna da tabela estão os valores da eficiência EF. Os valores da tabela são calculados para os semiângulos de $5^\circ, 11^\circ, 13^\circ, 15^\circ$ e 17° .

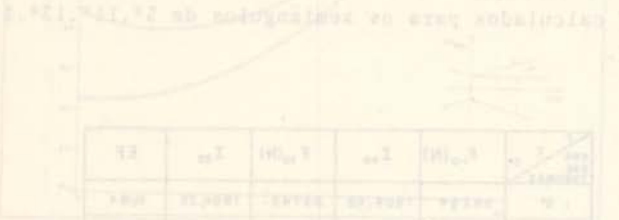
ANG. DAS TUBEIRAS	I_{EF}	$F_{1-D}(N)$	I_{SD}	$F_{3D}(N)$	I_{S3}	EF
5°		59254	1906,68	55745	1801,25	0,94
11°		62467	2010,07	61942	2001,49	0,99
13°		62667	2016,51	61872	1999,22	0,99
15°		62745	2019,05	61693	1993,44	0,98
17°		65808	2117,58	60103	1942,06	0,91

Tab. 1 - Empuxo, Impulso específico e Eficiência.

Observe que para os semiângulos compreendidos entre 10° e 15° , como são utilizados nos projetos, os impulsos específicos pela teoria tridimensional não diferem consideravelmente dos impulsos específicos/obtidos pela teoria unidimensional.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Chapman, A.J., William F.W., "Introductory Gas Dynamics", HRW-USA (1971)
- (2) Zucrow M.J., Hoffman J.D., "Gas Dynamics", Vol 1 e 2, John Wiley and Sons, New York, (1977)
- (3) Hesse, "Jet Propulsion", Mumford-Pitman, New York, (1964)
- (4) Sellos, F.R., "Escoamento Supersônico em Tubo", Tese de Mestrado do IME, Rio de Janeiro. (1980).
- (5) Aiex, R., " Estudo Teórico do Coeficiente de Arrasto de Onda em Ogivas de Foguetes ". Tese de Mestrado do IME, Rio de Janeiro, (1978).



α	C_d
0	0
10	0.15
15	0.25
20	0.35
25	0.45
30	0.55
35	0.65
40	0.75
45	0.85
50	0.95
55	1.05
60	1.15
65	1.25
70	1.35
75	1.45
80	1.55
85	1.65
90	1.75



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-9

P.P. 97 - 107

PUC/RJ

SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL DE GASES ATRAVÉS DO
ESCOAMENTO DE ÁGUA COM SUPERFÍCIE LIVRE

Carlos Roberto Altafini, M.Sc.

Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.

Deptº de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis - Brasil

SUMÁRIO

A analogia entre o escoamento de água com uma superfície livre e o escoamento compressível de gases, comumente chamada de analogia hidráulica, é analisada e identificadas as suas limitações. A mesa d'água é o equipamento utilizado para esta simulação, que permite a quantificação de escoamentos subsônicos e supersônicos com dispositivos de baixo custo. A analogia é aplicada a escoamento subsônico em torno de cilindros circulares e escoamento supersônico em torno de cones. Os resultados são comparados com dados teóricos e experimentais disponíveis e uma boa concordância é obtida.

SUMMARY

The analogy between the water flow with a free surface and the compressible fluid flow, commonly called hydraulic analogy, is analyzed and its limitations are identified. The water table is the equipment used for this simulation, which allows the quantitative analysis of subsonic and supersonic flow with a low cost apparatus. The hydraulic analogy is applied to subsonic flow around circular cylinders and supersonic flow around cones. The results are compared with available theoretical and experimental data and a good agreement is achieved.

1. Introdução

A quantificação da semelhança entre os fenômenos que o correm nos escoamentos compressíveis e os fenômenos superficiais no escoamento de água, sõ é possível de ser realizada para o caso de escoamentos bidimensionais e escoamentos tridimensionais axialmente simétricos.

A base matemática da analogia hidráulica foi primeiramente apresentada por Riabouchinsky [1], a partir da qual ou tros autores [2], [3] e [4], estenderam sua aplicabilidade a diversos estudos de escoamentos bidimensionais subsônicos e supersônicos de gases.

A motivação deste trabalho reside no fato de ser a analogia hidráulica, um método pouco dispendioso e bastante conveniente para a investigação de escoamentos compressíveis de gases. As particularidades que ocorrem no escoamento de ar a altas velocidades, são facilmente reproduzidas no escoamento análogo de água a baixas velocidades, utilizando-se a mesa d'água.

Os escoamentos subsônicos e supersônicos foram reproduzidos pelo escoamento de água, empregando-se canais convergente-divergentes, para acelerá-lo.

O objetivo deste trabalho consiste na verificação da analogia hidráulica em torno de obstáculos. Realizou-se a análise de escoamento subsônico em torno de cilindros circulares, como também de escoamento supersônico simétrico em torno de cones.

2. Teoria Básica

A correspondência entre o escoamento da água e o escoamento compressível bidimensional de um gás, é determinado pelas equações da continuidade, energia e propagação de ondas, sujeitas às seguintes hipóteses simplificativas:

Gás: (1) O escoamento é ideal e adiabático

(2) O regime é permanente

(3) O gás é considerado perfeito

Água: (1) O escoamento é ideal

(2) O regime é permanente

(3) A aceleração vertical é a aceleração da gravidade

(4) A tensão superficial é considerada nula.

Baseado nestas hipóteses, importantes relações análogas entre os parâmetros dos dois escoamentos são obtidas. Estas relações são somente satisfeitas para um gás com a razão de calores específicos (k), igual a 2 (gás hidráulico).

A analogia hidráulica prevê somente a correspondência entre as ondas sônicas nos gases e as ondas de gravidade na superfície da água. As ondas de capilaridade, devido à tensão superficial da água, não tomam parte na analogia hidráulica.

A similaridade dinâmica das propagações de ondas sônicas e de gravidade é estabelecida pela relação de velocidade do escoamento e a velocidade de propagação da onda. Para o caso da água, a referida relação é representada pelo número de Froude (Fr) e, para o gás, é representada pelo número de Mach (M).

A discontinuidade do escoamento, tanto pode existir no gás como na água. No gás, este fenômeno é uma onda de choque, cujo escoamento passando pelo mesmo, causa uma variação brusca de seus parâmetros. Para a água, a discontinuidade manifesta-se como um aumento súbito na profundidade da água, constituindo-se em um salto hidráulico.

Neste trabalho é apresentada a correspondência entre a onda de choque cônica e a curva e os respectivos salto hidráulico oblíquo de pequena intensidade (onda de gravidade) e o salto hidráulico curvo de intensidade moderada.

A Tabela 1 resume a correspondência entre os parâmetros dos escoamentos segundo a analogia hidráulica.

3. Descrição dos Equipamentos

3.1. Mesa D'água

O equipamento usado é mostrado na Figura 1, no qual se realiza a analogia hidráulica. É construída, por facilidade de execução, em uma estrutura soldada de aço, na forma de perfis cantoneiras e em chapas. As dimensões externas são de 2400 mm de comprimento por 1010 mm de largura e 1140 mm de altura. A estrutura da mesa d'água está sustentada por três pinos reguláveis que se apoiam no piso para proporcionar o seu nivelamento.

TABELA I - ANALOGIA HIDRÁULICA

Relações características do escoamento compressível bidimensional do gás hidráulico $k=2$.	Relações análogas do escoamento de água com superfície livre.
- Relação de massas específicas, ρ/ρ_0	- Relação de profundidades da água, z/z_0
- Relação de temperaturas absolutas, T/T_0	- Relação de profundidades da água, z/z_0
- Relação de pressões, p/p_0	- Quadrado da relação de profundidades da água, $(z/z_0)^2$
- Velocidade do som, $a = (kp/\rho)^{1/2}$	- Velocidade da onda de gravidade, $c = (gz)^{1/2}$
- Número de Mach, $M = V/a$	- Número de Froude, $Fr = V/(gz)^{1/2} = [2(z_0 - z)/z]^{1/2}$
- Relação de velocidades do escoamento, V/V_0	- Relação de velocidade do escoamento, V/V_0
- Relação de áreas de bocais, A/A_0	- Relação de larguras de canais convergente-divergentes, L/L_0
- Escoamento subsônico, $M < 1$	- Escoamento tranquilo, $Fr < 1$
- Escoamento supersônico, $M > 1$	- Escoamento rápido, $Fr > 1$
- Onda de choque	- Salto hidráulico.

O leito do canal d'água consiste de uma chapa horizontal de vidro plano transparente de 10 mm de espessura. A partir do reservatório d'água inferior, a água é conduzida ao reservatório d'água superior por meio de uma bomba centrífuga de ICV. No reservatório d'água superior, a água sofre uma uniformização no seu escoamento, ao passar primeiramente por um tubo distribuidor na entrada deste reservatório e após por uma camada de pedras. Com este procedimento, permitiu-se a obtenção de um fluxo calmo e uniforme na entrada do canal.

A forma empregada para acelerar o fluxo de água sobre o leito do canal, foi através do uso de canais convergente-divergentes, análogos aos bocais de mesmo perfil usados na aceleração de gases. Estes canais, executados em acrílico, foram em número de três, sendo utilizados, um na simulação de escoamento subsônico e os outros dois na simulação de escoamento supersônico.

3.2. Medidas de Profundidade

As medidas de profundidade da água necessárias à obten

ção dos números de Froude, processaram-se ao longo da linha de centro do canal d'água e ao longo de uma das paredes da seção de teste de um dos canais convergente-divergentes. Para isto, optou-se pelo uso de dois micrômetros com precisão de 0,01 mm, montados sobre um carro móvel longitudinalmente, para a realização simultânea destas medidas.

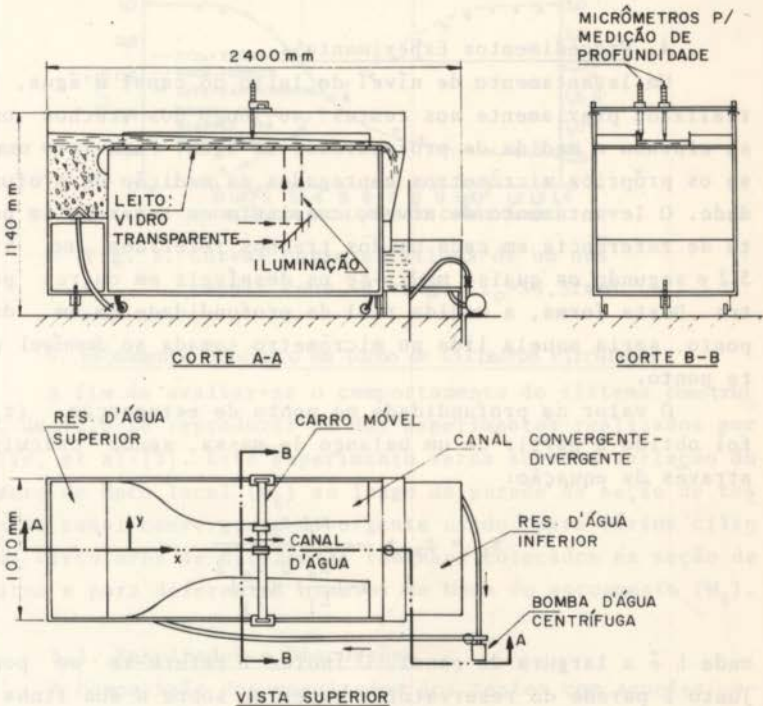


Fig. 1. Mesa d'água

3.3. Medidas do Ângulo das Ondas de Gravidade

Outra grandeza medida durante os testes, foi o ângulo das ondas de gravidade provocadas pelo modelo (cunha) na superfície livre do escoamento da água. Este ângulo é o formado entre estas ondas e o eixo de simetria do modelo, coincidente com a linha de centro do canal d'água.

A medição dos ângulos desejados para os diversos modelos, foi efetuada utilizando-se a projeção da imagem da su-

perfície do escoamento da água em torno de cada modelo em particular, em uma superfície horizontal. Iluminou-se o escoamento em torno do modelo através de uma fonte luminosa unidirecional, posicionada sob o canal d'água. Desta forma, a superfície livre do escoamento, é projetada em uma superfície semi-opaca colocada sobre o modelo. Esta imagem foi registrada fotograficamente.

4. Procedimentos Experimentais

Um levantamento de nível do leito do canal d'água, foi realizado previamente aos testes, ao longo dos trechos onde se efetuou a medida de profundidade da água. Para isto usaram-se os próprios micrômetros empregados na medição de profundidade. O levantamento de nível, consistiu em tomar-se um ponto de referência em cada um dos trechos referidos no item 3.2 e segundo os quais, medir-se os desníveis em outros pontos. Desta forma, a medida real da profundidade em um dado ponto, seria aquela lida no micrômetro somada ao desnível neste ponto.

O valor da profundidade no ponto de estagnação (z_0), foi obtido a partir de um balanço de massa, sendo calculado através da equação:

$$z_0 = z_s + \frac{z_1 - z_s}{1 - \left(\frac{L_s}{L_1}\right)^2 \left(\frac{z_s}{z_1}\right)^2} \quad (1)$$

onde L é a largura do canal. O índice 1 refere-se ao ponto junto à parede do reservatório superior sobre a sua linha de centro. Para fins de aferição dos canais convergente-divergentes, o índice s refere-se aos pontos situados ao longo da linha de centro do canal d'água. Para testes com modelos, o índice s refere-se aos pontos suficientemente longe dos modelos a fim de as medidas não serem afetadas pela presença dos mesmos.

Os canais convergente-divergentes foram previamente aferidos e revelaram um ótimo desempenho. As aferições são colocadas sob a forma de curvas características e podem ser apreciadas na Figura 2 para um dos canais. As aferições basearam-se nas medições de profundidade da água e na teoria da

Dinâmica dos Gases para escoamento unidimensional isentrópico para o gás hidráulico.

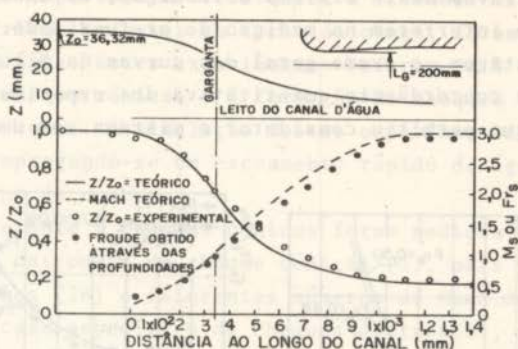


Fig. 2. Curvas características de um dos canais conv.-diverg. ($z_0 = 36,32\text{mm}$)

5. Escoamento Subsônico em Torno de Cilindros Circulares

A fim de avaliar-se o comportamento do sistema construído, decidiu-se reproduzir um dos experimentos realizados por Orlin, et al [3]. Este experimento versa sobre a variação do número de Mach local (M_{ℓ}) ao longo da parede da seção de testes do canal convergente-divergente usado, para vários cilindros circulares de diferentes tamanhos colocados na seção de testes e para diferentes números de Mach do escoamento (M_S).

5.1. Resultados e Discussões

A comparação dos resultados dos testes com aqueles apresentados por Orlin, et al [3], está apresentada nas figuras 3(a e b). Estas figuras mostram a variação da relação entre o número de Froude local (Fr_{ℓ}) e o número de Froude do escoamento (Fr_S), com a variação da relação entre as distâncias do início da seção de testes aos pontos de medição de profundidade (ℓ_x) e o comprimento da seção de testes (ℓ).

As figuras 4(a e b) ilustram o escoamento de água em torno dos cilindros utilizados.

As ondas de capilaridade formadas na superfície da água pela presença do modelo, muito contribuiu para os erros de leitura de profundidade da água. A medição da profundida-

de na referência [3], foi realizada por meio de uma bureta graduada conectada a tomadas de pressão estática na parede do canal. Através deste sistema de medição, as ondas de capilaridade não interferem na medição de profundidade. Apesar desta desvantagem, o exame geral das curvas da Figura 3, revela uma boa concordância quantitativa dos experimentos realizados, o que permitiu considerar o sistema com um ótimo desempenho.

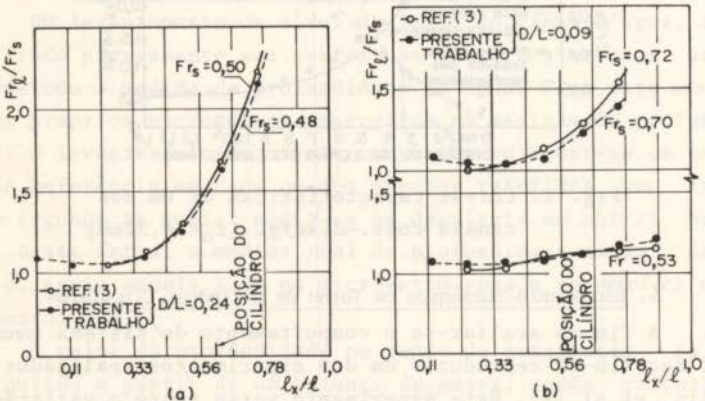


Fig. 3. Comparação entre resultados experimentais para o número de Froude local. (a) Cilindro $D=92\text{mm}$; (b) Cilindro $D=34,5\text{mm}$.

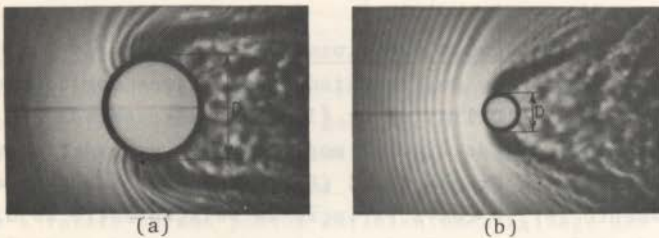


Fig. 4. Escoamento de água em torno de cilindros. (a) Cilindro $D=92\text{mm}$ e $Fr_s=0,48$; (b) Cilindro $D=34,5\text{mm}$ e $Fr_s=0,70$.

6. Escoamento Supersônico em Torno de Cones

O escoamento em torno de cones é um dos mais importantes no estudo da aerodinâmica de corpos de revolução. O es-

coamento em torno de cones e tridimensional mas, axialmente simétrico, podendo por isso ser considerado bidimensional.

Dois experimentos referentes a escoamentos supersônicos simétricos de gases em torno de cones, foram simulados na mesa d'água. Estes experimentos referem-se à formação de ondas de choque cônicas e à formação de choques destacados à frente de cones. A simulação destes experimentos, foi realizada empregando-se um escoamento rápido de água, simétrico em torno de cunhas.

Referente a choques cônicos foram medidas as variações do ângulo das ondas de choque cônicas (σ), para vários ângulos de cones (2θ) e diferentes números de Mach do escoamento (M_s). No caso específico de choques destacados, averiguou-se a forma da onda formada na superfície da água a frente da cunha, que segundo Shapiro [5], pode ser representada por uma hipérbole.

6.1. Resultados e Discussões

Alguns dos experimentos estão mostrados através dos registros fotográficos nas Figuras 5 e 6.

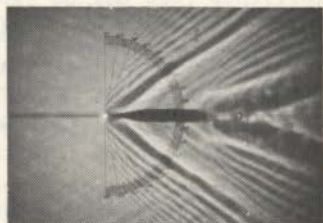


Fig. 5. Formação de ondas de gravidade (cunha: $\theta = 10^\circ$ e $Fr_s = 1,56$).

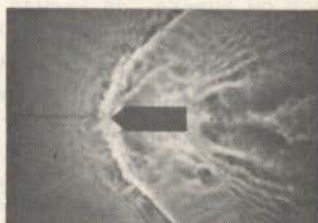


Fig. 6. Formação de onda de choque destacada (cunha: $\theta = 40^\circ$ e $Fr_s = 1,66$).

A medição dos vários ângulos das ondas de gravidade, foi realizada através dos valores médios das medições feitas por meio dos registros fotográficos. Os resultados estão apresentados sob a forma de gráficos nas Figuras 7(a,b e c) e, representam a variação do ângulo das ondas de choque ou das ondas de gravidade com o número de Froude do escoamento, para cada cunha. Os vários resultados experimentais, são compa

rados a resultados teóricos, segundo Krasnov e Morris [6], para o ar ($k=1,4$) e para o gás hidráulico ($k=2$).

Os resultados experimentais mostrados na Figura 7, em geral, concordam razoavelmente com os resultados teóricos e apresentam a mesma tendência. Para cada uma das curvas, à medida que o número de Froude aumenta, o ângulo das ondas de gravidade decresce e vice-versa.

A Figura 8 apresenta a variação do ângulo da assíntota ($\tan^{-1}\beta$), para diferentes números de Mach ou número de Froude e para diferentes ângulos de cunha. Nesta figura tem-se os resultados experimentais, obtidos por fotografias, comparados com a curva teórica apresentada por Shapiro [5] e representada pela equação:

$$\beta = (M_s^2 - 1)^{1/2} \quad (2)$$

Os contornos das ondas destacadas baseados nos resultados da Figura 8, aproximaram-se realmente de uma hipérbole para quase todos os números de

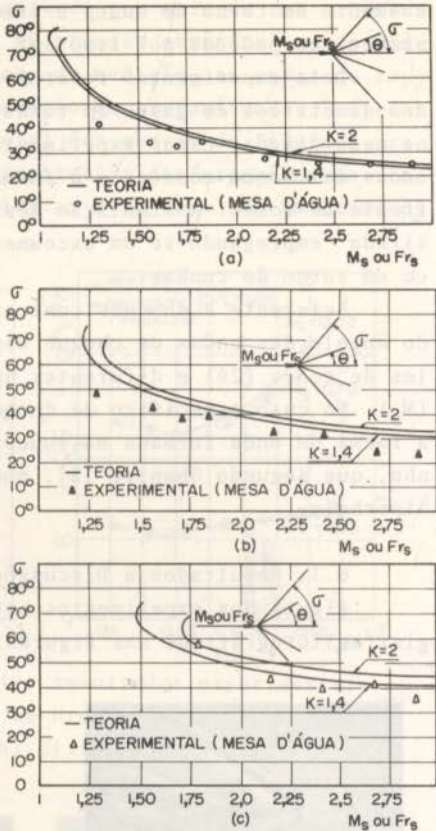


Fig. 7. Comparação entre resultados teóricos e experimentais para σ : (a) $\theta=10^\circ$; (b) $\theta=20^\circ$; (c) $\theta=30^\circ$.

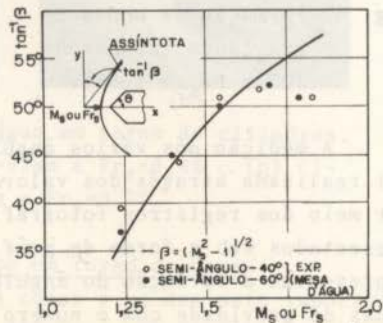


Fig. 8. Ângulo da assíntota ($\tan^{-1}\beta$).

Froude experimentados. Nota-se também que a medida que aumenta o número de Froude, aumenta o ângulo da assíntota, de forma similar nos gases.

7. Conclusões

O trabalho desenvolvido na mesa d'água, sugeriu as seguintes conclusões:

- A mesa d'água construída é indubitavelmente um excelente equipamento para a simulação dos fenômenos compressíveis de gases, em vista da excelente concordância qualitativa dos experimentos.

- Os resultados quantitativos dos experimentos realizados, não foram grandemente influenciados pela presença de imperfeições na construção da mesa d'água, bem como por deficiências de controle do escoamento. Na análise de escoamentos subsônicos em torno de cilindros, a concordância, com outros experimentos em mesa d'água, foi boa, o que atribui um ótimo desempenho a todo sistema construído. Referente ao escoamento supersônico em torno de cones, a concordância com os resultados teóricos, foi razoavelmente satisfatória.

- A analogia hidráulica, apesar de apresentar restrições no seu uso, constitui-se num meio bastante conveniente não só no seu emprego didático, mas também em investigações quantitativas prévias, de escoamentos compressíveis bidimensionais de gases e escoamentos compressíveis axissimétricos tridimensionais de gases em torno de corpos de revolução.

REFERÊNCIAS

- [1] Riabouchinsky, D., "Mécanique des Fluides", Comptes Rendus de l'Académie de Sciences, Vol. 195 (1932), pp. 998.
- [2] Black, J. and Mediratta, O.P., "Supersonic Flow Investigation with a Hydraulic Analogy Water Channel", The Aeronautical Quarterly, Vol. II (1951), pp. 227.
- [3] Orlin, W.J., Lindner, N.J. and Bitterly, J.G., "Application of the Analogy between Water Flow with a Free Surface and Two-dimensional Compressible Gas Flow", NACA - TN No. 1185 (1947).
- [4] Matthews, C.W., "The Design, Operation and Uses of the Water Channel as an Instrument for the Investigation of Compressible Flow Phenomena", NACA - TN No. 2008 (1950).
- [5] Shapiro, A.H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow", The Ronald Press Company, Vol. I e II (1954).
- [6] Krasnov, N.F. and Morris, D.N., "Aerodynamics of Bodies of Revolution", American Elsevier Publishing Co. (1970).



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-10

P.P. 109 - 113

PUC/RJ

ON THE DETERMINATION OF THE RESONANCE FREQUENCY OF
A HELMHOLTZ RESONATOR WITH VARIABLE SECTION NECK

Walter Zambrano
Mechanical Department, University of Chile

RESUMEN

Es bien conocido que la frecuencia de resonancia (f) de un resonador de Helmholtz depende de la velocidad del sonido (a), de la sección del cuello (A) del largo del mismo (L) y del volumen de la cavidad resonadora (V). El propósito de este trabajo es hallar f cuando la sección del cuello no es constante. Se encuentra que f aumenta o disminuye según el cuello sea, respectivamente divergente o convergente.

ABSTRACT

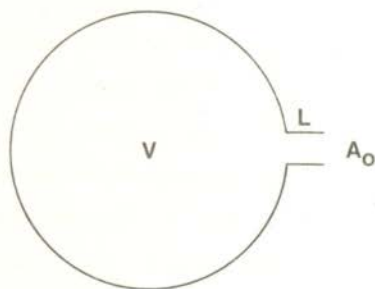
It is well known that the resonance frequency (f) of a Helmholtz resonator depends on sound speed (a), neck section (A), neck length (L) and on the resonator cavity volume (V). The purpose of this paper is to find f when the resonator neck section is not constant. It is found that a convergent neck leads to a resonance frequency diminution and that a divergent neck leads to a resonance frequency augmentation.

1. Introduction

It is well known that the resonance frequency of a Helmholtz resonator (see fig.1) with constant section neck is given by [1], [2].

$$f = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{A_0}{VL}} \quad \text{Hertz} \quad (1)$$

with a = sound speed; A_0 = neck section; L = neck length; V = resonator cavity volume. The purpose of this paper is to find an expression for the resonance frequency when the resonator neck section is not constant. It is found that a convergent neck leads to a resonance frequency diminution and that a divergent neck leads to a resonance frequency augmentation.



Helmholtz Resonator
Fig.1

2. Main hypothesis considered

- 2.1. Cavity pressure only depends on time.
- 2.2. Air inside resonator cavity evolves isentropically.
- 2.3. Friction forces are neglected because of the short neck length.

2.4. Air inside the neck is supposed to be incompressible. Its density will be denoted by ρ_n .

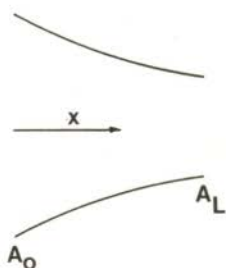
2.5. It is supposed a constant velocity distribution for a given section neck [3].

3. Calculation formulae (see fig.2)

It has been stated that friction forces will be neglected, therefore we will express the total energy conservation to the air mass contained in the neck.

3.1. Kinetics Energy (K.E)

$$K.E = \frac{\rho_n}{2} \int_0^L A(x) u^2 dx \quad (2)$$



$A(x)$ = variable section

$u(x, t)$ = air speed

$u_0 = u(0, t)$

$u_L = u(L, t)$

Fig.2

Taking into account the continuity equation for the air inside the neck, which is supposed to be incompressible:

$$Au = A_0 u_0 \quad (3)$$

equation (2) leads to:

$$K.E = \frac{\rho_n A_0^2 u_0^2}{2} \int_0^L \frac{dx}{A(x)} \quad (4)$$

3.2. Potential Energy (P.E)

If section A_0 is "moved" to the right a distance ds_0 , the internal pressure produces a positive work given by

$$\text{positive work} = + p A_0 ds_0 \quad (5)$$

Continuity equation applied on each side of neck section leads to:

$$A_L ds_L = A_0 ds_0 \quad (6)$$

Taking into account equation (6) we see that the external pressure produces a negative work given by

$$\text{negative work} = -p_e A_L ds_L = -p_e A_0 ds_0 \quad (7)$$

The total work is then (see eqs. 5 and 7)

$$dW = (p - p_e) A_0 ds_0 \quad (8)$$

The isentropic evolution of air inside the resonator cavity leads to:

$$\frac{p}{p_e} = \left(\frac{V}{V + A_0 s_0} \right)^\gamma = - \frac{A_0 s_0 \gamma}{V} + 1 \quad (9)$$

(it is supposed that $A_0 s_0 \ll V$)

Equation (9) introduced into eq. (8) gives

$$-dW = \frac{p_e A_0^2 \gamma}{V} s_0 ds_0 \quad (10)$$

so, the potential energy is:

$$P.E = - \int_0^{s_0} dW = \frac{\gamma p_e A_0^2 s_0^2}{2V}$$

Taking into account that the time derivative of the total energy (K.E + P.E) is zero, and that

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{d^2 s_0}{dt^2} \quad (11)$$

$$a^2 = \frac{\gamma p_e}{\rho_n}$$

We finally obtain:

$$\frac{d^2 s_0}{dt^2} + (2\pi f)^2 s_0 = 0 \quad (12)$$

with the resonance frequency f given by

$$f = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}} \quad \text{Hertz} \quad (13)$$

4. Conclusions

It is easy to verify that if the neck section is constant eq.(13) reduces to eq.(1). It is also seen that:

if $\int_0^L \frac{dx}{A} > \frac{L}{A_0}$ convergent neck \rightarrow frequency diminution

if $\int_0^L \frac{dx}{A} < \frac{L}{A_0}$ divergent neck \rightarrow frequency augmentation

It is well known that for silencing purposes [3] a plate with holes, placed near a wall behaves like a set of Helmholtz resonators which can be tuned at different frequencies in order to extinguish the sound produced within a room. It is seen then that the frequency absorption band may be varied continuously by acting directly on the shape of the holes.

REFERENCES

- [1] Philip M. Morse, Vibration and Sound, Second Edition Mc Graw Hill Book Company.
- [2] Landau et Lifchitz, Mécanique des Fluides Editions MIR Moscou 1971.
- [3] E. A. Brun, Mécanique des Fluides, tome III, 1970 DUNOD, Paris.

the species should give the corresponding equation for the mixture, then [3]

$$\sum_{\alpha=1}^2 \underline{m}_{-\alpha} = \underline{0} \quad (4)$$

i.e. $\underline{m}_1 = -\underline{m}_2 = \underline{m}$, say.

We assume that the only external body force acting on the mixture is that due to gravity. Then,

$$\underline{b}_{-\alpha} = \underline{g}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (5)$$

Following Sampaio and Williams [1], we write the constitutive equations for the stress tensors of the species as

$$\underline{T}_1 = -p_1 \underline{1} + 2\mu_1 \nabla \underline{v}_1^S + 2\mu_3 \nabla \underline{v}_2^S \quad (6)$$

$$\underline{T}_2 = -p_2 \underline{1} + 2\mu_4 \nabla \underline{v}_1^S + 2\mu_2 \nabla \underline{v}_2^S \quad (7)$$

where

$$\mu_1 = \epsilon^2 \eta_1 + \epsilon(1-\epsilon) \eta_{12} \quad (8)$$

$$\mu_2 = (1-\epsilon)^2 \eta_2 + \epsilon(1-\epsilon) \eta_{12} \quad (9)$$

$$\eta_{12} = \sqrt{\eta_1 \eta_2} \quad (10)$$

Here, p denotes an indeterminate pressure, η_1 and η_2 denote the viscosity coefficients of the fluids in the unmixed state. The superscript s denotes the symmetric part of the tensor.

For \underline{m} , we use the form developed by Struminskii for binary mixtures of gases [4,5]

$$\underline{m} = \frac{\rho_1 \epsilon \rho_2 (1-\epsilon)}{\rho_1 \epsilon M_2 + \rho_2 (1-\epsilon) M_1} \frac{K \theta}{D_{12}} (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \quad (11)$$

where K is the Boltzmann constant, θ denotes absolute tem

perature, M molecular weight, and D_{12} binary diffusion coefficient.

3. Couette flows

Consider unidirectional horizontal flow between two infinite parallel plates, a distance $2L$ apart. Let there be no externally imposed pressure gradient and let one of the plates move at a speed V in the horizontal direction, the other plate remaining stationary. The equations of motion reduce to [6]

$$\frac{d^2 v_{1x}}{dy^2} = K_1 \left[v_{1x} - \left(\frac{K_2}{K_1} v_{1x} + A K_2 y + B K_2 \right) \right], \quad (12)$$

$$v_{2x} = - \frac{K_2}{K_1} v_{1x} + A K_2 y + B K_2, \quad (13)$$

where $A = \frac{V}{2} \left[\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right]$, (14) $B = \frac{V}{2} \left[\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right]$, (15)

v_1 and v_2 are velocity components in the horizontal direction, y is the vertical coordinate measured from the plane midway between the two infinite plates, and

$$K_1 = \frac{\rho_1 \rho_2 \frac{K\theta}{D_{12}} \left[\frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_1 \mu_2 + \mu_3} \right] \epsilon (1-\epsilon)}{(\rho_1 M_2 - \rho_2 M_1) \epsilon + \rho_2 M_1}, \quad (16)$$

$$K_2 = \frac{\rho_1 \rho_2 \frac{K\theta}{D_{12}} \left[\frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_1 \mu_2 - \mu_3} \right] \epsilon (1-\epsilon)}{(\rho_1 M_2 - \rho_2 M_1) \epsilon + \rho_2 M_1}, \quad (17)$$

The solution of equations (12) and (13) subject to the boundary conditions

$$y = -L, \quad v_{1x} = v_{2x} = 0 \quad , \quad (18)$$

$$y = L, \quad v_{1x} = v_{2x} = V \quad , \quad (19)$$

is given by

$$v_{1x} = \frac{V}{2} \left(\frac{y}{L} + 1 \right) \quad , \quad (20)$$

$$v_{2x} = \frac{V}{2} \left(\frac{y}{L} + 1 \right) \quad , \quad (21)$$

Clearly, no diffusion occurs in this flow.

Consider now unidirectional circular flow between two vertical concentric cylinders, the inner one fixed while the other rotates at an angular speed Ω . Let the radii of the inner and the outer cylinders be hR and R respectively, where $0 < n < 1$. For this case, the equations of motion reduce to [6]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{1\theta}}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d v_{1\theta}}{d r} - \frac{v_{1\theta}}{r^2} - (K_1 + K_2) v_{1\theta} + \\ + \frac{A K_1 K_2}{2} r + \frac{B K_1 K_2}{r} = 0 \quad , \quad (22) \end{aligned}$$

$$v_{2\theta} = - \frac{K_2}{K_1} v_{1\theta} + \frac{A K_2}{2} r + \frac{B K_2}{r} \quad , \quad (23)$$

where $v_{1\theta}$ and $v_{2\theta}$ are velocity components in the azimuthal direction, and

$$A = \left(\frac{2\Omega}{1-h^2} \right) \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right) \quad , \quad (24)$$

$$B = - \left(\frac{\Omega n^2 R^2}{1 - n^2} \right) \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right) . \quad (25)$$

The boundary conditions may be written as

$$r = nR, \quad v_{1\theta} = v_{2\theta} = 0 \quad , \quad (26)$$

$$r = R, \quad v_{1\theta} = v_{2\theta} = \Omega R \quad . \quad (27)$$

The solution of equation (21) is then

$$v_{1\theta} = \frac{\Omega}{(1-n^2)} \left(r - \frac{n^2 R^2}{r} \right) \quad , \quad (28)$$

and substitution into equation (22) yields

$$v_{2\theta} = \frac{\Omega}{(1-n^2)} \left(r - \frac{n^2 R^2}{r} \right) \quad . \quad (29)$$

As in the planar case, this flow takes place without diffusion.

4. Poiseuille flows

Consider unidirectional horizontal flow between two stationary plates. Let the distance between them be $2L$. Assuming an external pressure gradient C , applied to both fluids, the equations of motion can be simplified to [6]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{1x}}{d y^2} &= (K_1 + K_2) v_{1x} - \frac{C K_1 K_2 K_3}{2} y^2 - \\ &- \frac{C (\mu_2 - \mu_3)}{(\mu_1 \mu_2 - \mu_3)} + \frac{C K_1 K_2 K_3 L^2}{2} \quad . \quad (30) \end{aligned}$$

$$v_{2x} = -\frac{K_2}{K_1} v_{1x} + \frac{C K_2 K_3}{2} y^2 - \frac{C K_2 K_3 L^2}{2}, \quad (31)$$

$$\text{where } K_3 = \frac{(\mu_1 - \mu_3)}{K^2 (\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2)} + \frac{(\mu_2 - \mu_3)}{K_1 (\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2)}. \quad (32)$$

The appropriate boundary conditions are

$$y = -L, \quad v_{1x} = v_{2x} = 0, \quad (33)$$

$$y = L, \quad v_{1x} = v_{2x} = 0. \quad (34)$$

The solution is given by

$$v_{1x} = \frac{C K_1 K_2 K_3}{K_1 + K_2} \left[\frac{1}{K_1 + K_2} - \frac{(\mu_2 - \mu_3)}{K_1 K_2 K_3 (\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2)} \right] x \\ \times \left[1 - \left(\frac{e^{-\sqrt{K_1+K_2} y} + e^{\sqrt{K_1+K_2} L}}{e^{\sqrt{K_1+K_2} y} + e^{-\sqrt{K_1+K_2} L}} \right) \right] + \\ + \frac{C K_1 K_2 K_3}{2(K_1 + K_2)} (y^2 - L^2), \quad (35)$$

$$v_{2x} = \frac{C K_1 K_2 K_3}{K_1 + K_2} \left[\frac{1}{K_1 + K_2} - \frac{\mu_2 - \mu_3}{K_1 K_2 K_3 (\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2)} \right] x \\ \times \left[1 - \left(\frac{e^{-\sqrt{K_1+K_2} y} + e^{\sqrt{K_1+K_2} y}}{e^{-\sqrt{K_1+K_2} L} + e^{\sqrt{K_1+K_2} L}} \right) \right]. \quad (36)$$

The occurrence of diffusion is clear from equations (35) and (36), depending in magnitude on several material parameters, pressure gradient, and channel width.

We now consider unidirectional flow through a circular

horizontal tube of radius R . Let there be an externally imposed pressure gradient C . The equations of motion reduce to [6]

$$\frac{d^2 v_{1z}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d v_{1z}}{dr} - (K_1 + K_2) v_1 = \frac{C K_1 K_2 K_3}{4} r^2 - \frac{C K_3 R^2}{4} K_1 K_2 + C K_3 \quad , (37)$$

$$v_{2z} = -\frac{K_2}{K_1} v_{1z} + \frac{C K_2 K_3 r^2}{4} + \frac{C K_3 R^2}{4} K^2 \quad , (38)$$

subject to the boundary conditions

$$r = 0, \quad \frac{d v_{1z}}{dr} = \frac{d v_{2z}}{dr} = 0 \quad , (39)$$

$$r = R, \quad v_{1z} = v_{2z} = 0 \quad , (40)$$

the solution is given by

$$v_{1z} = \left\{ \frac{\left(\frac{C}{K_1 + K_2} \right) \left(K_3 - \frac{K_1 K_2 K_3}{K_1 + K_2} \right)}{I_0 (K_1 + K_2) R} \right\} I_0 (K_1 + K_2) R + \frac{C K_1 K_2 K_3}{(K_1 + K_2)} r^2 + \frac{C}{K_1 + K_2} \left[\frac{K_1 K_2 K_3}{K_1 + K_2} - \frac{K_1 K_2 K_3}{4} R^2 - \left(\frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2} \right) \right] \quad , (41)$$

$$\begin{aligned}
 v_{2z} = & - \frac{K_2}{K_1} \left\{ \frac{\left[\frac{C}{K_1 + K_2} \right] \left[\left(\frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2} \right) - \frac{K_1 K_2 K_3}{(K_1 + K_2)} \right]}{I_0 (K_1 + K_2) R} \right\} x \\
 & \times I_0 \left[(K_1 + K_2) r \right] + C \left[\frac{K_2 K_3}{4} - \frac{K_2}{K_1} \right. \\
 & \times \left. \frac{K_1 K_2 K_3}{4 (K_1 + K_2)} \right] r^2 - \frac{C K_2 K_3}{4} R^2 - \\
 & - \frac{C}{(K_1 + K_2)} \left[\frac{K_1 K_2 K_3}{K_1 + K_2} - \frac{K_1 K_2 K_3}{4} R^2 - \right. \\
 & \left. \left(\frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2} \right) \right] \frac{K_2}{K_1} \quad , \quad (42)
 \end{aligned}$$

Where I_0 is the modified Bessel function of order zero and of the first Kind Again, diffusion occurs to an extent which depends on fluid material parameters, pressure gradient, and tube radius.

5. Conclusions

We have shown that for a diffusion - free flow of a binary mixture of incompressible Newtonian fluids, Couette flow, whether planar or circular, is to be adopted as a viscometric flow. This is for any apparatus dimensions and for any fluid pair. This is not the case for Poiseuille flow, planar or circular. These results are in agreement with those of Mills [2] who considered mixtures of varying composition.

Our work complements that of Sampaio and Williams [1] in that they showed that measurements in a none-diffusing flow are sufficient to determine all viscosity coefficients and we have established that Couette flows are such flows. They, rather than Poiseuille flows, suggest themselves as

the appropriate viscometric flows for binary mixtures of incompressible Newtonian fluids.

6. Acknowledgment

One of us (E.C.F.) would like to acknowledge CENPES/PETROBRÁS for permission to carry out this work.

REFERENCES

- [1] Sampaio, R. F., and Williams, W.O., "On the viscosity of liquid mixtures", Z.A.M.P., Vol. 28 (1977), pp.607-614.
- [2] Mills, N., "Incompressible mixtures of Newtonian fluids"; Int. J. Engng. Sci., Vol. 4 (1966), pp. 97 - 112.
- [3] Atkin, R. J., and Craine, R.E., "Continuum Theories of mixtures: Basic theory and historical development", Quart. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. 29 (1976), pp. 209 - 244.
- [4] Struminskii, V.V., " The effect of diffusion rate on the flow of gas mixtures", P.M.M., Vol. 38 (1974), pp. 203 - 210.
- [5] Struminskii, V.V., "On laminar steady flow of gas mixtures in pipes and channels", P.M.M., Vol. 39 (1975), pp. 144 - 148.
- [6] Caetano Filho, E., M.Sc. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro (1981).



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECANICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-12

P.P. 125 - 132

PUC/RJ

TWO-PHASE FLOW AND HEAT TRANSFER IN CAVITIES

Luciano M. de SOCIO
 Istituto di Meccanica Applicata
 Politecnico di Torino-10129 TORINO (Italia)

Giovanni GAFFURI
 Istituto di Fisica
 Università di Camerino-62032 CAMERINO

RESUME

On étudie le courant de récirculation, à faible vitesse, d'une suspension de petites particules solides à l'intérieur d'une cavité rectangulaire. Les équations du champ font recours au modèle de Saffman et Drew, convenable pour de petites différences de densité entre fluide et particules. Des solutions analytiques et numériques sont obtenues soit pour la convection naturelle entre deux parois verticales isothermes soit pour la récirculation induite par une plaque glissante.

SUMMARY

Slow recirculating flows of suspensions of small solid particles contained in rectangular enclosures are dealt with. The pertinent equations follow the model of Saffman and Drew for small density differences between the continuum and the dispersed phase. Analytical and numerical solutions are obtained in two situations, i.e. the natural convection between two isothermal vertical walls and the recirculation induced by a sliding plate.

1. Introduction

Purpose of this paper is to investigate the characteristics of some recirculating two-phase flows constituted by suspensions of small solid particles in a continuum fluid. Interest in this research arises in many situations of scientific and technical importance at very different scales, from the dispersion of pollutants in large bodies of fluid to the motion of tracers in laboratory apparatuses.

Previous research on the subject was mostly devoted to peculiar applications in pipe and channel flows and in external boundary layer type situations [1,2,3]. Recently, recirculating two-phase flows have received increasing attention, especially through numerical experiments, as far as the fluid dynamics of turbomachines is concerned [4].

Here, two typical recirculating flows of suspensions of small rigid spherical particles in a rectangular enclosure (Fig.1) will be considered: i) free convection between two isothermal vertical walls and two adiabatic horizontal walls and ii) recirculation induced in the cavity by a sliding upper plate. In both cases the mass density of the fluid and of the particles will be assumed to be almost equal, and the temperature of the particle will coincide with that of the surrounding fluid. Attention will be paid to those situations where approximate analytical solutions can be determined, so that the influence of the dispersed phase on the velocity and temperature fields can be discussed in a simple and direct approach. In the following, the model proposed by Saffman and modified by Drew [5,6] will be adopted. In this case the drag on a particle relative to the fluid is expressed by the Stokes law, the number density of the dispersed phase, N , is constant, the fluid is incompressible.

Let m and r be the mass and the radius of a single particle, respectively. Let also be ν , α , β the kinematic viscosity, the thermal diffusivity and the thermal expansion coefficient of the fluid. If T is the temperature and ρ is the density and if the indexes $()_0$ and $()_1$ refer to the left and to the right vertical walls, then the governing equations are:

$$\nabla^4 \psi + \gamma \frac{c}{\rho} (\nabla^2 \chi - \nabla^2 \psi) - \frac{1}{\rho} (\partial_y \psi \partial_x \nabla^2 \psi - \partial_x \psi \partial_y \nabla^2 \psi) = R \partial_x \theta \quad (1)$$

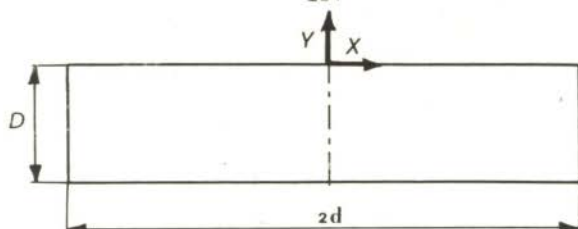


Fig.1. A sketch of the cavity

$$\frac{c}{P}(\nabla^2 \chi - \nabla^2 \psi) + \frac{1}{P}(\partial_y \chi \partial_x \nabla^2 \chi - \partial_x \chi \partial_y \nabla^2 \chi) = R \partial_x \theta \quad (2)$$

$$\nabla^2 \theta = \partial_y \psi \partial_x \theta - \partial_x \psi \partial_y \theta \quad (3)$$

where ψ and χ are the stream functions of the continuum and of the dispersed phase, made dimensionless with respect to α , $\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ and all distances are dimensionless with respect to d . The Prandtl number is $P = \nu/\alpha$, the Rayleigh number is $R = \{g\beta(T_1 - T_0)d^3\}/\nu\alpha$, and also $\gamma = Nm/\rho$, $c = d^2 6\pi\mu r/\alpha$. To (1,2,3) the pertinent boundary conditions are to be associated.

2. Results for the natural convection

As a first problem, the free convection in the enclosure will be considered for relatively small R , so that conduction is the dominant mode of heat transfer. In this case any of the three unknowns, ψ , χ and θ can be expanded as a power series of R in the form:

$$\xi(x, y; R) = \sum_{i=0}^{\infty} R^i \xi_i(x, y) \quad (4)$$

The boundary conditions are

$$\psi(\pm 1, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, -H) = \partial_x \psi(\pm 1, y) = \partial_y \psi(x, 0) = \partial_y \psi(x, -H) = \chi(\pm 1, y) = \chi(x, 0) = \chi(x, -H) = \theta(-1, y) = \partial_y \theta(x, 0) = \partial_y \theta(x, -H) = \theta(1, y) - 1 = 0 \quad (5)$$

where H is D/d , i.e. twice the aspect ratio of the cavity. Introducing (4) in (1,2,3,5) one has an infinite series of differential systems which, up to the second approximation, are

$$\nabla^2 \theta_0 = 0; \quad \theta_0(1, y) = \partial_y \theta_0(x, 0) = \partial_y \theta_0(x, -H) = 0; \quad \theta_0(-1, y) = 1 \quad (6)$$

$$\nabla^4 \psi_1 = (1 - \gamma) \partial_x \theta_0; \quad \psi_1(\pm 1, y) = \psi_1(x, 0) = \psi_1(x, -H) = \partial_x \psi_1(\pm 1, y) = \partial_y \psi_1(x, 0) = \partial_y \psi_1(x, -H) = 0 \quad (7)$$

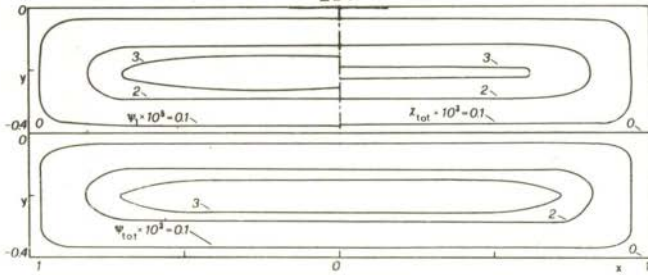


Fig. 2. $H = 0.4$; $P = 7$; $\gamma = 10^{-4}$; $\delta = 10^{-3}$.
 Streamlines of the fluid. Top left: first approximation. Bottom: second approximation, $R = 100$.
 Top right: streamlines of the dispersed phase, second approximation, $R = 100$

$$\nabla^2 \chi_1 = \delta + \nabla^2 \psi_1; \chi_1(\pm 1, y) = \chi_1(x, 0) = \chi_1(x, -H) = 0 \quad (8)$$

$$\nabla^2 \theta_1 = \partial_y \psi_1 \partial_x \theta_0 - \partial_x \psi_1 \partial_y \theta_0; \theta_1(\pm 1, y) = \partial_y \theta_1(x, 0) = \partial_y \theta_1(x, -H) = 0 \quad (9)$$

$$\nabla^4 \psi_2 = f(x, y); \psi_2(\pm 1, y) = \psi_2(x, 0) = \psi_2(x, -H) = \partial_x \psi_2(\pm 1, y) = \partial_y \psi_2(x, 0) = \partial_y \psi_2(x, -H) = 0 \quad (10)$$

$$\nabla^2 \chi_2 = g(x, y) + \nabla^2 \psi_2; \chi_2(\pm 1, 0) = \chi_2(x, 0) = \chi_2(x, -H) = 0 \quad (11)$$

as $\psi_0 = \chi_0 = 0$, whereas $\delta = P/2c$ and

$$f(x, y) = (1-\gamma) \partial_x \theta_1 + \frac{1}{P} \{ (\partial_y \psi_1 \partial_x \nabla^2 \psi_1 - \partial_x \psi_1 \partial_y \nabla^2 \psi_1) + \gamma (\partial_y \chi_1 \partial_x \nabla^2 \chi_1 - \partial_x \chi_1 \partial_y \nabla^2 \chi_1) \}$$

$$g(x, y) = 2\delta \{ \partial_x \theta_1 - \frac{1}{P} (\partial_y \chi_1 \partial_x \nabla^2 \chi_1 - \partial_x \chi_1 \partial_y \nabla^2 \chi_1) \}$$

It is immediate to obtain $\theta_0 = \frac{1}{2}(1+x)$. As in 8 ψ_1 is given by a Papkovitch-Fadle series [7]

$$\psi_1(x, y) = (1-\gamma) \frac{(x^2-1)^2}{24} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \{ C_n e^{S_n y} + D_n e^{-S_n(y+H)} \} \frac{\phi_n(x)}{S_n^2}$$

with the eigenvalues

$$\phi_n(x) = S_n (\sin S_n \cos S_n x - x \cos S_n \sin S_n x)$$

associated to the eigenvalues S_n , solutions of the transcendental equation: $\sin 2S = -2S$. The constants C_n and D_n are readily evaluated from a set of linear algebraic equations, taking into account the boundary conditions. Once ψ_1 is known χ_1 is evaluated by variable separation from (8):

$$\chi_1 = -\delta \left\{ \frac{(1-x^2)}{2} - \frac{16}{\pi^3} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos\{(2j+1)\frac{1}{2}\pi x\} \cosh\{(2j+1)\frac{1}{2}\pi(y+\frac{1}{2}H)\}}{(2j+1)^3 \cosh\{(2j+1)\frac{\pi H}{4}\}} \right\} + \psi_1$$

Similarly, from (9)

$$\theta_1 = \frac{1-\gamma}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \cos\{(2i+1)\frac{1}{2}\pi x\} \cos(j\frac{1}{2}\pi y)$$

where A_{ij} is determined from the boundary conditions. Systems (10) and (11) could also be in principle analytically solved. However this would be, in the present problem, too cumbersome and ψ_2 and χ_2 were determined by a simple and fast finite difference procedure.

Figure 2 shows the first and the second approximations ($\psi_{tot} = \psi_1 + R\psi_2$) of the distribution of fluid streamlines, in a significant situation. χ_1 practically coincides with ψ_1 in all the field, with some deviation in the central region of the cavity and was not reported here. Instead, the second approximation $\chi_{tot} = \chi_1 + R\chi_2$ is shown. Even though the ψ_{tot} - and χ_{tot} -lines are not displaced too much close to the walls, there the velocity components of the fluid and of the particles do differ substantially, as shown in Fig.3.

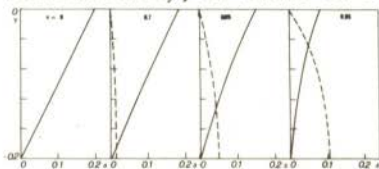


Fig.3. $H = 0.4$; $\gamma = 10^{-4}$

Velocities of the particles relative to the fluid first approximation, in the top part of the cavity. Solid lines $\Delta = (\partial_y \chi_1 - \partial_y \psi_1) / \delta$; broken lines $\Delta = (\partial_x \chi_1 - \partial_x \psi_1) / \delta$

As a consequence, the friction factor at the wall decreases. These effects are enhanced as H , i.e. the aspect ratio, decreases. These characteristics of two phase flows are, in general, well known. Even from the first approximation ψ_1 one can see how the shear at the walls decreases with γ . The influence of the other characteristic number, δ , appears explicitly.

Evaluation of θ_1 shows that the effect of the dispersed phase distribution in the fluid is everywhere negligi-

ble on the isotherms distribution.

3. Results for the recirculation driven by a sliding wall

In this second problem, where all the walls are at the same temperature, the governing equations can be more conveniently reformulated as follows

$$\nabla^4 \psi + \gamma c^* (\nabla^2 \chi - \nabla^2 \psi) - (\partial_y \psi \partial_x \nabla^2 \psi - \partial_x \psi \partial_y \nabla^2 \psi) = 0 \quad (12)$$

$$c^* (\nabla^2 \chi - \nabla^2 \psi) + (\partial_y \chi \partial_x \nabla^2 \chi - \partial_x \chi \partial_y \nabla^2 \chi) = 0 \quad (13)$$

where $c^* = d^2 s / \nu$ and ψ and χ were made dimensionless with respect to ν . The proper boundary conditions are

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, 0) = \psi(x, -H) = \psi(\pm 1, y) = \partial_x \psi(\pm 1, y) = \partial_y \psi(x, -H) = 0; \quad \partial_y \psi(x, 0) = w \\ \chi(x, 0) = \chi(x, -H) = \chi(\pm 1, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where w is the velocity of the sliding wall in its plane, dimensionless with reference to ν/d . A suitable series expansion for ψ and χ , at small w is now

$$\xi(x, y; w) = \sum_{i=0}^{\infty} w^i \xi_i$$

When proceeding to the linearization of the basic equations, it is easy to see that $\psi_0 = \chi_0 = 0$, whereas $\psi_1 \equiv \chi_1$, and in particular

$$\psi_1(x, y) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \{c_n e^{S_n y} + d_n e^{-S_n(y+H)}\} \frac{\phi_n(x)}{S_n^2}$$

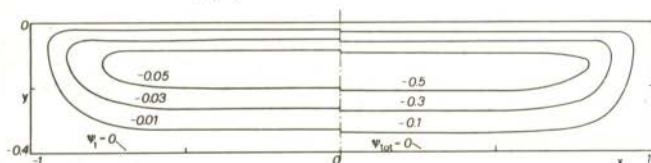


Fig.4. $H=0.4$; $\gamma=10^{-4}$; $\delta=10^{-4}$
Left: first approximation, $w=1$; right: second approximation, $w=10$

where the c_n and d_n are determined from the new boundary conditions. Again, the equations for ψ_2 and χ_2 are subject to all homogeneous boundary conditions.

In this case also the streamlines distribution and the velocity profiles of the particles were evaluated in a significant example and reported in Fig.4 and 5. In contrast

with the case of natural convection, ψ_1 and χ_1 , now, are coincident and the influence of the dispersed phase on the fluid streamlines distribution is almost negligible.

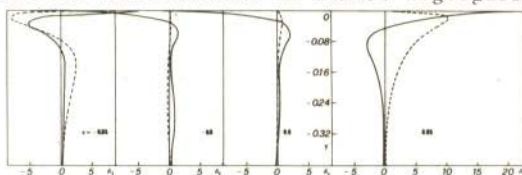


Fig. 5. $H = 0.4$; $\gamma = 10^{-4}$
 Velocities of the particles relative to the fluid
 first approximation.
 Solid lines $\Delta_1 = (\partial_y \chi_2 - \partial_y \psi_2) / \delta$
 Broken lines $\Delta_2 = (\partial_x \chi_2 - \partial_x \psi_2) / \delta$

It is now $\psi_{tot} = w \psi_1 + w^2 \psi_2$. However, and as in the free convection case, close to the wall, the velocities of the two phases significantly differ. This means that almost coincident streamlines are run at different velocities by the fluid and by the particles, the difference becoming more sizeable in correspondence with the sliding wall, where, as a consequence, the shear stress is decreased by the presence of the solid phase.

Acknowledgement

This work has been partially supported by the Italian National Research Council, project "Oceanography" through contract n.80.00739.88

REFERENCES

- [1] de Socio, L.M., Gaffuri, G. and Polzonetti, A.; "Analytical Results of Two-Phase Flows in Ducts", Wärme-Stoffübertrag Vol.14 (1980), pp.183-188.
- [2] Durst, F., Tsiklauri, G.V. and Afgan, N.H. Eds. Two-Phase Momentum, Heat and Mass Transfer in Chemical Process and Energy Engineering Systems, Hemisphere Publ.Co. Washington (1979)
- [3] Marble, F.E.; "Dynamics of Dusty Gases", Ann.Rev.Fluid Mech. Vol.2 (1970), pp.397-446
- [4] Crowe, C.T. and Pratt, D.T.; "Analysis of the Flow Field in Cyclone Separators", Comp.and Fluids, vol.1 (1973)
- [5] Saffman, P.C.; "On the Stability of Laminar Flow of a Dusty Gas", J.Fluid Mech., Vol.13 (1962), pp.120-128
- [6] Drew, D.A.; "Macroscopic Streamline Integral Relations for

Two-Phase Flows", ASME Paper n.75-APM-X

- [7] Joseph, D.D. and Sturges, L.; "The Free Surface on a Liquid Filling a Trench Heated from its Side", J. Fluid Mech., v. 69(1975), pp. 565-589



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-13

P.P. 133 - 143

PUC/RJ

ON THE DAVIES - TAYLOR EQUATION FOR THE FLUIDIZATION BUBBLE

S. Kinrys and R.Y. Qassim
COPPE/UFRJ

Justifica-se o uso da equação de Davies-Taylor no escoamento sobre uma bolha esférica, em um leito fluidizado gasoso. Mostra-se que tanto a pressão do fluido quanto a pressão total devem ser constantes na superfície da bolha, empregando, para este fim, as condições de salto naquela superfície. Demonstra-se que a velocidade relevante a ser utilizada na equação de Davies-Taylor é, para o caso de um leito fluidizado gasoso, a velocidade absoluta da bolha e, para um leito fluidizado líquido, a velocidade da bolha relativa ao líquido fluidizante.

The Davies-Taylor equation is justified for the steady rise of a spherical cap gas bubble in a gas - fluidized bed. Starting from the jump conditions at the bubble surface, it is shown that both the fluid and the total pressures should be constant there. Further, it is demonstrated that the relevant velocity to be used in the Davies-Taylor equation is the absolute bubble velocity in the gas - fluidized bed case, whilst it is the bubble velocity relative to the liquid fluidizing velocity in the case of a liquid-fluidized bed.

1. INTRODUCTION

The analogy between fluidized beds and liquids of low surface tension and viscosity has long been established. In particular, the motion of spherical cap gas bubbles in gas-fluidized beds is found to obey the Davies-Taylor equation [1,2]. Henriksen and Østergaard [3] have shown that this is also true for liquid - fluidized beds, though as El - Temtamy and Epstein [4] pointed out, the value of the constant in the Davies-Taylor equation approximates that for liquids if in the liquid - fluidized bed case, the bubble velocity is taken relative to the liquid velocity.

In order to describe and explain such liquid-like behaviour of gas-fluidized beds, Davidson and Harrison [5] used the theory of interacting interpenetrating continua in studying the motion of the particulate phase in a fluidized bed. Assuming that the fluid is in Darcy flow and that the solid is in potential motion, they showed that

$$U_b \propto R_b^{1/2} \quad (1)$$

where U_b is the bubble velocity and R_b is its frontal radius. Jackson [6] criticised the Davidson theory in that the constancy of fluid pressure at the bubble boundary is inherent in their solution and hence the speed of rise U_b can be arbitrarily fixed. In order to derive the Davies - Taylor equation, Jackson allows for voidage variation in the particulate phase, and he adopts an iterative scheme through which up to the first iteration, the Davies-Taylor equation is obtained. Collins [7], starting from the equation of motion of a single solid particle at the bubble surface, demonstrated that the Davies-Taylor equation is valid for constant voidage as Davidson and Harrison originally showed.

In this paper, we show that the objection of Jackson can be removed without introducing voidage variation or invoking the equation of motion of a discrete particle in the context of a continuum description of the particle phase as Collins has done. Starting from the jump conditions at the bubble boundary, for the particulate phase as a



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECANICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-13

p.p. 133 - 143

PUC/RJ

ON THE DAVIES - TAYLOR EQUATION FOR THE FLUIDIZATION BUBBLE

S. Kinrys and R.Y. Qassim
 COPPE/UFRJ

Justifica-se o uso da equação de Davies-Taylor no escoamento sobre uma bolha esférica, em um leito fluidizado gasoso. Mostra-se que tanto a pressão do fluido quanto a pressão total devem ser constantes na superfície da bolha, empregando, para este fim, as condições de salto naquela superfície. Demonstra-se que a velocidade relevante a ser utilizada na equação de Davies-Taylor é, para o caso de um leito fluidizado gasoso, a velocidade absoluta da bolha e, para um leito fluidizado líquido, a velocidade da bolha relativa ao líquido fluidizante.

The Davies-Taylor equation is justified for the steady rise of a spherical cap gas bubble in a gas - fluidized bed. Starting from the jump conditions at the bubble surface, it is shown that both the fluid and the total pressures should be constant there. Further, it is demonstrated that the relevant velocity to be used in the Davies-Taylor equation is the absolute bubble velocity in the gas - fluidized bed case, whilst it is the bubble velocity relative to the liquid fluidizing velocity in the case of a liquid-fluidized bed.

1. INTRODUCTION

The analogy between fluidized beds and liquids of low surface tension and viscosity has long been established. In particular, the motion of spherical cap gas bubbles in gas-fluidized beds is found to obey the Davies-Taylor equation [1,2]. Henriksen and Ostergaard [3] have shown that this is also true for liquid - fluidized beds, though as El - Temtamy and Epstein [4] pointed out, the value of the constant in the Davies-Taylor equation approximates that for liquids if in the liquid - fluidized bed case, the bubble velocity is taken relative to the liquid velocity.

In order to describe and explain such liquid-like behaviour of gas-fluidized beds, Davidson and Harrison [5] used the theory of interacting interpenetrating continua in studying the motion of the particulate phase in a fluidized bed. Assuming that the fluid is in Darcy flow and that the solid is in potential motion, they showed that

$$U_b \propto R_b^{1/2} \quad (1)$$

where U_b is the bubble velocity and R_b is its frontal radius. Jackson [6] criticised the Davidson theory in that the constancy of fluid pressure at the bubble boundary is inherent in their solution and hence the speed of rise U_b can be arbitrarily fixed. In order to derive the Davies - Taylor equation, Jackson allows for voidage variation in the particulate phase, and he adopts an iterative scheme through which up to the first iteration, the Davies-Taylor equation is obtained. Collins [7], starting from the equation of motion of a single solid particle at the bubble surface, demonstrated that the Davies-Taylor equation is valid for constant voidage as Davidson and Harrison originally showed.

In this paper, we show that the objection of Jackson can be removed without introducing voidage variation or invoking the equation of motion of a discrete particle in the context of a continuum description of the particle phase as Collins has done. Starting from the jump conditions at the bubble boundary, for the particulate phase as a

single continuum and as a two-phase mixture, we demonstrate that within the approximation of the Davidson-Harrison theory, the Davies-Taylor equation is valid for a gas-fluidized bed.

2. BALANCE EQUATIONS AND JUMP CONDITIONS

Considering the particulate phase to be a binary mixture of two inert interacting continua, solid and fluid, the mass and linear momentum balance equations may be written as Atkins & Craine [8].

$$\frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) = 0; \quad \alpha = s, f, \quad (2)$$

$$\rho_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \ell_{\alpha} + \rho_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha}; \quad \alpha = s, f, \quad (3)$$

where ρ_{α} , \mathbf{v}_{α} , \mathbf{T}_{α} , ℓ_{α} and \mathbf{b}_{α} denote the density, velocity, stress tensor, specific momentum supply and external body force of constituent α in the mixture, s denoting solid and f denoting fluid, and t denotes the time.

Using the principle that the sum of the balance equations for the individual constituents must yield the corresponding equations for a single continuum [8], we conclude

$$\sum_{\alpha=s}^f \rho_{\alpha} \ell_{\alpha} \equiv \sum_{\alpha=s}^f \mathbf{m}_{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

where \mathbf{m}_{α} is the momentum supply vector for constituent α .

Similarly, the jump conditions at any singular surface may be set down as Müller [9].

$$[\rho_{\alpha} (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u}) \cdot \underline{\mathbf{n}}] = 0, \quad \alpha = f, s, \quad (5)$$

$$[(\rho_{\alpha} (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u}) \cdot \underline{\mathbf{n}}) \mathbf{v}_{\alpha}] - [\mathbf{T}_{\alpha} \cdot \underline{\mathbf{n}}] = \mathbf{0}, \quad \alpha = f, s, \quad (6)$$

and for a single momentum, we have

$$[\rho(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{n}] = 0, \quad (7)$$

$$[\{\rho(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{n}\} \underline{v}] - [\underline{T} \cdot \underline{n}] = \underline{0}, \quad (8)$$

where \underline{u} is the velocity of the singular surface, \underline{n} is the unit vector normal to the surface, and unsubscripted variables denote the single phase continuum.

We note that in writing equations (6) and (8), we have ignored interfacial tension effects, anticipating their absence at the bubble boundary in a gas-fluidized bed.

3. DAVIDSON THEORY FOR THE FLUIDIZATION BUBBLE

We assume that each constituent, solid and fluid, is incompressible, we introduce the voidage ϵ as

$$\bar{\rho}_s = \bar{\rho}_s(1-\epsilon), \quad \bar{\rho}_f = \bar{\rho}_f\epsilon, \quad (9)$$

where an overbar refers to the constituent when on its own.

We assume that the voidage ϵ is constant, i.e.,

$$\epsilon = \epsilon_0. \quad (10)$$

We assume further that the stresses are given by purely pressure terms, i.e.,

$$\underline{T}_s = -p_s \underline{1}, \quad \underline{T}_f = -p_f \underline{1}, \quad (11)$$

and that the fluid is in Darcy flow, i.e.,

$$\underline{m}_s = -\underline{m}_f = f(\epsilon) (\underline{v}_f - \underline{v}_s). \quad (12)$$

Due to the very low densities of gases, we ignore the inertia and the external body force terms in the fluid momentum equation, and we obtain

$$\underline{0} = -\nabla p_f - f(\epsilon) (\underline{v}_f - \underline{v}_s), \quad (13)$$

and the solid fluid massa balance equations become for steady motion

$$\nabla \cdot \underline{v}_s = 0, \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \underline{v}_f = 0, \quad (15)$$

and hence applying the divergence operator in equation (13), we obtain the Davidson equation for the fluid pressure

$$\nabla^2 p_f = 0. \quad (16)$$

Assuming that the solid is in potential motion and using equation (14), we obtain the Davidson equation for the solid velocity potential ϕ_s

$$\nabla^2 \phi_s = 0. \quad (17)$$

4. BUBBLE BOUNDARY CONDITIONS

For a gas bubble held stationary by uniform downward solid at infinity, we apply the jump conditions to the fluid constituent to obtain from equations (5) and (6) respectively

$$\bar{\rho}_{f-o} \underline{v}_f \cdot \underline{n} - \bar{\rho}_{f-b} \underline{v}_b \cdot \underline{n} = 0, \quad (18)$$

$$(\bar{\rho}_{f-o} \underline{v}_f \cdot \underline{n}) \underline{v}_f - (\bar{\rho}_{f-b} \underline{v}_b \cdot \underline{n}) \underline{v}_b - \underline{T}_f \cdot \underline{n} + \underline{T}_b \cdot \underline{n} = \underline{0}, \quad (19)$$

where the subscript b refers to the fluid inside the bubble, and from equations (7) and (8), we have

$$(\rho_{p-p} \underline{v}_p - \bar{\rho}_{f-b} \underline{v}_b) \cdot \underline{n} = 0, \quad (20)$$

$$(\rho_{p-p} \underline{v}_p \cdot \underline{n}) \underline{v}_p - (\bar{\rho}_{f-b} \underline{v}_b \cdot \underline{n}) \underline{v}_b - \underline{T}_p \cdot \underline{n} + \underline{T}_b \cdot \underline{n} = \underline{0}, \quad (21)$$

where the subscript p refers to the particulate phase.

Further, since the bubble boundary is a material

surface for the solid constituent, we have

$$\underline{v}_s \cdot \underline{n} = \underline{u} \cdot \underline{n} = 0, \quad (22)$$

since the bubble boundary is stationary. It follows immediately that at the bubble boundary

$$\nabla \phi_s \cdot \underline{n} = 0. \quad (23)$$

Using equation (11)² and assuming that the flow of fluid inside the bubble is inviscid (De Kock and Judd [10])

$$\underline{T}_b = - p_b \underline{i} \quad (24)$$

equation (19) reduces to

$$(\bar{\rho}_f \epsilon_o \underline{v}_f \cdot \underline{n}) \underline{v}_f - (\bar{\rho}_f \underline{v}_b \cdot \underline{n}) \underline{v}_b + p_f \underline{n} - p_b \underline{n} = \underline{0}. \quad (25)$$

Now in the Davidson theory, terms including the fluid density are ignored in comparison with the pressure gradient. Then, as long as the value of the pressure is of the same order as its gradient, we can simplify equation (25) to

$$p_f = p_b. \quad (26)$$

Now, by definition

$$\underline{T}_p = \underline{T}_f + \underline{T}_s, \quad (27)$$

$$\underline{v}_p = \frac{\bar{\rho}_f \epsilon_o \underline{v}_f + \bar{\rho}_s (1 - \epsilon_o) \underline{v}_s}{\bar{\rho}_f \epsilon_o + \bar{\rho}_s (1 - \epsilon_o)}, \quad (28)$$

$$\rho_p = \bar{\rho}_f \epsilon_o + \bar{\rho}_s (1 - \epsilon_o), \quad (29)$$

and since in the Davidson theory,

$$\bar{\rho}_f \ll \bar{\rho}_s, \quad (30)$$

equations (28) and (29) become respectively

$$\underline{y}_p = \underline{v}_s, \quad (31)$$

$$\rho_p = \bar{\rho}_s (1 - \epsilon_0). \quad (32)$$

Also, using equations (11), we may rewrite equation (27) as

$$P_p \underline{1} = P_f \underline{1} + P_s \underline{1} \quad (33)$$

Hence, equation (21) becomes

$$(\bar{\rho}_s (1 - \epsilon_0) \underline{v}_s \cdot \underline{n}) \underline{v}_s - (\bar{\rho}_f \underline{v}_b \cdot \underline{n}) \underline{v}_b + P_f \underline{n} + P_s \underline{n} - P_b \underline{n} = \underline{0}. \quad (34)$$

Using equation (22) and noting that in the Davidson theory, terms containing the fluid density are negligible in comparison with the fluid pressure gradient and extending this as above to the pressure itself, we obtain

$$P_f + P_s = P_b. \quad (35)$$

It follows from equations (26) and (35) that

$$P_s = 0. \quad (36)$$

Using inequality (30) and equation (29), we have

$$\bar{\rho}_f \ll \rho_p, \quad (37)$$

and since from the momentum balance equations for the bubble fluid and for the particulate phase, we have

$$\nabla P_b = O(\bar{\rho}_f), \quad (38)$$

$$\nabla P_p = O(\rho_p), \quad (39)$$

where O is the order symbol, and following the analysis of Batchelor [13], we conclude

$$P_b = \text{constant.} \quad (40)$$

Then, using equations (26) and (35), we obtain

$$P_f = \text{constant,} \quad (41)$$

$$P_s + P_f = \text{constant.} \quad (42)$$

Now, equation (41) is precisely the bubble boundary condition used by Davidson and Harrison [5] in determining the fluid pressure distribution.

However, the boundary condition given by equation (42) is not satisfied by the incompressible solution of Davidson and Harrison [5]. It is this equation that must be used in deriving the relation (1) in a fashion analogous to the Davies - Taylor analysis.

It is worthwhile to note that in the case of a liquid-fluidized bed, the objection of Jackson does not arise since the fluid pressure is not prefixed to have a constant value at the bubble boundary as in the gas-fluidized bed case. However, it is still required that the total pressure assumes a constant value at the surface of the bubble.

5. BUBBLE VELOCITY

Turning to the question of the bubble velocity, we note that in the Davies-Taylor theory [11] the bubble velocity is relative to that of the liquid faraway from the bubble. Now, in the case of a fluidized bed, the liquid is in fact the particulate phase. Hence, the bubble velocity to be used is that relative to the particulate phase faraway from the bubble.

In a frame moving with the bubble, the solid is stagnant at infinity, and then using equation (28), we obtain

$$\bar{v}_p \Big|_{r \rightarrow \infty} = \left[\frac{\bar{\rho}_f \epsilon_0}{\bar{\rho}_f \epsilon_0 + \bar{\rho}_s (1 - \epsilon_0)} \right] \bar{v}_f \Big|_{r \rightarrow \infty} \quad (43)$$

Now,

$$\bar{v}_f \Big|_{r \rightarrow \infty} = U_0 e_x, \quad (44)$$

where U_0 is the incipient fluidization velocity and e_x is the unit vector in the upward direction. Then, equation (43) may be rewritten as

$$\bar{v}_p \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\bar{\rho}_f \epsilon_0}{\bar{\rho}_f \epsilon_0 + \bar{\rho}_s (1 - \epsilon_0)} U_0 e_x. \quad (45)$$

For a gas-fluidized bed, within the approximation of the Davidson theory,

$$\frac{\bar{\rho}_f \epsilon_0}{\bar{\rho}_f \epsilon_0 + \bar{\rho}_s (1 - \epsilon_0)} \ll 1, \quad (46)$$

and then equation (45) becomes

$$\bar{v}_p \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (47)$$

i.e., the relevant bubble velocity is the absolute velocity in the gas-fluidized bed case.

On the other hand, in the liquid-fluidized bed case, since $\bar{\rho}_f$ is of the same order as $\bar{\rho}_s$, equation (45) cannot be simplified further. This gives support to the conclusion of El-Temtamy and Epstein [4] and Darton and Harrison [12] that the appropriate bubble velocity is relative to the fluid in the case of liquid-fluidized beds.

6. CONCLUSIONS

Within the approximation inherent in the Davidson theory, we have justified the use of the Davies - Taylor equation for the gas fluidization bubble. Thus, the criticism of Jackson [6] is not valid. Our derivation is based on first principles -- jump conditions at the bubble surface - and no appeal to the equation of motion of a discrete particle is made as is the case with the analysis of Collins [7].

We have also demonstrated why the appropriate bubble velocity to be used in the Davies - Taylor equation is the absolute one in the gas - fluidized bed case and relative to the fluid velocity in the case of a liquid - fluidized bed.

REFERENCES

- [1] Davidson, J.F., Paul, R.C., Smith, M.J.S., and Duxbury, H.A., "The rise of bubbles in a fluidized bed", Trans. Instn. Chem. Engrs., Vol. 37 (1959), pp. 323-328.
- [2] Harrison, D. and Leung, L.S., "The rate of rise of bubbles in fluidized beds", Trans. Instn. Chem. Engrs., Vol. 40 (1962), pp. 146-151.
- [3] Henriksen, H.K. and Ostergaard, K., "Characteristics of large two-dimensional air bubbles in liquids and in three-phase fluidized beds", Chem. Eng. J., Vol. 7 (1974), pp. 141-146.
- [4] El-Temtamy, S.A. and Epstein, N., "Rise velocities of large single two-dimensional and three-dimensional gas bubbles in liquids and in liquid-fluidized beds", Chem. Eng. J., Vol. 19 (1980), pp. 153-156.
- [5] Davidson, J. and Harrison, D., "Fluidized Particles". Camb. Univ. Press, Cambridge (1963).

- [6] Jackson, R., "The mechanics of fluidized beds: Part II: The motion of fully developed bubbles", Trans. Instn. Chem. Engrs., Vol. 41 (1963), pp. 23-28.
- [7] Collins, R., "The rise velocity of Davidson's fluidization bubble", Chem Eng. Sci., Vol. 20 (1964), pp. 788-789.
- [8] Atkin, R.J. and Craine, R.E., "Continuum theories of mixtures: Basic theory and historical development", Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 29 (1976), pp. 209-244.
- [9] Muller, I., "Equations for the flow of a fluid through a porous solid", C.I.S.M. Meeting, Udine, Italy (1971).
- [10] De Kock, J.W. and Judd, M.R., "The flow pattern within a void in a porous mass", Trans. Instn. Chem. Engrs., Vol. 43 (1965), pp. 78-84.
- [11] Davies, R.M. and Taylor, G.I., "The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and liquids in tubes", Proc. Roy. Soc., Vol. A 200 (1950), pp. 375-390.
- [12] Darton, R.C. and Harrison, D., "The rise of single gas bubbles in liquid fluidized beds". Trans Instn. Chem. Engrs., Vol. 52 (1974), pp. 301-306.
- [13] Batchelor, G.K., "An Introduction to Fluid Dynamics", Camb. Univ. Press, Cambridge (1977).



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-14

P.P. 145 - 151

PUC/RJ

ESTUDO ANALÍTICO EXPERIMENTAL COM TUBOS DE CALOR

Kamal Abdel Radi Ismail

Chang Yu Liu

Deptº. Eng. Mecânica - UNICAMP

Campinas-SP - Brasil

Nelson Murcia

Faculdade de Eng. de Guaratinguetã-SP

UNESP - Guaratinguetã-SP - Brasil

SUMÁRIO

Foi desenvolvido um modelo analítico para otimizar a distribuição da espessura do material poroso do tubo de calor. O método foi usado para calcular, projetar e construir tubos de calor com geometria interna modificada. Foram construídas também tubos idênticos mas sem modificação. Os resultados dos testes que os tubos modificados são mais eficientes e que o modelo de otimização pode prever o desempenho do tubo de calor modificado com menos 1,5% de precisão.

SUMMARY

An analytical model is developed for optimizing the thickness distribution of the porous material in heat pipes. It was utilized to calculate, design and construct heat pipes with internal geometrical changes. Ordinary pipes are also constructed and tested together with the modified ones. The results showed that modified tubes are superior in performance and that the analytical model can predict their performance to within 1,5% precision.

1. Introdução

Recentemente há grande interesse quase universal em tentar dominar a tecnologia de tubo de calor, reduzir o custo da produção usando métodos simplificados de produção e construção, acomodar através de aplicações diversas o tubo de calor no campo de transferência e geração de energia em níveis de temperaturas baixas, médias e altas. Para geração de vapor e água quente, recuperação de energia em níveis comerciais e industriais, para aumentar a geração de vapor em caldeiras convencionais e produção de vapor em caldeiras não convencionais, para uso em usinas a álcool, para uso doméstico aproveitando do calor de fogão fartamente desperdiçado, o tubo de calor é o elemento chave para realizar todas essas tarefas muito mais eficiente do que qualquer dispositivo comercialmente disponível.

No programa de pesquisa de tubos de calor temos feito vários trabalhos teóricos e experimentais. Essa pesquisa está sendo financiada no momento pela FINEP e por um período de dois anos.

No presente trabalho apresentamos alguns resultados de otimização da geometria interna do tubo de calor para reduzir sua resistência térmica e aumentar a taxa de calor transferida. Os resultados teóricos e experimentais mostram a viabilidade deste método e aumento sensível na taxa de troca de calor.

2. Otimização da Geometria de Pavio

Geralmente no projeto de um tubo de calor o limite da capilaridade é dado por:

$$(\Delta P_c)_{\max} \geq \Delta P_l + \Delta P_v \pm \Delta P_g$$

onde

- ΔP_l a queda de pressão no escoamento do líquido
- ΔP_v a queda de pressão no escoamento do vapor
- ΔP_g pressão por efeito da gravidade

Quando o tubo é projetado para operação horizontal o

termo ΔP_g é zero. Os outros termos são geralmente calculados a partir das equações do projeto, veja por exemplo Dunn e Reay [1].

Para aumentar a taxa de calor transferida pelo tubo, podemos aumentar a espessura da camada porosa mas isto resulta também em aumento na resistência térmica do tubo. Isto implica que há uma espessura distribuída cujo valor médio pode resultar em uma taxa de calor ótima. Com base des_{te} princípio foi variada a geometria interna em três maneiras diferentes conforme a figura 1. Foi também desenvolvido um modelo analítico para otimização da distribuição da espessura porosa do tubo. Detalhes do modelo analítico, os resultados teóricos podem ser encontrados no [2].

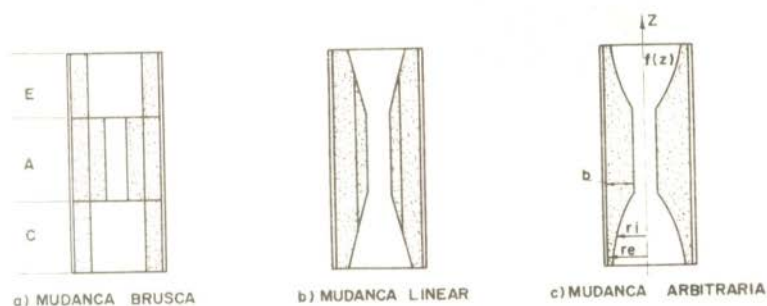


Fig. 1. Modificações propostas

Com base do modelo analítico foram projetados tubos de calor com geometria modificada e outros idênticos sem modificação. Foram também construídos os tubos projetados e testados para verificação do modelo analítico e o desempenho geral dos tubos.

3. Montagem experimental

Para verificação dos resultados teóricos foi montado um sistema para testar os tubos de calor cujos detalhes são mostrados na figura 2.

Dois tipos de tubos de calor foram feitos, uma normal e outra com modificações na estrutura interna.

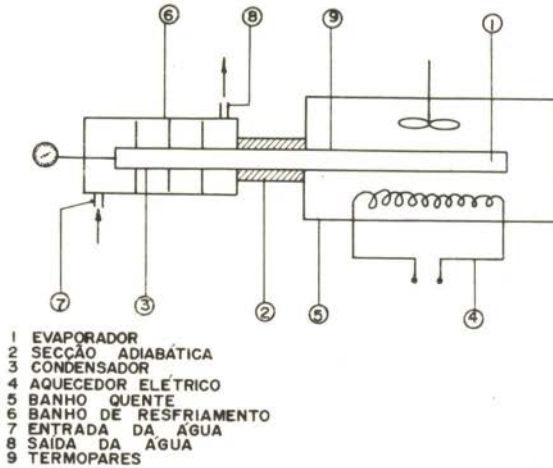


Fig. 2. Montagem experimental

As características básicas destes tubos são resumidos abaixo:

Diâmetro de tubo	: 12,5mm e 25mm
Comprimento do evaporador	: 100mm e 330mm
Comprimento do condensador	: 100mm e 330mm
Comprimento da seção adiabática:	100mm e 330mm
Fluido de trabalho	: Água

Os tubos modificados foram feitas conforme o caso (a) e o caso (b).

Durante os testes foram medidos os potenciais transferidos e o perfil da temperatura ao longo do tubo que foram usados para preparar os gráficos de desempenho dos tubos.

4. Discussão dos resultados

Modificações conforme o caso (a).

Figura 3 mostra a variação da potência transferida com a temperatura de trabalho para um tubo normal e um tubo modificado conforme o caso (a). A partir das curvas nota-

mos que:

a potência transferida com o tubo normal = 94 watts

a potência transferida com o tubo modificado medida experimentalmente = 105 watts

a potência calculada teoricamente para o tubo modificado = 107 watts.

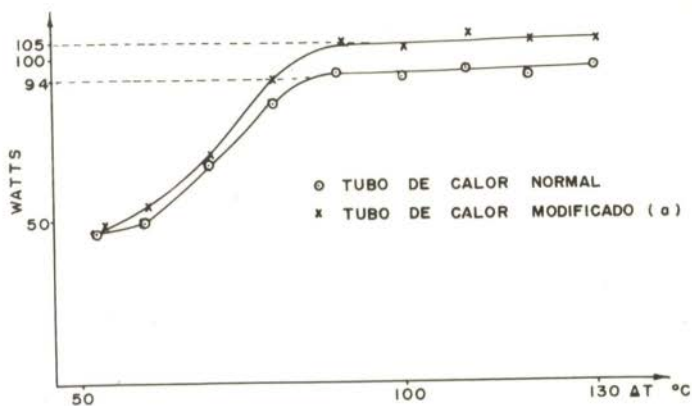


Fig. 3. Variação da potência com temperatura

Isto mostra que um tubo modificado pode transferir 11,7% mais que o tubo normal e 1,9% menos que a previsão teórica pelo modelo proposto.

Resultados similares a esses são mostrados na figura 4 nenhuma faixa de potência diferente. As curvas mostram que:

a potência transferida pelo tubo normal = 340 watts

a potência transferida pelo tubo modificado = 420 watts

a potência calculada do tubo de calor modificado = 432 watts.

Uma análise simples mostra que o tubo de calor modificado transfere 23,5% mais que o tubo normal e que a previsão teórica da potência para o tubo modificado é 2,8% mais que o valor medido experimentalmente.

Esses resultados mostram que os tubos com modificação externa brusca transferem mais potência que os tubos idênticos sem modificação quando operando nas mesmas condições.

Além disso o modelo teórico pode prever a potência de tubo modificado com boa precisão.

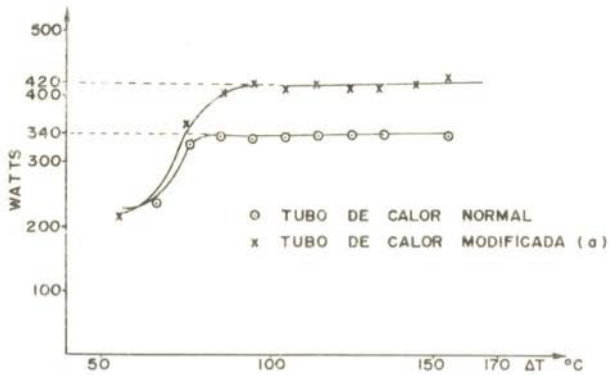


Fig. 4. Variação da potência com temperatura

Modificações conforme o caso (b)

O desempenho do tubo de calor modificado gradualmente conforme o caso (b) é mostrado na figura 5 junto com o tubo normal idêntico. Das curvas notamos que:

- a potência transferida pelo tubo normal = 340 watts
- a potência transferida pelo tubo modificado = 455 watts
- a potência calculada para o tubo modificado = 464 watts

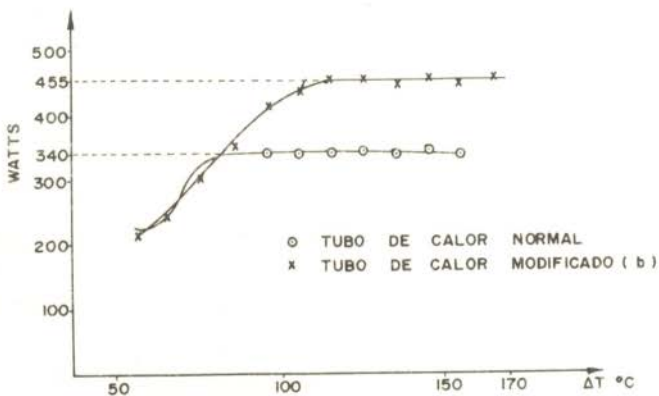


Fig. 5. Variação da potência com temperatura

Analisando os resultados, encontramos que o tubo modificado transfere 33,8% mais que o tubo normal e 1,97% menos que a previsão teórica pelo modelo proposto.

Esses resultados mostram novamente que o tubo modificado é mais eficiente que o tubo plano, que o modelo proposto pode prever a potência do tubo modificado com boa precisão e finalmente que as modificações graduais são mais eficazes que a modificação brusca.

5. Conclusões

As conclusões mais importantes do presente trabalho são:

1. Modificação da estrutura interna do pavio resulta em aumento na taxa de calor transferida.
2. Modificação gradual na estrutura do pavio são mais eficazes que as mudanças bruscas.

REFERÊNCIAS

- [1] Dunn, P.D. and Reay, D.A., "Heat Pipes" 2a. edição, 1978, Pergamon Press.
- [2] Ismail, K.A.R. e Nelson Murcia, "Combined liquid vapor flow in cylindrical heat pipes with modified internal geometry", 4th International Conference on Heat Pipes, London, 1981.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-15

P. P. 153 - 162

PUC/RJ

TRANSFER COEFFICIENTS FOR PLATE FIN
AND ELLIPTICAL TUBE HEAT EXCHANGERS

Sergio Mourão Saboya

Assistant Professor, Mech. Engineering Dept.
ITA, São José dos Campos, SP, Brasil

Francisco Eduardo Mourão Saboya

Associate Professor, Mech. Engineering Dept.
PUC/RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

SUMÁRIO

Com a finalidade de se determinar coeficientes de transferência para trocadores de tubos elípticos aletados, experiências de troca de massa foram realizadas utilizando-se a técnica de sublimação do naftaleno. Por meio da analogia entre transferência de calor e massa, os resultados podem ser convertidos em resultados para troca de calor. Os coeficientes de transferência foram comparados com aqueles para trocadores de tubos circulares e a comparação não revelou grandes diferenças. Esta é uma conclusão positiva, porque o uso de tubos elípticos pode reduzir consideravelmente a queda de pressão, sem afetar as características de transferência.

SUMMARY

In order to determine transfer coefficients for plate fin and elliptical tube exchangers, mass transfer experiments have been performed using the naphthalene sublimation technique. By means of the heat-mass transfer analogy, the results can be converted to heat transfer results. The transfer coefficients were compared with those for circular tube exchangers and the comparison revealed no major differences. This is a positive outcome, since the use of elliptical tubes may reduce substantially the pressure drop, without affecting the transfer characteristics.

1. Introduction

The present paper is concerned with the transfer characteristics of plate fin and elliptical tube heat exchangers used in air conditioning machines. A survey of published heat transfer information relating to such heat exchange devices revealed that the most extensive set of results is concerned with circular tube exchangers.

For circular tube exchangers with plate fins, the results reported by Shepherd [1], Saboya and Sparrow [2,3], constitute the most complete information available in the literature. Several heat exchanger configurations were studied. In [2,3], the tool for obtaining the transfer coefficients was the heat-mass transfer analogy in conjunction with the naphthalene sublimation technique.

In the case of finned elliptical tube exchangers, a paper by Schulenberg [4] appears to be the only significant work. Although interesting and informative, the paper is much more qualitative than quantitative.

In the present research, experimental results are provided for the average transfer coefficients in rectangular plate fin and elliptical tube heat exchangers. The heat transfer problem was simulated by means of the naphthalene sublimation technique and the heat-mass transfer analogy.

To employ the method, naphthalene plates were cast in a specially designed mold. A pair of such plates, spaced apart by elliptical disks, formed the analogical system. Average transfer coefficients were determined by weighing the plates before and after a data run with a precision balance.

The experimentally determined average transfer coefficients will be presented in dimensionless form and compared with similar results for finned circular tube heat exchangers provided by [2,3]. As it is verified by the results that will be reported later, the replacement of the circular tubes by elliptical tubes does not affect the rate of heat transfer adversely. The performance advantage of the elliptical tubes results from their lower pressure drop due to the smaller wake region on the fin behind the tube [5]. A schematic diagram of the physical problem under study is

presented in Figs. 1 and 2.

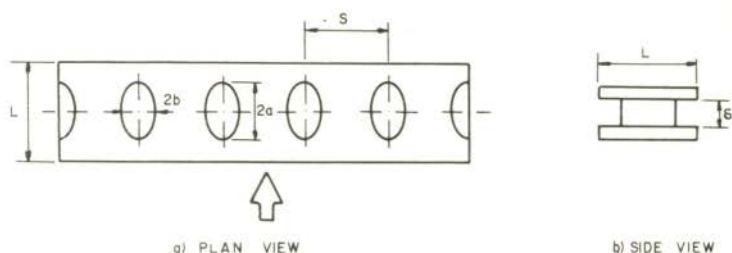


Fig. 1. Schematic of one-row plate fin and elliptical tube heat exchanger

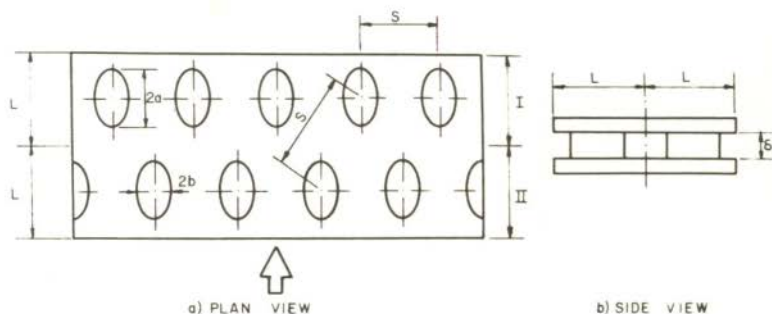


Fig. 2. Schematic of two-row plate fin and elliptical tube heat exchanger

Figs. 1 and 2 contain dimensional nomenclature designated by a , b , L , S and δ . The dimensionless parameters which govern the results are: $\delta/2b$; $S/2b$; $L/2b$; b/a ; Re ; Sc or Pr . Re is the flow Reynolds number, Pr is the Prandtl number and Sc the Schmidt number. The dimension ratios for the present test apparatus were: $\delta/2b = 0.193$; $S/2b = 2.50$; $L/2b = 2.17$; $b/a = 0.50$ and 0.65 . These values are typical of heat exchangers encountered in air conditioning machines. The actual values of the apparatus dimensions are: $\delta = 1.65$ mm; $L = 18.50$ mm; $S = 21.30$ mm; $2a = 13.12$ mm and 17.06 mm; $2b = 8.53$ mm. As mentioned

before, the present results will be compared with the results of [2,3] for circular tubes. The dimension ratios for the test apparatus of [2,3] are identical to those of the present configurations. It is only necessary to replace 2b by the tube diameter.

The Reynolds number of the flow was varied during the course of the research from 150 to 1300. Once again, this range is relevant to air conditioning applications. The Schmidt number, which is the analogue of the Prandtl number, is 2.5 for the naphthalene air system.

2. Test Apparatus and Experimental Procedures

Fig. 3 is a schematic side view of the test apparatus. As shown, air from the laboratory room is drawn into the channel formed by the plates. Upon leaving the test section, the air exits to a plenum chamber from which it passes successively to a calibrated flow meter and a blower, and then to an exhaust system.

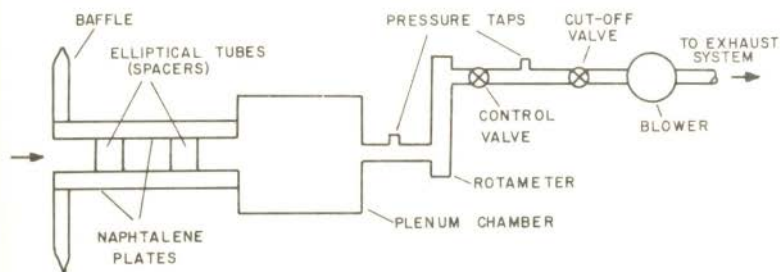


Fig. 3. Schematic side view of the test apparatus

The naphthalene plates used in the experiments were cast in a metallic mold whose components had been polished to a high degree of smoothness. The details of the mold fabrication, of the casting and removal processes are described in [6].

For the overall mass transfer, the measurements were made with a Sartorius precision balance which could be read to within 0.05 milligrams for specimens having a mass up to

200 g. Measurements of the flow rate were made with a calibrated rotameter. Typically, the uncertainty of the flow rate measurements was only 1 percent. The temperature of the air entering the test section was given by a laboratory thermometer that could be read to 0.1 deg C. The duration time of a data run was measured with a timer capable of discriminating to within 0.1 sec. The atmospheric pressure was sensed by a barometer of column of mercury whose smallest scale division was 0.1 mm.

3. Evaluation of Results

Attention will now be given to a brief description of the data reduction procedures. Further details are available in [6].

Let M_T denote the overall mass transfer, A the corresponding fin surface area, τ the duration time of a data run, $(\Delta\rho_n)_m$ the log-mean concentration difference, and D_m the coefficient of mass diffusion. A dimensionless representation can then be made by introducing the average Sherwood number \overline{Sh}

$$\overline{Sh} = M_T (2\delta) / A (\Delta\rho_n)_m \tau D_m \quad (1)$$

The log-mean concentration difference $(\Delta\rho_n)_m$ depends on the bulk concentration of naphthalene vapor at the exit $(\rho_n)_L$ and the wall concentration $(\rho_n)_w$. The bulk concentration of naphthalene vapor in the air entering the exchanger is zero. At the exit $(\rho_n)_L = M_T / \hat{V}\tau$, where \hat{V} is the volume flow rate; at the wall $(\rho_n)_w$ is a function of the room temperature, as given by the Sogin vapor pressure correlation [7].

The Reynolds number, employed as independent variable, is given by

$$Re = (2\delta) G / \mu \quad (2)$$

where G is the mass velocity based on the frontal flow area.

The conversion of the Sherwood number results to Nusselt number can be accomplished by the relation

$$\overline{Nu} = (\text{Pr}/\text{Sc})^m \overline{Sh} \quad (3)$$

where m is 0.4 [6].

A detailed error analysis of the experimentally determined Sherwood and Reynolds numbers is described in [6]. From equation (1), the uncertainty in the Sherwood number was found to be within 7.3 percent. From equation (2), the uncertainty in the Reynolds number was in the range 2.0 - 3.0 percent.

4. Results and Discussion

Average mass transfer coefficients, expressed in terms of the average Sherwood number \overline{Sh} , were evaluated from equation (1). These results are plotted in Figs. 4, 5, 6, 7 and 8. The ordinate variable is \overline{Sh} and the abscissa variable is Re , which was calculated from equation (2).

Figs. 4, 5, 6 and 7 also contain the results for circular tube heat exchangers provided by references [2] and [3]. Inspection of the figures reveals that there is no major differences between the present results, for $b/a = 0.65$ and 0.50, and those from [2,3], for $b/a = 1.0$ (circular tubes). A small difference, in favor of the elliptical tubes, can be observed in Figs. 6 and 7, for $b/a = 0.50$. It should be noticed that Figs. 4 and 6 are for one-row heat exchangers, while Figs. 5 and 7 are for two-row heat exchangers. In Figs. 4 and 5 the curves for $b/a = 0.65$ and 1.0 are coincident.

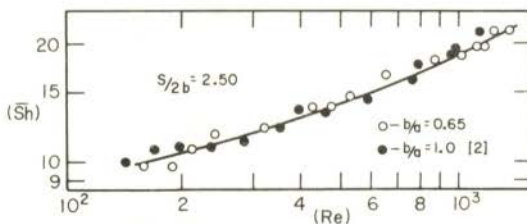


Fig. 4. Sherwood numbers for one-row exchangers

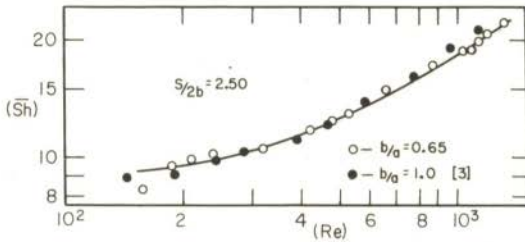


Fig. 5. Sherwood numbers for two-row exchangers

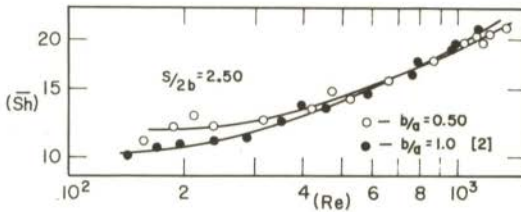


Fig. 6. Sherwood numbers for one-row exchangers

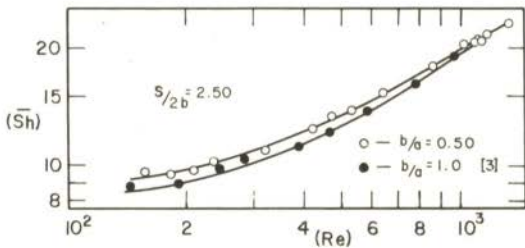


Fig. 7. Sherwood numbers for two-row exchangers

The most important finding of the present work is that the replacement of the circular tubes by elliptical tubes does not affect the rate of heat transfer adversely. This is a fortunate outcome, since the elliptical tubes may reduce substantially the pressure drop [5] without affecting the transfer characteristics.

Fig. 8 shows the Sherwood number results for two elliptical tube exchangers, both with one row of tubes and $b/a = 0.50$. One has $S/2b = 2.50$ and the other has $S/2b = 3.53$. It is seen that the exchanger with smaller distance between the elliptical tubes has higher transfer coefficients. This is due to the acceleration of the air in the region between the tubes. Then, the use of elliptical tubes makes possible the reduction of the tube distance, increasing the transfer coefficients, without increasing the pressure drop too much.

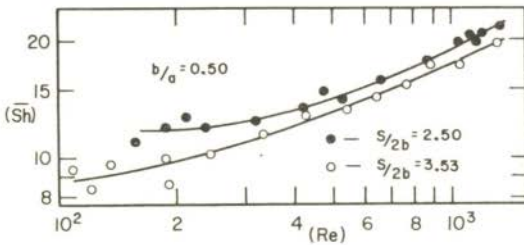


Fig. 8. Effect of the tube distance on the transfer coefficients of one-row elliptical tube exchangers

Table 1 gives the Sherwood-Reynolds correlations for the several cases discussed. These correlations were obtained by least-square fitting of the experimental data. Typically, the average dispersion was 2.5 percent.

Table 1. Sherwood-Reynolds Correlations

b/a	$S/2b$	Number of Rows	Correlations
1.0	2.50	1	$\overline{Sh} = 9.20 + 3.64 \times 10^{-3} (Re)^{1.15}$
1.0	2.50	2	$\overline{Sh} = 7.82 + 2.10 \times 10^{-3} (Re)^{1.24}$
0.50	3.53	1	$\overline{Sh} = 6.59 + 7.36 \times 10^{-2} (Re)^{0.72}$
0.50	2.50	1	$\overline{Sh} = 10.14 + 8.58 \times 10^{-3} (Re)^{1.00}$
0.50	2.50	2	$\overline{Sh} = 6.82 + 2.63 \times 10^{-2} (Re)^{0.89}$
0.65	2.50	1	$\overline{Sh} = 3.45 + 5.28 \times 10^{-1} (Re)^{0.49}$
0.65	2.50	2	$\overline{Sh} = 6.52 + 2.98 \times 10^{-2} (Re)^{0.86}$

In the case of the two-row plate fin and tube heat exchangers, overall rates of mass transfer have also been determined for the portions of the fin associated with the first and second rows of tubes. The quantities \dot{M}_I and \dot{M}_{II} respectively denote the overall rates of mass transfer in regions I and II of Fig. 2. \dot{M}_T is defined as $\dot{M}_I + \dot{M}_{II}$. The relative transfer capabilities of the two portions of the fin are given in Table 2. From Table 2, it is seen that region I is more efficient than region II when the Reynolds number is low. As the Reynolds number increases, more and more of a parity is established between the two regions. This is due to a vortex systema [3], adjacent to the second row of tubes, which grows in intensity as the Reynolds number increases.

Table 2. Relative Transfer Capabilities of Regions I and II

Re	b/a = 1.0		b/a = 0.65		b/a = 0.50	
	\dot{M}_I/\dot{M}_T	\dot{M}_{II}/\dot{M}_T	\dot{M}_I/\dot{M}_T	\dot{M}_{II}/\dot{M}_T	\dot{M}_I/\dot{M}_T	\dot{M}_{II}/\dot{M}_T
150	0.64	0.36	0.60	0.40	0.67	0.33
200	0.62	0.38	0.60	0.40	0.65	0.35
250	0.61	0.39	0.60	0.40	0.62	0.38
350	0.59	0.41	0.60	0.40	0.59	0.41
450	0.58	0.42	0.60	0.40	0.57	0.43
600	0.57	0.43	0.58	0.42	0.54	0.46
700	0.56	0.44	0.57	0.43	0.53	0.47
800	0.55	0.45	0.57	0.43	0.52	0.48
1000	0.54	0.46	0.55	0.45	0.50	0.50
1200	0.52	0.48	0.53	0.47	0.49	0.51

5. Concluding Remarks

It has been demonstrated that the replacement of circular tubes by elliptical tubes, in finned heat exchangers, does not decrease the rate of heat transfer. The performance advantage of the elliptical tubes results from their lower pressure drop [5]. It has also been demonstrated that a reduction of the distance between the tubes increases the transfer coefficients. Such a reduction may increase the pressure drop too much, if circular tubes are used. Then, the

elliptical tubes may offer significant performance advantage in multi-row plate fin and tube heat exchangers. It is only necessary to decrease $S/2b$.

Before closing, it should be said that the production of elliptical tubes is today completely automatic. Schulenberg [4] reported that his company produced in 1966 more than 70 miles of this type of tube per week. This is a conclusive proof that there is no commercial disadvantage when cost comparison is made with conventional heat exchanger tubes.

REFERENCES

- [1] Shepherd, D.G., "Performance of One Row Tube Coils with Thin Plate Fins, Low Velocity Forced Convection", Heating, Piping and Air Conditioning, Vol.28 (1956), pp. 137-144.
- [2] Saboya, F.E.M. and Sparrow, E.M., "Local and Average Transfer Coefficients for One-Row Plate Fin and Tube Heat Exchanger Configurations", Journal of Heat Transfer, Vol. 96 (1974), pp. 265-272.
- [3] Saboya, F.E.M. and Sparrow, E.M., "Transfer Characteristics of Two-Row Plate Fin and Tube Heat Exchanger Configurations", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19 (1976), pp. 41-49.
- [4] Schulenberg, F.J., "Finned Elliptical Tubes and Their Application in Air-Cooled Heat Exchangers", J. of Engineering for Industry, Vol. 88 (1966), pp. 179-190.
- [5] Webb, R.L., "Air-Side Heat Transfer in Finned Tube Heat Exchangers", Heat Transfer Eng., Vol.1 (1980), pp.33-49.
- [6] Saboya, S.M., "Coeficientes de Transporte em Trocadores de Tubos Elípticos Aletados", Tese de Mestrado, Dept^o Eng. Mecânica, ITA, S.J. dos Campos, SP, Brasil, (1979).
- [7] Sogin, H.H., "Sublimation from Disks to Air Streams Flowing Normal to their Surfaces", Trans. ASME, Vol.80(1958)pp.61-71.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-16

P.P. 163 - 172

PUC/RJ

COEFICIENTES DE TRANSFERÊNCIA PARA O ESCOAMENTO
TURBULENTO ENTRE PLACAS PLANAS PARALELAS

Jorge Frederico Vetterle
IAE-EAV, CTA

Euclides Carvalho Fernandes
ITA-IEM, CTA

SUMÁRIO

Determinou-se experimentalmente, através da Técnica de Sublimação de Naftaleno, os coeficientes de transferência médios para escoamento forçado turbulento na região de entrada entre placas planas paralelas; com perfil assimétrico de concentração de massa. De acôrdo com a analogia entre a transferência de massa e calor, os experimentos correspondem à transferência de calor com uma placa à temperatura uniforme e a outra isolada. A faixa de números de Reynolds abrange desde 10900 a 91700.

SUMARY

Average transfer coefficients in the turbulent forced convection entrance region between parallel plates, with asymmetrical conditions of the concentration profile, were determined experimentaly with the Naphthalene Sublimation Technique. In accordance with the analogy between heat and mass transfer, the tests correspond to a heat-transfer problem with uniform surface temperature at one plate and the other insulated. The Reynolds number ranges from 10900 to 91700.

1. Introdução

São apresentados coeficientes médios de transferência para o escoamento forçado em regime turbulento na região de entrada entre placas planas paralelas, considerando-se o desenvolvimento simultâneo dos perfis de velocidade e de temperatura. Uma das placas é considerada como adiabática e a outra mantida à temperatura uniforme. O método experimental é baseado na analogia entre transferência de calor e massa, utilizando-se a técnica de sublimação de naftaleno. O escoamento é considerado como incompressível e em regime permanente e o fluido com propriedades constantes. Hatton [1] apresenta resultados analíticos referentes ao problema em questão; entretanto considera condições de escoamento hidrodinamicamente desenvolvido. Kreith e Kreider [2, p. 134] apresentam uma correlação para o escoamento forçado turbulento entre placas planas paralelas com somente uma superfície aquecida ($q_w = \text{constante}$), valendo para valores assintóticos e com base em dados experimentais para o ar. Tan e Charters [3], [4] apresentam correlações para o mesmo problema anterior [2], incluindo a região de entrada, com o desenvolvimento simultâneo dos perfis de velocidade e temperatura. Sukumel et alü [5] investigaram experimentalmente a transferência de calor para escoamento laminar e turbulento de ar na região de entrada de um duto retangular com a condição de contorno $q_w = \text{constante}$ nas duas placas. Sakakibara e Endoh [6], analítica e experimentalmente, trataram o problema de transferência de calor entre placas planas paralelas considerando condução axial na parede limitante do escoamento desenvolvido turbulento. Uma das placas foi considerada como adiabática e a outra à temperatura uniforme. Para o caso de fluxo uniforme de calor numa das placas, só trataram de problema analiticamente. Sparrow et alü [7] desenvolveram estudos experimentais sobre os efeitos de aquecimento assimétrico ($q_w = \text{constante}$) na transferência de calor em escoamento forçado turbulento, para dutos retangulares; escoamento desenvolvido. Larson e Yerazunis [8] mediram coeficientes locais de transferência de massa em escoamento forçado turbulento desenvolvido, em duto retangular; onde numa das pare

des se processava evaporação de água (número de Schmidt igual a 0,62). Barrow [9] estudou analítica e experimentalmente a transferência de calor assimétrica para o ar escoando em regime turbulento desenvolvido entre placas planas paralelas, com a condição de fluxo de calor uniforme nas duas placas.

Nesses trabalhos anteriores os métodos experimentais desenvolvidos foram os clássicos, sem cogitar da aplicação da técnica de sublimação de naftaleno. Esta técnica, aplicada ao escoamento entre placas planas paralelas, com as condições de contorno do presente trabalho, foi utilizada por Fernandes e Saboya [10], que determinaram coeficientes de transferência para toda a região de escoamento, porém abrangendo somente o campo de regime de escoamento forçado laminar. Sparrow e Kalejs [11] utilizaram esta mesma técnica na configuração placas planas e paralelas, com restrições na entrada do canal, para regimes laminares. No presente trabalho aplicou-se a técnica de sublimação de naftaleno na determinação de coeficientes de transferência de massa na forma de números de Sherwood médios, que correspondem a números de Nusselt na analogia. A faixa de número de Reynolds abrange valores de $10,9 \times 10^3$ a $91,7 \times 10^3$, com a relação entre o comprimento do canal L e o diâmetro hidráulico D_h variando desde 2 até 14.

2. Formulação do Problema

Observadas as hipóteses no item anterior, o problema em questão é estabelecido pelas equações de continuidade, movimento e energia e mais as condições de contorno referentes à figura 1. Para uma análise mais geral do problema, as seguintes variáveis adimensionais são definidas:

$$X = x/4a, Y = y/4a, U = \bar{u}/U_0, V = \bar{v}/U_0, P = \frac{\bar{p} - p_0}{\rho U_0^2} \quad (1)$$

$$\theta = \frac{\bar{T} - T_w}{T_0 - T_w} \quad \text{com } Re = U_0 \cdot 4a/\nu \text{ e } Pr = \nu/\alpha \quad (2)$$

representando respectivamente os números de Reynolds e de Prandtl.

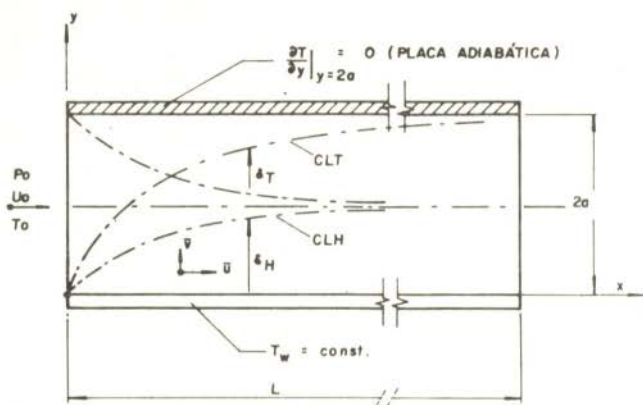


Figura 1: Condições de Contorno do Canal

Substituindo estas relações nas equações de conservação, resultam as equações adimensionalizadas do problema nas formas seguintes:

$$U_X + V_Y = 0 \quad (3)$$

$$UU_X + VU_Y = -P_X + (1/R_e) \{ (1 + (\epsilon/\nu)) U_Y \}_Y \quad (4)$$

$$U\theta_X + V\theta_Y = (1/R_e P_r) \{ (1 + (\epsilon P_r / \nu P_{rt})) \theta_Y \}_Y \quad (5)$$

onde os índices X e Y indicam derivações com relação a X e a Y,

$$P_{rt} = \epsilon / \epsilon_h \quad (6)$$

representa o número de Prandtl turbulento, e ϵ e ϵ_h representam as difusibilidades turbulentas de quantidade de movimento e de calor respectivamente.

As condições de contorno são dadas por:

$$X = 0; \quad U = 1; \quad P = 0 \quad e \quad \theta = 1 \quad (7)$$

$$X \geq 0; \quad Y = 0 \rightarrow U = V = 0 \quad e \quad \theta = 0$$

$$Y = 1/2 \rightarrow U=V=0 \quad e \quad \theta_Y = 0 \quad (8)$$

Analogamente às hipóteses formuladas por Deissler [12], para o desenvolvimento simultâneo das camadas-limite térmica e hidrodinâmica, assume-se que $P_{rt} = 1$, segundo a analogia de Reynolds. Como $\epsilon/\nu = f(R_e, Y)$, [13, p.400], a solução do campo de temperatura pode ser colocada como:

$$\theta = \theta(X, Y, R_e, P_r) \quad (9)$$

Definindo-se o coeficiente de convecção local como:

$$h_o = q/(T_w - T_o) = - (k/4a) \theta_Y(X, 0, R_e, P_r) \quad (10)$$

o número de Nusselt pode ser representado por:

$$N_{u_o} = h_o \cdot 4a/k = N_{u_o}(X, R_e, P_r). \quad (11)$$

Analogamente ao problema de transferência de calor considere-se agora um processo de transferência de massa, num meio naftaleno-ar formando uma só fase; superposto ao campo de velocidade. As equações neste caso são as mesmas do problema de transferência de calor, trocando-se na equação (5) e nas condições de contorno a temperatura adimensional θ pela concentração adimensional de naftaleno no ar, ϕ , dada por:

$$\phi = (\bar{\rho}_n - \rho_{nw})/(\rho_{no} - \rho_{nw}), \quad (12)$$

com ρ_n representando as concentrações dimensionais de naftaleno no ar. Analogamente à equação (9) tem-se que:

$$\phi = \phi(X, Y, R_e, S_c) \quad (13)$$

onde $S_c = \nu/D_n$ representa o número de Schmidt, análogo ao número de Prandtl. Sendo m_n a taxa de transferência de massa de naftaleno para o ar e definindo-se o coeficiente de transferência como:

$$K_o = \dot{m}_n / (\rho_{nw} - \rho_{no}) = - (D_n/4a) \Phi_Y(X, 0, R_e, S_c) \quad (14)$$

o número de Sherwood pode ser representado como:

$$S_{h_o} = K_o \cdot 4a/D_n = S_{h_o}(X, R_e, S_c) \quad (15)$$

3. Métodos Experimentais

Para utilização da Técnica de Sublimação de Naftaleno, placas de naftaleno foram fundidas em molde especialmente projetado [14] obtendo-se um conjunto de três cassetes que compunham uma das paredes do canal de comprimento até 279 mm, correspondendo uma relação entre o comprimento do canal e o diâmetro hidráulico, L/D_h , máxima de 14. A figura 2 representa esquematicamente a montagem experimental utilizada. Operava-se de modo que o ar ambiente, isento de traços de naftaleno ($\rho_{no} = 0$), fosse succionado na secção de testes, descarregando o mesmo fora do ambiente da experiência.

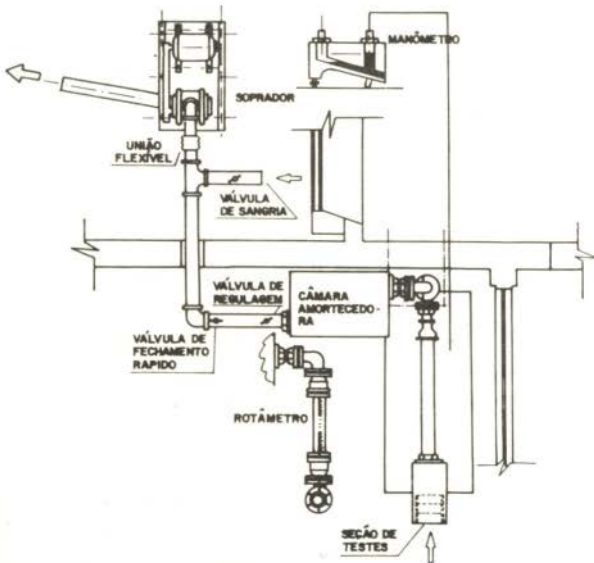


FIGURA 2: INSTALAÇÃO UTILIZADA

Após espaço de tempo apropriado determinava-se a massa de naftaleno sublimada através de uma balança digital com capacidade até 200 g e com leitura de 0,1 mg. Os valores médios dos coeficientes de transferência eram então determinados pela taxa de transferência de massa de naftaleno, dividida pela área total de sublimação e pela concentração de naftaleno na parede (ρ_{nw}), a qual era avaliada pela expressão sugerida por Sogin [15]. Para tal a temperatura das placas de naftaleno foi medida com termopares de cobre-constantan # 24, posicionados logo abaixo da superfície ativa (\approx 1mm) das placas de naftaleno, e no centro das mesmas. Estes termopares, passando por um furo na parte posterior do cassete, eram colocados antes da fundição das placas. Outro termopar de cobre-constantan (# 30) era afixado no anteparo de madeira da seção de testes para medir a temperatura ambiente. Um terceiro termopar (# 24) media a temperatura na entrada do rotâmetro, utilizado na medida da vazão do escoamento. Maiores detalhes a respeito do método experimental bem como uma avaliação de erros são discutidos por Vetterle [14].

4. Resultados

Sendo ΔM_{nB} a massa de naftaleno sublimada numa experiência, conforme descrito no item anterior, o número de Sherwood médio é determinado por [14]:

$$\bar{S}_{h_o} = \frac{\Delta M_{nB} \cdot 4a}{t_e A_w D_n \rho_{nw}} \quad (16)$$

com $D_n = 6,272 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ sendo fixado para a difusibilidade de de naftaleno no ar, correspondente ao número de Schmidt, S_c , igual a 2,5.

Estes resultados são apresentados na figura 3 na forma de números de Sherwood referidos à diferença de concentrações média logaritimica, \bar{S}_{h_b} , já que nesta representação são distinguidos os valores assintóticos para cada número de Reynolds. Para tal foram feitas transposições dos valores dados pela equação (16) segundo a expressão [14]:

$$\bar{S}_{h_b} = -\frac{1}{2L^+} \ln(1 - 2L^+ \bar{S}_{h_0}) \quad (17)$$

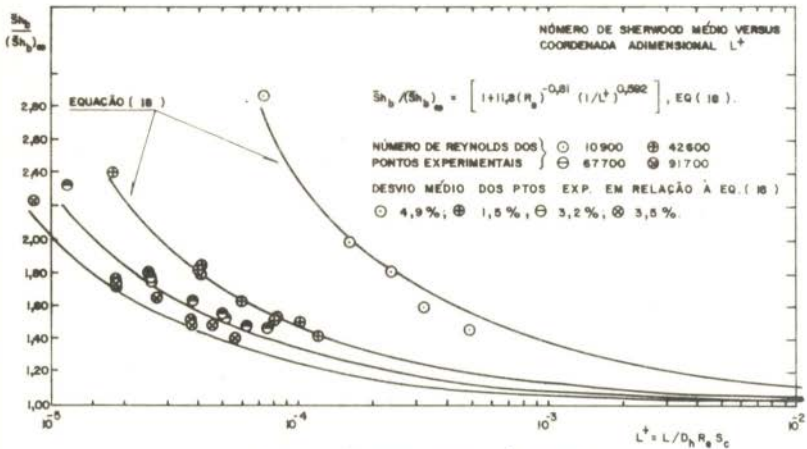


FIGURA 3 - NÚMEROS DE SHERWOOD MÉDIO VERSUS COORDENADA ADIMENSIONAL L^+ , EFEITO DO NÚMERO DE REYNOLDS.

Os valores médios dos coeficientes de transferência para o problema apresentado, podem ser representados com boa precisão pela correlação:

$$\bar{S}_{h_b} = 0,0202 R_e^{0,8} S_c^{0,4} \left[1 + 11,8 (R_e)^{0,81} (L^+)^{-0,592} \right] \quad (18)$$

A tabela 1 apresenta os valores médios da dispersão para os números de Reynolds do presente trabalho, observando-se que a correlação proposta representa os pontos experimentais com um desvio médio da ordem de 3%.

Número de Reynolds	Dispersão média dos pontos experimentais em relação à equação (18)
(-)	(%)
10900	5
42600	2
67700	3
91700	4

Tabela 1: Dispersão média dos pontos experimentais

5. Conclusões

Embora não existam trabalhos nas mesmas condições do presente, os mais próximos apresentaram resultados que dão indicação da confiabilidade dos resultados finais deste trabalho; inclusive daqueles referente à região desenvolvida. Assim, Tan e Charters [3], para a região de entrada com $q_w =$ constante numa das placas, valendo para o ar; apresentaram para $Re = 67700$ valores, em média, 14% maiores e para os valores assintóticos, 11% menores em relação aos correspondentes à equação (18). Na região de entrada a comparação acima revelou um comportamento qualitativo idêntico ao calculado por Hatton e Quarmby [1]. Os valores assintóticos apresentados por Kreith e Kreider [2, página 134], $q_w =$ constante numa das placas, praticamente coincidiram com os da equação (18), aplicada para o ar (número de Prandtl = 0,7). A imprecisão segundo a análise de erros revelou-se razoável, tendo em vista que para os cálculos práticos de trocadores de calor especifica-se uma precisão de 5 a 10%.

Referências Bibliográficas

1. Hatton, A.P. & Quarmby, A., The Effect of Axially Varying and Unsymmetrical Boundary Conditions on Heat Transfer with Turbulent Flow Between Parallel Plates. Int. J. Heat Mass Transfer, 6:903, 1963.
2. Kreith, F. & Kreider, J.F., "Fundamentals of Fluid Mechanics and Heat Transfer". In: - Principles of Solar Engineering. Washington, Mc Graw-Hill, 1978.
3. Tan, H.M. & Charters, W.W.S., Effect of Thermal Entrance Region on Turbulent Forced - Convective Heat Transfer for an Asymmetrically Heated Rectangular Duct with Uniform Heat Flux. Solar Energy, 12:513, 1969.
4. Tan, H.M. & Charters, W.W.S., An Experimental Investigation of Forced - Convection Heat Transfer for Fully

- developed Turbulent Flow in a Rectangular Duct with Asymmetric Heating. Solar Energy, 13:121, 1970.
5. Sukomel, A.S. et alii, An Investigation of Heat Transfer in the Entry Section of Rectangular Duct. Thermal Engng, vol.22, nº 3, p.99, 1975.
 6. Sakakibara, M. & Endoh, K., Effect of Conduction in Wall on Heat Transfer with Turbulent Flow Between Parallel Plates. Int. J. Heat Transfer, 20:507, 1977.
 7. Sparrow, E.M. et alii, Experiments on turbulent heat transfer in an asymmetrically heated rectangular duct. Trans. ASME. série C, 99(2) 170-174, 1966.
 8. Larson, R.I. & Yerazunis, S., Mass Transfer in Turbulent Flow. Int. J. Heat Mass Transfer, 16, 122, 1973.
 9. Barrow, H., An Analytical and Experimental Study of Turbulent gas Flow Between Two Smooth Parallel walls with Unequal Heat Fluxes. Int. J. Heat Mass Transfer, 5, 469, 1962.
 10. Fernandes, E.C. & Saboya, F.E.M., Coeficientes de Transferência para o escoamento Forçado em Regime Laminar entre Placas Planas Paralelas. V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, A-26, p.p. 420-429, 1979.
 11. Sparrow, E.M. & Kalejs, J.P. - Local Convective Transfer Coefficients in a Channel downstream of a Partially Constricted Inlet. Int. J. Heat Mass Transfer, 20, 1241, 1977.
 12. Deissler, R.G., Turbulent Heat Transfer and Friction in the Entrance Regions of Smooth Passages. Transactions of the Asme, november, 1955.
 13. Eckert, E.R.G. & Goldstein, R.J., Measurements in Heat Transfer 2^a ed. New York, Mc Graw-Hill, 1976.
 14. Vetterle, J.F., Coeficientes de Transferência para o Escoamento Turbulento entre Placas Planas Paralelas. Tese de Mestrado, ITA, 1981.
 15. Sogin, H.H., Sublimation From Disks to Air Streams Flowing Normal to Their Surfaces. Transactions of the Asme, 8:63, Jan., 1958.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-17

P. P. 173 - 182

PUC/RJ

COMBINED FREE AND FORCED LAMINAR CONVECTION IN INCLINED
RECTANGULAR CHANNELS HEATED FROM BELOW AND COOLED FROM ABOVE

V. A. AKINSETE

Professor, Mechanical Engineering Department
University of Lagos, Lagos, Nigeria.

F.L. BELLO-OCHENDE

Graduate Student, Mechanical Engineering
Department, University of Lagos, Lagos - Nigeria.

SUMARIO

Para fluido incompressível, viscoso, $Pr = 0,73$, estado estável, são analisados, problemas térmicos não lineares, presentes em convecção natural e forçada em dutos retangulares inclinados com temperatura de parede constante, foi observado que existem valores máximos para o fator médio de atrito, Números de Nusselt e Stanton, quando a inclinação do duto está entre 30° e 60° , e um determinado valor do número do Arquimedes (Ar). Existem soluções únicas independentes da inclinação do duto quando $Ar = 0,5$.

SUMMARY

Steady - state numerical results for the solution to the non-linear thermal problem of combined free and forced laminar convection in inclined rectangular channels with constant but unequal surface temperatures are presented for an incompressible, viscous fluid whose Prandtl number, $Pr = 0.73$. Fluid properties are assumed constant, except for density variations with temperature. Maximum values exist for the mean friction factor, Nusselt and Stanton numbers when the inclination to the horizontal lies between 30° and 60° for a given Archimedes number, Ar . Also, for any given inclination a unique solution exists when $Ar = 0.50$.

1. Introduction

When in non-isothermal flow density variations which arise as a result of temperature gradients are sufficiently large to produce buoyant forces in a gravitational field, the buoyant force terms must be retained in the governing equations of Navier-stokes. The relative magnitudes of the forced and free convection effects are obtained by normalising the partial differential equations which describe the flow and by examining the relative magnitudes of such parameters as the Reynolds, Grashof and Prandtl numbers. Of particular significance in the case of combined free and forced laminar convection in rectangular channels, is the orientation of the gravitational field. The purpose of this paper is therefore to present the heat and flow results for combined free and forced laminar convection in inclined rectangular channels with constant but unequal surface temperatures for a fluid whose Prandtl number, $Pr=0.73$. It is desired to find out if a critical angle exists at which the heat and flow parameters are maximum. Since the combined effect of the mutually interacting fields is given by Gr/Re^2 , the Archimedes number, it is also desired to know if a particular value of Gr/Re^2 exists that yields a unique solution to the thermal problem. The importance of the last two conditions can be appreciated in the design of heat transfer equipments such as the flat-plate solar collectors where convection must necessarily occur in an oriented gravitational field.

Numerical studies of fully developed combined free and forced laminar convection in inclined rectangular channels under the thermal boundary conditions of axially uniform wall heat-flux has been reported by Ou et all [1]. The improved formulation used by three authors redefined the Reynolds and Rayleigh numbers in terms of the angle of inclination to the horizontal. Because of the introduction of these modified non-dimensional parameters, their formulation failed to recover the horizontal case as a limiting orientation. Cheng and Hwang [2] presented numerical results for fully developed combined free and forced laminar convection in horizontal rectangular channels under the thermal boundary conditions

of axially uniform wall heat-flux and peripherally uniform wall temperature, while Cheng and Hong [3] reported a numerical study using a combination of boundary vorticity and line iterative methods to determine free convection effects on fully developed laminar upward flow in inclined tubes with the angle of inclination appearing explicitly in their formulation. Iqbal and Stachiewicz [4] obtained theoretical results of variable density effects in fully developed combined free and forced laminar convection in inclined tubes. Also, Iqbal and Stachiewicz [4] reported the study of the same phenomenon in inclined tubes and showed that for a given set of non-dimensional parameters, there exists a particular tube inclination that produces a maximum heat transfer rate. The work of Ozoe et al [5] though on pure natural convection, showed that a critical angle exists at which the heat transfer is a maximum.

In all the foregoing references the formulations, except the first, have the orientation of the gravitational field appearing explicitly. However, they all have the same thermal boundary conditions and their analyses are restricted to only the fully developed regimes. In the present work, a steady-state analysis is carried out numerically for the two-dimensional problem. No general assumptions of fully developed regimes are made except that at remote distances from the channel entrance, the hydrodynamic and thermal fields are assumed not to vary with distance. In solving the problem, the pressure gradient terms are eliminated by cross-differentiation of the momentum equations. The combined momentum and energy equations are then normalised following Mori and Uchida [6]. The vorticity transport equation is derived from the combined momentum equation with the angle of inclination appearing explicitly in the formulation. The vorticity transport and energy equations are discretized following Dennis [7]. These equations are solved simultaneously using the boundary vorticity method and the five-point Gauss-Seidel iterative procedure for the prescribed inhomogeneous thermal boundary conditions. For computational convenience, the inlet conditions are those of uniform velocity and tempera-

ture equal to that of the cooled surface,

2. Mathematical Formulation of the Problem

It is assumed, a priori, that the channel aspect ratio is large and its width is several times the magnitude of its height so that the lateral side effects are negligible when a longitudinal section, far removed from the vertical bounding sides, is taken. For moderate temperature gradients the problem reduces to a two-dimensional one.

The flow is assumed steady, laminar, incompressible and no internal heat generation exists. For the low velocity flows considered, viscous dissipation is negligible. Fluid properties are assumed constant except density variations with temperature considered significant only in the buoyancy term. The governing equations referred to the rectangular Cartesian coordinates, (X,Y), are: Continuity Equation:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

Momentum equations in X- and Y- directions respectively are:-

$$\frac{U\partial U}{\partial X} + \frac{V\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\rho_m \partial X} + \nu \nabla^2 U + g\beta(T-T_c) \sin \alpha \quad (2)$$

$$\frac{U\partial V}{\partial X} + \frac{V\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\rho_m \partial Y} + \nu \nabla^2 V - g\beta(T-T_c) \cos \alpha \quad (3)$$

Energy equation:

$$\frac{U\partial T}{\partial X} + \frac{V\partial T}{\partial Y} = \lambda \nabla^2 T \quad (4)$$

Boussinesq approximation:

$$\rho = \rho_m \{1 - \beta(T-T_c)\} \quad (5)$$

where U, V are the respective local fluid velocity components in the X- and Y- directions, P the local pressure, T the local temperature, T_c the cold wall temperature, ν the kinematic viscosity, λ the thermal diffusivity, g the gravitational acceleration, β the thermal coefficient of expansion, α^0 the angle of inclination to the horizontal and ρ and ρ_m the local and mean densities respectively of the fluid. The boundary conditions are:-

a) At $X = 0$, $0 < Y < b$,

$$U = U_m; T = T_c; V = 0$$

b) At $X = X_L$, $0 < Y < b$,

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

c) At $Y = 0$, $0 < X < X_L$

$$T = T_c; U = V = 0 \text{ (No-slip condition at wall)}$$

d) At $Y = b$, $0 < X < X_L$

$T = T_h$; $U = V = 0$ (No-slip condition at wall) where b is the channel height, X_L the length of channel, T_h the hot wall temperature and U_m the mean fluid velocity.

The pressure gradient terms are eliminated between the momentum equations (2) and (3) by cross-partial differentiation. Non-dimensionalizing the resulting vorticity and energy transport equations following Mori and Uchida [6] gives the following non-dimensional forms of the vorticity and energy transport equations respectively.

$$\frac{u\partial\omega}{\partial x} + \frac{v\partial\omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2\omega - \frac{Gr}{Re} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \sin\alpha + \frac{\partial\theta}{\partial x} \cos\alpha \right) \quad (6)$$

$$\frac{u\partial\theta}{\partial x} + \frac{v\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \nabla^2\theta \quad (7)$$

where the lower case letters, u, v, x, y , represent the non-dimensional values of U, V, X, Y respectively, θ the non-dimensional temperature difference and ω the vorticity function. $Re = \frac{U_m b}{\nu}$ is the Reynolds number, $Gr = \frac{\beta g (T_h - T_c) b^3}{\nu^2}$

the Grashof number, $Pr = \frac{\nu}{\lambda}$ the Prandtl number. The vorticity function, ω is linked with the stream function, ψ through the Poisson equation,

$$\omega = -\nabla^2\psi \quad (8)$$

while the non-dimensional velocity components, u, v , are given by,

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

The normalized boundary conditions are:-

a) At $x = 0$, $0 < y < 1$

$$u = 1.0; \quad \theta = v = 0.$$

b) At $x = x_L$, $0 < y < 1$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$$

c) At $y = 0$, $0 < x < x_L$,

$$\psi = u = v = \theta_c = 0$$

$$\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq 0$$

(d) At $y = 1$, $0 < x < x_L$

$$\psi = \theta_h = 1.0$$

$$u = v = 0$$

$$\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq 0$$

The vorticity and energy transport equations (6) and (7) respectively are discretized following Dennis [7] and the resulting finite-difference equations solved using Gauss-Seidel iterative procedure. Since the computational procedure for numerical determination of the boundary vorticity and numerical solution of a set of finite-difference equations are well discussed elsewhere [1,2], details of numerical solution including finite-difference approximations are omitted here for the sake of brevity. In the numerical computation, the prescribed error for all dependent variables is

$$\epsilon = \sum_{i,j} \left| \phi_{i,j}^{(k+1)} - \phi_{i,j}^{(k)} \right| < 10^{-3}$$

where $\phi_{i,j}$ is a dummy variable at any guide point (i,j) and k is the iteration counter.

3. Flow and Heat Transfer Results

The local and mean flow and heat transfer coefficients are computed from the flowing expressions respectively.

$$f_x = \frac{2}{Re} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{wall}}; \quad f_m = \frac{1}{X_L} \int_0^{X_L} f_x dx$$

$$Nu_x = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{\text{wall}}; \quad Nu_m = \frac{1}{X_L} \int_0^{X_L} Nu_x dx$$

where f_x , Nu_x are the local friction factor and Nusselt number respectively and f_m , Nu_m their corresponding mean values obtained by Trapezoidal Rule. The mean Stanton number is $St_m = \frac{Nu_m}{RePr}$.

Since three independent non-dimensional parameters are involved in the present problem, a complete parametric study is not practical, hence only representative cases for air ($Pr = 0.73$) are given to illustrate the inclination angle or body-force orientation effects.

4. Discussion of Numerical Results

Using Ar as parameter, the variations of the mean Nusselt and Stanton numbers and friction factor with channel orientation are presented in figures 2, 3, and 4 respectively. Of particular interest, is the variation of the mean Nusselt number with the angle of inclination. A number of important observations can be made in fig. 2. At $\alpha = 15^\circ$, the mean Nusselt number is the same for all non-vanishing Archimedes numbers. Between $\alpha = 30^\circ$ and $\alpha = 60^\circ$, there is a critical angle at which the mean Nusselt number is a maximum for a given Ar . This maximum varies proportionately with Ar while the corresponding critical angle increases with decreasing Ar . For a given Ar , this variation of the mean Nusselt number with α is similar to that obtained by Ozoe et al. [5] for the variation of the mean Nusselt number with the angle of inclination for natural convection in a square channel heated isothermally from below and similarly cooled from above.

It is recognised that Archimedes number can vary in two ways, Re can be kept constant while Gr is varied and vice-versa. Therefore the mean Nusselt number and friction factor are each bound to vary in two ways. Figs. 5 and 6 show the plots of Nu_m vs and f_m vs Ar respectively for the two modes of variation of Ar for a number of channel orientations. A criti-

cal Archimedes number exists for a given inclination at which the mean Nusselt number assumes a single value. The same is true for the mean friction factor. In both cases, this critical Archimedes number = 0.5 and remains so for all inclinations, but the unique values of Nu_m and f_m depend on the inclinations. This is a very significant finding since it assures that at this critical Archimedes number, there are single mean values of Nu and f associated with a given α .

5. Applications

One application that readily comes to mind is in the design of flat-plate Solar collectors where the hot plate is heated by Solar Energy and the heat generated is convected away by forced flow for various uses. For instance if air is the medium of convection, the heat convected can be used for drying grains. In view of the changing position of the sun, the orientation of such a heat transfer equipment with respect to the gravitational field, becomes an important factor in predicting the position at which heat transfer is a maximum, if any.

6. Conclusions

Practically all conceivable channels are finite in extent so that fully developed regimes are hard to come by. The problem is therefore basically that of an entrance region and mean values of the heat transfer and flow parameters are more representative of actual results than those obtained for idealised fully developed regimes. In the light of the assumptions made to simplify the mathematical model the following conclusions can be made.

1. The mean Nusselt number is independent of the non-zero Archimedes numbers when the angle of inclination to the horizontal is 15° .
2. For a given non-zero Archimedes number, the critical angle at which the mean Nusselt number and friction factors are maximum lies between 30° and 60° .
3. A unique solution to the thermal problem exists for a given inclination only when the Archimedes number, $Ar = 0.50$.
4. The results of Ozoe et al [5], which have been confirmed experimentally by the authors, lend support to the validity of the present solution and the conclusions arrived at.

REFERENCES

- [1] OU, J.W, Cheng, K.C. and Lin, R.C, "Combined Free and Forced Laminar Convection in Inclined Rectangular Channels", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.19 (1976), pp. 277-283.
- [2] Cheng, K.C. and Hwang, G.J. "Numerical Solution of Combined Free and Forced Laminar Convection in Horizontal Rectangular Channels", J. Heat Transfer, (1959), pp. 59-66.
- [3] Cheng, K.C. and Hong, S.W. "Effects of Tube Inclination on Laminar Convection in Uniformly Heated Tubes for Flat Plate Solar Collectors", Solar Energy, Vol.13 (1972) , pp. 363-371.
- [4] Iqbal, M. and Stachiewicz, J.W. "Variable Density Effects in Combined Free and Forced Convection in Inclined Tubes", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.10 (1967), pp. 1625-1629; "Influence of Tube Orientation on Combined Free and Forced Laminar Convection Heat Transfer", J. Heat Transfer, (Feb. 1966), pp.100-116.
- [5] Ozoe, H. Samaya, H, and Churchill, S.W. "Natural Convection in Inclined Square Channel", Int. J. Heat Mass Transfer Vol.17 (1974), pp.401-406.
- [6] Mori, Y, and Uchida, Y., "Forced Convective Heat Transfer Between Horizontal Parallel Plates", Int. J. Heat Mass Transfer Vol.9 (1966), pp. 803-817.
- [7] Dennis, S.C.R., "Numerical Solution of Vorticity Transport Equation", Proc. of Third Int. Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics 19 ", Vol.11 (July 1972), pp.120-121.

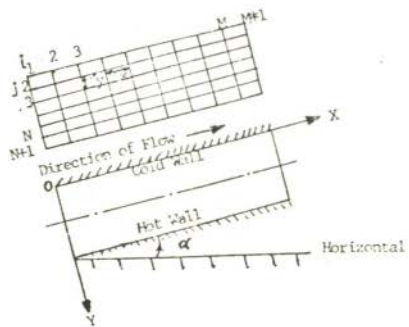


Fig. 1. Physical Model, Coordinate System and Numerical Grid.

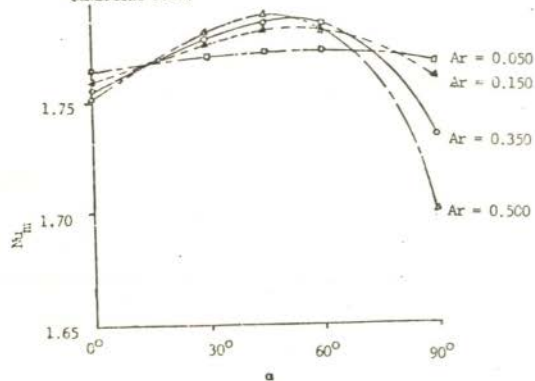


Fig. 2. Influence of Channel Orientation on The Mean Nusselt number with Ar as Parameter For $Pr = 0.73$.

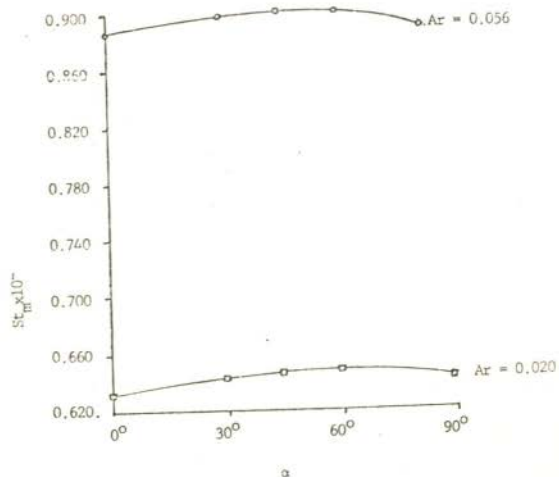


Fig. 3. Variation of The Mean Stanton number with α For $Pr = 0.45$

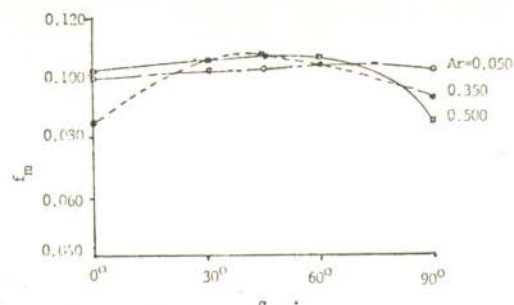


Fig. 4 Influence of Channel Orientation on the Mean Friction Factor with Ar as Parameter for $Pr = 0.73$

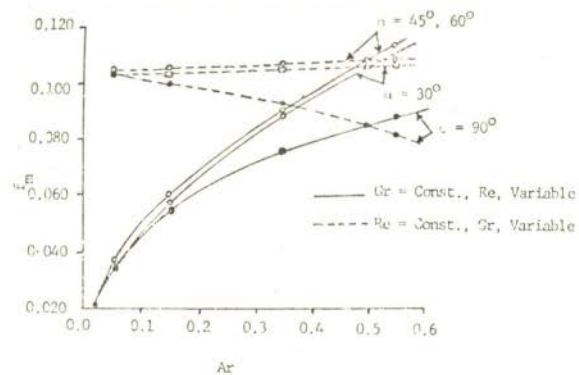


Fig. 5 Variation of Mean Friction Factor with Ar , with α as Parameter for $Pr = 0.73$.

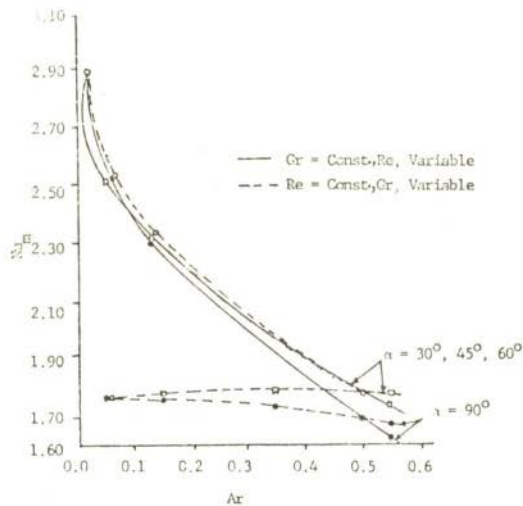


Fig. 6 Variation of Mean Nusselt number with Ar , with α as Parameter for $Pr = 0.73$.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-18

P. P. 183 - 192

PUC/RJ

SLOW FORCED AND FREE CONVECTION IN INCLINED CHANNELS

Luciano M. de SOCIO
Istituto di Meccanica Applicata
Politecnico di Torino-10129 TORINO (Italia)

Luciano MISICI
Istituto di Matematica
Università di Camerino-62032 CAMERINO

Alberto POLZONETTI
Istituto di Matematica-Centro di Calcolo
Università di Camerino-62032 CAMERINO

RESUME

On étudie la convection mixte dans des conduits rectangulaires inclinés et d'allongement moyen à faibles nombres de Reynolds. Un courant laminaire pénètre dans le conduit ayant le plafond adiabatique et le plancher alimenté par un flux de chaleur constant. D'abord la solution analytique du problème linéarisé est établie; successivement, et ayant recours à un procédé d'iteration numérique, la solution des équations est étendue au domaine des valeurs plus élevées des nombres de Reynolds et de Grashof.

SUMMARY

Mixed convection at low Reynolds numbers in tilted rectangular channels of intermediate aspect ratios is dealt with. A laminar flow enters into an inclined enclosure whose upper plate is adiabatic whereas a constant heat flux is supplied to the bottom plate. The analytic solution of the linearised problem is first obtained. Subsequently the numerical solution of the pertinent equations is carried on by a computer's time saving iterative procedure.

1. Introduction

Goal of this paper is to establish an effective numerical solution procedure for the equations of mixed convection, while investigating the characteristics of the slow free and forced laminar convection in inclined channels, where heat is uniformly given to the fluid at the bottom wall, whereas the opposite wall is adiabatic. The flow enters at constant temperature with a fully developed velocity profile.

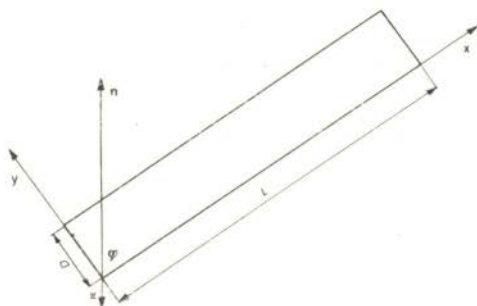


Fig.1. Geometry of the problem

In Fig.1, n is the vertical direction, pointing upward, ϕ is the tilt angle, g is the acceleration of gravity. The aspect ratio A is given by D/L . Problems of this kind frequently appear in engineering, as, for instance, in solar collectors, flows of molten materials, heat exchangers [1,2,3]. A large number of papers deals with one or more aspects of similar problems, without a sufficient degree of generality as far as the range of basic physical and geometrical parameters is concerned (see, among the others, [4,5,6,7,8,9]). In fact, except in cases where simplified solutions can be obtained (low aspect ratio channels [6], boundary layer flows at high Rayleigh numbers, Ra , in cavities [4], expensive numerical experiments are usually necessary [10] to explore the influence of each single parameter.

Here, mixed convection at low Reynolds numbers Re , between plane parallel walls at intermediate A is considered. The velocity and temperature fields are investigated in two steps. First the analytic solution to the linearized problem for small Re and Ra is obtained. Subsequently the numerical solution at higher Ra is carried out by taking advantage

of the linearized solution as an initial guess and, in so doing, noticeable savings on the computer's time are realized.

Let ν , α and β be the kinematic viscosity, the thermal diffusivity and the thermal expansion coefficient of the fluid, respectively. Let also be λ the thermal conductivity, T_0 the temperature at the entrance, Q the mass flow rate and q the rate of heat for unit length transferred to the fluid. Then $Re = Q/\nu$, the Prandtl number is $Pr = \nu/\alpha$, and the Grashof number is $Gr = g\beta \Delta T L^3/\nu^2$, with $\Delta T = qL/\lambda$, $Ra = Pr Re$. The dimensionless pertinent equations in the Oberbeck-Boussinesq approximation are:

$$\psi_y(\nabla^2 \psi)_x - \psi_x(\nabla^2 \psi)_y = \nabla^4 \psi - Gr(\theta_x \sin \phi - \theta_y \cos \phi) \quad (1)$$

$$\psi_y \theta_x - \psi_x \theta_y = \nabla^2 \theta / Pr \quad (2)$$

where ψ is the stream function, non dimensional with respect to ν , θ is $(T-T_0)/\Delta T$ and x and y are dimensionless with respect to L . The following boundary conditions hold:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0, y) = \theta_x(1, y) = \theta_y(x, A) = 0; \theta_y(x, 0) = -1 \\ \psi(x, 0) = \psi_y(x, 0) = \psi_y(x, A) = \psi_{xx}(0, y) = \psi_{xxx}(1, y) = \psi_x(1, y) = 0; \psi(x, A) = Re \\ \psi(0, y) = 6Re\{\frac{1}{2}(y/A)^2 - (y/A)^3/3\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

The standard position of vanishing velocity, temperature and vorticity derivatives along x at the exit was made.

2. Analysis

Before proceeding to the exact numerical integration of (1-3) a procedure already successfully applied in [11] can be extended to obtain analytical solutions at small Re and Ra . If $\theta(x, y)$ and $\psi(x, y)$ are expanded in double power series of Re and Ra

$$\begin{bmatrix} \theta(x, y; Re, Ra) \\ \psi(x, y; Re, Ra) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Re(\partial/\partial Re) + Ra(\partial/\partial Ra)^k \begin{bmatrix} \theta_k(x, y; 0, 0) \\ \psi_k(x, y; 0, 0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

and (4) is substituted in (1,2,3) an infinite set of linear equations is obtained. In particular, it is immediate to see that $\psi(x, y; 0, 0) = 0$, whereas the zeroth order approximation for the temperature difference corresponds to the solution in the case of pure conduction regime:

$$\theta_0(x,y) = \theta(x,y;0,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(2k+1)\frac{1}{2}\pi x \cosh(2k+1)\frac{1}{2}\pi(y-A)$$

and the A_k are determined from the boundary conditions: $\theta_0(x,y) = \theta_{0,x}(1,y) = \theta_{0,y}(x,A) = 0$; $\theta_{0,y}(x,0) = -1$. Of the first approximations of the stream function, $\psi_F = \partial\psi(x,y;0,0)/\partial Re$ simply corresponds to the profile at the inlet, whereas $\psi_G = \partial\psi(x,y;0,0)/\partial Ra$ is the stream function perturbation induced by the buoyancy and is the solution to the differential system:

$$\nabla^4 \psi_G = (-\sin \phi \theta_{0,x} + \cos \phi \theta_{0,y})/Pr; \quad \psi_G(x,0) = \psi_G(x,A) = \psi_{G,y}(x,0) = \psi_{G,y}(x,A) = 0 \\ = \psi_{G,xx}(0,y) = \psi_{G,xx}(1,y) = 0$$

and is expressed by the Papkovitch-Fadle series in the Appendix (A.1).

The first order approximations of the temperature, $\theta_F = \partial\theta(x,y;0,0)/\partial Re$ and $\theta_G = \partial\theta(x,y;0,0)/\partial Ra$, satisfy the boundary value problems:

$$\nabla^2 \theta_F = Pr \psi_{F,y} \theta_{0,x}; \quad \theta_F(0,y) = \theta_{F,x}(1,y) = \theta_{F,y}(x,0) = \theta_{F,y}(x,A) \\ \nabla^2 \theta_G = Pr(\psi_{G,y} \theta_{0,x} - \psi_{G,x} \theta_{0,y}); \quad \theta_G(0,y) = \theta_{G,x}(1,y) = \theta_{G,y}(x,0) = \theta_{G,y}(x,A) = 0$$

and can, in principle, be obtained by separation of variables. However, due to the cumbersome algebra, θ_F and θ_G were obtained, in the present circumstance, by a very simple finite difference procedure. The distributions of θ_0 , ψ_G , θ_F , θ_G are shown in Fig.2 for an inclination of 45° and $A = 0.5$. ψ_F is simply given by straight lines parallel to the walls. At this point the solution to the linearized problem can be obtained for each set of the basic parameters $\{A, Pr, Re, Ra, \phi\}$. Such a solution shows an excellent agreement with the exact solution of the governing equations, provided that $Re < 1$, and $Ra < 10^4$. However, even at higher values of Re and Ra , it can be used to obtain numerical solutions in a drastically reduced computer's time. In fact, when a finite difference scheme is adopted for (1,2,3) a numerical iterative solution procedure requires an initial guess, the closer to the exact solution, the better, in order to save computing time and to prevent numerical instabilities which frequently depend on the sensitivity of the programme to the initial choice of

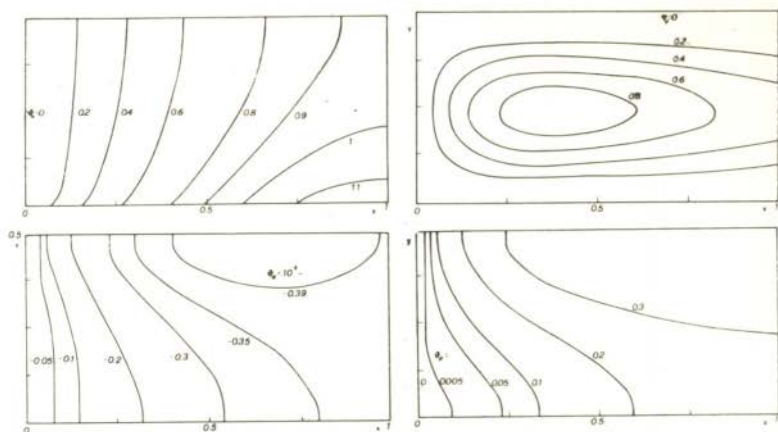


Fig.2. Solutions of the linearized equations.

of the vorticity distribution. In the full range of parameters considered here, $Re \leq 100$, $Ra \leq 5 \times 10^5$, with a variable grid of 21×21 nodal points, no instability was faced, no need for relaxation parameters was met and a maximum of 900 iterations was necessary for a convergence criterion of $E \leq 10^{-6}$, where E is the norm evaluated on all the variables.

3. Results and conclusions

The influence of the various parameters on the kinetic and thermal fields can be deduced from the figures, where the most significant results are shown. Fig.3 and 4 refer to a horizontal channel. The streamlines distribution (Fig.3) is strongly affected by the Reynolds number, larger values of Re decreasing the intensity of the buoyancy induced vortex which, on the contrary, increases with Gr , at given Re and Pr . Higher values of Pr correspond to less sensible effects of the buoyancy. The isotherms, reported in Fig.4 show that, at given Pr and Re , the heat transfer process is less effective at larger Gr , due to the more intense recirculation. If Re increases, the influence of Gr tends to be negligible, and the forced convection prevails.

A comparison with the pure heat conduction regime shows that both Re and Gr , to different extent, decrease the heat transfer process, from the hot wall to the fluid. Fig.5

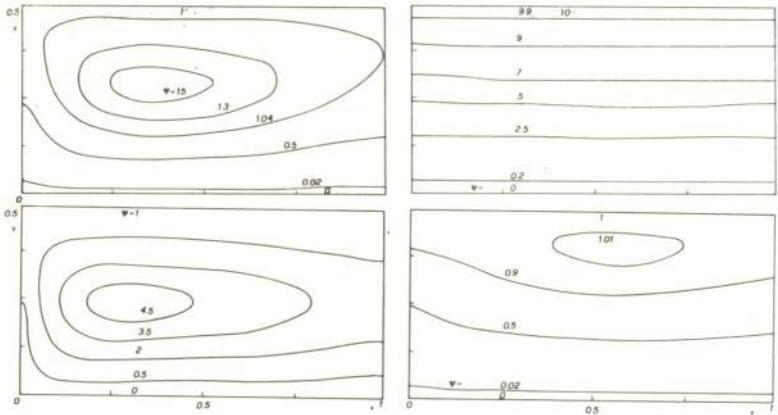


Fig.3. Streamlines; $A=0.5$; $\phi = 90^\circ$;
 Top left: $Re=1, Gh=10^4, Pr=1$. Top right: $Re=10, Gh=10^4, Pr=1$.
 Bottom left: $Re=1, Gh=10^5, Pr=1$. Bottom right: $Re=1, Gh=10^4, Pr=5$.

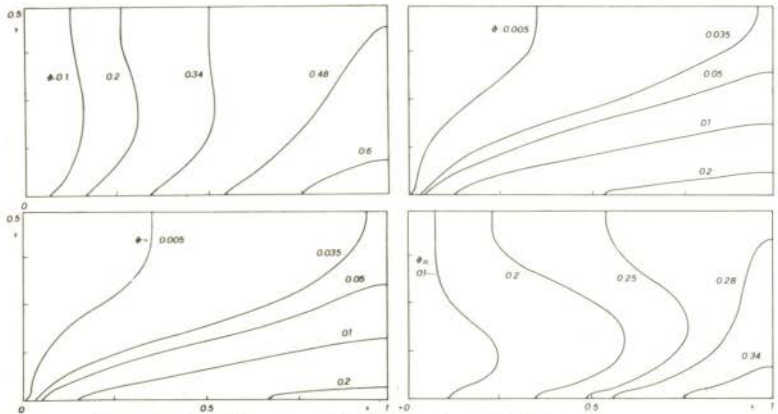


Fig.4. Isotherms; $A=0.5, \phi = 90^\circ; Pr=1$.
 Top left: $Re=1, Gh=10^4$. Top right: $Re=10, Gh=10^4$.
 Bottom left: $Re=10, Gh=10^5$. Bottom right: $Re=1, Gh=10^5$.

shows the influence of Pr , for the same combinations of Re and Gh of Fig.4, with a decrease of heat transfer, in particular at larger Re . Figs.4,5,6 show the influence of the aspect ratio for the horizontal channel, smaller A corresponding to a decreased effect of the buoyancy at all Re and Gh . Increasing values of Re squeeze the region at higher

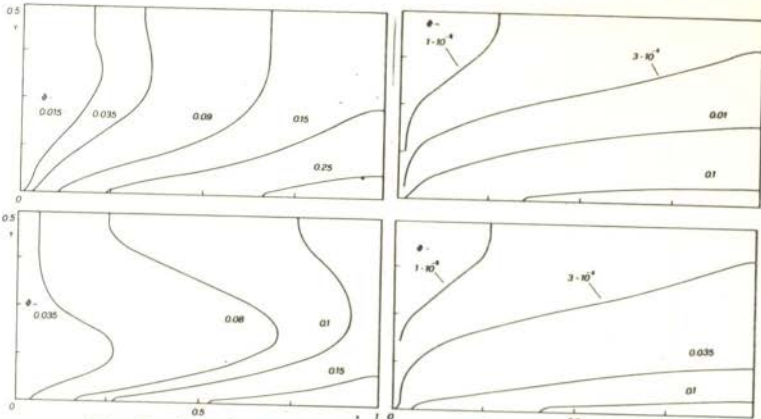


Fig.5. Isotherms: $A=0.5$; $\phi=90^\circ$; $Pr=5$. Top: left $Re=1$, $Gh=10^4$; right $Re=10$, $Gh=10^4$. Bottom: left $Re=1$, $Gh=10^5$; right $Re=10$, $Gh=10^5$.

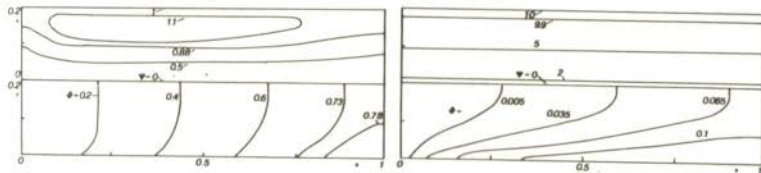


Fig.6. $A=0.2$, $\phi=90^\circ$, $Pr=1$. Top: streamlines, left $Re=1$, $Gh=10^3$; right $Re=10$, $Gh=10^5$. Bottom: isotherms, left $Re=1$, $Gh=10^5$, right $Re=10$, $Gh=10^5$.

temperature close to the bottom wall.

Finally, Figs.7 and 8 show the streamlines and the isotherms distributions for channels at 45° . A comparison with the results in Figs.3 and 4 shows that the recirculating region close to the top wall decreases in size and intensity at given Re and Gh . Results obtained at $\phi=0$ confirm this trend, as even for $Re=1$, $Gh=10^5$ no vortex appears in the field. All the results obtained in this parametric research were summarized in the Table, where the maximum value of ψ in the field and the bulk temperature at the outlet are reported.

Two main conclusions can be reached at the end of this paper. First, an effective procedure has been established for conveniently solving the full Navier-Stokes equations in the Oberbeck-Boussinesq approximation, at low Reynolds numbers,

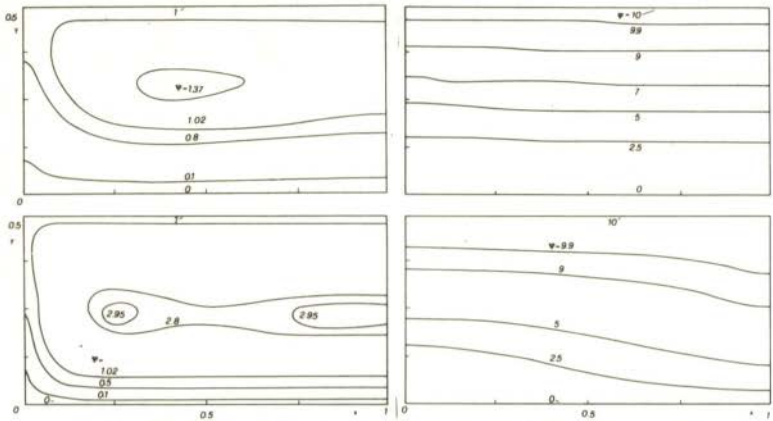


Fig.7. Streamlines: $A=0.5$, $\phi=45^\circ$, $Pr=1$. Top left: $Re=1, Gz=10^4$, right: $Re=10, Gz=10^4$ Bottom left: $Re=1, Gz=10^5$, right: $Re=10, Gz=10^5$

Table

Gz	Re				Pr	ϕ	A
	1		10				
	θ_{bulk}	ψ_{max}	θ_{bulk}	ψ_{max}			
10^4	0.566	1.576	0.092	10.0	1	90°	0.5
10^5	0.406	4.859	0.093	10.0			
10^4	0.599	1.407	0.093	10.0	1	45°	0.5
10^5	0.503	3.001	0.094	10.078			
10^4	-	-	0.093	10.0	1	0°	0.5
10^5	-	-	0.094	10.094			
10^4	0.183	1.021	0.019	10.0	5	90°	0.5
10^5	0.154	2.057	0.019	10.0			
10^4	0.736	1.000	0.098	10.0	1	45°	0.2
10^5	0.796	1.038	0.098	10.0			
10^4	0.757	1.000	0.098	10.0	1	90°	0.2
10^5	0.790	1.075	0.098	10.0			
10^4	0.0096	100.0	at $Re=100$		1	45°	0.5
10^5	0.0098	100.0	at $Re=100$				

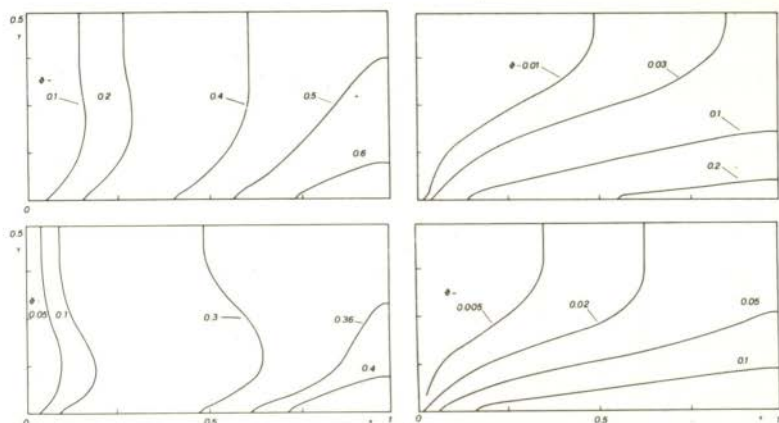


Fig. 8. Isotherms: $A=0.5$, $\phi = 45^\circ$, $Pr = 1$.
 Top left: $Re = 1$, $Gr = 10^4$; right: $Re = 10$, $Gr = 10^4$
 Bottom left: $Re = 1$, $Gr = 10^5$; right: $Re = 10$, $Gr = 10^5$

taking advantage of a linearization in terms of Ra . Further more the influence of a set of parameters on the flow configuration and on the heat transfer process has been discussed revealing the dominant effect of the Reynolds number at the inlet on the buoyancy induced vortical flow.

Acknowledgement

The partial support of the Italian National Research Council (Technological Committee) is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] Buchberg, H., Catton, I. and Edwards, D.K., "Natural Convection in Enclosed Spaces. A Review of Application to Solar Energy Convection", J. Heat Transfer, vol. 98 (1976), pp. 182-188
- [2] Hearn, G.E. and Booth, F., "Flow of Molten Glass Through an Open Channel", Glass Techn. Vol. 15 (1974), pp. 81-86
- [3] Ostrach, S., "Natural Convection in Enclosures", Adv. Heat Transfer, Vol. 8 (1972), pg. 161 foll.
- [4] Ayyaswamy, P. and Catton, I., "The Boundary Layer Regime for Natural Convection in a Differentially Heated, Tilted, Rectangular Cavity", J. Heat Transfer, vol. 95 (1973), pp. 543-545
- [5] Hollands, K.G.T., Unny, T.E., Raithby, C.D. and Konicek, L., "Free Convective Heat Transfer Across Inclined Air Layers", J. Heat Transfer, vol. 98 (1976), pp. 189-193

- [6] Bejan, A. and Imberger, J., "Heat Transfer by Forced and Free Convection in a Horizontal Channel with Differentially Heated Ends", J. Heat Transfer, Vol. 101 (1976) pp. 417-421
- [7] Meyer, B.A., Mitchell, J.W. and El-Wakil, M.M., "Natural Convection in Moderate Aspect Ratio Enclosures", J. Heat Transfer, Vol. 101 (1979), pp. 655-661
- [8] Chu, H.H.S., Churchill, S.W. and Patterson, C.V.S.: "The Effect of Heater Size, Location, Aspect Ratio and Boundary Conditions on Two-Dimensional Laminar Natural Convection in Rectangular Channels", J. Heat Transfer, Vol. 98 (1976) pp. 194-201
- [9] Cheng, K.C. and Hwang, G.J.: "Numerical Solution for Combined Free and Forced Laminar Convection in Horizontal Rectangular Channels", ASME Paper n. 68-HT-19
- [10] Clomburg, L.A. Jr., "Convection in an Enclosure. Source and Sink Located Along a Single Horizontal Boundary", J. Heat Transfer, Vol. 100 (1978), pp. 205-211
- [11] de Socio, L.M., Misici, L. and Polzonetti, A., "Natural Convection in Heat Generating Fluids in Cavities", ASME Paper 79-HT-95
- [12] Joseph, D.D. and Sturges, L., "The Free Surface on a Liquid Filling a Trench Heated from its Side", J. Fluid Mech., vol. 69 (1975), pp. 565-589

APPENDIX

Let $\xi = 2(x - \frac{1}{2})$ and $\eta = 2(y - \frac{1}{2}A)/A$. Then:

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos \beta_k(\xi+1) f_k(\eta) + \sum_{k=0}^{\infty} R_k \sin \beta_k(\xi+1) g_k(\eta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{c_n \times \exp(s_n \xi/A) + d_n \exp(-s_n \xi/A)\} \phi_n(\eta)/s_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\hat{c}_n \exp(\hat{s}_n \xi/A) + \hat{d}_n \times \exp(-\hat{s}_n \xi/A)\} \hat{\phi}_n(\eta)/\hat{s}_n \quad (A.1)$$

where: $\beta_k = (2k+1)\pi/4$; $B_k = -A^4 \cos \phi A_k \beta_k / 8$; $R_k = A^4 \sin \phi A_k \beta_k / 8$, and $f_k(\eta)$ and $g_k(\eta)$ are the solutions of the equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} d^4 f_k(\eta)/d\eta^4 - 2\beta_k^2 A^2 d^2 f_k(\eta)/d\eta^2 + \beta_k^4 A^4 f_k(\eta) = A^4 \cosh A \beta_k (\eta - 1) \\ f_k(\pm 1) = df_k(\pm 1)/d\eta = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d^4 g_k(\eta)/d\eta^4 - 2\beta_k^2 A^2 d^2 g_k(\eta)/d\eta^2 + \beta_k^4 A^4 g_k(\eta) = A^4 \sinh A \beta_k (\eta - 1) \\ g_k(\pm 1) = dg_k(\pm 1)/d\eta = 0 \end{array} \right.$$

whereas ϕ_n and $\hat{\phi}_n$ are the even and odd eigenfunctions associated to the eigenvalues of the transcendental equations [12]:

$$\sin 2s = \mp 2s$$



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-19

p. P. 193 - 202

PUC/RJ

FREE CONVECTION BETWEEN HORIZONTAL
CYLINDERS IN WATER AT LOW TEMPERATURE

P. Vasseur, L. Robillard and B. Chandra Shekar
Department of Civil Engineering,
Ecole Polytechnique de Montréal (Québec)
Canada.

SUMMARY

The effect of density inversion on two-dimensional laminar natural convection heat transfer of cold water enclosed between two horizontal concentric cylinders is approached by a numerical method. This investigation is carried out in order to study the inversion of flow patterns caused by the maximum density of water at 4°C. Numerical solutions are obtained for cylindrical enclosure with size parameter A ranging from 2.2×10^6 to 4.3×10^9 , gap ratio B from 0.11 to 0.8. The temperature of the inner cylinder is maintained at $T_i = 0^\circ\text{C}$ while temperatures of the outer cylinder T_o are varied from 2 to 12°C.

RESUME

L'effet de l'inversion de densité sur le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire bidimensionnelle dans l'eau contenue entre deux cylindres concentriques horizontaux est abordé par une méthode numérique. La présente investigation est entreprise dans le but d'étudier l'inversion de l'écoulement causée par la densité maximum de l'eau à 4°C. Les solutions numériques sont obtenues pour des cavités cylindriques dont le paramètre d'échelle A varie de 2.2×10^6 à 4.3×10^9 , et dont le rapport de forme varie de 0.11 à 0.8. La température du cylindre intérieur est maintenue à 0°C.

1. Introduction

The steady laminar natural convection in a horizontal concentric cylindrical annulus has been studied in the past both analytically and experimentally. In all those investigations, a linear relation between fluid density and its temperature has been assumed, such an assumption being acceptable for most fluids. However, in the case of water near its freezing point a linear relationship is not justified. In fact, the density of water reaches a maximum value at 3.98°C , thereafter decreasing with decreasing temperature. It results from this nonlinearity that convective motion in water behaves in a rather peculiar manner when the temperature domain encompasses the 3.98°C point, for the density of water is maximum at this temperature (1). Since the pioneering works of Ede (2) the problem of buoyancy induced flows in cold water has been studied by many investigators, not only because of their intriguing features but also due to the fact that they are a very common occurrence in our environment and in many processes in technology.

The transient behaviour of water, contained in a rigid rectangular insulator and cooled from above to near freezing has been considered by Forbes & Cooper (3). It was found that under certain conditions the flow was bicellular and as a result the heat transfer occurred primarily by conduction. Vasseur and Robillard (4) have studied the transient cooling of water, enclosed in a rectangular cavity with wall temperature maintained at 0°C . Supercooling of water contained in an enclosure subjected to convective boundary condition has been investigated by Cheng & Takeuchi (5) and Robillard & Vasseur (6) for the case of a circular pipe and a rectangular cavity, respectively. All these studies indicate that the resulting flow motion is greatly influenced by the presence of a maximum density effect, which drives the initial circulation inside the cavity and subsequently reverses it. The resulting heat transfer is thus reduced in comparison to a standard situation without maximum density effect.

The purpose of this investigation is to study analytically the effect of density inversion on the free convective heat transfer of a mass of water contained in a horizontal cylindrical annulus whose surface temperatures are kept isothermal. The present study is an

extension of the experimental work of Seki et al (7). Numerical studies of natural convection inside two horizontal concentric cylinders, in the absence of maximum density effect, have been carried out in the past by many investigators; that of Kuehn & Goldstein (8) contains a comprehensive bibliography.

2. Problem Formulation

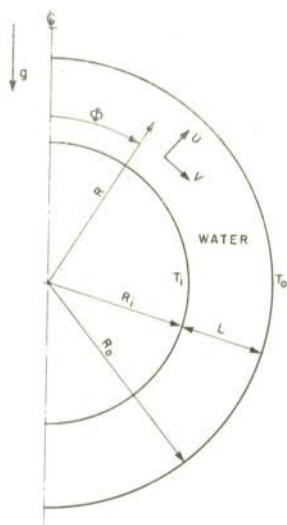


Fig. 1: Flow geometry and coordinate system

The problem under consideration is that of two-dimensional laminar convection of a mass of cold water enclosed between two horizontal concentric cylinders (see Fig. 1). It is assumed that the temperature of each cylinder is uniform, the inner cylinder being colder. Utilizing cylindrical coordinates, let the angular coordinate ϕ be measured from the upward vertical line, $\phi = 0$. The flow is symmetrical about a vertical plane through the axis of the cylinder. Accordingly, attention is confined to the range $0 \leq \phi \leq \pi$. All fluid properties, except the

water density, are taken to be constant and evaluated at the arithmetic mean temperature of the two cylinders.

The governing equations for the present problem, using the Oberbeck-Boussinesq approximation and neglecting viscous dissipation and compressibility effects, are then given in nondimensional form as:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial (UR\bar{\Omega})}{\partial R} + \frac{\partial (\bar{\Omega}V)}{\partial \Phi} = Pr \nabla^2 \bar{\Omega} + A \sin \Phi \frac{\partial \bar{\Delta \rho}}{\partial R} + \frac{\cos \Phi}{R} \cdot \frac{\partial \bar{\Delta \rho}}{\partial \Phi} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial UR\bar{\Theta}}{\partial R} + \frac{\partial V\bar{\Theta}}{\partial \Phi} = \nabla^2 \bar{\Theta} \quad (2)$$

$$\bar{\Omega} = -\nabla^2 \bar{\Psi} \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \Phi} \quad V = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial R} \quad (4)$$

Where:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha t}{L^2} & U &= \frac{uL}{\alpha} & V &= \frac{vL}{\alpha} \\ \bar{\Theta} &= \frac{T - T_i}{\Delta T} & \Delta T &= T_o - T_i & R &= \frac{r}{L} \\ \bar{\Psi} &= \frac{\psi}{\alpha} & \bar{\Omega} &= \frac{\omega L^2}{\alpha} & \bar{\Delta \rho} &= \frac{\bar{\rho} - \rho(\bar{\Theta})}{\rho} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$Pr = \nu/a \quad A = gL^3/\alpha^2$$

$$L = r_o - r_i \quad B = L/2r_i$$

and:

- Nu : local Nusselt number
 R_L : dimensionless radius $(r - r_i)/(r_o - r_i)$
 R_{AL} : Rayleigh number based on gap width $g\beta(\Delta T)(L)^3/\nu\alpha$
 T : water temperature
 ΔT : $T_o - T_i$

T_o	:	temperature of outer cylinder
T_i	:	temperature of inner cylinder
t	:	time
$\beta_1 \dots \beta_4$:	constants (see equation (7))
θ	:	dimensionless temperature
ν	:	kinematic viscosity
ρ	:	water density
$\bar{\Delta}\rho$:	$(\bar{\rho} - \rho(\theta))/\bar{\rho}$
τ	:	dimensionless time
Ψ	:	dimensionless stream function
Ω	:	dimensionless vorticity

The initial and boundary conditions are:

$$\begin{aligned}
 U = V = \Psi = \Omega = 0; \quad \theta = 0 & \quad \text{at } \tau = 0 \\
 U = V = \Psi = 0 \quad ; \quad \theta = 0 & \quad \text{on the inner cylinder} \\
 U = V = \Psi = 0 \quad ; \quad \theta = 1 & \quad \text{on the outer cylinder} \\
 \frac{\partial U}{\partial \phi} = V = \Psi = \Omega = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 & \quad \text{at } \phi = 0, \pi \\
 & \quad \text{(symmetry lines)}
 \end{aligned} \tag{6}$$

When considering the temperature range $0 \sim 20^\circ\text{C}$, the density-temperature relationship of water can be approximated by the following equation with an error of less than one unit at the last digit of the tabulated data of Landolt-Börnstein (4):

$$\frac{\rho_o}{\rho} = 1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3 + \beta_4 T^4 \tag{7}$$

where

$$\begin{aligned}
 \rho_o &= 0.9998396 \text{ (g cm}^{-3}\text{)}; \\
 \beta_1 &= -0.678964520 \times 10^{-4} \text{ (1/}^\circ\text{C)}; \\
 \beta_2 &= 0.907294338 \times 10^{-5} \text{ (1/}^\circ\text{C}^2\text{)}; \\
 \beta_3 &= -0.964568125 \times 10^{-7} \text{ (1/}^\circ\text{C}^3\text{)}; \\
 \beta_4 &= 0.873702983 \times 10^{-9} \text{ (1/}^\circ\text{C}^4\text{)};
 \end{aligned}$$

3. Numerical Solution of the Governing Equations

The coupled transport and energy equations (1) and (2) are quasi-

linear, second-order partial differential equations of the parabolic type and such numerical methods as standard explicit method, alternating direction implicit method, Dufort-Frankel method and others may be applicable. In this study a two-dimensional alternating direction (A.D.I.) procedure is employed.

Several different mesh sizes have been used, the choice depending largely on the size of the cavity. The mesh size in the r -direction ranged from $\Delta r = 1/18$ to $1/30$. In the ϕ -direction a mesh size of $\Delta\phi = \pi/18$ to $\pi/30$ was chosen. Typical values of the time step were 0.0001 and 0.0005.

4. Results and Discussion

Figs. 2 to 5 show typical results obtained for annuli with size parameter $A = 2.2 \times 10^9$, gap ratio $B = 0.8$, inside cylinder temperature $T_i = 0^\circ\text{C}$ and for different outside cylinder temperatures T_o varying between 4°C and 12°C . As mentioned earlier the problem under consideration is symmetrical with respect to a vertical axis and it was found advantageous to reproduce computer results on a single graph with the flow pattern on the right half of the cavity and the isotherms on the left half.



Fig. 2: Isotherms and streamlines for $A = 2.2 \times 10^9$, $B = 0.8$, $T_i = 0^\circ\text{C}$ and $T_o = 4^\circ\text{C}$.



Fig. 3: Isotherms and streamlines for $A = 2.2 \times 10^9$, $B = 0.8$, $T_i = 0^\circ\text{C}$ and $T_o = 6.5^\circ\text{C}$.

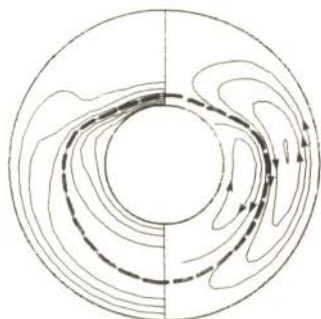


Fig. 4: Isotherms and streamlines for $A = 2.2 \times 10^9$, $B = 0.8$, $T_i = 0^\circ\text{C}$ and $T_o = 8^\circ\text{C}$.



Fig. 5: Isotherms and streamlines for $A = 2.2 \times 10^9$, $B = 0.8$, $T_i = 0^\circ\text{C}$ and $T_o = 12^\circ\text{C}$.

Fig. 2 shows the flow and isotherm patterns obtained for $T_o = 4^\circ\text{C}$. The fluid near the outer cylinder being at 4°C is heavier and is moving downward while the relatively lighter fluid near the inner cylinder is moving upward. As a consequence of the symmetry and the continuity, the resulting fluid motion inside the whole cavity consists of two counterrotating vortices. Fig. 2 only shows the right clockwise vortex. The resulting velocity profiles maybe reduced from those figures. The distortion of isotherms in Fig. 2 indicates a strong convective motion inside the cavity. It is also noticed that the maximum heat transfer, indicated by closely spaced isotherms, is located at the top of the cavity for the outer cylinder and at its bottom for the inner one. Since in the present case the outer wall temperature corresponds exactly to the maximum water density, no inversion effects are present. In fact, the flow pattern depicted in Fig. 2 is similar in form to the two usual thermoconvective cells, symmetrical with respect to the vertical axis, that have been described extensively in available literature (3) for the case of an ordinary fluid.

Fig. 3 shows the flow pattern obtained for $T_o = 6.5^\circ\text{C}$ and it is seen that the flow field is now characterized by the presence of two counterrotating circulations of approximately equal size as indicated

by the dividing streamline. This particular streamline corresponds to the value $\Psi = 0$ of the boundary and is left unconnected with it by the auxiliary computer program used to plot the graphs. The present flow pattern is a direct consequence of the maximum density of water at 4°C . The heavy dashed line represents the 4°C isotherm and thus defines the region of maximum density. The fluid in the neighborhood of this line is heavier and, as a result moves downwards. On the boundaries, the fluid is lighter and moved upwards. The distortion of the isotherm patterns in the upper part of the cavity is a result of the intense convective motion generated by the clockwise vortex located in this region.

Fig. 4 shows that for $T_0 = 8^{\circ}\text{C}$ two eddies are still present inside the cavity as in the case of Fig. 3. However, it can be noticed that the eddy near the outer cylinder is now larger, while the one near the inner cylinder is smaller. Further, it is seen from the isotherm field that the convective motion inside the cavity is still considerably reduced as compared with the case with $T_0 = 4^{\circ}\text{C}$. For outside cylinder temperature of 12°C , Fig. 5 shows that the inner cell has completely disappeared and the circulation is now counterclockwise. Furthermore, the local heat transfer in the present case is now maximum at the bottom of the outer cylinder and at the top of the inner one. This situation is completely opposite to the case described in Fig. 2.

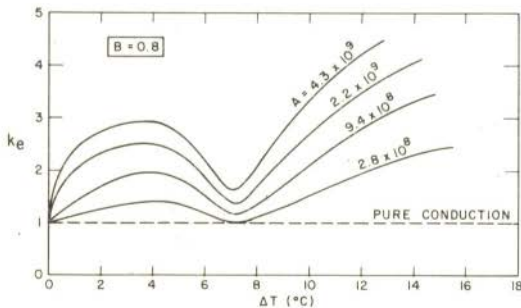


Fig. 6: Global Nusselt number k_e as a function of ΔT for various values of A .

Fig. 6 shows the relation between the average Nusselt number K_e and ΔT ($=T_o$) the temperature difference between the outer and inner cylinder. This figure reveals that K_e does not increase monotonously from pure conduction value (1.0) at $T_o = 0^\circ\text{C}$ with increasing ΔT as on common fluids having a linear density-temperature relationship. In fact, K_e increases monotonously as T_o becomes higher only when a single large eddy occupies the major portion of the gap as in the case $T_o \leq 4^\circ\text{C}$ or $T_o \geq 10^\circ\text{C}$. After reaching the peak value at 4°C a minimum value of K_e is observed at about $T_o \approx 7^\circ\text{C}$. This temperature corresponds to a situation in which two vortices of approximately equal strength exist in the gap.

5. Conclusion

1) The density inversion has an important effect on natural convection heat transfer in the cavity. This is particularly true in case where two counter eddies of approximately equal size coexist in the gap.

2) The presence of a secondary vortex pair, at the top of the inner cylinder, has been found numerically to appear for a very limited range between 6.5° and 7.25°C , for which the Nusselt number was found to be a minimum.

ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the National Research Council of Canada through grants NRC A-9201 and NRC A-4197. The authors wish to gratefully thank Ecole Polytechnique for providing necessary time on IBM 360/70.

REFERENCES

- (1) Gebhart, B., and Mollendorf, J.C. "Buoyancy-induced Flows in Water under Conditions in which Density Extrema may arise",

Journal of Fluid Mechanics, Vol. 89, pp. 673-707.

- (2) Ede, A.J., "Heat Transfer by Natural Convection in Refrigerated Liquid", Proc. 8th International Congress Refrigeration, London, 1951, p. 260.
- (5) Forbes, R.E., and Cooper, J.W., "Natural Convection in a Horizontal Layer of Water Cooled from above to near Freezing" Journal of Heat Transfer Vol. 97, 1975, pp. 47-53.
- (4) Vasseur, P., and Robillard, L., "Transient Natural Convection Heat Transfer in a Mass of Water Cooled Through 4°C," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 23, pp. 1195-1205.
- (5) Cheng, K.C., and Takeuchi, M., "Transient Natural Convection of Water in a Horizontal Pipe with Constant Cooling Rate Through 4°C", Journal of Heat Transfer, Vol. 98, 1976, pp. 581-587.
- (6) Robillard, L., and Vasseur, P., "Transient Natural Convection Heat Transfer of Water with Maximum Density Effect and Super Cooling", National Heat Transfer Conference, Orlando, Florida, 1980, ASME Paper No 80-HT-74.
- (7) Seki, N., Fukasako, S., and Nakaoka, M., "Experimental Study on Natural Convection Heat Transfer with Density Inversion of Water Between Two Horizontal Concentric Cylinders", Journal of Heat Transfer, Vol. 97, 1975, pp. 556-561.
- (8) Kuehn, T.H., and Goldstein, R.J., "An Experimental and Theoretical Study on Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 74, 1976, pp. 695-719.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-20

P. P. 203 - 212

PUC/RJ

THERMAL RESPONSE OF A MASS OF FLUID TO A
CONSTANT COOLING RATE APPLIED ON ITS BOUNDARIES

L. Robillard and P. Vasseur
 Professors, Civil Engineering
 Ecole Polytechnique of Montreal
 Québec, Canada.

SUMMARY

A numerical method has been developed to study the thermoconvective heat transfer occurring in a rectangular cavity whose boundaries are subjected to a constant rate of decrease in temperature. The problem considered is basically transient. However, if the cooling process is maintained long enough, a quasi-steady state is reached for which heat fluxes across boundaries and temperature differences between interior points and boundaries becomes independent of time.

RESUME

Une méthode numérique a été développée dans le but d'étudier le transfert de chaleur thermoconvectif survenant dans une cavité carrée dont les frontières sont assujetties à un décroissement constant de température. Le problème considéré est essentiellement transitoire. Cependant, si le processus de refroidissement est maintenu durant une période de temps suffisante, un état quasi-permanent peut être atteint pour lequel les flux de chaleur à travers les frontières et les différences de température entre les points intérieurs et la frontière deviennent indépendants du temps.

1. Introduction

Natural convection with heat and mass transfer in a cavity whose walls are maintained at a uniform temperature which change at a steady rate, has received little attention in literature. Quack [1], using a perturbation method, has studied the transient natural convection in long horizontal cylinders with a uniform initial fluid temperature and a linear variation of wall temperature. However the resulting perturbation solution is valid only for very low Rayleigh number regime ($Ra < 1.5 \times 10^3$) which is not important practically. An interferometric investigation of convective heat transfer in a horizontal fluid cylinder with wall temperature increasing at a uniform rate has been performed by Deaver and Eckert [2]. Although the phenomenon is a transient one, a quasi-steady state develops if the heating rate is held constant long enough. Thus a correlation equation for Nusselt number in terms of Rayleigh number, valid for $Ra > 5 \times 10^5$, was obtained by these authors. More recently the transient natural convection in horizontal cylinder with constant cooling rate was approached by a numerical method by Takeuchi and Cheng [3]. For quasi-steady state, a generalized correlation equation for Nusselt number valid for $Pr \geq 0.7$ and $Ra \leq 10^7$ was developed.

The purpose of the present investigation is to study numerically the transient two-dimensional laminar convection and the heat transfer occurring in an enclosed rectangular cavity with wall temperature decreasing at a constant rate. The cooling process is supposed to be maintained long enough so that a quasi-steady state may be approached for which local temperature gradients, velocities, and other parameters are very nearly independent of time. If thermophysical properties are assumed constant, the equations describing this problem are identical with those for a fluid with uniform heat sources in a rectangular cavity whose walls are held at a constant uniform temperature. Thus the results of this study should apply as well to the uniform heat source problem.

2. Mathematical formulation

Consider a cavity of width $2b$ and height h , shown schematically in Fig. 1, which contains a newtonian fluid. The aspect ratio of the

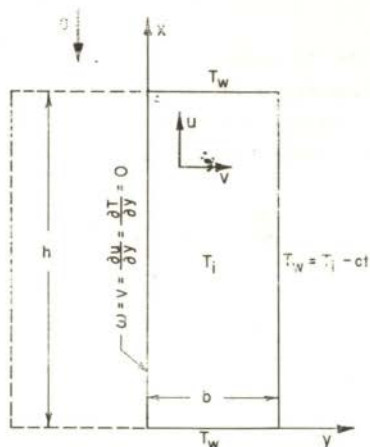


Fig. 1 - Coordinate system and boundary conditions

half cavity is denoted by $E = h/b$. The fluid is initially motionless and at a uniform temperature T_i . At time $t = 0$ it is assumed that the cavity is subjected to a linear wall temperature decreasing with time as $T_w = T_i - Ct$. The problem is to find the subsequent velocities and temperatures as function of time and position inside the cavity and the rate of heat transfer across the enclosure as a function of time. A final steady state solution, if such exists, would be of particular interest. The motion in the fluid will be laminar provided the Rayleigh number based on cavity height is less than about 10^8 .

For natural convection flows with small density changes it is common to make the Boussinesq approximation [4], i.e., to assume that the effect of temperature on density is confined to the body force term of the momentum equation and that otherwise the thermodynamic and transport properties of the fluid are independent of temperature and pressure. This implies that the fluid is essentially incompressible, and that its equation of state is:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (1)$$

where ρ , β and T denote respectively the density, volumetric expansion coefficient and temperature of the fluid, and the subscript denotes some reference state. Further, making the reasonable assumption that viscous dissipation is negligible, the fundamental equations are:

$$\frac{D\Omega}{D\tau} = Ra \ Pr \frac{\partial \theta}{\partial Y} + Pr \ \nabla^2 \Omega \quad (2)$$

$$\frac{D\theta}{D\tau} = \nabla^2 \theta + 1 \quad (3)$$

$$\Omega = \left(\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \right) = - \nabla^2 \Psi \quad (4)$$

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (5)$$

where

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha t}{b^2} & X &= \frac{x}{b} & Y &= \frac{y}{b} \\ \Omega &= \frac{\omega b^2}{\alpha} & U &= \frac{ub}{\alpha} & V &= \frac{vb}{\alpha} \\ \Psi &= \frac{\psi}{\alpha} & \theta &= \frac{T - T_w}{\Delta T} & \Delta T &= \frac{b^2 c}{\alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

$$Ra = (g\beta b^3 \Delta T)/\nu\alpha \quad Pr = \nu/\alpha$$

and

- k : thermal conductivity of fluid
- Nu : Nusselt number
- Pr : Prandtl number, ν/α
- Ra : Rayleigh number, $g\beta b^3 \Delta T/\nu\alpha$
- α : thermal diffusivity
- ν : kinetic viscosity
- τ : dimensionless time (Fourier number), $\alpha t/b^2$

- $\bar{\phi}_T, \bar{\phi}_L, \bar{\phi}_B$: dimensionless average heat flux at the top wall, side wall and bottom wall respectively
 Ψ : dimensionless stream function
 Ω : dimensionless vorticity

The initial and boundary conditions are:

$$\begin{aligned}
 \tau = 0 & \quad \Psi = U = V = \Omega = \theta = 0 \\
 X = 0 & \quad \Psi = U = V = \theta = 0 \\
 X = E & \quad \Psi = U = V = \theta = 0 \\
 Y = 0 & \quad \Psi = \Omega = V = \partial U / \partial Y = \partial \theta / \partial Y = 0 \\
 Y = 1 & \quad \Psi = U = V = \theta = 0
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

In view of the complex nature of the problem a numerical solution appears to be the only practical and feasible approach.

3. Numerical solution of the governing equations

The coupled transport and energy equations (2) and (3) are quasi-linear, second-order partial differential equations of the parabolic type and such numerical methods as standard explicit method, alternating direction implicit method, Dufort-Frankel method and others may be applicable. In this study a two-dimensional alternating direction (A. D.I.) procedure is employed and the computational method involved differs slightly from that discussed in references [5], a detailed account will thus be omitted here.

Several different mesh sizes have been used, the choice depending largely on the aspect ratio E of the cavity. The mesh size in the Y direction ranged from $1/10$ to $1/15$. In the X direction a mesh size of $E/20$ or $E/30$ was chosen. The elliptic equation for the stream function, equation (4), was solved by a successive over-relaxation procedure using a relaxation factor of 1.8.

4. Results and discussion

The calculated isotherm and streamline fields for $Pr = 7.3$, $Ra = 5 \times 10^4$ and $Ra = 3 \times 10^5$ at four different time steps between the initial conditions and the quasi-steady state situation are shown in Figs. 2 and 3. They illustrate respectively the establishment of the first and second mode of convection.

The development of the first mode of convection ($Ra = 5 \times 10^4$) is depicted in Fig. 2. The resulting flow and isotherm patterns are quite similar to those obtained experimentally by Deaver and Eckert [2] and numerically by Takeuchi and Cheng [3]. This initial stage of cooling is characterized by a pure conduction heat transfer as indicated by the isotherms of Fig. 2a. Due to the symmetry with respect to the vertical plane $Y = 0$, a pair of counterrotating vortices is formed. Fig. 2a only shows the right clockwise vortex. As the cooling progresses, the vortex gradually increases its strength (Fig. 2b). The convective motion progressively stratifies the core region and the isotherm configuration becomes closely spaced near the top wall but sparsely spaced near the bottom one, indicating respectively large and poor heat transfer on those boundaries (Fig. 2c). Fig. 2d shows the stabilized pattern of streamlines and isotherms corresponding to the quasi-steady state situation. The vortex center has moved close to the lateral boundary and its strength has decreased to some extent.

The development of the second mode of convection ($Ra = 3 \times 10^5$) is illustrated in Fig. 3. At the initial stage of the cooling, the temperature and flow fields are quite similar to those observed for the first mode of convection. This is shown in Fig. 3a, where a pair of counterrotating vortices develops. However, due to the higher Rayleigh number involved in the present case, there is a strong tendency for the vortex center to move very close to the side boundary (Fig. 3b). The velocity profile tends to be of the boundary layer type, while the fluid in the upper central region of the cavity becomes almost stagnant. Furthermore, the fluid in this region is unstable because of the top heavy situation resulting from the particular temperature field prevailing near the top wall. The induced density field combined to the existing flow motion gives rise to an additional pair of secondary vortices symmetrically located on the axis of symmetry, near the upper

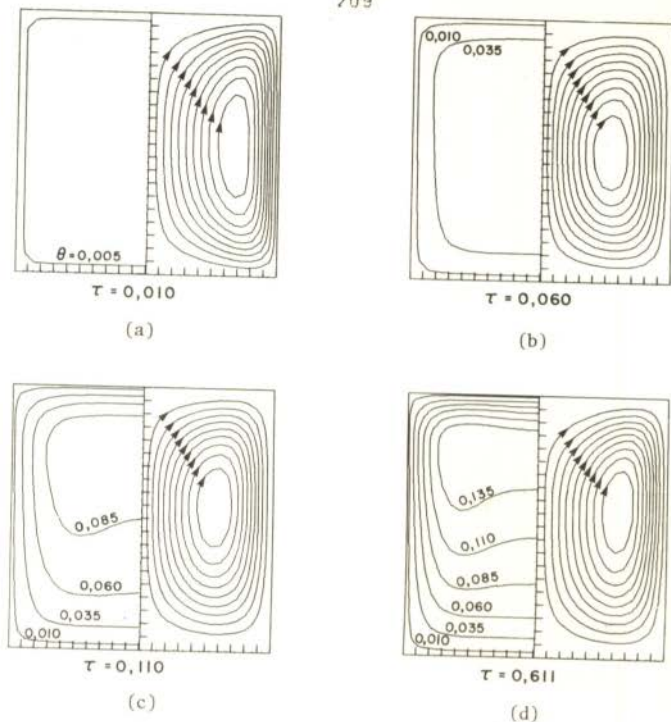


Fig. 2 - Transient streamline and isotherm fields for $Pr = 7.3$, $Ra = 5 \times 10^4$ and $E = 2$ at various time τ . The centerline and walls have value $\Psi = 0$. The values of Ψ_{max} and $\Delta\Psi$ are:

- (a) $\Psi_{max} = .33$, $\Delta\Psi = .033$; (b) $\Psi_{max} = 6.9$, $\Delta\Psi = .69$;
 (c) $\Psi_{max} = 9.8$, $\Delta\Psi = .98$; (d) $\Psi_{max} = 9.0$, $\Delta\Psi = .90$.

boundary (Fig. 3b). The occurrence of this secondary motion presents some similarity with the start of the inversion process studied in [6] for the case of water cooled through 4°C . With time progression the additional vortex pair increases its strength as it may be seen by comparing Figs. 3b and 3c. The quasi-steady state situation is depicted in Fig. 3d in which the secondary vortex has reached its equilibrium intensity. It results from this particular flow pattern that the relatively cold fluid penetrates the core region not only from the bottom but also from the top of the cavity.

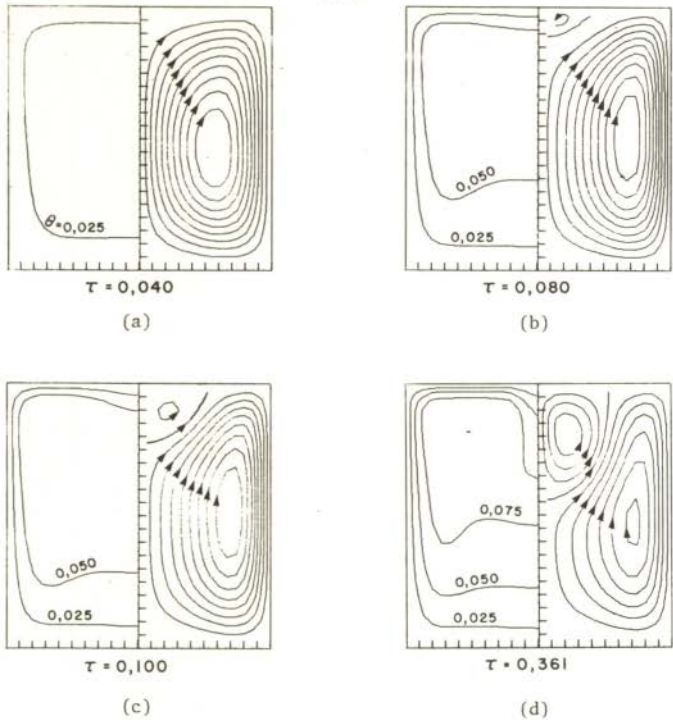


Fig. 3 - Transient streamline and isotherm fields for $Pr = 7.3$, $Ra = 3 \times 10^5$ and $E = 2$ at various times τ . The centerline and walls have value $\Psi = 0$. The values of Ψ_{max} , Ψ_{min} and $\Delta\Psi$ are:

- (a) $\Psi_{max} = 19.0$, $\Delta\Psi = 1.90$; (b) $\Psi_{max} = 17.0$, $\Psi_{min} = -0.2$, $\Delta\Psi = 1.72$; (c) $\Psi_{max} = 17.0$, $\Psi_{min} = -2.2$, $\Delta\Psi = 1.87$; (d) $\Psi_{max} = 16.0$, $\Psi_{min} = -9.7$, $\Delta\Psi = 2.57$.

The relationship between $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$ and Ra for three different aspect ratios E is presented on Fig. 4. The ratio $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$ is a measure of the relative importance of heat transfer by convection as compared to that by conduction. Thus, for $\bar{\theta}/\bar{\theta}^* = 1$, heat transfer results from pure conduction only. For a given $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$, the importance of the unstable zone located near the top wall is amplified when the aspect ratio is decreased. The critical values of $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$ at which the second mode of convection occurs are identified on the graph for each curve plotted. It is seen

that the critical value $\bar{\theta}/\bar{\theta}^* = .63$ corresponding to the smallest aspect ratio is the largest. This result indicates that the occurrence of the second mode of convection is strongly related to the instability zone.

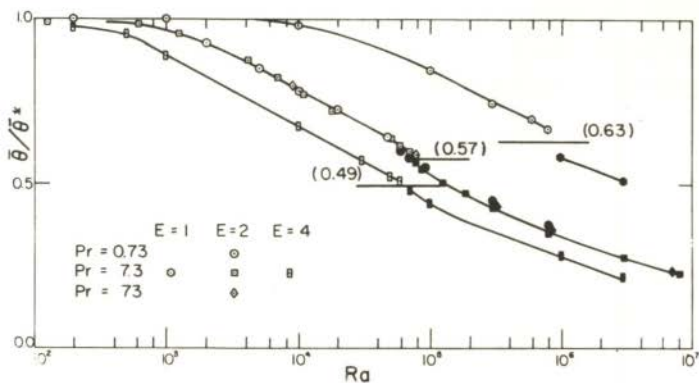


Fig. 4 - Relationship between $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$ and Ra for $E = 1, 2$ and 4 .

5. Conclusion

The natural convection of a fluid contained in a rectangular cavity, the wall of which is maintained at a temperature decreasing at a constant rate, has been studied numerically for Prandtl numbers $Pr = .75, 7.3$ and 73 , aspect ratio of the cavity $E = 1, 2$ and 4 a range of Rayleigh numbers $Ra = 10^2 \sim 10^8$. The results obtained in the present study may be summarized as follows:

- i) A quasi-steady state regime is reached from initial conditions where the fluid is at rest and at a uniform temperature. The transient solution is characterized at the initial stage by pure conduction. Subsequently a developing regime occurs where motion is set up inside the cavity. At a sufficiently large time, velocities, flow pattern and temperature differences between the fluid and the wall tend to become constant with time.

- ii) Depending mainly on Rayleigh number, two distinct modes of convection may develop inside the cavity. In the first mode, occurring at relatively low Rayleigh numbers, the flow field is characterized by a single pair of counterrotating vortices. For Rayleigh numbers beyond a critical value, a second mode appears in which an additional pair of counterrotating vortices, located near the top boundary is superposed to the basic flow of the first mode.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the National Research Council of Canada through grants NRC A-4157 and NRC A-9201. The authors wish to gratefully thank Ecole Polytechnique for providing necessary time on an IEM 360/79 computer.

REFERENCES

- [1] Quack, H., "Natural Convection inside a Horizontal Tube for Small Grashof Numbers", Wärme-und-stoffübertragung, vol. 3, 1970.
- [2] Deaver, F.K. and Eckert, E.R.G., "An Interferometric Investigation of Convective Heat Transfer in a Horizontal Fluid Cylinder with Wall Temperature Increasing at a Uniform Rate", Heat Transfer, Paper NC 1.1, Elsevier Publishing, Amsterdam, 1970.
- [3] Takeuchi, M. and Cheng, K.C., "Transient Natural Convection in Horizontal Cylinders with Constant Cooling Rate", Wärme-und-Stoffübertragung, vol. 9, 1976.
- [4] Gray, D.D. and Giorgini, A., "The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19, 1976.
- [5] Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics Hermosa Publishers, 1976.
- [6] Robillard, L. and Vasseur, P., "Transient Natural Convection Heat Transfer of Water with Maximum Density Effect and Supercooling", ASME/AICHE National Heat Transfer Conference, Orlando Florida, 1980.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-21

P. P. 213 - 224

PUC/RJ

INCREMENTO EN LA CAPACIDAD CONVECTIVA MEDIANTE
VIBRACIONES INDUCIDAS POR EL FLUJO

José Luis Fernández-Zayas

Investigador

Coordinación de Mecánica, Fluidos y Térmica

Instituto de Ingeniería, UNAM

Ciudad Universitaria

México 20, D.F., México

SUMARIO

En este trabajo se presenta un inserto tipo bandera para activar la convección en tubos. Se discute el incremento que el inserto produce en la capacidad de transferencia de calor y en las caídas de presión en régimen turbulento, obtenidas experimentalmente en un tubo típico de intercambio térmico. Se incluyen algunas características de las vibraciones producidas por el inserto y se proponen ideas para en el futuro desarrollar ecuaciones de diseño.

SUMMARY

A turbulence - promoting insert, shaped and operated as a flag in the wind, is proposed herein to enhance convection in heat transfer tubes. The increase in heat transfer and pressure drop rates is discussed when the flow is turbulent. Experiments were performed in a typical heat exchanger tube. Some characteristics of the vibration associated with the insert are presented and preliminary ideas for the development of design equations are proposed.

ture equal to that of the cooled surface,

2. Mathematical Formulation of the Problem

It is assumed, a priori, that the channel aspect ratio is large and its width is several times the magnitude of its height so that the lateral side effects are negligible when a longitudinal section, far removed from the vertical bounding sides, is taken. For moderate temperature gradients the problem reduces to a two-dimensional one.

The flow is assumed steady, laminar, incompressible and no internal heat generation exists. For the low velocity flows considered, viscous dissipation is negligible. Fluid properties are assumed constant except density variations with temperature considered significant only in the buoyancy term. The governing equations referred to the rectangular Cartesian coordinates, (X,Y), are: Continuity Equation:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

Momentum equations in X- and Y- directions respectively are:-

$$\frac{U\partial U}{\partial X} + \frac{V\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\rho_m \partial X} + \nu \nabla^2 U + g\beta(T-T_c) \sin \alpha \quad (2)$$

$$\frac{U\partial V}{\partial X} + \frac{V\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\rho_m \partial Y} + \nu \nabla^2 V - g\beta(T-T_c) \cos \alpha \quad (3)$$

Energy equation:

$$\frac{U\partial T}{\partial X} + \frac{V\partial T}{\partial Y} = \lambda \nabla^2 T \quad (4)$$

Boussinesq approximation:

$$\rho = \rho_m \{1 - \beta(T-T_c)\} \quad (5)$$

where U, V are the respective local fluid velocity components in the X- and Y- directions, P the local pressure, T the local temperature, T_c the cold wall temperature, ν the kinematic viscosity, λ the thermal diffusivity, g the gravitational acceleration, β the thermal coefficient of expansion, α the angle of inclination to the horizontal and ρ and ρ_m the local and mean densities respectively of the fluid. The boundary conditions are:-

a) At $X = 0$, $0 < Y < b$,

$$U = U_m; T = T_c; V = 0$$

b) At $X = X_L$, $0 < Y < b$,

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

c) At $Y = 0$, $0 < X < X_L$

$$T = T_c; U = V = 0 \text{ (No-slip condition at wall)}$$

d) At $Y = b$, $0 < X < X_L$

$T = T_h$; $U = V = 0$ (No-slip condition at wall) where b is the channel height, X_L the length of channel, T_h the hot wall temperature and U_m the mean fluid velocity.

The pressure gradient terms are eliminated between the momentum equations (2) and (3) by cross-partial differentiation. Non-dimensionalizing the resulting vorticity and energy transport equations following Mori and Uchida [6] gives the following non-dimensional forms of the vorticity and energy transport equations respectively.

$$\frac{u\partial\omega}{\partial x} + \frac{v\partial\omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2\omega - \frac{Gr}{Re} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \sin\alpha + \frac{\partial\theta}{\partial x} \cos\alpha \right) \quad (6)$$

$$\frac{u\partial\theta}{\partial x} + \frac{v\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \nabla^2\theta \quad (7)$$

where the lower case letters, u, v, x, y , represent the non-dimensional values of U, V, X, Y respectively, θ the non-dimensional temperature difference and ω the vorticity function. $Re = \frac{U_m b}{\nu}$ is the Reynolds number, $Gr = \frac{\beta g (T_h - T_c) b^3}{\nu^2}$

the Grashof number, $Pr = \frac{\nu}{\lambda}$ the Prandtl number. The vorticity function, ω is linked with the stream function, Ψ through the Poisson equation,

$$\omega = -\nabla^2\Psi \quad (8)$$

while the non-dimensional velocity components, u, v , are given by,

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

The normalized boundary conditions are:-

a) At $x = 0$, $0 < y < 1$

$$u = 1.0; \quad \theta = v = 0.$$

b) At $x = x_L$, $0 < y < 1$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$$

c) At $y = 0$, $0 < x < x_L$,

$$\Psi = u = v = \theta_c = 0$$

$$\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq 0$$

(d) At $y = 1$, $0 < x < x_L$

$$\Psi = \theta_h = 1.0$$

$$u = v = 0$$

$$\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq 0$$

The vorticity and energy transport equations (6) and (7) respectively are discretized following Dennis [7] and the resulting finite-difference equations solved using Gauss-Seidel iterative procedure. Since the computational procedure for numerical determination of the boundary vorticity and numerical solution of a set of finite-difference equations are well discussed elsewhere [1,2], details of numerical solution including finite-difference approximations are omitted here for the sake of brevity. In the numerical computation, the prescribed error for all dependent variables is

$$\epsilon = \sum_{i,j} \left| \phi_{i,j}^{(k+1)} - \phi_{i,j}^{(k)} \right| < 10^{-3}$$

where $\phi_{i,j}$ is a dummy variable at any guide point (i,j) and k is the iteration counter.

3. Flow and Heat Transfer Results

The local and mean flow and heat transfer coefficients are computed from the following expressions respectively.

$$f_x = \frac{2}{Re} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{wall}}; \quad f_m = \frac{1}{X_L} \int_0^{X_L} f_x dx$$

$$Nu_x = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{\text{wall}}; \quad Nu_m = \frac{1}{X_L} \int_0^{X_L} Nu_x dx$$

where f_x , Nu_x are the local friction factor and Nusselt number respectively and f_m , Nu_m their corresponding mean values obtained by Trapezoidal Rule. The mean Stanton number is $St_m = \frac{Nu_m}{RePr}$.

Since three independent non-dimensional parameters are involved in the present problem, a complete parametric study is not practical, hence only representative cases for air ($Pr = 0.73$) are given to illustrate the inclination angle or body-force orientation effects.

4. Discussion of Numerical Results

Using Ar as parameter, the variations of the mean Nusselt and Stanton numbers and friction factor with channel orientation are presented in figures 2, 3, and 4 respectively. Of particular interest, is the variation of the mean Nusselt number with the angle of inclination. A number of important observations can be made in fig. 2. At $\alpha = 15^\circ$, the mean Nusselt number is the same for all non-vanishing Archimedes numbers. Between $\alpha = 30^\circ$ and $\alpha = 60^\circ$, there is a critical angle at which the mean Nusselt number is a maximum for a given Ar . This maximum varies proportionately with Ar while the corresponding critical angle increases with decreasing Ar . For a given Ar , this variation of the mean Nusselt number with α is similar to that obtained by Ozoe et al. [5] for the variation of the mean Nusselt number with the angle of inclination for natural convection in a square channel heated isothermally from below and similarly cooled from above.

It is recognised that Archimedes number can vary in two ways, Re can be kept constant while Gr is varied and vice-versa. Therefore the mean Nusselt number and friction factor are each bound to vary in two ways. Figs. 5 and 6 show the plots of Nu_m vs and f_m vs Ar respectively for the two modes of variation of Ar for a number of channel orientations. A criti-

cal Archimedes number exists for a given inclination at which the mean Nusselt number assumes a single value. The same is true for the mean friction factor. In both cases, this critical Archimedes number = 0.5 and remains so for all inclinations, but the unique values of Nu_m and f_m depend on the inclinations. This is a very significant finding since it assures that at this critical Archimedes number, there are single mean values of Nu and f associated with a given α .

5. Applications

One application that readily comes to mind is in the design of flat-plate Solar collectors where the hot plate is heated by Solar Energy and the heat generated is convected away by forced flow for various uses. For instance if air is the medium of convection, the heat convected can be used for drying grains. In view of the changing position of the sun, the orientation of such a heat transfer equipment with respect to the gravitational field, becomes an important factor in predicting the position at which heat transfer is a maximum, if any.

6. Conclusions

Practically all conceivable channels are finite in extent so that fully developed regimes are hard to come by. The problem is therefore basically that of an entrance region and mean values of the heat transfer and flow parameters are more representative of actual results than those obtained for idealised fully developed regimes. In the light of the assumptions made to simplify the mathematical model the following conclusions can be made.

1. The mean Nusselt number is independent of the non-zero Archimedes numbers when the angle of inclination to the horizontal is 15° .
2. For a given non-zero Archimedes number, the critical angle at which the mean Nusselt number and friction factors are maximum lies between 30° and 60° .
3. A unique solution to the thermal problem exists for a given inclination only when the Archimedes number, $Ar = 0.50$.
4. The results of Ozoe et al [5], which have been confirmed experimentally by the authors, lend support to the validity of the present solution and the conclusions arrived at.

REFERENCES

- [1] OU, J.W, Cheng, K.C. and Lin, R.C, "Combined Free and Forced Laminar Convection in Inclined Rectangular Channels", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.19 (1976), pp. 277-283.
- [2] Cheng, K.C. and Hwang, G.J. "Numerical Solution of Combined Free and Forced Laminar Convection in Horizontal Rectangular Channels", J. Heat Transfer, (1959), pp. 59-66.
- [3] Cheng, K.C. and Hong, S.W. "Effects of Tube Inclination on Laminar Convection in Uniformly Heated Tubes for Flat Plate Solar Collectors", Solar Energy, Vol.13 (1972) , pp. 363-371.
- [4] Iqbal, M. and Stachiewicz, J.W. "Variable Density Effects in Combined Free and Forced Convection in Inclined Tubes", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.10 (1967), pp. 1625-1629; "Influence of Tube Orientation on Combined Free and Forced Laminar Convection Heat Transfer", J. Heat Transfer, (Feb, 1966), pp.100-116.
- [5] Ozoe, H. Samaya, H, and Churchill, S.W. "Natural Convection in Inclined Square Channel", Int. J. Heat Mass Transfer Vol.17 (1974), pp.401-406.
- [6] Mori, Y, and Uchida, Y., "Forced Convective Heat Transfer Between Horizontal Parallel Plates", Int. J. Heat Mass Transfer Vol.9 (1966), pp. 803-817.
- [7] Dennis, S.C.R., "Numerical Solution of Vorticity Transport Equation", Proc. of Third Int. Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics 19 ", Vol.11 (July 1972), pp.120-121.

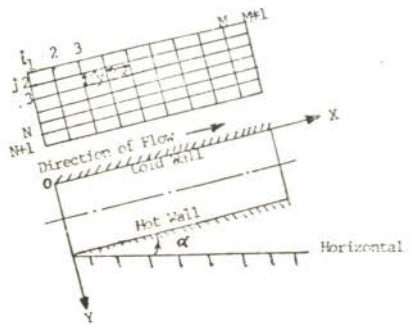


Fig. 1. Physical Model, Coordinate System and Numerical Grid.

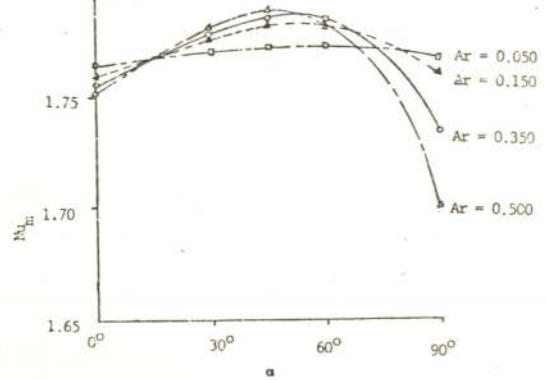


Fig. 2. Influence of Channel Orientation on The Mean Nusselt number with Ar as Parameter For $Pr = 0.73$.

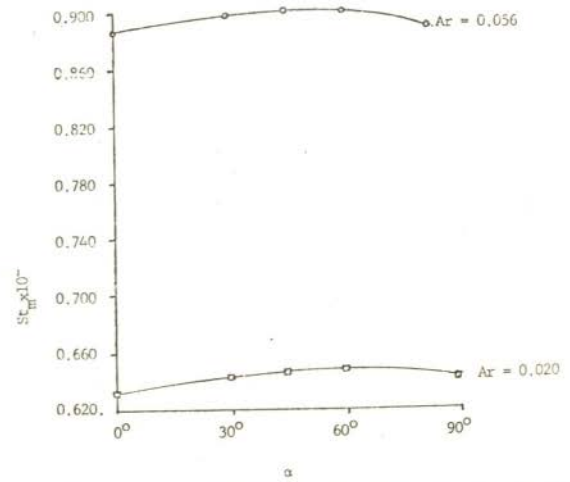


Fig. 3. Variation of The Mean Stanton number with α For $Pr = 0.73$

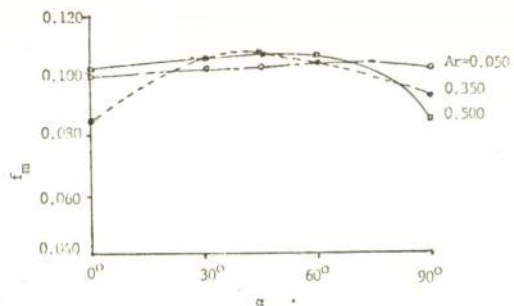


Fig. 4 Influence of Channel Orientation on the Mean Friction Factor with Ar as Parameter for $Pr = 0.73$

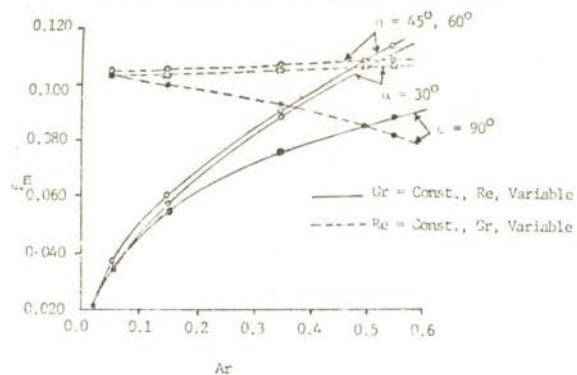


Fig. 5 Variation of Mean Friction Factor with Ar , with α as Parameter for $Pr = 0.73$.

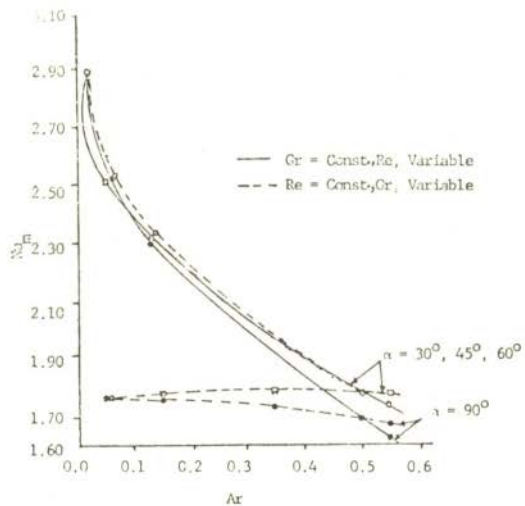


Fig. 6 Variation of Mean Nusselt number with Ar , with α as Parameter for $Pr = 0.73$.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA
RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-18

P. P. 183 - 192

PUC/RJ

SLOW FORCED AND FREE CONVECTION IN INCLINED CHANNELS

Luciano M. de SOCIO
 Istituto di Meccanica Applicata
 Politecnico di Torino-10129 TORINO (Italia)

Luciano MISICI
 Istituto di Matematica
 Università di Camerino-62032 CAMERINO

Alberto POLZONETTI
 Istituto di Matematica-Centro di Calcolo
 Università di Camerino-62032 CAMERINO

RESUME

On étudie la convection mixte dans des conduits rectangulaires inclinés et d'allongement moyen à faibles nombres de Reynolds. Un courant laminaire pénètre dans le conduit ayant le plafond adiabatique et le plancher alimenté par un flux de chaleur constant. D'abord la solution analytique du problème linéarisé est établie; successivement, et ayant recours à un procédé d'iteration numérique, la solution des équation est étendue au domain des valeurs plus élevées des nombres de Reynolds et de Grashof.

SUMMARY

Mixed convection at low Reynolds numbers in tilted rectangular channels of intermediate aspect ratios is dealt with. A laminar flow enters into an inclined enclosure whose upper plate is adiabatic whereas a constant heat flux is supplied to the bottom plate. The analytic solution of the linearised problem is first obtained. Subsequently the numerical solution of the pertinent equations is carried on by a computer's time saving iterative procedure.

1. Introduction

Goal of this paper is to establish an effective numerical solution procedure for the equations of mixed convection, while investigating the characteristics of the slow free and forced laminar convection in inclined channels, where heat is uniformly given to the fluid at the bottom wall, whereas the opposite wall is adiabatic. The flow enters at constant temperature with a fully developed velocity profile.

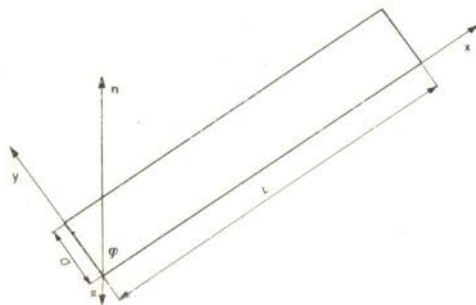


Fig.1. Geometry of the problem

In Fig.1, n is the vertical direction, pointing upward, ϕ is the tilt angle, g is the acceleration of gravity. The aspect ratio A is given by D/L . Problems of this kind frequently appear in engineering, as, for instance, in solar collectors, flows of molten materials, heat exchangers [1,2,3]. A large number of papers deals with one or more aspects of similar problems, without a sufficient degree of generality as far as the range of basic physical and geometrical parameters is concerned (see, among the others, [4,5,6,7,8,9]). In fact, except in cases where simplified solutions can be obtained (low aspect ratio channels [6], boundary layer flows at high Rayleigh numbers, Ra , in cavities [4], expensive numerical experiments are usually necessary [10] to explore the influence of each single parameter.

Here, mixed convection at low Reynolds numbers Re , between plane parallel walls at intermediate A is considered. The velocity and temperature fields are investigated in two steps. First the analytic solution to the linearized problem for small Re and Ra is obtained. Subsequently the numerical solution at higher Ra is carried out by taking advantage

of the linearized solution as an initial guess and, in so doing, noticeable savings on the computer's time are realized.

Let ν , α and β be the kinematic viscosity, the thermal diffusivity and the thermal expansion coefficient of the fluid, respectively. Let also be λ the thermal conductivity, T_0 the temperature at the entrance, Q the mass flow rate and q the rate of heat for unit length transferred to the fluid. Then $Re = Q/\nu$, the Prandtl number is $Pr = \nu/\alpha$, and the Grashof number is $Gr = g\beta \Delta T L^3/\nu^2$, with $\Delta T = qL/\lambda$, $Ra = Pr Re$. The dimensionless pertinent equations in the Oberbeck-Boussinesq approximation are:

$$\psi_y (\nabla^2 \psi)_x - \psi_x (\nabla^2 \psi)_y = \nabla^4 \psi - Gr (\theta_x \sin \phi - \theta_y \cos \phi) \quad (1)$$

$$\psi_y \theta_x - \psi_x \theta_y = \nabla^2 \theta / Pr \quad (2)$$

where ψ is the stream function, non dimensional with respect to ν , θ is $(T-T_0)/\Delta T$ and x and y are dimensionless with respect to L . The following boundary conditions hold:

$$\theta(0, y) = \theta_x(1, y) = \theta_y(x, A) = 0; \theta_y(x, 0) = -1$$

$$\psi(x, 0) = \psi_y(x, 0) = \psi_y(x, A) = \psi_{xx}(0, y) = \psi_{xxx}(1, y) = \psi_x(1, y) = 0; \psi(x, A) = Re$$

$$\psi(0, y) = 6Re \{ \frac{1}{2} (y/A)^2 - (y/A)^3 / 3 \}$$

The standard position of vanishing velocity, temperature and vorticity derivatives along x at the exit was made.

2. Analysis

Before proceeding to the exact numerical integration of (1-3) a procedure already successfully applied in [11] can be extended to obtain analytical solutions at small Re and Ra . If $\theta(x, y)$ and $\psi(x, y)$ are expanded in double power series of Re and Ra

$$\begin{bmatrix} \theta(x, y; Re, Ra) \\ \psi(x, y; Re, Ra) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Re (\partial/\partial Re) + Ra (\partial/\partial Ra)^k \begin{bmatrix} \theta_k(x, y; 0, 0) \\ \psi_k(x, y; 0, 0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

and (4) is substituted in (1,2,3) an infinite set of linear equations is obtained. In particular, it is immediate to see that $\psi(x, y; 0, 0) = 0$, whereas the zeroth order approximation for the temperature difference corresponds to the solution in the case of pure conduction regime:

$$\theta_0(x, y) = \theta(x, y; 0, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(2k+1) \frac{1}{2} \pi x \cosh(2k+1) \frac{1}{2} \pi (y-A)$$

and the A_k are determined from the boundary conditions:

$\theta_0(x, y) = \theta_{0,x}(1, y) = \theta_{0,y}(x, A) = 0$; $\theta_{0,y}(x, 0) = -1$. Of the first approximations of the stream function, $\psi_F = \partial\psi(x, y; 0, 0) / \partial Re$ simply corresponds to the profile at the inlet, whereas $\psi_G = \partial\psi(x, y; 0, 0) / \partial Ra$ is the stream function perturbation induced by the buoyancy and is the solution to the differential system:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \psi_G &= (-\sin \phi \theta_{0,x} + \cos \phi \theta_{0,y}) / Pr; \quad \psi_G(x, 0) = \psi_G(x, A) = \psi_{G,y}(x, 0) = \psi_{G,y}(x, A) = \\ &= \psi_G(0, y) = \psi_{G,xx}(0, y) = \psi_{G,x}(1, y) = \psi_{G,xxx}(1, y) = 0 \end{aligned}$$

and is expressed by the Papkovitch-Fadle series in the Appendix (A.1).

The first order approximations of the temperature, $\theta_F = \partial\theta(x, y; 0, 0) / \partial Re$ and $\theta_G = \partial\theta(x, y; 0, 0) / \partial Ra$, satisfy the boundary value problems:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta_F &= Pr \psi_{F,y} \theta_{0,x}; \quad \theta_F(0, y) = \theta_{F,x}(1, y) = \theta_{F,y}(x, 0) = \theta_{F,y}(x, A) \\ \nabla^2 \theta_G &= Pr(\psi_{G,y} \theta_{0,x} - \psi_{G,x} \theta_{0,y}); \quad \theta_G(0, y) = \theta_{G,x}(1, y) = \theta_{G,y}(x, 0) = \theta_{G,y}(x, A) = 0 \end{aligned}$$

and can, in principle, be obtained by separation of variables. However, due to the cumbersome algebra, θ_F and θ_G were obtained, in the present circumstance, by a very simple finite difference procedure. The distributions of θ_0 , ψ_G , θ_F , θ_G are shown in Fig. 2 for an inclination of 45° and $A = 0.5$. ψ_F is simply given by straight lines parallel to the walls. At this point the solution to the linearized problem can be obtained for each set of the basic parameters $\{A, Pr, Re, Ra, \phi\}$. Such a solution shows an excellent agreement with the exact solution of the governing equations, provided that $Re < 1$, and $Ra < 10^4$. However, even at higher values of Re and Ra , it can be used to obtain numerical solutions in a drastically reduced computer's time. In fact, when a finite difference scheme is adopted for (1, 2, 3) a numerical iterative solution procedure requires an initial guess, the closer to the exact solution, the better, in order to save computing time and to prevent numerical instabilities which frequently depend on the sensitivity of the programme to the initial choice of

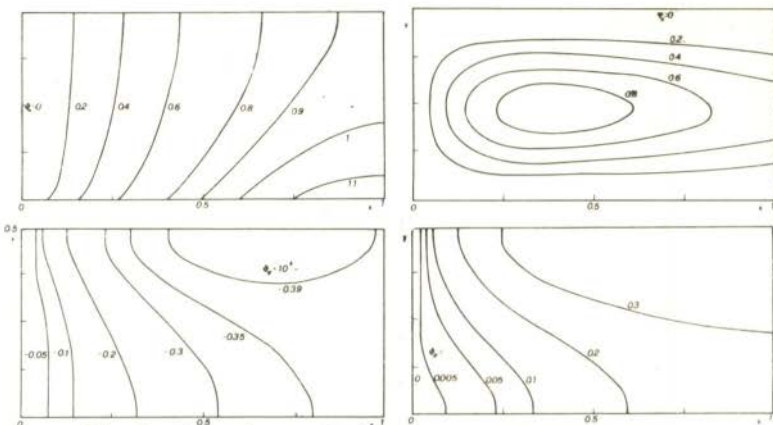


Fig.2. Solutions of the linearized equations.

of the vorticity distribution. In the full range of parameters considered here, $Re \leq 100$, $Ra \leq 5 \times 10^5$, with a variable grid of 21×21 nodal points, no instability was faced, no need for relaxation parameters was met and a maximum of 900 iterations was necessary for a convergence criterion of $E \leq 10^{-6}$, where E is the norm evaluated on all the variables.

5. Results and conclusions

The influence of the various parameters on the kinetic and thermal fields can be deduced from the figures, where the most significant results are shown. Fig.3 and 4 refer to a horizontal channel. The streamlines distribution (Fig.3) is strongly affected by the Reynolds number, larger values of Re decreasing the intensity of the buoyancy induced vortex which, on the contrary, increases with $G\kappa$, at given Re and Pr . Higher values of Pr correspond to less sensible effects of the buoyancy. The isotherms, reported in Fig.4 show that, at given Pr and Re , the heat transfer process is less effective at larger $G\kappa$, due to the more intense recirculation. If Re increases, the influence of $G\kappa$ tends to be negligible, and the forced convection prevails.

A comparison with the pure heat conduction regime shows that both Re and $G\kappa$, to different extent, decrease the heat transfer process, from the hot wall to the fluid. Fig.5

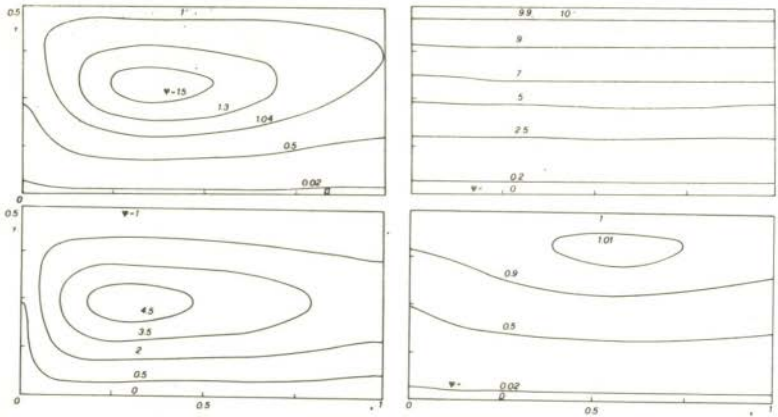


Fig. 3. Streamlines; $A = 0.5$; $\phi = 90^\circ$;
 Top left: $Re = 1, Gr = 10^4, Pr = 1$. Top right: $Re = 10, Gr = 10^4, Pr = 1$.
 Bottom left: $Re = 1, Gr = 10^5, Pr = 1$. Bottom right: $Re = 1, Gr = 10^4, Pr = 5$.

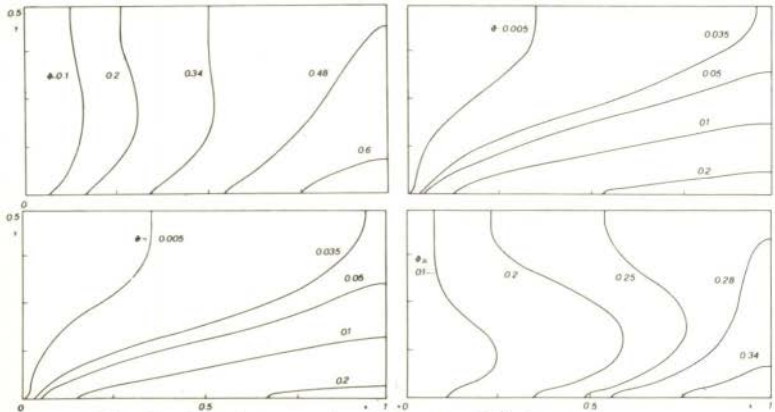


Fig. 4. Isotherms; $A = 0.5$, $\phi = 90^\circ$; $Pr = 1$.
 Top left: $Re = 1, Gr = 10^4$. Top right: $Re = 10, Gr = 10^4$.
 Bottom left: $Re = 10, Gr = 10^5$.
 Bottom right: $Re = 1, Gr = 10^5$.

shows the influence of Pr , for the same combinations of Re and Gr of Fig. 4, with a decrease of heat transfer, in particular at larger Re . Figs. 4, 5, 6 show the influence of the aspect ratio for the horizontal channel, smaller A corresponding to a decreased effect of the buoyancy at all Re and Gr . Increasing values of Re squeeze the region at higher

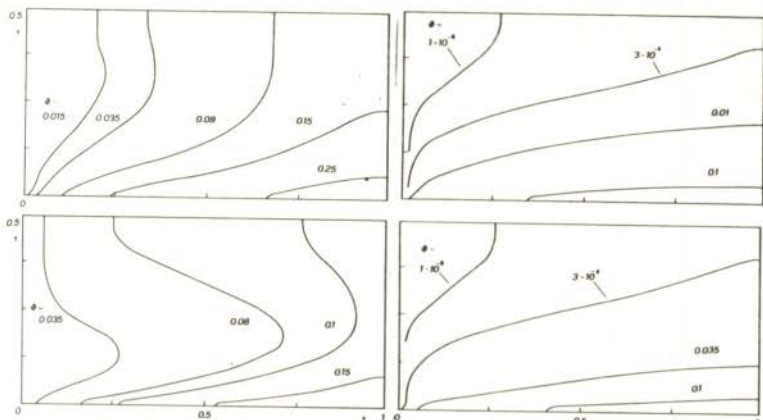


Fig. 5. Isotherms: $A = 0.5$; $\phi = 90^\circ$; $Pr = 5$. Top: left $Re = 1$, $Gr = 10^4$; right $Re = 10$, $Gr = 10^4$. Bottom: left $Re = 1$, $Gr = 10^5$; right $Re = 10$, $Gr = 10^5$.

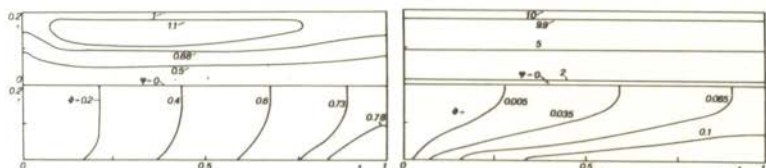


Fig. 6. $A = 0.2$, $\phi = 90^\circ$, $Pr = 1$. Top: streamlines, left $Re = 1$, $Gr = 10^5$; right $Re = 10$, $Gr = 10^5$. Bottom: isotherms, left $Re = 1$, $Gr = 10^5$, right $Re = 10$, $Gr = 10^5$.

temperature close to the bottom wall.

Finally, Figs. 7 and 8 show the streamlines and the isotherms distributions for channels at 45° . A comparison with the results in Figs. 3 and 4 shows that the recirculating region close to the top wall decreases in size and intensity at given Re and Gr . Results obtained at $\phi = 0$ confirm this trend, as even for $Re = 1$, $Gr = 10^5$ no vortex appears in the field. All the results obtained in this parametric research were summarized in the Table, where the maximum value of ψ in the field and the bulk temperature at the outlet are reported.

Two main conclusions can be reached at the end of this paper. First, an effective procedure has been established for conveniently solving the full Navier-Stokes equations in the Oberbeck-Boussinesq approximation, at low Reynolds numbers,

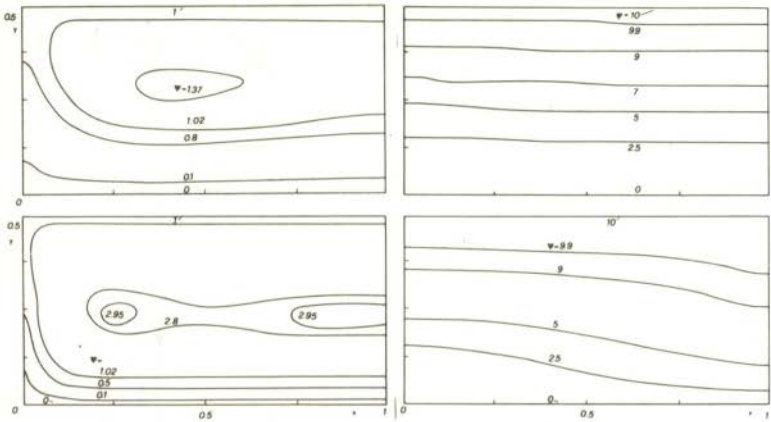


Fig. 7. Streamlines: $A = 0.5$, $\phi = 45^\circ$, $Pr = 1$. Top left: $Re = 1, Gr = 10^4$, right: $Re = 10, Gr = 10^4$ Bottom left: $Re = 1, Gr = 10^5$, right: $Re = 10, Gr = 10^5$

Table

Gr	Re				Pr	ϕ	A
	1		10				
	θ_{bulk}	ψ_{max}	θ_{bulk}	ψ_{max}			
10^4	0.566	1.576	0.092	10.0	1	90°	0.5
10^5	0.406	4.859	0.093	10.0			
10^4	0.599	1.407	0.093	10.0	1	45°	0.5
10^5	0.503	3.001	0.094	10.078			
10^4	-	-	0.093	10.0	1	0°	0.5
10^5	-	-	0.094	10.094			
10^4	0.183	1.021	0.019	10.0	5	90°	0.5
10^5	0.154	2.057	0.019	10.0			
10^4	0.736	1.000	0.098	10.0	1	45°	0.2
10^5	0.796	1.038	0.098	10.0			
10^4	0.757	1.000	0.098	10.0	1	90°	0.2
10^5	0.790	1.075	0.098	10.0			
10^4	0.0096	100.0	at $Re = 100$		1	45°	0.5
10^5	0.0098	100.0	at $Re = 100$				

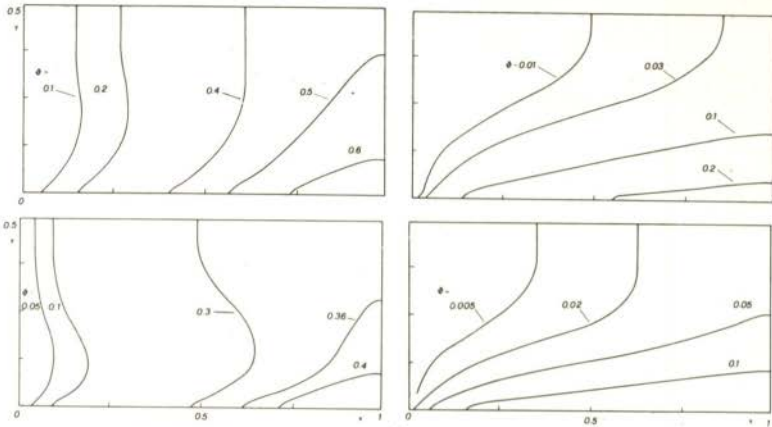


Fig.8. Isotherms: $A = 0.5$, $\phi = 45^\circ$, $Pr = 1$.
 Top left: $Re = 1$, $Gr = 10^4$; right: $Re = 10$, $Gr = 10^4$
 Bottom left: $Re = 1$, $Gr = 10^5$; right: $Re = 10$, $Gr = 10^5$

taking advantage of a linearization in terms of Ra . Further more the influence of a set of parameters on the flow configuration and on the heat transfer process has been discussed revealing the dominant effect of the Reynolds number at the inlet on the buoyancy induced vortical flow.

Acknowledgement

The partial support of the Italian National Research Council (Technological Committee) is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] Buchberg, H., Catton, I. and Edwards, D.K., "Natural Convection in Enclosed Spaces. A Review of Application to Solar Energy Convection", J. Heat Transfer, vol. 98 (1976), pp. 182-188
- [2] Hearn, G.E. and Booth, F., "Flow of Molten Glass Through an Open Channel", Glass Techn. Vol. 15 (1974), pp. 81-86
- [3] Ostrach, S., "Natural Convection in Enclosures", Adv. Heat Transfer, Vol. 8 (1972), pg. 161 foll.
- [4] Ayyaswamy, P. and Catton, I., "The Boundary Layer Regime for Natural Convection in a Differentially Heated, Tilted, Rectangular Cavity", J. Heat Transfer, vol. 95 (1973), pp. 543-545
- [5] Hollands, K.G.T., Unny, T.E., Raithby, C.D. and Konicek, L., "Free Convective Heat Transfer Across Inclined Air Layers", J. Heat Transfer, vol. 98 (1976), pp. 189-193

- [6] Bejan, A. and Imberger, J., "Heat Transfer by Forced and Free Convection in a Horizontal Channel with Differentially Heated Ends", J. Heat Transfer, Vol. 101 (1976) pp. 417-421
- [7] Meyer, B.A., Mitchell, J.W. and El-Wakil, M.M., "Natural Convection in Moderate Aspect Ratio Enclosures", J. Heat Transfer, Vol. 101 (1979), pp. 655-661
- [8] Chu, H.H.S., Churchill, S.W. and Patterson, C.V.S.: "The Effect of Heater Size, Location, Aspect Ratio and Boundary Conditions on Two-Dimensional Laminar Natural Convection in Rectangular Channels", J. Heat Transfer, Vol. 98 (1976) pp. 194-201
- [9] Cheng, K.C. and Hwang, G.J.: "Numerical Solution for Combined Free and Forced Laminar Convection in Horizontal Rectangular Channels", ASME Paper n. 68-HT-19
- [10] Clomburg, L.A. Jr., "Convection in an Enclosure. Source and Sink Located Along a Single Horizontal Boundary", J. Heat Transfer, Vol. 100 (1978), pp. 205-211
- [11] de Socio, L.M., Misici, L. and Polzonetti, A., "Natural Convection in Heat Generating Fluids in Cavities", ASME Paper 79-HT-95
- [12] Joseph, D.D. and Sturges, L., "The Free Surface on a Liquid Filling a Trench Heated from its Side", J. Fluid Mech., vol 69 (1975), pp. 565-589

APPENDIX

Let $\xi = 2(x - \frac{1}{2})$ and $\eta = 2(y - \frac{1}{2}A)/A$. Then:

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos \beta_k(\xi+1) f_k(\eta) + \sum_{k=0}^{\infty} R_k \sin \beta_k(\xi+1) g_k(\eta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{c_n \times \exp(s_n \xi/A) + d_n \exp(-s_n \xi/A)\} \phi_n(\eta)/s_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\hat{c}_n \exp(s_n \xi/A) + \hat{d}_n \times \exp(-s_n \xi/A)\} \hat{\phi}_n(\eta)/\hat{s}_n \quad (A.1)$$

where: $\beta_k = (2k+1)\pi/4$; $B_k = -A^4 \cos \beta_k A_k \beta_k / 8$; $R_k = A^4 \sin \beta_k A_k \beta_k / 8$, and $f_k(\eta)$ and $g_k(\eta)$ are the solutions of the equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} d^4 f_k(\eta)/d\eta^4 - 2\beta_k^2 A^2 d^2 f_k(\eta)/d\eta^2 + \beta_k^4 A^4 f_k(\eta) = A^4 \cosh A \beta_k (\eta - 1) \\ f_k(\pm 1) = df_k(\pm 1)/d\eta = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d^4 g_k(\eta)/d\eta^4 - 2\beta_k^2 A^2 d^2 g_k(\eta)/d\eta^2 + \beta_k^4 A^4 g_k(\eta) = A^4 \sinh A \beta_k (\eta - 1) \\ g_k(\pm 1) = dg_k(\pm 1)/d\eta = 0 \end{array} \right.$$

whereas ϕ_n and $\hat{\phi}_n$ are the even and odd eigenfunctions associated to the eigenvalues of the transcendental equations [12]:

$$\sin 2s = \mp 2s$$



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECANICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-19

P.P. 193 - 202

PUC/RJ

FREE CONVECTION BETWEEN HORIZONTAL
 CYLINDERS IN WATER AT LOW TEMPERATURE

P. Vasseur, L. Robillard and B. Chandra Shekar
 Department of Civil Engineering,
 Ecole Polytechnique de Montréal (Québec)
 Canada.

SUMMARY

The effect of density inversion on two-dimensional laminar natural convection heat transfer of cold water enclosed between two horizontal concentric cylinders is approached by a numerical method. This investigation is carried out in order to study the inversion of flow patterns caused by the maximum density of water at 4°C. Numerical solutions are obtained for cylindrical enclosure with size parameter A ranging from 2.2×10^6 to 4.3×10^9 , gap ratio B from 0.11 to 0.8. The temperature of the inner cylinder is maintained at $T_i = 0^\circ\text{C}$ while temperatures of the outer cylinder T_o are varied from 2 to 12°C.

RESUME

L'effet de l'inversion de densité sur le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire bidimensionnelle dans l'eau contenue entre deux cylindres concentriques horizontaux est abordé par une méthode numérique. La présente investigation est entreprise dans le but d'étudier l'inversion de l'écoulement causée par la densité maximum de l'eau à 4°C. Les solutions numériques sont obtenues pour des cavités cylindriques dont le paramètre d'échelle A varie de 2.2×10^6 à 4.3×10^9 , et dont le rapport de forme varie de 0.11 à 0.8. La température du cylindre intérieur est maintenue à 0°C.

1. Introduction

The steady laminar natural convection in a horizontal concentric cylindrical annulus has been studied in the past both analytically and experimentally. In all those investigations, a linear relation between fluid density and its temperature has been assumed, such an assumption being acceptable for most fluids. However, in the case of water near its freezing point a linear relationship is not justified. In fact, the density of water reaches a maximum value at 3.98°C , thereafter decreasing with decreasing temperature. It results from this nonlinearity that convective motion in water behaves in a rather peculiar manner when the temperature domain encompasses the 3.98°C point, for the density of water is maximum at this temperature (1). Since the pioneering works of Ede (2) the problem of buoyancy induced flows in cold water has been studied by many investigators, not only because of their intriguing features but also due to the fact that they are a very common occurrence in our environment and in many processes in technology.

The transient behaviour of water, contained in a rigid rectangular insulator and cooled from above to near freezing has been considered by Forbes & Cooper (3). It was found that under certain conditions the flow was bicellular and as a result the heat transfer occurred primarily by conduction. Vasseur and Robillard (4) have studied the transient cooling of water, enclosed in a rectangular cavity with wall temperature maintained at 0°C . Supercooling of water contained in an enclosure subjected to convective boundary condition has been investigated by Cheng & Takeuchi (5) and Robillard & Vasseur (6) for the case of a circular pipe and a rectangular cavity, respectively. All these studies indicate that the resulting flow motion is greatly influenced by the presence of a maximum density effect, which drives the initial circulation inside the cavity and subsequently reverses it. The resulting heat transfer is thus reduced in comparison to a standard situation without maximum density effect.

The purpose of this investigation is to study analytically the effect of density inversion on the free convective heat transfer of a mass of water contained in a horizontal cylindrical annulus whose surface temperatures are kept isothermal. The present study is an

extension of the experimental work of Seki et al (7). Numerical studies of natural convection inside two horizontal concentric cylinders, in the absence of maximum density effect, have been carried out in the past by many investigators; that of Kuehn & Goldstein (8) contains a comprehensive bibliography.

2. Problem Formulation

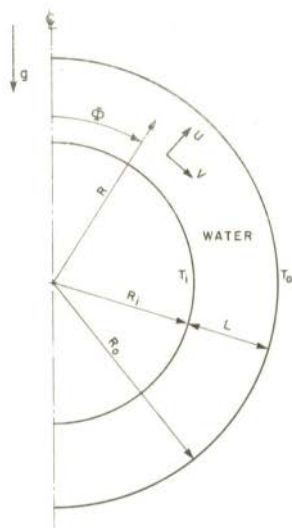


Fig. 1: Flow geometry and coordinate system

The problem under consideration is that of two-dimensional laminar convection of a mass of cold water enclosed between two horizontal concentric cylinders (see Fig. 1). It is assumed that the temperature of each cylinder is uniform, the inner cylinder being colder. Utilizing cylindrical coordinates, let the angular coordinate ϕ be measured from the upward vertical line, $\phi = 0$. The flow is symmetrical about a vertical plane through the axis of the cylinder. Accordingly, attention is confined to the range $0 \leq \phi \leq \pi$. All fluid properties, except the

water density, are taken to be constant and evaluated at the arithmetic mean temperature of the two cylinders.

The governing equations for the present problem, using the Oberbeck-Boussinesq approximation and neglecting viscous dissipation and compressibility effects, are then given in nondimensional form as:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial (UR\Omega)}{\partial R} + \frac{\partial (\Omega V)}{\partial \phi} = \text{Pr} \nabla^2 \Omega + A \sin \phi \frac{\partial \bar{\Delta \rho}}{\partial R} + \frac{\cos \phi}{R} \cdot \frac{\partial \bar{\Delta \rho}}{\partial \phi} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial UR\Theta}{\partial R} + \frac{\partial V\Theta}{\partial \phi} = \nabla^2 \Theta \quad (2)$$

$$\Omega = -\nabla^2 \Psi \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (4)$$

Where:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha t}{L^2} & U &= \frac{uL}{\alpha} & V &= \frac{vL}{\alpha} \\ \Theta &= \frac{T - T_i}{\Delta T} & \Delta T &= T_o - T_i & R &= \frac{r}{L} \\ \Psi &= \frac{\psi}{\alpha} & \Omega &= \frac{\omega L^2}{\alpha} & \bar{\Delta \rho} &= \frac{\bar{\rho} - \rho(\Theta)}{\rho} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Pr} = \nu/a \quad A = gL^3/\alpha^2$$

$$L = r_o - r_i \quad B = L/2r_i$$

and:

- Nu : local Nusselt number
 R_L : dimensionless radius $(r - r_i)/(r_o - r_i)$
 R_{AL} : Rayleigh number based on gap width $g\beta(\Delta T)(L)^3/\nu\alpha$
 T : water temperature
 ΔT : $T_o - T_i$

T_o	:	temperature of outer cylinder
T_i	:	temperature of inner cylinder
t	:	time
$\beta_1 \dots \beta_4$:	constants (see equation (7))
θ	:	dimensionless temperature
ν	:	kinematic viscosity
ρ	:	water density
$\bar{\Delta}\rho$:	$(\bar{\rho} - \rho(\theta))/\bar{\rho}$
τ	:	dimensionless time
Ψ	:	dimensionless stream function
Ω	:	dimensionless vorticity

The initial and boundary conditions are:

$$\begin{aligned}
 U = V = \Psi = \Omega = 0; \quad \theta = 0 & \quad \text{at } \tau = 0 \\
 U = V = \Psi = 0; \quad \theta = 0 & \quad \text{on the inner cylinder} \\
 U = V = \Psi = 0; \quad \theta = 1 & \quad \text{on the outer cylinder} \quad (6) \\
 \frac{\partial U}{\partial \phi} = V = \Psi = \Omega = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 & \quad \text{at } \phi = 0, \pi \\
 & \quad \text{(symmetry lines)}
 \end{aligned}$$

When considering the temperature range $0 \sim 20^\circ\text{C}$, the density-temperature relationship of water can be approximated by the following equation with an error of less than one unit at the last digit of the tabulated data of Landolt-Börnstein (4):

$$\frac{\rho}{\rho_o} = 1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3 + \beta_4 T^4 \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned}
 \rho_o &= 0.9998396 \text{ (g cm}^{-3}\text{)}; \\
 \beta_1 &= -0.678964520 \times 10^{-4} \text{ (1/}^\circ\text{C)}; \\
 \beta_2 &= 0.907294338 \times 10^{-5} \text{ (1/}^\circ\text{C}^2\text{)}; \\
 \beta_3 &= -0.964568125 \times 10^{-7} \text{ (1/}^\circ\text{C}^3\text{)}; \\
 \beta_4 &= 0.873702983 \times 10^{-9} \text{ (1/}^\circ\text{C}^4\text{)};
 \end{aligned}$$

3. Numerical Solution of the Governing Equations

The coupled transport and energy equations (1) and (2) are quasi-

linear, second-order partial differential equations of the parabolic type and such numerical methods as standard explicit method, alternating direction implicit method, Dufort-Frankel method and others may be applicable. In this study a two-dimensional alternating direction (A.D.I.) procedure is employed.

Several different mesh sizes have been used, the choice depending largely on the size of the cavity. The mesh size in the r -direction ranged from $\Delta r = 1/18$ to $1/30$. In the ϕ -direction a mesh size of $\Delta\phi = \pi/18$ to $\pi/30$ was chosen. Typical values of the time step were 0.0001 and 0.0005.

4. Results and Discussion

Figs. 2 to 5 show typical results obtained for annuli with size parameter $A = 2.2 \times 10^9$, gap ratio $B = 0.8$, inside cylinder temperature $T_i = 0^\circ\text{C}$ and for different outside cylinder temperatures T_o varying between 4°C and 12°C . As mentioned earlier the problem under consideration is symmetrical with respect to a vertical axis and it was found advantageous to reproduce computer results on a single graph with the flow pattern on the right half of the cavity and the isotherms on the left half.



Fig. 2: Isotherms and streamlines for $A = 2.2 \times 10^9$, $B = 0.8$, $T_i = 0^\circ\text{C}$ and $T_o = 4^\circ\text{C}$.



Fig. 3: Isotherms and streamlines for $A = 2.2 \times 10^9$, $B = 0.8$, $T_i = 0^\circ\text{C}$ and $T_o = 6.5^\circ\text{C}$.

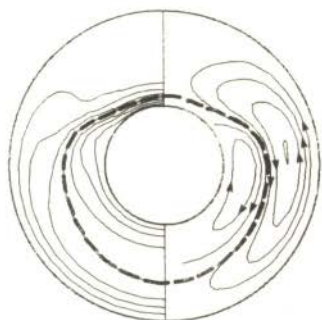


Fig. 4: Isotherms and streamlines for $A = 2.2 \times 10^9$, $B = 0.8$, $T_i = 0^\circ\text{C}$ and $T_o = 8^\circ\text{C}$.



Fig. 5: Isotherms and streamlines for $A = 2.2 \times 10^9$, $B = 0.8$, $T_i = 0^\circ\text{C}$ and $T_o = 12^\circ\text{C}$.

Fig. 2 shows the flow and isotherm patterns obtained for $T_o = 4^\circ\text{C}$. The fluid near the outer cylinder being at 4°C is heavier and is moving downward while the relatively lighter fluid near the inner cylinder is moving upward. As a consequence of the symmetry and the continuity, the resulting fluid motion inside the whole cavity consists of two counterrotating vortices. Fig. 2 only shows the right clockwise vortex. The resulting velocity profiles maybe reduced from those figures. The distortion of isotherms in Fig. 2 indicates a strong convective motion inside the cavity. It is also noticed that the maximum heat transfer, indicated by closely spaced isotherms, is located at the top of the cavity for the outer cylinder and at its bottom for the inner one. Since in the present case the outer wall temperature corresponds exactly to the maximum water density, no inversion effects are present. In fact, the flow pattern depicted in Fig. 2 is similar in form to the two usual thermoconvective cells, symmetrical with respect to the vertical axis, that have been described extensively in available literature (3) for the case of an ordinary fluid.

Fig. 3 shows the flow pattern obtained for $T_o = 6.5^\circ\text{C}$ and it is seen that the flow field is now characterized by the presence of two counterrotating circulations of approximately equal size as indicated

by the dividing streamline. This particular streamline corresponds to the value $\Psi = 0$ of the boundary and is left unconnected with it by the auxiliary computer program used to plot the graphs. The present flow pattern is a direct consequence of the maximum density of water at 4°C . The heavy dashed line represents the 4°C isotherm and thus defines the region of maximum density. The fluid in the neighborhood of this line is heavier and, as a result moves downwards. On the boundaries, the fluid is lighter and moved upwards. The distortion of the isotherm patterns in the upper part of the cavity is a result of the intense convective motion generated by the clockwise vortex located in this region.

Fig. 4 shows that for $T_0 = 8^{\circ}\text{C}$ two eddies are still present inside the cavity as in the case of Fig. 3. However, it can be noticed that the eddy near the outer cylinder is now larger, while the one near the inner cylinder is smaller. Further, it is seen from the isotherm field that the convective motion inside the cavity is still considerably reduced as compared with the case with $T_0 = 4^{\circ}\text{C}$. For outside cylinder temperature of 12°C , Fig. 5 shows that the inner cell has completely disappeared and the circulation is now counterclockwise. Furthermore, the local heat transfer in the present case is now maximum at the bottom of the outer cylinder and at the top of the inner one. This situation is completely opposite to the case described in Fig. 2.

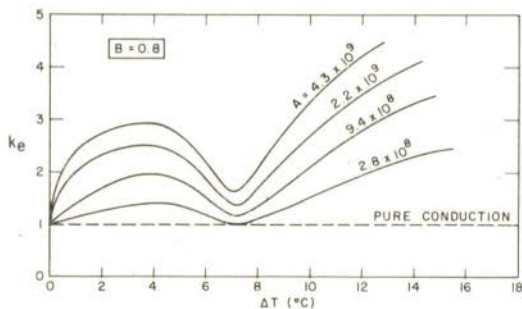


Fig. 6: Global Nusselt number k_e as a function of ΔT for various values of A .

Fig. 6 shows the relation between the average Nusselt number K_e and ΔT ($=T_o$) the temperature difference between the outer and inner cylinder. This figure reveals that K_e does not increase monotonously from pure conduction value (1.0) at $T_o = 0^\circ\text{C}$ with increasing ΔT as on common fluids having a linear density-temperature relationship. In fact, K_e increases monotonously as T_o becomes higher only when a single large eddy occupies the major portion of the gap as in the case $T_o \leq 4^\circ\text{C}$ or $T_o \geq 10^\circ\text{C}$. After reaching the peak value at 4°C a minimum value of K_e is observed at about $T_o \approx 7^\circ\text{C}$. This temperature corresponds to a situation in which two vortices of approximately equal strength exist in the gap.

5. Conclusion

1) The density inversion has an important effect on natural convection heat transfer in the cavity. This is particularly true in case where two counter eddies of approximately equal size coexist in the gap.

2) The presence of a secondary vortex pair, at the top of the inner cylinder, has been found numerically to appear for a very limited range between 6.5° and 7.25°C , for which the Nusselt number was found to be a minimum.

ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the National Research Council of Canada through grants NRC A-9201 and NRC A-4197. The authors wish to gratefully thank Ecole Polytechnique for providing necessary time on IEM 360/70.

REFERENCES

- (1) Gebhart, B., and Mollendorf, J.C. "Buoyancy-induced Flows in Water under Conditions in which Density Extrema may arise",

Journal of Fluid Mechanics, Vol. 89, pp. 673-707.

- (2) Ede, A.J., "Heat Transfer by Natural Convection in Refrigerated Liquid", Proc. 8th International Congress Refrigeration, London, 1951, p. 260.
- (3) Forbes, R.E., and Cooper, J.W., "Natural Convection in a Horizontal Layer of Water Cooled from above to near Freezing" Journal of Heat Transfer Vol. 97, 1975, pp. 47-53.
- (4) Vasseur, P., and Robillard, L., "Transient Natural Convection Heat Transfer in a Mass of Water Cooled Through 4°C," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 23, pp. 1195-1205.
- (5) Cheng, K.C., and Takeuchi, M., "Transient Natural Convection of Water in a Horizontal Pipe with Constant Cooling Rate Through 4°C", Journal of Heat Transfer, Vol. 98, 1976, pp. 581-587.
- (6) Robillard, L., and Vasseur, P., "Transient Natural Convection Heat Transfer of Water with Maximum Density Effect and Super Cooling", National Heat Transfer Conference, Orlando, Florida, 1980, ASME Paper No 80-HT-74.
- (7) Seki, N., Fukasako, S., and Nakaoka, M., "Experimental Study on Natural Convection Heat Transfer with Density Inversion of Water Between Two Horizontal Concentric Cylinders", Journal of Heat Transfer, Vol. 97, 1975, pp. 556-561.
- (8) Kuehn, T.H., and Goldstein, R.J., "An Experimental and Theoretical Study on Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 74, 1976, pp. 695-719.



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECANICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-20

P. P. 203 - 212

PUC/RJ

THERMAL RESPONSE OF A MASS OF FLUID TO A
 CONSTANT COOLING RATE APPLIED ON ITS BOUNDARIES

L. Robillard and P. Vasseur
 Professors, Civil Engineering
 Ecole Polytechnique of Montreal
 Québec, Canada.

SUMMARY

A numerical method has been developed to study the thermoconvective heat transfer occurring in a rectangular cavity whose boundaries are subjected to a constant rate of decrease in temperature. The problem considered is basically transient. However, if the cooling process is maintained long enough, a quasi-steady state is reached for which heat fluxes across boundaries and temperature differences between interior points and boundaries becomes independent of time.

RESUME

Une méthode numérique a été développée dans le but d'étudier le transfert de chaleur thermoconvectif survenant dans une cavité carrée dont les frontières sont assujetties à un décroissement constant de température. Le problème considéré est essentiellement transitoire. Cependant, si le processus de refroidissement est maintenu durant une période de temps suffisante, un état quasi-permanent peut être atteint pour lequel les flux de chaleur à travers les frontières et les différences de température entre les points intérieurs et la frontière deviennent indépendants du temps.

1. Introduction

Natural convection with heat and mass transfer in a cavity whose walls are maintained at a uniform temperature which change at a steady rate, has received little attention in literature. Quack [1], using a perturbation method, has studied the transient natural convection in long horizontal cylinders with a uniform initial fluid temperature and a linear variation of wall temperature. However the resulting perturbation solution is valid only for very low Rayleigh number regime ($Ra < 1.5 \times 10^3$) which is not important practically. An interferometric investigation of convective heat transfer in a horizontal fluid cylinder with wall temperature increasing at a uniform rate has been performed by Deaver and Eckert [2]. Although the phenomenon is a transient one, a quasi-steady state develops if the heating rate is held constant long enough. Thus a correlation equation for Nusselt number in terms of Rayleigh number, valid for $Ra > 5 \times 10^5$, was obtained by these authors. More recently the transient natural convection in horizontal cylinder with constant cooling rate was approached by a numerical method by Takeuchi and Cheng [3]. For quasi-steady state, a generalized correlation equation for Nusselt number valid for $Pr \geq 0.7$ and $Ra \leq 10^7$ was developed.

The purpose of the present investigation is to study numerically the transient two-dimensional laminar convection and the heat transfer occurring in an enclosed rectangular cavity with wall temperature decreasing at a constant rate. The cooling process is supposed to be maintained long enough so that a quasi-steady state may be approached for which local temperature gradients, velocities, and other parameters are very nearly independent of time. If thermophysical properties are assumed constant, the equations describing this problem are identical with those for a fluid with uniform heat sources in a rectangular cavity whose walls are held at a constant uniform temperature. Thus the results of this study should apply as well to the uniform heat source problem.

2. Mathematical formulation

Consider a cavity of width $2b$ and height h , shown schematically in Fig. 1, which contains a newtonian fluid. The aspect ratio of the

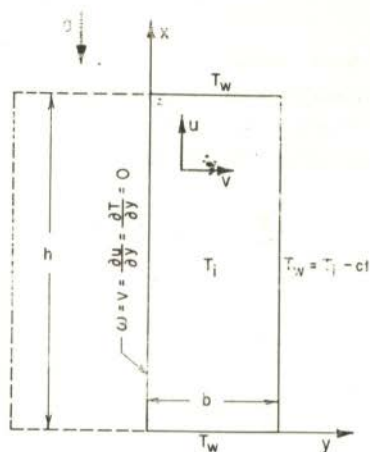


Fig. 1 - Coordinate system and boundary conditions

half cavity is denoted by $E = h/b$. The fluid is initially motionless and at a uniform temperature T_i . At time $t = 0$ it is assumed that the cavity is subjected to a linear wall temperature decreasing with time as $T_w = T_i - Ct$. The problem is to find the subsequent velocities and temperatures as function of time and position inside the cavity and the rate of heat transfer across the enclosure as a function of time. A final steady state solution, if such exists, would be of particular interest. The motion in the fluid will be laminar provided the Rayleigh number based on cavity height is less than about 10^8 .

For natural convection flows with small density changes it is common to make the Boussinesq approximation [4], i.e., to assume that the effect of temperature on density is confined to the body force term of the momentum equation and that otherwise the thermodynamic and transport properties of the fluid are independent of temperature and pressure. This implies that the fluid is essentially incompressible, and that its equation of state is:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (1)$$

where ρ , β and T denote respectively the density, volumetric expansion coefficient and temperature of the fluid, and the subscript denotes some reference state. Further, making the reasonable assumption that viscous dissipation is negligible, the fundamental equations are:

$$\frac{D\Omega}{Dt} = Ra Pr \frac{\partial \theta}{\partial Y} + Pr \nabla^2 \Omega \quad (2)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \nabla^2 \theta + 1 \quad (3)$$

$$\Omega = \left(\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \right) = -\nabla^2 \Psi \quad (4)$$

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (5)$$

where

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha t}{b^2} & X &= \frac{x}{b} & Y &= \frac{y}{b} \\ \Omega &= \frac{\omega b^2}{\alpha} & U &= \frac{ub}{\alpha} & V &= \frac{vb}{\alpha} \\ \Psi &= \frac{\psi}{\alpha} & \theta &= \frac{T - T_w}{\Delta T} & \Delta T &= \frac{b^2 c}{\alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

$$Ra = (g\beta b^3 \Delta T) / \nu \alpha \quad Pr = \nu / \alpha$$

and

- k : thermal conductivity of fluid
- Nu : Nusselt number
- Pr : Prandtl number, ν/α
- Ra : Rayleigh number, $g\beta b^3 \Delta T/\nu\alpha$
- α : thermal diffusivity
- ν : kinetic viscosity
- τ : dimensionless time (Fourier number), $\alpha t/b^2$

- ϕ_T, ϕ_L, ϕ_B : dimensionless average heat flux at the top wall, side wall and bottom wall respectively
 Ψ : dimensionless stream function
 Ω : dimensionless vorticity

The initial and boundary conditions are:

$$\begin{aligned}
 \tau = 0 & \quad \Psi = U = V = \Omega = \theta = 0 \\
 X = 0 & \quad \Psi = U = V = \theta = 0 \\
 X = E & \quad \Psi = U = V = \theta = 0 \\
 Y = 0 & \quad \Psi = \Omega = V = \partial U / \partial Y = \partial \theta / \partial Y = 0 \\
 Y = 1 & \quad \Psi = U = V = \theta = 0
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

In view of the complex nature of the problem a numerical solution appears to be the only practical and feasible approach.

3. Numerical solution of the governing equations

The coupled transport and energy equations (2) and (3) are quasi-linear, second-order partial differential equations of the parabolic type and such numerical methods as standard explicit method, alternating direction implicit method, Dufort-Frankel method and others may be applicable. In this study a two-dimensional alternating direction (A. D.I.) procedure is employed and the computational method involved differs slightly from that discussed in references [5], a detailed account will thus be omitted here.

Several different mesh sizes have been used, the choice depending largely on the aspect ratio E of the cavity. The mesh size in the Y direction ranged from $1/10$ to $1/15$. In the X direction a mesh size of $E/20$ or $E/30$ was chosen. The elliptic equation for the stream function, equation (4), was solved by a successive over-relaxation procedure using a relaxation factor of 1.8.

4. Results and discussion

The calculated isotherm and streamline fields for $Pr = 7.3$, $Ra = 5 \times 10^4$ and $Ra = 3 \times 10^5$ at four different time steps between the initial conditions and the quasi-steady state situation are shown in Figs. 2 and 3. They illustrate respectively the establishment of the first and second mode of convection.

The development of the first mode of convection ($Ra = 5 \times 10^4$) is depicted in Fig. 2. The resulting flow and isotherm patterns are quite similar to those obtained experimentally by Deaver and Eckert [2] and numerically by Takeuchi and Cheng [3]. This initial stage of cooling is characterized by a pure conduction heat transfer as indicated by the isotherms of Fig. 2a. Due to the symmetry with respect to the vertical plane $Y = 0$, a pair of counterrotating vortices is formed. Fig. 2a only shows the right clockwise vortex. As the cooling progresses, the vortex gradually increases its strength (Fig. 2b). The convective motion progressively stratifies the core region and the isotherm configuration becomes closely spaced near the top wall but sparsely spaced near the bottom one, indicating respectively large and poor heat transfer on those boundaries (Fig. 2c). Fig. 2d shows the stabilized pattern of streamlines and isotherms corresponding to the quasi-steady state situation. The vortex center has moved close to the lateral boundary and its strength has decreased to some extent.

The development of the second mode of convection ($Ra = 3 \times 10^5$) is illustrated in Fig. 3. At the initial stage of the cooling, the temperature and flow fields are quite similar to those observed for the first mode of convection. This is shown in Fig. 3a, where a pair of counterrotating vortices develops. However, due to the higher Rayleigh number involved in the present case, there is a strong tendency for the vortex center to move very close to the side boundary (Fig. 3b). The velocity profile tends to be of the boundary layer type, while the fluid in the upper central region of the cavity becomes almost stagnant. Furthermore, the fluid in this region is unstable because of the top heavy situation resulting from the particular temperature field prevailing near the top wall. The induced density field combined to the existing flow motion gives rise to an additional pair of secondary vortices symmetrically located on the axis of symmetry, near the upper

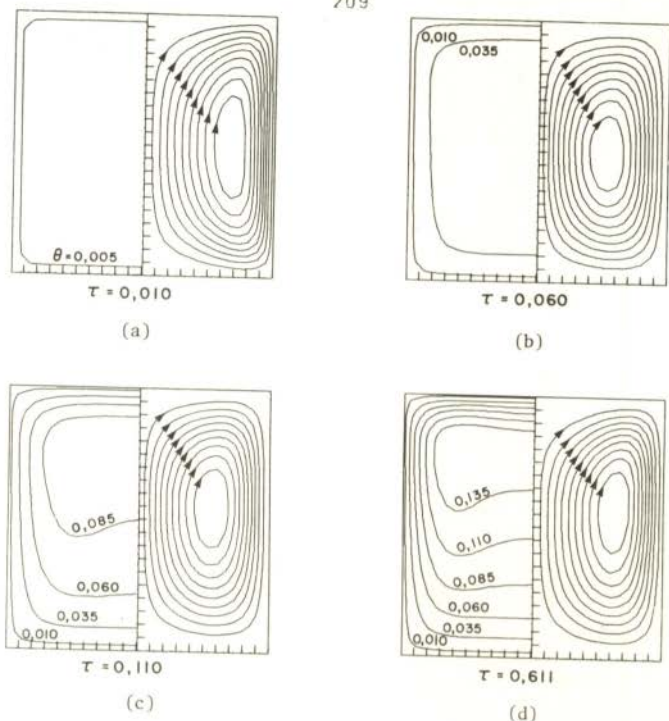


Fig. 2 - Transient streamline and isotherm fields for $Pr = 7.3$, $Ra = 5 \times 10^4$ and $E = 2$ at various time τ . The centerline and walls have value $\psi = 0$. The values of ψ_{max} and $\Delta\psi$ are:

- (a) $\psi_{max} = .33$, $\Delta\psi = .033$; (b) $\psi_{max} = 6.9$, $\Delta\psi = .69$;
 (c) $\psi_{max} = 9.8$, $\Delta\psi = .98$; (d) $\psi_{max} = 9.0$, $\Delta\psi = .90$.

boundary (Fig. 3b). The occurrence of this secondary motion presents some similarity with the start of the inversion process studied in [6] for the case of water cooled through $4^\circ C$. With time progression the additional vortex pair increases its strength as it may be seen by comparing Figs. 3b and 3c. The quasi-steady state situation is depicted in Fig. 3d in which the secondary vortex has reached its equilibrium intensity. It results from this particular flow pattern that the relatively cold fluid penetrates the core region not only from the bottom but also from the top of the cavity.

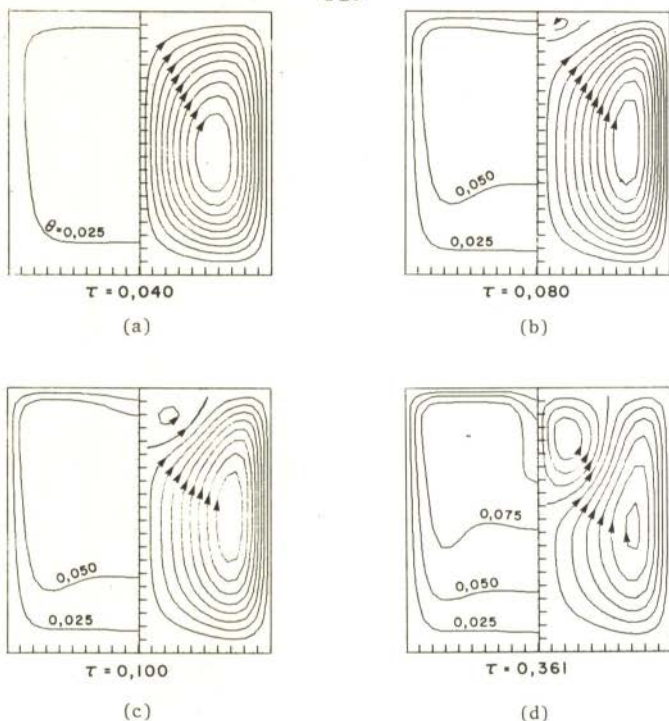


Fig. 3 - Transient streamline and isotherm fields for $Pr = 7.3$, $Ra = 3 \times 10^5$ and $E = 2$ at various times τ . The centerline and walls have value $\Psi = 0$. The values of Ψ_{max} , Ψ_{min} and $\Delta\Psi$ are:

- (a) $\Psi_{max} = 19.0$, $\Delta\Psi = 1.90$; (b) $\Psi_{max} = 17.0$, $\Psi_{min} = -0.2$, $\Delta\Psi = 1.72$; (c) $\Psi_{max} = 17.0$, $\Psi_{min} = -2.2$, $\Delta\Psi = 1.87$; (d) $\Psi_{max} = 16.0$, $\Psi_{min} = -9.7$, $\Delta\Psi = 2.57$.

The relationship between $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$ and Ra for three different aspect ratios E is presented on Fig. 4. The ratio $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$ is a measure of the relative importance of heat transfer by convection as compared to that by conduction. Thus, for $\bar{\theta}/\bar{\theta}^* = 1$, heat transfer results from pure conduction only. For a given $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$, the importance of the unstable zone located near the top wall is amplified when the aspect ratio is decreased. The critical values of $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$ at which the second mode of convection occurs are identified on the graph for each curve plotted. It is seen

that the critical value $\bar{\theta}/\bar{\theta}^* = .63$ corresponding to the smallest aspect ratio is the largest. This result indicates that the occurrence of the second mode of convection is strongly related to the instability zone.

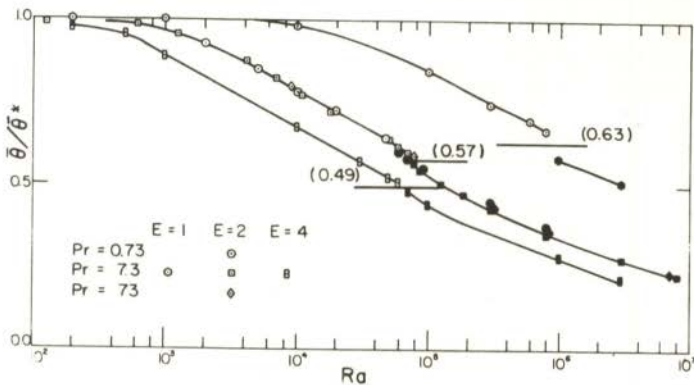


Fig. 4 - Relationship between $\bar{\theta}/\bar{\theta}^*$ and Ra for E = 1, 2 and 4.

5. Conclusion

The natural convection of a fluid contained in a rectangular cavity, the wall of which is maintained at a temperature decreasing at a constant rate, has been studied numerically for Prandtl numbers $Pr = .73, 7.3$ and $73.$, aspect ratio of the cavity $E = 1, 2$ and 4 a range of Rayleigh numbers $Ra = 10^2 \sim 10^8$. The results obtained in the present study may be summarized as follows:

- i) A quasi-steady state regime is reached from initial conditions where the fluid is at rest and at a uniform temperature. The transient solution is characterized at the initial stage by pure conduction. Subsequently a developing regime occurs where motion is set up inside the cavity. At a sufficiently large time, velocities, flow pattern and temperature differences between the fluid and the wall tend to become constant with time.

- ii) Depending mainly on Rayleigh number, two distinct modes of convection may develop inside the cavity. In the first mode, occurring at relatively low Rayleigh numbers, the flow field is characterized by a single pair of counterrotating vortices. For Rayleigh numbers beyond a critical value, a second mode appears in which an additional pair of counterrotating vortices, located near the top boundary is superposed to the basic flow of the first mode.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the National Research Council of Canada through grants NRC A-4197 and NRC A-9201. The authors wish to gratefully thank Ecole Polytechnique for providing necessary time on an IEM 360/79 computer.

REFERENCES

- [1] Quack, H., "Natural Convection inside a Horizontal Tube for Small Grashof Numbers", Wärme-und-stoffübertragung, vol. 3, 1970.
- [2] Deaver, F.K. and Eckert, E.R.G., "An Interferometric Investigation of Convective Heat Transfer in a Horizontal Fluid Cylinder with Wall Temperature Increasing at a Uniform Rate", Heat Transfer, Paper NC 1.1, Elsevier Publishing, Amsterdam, 1970.
- [3] Takeuchi, M. and Cheng, K.C., "Transient Natural Convection in Horizontal Cylinders with Constant Cooling Rate", Wärme-und-Stoffübertragung, vol. 9, 1976.
- [4] Gray, D.D. and Giorgini, A., "The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19, 1976.
- [5] Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics Hermosa Publishers, 1976.
- [6] Robillard, L. and Vasseur, P., "Transient Natural Convection Heat Transfer of Water with Maximum Density Effect and Supercooling", ASME/AICHE National Heat Transfer Conference, Orlando Florida, 1980.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-21

P. P. 213 - 224

PUC/RJ

INCREMENTO EN LA CAPACIDAD CONVECTIVA MEDIANTE
VIBRACIONES INDUCIDAS POR EL FLUJO

José Luis Fernández-Zayas

Investigador

Coordinación de Mecánica, Fluidos y Térmica

Instituto de Ingeniería, UNAM

Ciudad Universitaria

México 20, D.F., México

SUMARIO

En este trabajo se presenta un inserto tipo bandera para activar la convección en tubos. Se discute el incremento que el inserto produce en la capacidad de transferencia de calor y en las caídas de presión en régimen turbulento, obtenidas experimentalmente en un tubo típico de intercambio térmico. Se incluyen algunas características de las vibraciones producidas por el inserto y se proponen ideas para en el futuro desarrollar ecuaciones de diseño.

SUMMARY

A turbulence - promoting insert, shaped and operated as a flag in the wind, is proposed herein to enhance convection in heat transfer tubes. The increase in heat transfer and pressure drop rates is discussed when the flow is turbulent. Experiments were performed in a typical heat exchanger tube. Some characteristics of the vibration associated with the insert are presented and preliminary ideas for the development of design equations are proposed.

1. Introducción

El incremento en la capacidad convectiva de calor y de masa, en sistemas sometidos a pulsaciones mecánicas, ha sido vastamente estudiado en las últimas dos décadas. Los trabajos clásicos de Calus y Rice⁽¹⁾ en ebullición sobre superficies vibratorias, de Dent⁽²⁾ en condensación sobre tubos vibratorios y de Lemlich y Levy⁽³⁾ en sublimación al aire desde cilindros vibratorios indican que los fenómenos convectivos de transporte pueden intensificar su capacidad hasta en un orden de magnitud cuando la capa límite se perturba mediante pulsaciones. Consistentemente, los fenómenos menos estables frente a perturbaciones externas, como la convección natural desde cilindros, acusan incrementos de capacidad de hasta 10 veces cuando se les somete a pulsaciones (ver, por ejemplo, ⁽⁴⁻⁵⁻⁶⁾) mientras que la convección natural desde placas verticales exhibe incrementos, debidos a pulsaciones, de magnitudes muy reducidas ⁽⁷⁾. Las vibraciones, en todos los casos, afectan el proceso de transferencia como un resultado del efecto combinado de la amplitud y de la frecuencia. Aunque la mayoría de los trabajos estudiados se refieren a vibraciones ajenas al proceso de convección, introducidas al sistema vibrando mecánicamente la superficie de transmisión de calor o de masa, y suelen ser de baja frecuencia y de alta amplitud, hay evidencia experimental de que vibraciones de pequeña amplitud y alta frecuencia, como los campos acústicos, aumentan marcadamente la capacidad convectiva ⁽⁸⁻⁹⁾.

Puede explicarse la intensificación de la convección como una perturbación de la capa límite. De este modo, puede entenderse que en flujos altamente turbulentos el efecto de la vibración es frecuentemente imperceptible⁽¹⁰⁾ y ocasionalmente resulta en la reducción de la capacidad convectiva⁽¹¹⁾. De cualquier modo, el proceso de intensificación de convección por medio de oscilaciones es sumamente complejo y no se pretende aquí hacer un análisis de los parámetros físicos o de la naturaleza del proceso. Como apuntaba Bergles en la discusión del artículo de Penney y Jefferson⁽⁶⁾, la región de mayor interés en este fenómeno es donde la convección forzada debida a las vibraciones es la dominante.

En el trabajo presente se discuten algunas características del fenómeno de intensificación convectiva en tubos en los que el flujo interior hace vibrar a un oscilador tipo bandera, produciendo una vibración mecánica de más alta frecuencia que las normales pero de muy baja amplitud. El método permite alcanzar importantes aumentos en la capacidad convectiva hasta en números de Reynolds de 50,000 con pequeños aumentos en el costo del equipo y en la potencia de bombeo.

2. Objetivos

El objetivo primordial del trabajo que aquí se reporta es desarrollar un intensificador de convección forzada en tubos, en régimen turbulento, que resulte en mínimas caídas de presión. Se espera que este intensificador ayude a reducir costos de equipo y de bombeo en sistemas de conversión de energía solar en eléctrica por medios térmicos. Un objetivo solicitado al anterior es ofrecer a la industria, cambiadores de calor económicos. Un aspecto importante de esta investigación es que debe compararse la operación del intensificador desarrollado, en idénticas condiciones de trabajo, con intensificadores ya conocidos, como los insertos de listón torcidos en forma helicoidal y las aletas internas.

3. Bases Teóricas

Se establece la capacidad térmica de un cambiador de calor, Q , como el producto

$$Q = \dot{m}_i C_p (T_i - T_e) = \dot{m}_v h_{fg} = U A \Delta_{LM} \quad (1)$$

donde \dot{m}_i se refiere al flujo másico que circula por el interior del tubo, entrando a una temperatura T_i y saliendo a T_e , con un calor específico C_p ; en el lado de los tubos circula agua en este caso y se usa vapor saturado como medio de calentamiento, de modo que la capacidad térmica es también el producto del flujo másico de vapor, \dot{m}_v , por la entalpía de cambio de fase, h_{fg} . El valor de Q es también el producto del coeficiente global de transmisión de calor U por el área externa de los tubos, A , y por la diferencia de temperaturas media logarítmica, Δ_{LM} . En este caso, la sección de pruebas

está formada por un solo tubo de cobre electrolítico, de 1.44×10^{-2} m de diámetro interior, 1.59×10^{-2} m de diámetro exterior y 1.53 m de longitud efectiva de intercambio térmico. El tubo dispone de una sección de 1.6 m de longitud para desarrollar la capa límite antes de entrar a la zona de calentamiento.

En pruebas preliminares se encontró que el uso de intensificadores hacía vibrar el tubo. Así, se deben alterar tanto el coeficiente de película interno, h_i , como el externo, h_e , aunque el intensificador solo opere sobre el flujo interno. La medida adimensional de un intensificador será, por tanto, $U^* = U/U_0$ donde U se refiere al coeficiente global en presencia de un intensificador y U_0 se refiere al coeficiente global base, para el mismo flujo másico y para la misma temperatura media del flujo en el tubo, sin intensificador. Al caso base sin intensificador se le llama en este texto "tubo liso".

Se ha enfocado el trabajo a maximizar Q para valores de h_i , T_i y A constantes. Los resultados fundamentales pueden expresarse, como se apunta adelante, como la relación de U vs. Re , el número de Reynolds, y Δp , la caída de presión en el tubo, vs. Re . En todos los casos se utiliza el sistema internacional de unidades.

4. Aparato Experimental

El cambiador de calor usado en los experimentos se muestra en la fig 1, donde se aprecia el tubo exterior, que contiene vapor saturado durante las pruebas, desmontado del aparato. El manómetro de la parte superior se utiliza para observar la presión del vapor, que se mantiene constante por medio de dos servorreguladores de presión en serie. El aparato armado se ilustra en la fig 2, donde también se aprecian los piezómetros usados para medir la presión en la sección de pruebas y a través de una placa de orificio que permite determinar el flujo másico. En la fig 2, el fluido de trabajo, que es agua, circula de derecha a izquierda. Un tanque mezclador a la salida de la sección de pruebas homogeneiza la temperatura para ser medida mediante tres termopares. La temperatura del agua de entrada, la del vapor y la de distintos puntos sobre

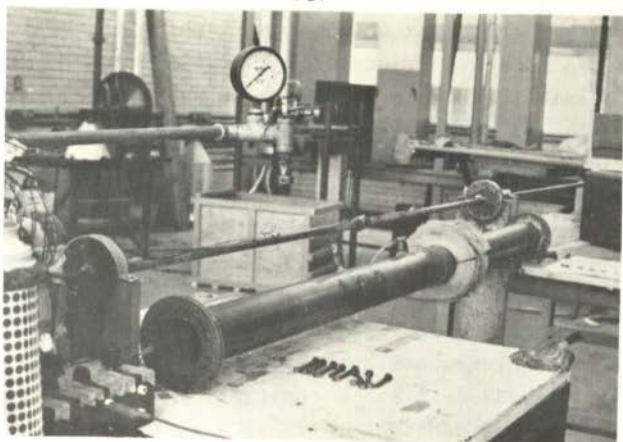


Fig 1. Sección de pruebas con la chaqueta de vapor desmontada

la superficie de pruebas también se miden mediante termopares, todos de cobre constantán. Un selector de canales permite obtener las mediciones de temperatura mediante un multímetro digital de un solo canal de entrada. Se utiliza una grabadora de siete canales para registrar la información obtenida.

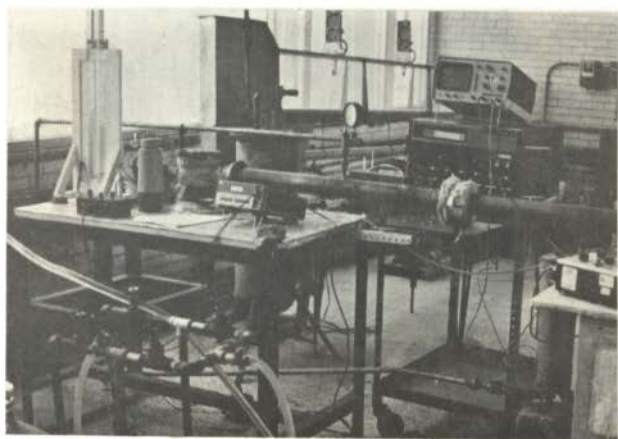


Fig 2. Vista general de la instalación de pruebas en el laboratorio de térmica (IdeI, UNAM)

En la grabadora se almacena también la señal de un acelerómetro (Bruel & Kjaer 4328) a través de un preamplificador del mismo fabricante, provisto de una mesa vibradora precalibrada a 1 g (9.81 m/s^2). La fig 3 permite apreciar la posición de la grabadora, debajo del osciloscopio (HP 1222A); - la mesa vibradora de referencia se tiene en el primer plano. A su derecha se tiene un filtro paso - banda (Kohn - Hite 330 M) con cuya ayuda se determina la frecuencia fundamental.

La alimentación de vapor proviene de una caldera de 225 kW de capacidad de vapor saturado a unos 430°K . El flujo de agua se mantiene constante haciendo la alimentación desde un tanque elevado de presión constante. La temperatura de agua de entrada se mantiene entre 15 y 20°C .

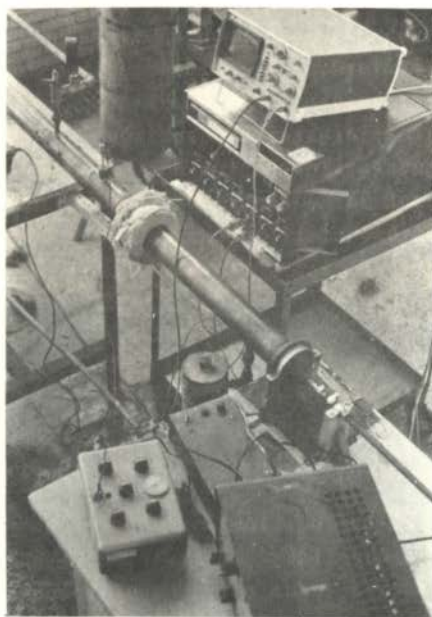


Fig 3. Equipos para la adquisición de datos de prueba

5. Resultados

Los resultados experimentales que se presentan a continuación permiten apreciar la intensificación de la convección producida por los cuatro insertos mostrados en la fig 4. El primer inserto (bandera) se coloca articulado sobre el pi

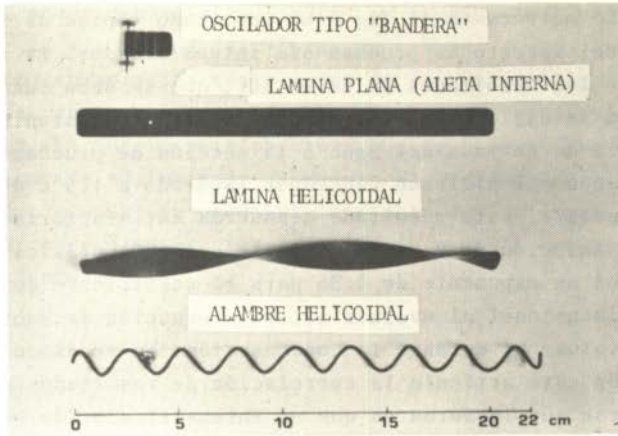


Fig 4. Cuatro insertos intensificadores de convección

vote, que a su vez se coloca en la sección de pruebas a lo largo de un diámetro. Todos los insertos se fijaron a la entrada de la sección de pruebas, aunque el inserto tipo bandera también se probó a media sección. La longitud de este inserto fue de un décimo de los otros. Los tres insertos convencionales ocupan una séptima parte de la sección de pruebas.

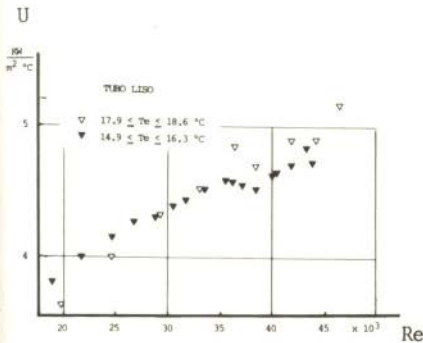


Fig 5. Dispersión de U vs Re en tubo liso, para varias temperaturas T_e

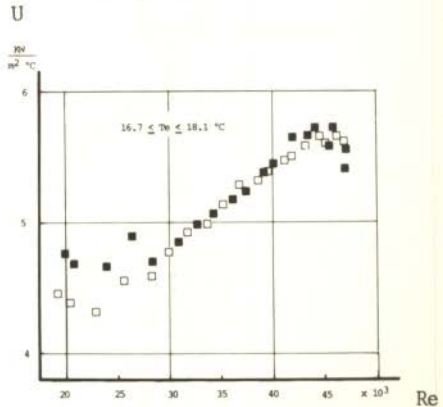


Fig 6. Relación U vs Re con intensificador de bandera en el centro y a la entrada de la sección de pruebas

Se muestra en la fig 5 un resultado típico de la capacidad del aparato de pruebas sin intensificador. La dispersión de los resultados es de un 10%, que se debe fundamentalmente a la dificultad observada en mantener constante la temperatura de entrada del agua a la sección de pruebas. Todas las pruebas se hicieron con vapor saturado a 125°C del lado de la coraza. Este resultado concuerda satisfactoriamente con la solución de U, utilizando la ecuación clásica de Deissler con un exponente de 0.36 para el coeficiente de viscosidad adimensional al evaluar h_i , y la ecuación de Rohsenow⁽¹²⁾ para evaluar h_e durante la condensación. No se discute en el resto de este artículo la correlación de resultados por desconocerse aún la forma en que el intensificador de bandera afecta al coeficiente externo, además del interno.

Se presenta en la fig 6 la variación de U cuando se usa un intensificador de bandera. Nótese que los resultados cuando la bandera está en el centro (cuadros blancos) y cuando está a la entrada de la sección de pruebas (cuadros negros) son muy parecidos. Las diferencias observadas en los extremos de la gráfica parecen deberse en buena parte a la inestabilidad de la temperatura de entrada.

La influencia de la temperatura de entrada se aprecia claramente en la fig 7. Este resultado parece indicar que la

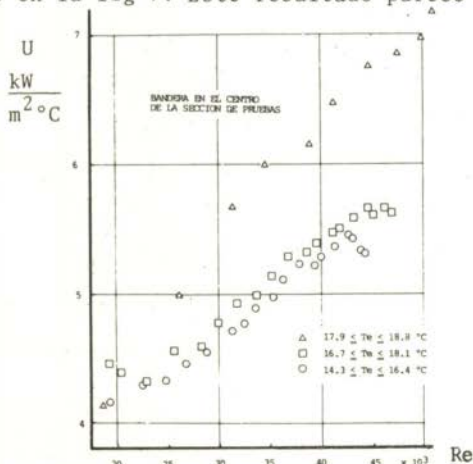


Fig 7. Variación de U vs Re para tres temperaturas de entrada bien diferenciadas

intensificación debida a la bandera es fuertemente amortiguada cuando la viscosidad del fluido de trabajo crece. Las fig 8 y 9 permiten apreciar los efectos de los intensificadores estudiados, en cuanto a la transmisión de calor y las caídas de presión. Es interesante observar que la bandera produce la intensificación más marcada en cuanto al coeficiente global U exhibiendo, además, la pendiente más alta de las curvas en la fig 8. Correspondientemente, la caída de presión debida a la bandera es mínima.

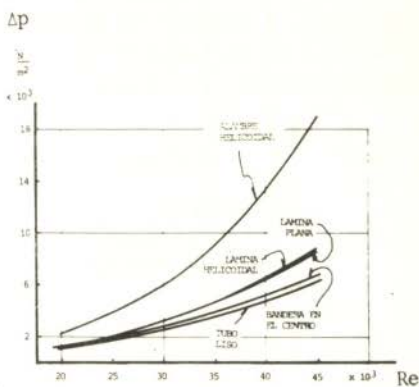
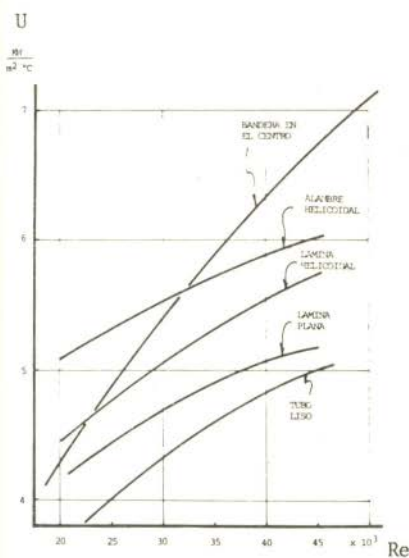


Fig 8. Cinco casos de U vs Re Fig 9. Relación de Δp vs Re para las pruebas de la fig 8

Obsérvese que, por ejemplo, para $Re = 45,000$, $U^* = 1.34$ con bandera y $U^* = 1.20$ con el alambre helicoidal a manera de inserto, mientras que las correspondientes caídas de presión adimensionalizadas son 1.16 y 3.45 respectivamente. Dado que se busca maximizar U^* minimando Δp , el inserto tipo bandera es claramente la mejor opción de las estudiadas.

Otra aparente ventaja del inserto tipo bandera es que

su costo de materiales es mínimo. Suponiendo que esta técnica de intensificación se adoptara en forma masiva, el costo del inserto sería aproximadamente igual al costo del material con el que se fabrica. En este caso, el peso del material del inserto tipo bandera fue aproximadamente de una vigésima de los otros tres. Desde luego, falta por determinar la posible fatiga de ese inserto y su mejor forma de instalación.

6. Algunas características de la vibración

Una serie de pruebas preliminares permitió encontrar que, en el aparato de pruebas de interés aquí, la frecuencia de las vibraciones era constante y se conservaba en unos 900 cps independientemente del flujo másico y de la temperatura. La fig 10 indica que la "naturaleza" de las vibraciones es constante con y sin inserto tipo bandera, aunque la presencia del inserto aumenta la amplitud. La aceleración máxima obtenida, a números de Reynolds mayores a 50,000, como se presenta en la tabla 1, es del orden de 1.7m/s^2 , que resulta en velocidades de oscilación y en amplitudes muy reducidas.

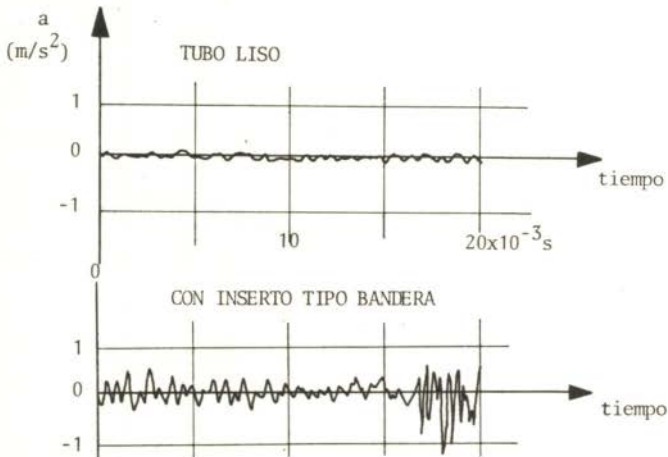


Fig 10. Aceleración en la dirección radial del tubo de prueba, con y sin inserto tipo bandera

Con la definición dada por, entre otros, Penney y Jefferson⁽⁶⁾, para el "número de Reynolds vibracional" (Re_v), tal que $Re_v = \bar{v} d_i / \nu$, donde \bar{v} es la velocidad media de desplazamiento

en la dirección radial, d_i es el diámetro interior del tubo y ν es la viscosidad cinemática se construye la tabla 1, para una prueba típica. Se puede observar que Re_v crece exponencialmente con Re : sin embarco, los valores de U^* permanecen a proximadamente constantes, alrededor de 1.35.

Tabla 1. Algunas características de la vibración

Re	a (m/s ²)	\bar{v} (m/s)	d (m)	U^*	Re_v
51 768	1.67	2.32×10^{-4}	6.44×10^{-8}	1.38	4.21
49 155	1.28	1.78 "	4.94 "	1.37	3.23
46 235	0.78	1.08 "	3.00 "	1.37	1.96
41 995	0.392	0.544 "	1.51 "	1.31	0.987
36 030	0.196	0.272 "	0.756 "	1.29	0.493
27 414	0.098	0.136 "	0.378 "	1.34	0.247

En la tabla anterior se incluye el desplazamiento radial del tubo (d) sujeto a la aceleración radial (a).

7. Conclusiones

En el trabajo experimental reportado, realizado en un tubo de características similares a las de un cambiador de calor convencional, se encuentra que un pequeño inserto, articulado en el extremo aguas arriba, produce incrementos considerables en la capacidad de transmisión de calor en régimen turbulento ($25\ 000 \leq Re \leq 50\ 000$) con un aumento despreciable en la caída de presión. La conveniencia de este tipo de insertos es, desde estos puntos de vista, mayor que la de otros insertos más comunes como las aletas internas y los listones y alambres torcidos helicoidalmente. La intensificación de la transmisión de calor, dada por U^* , es aproximadamente constante en Re para un inserto de geometría fija, lo que indica que la predicción de su funcionamiento para fines de diseño será sencilla. Por otro lado, la pequeñez de las amplitudes en las oscilaciones permite suponer que el uso del inserto no pondrá al tubo en peligro de falla por fatiga mecánica. A las vibraciones corresponde un muy reducido número de Reynolds vibracional, lo que puede indicar que las vibraciones en sí no son un factor importante de los valores de U^* alcanzados. La pequeña cantidad de materiales necesaria para hacer el inserto,

que en este caso fue de 5 milésimas del material del tubo, indica la economía del método propuesto.

8. Reconocimientos

Este trabajo es parte de una investigación realizada en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, México, financiada por la Secretaría de Patrimonio y Fomento Industrial (SEPAFIN). Los resultados experimentales fueron obtenidos por el Ing. Norberto Chargoy del Valle y son parte de su tesis de maestría en ingeniería mecánica (en elaboración).

REFERENCIAS

- (1) Calus, W.F., Rice, P., "Pool Boiling Heat Transfer from a Vibrating Surface", Loughborough Univ. of Technol., Inglaterra, 1970
- (2) Dent, J.C., "Effect of Vibration on Condensation Heat Transfer to a Horizontal Tube", Proc. Instn. Mech. Engrs. 1969-70, Vol 184, Pt 1, No. 5
- (3) Lemlich, R., y Levy, M.R., "The Effect of Vibration on Natural Convective Mass Transfer", A.I.Ch.E. Journal, junio 1961, pp.240-242
- (4) Lemlich, R., "The Effect of Vibration on Natural Convective Mass Transfer", Ind. and Eng. Chem., Vol. 47, No. 6, 1955, pp. 1175-1180
- (5) Pak, H.Y., Winter, E.R.F. y Schoenhals, R.J., "Convection Heat Transfer in a Contained Fluid subjected to Vibration", Purdue Univ. Rept., 1971
- (6) Penney, W.R., y Jefferson, T.B., "Heat Transfer from an oscillating Horizontal Wire to Water and Ethylene Glycol", J. Heat T., nov.1966, 359-366
- (7) Blankenship, V.D. y Clark, J.A., "Laminar Free Convection from a Vertical Infinite Plate subject to Transverse Oscillation", J. Appl. Mech., sept. 1964, pp 383 - 389.
- (8) June, J.R., y Baker, M.J., "The Effect of Sound on Free Convection Heat Transfer from a Vertical Flat Plate", J. Heat T., ago.1963, p.279
- (9) Kryukov, Y.V. y Boykov, G.P., "Augmentation of Heat Transfer in an Acoustic Field", Heat T.-Soviet Res., Vol. 5, No. 1, 1973, pp.26-28
- (10) Pearce, H.R., "The Effect of Vibration on Burnout in Vertical, Two-Phase Flow", Reporte AERE - R - 6375, Atom. Energy Res. Est., U.K., 1970
- (11) Wong, P.F.Y., Ko, N.W.M., y Yip, P.C., "Mass Transfer from Large Diameter Vibrating Cylinders", Trans. I. Chem. E., Vol. 56, 1978, pp. 214 -216
- (12) Rohsenow, W.M., "Heat Transfer and Temperature Distribution in Laminar-Film Condensation", Trans. ASME, Vol. 78, 1956, pp.1645 - 1648.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-22

P.P. 225 - 232

PUC/RJ

SIMILARITY FLOWS BETWEEN A ROTATING AND A STATIONARY DISK

J.H. Buchmann & R.Y. Qassim
 COPPE/UF RJ

A distribuição radial de pressão em um fluido contido entre um disco estacionário coaxial com um disco girando é determinado experimentalmente para diferentes distâncias entre os discos. Os resultados obtidos demonstram que escoamento de escoamento sõ ocorre para pequenos e grandes valores desta distância. No primeiro caso, o escoamento longe do disco estacionário apresenta-se de acordo com aquele sugerido por Batchelor, enquanto no segundo caso o fluxo passa a ser concordante com a hipótese de Stewartson.

The radial distribution of fluid pressure on a stationary disk coaxial with a rotating disk is determined experimentally for various inter-disc spacings. The results show that similarity flows are only possible for both small and large values of this distance. In the former case, the flow faraway from the stationary disk appears to be that suggested by Batchelor, while in the latter case, the flow turns out to be in accordance with the assumption of Stewartson.

1. Introduction

The flow of an incompressible Newtonian fluid between two coaxial disks, one of which is rotating and the other stationary, is of interest not only from an applications point of view, but also due to the fact that exact solutions of the Navier-Stokes equations can be obtained for any Reynolds number through the application of the Von Kármán similarity transformation. It is therefore not surprising that this problem has attracted a lot of attention in the way of theoretical analysis. An important feature of the theory is the multiplicity of solutions at high Reynolds numbers. In particular, for very large values of the Reynolds number, two flows have been found possible. In the first, originally postulated by Batchelor [1], there is a boundary layer on each disk and the fluid in between rotates at an angular velocity less than that of the rotating disk. In the other flow, first suggested by Stewartson [2], the fluid between the boundary layers is in purely axial motion.

2. Theoretical Considerations

Consider the laminar flow of an incompressible Newtonian fluid between two coaxial circular disks of infinite radius, the disks lying in the planes $\bar{z} = 0$ and $\bar{z} = d$. Let the former disk be stationary and let the latter rotate with a constant angular speed Ω . Assuming azimuthal symmetry, the Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates may be written in dimensionless form as

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0 \quad , \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad , \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (4)$$

The boundary conditions to be satisfied are

$$Z = 0, \quad U = v = w = 0 \quad , \quad (5)$$

$$Z = 1, \quad u = w = 0, \quad v = Rr \quad , \quad (6)$$

where $R \equiv \frac{\Omega d^2}{\nu}$ is the Reynolds number of this problem.

Applying the von Kármán similarity transformation

$$u = - \frac{1}{2} r f' (z), \quad v = r g (z), \quad w = f (z) \quad , \quad (7)$$

the continuity equations (1) is identically satisfied, and eliminating the pressure between equations (2) and (4), we obtain

$$f^{(4)} - ff'''' - 4gg' = 0 \quad , \quad (8)$$

$$fg' - f'g - g'' = 0 \quad (9)$$

with the boundary conditions

$$f(0) = f'(0) = g(0) = 0 \quad (10)$$

$$f(1) = f'(1) = 0, \quad g(1) = R \quad (11)$$

It is easy to show that the pressure must be of the form

$$p = \frac{C}{2} r^2 + \phi(z) \quad (12)$$

which for $\phi = 0$ reduces to

$$p = a_0 + a_2 r^2 \quad (13)$$

From equation (12), we see that $C \neq 0$ implies that the flow between the two disks rotates like a rigid body as Batchelor predicted [1]. On the other hand, if $C = 0$ then we conclude that the fluid between the disks is in purely axial flow as suggested by Stewartson [2]. Thus, the radial distribution of pressure at the stationary disk serves to indicate whether the fluid between the two disks is in Batchelor like or in Stewartson-type flow or is indeed neither.

3. Experimental

Experiments were performed in a configuration of two horizontal disks, 11.5 cm in diameter, and bounded laterally by a stationary cylinder. The distance between the disks was varied between 0.5 and 40 cm. The lower disk was rotated at speeds in the range 50 - 190 rps.

Static pressure measurements were made in the stationary disk. The pressure taps were at radial positions between 2.0 and 4.8 cm. Further details of the experimental arrangement and program can be found in Ref. [3].

4. Results

For each inter-disk spacing and speed of rotation of the lower disk, the measured values of pressure were fitted as a quadratic function of the radial distance as suggested by equation (13). As the fit was not satisfactory, a linear term was added to give the form

$$p = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 \quad (14)$$

the resulting fit being a great improvement on that without the linear term. Needless to say, the coefficients a_0 , a_1 , and a_2 are functions of d and Ω . As seen in Section 3, for the von Kármán similarity transformation to hold, $a_1 = 0$. A close examination of our data shows that $a_1 \rightarrow 0$ for two cases: $d \rightarrow 0$, and $d \rightarrow \infty$. Furthermore, in the latter case, $a_2 \rightarrow 0$. Typical variation of a_1 and a_2 with d are shown in Figures 1 and 2 respectively.

5. Conclusions

Our results show that for very small inter-disk spacings, the fluid between the disks may well be in Batchelor-like flow. This is to be expected, since the influence of the rotating disk is large in this case and can cause the fluid to rotate as a rigid body. On the other hand, for very large inter-disk spacings, the flow between the disks appears to be Stewartson-type and this also is not surprising as the influence of the rotating disk is then minimal. For intermediate inter-disk spacings, similarity flow does not appear possible as $a_1 \neq 0$.

This trend is not shown by the experimental results of Nguyen et al [4], notwithstanding the fact that their rotational speeds and inter-disk spacings are such that the Reynolds number lies in the range $0 - 5000$, while we have much higher Reynolds numbers due to the large inter-disk spacings we used. Their data are in agreement with Batchelor's prediction in the range $0 \leq R \leq 2000$. They do not detect any Stewartson-type flow. Furthermore, they do not find any linear term in the radial distance; i - e, $a_1 = 0$.

Nguyen et al [4] do not accept the reasoning that at large inter-disk spacings the flow should be Stewartson-type, because the argument invokes disks of finite radius. We find this questionable. In so far as the flow between any two given disks is concerned, the edge effect due to the finiteness of the disks is localized near the periphery [5] and hence the fluid away from the discs' periphery 'sees' an infinite disc. Thus, we believe it reasonable to expect Stewartson-type flow for large values of inter-disk spacing. Similarly, Batchelor-like flow is to be expected for small disk separations. As stated above, this is borne out by our data.

REFERENCES

- [1] Batchelor, G.K., "Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally symmetric flow", Quart. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. 4

(1951), pp. 29 - 41.

- [2] Stewartson, K., "On the flow between two rotating coaxial disks", Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 49 (1953), pp. 333 - 341.
- [3] Buchmann, J.H., M.Sc. Thesis, COPPE/UFPE, Rio de Janeiro, (1978).
- [4] Nguyen, N.D. Ribault, J.P., and Florent, P., " Multiple solutions for flow between coaxial disks", J.Fluid Mech., Vol. 68 (1975), pp. 369 - 388.
- [5] Greenspan, H.P., The Theory of Rotating Fluids, Camb. Univ. Press, Camb. (1968), p. 141.

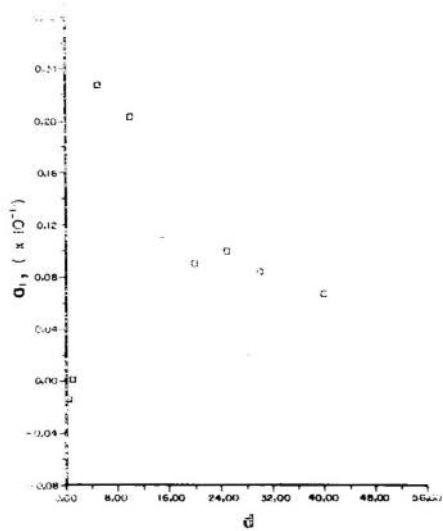


Figure 1 - Variation of parameter a_1 with inter-disk Spacing d .
Speed of rotation 190 rps.

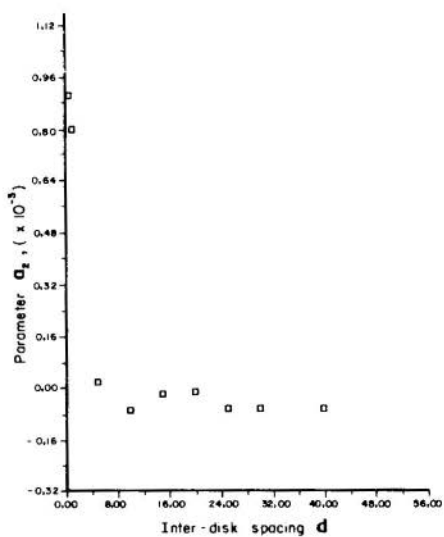


Figure 2- Variation of parameter a_2 with inter-disk Spacing d :
Speed of rotation 190 rps .



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-23

P. P. 233 - 244

PUC/RJ

THERMAL RESISTANCE OF A CONVECTIVELY COOLED PLATE WITH APPLIED
HEAT FLUX AND VARIABLE INTERNAL HEAT GENERATION

Nellore S. Venkataraman

Humberto Pontes Cardoso

Olavo Bueno de Oliveira Filho

Instituto de Pesquisas Espaciais - CNPq
São José dos Campos, SP, Brasil

SUMÁRIO

Analisa-se aqui o problema de condução de calor em uma placa plana submetida a uma geração interna de calor não-uniforme, com uma de suas bordas resfriadas por convecção, enquanto quanto parte da borda oposta a esta é submetida a um fluxo de calor. O restante desta, assim como as outras duas bordas, estão perfeitamente isoladas. O problema é resolvido pelo método de diferenças finitas e os resultados são analisados em função do módulo de Biot, parâmetros geométricos da placa, a relação entre geração interna e fluxo de calor e o perfil da distribuição da geração interna.

SUMMARY

The conductive heat transfer in a rectangular plate with nonuniform internal heat generation, with one end convectively cooled and a part of the opposite end subjected to external heat flux is considered. The remaining part of this end as well as the other two sides are thermally insulated. The governing differential equation is solved by a finite difference scheme. The variation of the thermal resistance with Biot modulus, the plate geometry, the internal heat generation parameter and the type of profile of internal heat generation is discussed.

1. Introduction

During the thermal design and analysis of satellites, when the object is to keep the temperature of the various electronic components below the maximum operating temperature, a knowledge of the equivalent thermal resistance of the mounting plates of electronic banks is essential. Sometimes, the mounting plates may be convectively cooled by a fluid. Here we analyze the problem of a thin rectangular plate, with a portion of one side in contact with an external wall, receiving a specific flux, the opposite side being convectively cooled by a fluid at a constant temperature. The remaining sides are insulated. It is also assumed that heat dissipation of the electronic components can be represented as a nonuniform internal heat generation. The geometry is shown in figure 1.

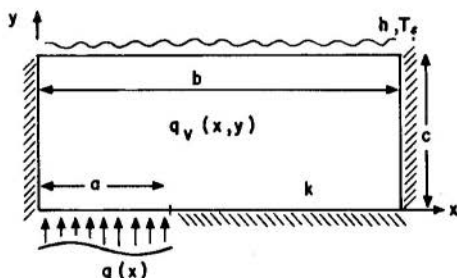


Fig. 1. The geometric configuration

Oliveira and Forslund [1], considered a problem of similar geometry with constant external heat flux and with no internal heat generation. Schneider, Yovanovich and Cane [2], extended the same problem to the case of nonuniform heat flux, but with no internal heat generation. They considered three different profiles for the external heat flux and concluded that the nature of this profile has no influence on the thermal resistance. Venkataraman, Oliveira Filho and Cardoso [3] extended this problem to include constant internal heat generation and obtained the solution analytically. In this case also, the thermal resistance was found to be insensitive to the nature of the external

heat flux profile. The object of this work is to extend the work of reference [3] to include nonuniform internal heat generation. The governing differential equation is solved by a finite difference scheme. The accuracy check is made by comparing with the exact solution for the case of constant heat generation [3]. Following this, three different types of profiles are assumed for the internal heat generation and their effects on thermal resistance are studied. The last profile assumed, simulates closely the situation arising in a satellite. Finally, the results for thermal resistance are presented graphically as functions of Biot Modulus, plate geometry, relation of internal heat generation to external heat flux and the nature of the profile for the internal heat generation.

2. Formulation

As shown in figure 1, the rectangular plate of width b , height c and thermal conductivity k is subjected to external heat flux per unit time $q(x)$ over the contact width a . The remaining portion of this side as well as the lateral sides $x = 0$ and $x = b$ are insulated. The topside $y = c$ is cooled convectively by a fluid at constant temperature T_f and with a constant film coefficient of heat transfer h . The nonuniform internal heat generation per unit volume, per unit time is denoted by $q_v(x, y)$. The steady state temperature $T(x, y)$ inside the plate is governed by the two-dimensional Poisson equation:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{-q_v(x, y)}{k} \quad (1)$$

The boundary conditions are

$$y = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-q(x)}{k} \quad (2)$$

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$y = c, \quad 0 \leq x \leq b, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{h'}{k} [T(x, c) - T_f] \quad (4)$$

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq c, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$x = b, \quad 0 \leq y \leq c, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Following [2], we nondimensionalize equation (2) using the following nondimensional variables:

$$\beta = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \theta = \frac{k \ell (T - T_f)}{Q + Q_V} \quad (7)$$

Where ℓ is the thickness of the plate normal to the cross-section, Q is the total heat flow rate and Q_V is the total internal heat generation rate. Thus

$$Q = \ell \int_0^a q(x) dx, \quad Q_V = \ell \int_0^c \int_0^b q_V(x, y) dx dy \quad (8)$$

Using these nondimensional variables equations (1) to (6) become

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \frac{-q_V(\beta, \eta) b^2 \ell}{Q + Q_V} \quad (9)$$

with the boundary conditions:

$$\eta = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \epsilon, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{-q(\beta) b \ell}{Q + Q_V} \quad (10)$$

$$\epsilon \leq \beta \leq 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad (11)$$

$$\eta = \alpha, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -Bi \theta(\beta, \alpha) \quad (12)$$

$$\beta = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \alpha, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0 \quad (13)$$

$$\beta = 1, \quad 0 \leq \eta \leq \alpha, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0 \quad (14)$$

Where $\epsilon = \frac{a}{b}$, $\alpha = \frac{c}{b}$ and $Bi = \frac{hb}{k}$ is the Biot modulus. When the internal generation $q_V(\beta, \eta)$ is not a constant, the solution of equation (9) has to be obtained numerically. At this stage it is necessary to specify $q(\beta)$ and $q_V(\beta, \eta)$. As mentioned before, the nature of the profile of $q(\beta)$ has no influence on the thermal resistance [2, 3] and hence we

take it as equal to a constant q . For $q_V(\beta, \eta)$ we consider the following three profiles:

$$\text{Profile A: } q_V(\beta, \eta) = q_{VA} \beta \eta (1 - \beta) (\alpha - \eta) \quad (15)$$

$$\text{Profile B: } q_V(\beta, \eta) = q_{VB} (1 - \beta) e^{-\eta} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Profile C: } q_V(\beta, \eta) &= q_{VC} \text{ for the region } \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 \\ &\quad \text{and } \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, \\ &= 0 \text{ outside this region} \end{aligned} \quad (17)$$

The last profile here closely simulates the conditions arising in satellite thermal analysis, and the zone of heat generation is taken approximately near the center. We define an internal heat generation parameter G as

$$G = \frac{\bar{q}_V b}{q} \quad (18)$$

Where $q_V = \frac{Q_V}{h c \ell}$ is the average internal heat generation rate per unit volume.

The differential equation (9) can be written in terms of the parameter G for each of the profiles A, B and C. Thus for profile A, equation (9) becomes

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \frac{-\alpha G}{\epsilon + \alpha G} \frac{\beta \eta (1 - \beta) (\alpha - \eta)}{g_A(\alpha)} \quad (19)$$

$$\text{where } g_A(\alpha) = \int_0^1 \int_0^\alpha \beta \eta (1 - \beta) (\alpha - \eta) d\beta d\eta \quad (20)$$

and equation (10) becomes

$$\eta = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \epsilon, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = - \frac{1}{\epsilon + \alpha G} \quad (21)$$

All other boundary conditions remain the same. Similar expressions can be written for the profiles B and C. The nondimensional thermal resistance R of the plate is defined as

$$R = \frac{k \ell (\bar{T}_c - T_f)}{Q + Q_V} \quad (22)$$

where \bar{T}_c is the average contact temperature of the lower plate given by

$$\bar{T}_c = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T(\beta, 0) d\beta \quad (23)$$

From equations (7), (22) and (23), the nondimensional resistance turns out to be

$$R = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} \theta(\beta, 0) d\beta \quad (24)$$

Thus the nondimensional thermal resistance is equal to the nondimensional average contact temperature.

3. Numerical solution

For the finite difference solution, by discretizing the plate as shown in figure 2, we obtain the following difference equations for profile A.

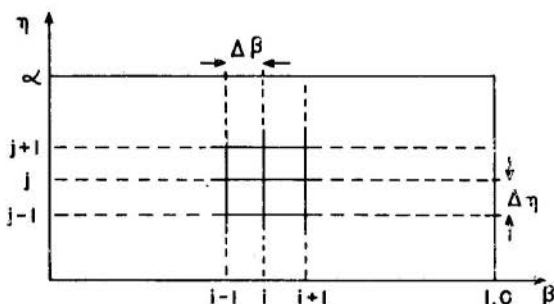


Fig. 2. Discretization of plate

$$\theta_{i,j} = \frac{\frac{\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j}}{(\Delta\beta)^2} + \frac{\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1}}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\alpha G}{\epsilon + \alpha G} \frac{[\rho\eta(1-\beta)(\alpha\beta)]_{i,j}}{g_A(\alpha)}}{\frac{2}{(\Delta\beta)^2} + \frac{2}{(\Delta\eta)^2}} \quad (25)$$

$$\eta = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \epsilon, \quad \theta_{i,0} = \frac{\Delta\eta}{\epsilon + \alpha G} \quad (26)$$

$$\epsilon \leq \beta \leq 1, \quad \theta_{i,0} = \theta_{1,1} \quad (27)$$

$$\eta = \alpha, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \theta_{i,n_\eta + 1} = \theta_{i,n_\eta} (1 - Bi \Delta\eta) \quad (28)$$

$$\beta = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \alpha, \quad \theta_{0,j} = \theta_{1,j} \quad (29)$$

$$\beta = 1, \quad 0 \leq \eta \leq \alpha, \quad \theta_{n_\beta + 1,j} = \theta_{n_\beta,j} \quad (30)$$

Where n_β and n_n are the number of divisions corresponding to i and j respectively. This system of linear algebraic equations are solved by the method of residues by starting with the initial guess of

$$\theta_{i,j} = -\frac{G}{\epsilon + \alpha G} \frac{\eta_{i,j}^2}{2} - \frac{\eta_{i,j}}{1 + \alpha G} + \frac{\alpha G}{\epsilon + \alpha G} \left(\frac{1}{Bi} + \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{1 + \alpha G} \left(\alpha + \frac{1}{Bi} \right) \quad (31)$$

which represents the temperature distribution for the one dimensional case in the n direction, such that

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} \frac{q a \ell}{Q} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{b \rightarrow 0 \\ q_v \rightarrow \infty}} \frac{q_v b c \ell}{Q} = 1$$

4. Results and discussions

For the calculation of the thermal resistance and the temperature, a maximum residual of 10^{-3} was used, after testing that with this residue, the maximum error turns out to be 5% when compared with the analytical solution of [3], for the case of constant heat generation. The maximum error occurs for $\alpha = 0.2$ and $G = 1.0$, (figure 3), for most of the other cases the error is around 0.1%

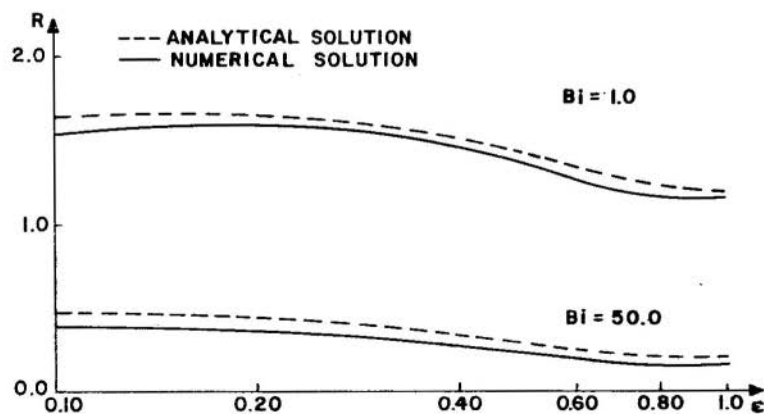


Fig. 3. Comparison between numerical and analytical solution for $\alpha = 0.2$, $G = 1.0$.

The isotherms are plotted for the case of the profile C in figures 4 and 5, where the area of the heat generation and its location is shown to scale. The thermal resistance for the profiles A, B and C are plotted against ϵ for $G = 0.01, 1.0$ and 50.0 for various α and Bi in figures 6, 7 and 8.

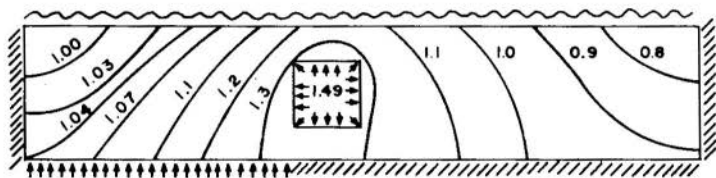


Fig. 4. Isotherms for profile C for $\alpha = 0.2, Bi = 1.0, G = 50.0$

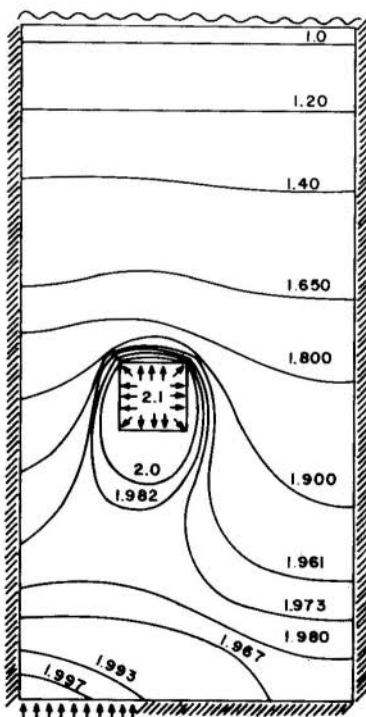


Fig. 5. Isotherms for profile C for $\alpha = 0.2, Bi = 1.0, G = 50.0$

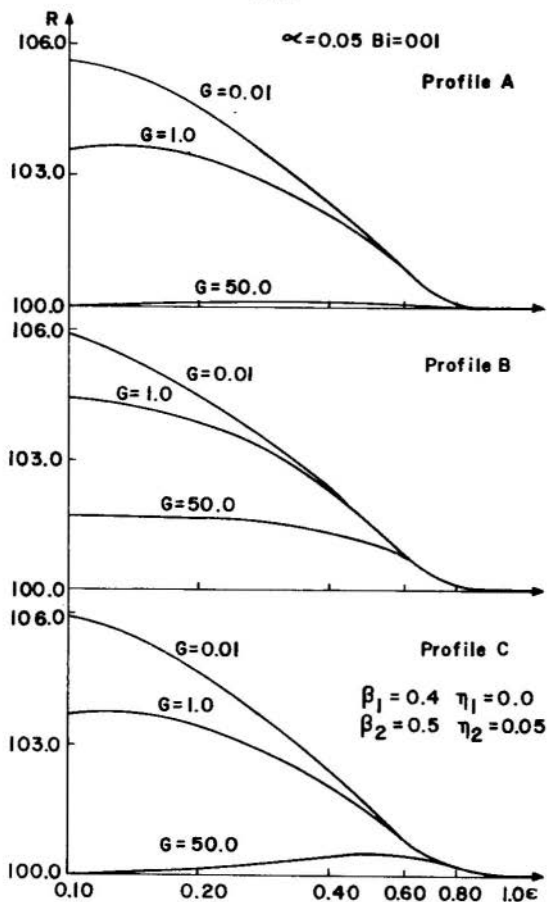


Fig. 6. Thermal resistance for $\alpha = 0.05$, $Bi = 0.01$

For the profile A, the thermal resistance as well as the temperature distribution does not show any significant change in its behaviour (figures 6, 7 and 8) when compared with the case of constant heat generation [3]. This is because of the small variation of the q_v profile at the contact region. For the profile B, the thermal resistance values are higher than those for constant generation [3]. This is because of the concentration of the internal heat generation near the contact edge, thereby causing a higher

temperature and hence the increased resistance. For the profile C, the thermal resistance increase becomes significant for large values G , and values of ϵ and α for which the zone of heat generation is near the contact surface. This can be visualized by the isotherms for $\alpha = 0.2$ and 2.0 (figures 4 and 5). For $\alpha = 2.0$, the region of heat generation is relatively far from the contact region and

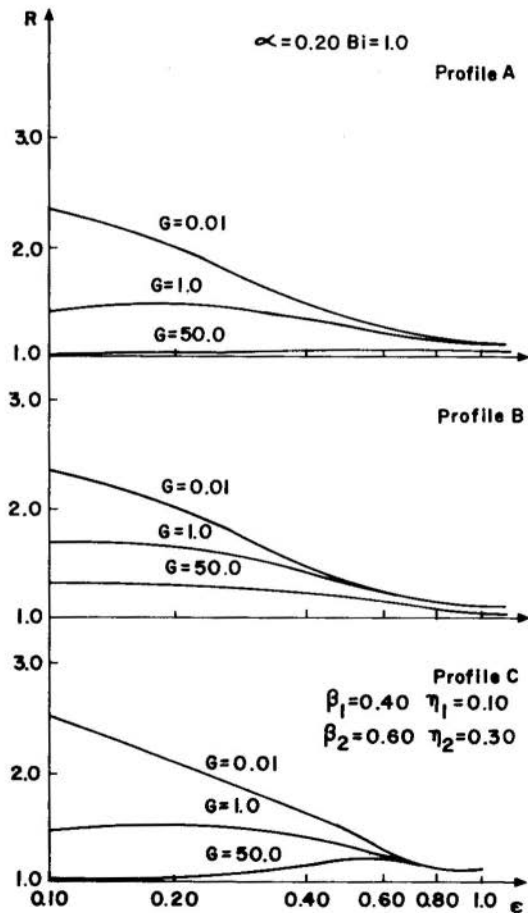


Fig. 7. Thermal resistance for $\alpha = 0.2$, $Bi = 1.0$

hence for moderate values of G , the contact surface temperature remains approximately constant. Thus the thermal resistance remains constant with ϵ . For $\alpha = 0.2$, the region of heat generation ($0.4 \leq \beta \leq 0.5$) is close to the contact surface. Thus for $G = 50$ there is a considerable increase in resistance for ϵ in the range of 0.4 to 0.6.

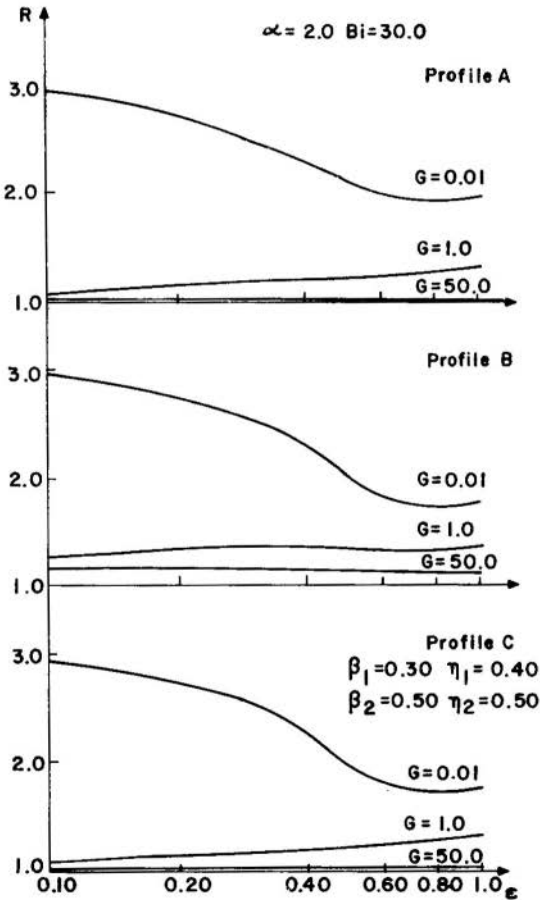


Fig. 8. Thermal resistance for $\alpha = 2.0$, $Bi = 30.0$

Thus the behaviour of the thermal resistance is directly dependant on the type of profile used, thus necessitating specific analysis for each case. However for the three cases analyzed here, the influence of some of the parameters is similar to the case of constant heat generation:

- The resistance decreases with increase of G .
- The maximum value of resistance occurs for minimum value of α , ϵ , G and Bi .
- For small values of α (of the order of 10^{-2}) and whatever value of G , the thermal resistance tends to the value $\alpha + \frac{1}{Bi}$ when ϵ tends to 1.

REFERENCES

- [1] Oliveira, H.Q. and Forslund, R.P., "The Effect of Thermal Constriction Resistance in the Design of Channel Plate Heat Exchangers", ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 96, ser. C, (1974), pp. 292-295.
- [2] Schneider, G.E., Yovanovich, M.M. and Cane, R.L.D., "Thermal Resistance of a Convectively Cooled Plate with Nonuniform Applied Flux", Journal of Spacecraft, Vol. 17, (1980), pp. 372-376.
- [3] Venkataraman, N.S., Oliveira Filho, O.B. and Cardoso H.P., "Resistência Térmica de uma Placa Plana Resfriada por Convecção com Fluxo de Calor Aplicado Não-Uniforme e Geração de Calor Constante". To be presented at 33rd Annual Meeting of Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, 1981, Salvador, Bahia, Brasil.

ANAIS

PROCEEDINGS



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981

TRABALHO
PAPER

N.º A-24

P. P. 245 - 252

PUC/RJ

SENSOR DINÂMICO DE TEMPERATURA

Otto Alfredo Rehder

Prof. Livre-Docente - Dept. de Eletricidade

EESC-USP - São Carlos - SP - Brasil

SUMÁRIO

Construiu-se aqui um sensor de temperatura para arames em movimento, através da técnica dos pares termo-elétricos. O sensor, formado por polias termo-elétricas, detecta através de contacto direto a temperatura do arame.

Uma aferição estática e dinâmica mostra que o sistema é vível, considerando um pequeno erro devido ao atrito do sistema em movimento.

SUMMARY

In this location was built a dynamic sensor for temperature for moving wires through the thermoelectric pair technic. This sensor, composed by thermoelectric wheels, sense through the direct contact the wire temperature. A static and dynamic comparison show that our system is practicable in consider a small error due the system motion attrition

1. Introdução

A medição de temperatura de peças em movimento pode as vezes ser bastante difícil, principalmente quando a peça é pequena e a velocidade é relativamente grande.

É o caso, por exemplo, de um arame ao ser trafilado ou de uma tira de metal durante a laminação.

Quando a peça dinâmica é de metal, e ao longo dela se tem um gradiente térmico, a medição de temperatura nem sempre pode ser feita pelo processo de irradiação infravermelha.

Deve-se então recorrer ao contacto direto que, para peças estáticas, pode ser feito através de um par termo-elétrico.

Com o movimento da peça o problema se complica, dando assim a presente construção do sensor dinâmico de temperatura.

2. Limitações construtivas

Considerando as dimensões mínimas da peça em movimento que, para um arame é um milímetro de diâmetro e a velocidade máxima da ordem de 15 metros por segundo, tem-se as seguintes diretrizes de projeto:

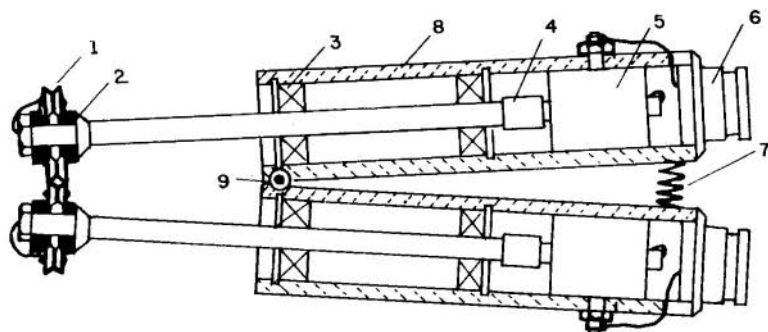
- a) A massa do sensor deve ser suficientemente pequena para não retirar calor apreciável da peça;
- b) A formação geométrica do sensor deve ser rotativa, para permitir o contacto direto, em movimento;
- c) As dimensões geométricas do sensor devem ser suficientemente pequenas para conservar a inércia de rotação a mínima possível, para evitar o escorregamento entre o sensor e a peça.

A temperatura limite foi fixada em 300° C, sendo assim possível a utilização dos materiais específicos de pares termo-elétricos de NiCr e Ni.

3. Construção do Sensor

Adotou-se como princípio construtivo o funcionamento de um alicate, onde cada mordente é formado por um ei-

xo tendo na sua extremidade uma polia conforme figura (1).



- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| 1 - polias termo-elétricas | 5 - transdutor rotativo |
| 2 - bucha elástica | 6 - contacto elétrico |
| 3 - mancal de rolamento | 7 - molas |
| 4 - acoplamento | 8 - carcaças |
| | 9 - articulação |

fig. 1 - Sensor dinâmico de temperatura.

Para obedecer as limitações construtivas fixou-se o diâmetro das polias termo-elétricas em 20 mm. As polias foram obtidas através da estampagem de material termo-elétrico, Ni ou NiCr, dando o aspecto geométrico de dois pratos opostos, de espessura da ordem de 0,2 mm, rebitados entre si com dois discos de teflon servindo de apoio lateral.

Estas polias são então montadas sobre os eixos através de buchas de borracha silicone, para isolar eletricamente a polia do eixo e amortecer oscilações durante a medição.

Optou-se pelo teflon e a borracha silicone, por causa da estabilidade térmica destes até 300°C.

Um fio isolado condutor, rebitado em cada polia, do

mesmo material termo-elétrico, atravessa o eixo oco até o transdutor rotativo. (2)

O transdutor rotativo, da firma "Vibrometer", compõem-se de um recipiente fechado contendo mercúrio, por onde passa um eixo montado sobre rolamentos e retentores.

Assim o sinal elétrico, captado nas polias termo-elétricas, passa pelo eixo ao mercúrio e daí ao recipiente isolado eletricamente da carcaça para os contactos estacionários.

As duas polias com os respectivos eixos e carcaças são articulados entre si, formando um alicate de pressão.

Todo este conjunto não passa da dimensão de um alicate normal e é suspenso por uma dupla articulação no seu centro de gravidade, para permitir um apoio sobre a peça a ser medida, sem interferir na movimentação do arame.

Deve-se observar que este protótipo é o resultado de inúmeras construções mal sucedidas.

4. Circuito de medição

Para medir somente a tensão termo-elétrica por efeito "Seebeck", optou-se por um sistema de detenção de tensão livre de corrente elétrica.

Consegue-se isto através de um amplificador operacional com uma impedância de entrada praticamente infinita.

Por conveniência de disponibilidade, optou-se pelo amplificador operacional da firma "Burr Brown", modelo 1506. (3)

O registro do sinal pode então ser registrado em qualquer instrumento de medida, no entanto preferiu-se aqui o registrador por feixe luminoso da firma "Hewlett Packard".

5. Aferição do sensor

Como a solda quente do par termo-elétrico é somente por contacto através de um terceiro elemento intermediário, cuja temperatura se deseja determinar, demonstrou-se aqui que, a medição estática do sistema é exata.

Para tanto montou-se um par termo-elétrico de NiCr - NiCr, cuja solda quente era formado por um terceiro elemento

de ligação resistivo de Mega-Ohm.

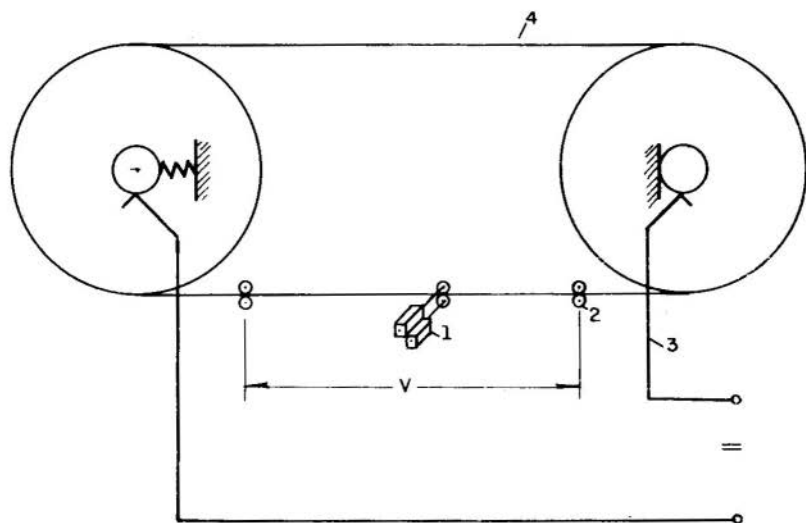
Mergulhando-se esta solda quente num banho de óleo isolante aquecido e aferindo-se a tensão termo-elétrica com auxílio de um termometro de mercúrio de aferição, obtem-se uma curva de temperatura em função da tensão igual a de um par termo-elétrico clássico.

Portanto demonstra-se assim que a solda quente do par termo-elétrico pode perfeitamente ser substituído pelo contacto, inclusive por um terceiro elemento.

No entanto tem-se que admitir que a temperatura nos dois contactos, Ni com o elemento intermediário e este com o NiCr, seja igual.

Esta aferição, no entanto, é estática e como nosso problema é dinâmico, deve-se ainda aferir o sensor termo-elétrico em movimento.

Para tanto montou-se o seguinte equipamento, vide figura 2.



- 1 - Sensor dinâmico de temperatura
- 2 - Detector de tensão elétrica
- 3 - Condutor elétrico
- 4 - Anel de arame

Fig. 2 Dispositivo de aferição dinâmica

Um anel de arame gira com velocidade constante entorno de duas polias que servem, ao mesmo tempo, de contacto elétrico para aquecer o anel de arame pela corrente elétrica contínua, aplicada nos coletores montados sobre os respectivos eixos.

Através da medição da corrente circulante e da tensão, existente num determinado trecho de anel de arame, consegue-se calcular a energia elétrica de aquecimento.

Com uma outra aferição, num calorímetro da temperatura do arame em função da resistência ohmica obtem-se elementos suficientes para o cálculo da temperatura do arame em função da energia elétrica de aquecimento.

Consegue-se assim aferir dinamicamente as polias termo-elétricas em função da velocidade do arame em movimento.

No entanto, deve-se ainda considerar o calor de condução das polias termo-elétrica frias em relação ao arame aquecido. Após várias tentativas optou-se pelo processo de aquecimento das polias com ar quente.

Uma temperatura muito alta das polias em relação ao arame provoca uma influência contraria na medição, isto é, as polias tendem a aquecer o arame. Portanto, recorreu-se a seguinte técnica de aferição:

Aquece-se com ar quente as polias termo-elétricas paradas, isto é, ao lado do arame em movimento e após coloca-se as mesmas sobre o arame em movimento.

Aparece assim, no registro, uma temperatura estática e após uma temperatura dinâmica. Se estas temperaturas foram iguais, tem-se assim a ausência de condução de calor entre polias e arame.

Esta técnica é por tentativa, mas, com um pouco de prática consegue-se bons resultados, pois, uma pequena diferença de temperatura, da ordem de 10% não influi muito na medição desejada.

Com a colocação das polias termo-elétricas sobre o arame em movimento, aparece ainda um fenômeno transitório de atrito que naturalmente deve ser rejeitado na aferição.

Aliás, este atrito sempre existe e é de difícil determinação.

Avaliando-se as diversas medições térmicas em função da velocidade do arame tem-se o gráfico da figura 3, onde se pode observar a influência de atrito médio, avaliado em acréscimo de temperatura.

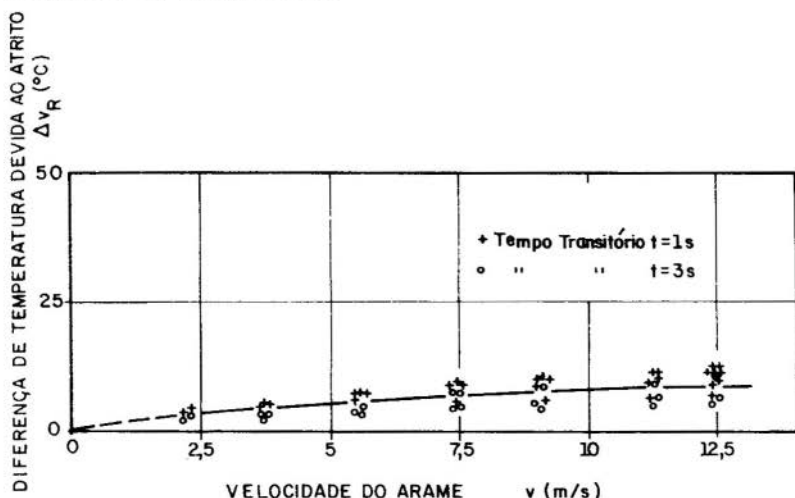


Figura 3 - Influência do atrito médio das polias termo-elétricas em função da velocidade tangencial.

Tendo como base que a temperatura do arame a 10m/s é de 200°C a influência de atrito médio não passa de 5%.

Observe-se ainda que a solda fria não influe neste sistema de medição pelo fato da medição ser praticamente instantanea.

6. Conclusão

O sensor dinâmico de temperatura por contato direto é realmente de difícil aferição, no entanto, com dedicação consegue-se demonstrar que as influências na medição podem ser contornadas.

O sensor em si é formado por um conjunto de peças de mecânica fina, como por exemplo o mancal do rolamento do eixo do transdutor rotativo que tem 2mm de furo.

Observe-se que, quanto menor o diâmetro do eixo menor

o atrito, devido a inércia das massas girantes.

Na construção das polias termoelétricas tomou-se o cuidado de utilizar o mínimo de material de Ni-NiCr, construindo estas de chapa fina estampada e reforçadas lateralmente com um ótimo isolante térmico como o teflon. Considerando a suspensão elásticas, a centragem do conjunto rebatido e a inércia do sistema com os resultados de pequena influência do atrito, chega-se à conclusão que o sensor dinâmico de temperatura corresponde perfeitamente à uma pesquisa de mecânica fina.

7. Bibliografia

- (1) Rehder, O. A.; Pesquisas sobre a influência da velocidade de trafilação na trafilação de arame patentado.
Publicação interna de TU-Berlin - 1968.
- (2) Vibro - meter - Transdutor de rotação de mercúrio
Catálogo da Vibro-meter AG
Fribourg/Suissa
- (3) Burr - Brown : Handbook of Operational Amplifier Applications.
Publicação da Burr-Brown Research Corporation - USA - 1963



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-25

P.P. 253 - 262

PUC/RJ

MODELOS AXISIMÉTRICOS NA DESCRIÇÃO DO CAMPO DE FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA
E NO CÁLCULO DE DIFUSIVIDADE TÉRMICA TURBULENTA

Joaquim de Sílus Cintra Filho

Departamento de Engenharia de Materiais - Grupo Nuclear
Universidade Federal de São Carlos

SUMÁRIO

A estrutura do campo de flutuações de temperatura é analisada, para o caso de escoamento turbulento no interior de dutos de seção circular, e descrita através de modelos axisimétricos, usando escalas de comprimento integrais, determinadas experimentalmente. Verifica-se que o ângulo de axisimetria mais apropriado para esta estrutura é maior do que aquele correspondente ao campo de flutuações de velocidade. O modelo axisimétrico obtido é aplicado para examinar a validade da teoria de difusividade turbulenta, com turbilhões não esféricos, de Tyldesley e Silver.

SUMMARY

The fluctuating temperature field structure is studied for the case of turbulent circular pipe flow. Experimentally determined integral length scales are used in modeling this structure in terms of axisymmetric forms. It is found that the appropriate angle of axisymmetry is larger than the one for modeling the large scale velocity structure. The axisymmetric model is then used to examine the validity and the prediction capability of the Tyldesley and Silver's non-spherical eddy diffusivity theory.

1. Introdução

Transferência de calor em escoamentos no interior de dutos, em regime turbulento, é de primordial interesse em muitos problemas de engenharia.

Entretanto, devido à natureza aleatória das grandezas físicas (velocidade, temperatura, pressão etc.) que descrevem o processo de transporte turbulento de calor, este só pode ser analisado em termos estatísticos. É praticamente impossível obter-se uma solução analítica explícita para descrever os campos de flutuações de velocidade, temperatura ou pressão. Todas as teorias de turbulência conhecidas são construídas baseadas nas propriedades estatísticas destas grandezas aleatórias.

Um tratamento usualmente dado ao fenômeno de turbulência baseia-se no conceito de difusividade turbulenta. Os modelos derivados deste conceito, embora aparentemente muito simplificadores, são extremamente úteis em muitas aplicações práticas. Na maioria destes modelos, [1], as difusividades turbulentas são determinadas a partir da consideração de turbilhões esféricos, que requerem, para a sua especificação, o conhecimento de apenas uma escala de comprimento. O modelo de difusividade turbulenta proposto, inicialmente, por Tyldesley e Silver, [2], e desenvolvido posteriormente, com mais detalhes, por Tyldesley, [3], utiliza a consideração de turbilhões com outras formas que não a esférica. Portanto, este modelo requer, pelo menos, uma representação com 2 parâmetros desses turbilhões.

Assim sendo os objetivos principais deste trabalho são a obtenção de uma descrição da estrutura do campo de flutuações de temperatura, através de formas axisimétricas, usando escalas de comprimento integrais determinadas experimentalmente, [4], e a utilização desta representação bi-paramétrica, em uma análise da teoria de difusividade turbulenta, com turbilhões não esféricos, de Tyldesley e Silver.

2. Modelos axisimétricos para representação de correlações de flutuações de temperatura

A representação de correlações de flutuações de velocidade em dois pontos, através de modelos axisimétricos, foi examinada por Goldstein e Rosenbaum, [5], Weber, [6], e Cintra e Jones, [7]. Para o caso de flutuações de uma grandeza escalar, como é a temperatura, não existe uma teoria específica para calcular funções de correlação. Foi decidido, então, neste trabalho, aplicar às flutuações de temperatura, o mesmo forma

lismo axisimétrico empregado para o caso de flutuações de velocidade. Os sistemas de coordenadas utilizados são os indicados na Fig. 1.

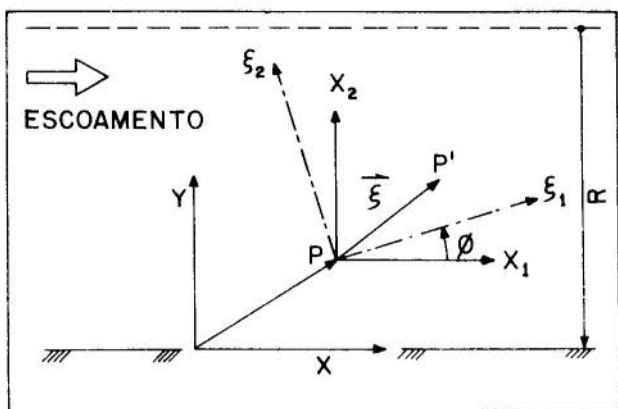


Fig. 1. Sistema de coordenadas de posição: (x, y)

Sistemas de coordenadas de separação: (x_1, x_2) e (ξ_1, ξ_2)

φ = ângulo de axisimetria ξ_1 = eixo de axisimetria

Dois possíveis representações axisimétricas são, então, analisadas, a saber:

Modelo I

$$R_{tt}(\xi_1, \xi_2) = \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{m_2}\right)^2} \left(\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right) \right] \cdot \exp \left[- \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{m_2}\right)^2} \right] \quad (1)$$

Modelo II

$$R_{tt}(\xi_1, \xi_2) = \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{m_2}\right)^2} \left(\frac{\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right) \right] \cdot \exp \left[- \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{m_2}\right)^2} \right] \quad (2)$$

onde

$R_{tt}(\xi_1, \xi_2)$ = função de correlação entre flutuações de temperatura em 2 pontos de escoamento (P e P'), separados por um vetor

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$$

ξ_1, ξ_2 = componentes de vetor separação $\vec{\xi}$, segundo os eixos ξ_1 e ξ_2 do sistema de coordenadas de separação axisimétrico.

m_1, m_2 = parâmetros livres

Estes dois modelos permitem que a função de correlação assumam valores negativos, dependendo da direção e da magnitude do vetor de separação. Se os turbilhões (=regiões de alta correlação) de temperatura são mais ou menos alinhados com a direção do escoamento, isto significa que correlações negativas podem ocorrer segundo uma direção paralela \bar{a} do escoamento no modelo I, e segundo uma direção normal \bar{a} do escoamento no modelo II. Valores negativos, mas muito pequenos em módulo, para a função de correlação de flutuações de temperatura em 2 pontos, separados em uma direção normal \bar{a} do escoamento, foram detectados experimentalmente e citados por alguns pesquisadores, [8].

De modo a utilizar as escalas de comprimento, determinadas experimentalmente, [4], para calcular os parâmetros m_1 e m_2 , (1) e (2) são integradas ao longo dos eixos x_1 e x_2 , do sistema de coordenadas de separação. Resultam, então, as relações:

Modelo I

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{L_{tt}^{(1)}}{L_{tt}^{(2)}}\right)^2 \cos^2\phi - \left(\frac{A_\phi}{B_\phi}\right)^2 \sin^2\phi}{\left(\frac{A_\phi}{B_\phi}\right)^2 \cos^2\phi - \left(\frac{L_{tt}^{(1)}}{L_{tt}^{(2)}}\right)^2 \sin^2\phi} \quad (3)$$

Modelo II

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{L_{tt}^{(1)}}{L_{tt}^{(2)}}\right)^2 \cos^2\phi - \left(\frac{B_\phi}{A_\phi}\right)^2 \sin^2\phi}{\left(\frac{B_\phi}{A_\phi}\right)^2 \cos^2\phi - \left(\frac{L_{tt}^{(1)}}{L_{tt}^{(2)}}\right)^2 \sin^2\phi} \quad (4)$$

com

$$A_{\phi} = 1 - \frac{\cos^2 \phi}{2} \left[1 - \exp \left(- \frac{2}{\cos^2 \phi} \right) \right] \quad (5)$$

$$B_{\phi} = 1 - \frac{\sin^2 \phi}{2} \left[1 - \exp \left(- \frac{2}{\sin^2 \phi} \right) \right] \quad (6)$$

e onde $L_{tt}^{(1)}$ = escala de comprimento, para flutuações de temperatura, longitudinal, isto é, segundo a direção x_1 ;
e $L_{tt}^{(2)}$ = escala de comprimento, para flutuações de temperatura, transversal, isto é, segundo a direção x_2 .

Da observação da forma de (3) e (4) conclue-se que não é qualquer valor do ângulo de axisimetria ϕ que pode ser usado com um determinado par de valores para as escalas de comprimento $L_{tt}^{(1)}$ e $L_{tt}^{(2)}$. Para ilustrar este ponto a Fig. 2 mostra, para $L_{tt}^{(1)}/L_{tt}^{(2)}$ igual a 1,61, a dependência angular de (3) e (4).

Uma avaliação da ordem de grandeza do ângulo de axisimetria, a partir de valores da função de correlação, medidos experimentalmente, [4], é, então, obtida, supondo válidas, para os perfis de isocorrelação de flutuações de temperatura (isto é: $R_{tt}(x_1, x_2) = \text{constante}$), as igualdades decorrentes da hipótese de Taylor, apresentadas por Sabot e Comte-Bellot, [9], e uma representação por elipses.

A Fig. 3 ilustra o resultado deste procedimento, para y/R igual a 0,5, e mostra que 25° é um valor do ângulo de axisimetria que pode ser usado para representar a função de correlação $R_{tt}(x_1, x_2)$ neste ponto.

Com este valor verifica-se, pela Fig. 2, que o modelo I é inaceitável, neste caso. Ao contrário, o modelo II, além de ser consistente com a constatação experimental, [8], de correlações negativas, admite, também, o valor 25° como ângulo de axisimetria. Os perfis de isocorrelação para flutuação de temperatura, calculados, então, com (4), (5) e (6), e tomando ϕ igual a 25° , são mostrados na Fig. 4, juntamente com aqueles apresentados em [7], para o caso de flutuações de velocidade-componente longitudinal, e que foram obtidos com um ângulo de axisimetria de 10° .

3. Utilização de Representação Axisimétrica na Avaliação de Difusividade Térmica Turbulenta.

Seguindo a notação usada por Tyldesley, [3], tem-se, para a difusividade térmica turbulenta, correspondente aos grandes turbilhões de temperatura, a relação:

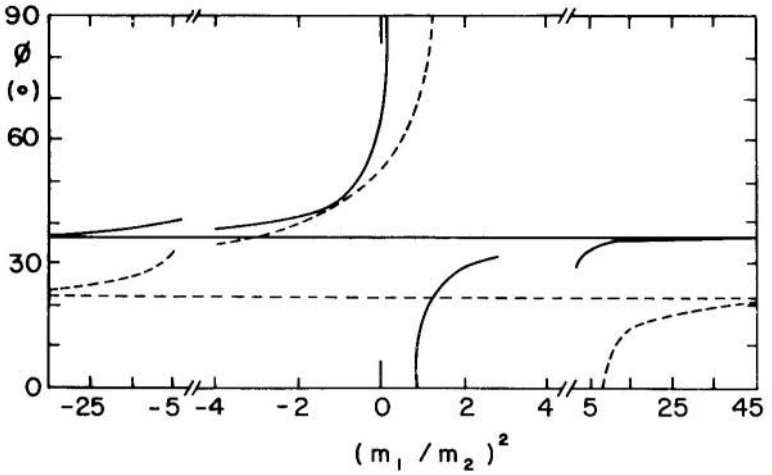


Fig. 2. Dependência angular da relação de parâmetros, nos modelos I e II, com $L_{tt}^{(1)}/L_{tt}^{(2)} = 1,61$

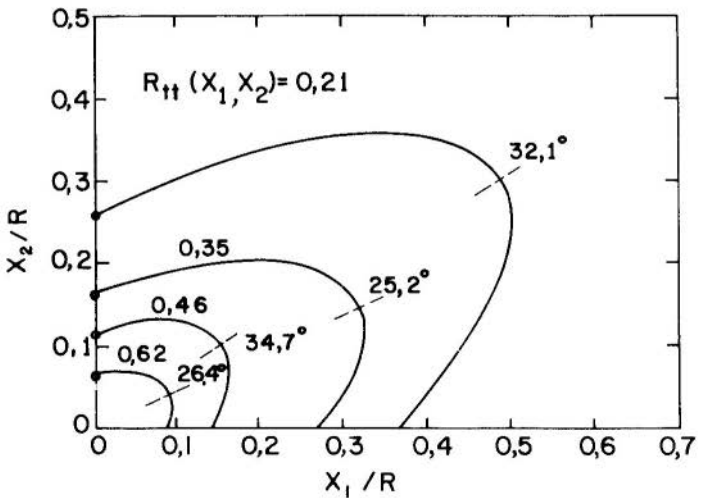


Fig. 3. Representação por elipses de perfis de isocorrelação para flutuações de temperatura - $R_{tt}(x_1, x_2) = \text{const.}$
 \odot = valores medidos experimentalmente, [4], $y/R = 0,5$

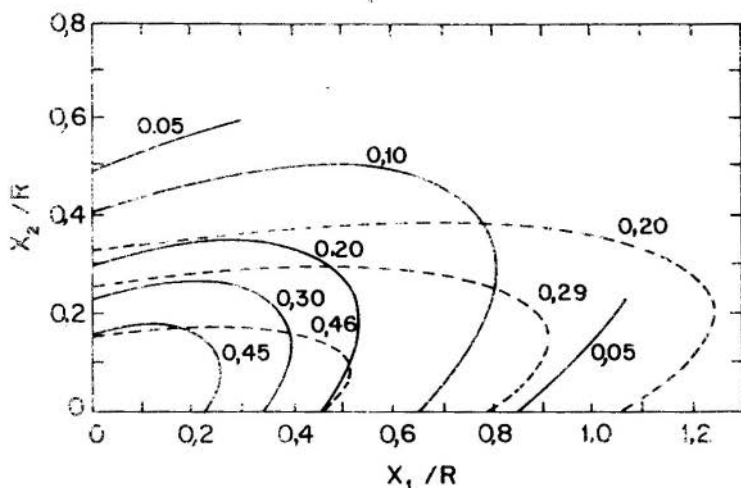


Fig. 4. Perfis de isocorrelação, para flutuações de temperatura, calculados com o modelo II

----- idem, para flutuações de velocidade (componente longitudinal) apresentados em [7].

$$\epsilon_H = \alpha \left[\frac{2\psi N_R^2 + 81}{2187} \left(\frac{\text{Pr} \psi^+ N_R^{+2}}{C + \frac{\psi^+}{\psi_y^+}} \right) \right] \quad (7)$$

com

$$C = \frac{3\text{Pr}^2 N_R^2 + 27(1 + 3\text{Pr})}{\text{Pr}(1 + 3\text{Pr})(2\psi N_R^2 + 81)} \quad (8)$$

e onde

ϵ_H = difusividade térmica turbulenta

α = difusividade térmica molecular

N_R^+ = número de Reynolds dos grandes turbilhões

N_R = número de Reynolds inicial

Pr = número de Prandtl molecular

ψ = fator de distorção inicial

ψ^+ = fator de distorção para interações de troca de calor entre grandes turbilhões

ψ_y^+ = fator de distorção para interações de troca de quantidade de movimento, na direção y (normal \tilde{a} do escoamento), entre grandes turbilhões

Para verificar o efeito dos fatores de distorção, no comportamento da difusividade térmica turbulenta, ao longo do raio do tubo, pode-se normalizar (7) com relação a y/R igual a 0,5. Resulta, então:

$$\frac{\epsilon_H}{\epsilon_H(y/R = 0,5)} = \frac{\psi^+}{\psi^+(y/R = 0,5)} \cdot \frac{[C + (\psi^+/\psi_y^+)] (y/R = 0,5)}{C + (\psi^+/\psi_y^+)} \quad (9)$$

Para $Pr > 1$ Tyldesley, [3], demonstrou que ψN_R^2 afeta muito pouco o valor da difusividade. Pode-se, portanto, para a maioria dos fluidos (exceção: metais líquidos) tomar C como sendo uma constante que não varia com a posição considerada.

A determinação dos fatores de distorção ψ^+ e ψ_y^+ é, então, efetuada, aproximando os "grandes" turbilhões por esferoides de revolução prolatos, e utilizando relações a/b , [10], onde a é o diâmetro maior do turbilhão, e b , o diâmetro menor.

As difusividades calculadas, então, com (8) e (9), são apresentadas na Fig. 5. Nesta figura verifica-se, para $y/R \leq 0,5$, que o modelo de Tyldesley e Silver apresenta melhor concordância, com os resultados experimentais de Sage, [11], do que o modelo de turbilhões "esféricos", proposto por Kudva, [1]. Já na região central do escoamento, contrariamente ao de Kudva, o modelo de Tyldesley e Silver prevê uma difusividade térmica aproximadamente constante, resultado este, entretanto, que coincide plenamente com o comportamento previsto pelo modelo de Eckelman-Hanratty, [12], e pela simulação numérica de Grötzbach, [13].

4. Conclusões

As principais conclusões que são tiradas dos modelos analisados para descrever, tanto o campo de correlações de flutuações de temperatura, como a dependência radial da difusividade térmica turbulenta, são:

- correlações de flutuações de temperatura, entre 2 pontos separados segundo uma direção transversal \tilde{a} do escoamento, podem ser usadas para estimar forma e dimensões das regiões de isocorrelação em um escoamento turbulento no interior de um tubo.
- o melhor valor para o ângulo de axisimetria, que represente, através de um modelo axisimétrico de 2 parâmetros, o campo de correlações de

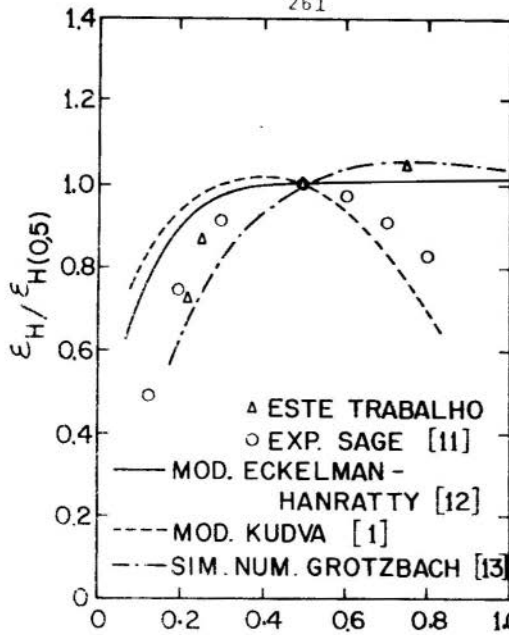


Fig. 5. Variação radial da difusividade térmica turbulenta

flutuações de temperatura, é maior do que aquele mais adequado para representar correlações de flutuações de velocidade-componente longitudinal (25^0 no primeiro caso, e 10^0 neste último).

- c) no modelo de difusividade térmicas turbulentas, desenvolvido por Tyldesley e Silver, [2], a partir de turbilhões "não-esféricos", os fatores de distorção respondem, praticamente, por toda a variação da difusividade, ao longo da direção radial.

Deve-se ressaltar, finalmente, que nos modelos analisados está implícita a consideração de igualdade entre a escala de comprimento segundo o eixo x_3 , isto é, a direção normal ao plano formado pelos eixos x_1 e x_2 , e a escala de comprimento segundo o eixo x_2 . Esta consideração ($l_{tt}^{(3)} = l_{tt}^{(2)}$), entretanto, não tem, até o presente, uma confirmação experimental.

5. Agradecimentos

O autor é grato ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN), e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), que tornaram possível este trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Kudva, A.K., "Turbulence scales and eddy diffusivities", 10th National Heat Transfer Conference, Philadelphia, Penn. August 11-14 (1968).
- [2] Tyldesley, J.R. and Silver, R.S., "The prediction of the transport properties of a turbulent fluid", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 11 (1968), pp. 1325-1340.
- [3] Tyldesley, J.R., "Transport phenomena in free turbulent flows", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 12 (1969), pp. 489-496.
- [4] Cintra Jr., J.S., "Experimental and modeling studies of two-point velocity and temperature fields in turbulent pipe flow", Ph. D. Thesis, Nuclear Engineering Program, University of Illinois, (1975)
- [5] Goldstein, M. and Rosenbaum, B., "Effect of anisotropic turbulence on aerodynamic noise", J. Acous. Soc., Vol. 54 (1973), pp. 630-645.
- [6] Weber, D.P., "Turbulent velocity field structure in a round jet and its relation to fluctuating pressure", Ph.D. Thesis, Nuclear Engineering Program, University of Illinois (1974).
- [7] Cintra, J.S. and Jones, B.G., "Two-point, two-component, velocity measurements in turbulent pipe flow". 4th Symposium on Turbulence in liquids, Rolla, Mo. September 22-24 (1975).
- [8] Subbotin, V.I., "Statistical study of turbulent temperature pulsations in a liquid stream", High Temperature, Vol. 2 (1964), pp. 59-64.
- [9] Sabot, J. and Comte-Bellot, G., "Courbes d'iso-correlations spatiales et d'iso-correlations spatio-temporelles relatives aux fluctuations longitudinales de vitesse en conduite lisse circulaire", C.R. Acad. Sc. Paris, Vol 275 A (1972), pp. 667-670.
- [10] Happel, J. and Brenner, H., "Low Reynolds Number Hydrodynamics", Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1965).
- [11] Sage, B.H., "Temperature and velocity distributions in uniform flows between parallel plates", Ind. Engng. Chem., Vol 44 (1952).
- [12] Eckelman, L.D. and Hanratty, T.J., "Interpretations of measured variations of the eddy conductivity", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15 (1972), pp. 2231-2239.
- [13] Grötzbach, G., "Numerical investigation of the influence of secondary flows on characteristic turbulence data", KFK 2553, (1978).



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECÂNICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N^o A-26

P. 263 - 271

PUC/RJ

MODELO MATEMÁTICO PARA O CÁLCULO
 DE ESCOAMENTO TURBULENTO INTERNO

Vicente de Paulo Nicolau, M.Sc.

Hyppólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.

Departamento de Engenharia Mecânica
 Universidade Federal de Santa Catarina
 Florianópolis - SC - Brasil

SUMÁRIO

As equações de Navier-Stokes e conservação da energia cinética turbulenta são aplicadas ao escoamento turbulento incompressível, completamente desenvolvido no interior de tubo e resolvidas numericamente por um método de diferenças finitas. Dentre os resultados obtidos, as distribuições de velocidade e de tensão turbulenta apresentam um comportamento satisfatório, para os diversos números de Reynolds. A distribuição de energia cinética turbulenta apresenta algumas discrepâncias quando comparada com os valores experimentais.

SUMMARY

The Navier-Stokes and the turbulent kinetic energy equations for the incompressible, turbulent and fully developed pipe flow, were solved by a finite difference procedure. The distributions of the mean velocity, turbulent shear stress and turbulent kinetic energy were obtained at different Reynolds numbers. Those numerical results were compared with experimental data and the agreement was good in whole cross section of the flow.

1. Introdução

O escoamento turbulento é um escoamento de grande complexidade pelo seu caráter randômico. Apresenta flutuações aleatórias de velocidade e de pressão, com sérias dificuldades de solução.

Reynolds sugeriu que este movimento aleatório fosse de composto em uma parcela média e uma parcela flutuante. Com isto, novas incógnitas surgem devido a não linearidade das equações. Na equação de Navier-Stokes surge o termo "tensão turbulenta de Reynolds", cujas componentes são médias de duplas correlações entre componentes das flutuações de velocidade.

A indeterminação surgida pode ser resolvida com o uso de hipóteses de fechamento ou modelos, que são relações matemáticas entre certas incógnitas, tornando o problema determinado.

Neste sentido, Boussinesq introduziu o conceito de "viscosidade turbulenta"; Prandtl propôs a hipótese do "comprimento de mistura"; Von Kármán, por sua vez, introduziu a chamada "hipótese de similaridade".

Com o advento das modernas máquinas de computação, inúmeros trabalhos surgiram; novas equações foram criadas a partir da equação de Navier-Stokes e novos modelos foram testados.

O presente trabalho consiste em mais uma contribuição à solução do escoamento turbulento. Refere-se ao escoamento turbulento incompressível, completamente desenvolvido, no interior de um tubo de paredes lisas. Duas equações o integram: equação de Navier-Stokes, na direção axial do escoamento e da conservação da energia cinética turbulenta.

Os modelos utilizados são adaptados de Beckwith e Bushnell [1] e ainda com uma escala de turbulência apresentada por Konstantinov [4].

2. Equacionamento do Problema:

As equações do problema são obtidas a partir das equações da continuidade e de Navier-Stokes na forma vetorial. Depois são expressas em coordenadas cilíndricas de componentes (r, θ, z) , com as simplificações correspondentes. As hipó-

teses de fechamento são introduzidas, com o processo subsequente de adimensionalização, resultando em:

- equação da Navier-Stokes, direção z:

$$1 - \eta = \frac{2}{\phi^2 Re} [H(R_q) \beta R_q + 1] \frac{dV}{d\eta} ; \quad (1)$$

- equação da conservação da energia cinética turbulenta:

$$VYZ \frac{dV}{d\eta} - \frac{1}{1-\eta} \frac{d}{d\eta} [(1-\eta) \alpha^* \frac{dQ}{d\eta}] + \frac{C_1 \alpha^* Q}{\xi^* 2} = 0 ; \quad (2)$$

onde η é a coordenada radial na forma adimensional:

$$\eta = \frac{y}{R} = \frac{R-r}{R} ; \quad (3)$$

sendo R o raio interno do tubo, V é a componente da velocidade de média na direção z, na forma adimensional:

$$V = \bar{V}^z / \bar{V}_{\max}^z \quad (4)$$

-VYZ é a componente da tensão turbulenta de Reynolds:

$$-VYZ = \frac{-\overline{v^y v^z}}{u^* 2} = \frac{2}{\phi^2 Re} H(R_q) \beta R_q \frac{dV}{d\eta} , \quad (5)$$

sendo u^* a velocidade de fricção. Q representa a energia cinética turbulenta:

$$Q = (\overline{v^r v^r} + \overline{v^\theta v^\theta} + \overline{v^z v^z}) / (2 u^{*2}) , \quad (6)$$

v^r , v^θ e v^z são as flutuações de velocidade nas direções r, θ e z e a barra denota valor médio. A função $H(R_q)$, Ferreira [2], é dada por:

$$H(R_q) = \frac{R_q}{R_{q0}} \quad \text{para} \quad 0 < \frac{R_q}{R_{q0}} < 0,75 \quad (7.a)$$

$$H(R_q) = \frac{R_q}{R_{q_0}} - \left(\frac{R_q}{R_{q_0}} - 0,75\right)^2 \quad \text{para } 0,75 < \frac{R_q}{R_{q_0}} < 1,25 \quad (7.b)$$

$$H(R_q) = 1 \quad \text{para } 1,25 < \frac{R_q}{R_{q_0}} < \infty \quad (7.c)$$

sendo R_{q_0} uma constante igual a 110 e R_q o número de Reynolds da turbulência local, definido por:

$$R_q = \phi \operatorname{Re} \ell^* Q^{1/2}/2 \quad (8)$$

ℓ^* é uma escala de turbulência que segundo Konstantinov [4], pode ser calculada por:

$$\ell^* = \ell/R = 0,37 - 0,24(1-\eta)^2 - 0,13(1-\eta)^4 \quad (9)$$

e a função α^* dada por:

$$\alpha^* = 2 [1 + H(K R_q) \beta K R_q]/\operatorname{Re} \quad (10)$$

Surgem ainda no processo de dimensionalização os números:

$$\operatorname{Re} = 2R \bar{V}_{\max}^2/\nu \quad (11)$$

$$\phi = u^*/\bar{V}_{\max}^2 \quad (12)$$

e as constantes $K = 0,4$ e $\beta = 0,2$, introduzidas com os modelos.

As seguintes condições de contorno são usadas:

- para $\eta=0$ (na parede): $V = VYVZ = Q = 0$;
- para $\eta=1$ (no centro): $\frac{dQ}{d\eta} = \frac{dV}{d\eta} = VYVZ = 0$.

3. Tratamento Numérico

As equações (1) e (2) são resolvidas por um processo numérico de diferenças finitas. Na resolução também são incluídas as equações (5), (7), (8), (9) e (10). Para isto, es

tas equações são discretizadas. Os pontos da discretização correspondem a uma grade de espaçamentos variáveis, que aumentam no sentido parede-centro do tubo. Deste modo, maiores informações são obtidas junto à parede, que é o local onde ocorrem os maiores gradientes das variáveis velocidade média tensão turbulenta e energia cinética turbulenta.

Como as equações estão na forma implícita, são resolvidas simultaneamente através de um processo iterativo. São introduzidos perfis iniciais aproximados, calculando-se novos valores das variáveis, que realimentarão o processo iterativo até que a convergência seja atingida.

4. Resultados Obtidos

Vários parâmetros do escoamento são calculados e constituem os resultados finais.

A distribuição universal de velocidade (v^+) seria o primeiro resultado e é representada na figura 1, para $Re = 5 \times 10^5$. A distribuição escolhida como padrão de comparação consta da distribuição na forma implícita desenvolvida por Spalding e apresentada por White [8].

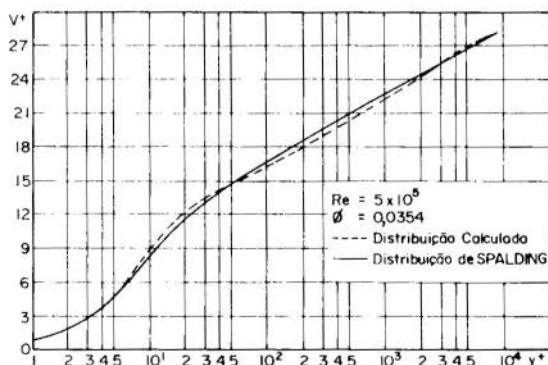


Fig. 1. Distribuição universal de velocidade.

Próximo a parede verifica-se a melhor concordância. Afastando-se desta, ocorrem pequenos desvios na subcamada de transição e depois na camada de turbulência completa. Vale lembrar que a equação de Spalding não é uma equação exata e que a distribuição de velocidade foi calculada da parede para o centro, partindo da condição de velocidade nula na parede.

A distribuição da tensão turbulenta de Reynolds está representada na figura 2, para $Re = 5 \times 10^5$. Esta é comparada com a distribuição ajustada aos valores experimentais obtidos por Laufer [5]. Antes de tudo, sabe-se que a soma da tensão viscosa com a tensão turbulenta decresce linearmente desde τ_0 na parede até um valor nulo no centro do tubo.

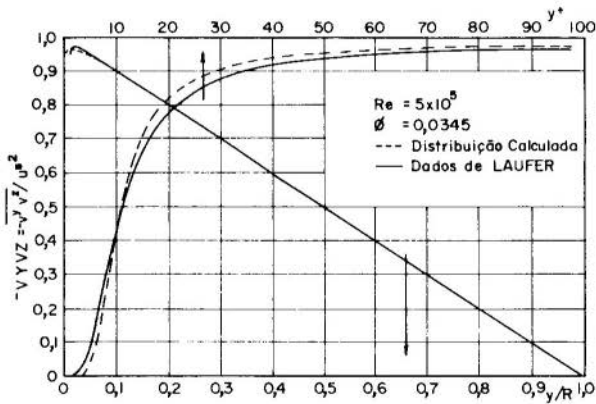


Fig. 2. Distribuição de tensão turbulenta.

A tensão turbulenta calculada possui bom comportamento para a região afastada da parede, com alguns desvios para pontos junto da parede. Nota-se que em grande parte do raio do tubo a tensão viscosa é desprezível, em comparação com a tensão turbulenta. A situação inversa ocorre na subcamada viscosa, onde os efeitos viscosos são predominantes. Nesta subcamada a tensão turbulenta decresce até o valor nulo junto à parede.

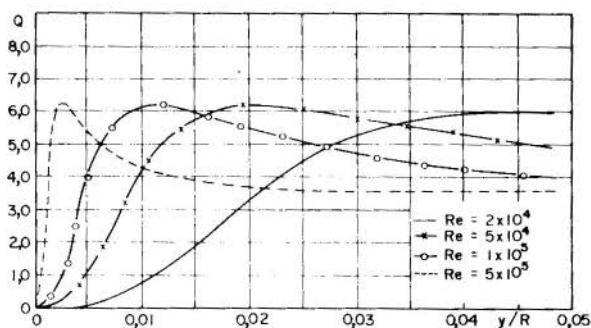


Fig. 3. Distribuição de energia cinética turbulenta para vários números de Reynolds.

Por sua vez, a distribuição de energia cinética turbulenta é apresentada na figura 3 para vários números de Reynolds e na figura 4 para $Re = 5 \times 10^5$, quando é comparada com os valores experimentais obtidos por Laufer [5].

Na figura 3 observa-se que com o aumento do número de Reynolds, o ponto de máxima energia cinética turbulenta aproxima-se da parede. Neste caso a subcamada viscosa tem a sua espessura reduzida, levando consigo a região de transição e a região de turbulência completa se expande.

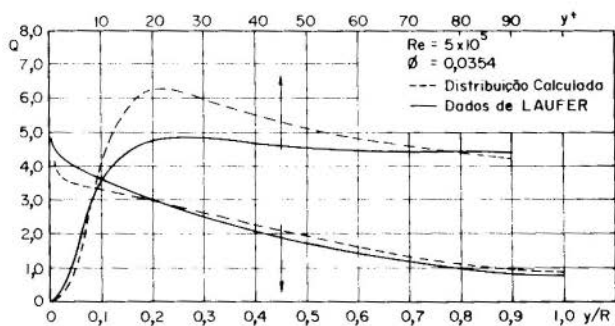


Fig. 4. Distribuição de energia cinética turbulenta.

Na figura 4 observa-se o comportamento da distribuição calculada em face dos valores experimentais. Verifica-se que para a região da parede não existe uma concordância perfeita com os valores experimentais. Vários testes foram realizados variando-se inclusive o valor das constantes a fim de melhorar este comportamento. Este procedimento alterava sensivelmente a distribuição da velocidade média. O melhor valor da constante C_1 ocorreu em torno de 4,4, usado posteriormente, sendo as demais constantes mantidas com os seus valores iniciais.

5. Conclusões

Os resultados encontrados quando comparados com os valores experimentais de Laufer [5], são tidos como bons; Nicolau [6].

Com boa precisão foram determinados os perfis de velocidade e de tensão turbulenta. Para a energia cinética turbulenta ocorrem desvios nas regiões próximas à parede. Esta distribuição não muito perfeita afeta os termos de dissipação e de difusão da equação da energia cinética turbulenta.

Acredita-se que uma melhoria do comportamento do modelo seja possível, principalmente com um estudo mais detalhado sobre o valor das constantes. Também novas funções podem ser introduzidas, como foi o caso da escala de turbulência apresentada por Konstantinov [4].

REFERÊNCIAS

- [1] Beckwith, I.E.; Bushnell, D.M., Calculation of Mean and Fluctuating Properties of the Incompressible Turbulent Boundary Layer. AFORS - IFP - Stanford Conference, 1968.
- [2] Ferreira, W.C.S., Modelo Matemático para a Solução da Camada Limite Turbulenta sobre Superfícies Curvas. Dissertação de Mestrado pela Universidade Federal de Santa Catarina, dez/78.
- [3] Hinze, J.O., Turbulence. 2. ed. McGraw-Hill, 1975.

- [4] Konstantinov, S.V., Calculation of the Main Characteristics of a Turbulent Stream of Incompressible Fluid in a Pipe. Fluid Dynamics. New York and London, 12(5), sep/oct 1977.
- [5] Laufer, J., The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow. N.A.C.A., report 1174, 1954.
- [6] Nicolau, V.P., Modelo Matemático para o Cálculo de Escoamento Turbulento Interno. Dissertação de Mestrado pela Universidade Federal de Santa Catarina, jul/80.
- [7] Schlichting, H., Boundary Layer Theory. 6. ed. McGraw-Hill, 1968,
- [8] White, F.M., Viscous Fluid Flow. McGraw-Hill, 1974.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981

TRABALHO
PAPER

N.º A-27

P.P. 273 - 285

PUC/RJ

ADVANCES IN TRIPLE HOT-WIRE TECHNIQUE
FOR MEASUREMENTS OF TURBULENCE STRUCTURE

Maurício N. Frota

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica, R.J.
Rio de Janeiro, R.J., 20000, Brasil

Robert J. Moffat

Mechanical Engineering Department
Stanford University
Stanford, California 94305, USA

Sumário

Um sistema para medição dos componentes da velocidade instantânea, utilizando anemometria de múltiplos fios quentes, foi desenvolvido. Estruturas de turbulência, mesmo nos casos de altas flutuações (30% da média), podem ser medidas no tempo real, evitando-se a ambigüidade resultante do "time-averaging approach". Os componentes da velocidade média e a tensão cizalhante turbulenta, $u'v'$, podem ser obtidas com uma precisão de $\pm 1.4\%$ e $\pm 3\%$, respectivamente, desde que o vetor velocidade instantânea esteja contido num cone de interferência de $\pm 20^\circ$. Esta alta precisão obtida deve-se ao desenvolvimento de uma nova técnica que compensa as pequenas, porém críticas, diferenças de resposta dos múltiplos anemômetros.

Abstract

A triple hot-wire system has been developed which measures the instantaneous values of the velocity components. The desired turbulence parameter can be calculated without introducing the time-averaging ambiguities, even for high turbulence levels. It has recently been demonstrated that either the mean velocity or the turbulent shear stress, $u'v'$, can be measured within 1.4% and 3%, so long as the velocity vector lies within 20° of the probe axis. This high overall system accuracy was obtained by means of an adjustment technique developed which uses the overheat controls of each channel to compensate for small, but critical, channel-to-channel differences in response.

1. Introduction

Documentation of the turbulence in three-dimensional flow fields of high turbulence intensity is difficult and time-consuming using single and double hot wires based on conventional time-averaging techniques.

The usual technique requires alignment of the probe with the flow direction. Mean velocities and components of the Reynolds stress tensor are then deduced from the solution of a set of simultaneous equations based upon measurements of the time-averaged outputs (mean and mean square of the fluctuating signals), corresponding to each of several consecutive positions of the wire (or from simultaneous reading of two or more wires).

Ambiguities arise, however, in this approach when the flow direction is unknown and/or the turbulence is large. These ambiguities result from the fact that the hot wire responds to all three components of the velocity relative to the wire. Jorgensen's [1] effective velocity decomposition can be used to illustrate the nature of this problem.

$$U_{\text{eff}}^2 = X^2 + k_1^2 Y^2 + k_2^2 Z^2 \quad (1)$$

In Eq. (1), X , Y , and Z are the instantaneous flow velocity components in the wire coordinate system x' , y' , z' as defined in Fig. 1, where k_1 and k_2 are the directional sensitivity coefficients of the wires. The slant angle ϕ and the roll angle α are defined in Fig. 1.

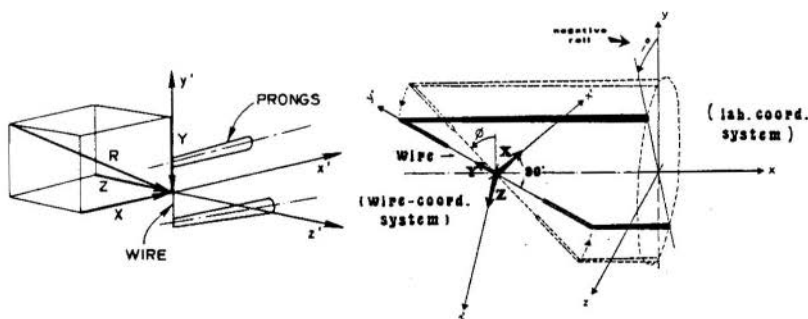


Fig. 1. Wire (x', y', z') and laboratory (x, y, z) coordinate systems.

Equation (1) can be written in terms of the velocity components U , V , and W , in the laboratory coordinate system (x, y, z), as follows:

$$U_{\text{eff}}^2 = A(U^2) + B(V^2) + C(W^2) + D(UV) + E(VW) + F(UW) \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 \phi + k_1^2 \sin^2 \phi \\ B &= (\sin^2 \phi + k_1^2 \cos^2 \phi) \cos^2 \alpha + k_2^2 \sin^2 \alpha \\ C &= (\sin^2 \phi + k_1^2 \cos^2 \phi) \sin^2 \alpha + k_2^2 \cos^2 \alpha \\ D &= (1 - k_1^2) \sin 2\phi \cos \alpha \\ E &= -(\sin^2 \phi + k_1^2 \cos^2 \phi - k_2^2) \sin 2\alpha \\ F &= -(1 - k_1^2) \sin 2\phi \sin \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

The instantaneous velocity components in Eq. (2) are often written as the sum of a mean and a fluctuating part (e.g., $U = \bar{U} + u'$, etc.). With these descriptions used, a very complicated equation results. If the flow has a strongly preferred direction and also low fluctuations (i.e., \bar{V} , \bar{W} , u' , v' , and w' at least one order of magnitude smaller than \bar{U}), Eq. (2) can be brought to a theoretically solvable form by a Taylor's series expansion:

$$\begin{aligned} \overline{U_{\text{eff}}^2} &= \frac{1}{2\sqrt{A}} \overline{U} \left[(2A\overline{U^2} + B\overline{V^2} + C\overline{W^2}) + (D\overline{UV} + E\overline{VW} + F\overline{UW}) \right. \\ &+ \left. (A\overline{u'^2} + B\overline{v'^2} + C\overline{w'^2}) + (D\overline{u'v'} + E\overline{v'w'} + F\overline{u'w'}) \right] + 0(3) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{u_{\text{eff}}'^2} &= \frac{1}{4A} \left[\left(4A^2 + D^2 \frac{\overline{V^2}}{\overline{U^2}} + F^2 \frac{\overline{W^2}}{\overline{U^2}} + 4AD \frac{\overline{V}}{\overline{U}} + 4AF \frac{\overline{W}}{\overline{U}} + 2DF \frac{\overline{VW}}{\overline{U^2}} \right) \overline{u'^2} \right. \\ &+ \left(D^2 + 4B^2 \frac{\overline{V^2}}{\overline{U^2}} + E^2 \frac{\overline{W^2}}{\overline{U^2}} + 4BD \frac{\overline{V}}{\overline{U}} + 2DE \frac{\overline{W}}{\overline{U}} + 4BE \frac{\overline{VW}}{\overline{U^2}} \right) \overline{v'^2} \\ &+ \left(F^2 + E^2 \frac{\overline{V^2}}{\overline{U^2}} + 4C^2 \frac{\overline{W^2}}{\overline{U^2}} + 2EF \frac{\overline{V}}{\overline{U}} + 4CF \frac{\overline{W}}{\overline{U}} + 4CE \frac{\overline{VW}}{\overline{U^2}} \right) \overline{w'^2} \\ &+ \left(4AD + 4BD \frac{\overline{V^2}}{\overline{U^2}} + 2EF \frac{\overline{W^2}}{\overline{U^2}} + (8AB + 2D^2) \frac{\overline{V}}{\overline{U}} + (4AE + 2DF) \frac{\overline{W}}{\overline{U}} + (2DE + 4BF) \frac{\overline{VW}}{\overline{U^2}} \right) \overline{u'v'} \\ &+ \left(4AF + 2DE \frac{\overline{V^2}}{\overline{U^2}} + 4CF \frac{\overline{W^2}}{\overline{U^2}} + (4AE + 2DF) \frac{\overline{V}}{\overline{U}} + (8AC + 2F^2) \frac{\overline{W}}{\overline{U}} + (2EF + 4CD) \frac{\overline{VW}}{\overline{U^2}} \right) \overline{u'w'} \\ &+ \left. \left(2DF + 4BE \frac{\overline{V^2}}{\overline{U^2}} + 4CE \frac{\overline{W^2}}{\overline{U^2}} + (2DE + 4BF) \frac{\overline{V}}{\overline{U}} + (4CD + 2EF) \frac{\overline{W}}{\overline{U}} + (8BC + 2E^2) \frac{\overline{VW}}{\overline{U^2}} \right) \overline{v'w'} \right] \\ &+ 0(3) \end{aligned} \quad (5)$$

The resulting equations are quite still complicated. However, in two-dimensional flows the probe can be aligned with the known flow direction, $\bar{V} = \bar{W} = 0$ and $\overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$. Under these assumptions, Eq. (5) reduces to the simplified rotatable slant-wire equations:

$$\bar{U}_{\text{eff}} = \sqrt{A} \bar{U} + O(2) \quad (6)$$

$$\overline{u'^2}_{\text{eff}} = A \overline{u'^2} + \frac{D}{4A} \overline{v'^2} + \frac{F}{4A} \overline{w'^2} + D \overline{u'v'} + O(3) \quad (7)$$

One measures \bar{U}_{eff} and $\overline{u'^2}_{\text{eff}}$ in each of four different positions, thus obtaining eight equations to solve for these eight unknowns ($A, D, F, U, \overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$, and $\overline{u'v'}$).

The time-averaging approach can be avoided, however, if three wires are simultaneously placed in the flow; three analog electrical signals proportional to the instantaneous velocity components can then be formed in real time [2].

2. The Triple-Wire Probe

Let us assume a single probe having three independent, mutually orthogonal wires as shown in Figure 2 such that, in wire coordinate, the velocity component X for one wire is the Y component and Z velocity component for the other two wires:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}1}^2 &= K_{11}^2 X^2 + Y^2 + K_{21}^2 Z^2 \\ U_{\text{eff}2}^2 &= K_{22}^2 X^2 + K_{12}^2 Y^2 + Z^2 \\ U_{\text{eff}3}^2 &= X^2 + K_{23}^2 Y^2 + K_{12}^2 Z^2 \end{aligned} \quad (8)$$

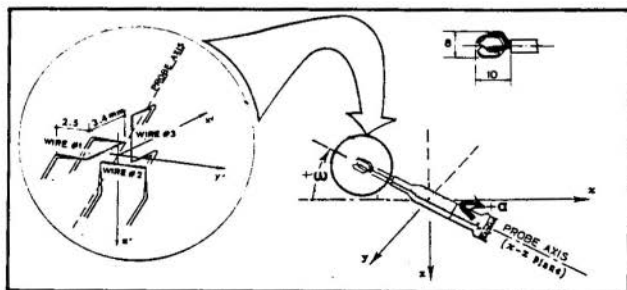


Fig. 2. The orthogonal triple hot-wire probe. Wire (x', y', z') and laboratory (x, y, z) coordinate systems.

The effective velocities, U_{eff_i} , in Eq. (8) are known from the calibration of the wires, the probe geometry, and known values of the K_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) sensitivity coefficients, based upon previous experiments. Therefore, by means of a special signal-processing circuit like a fourth-order polynomial, curve-fitting linearizer, one can write the convenient relationship:

$$U_{\text{eff}_i} = A_i + B_i E_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Equation (8) can be solved for the three unknowns as follows:

$$\begin{bmatrix} X^2 \\ Y^2 \\ Z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & 1 & K_{21}^2 \\ K_{22}^2 & K_{12}^2 & 1 \\ 1 & K_{23}^2 & K_{13}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (A_1 + B_1 E_1)^2 \\ (A_2 + B_2 E_2)^2 \\ (A_3 + B_3 E_3)^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Having these instantaneous velocity components (X, Y, Z) in the wire coordinate system (x', y', z'), the instantaneous velocity components U, V, W in the laboratory coordinate system (x, y, z) can immediately be solved—it is just a matter of a transformation of coordinates.

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & 0 & -\sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega & 0 & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (10)$$

In this equation ω and α are the pitch and roll angles, as defined in Fig. 2. The roll angle α , however, is taken to be zero when wire #3 is in the x - y plane, with its longer prong at the smallest y value.

The Three-Dimensional Turbulent Flow Analyzer is a high-speed analog device designed to solve Eqs. (9) and (10). Its output is three signals, each linearly related to one of the three instantaneous velocity components in laboratory coordinates. The desired turbulence correlations are calculated by means of a Post-Processor Unit. The use of high-speed analog devices seems to be the most attractive way of handling the problem, in spite of the trend toward digital data acquisition. As Moffat, Yavuzkurt, and Crawford [2] pointed out, the computations replaced by the analog system would require a sampling rate of 150 khz to follow 10 khz variations on each wire. Steady computation would require 30 algebraic operations per data bit, or about 4.5×10^6 calculations per second, still beyond the capability of reasonably sized

computers. (Even in burst mode and buffer type computations were used, large storage would be required.)

3. Calibration of the Triple-Wire System

The triple-wire system was calibrated in a low-turbulence, free jet. The anemometer adjustments and linearizer settings were established, and the system then installed in a two-dimensional flow channel whose flow properties are well known. The shear stress in this channel can be determined from pressure drop measurements in the test section, and are known to be linearly distributed across the channel. There exists a large body of data concerning the distribution of the other turbulence quantities across the channel. These data serve as the baseline set for those quantities for which no fundamental reference exists. This channel provided the reference flow field, against which the performance of the system was judged.

An important feature of complex probes is the ability to operate in high fluctuating 3-D turbulent flows of unknown flow direction. The data in Figs. 3 and 4 provide the basis for the qualification of the triple hot-wire probe for measurements of mean quantities and turbulence components in flows of unknown flow direction. Figure 3 compares the measured U-component of mean velocity with Pitot-probe data, corrected for shear displacement and turbulence effects. The triple-wire probe was intentionally misaligned with the flow (up to 20 degrees) to demonstrate its accuracy under those conditions. The triple-wire results agree with the pitot-probe results better than 1%.

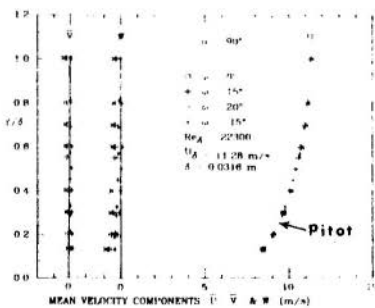


Fig. 3. Effect of pitch on mean velocities at $\alpha = 90^\circ$.

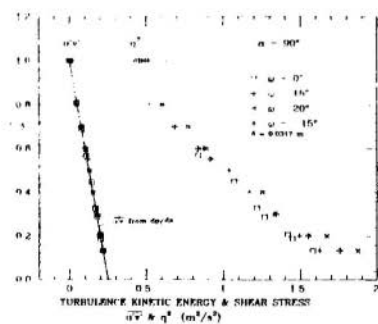


Fig. 4. Effect of pitch on measurements of $-u'v'$ and q^2 .

Also shown are the apparent values of \bar{V} and \bar{W} (which are, in fact, zero). The error, expressed as a fraction of \bar{U} , is on the order of 1% for \bar{V} and 10% for \bar{W} which corresponds to an apparent misalignment of 6° , in the x-z plane.

Figure 4 shows the turbulent shear stress, $-\overline{u'v'}$, and the turbulent kinetic energy, q^2 , again for several pitch angles. The shear stress is accurately measured, within 3%, everywhere within the data. There are no absolute references for the turbulent kinetic energy, but measurements of the $-\overline{u'v'}/q^2$ correlation agrees within better than 1% with the expected 0.14 value corresponding to the log region of a 2D-turbulent boundary layer. The effect of pitch is seen to be relatively small, on the order of $\pm 12\%$.

Based on the above data, the triple-wire system is capable of identifying the mean velocity, shear stress, and turbulence kinetic energy within acceptable levels so long as the instantaneous velocity vector remains within ± 20 degrees of the axis of the probe.

The performance shown in Figures 3 and 4 represents an improvement over the performance reported for this equipment in prior studies. The spurious \bar{V} and \bar{W} components have been reduced by about a factor of two from the values reported by Moffat, Yavuzkurt, and Crawford [2].

Several possibilities were considered in the search for the cause of the spurious velocity signals: interactions between the probe and the flow, faults in the probe geometry, inappropriate values of the coefficients k_1 and k_2 in the directional matrix, defects in the electronic processing, and secondary flows in the reference channel.

The hypothesis of probe disturbance of the flow as a possible source of spurious \bar{V} and \bar{W} signals was eliminated based upon the results of pitch displacements tests and flow visualization tests conducted in the 2-dimensional channel and in the free jet facility [3,4]. The triple-wire probe was positioned in the jet so that only the prongs were in the high velocity jet, not the probe stem. The probe output was measured as a function of pitch angle, and compared to the outputs observed in the 2-D channel, where the entire probe was in the flow. There were no significant differences. This finding was substantiated by smoke-wire flow visualization tests, which marked the streamlines approaching the probe. No significant disturbance was found.

The three wires of the triaxial probe cannot be identical, because of manufacturing and probe alignment tolerances. Due to these small differences, and differences in their respective bridge circuits, the three calibrations will almost always be different. As shown in Fig. 7, wire #2 reads (bridge output) 9% higher than wire #1 when the bridge settings were kept the same for all three channels. By properly adjusting the overheat ratio control on wire #2, its calibration can be shifted until it matches the other two. The recommended procedure is to bring two wires to congruence with the wire nearest the "average calibration". Subsequent processing and calibration steps are much easier if the three bridge outputs are matched instead of being allowed to remain different by such small amounts. Of particular importance is the fact that all three linearizers can be adjusted to the same settings.

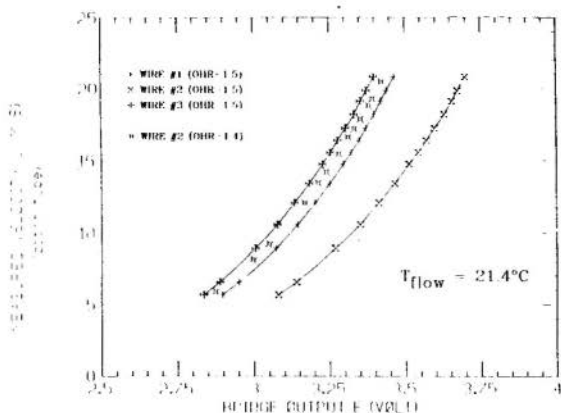


Figure 7. Adjusting to match wires.

There is another type of compensation which can be achieved using overheat control: compensation for temperature drift in the test tunnel. During the course of testing, the temperature of the stream may change, which will alter the calibration of the hot-wire system. The error due to a 2.0°F temperature change is on the order of 2.1% at an approach velocity of 11.0 m/s, for an overheat ratio of 1.7. Adjustment of the overheat ratio allows data to be taken in a gas stream at a temperature T_1 based on a calibration at T_2 , where $(T_1 - T_2)$ is as large as 10°C. The procedure is simple. The output of each bridge is set to its desired value based on a measurement of local velocity, using the "hot resistance control" so that the bridge output is the same at T_2 as

it was at T_1 at that velocity. Once the hot resistance has been so adjusted the hot wire behaves as though it had been calibrated at T_2 . Calibrations performed at T_1 and T_2 would be indistinguishable from one another when properly compensated. Experience has shown that, with carefully constructed probes, matching the calibration of a set of three wires at one point ("matching point") assures a match over the entire calibration curve. These two aspects of overheat-adjustment are shown in Figures 7 and 8.

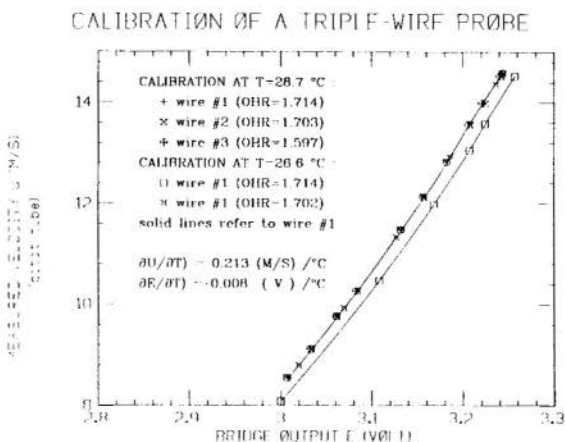


Figure 8. Adjusting to compensate for a temperature change.

Of particular importance are two comments:

- the calibration for all three wires can be described by a single line over the entire range when each wire is running at a different overheat ratio and at the same temperature (see data at $T = 28.7^\circ\text{C}$);
- the calibration of a particular wire at a temperature T_1 is congruent with the calibration of the same wire at temperature T_2 , if the hot resistance is properly adjusted (see data at $T = 26.6^\circ\text{C}$). Matching of the bridge outputs can be accomplished by small changes in the hot resistances of two bridges. (Typically, one would keep the "middle calibration" and adjust the other two, to minimize the differences in overheat ratio from wire to wire.) Assume that the calibration of wire #1 at a temperature T_1 is chosen to be the calibration to be matched by the other two wires and that the bridges' output (volts) are E_1 , E_2 , and E_3 for wires #1, #2, and #3, respectively, when the probe is

exposed to a flow of approach velocity U_1 and temperature T_1 . The hot resistance decade controls on bridges 2 and 3 are then adjusted until the outputs of these bridges' also read E_1 , rather than E_2 and E_3 . (Note that the controls adjustments are done around a "matching point" -- a point having coordinates E_1, U_1, T_1 . The choice of this matching point is quite arbitrary, although a middle calibration point is recommended). At this stage, all three bridges are properly compensated for use at temperature T_1 . If, however, the temperature drifts to a new value T_2 , the bridge output values will no longer be E_1 (volt), even though the approach velocity measured with a pitot tube might still be U_1 . Hot wire anemometers are extremely sensitive to temperature changes, while pitot-tube measurements are not significantly affected by small temperature differences. Again, by adjustment of the hot resistance controls, all three bridges can be forced to put out E_1 volts, despite the fact that the temperature has drifted to T_2 . At this stage, the channels will be ready again for data to be taken at T_2 based on a T_1 calibration. Usually one keeps the same electronic setup unless an error of 1% in \bar{U} (triple wire relative to pitot-tube measurements) is detected. Figure 9 shows 15 calibrations for 3 different wires exposed at different temperatures: all collapse in a single curve. This figure also shows that the roll angle α does not affect the calibration.

This procedure leads to a "Universal Calibration" for all the three wires, which can conveniently be used for a wide range of temperature.

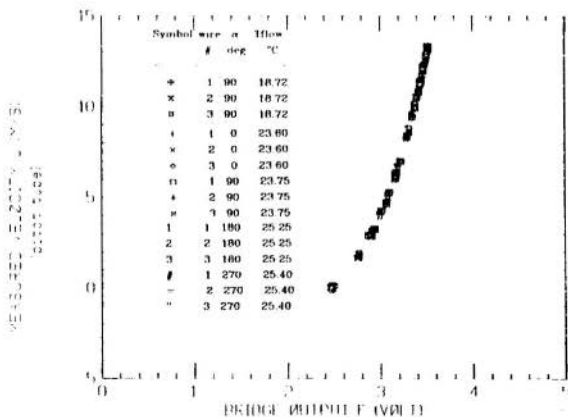


Fig. 9. Calibration performed at different temperatures.

Conclusions

The high overall system accuracy obtained on measurements of mean velocity and turbulence components with the triple-wire system is attributed, in part, to the new adjustment technique reported here. The adjustment technique, which has been qualified, also speeds up data taking and compensates for changes in temperature level ($\approx 10^\circ\text{C}$) over a range of velocities of at least 35% of the mean. The data presented here represent the best performance achieved to date using a commercial triple hot-wire probe.

The present system can measure \bar{U} within 2% so long as the instantaneous velocity vector lies within $\pm 30^\circ$ of the probe axis. Spurious \bar{V} and \bar{W} signals of 2% and 10% of \bar{U} remain for a 20° misalignment, and are attributed to the fact that the measuring volume of the DISA 55P91 probe is large compared with the velocity gradient in the test tunnel.

The accuracy of the triple wire is a function of roll angle, and pitch angle.

So far as the combined effect of roll and pitch is concerned, $\alpha = 90^\circ$ is clearly the best overall roll choice for turbulence measurements. For all the roll angles investigated, the wall-proximity effect lowers the triaxial $\overline{u'v'}$ measurements.

The remaining problems associated with the triple-wire processor, as quoted from previous experimenters [2] seem to be fully understood: the spurious signal generated in the \bar{V} and \bar{W} channels do not reflect probe blockage in the yawed positions and/or inaccuracies in the wire-directional sensitivity coefficients. In the absence of a velocity gradient, the spurious signals have been removed almost completely due to improvements in the technique devised, which reflects the simplified operating procedures minimizing scatter in the linearizers' signals, perhaps caused by small temperature drifting and/or mismatching of the three channels. The remaining spurious signals present in the shear region have been minimized and reflect the fact that each wire of the probe placed at different locations "sees" a different velocity vector which is not the true velocity at the assigned measuring point [5]. A scheme to correct for this effect is presently being developed.



Acknowledgments

The authors acknowledge the support of the Air Force Office of Scientific Research for their grant, Number AFOSR 0010, administered by Dr. Samaris on behalf of AFOSR.

The first author is grateful to the National Research Council of Brazil, CNPq, and to Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro for sponsoring his doctoral studies at Stanford.

References

1. Jørgensen, F. E., 1971, "Directional Sensitivity of Wire and Fiber Film Probes: An Experimental Study," DISA Information No. 11, May 1971, pp. 31-37.
2. Moffat, R. J., S. Yavuzkurt, and M. E. Crawford, "Real Time Measurements of Turbulence Quantities with a Triple Hot-Wire System," Proceedings of the Dynamic Flow Conference on Dynamic Measurements in Unsteady Flows, September, 1978, pp. 1013-1035.
3. Frota, M. N., and R. J. Moffat, 1979, "Instrumentation for the Measurement of Turbulence Components in a Three-Dimensional Flow Field," AFOSR Report 78-3597, Thermosciences Division, Dept. of Mechanical Engrg., Stanford University.
4. Frota, M. N., and R. J. Moffat, July 1980, "Effect of Combined Roll and Pitch Angles on the Measurements of the Mean-Velocity and Reynolds Stresses by Means of a Triaxial Hot-Wire Probe," Report IL-22, Thermosciences Division, Dept. of Mech. Engrg., Stanford University (to be published in the DISA information series by DISA Electronics).
5. Frota, M. N., and R. J. Moffat, and J. H. Ferziger, April 1981, "The Triple Hot-Wire Equations and Related Sensitivity Coefficients". Report IL-37, Thermoscience Division, Mechanical Engrg. Dept., Stanford University.

ANAIS	COBEM 81	PROCEEDINGS
	VI CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA	
	RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981	
TRABALHO PAPER	N.º A-28	P. P. 287 - 297
		PUC/RJ

A ESCOLHA DO SISTEMA DE COORDENADAS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE FENÔMENOS DE TRANSPORTE

Reinaldo M. Martins
Professor Assistente
DEM - Escola Politécnica da U.S.P.

Júlio Militzer
Professor Assistente Doutor
DEM - Escola Politécnica da U.º

SUMÁRIO

Neste trabalho são apresentados diversos tipos de sistemas de coordenadas empregados na solução, por métodos numéricos, de problemas de fenômenos de transporte. Quatro destes, por serem considerados os mais representativos, são analisados em maior profundidade. São também feitas considerações sobre as vantagens do emprego de um "sistema de coordenadas natural". Finalmente, as principais características dos métodos analisados são comparadas e alguns critérios de seleção de sistemas de coordenadas são sugeridos.

SUMMARY

This review presents several types of systems of coordinates used in the solution, by numerical methods, of transport phenomena problems. The four considered more representative are presented in detail. The advantages of the use of a "natural coordinate system" are also shown. Finally the main characteristics of the methods considered are compared and criteria for selection are suggested.

1. Introdução

A escolha de uma malha adequada é de fundamental importância na solução de problemas de fenômenos de transporte. Apesar deste fato isto nem sempre ocorre, muitas vezes por ignorância e outras por ser considerada de importância secundária adota-se a malha "mais simples" existente. Isto se justifica, parcialmente, tendo em vista a influência dos métodos analíticos, ou seja os sistemas de coordenadas usados eram geralmente do tipo cartesiano ortogonal, cilíndrico ou polar, gerando malhas que nem sempre eram as mais adequadas para o problema a ser resolvido. Com isto aumentam-se os erros e o tempo de processamento, tornando, eventualmente, inviável até a obtenção da solução.

Neste trabalho são abordados os métodos de obtenção de malhas de Amsden et al[7], Thompson et alii[6], Godounov et alii[2] e Pope[1]. A seleção destes quatro métodos foi baseada principalmente em dois critérios, ou seja, todos adotam um "sistema de coordenadas natural" e todos permitem resolver uma vasta gama de problemas de fenômenos de transporte. Ao final do trabalho são apresentadas algumas conclusões quanto aos méritos relativos dos métodos.

2. Método de Geração das Malhas

Os métodos de geração de malhas foram originados das mais diferentes maneiras, sempre procurando satisfazer problemas específicos, com características peculiares, de modo a proporcionar:

- melhor representação do escoamento no interior do fluido em escoamento, minimizando a difusão numérica.
- melhor representação do escoamento junto a fronteiras sólidas irregulares onde se observa acentuados gradientes de propriedades dinâmicas e térmicas.

2.1 - Método das deformações sucessivas da malha

Amsden et al[7] utilizando um equacionamento lagrange-euleriano do escoamento estabeleceram um método relativamente simples de geração de malha. Segundo este método cada ponto de uma malha original, escolhida de maneira adequada, vai se deslocando de forma conveniente, até que as linhas coordenadas escolhidas atinjam a forma prefixada. A forma prefixa

da poderá ser especificada em conformidade com um contorno sólido, uma linha de corrente principal e representativa do escoamento ou uma extremidade livre de um jato.

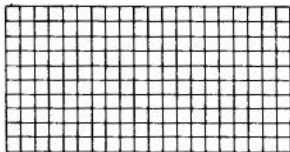
O cálculo da malha desejada é obtido através da movimentação dos vértices da malha original em uma sequência de pequenos deslocamentos ou iterações até as posições finais previamente estabelecidas. A operação será considerada completa da quando todos os pontos do domínio discreto, em análise, apresentarem deslocamentos menores que uma grandeza pré-fixada ϵ , sendo o domínio, neste caso, dito relaxado. Os vértices mais importantes são aqueles que devem atender as formas complexas do problema enquanto que os demais vértices devem acompanhar suavemente o deslocamento da geometria principal do escoamento. Há necessidade de uma análise prévia do problema para definir a escolha da melhor alternativa de deformação da malha.

Muitas vezes durante a geração da malha ocorre o cruzamento de linhas coordenadas, acarretando a degeneração do sistema, ou seja um mesmo ponto do domínio bidimensional é identificado pelo cruzamento de quatro linhas coordenadas. Essa ocorrência pode ser evitada através dos recursos abaixo:

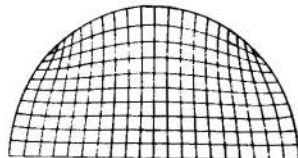
- a) faz-se a deformação da malha sempre para fora.
- b) faz-se diferentes ponderações dos deslocamentos dos vértices em cada uma das direções.

Como exemplo ilustrativo do método toma-se a região apresentada na figura 1a.

O problema de geração da malha estará completado quando os vértices da figura 1a se apresentarem dispostos de tal modo que formem o semi círculo da figura 1b.



(a)



(b)

Figura 1-(a) Malha de 20 x 10 para início da geração;

(b) Semi-círculo formado pelo processo iterativo;

Ref. [7].

No exemplo apresentado nas figura 1a e 1b a deformação da malha retangular original se processo conforme:

$$x_{\text{nov}} = x + \beta(x_0 - x) \quad (1)$$

$$y_{\text{nov}} = y + \beta(y_0 - y) \quad (2)$$

para os pontos da fronteira, onde:

$$\beta = \beta_0 |(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2|$$

x_0 e y_0 - coordenadas do centro do semi-círculo

r - raio do semi-círculo

β_0 - coeficiente que tem por finalidade restringir a magnitude dos deslocamentos de x e y , com vistas a evitar o cruzamento das linhas coordenadas.

Os pontos situados na fronteira superior e na décima primeira coluna não se deformaram, na presente geração. Os demais pontos internos foram deslocados de acordo com:

$$(x_{ij})_{\text{nov}} = \frac{1}{8} (x_{i+1j} + x_{i+1j+1} + x_{ij+1} + x_{i-1j+1} + x_{i-1j-1} + x_{i-1j-1} + x_{ij-1} + x_{i+1j-1}) \quad (3)$$

$$(y_{ij})_{\text{nov}} = \frac{1}{8} (y_{i+1j} + y_{i+1j+1} + y_{ij+1} + y_{i-1j} + y_{i-1j-1} + y_{i-1j-1} + y_{ij-1} + y_{i+1j-1}) \quad (4)$$

A malha da figura 1b foi obtida a partir da mostrada na figura 1a para $\beta_0 = 0,01$ e $\epsilon = 10^{-4}$ após 291 iterações. Para este valor de β_0 as variações em cada iteração não ultrapassam $\delta x/10$. O número de iterações se reduz para 75 quando β_0 situa-se na faixa 0,10 - 0,92, cresce rapidamente para $\beta_0 > 0,92$ e o problema de geração nunca relaxa para $\beta_0 = 1$.

Quando há o risco de cruzamento de linhas coordenadas, as ponderações dos deslocamentos adquirem a forma:

$$y_{ij} = 0,4(y_{ij+1} + y_{ij-1}) + 0,1(y_{i+1j} + y_{i-1j}) \quad (5)$$

A equação (5) pondera a dependência do deslocamento do ponto y em 80% com relação a y em 20% com relação a x .

2.2 Método da malha ajustada ao contorno irregular

Thompson et alii [6] apresentam um método de geração de malha baseado na resolução de um sistema de equações elípticas da forma

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (6)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (7)$$

onde η e ξ são coordenadas curvilíneas quaisquer. O método foi utilizado em escoamentos externos, resolvendo-se o sistema elíptico por método iterativo, com sobre-relaxação sucessiva. Uma coordenada curvilínea constante qualquer é estabelecida sobre o contorno irregular interno e outra sobre o contorno externo do problema. As demais coordenadas variam monotonicamente sobre o mesmo domínio. A concentração das linhas coordenadas pode ser ajustada através de parâmetros nas equações diferenciais parciais.

O método elimina do problema as coordenadas físicas as custas da adição das equações elípticas (6) e (7). Como se deseja fazer todos os cálculos no domínio retangular transformado toma-se:

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \tau x_{\eta\eta} = -J^2 |x_{\xi} P(\xi, \eta) + x_{\eta} Q(\xi, \eta)| \quad (8)$$

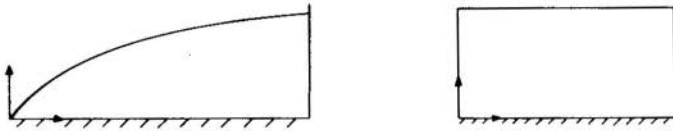
$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \tau y_{\eta\eta} = -J |y_{\xi} P(\xi, \eta) + y_{\eta} Q(\xi, \eta)| \quad (9)$$

$$\text{onde } \alpha = (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2) \quad \tau = (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)$$

$$\beta = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} \quad J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}$$

O sistema de equações (8) e (9), elíptico quase linear para funções $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ no plano transformado é consideravelmente mais complexo que o sistema de equações (6) e (7), mas, as condições de contorno são especificadas em retas e as coordenadas no plano transformado são uniformes.

Como exemplo ilustrativo do método, considera-se o escoamento ao longo de uma placa plana semi-infinita. A transformação do campo físico para o transformado está indicada - esquematicamente na figura 2. O sistema coordenado foi gerado a partir da solução do sistema de equações (8) e (9).



Campo físico

Campo transformado

Figura 2 - Placa semi-infinita - Relação entre os campos físico e transformado, Ref. [6].

O sistema de coordenadas converge para a borda de ataque e apresenta a condição de contorno superior em forma curva e a uma distância equivalente ao dobro da espessura da camada limite de Blasius. Essa forma provoca a concentração das coordenadas a medida que o número de Reynolds aumenta. A figura 3 apresenta a malha gerada com as condições do exemplo.

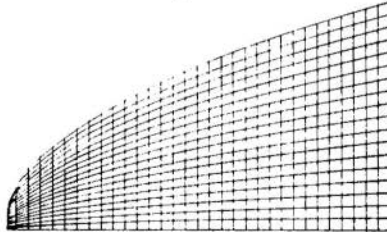


Figura 3 - Placa semi-infinita - Malha gerada.

2.3 - Método das transformações conforme ou quase-conforme.

Godunov et alii [2] apresentam três métodos de geração de malhas, sendo o primeiro similar ao apresentado no item 2.2 deste trabalho. O segundo método é baseado em aplicação de transformação conforme e quase conforme e o terceiro método

é de geração de malhas aproximadamente ortogonais.

O método que aplica transformações conforme se origina do interesse de representatar o domínio de cálculo sobre um quadrado unitário $D: \{0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1\}$ descrito pelas funções $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$. A busca das funções $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ e de parâmetro ℓ se converte num problema variacional de minimização do funcional.

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_D |\ell(x_\xi^2 + y_\xi^2) + \frac{1}{\ell}(x_\eta^2 + y_\eta^2)| d\xi d\eta \quad (10)$$

As coordenadas ξ e η identificam os pontos do campo transformado e as coordenadas x e y identificam os pontos do campo físico. As funções $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ estabelecem, na transformação conforme, uma correspondência entre os pontos da fronteira do domínio físico e os pontos situados nos lados do quadrado D .

Tomando uma transformação quase conforme, o funcional da equação (10) toma a forma:

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_D \frac{g_{22}(x_\xi^2 + y_\xi^2) - 2g_{12}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + g_{11}(x_\eta^2 + y_\eta^2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} d\xi d\eta \quad (11)$$

onde g_{11} , g_{12} e g_{22} são os parâmetros métricos funções de ξ , η e ℓ . Na transformação quase-conforme tem-se:

$$dx^2 + dy^2 = g_{11} d\xi^2 + g_{12} d\xi d\eta + g_{22} d\eta^2 \quad (12)$$

A figura 4 apresenta uma malha gerada através de uma classe de transformação quase-conforme.

O método de obtenção de malhas aproximadamente ortogonais está baseado, conforme [2], na escolha do valor de ℓ para cada ponto, durante a minimização do funcional da equação (10).

2.4 - Método de obtenção de malhas ortogonais.

Pope [1] apresenta um método de determinação das coordenadas cartesianas dos nós de uma malha ortogonal. Determina-

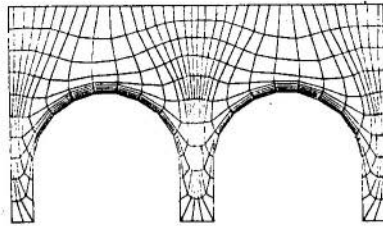


Figura 4 - Malha gerada através da minimização do funcional da equação (11) e a métrica das equações (12), Ref. [2].

na-se as intersecções das linhas coordenadas para uma dada condição de contorno especificada após a escolha das mesmas em cada direção. São resolvidas equações de Laplace do tipo:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}_1}{\partial x_1^2} + a^2 \frac{\partial^2 \bar{x}_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \bar{x}_2}{\partial x_1^2} + a^2 \frac{\partial^2 \bar{x}_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad (13)$$

onde

$$a = \frac{h_2}{h_1}$$

h_1 e h_2 - fatores de proporcionalidade

x_1 e x_2 - coordenadas curvilíneas ortogonais

\bar{x}_1 e \bar{x}_2 - coordenadas cartesianas ortogonais

As equações (13) são resolvidas, para um valor fixo de a^2 , através de esquema de cinco pontos. A equação de diferenças finitas é resolvida iterativamente linha por linha e após cada iteração são ajustadas as condições de contorno e o valor de a . A figura 5 apresenta a malha obtida com a solução das equações (13).

5. Conclusões.

O quadro 1 abaixo apresenta um resumo das principais características dos quatro métodos analisados. Não se pode destacar nenhum deles como melhor, podendo, pelo menos potencialmente, adotar qualquer um deles para um particular problema.

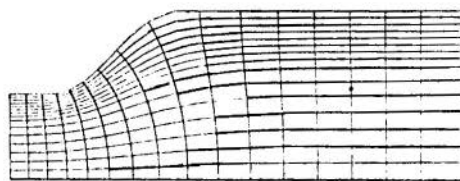


Figura 5 - Malha ortogonal, Ref. [1].

Entretanto algumas conclusões adicionais podem ser tiradas, ou sejam:

- a) Os métodos aqui analisados procuram gerar a malha através de um sistema de coordenadas natural. Este se caracteriza por ter as coordenadas de uma das direções paralelas às linhas de corrente. Dentre as vantagens de um sistema de

QUADRO 1. Principais características dos métodos de geração de malha analisados.

Métodos	Obtenção da malha	Características básicas	Exemplos de aplicação
Deformações sucessivas da malha, Ref. [7]	Pelo ajuste de uma malha regular a um contorno qualquer por deformações sucessivas.	Não ortogonal. Identificação dos pontos da malha através do sistema cartesiano ortogonal.	- Frentes de choque - escoamentos de fluidos compressíveis.
Malha ajustada ao contorno irregular, Ref. [6]	Resolução de um sistema de equações elípticas mantendo fixa uma coordenada sobre os perfis irregulares.	Não ortogonal. Correspondência entre os pontos do domínio físico e do domínio transformado de geometria simples.	- escoamento externo a fôlios - escoamento em válvulas cardíacas artificiais - condução de calor em corpos de geometria qualquer
Transformações conforme ou quase-conforme, Ref. [2]	Pela minimização de um funcional adequado.	Ortogonalidade dependente do funcional utilizado. Preservação dos ângulos, dos círculos e das elipses durante a transformação. Correspondência entre os pontos do domínio físico e do domínio transformado de geometria simples.	- escoamentos de fluidos compressíveis. - frentes de choque.
Obtenção de malhas ortogonais, Ref. [1]	Pela resolução de equações de Laplace.	Ortogonal. Identificação dos pontos da malha através de sistema cartesiano ortogonal.	- escoamento em pás de turbinas - escoamento externo a fôlios.

- coordenadas natural deve-se citar eliminação da difusão numérica ou artificial, além de se ter uma melhor representação dos gradientes de propriedades que ocorrem junto às fronteiras sólidas irregulares;
- b) O método analisado no ítem 4.1 (Ref. |7|) permite abordar os problemas tanto do ponto de vista euleriano quanto do lagrangeano.
- c) Os métodos apresentados nos itens 4.1 (Ref. |7|), 4.2 (Ref. |6|) e 4.3 (Ref. |2|) podem ser utilizados em problemas de geometria variável, p.ex.: escoamento junto a extremidade de um jato, num choque ou numa superfície livre de modo a manter uma linha coordenada sempre coincidente com a fronteira durante todo o tempo. Nestes casos nos intervalos da computação a malha é ajustada à nova geometria;
- d) O método apresentado no item 4.2 (Ref. |6|) foi utilizado pelos autores em escoamentos externos, mas, conforme Wirs et al |8|, apresenta potencial para ser adaptado a escoamentos internos. Entretanto, em escoamentos internos onde as linhas de corrente não são aproximadamente paralelas aos contornos, como por exemplo no caso da recirculação em uma cavidade de secção longitudinal quadrada, sugere-se que seja introduzido um perfil de espessura desprezível para forçar o aparecimento de linhas coordenadas paralelas às de corrente;
- e) Os métodos apresentados nas Ref. |6| e |7| não preservam a ortogonalidade das linhas coordenadas, e dependendo do funcional selecionado o mesmo ocorre com o método da Ref. |2|. O uso de um sistema de coordenadas não ortogonal introduz uma série de termos novos que tem que ser levados em conta nos cálculos, podendo, entretanto, serem desprezados naqueles casos em que sua influência seja comprovadamente pequena.
- f) O método apresentado no item 4.1 (Ref. |7|) é o que apresenta maior facilidade e simplicidade para satisfazer contornos irregulares.

Como conclusão final pode-se dizer que para a seleção de uma malha, na falta de outras informações, deve-se procu-

rar um sistema de coordenadas natural que já tenha sido usado previamente num problema semelhante geometricamente ao - que se deseja resolver.

REFERÊNCIAS

- [1] Pope, S.B. - "The Calculation of Turbulent Recirculating Flows in General Orthogonal Coordinates" - Journal of Computational Physics 26, pg. 197-217, 1978.
- [2] Godounov S.A., Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko e G. Prokopov - "Résolution Numérique de Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz" - Editions Mir, Moscou, 1979.
- [3] Hirt, C.W., A.A. Amsden e J.L. Cook - "An Arbitrary Lagrangian - Eulerian Computing Method for All Flow Speeds" - Journal of Computational Physics 14, pg. 227-253, 1974.
- [4] Batchelor G.K. - "An Introduction to Fluid Dynamics" - Cambridge University Press, 1967.
- [5] Laventiev, M. e B. Chabat - "Effets Hydrodynamiques et Modèles Mathématiques" - Editions Mir, Moscou, 1980.
- [6] Thames F.C., J.F. Thompson, C.W. Martin e R.L. Walker - "Numerical Solutions of Viscous and Potential Flow about Arbitrary Two Dimensional Bodies Using - Body Fitted Coordinate Systems" - J. of Comp. Physics 24, pg. 245-273, 1977.
- [7] Amsden A.A. e C.W. Hirt - "A Simple Scheme for Generating General Curvilinear Grids" - Journal of Computational Physics", pg. 348-359, 1973.
- [8] Wirs H.J. e J.J. Smolderen - "Numerical Methods in Fluid Dynamics" - Mc Graw Hill, 1978.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-29

P.P. 299 - 308

PUC/RJ

HYDRODYNAMIC ASPECTS OF A FLOATING
WAVEBREAKER

Miguel Hiroo Hirata

Prof. of Dept of Mechanical Engeneering
 COPPE/UF RJ - Rio de Janeiro - RJ - Brazil

Oswaldo Antunes Pedrosa Jr.

CENPES/PETROBRÁS
 Rio de Janeiro - RJ - Brazil

SUMÁRIO

Num trabalho anterior, os autores apresentaram os resultados preliminares da análise de um quebra-mar flutuante. Neste trabalho são apresentados alguns resultados adicionais referentes à formulação hidrodinâmica geral bem como à análise do desempenho do quebra-mar, contrastando com o trabalho do Pedrosa Jr., no qual a ênfase era sobre a solução numérica do problema. As relações obtidas assumem o conhecimento de coeficientes obtidos por Pedrosa Jr. e, portanto, este trabalho e aquele mencionado se completam.

SUMMARY

In a previous paper the authors presented the first results on the analysis of a floating wavebreaker. In this paper some additional results concerning the general formulation of the hydrodynamic problem and the general performance analysis are presented, in contrast with the work of Pedrosa Jr. in which the emphasis was on the numerical solution. Some relations obtained assume the knowledge of coefficients which were calculated by Pedrosa Jr., therefore this work is an addition to the one referred to.

I - Introduction

In a previous paper [7] the authors presented the first results on the analysis of a floating wavebreaker. Pedrosa Jr. [6] extended this work and, also, presented numerical results for non conventional forms of wavebreaker including catamaran type sections; to solve the resulting hydrodynamic boundary value problem he distributed sources on the wetted wavebreaker surface, a method developed by Frank [1]. Whenever possible, Pedrosa Jr. compared his results with those presented by Lopes and Hirata [3], which used a conformal mapping technique; they compared quite well.

In this paper some additional results concerning the general formulation and general performance analysis are presented, in contrast with the work of Pedrosa Jr. [6] in which the emphasis was on the numerical solution. Thus Green's theorem was used to get the Haskind-Newman relations which were used to get some simple relations concerning the general performance of a wavebreaker oscillating with a single degree of freedom. The relations obtained assume the knowledge of some coefficients which were calculated in the work of Pedrosa Jr.; therefore this work is an addition to the one referred to.

II - The Hydrodynamic Problem

II.1. The Boundary Value Problem

As in the previous work we assume all the necessary conditions such that the velocity vector $\underline{u}(x,y,t)$ is given by.

$$\underline{u} = \text{Re} [\underline{\phi}(x,y,t)] = \text{Re} [\underline{\phi}(x,y) e^{i\omega t}] \quad (1)$$

where the velocity potential is defined by the linearized boundary value problem (see figure for main definitions)

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in fluid region} \quad (2)$$

$$\phi_y - v\phi = 0 \quad \text{in } y = 0 \quad (3)$$

$$\phi_n = V_n \quad \text{on} \quad S_b \quad (4)$$

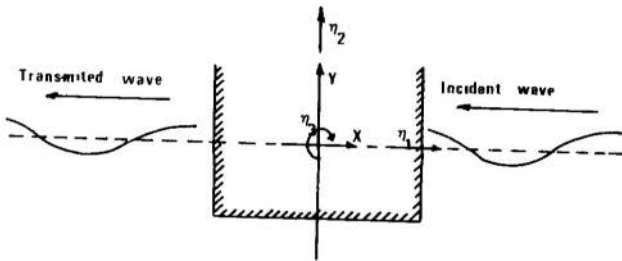
$$|\Delta\phi| \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad y \rightarrow -\infty \quad (5)$$

$$\text{Appropriate Radiation Condition} \quad (6)$$

where: V_n = normal component of body velocity

S_b = mean position of body wetted surface

$\nu = \frac{\omega^2}{g}$ wave number



Again, as in the previous paper, the velocity potential is written as the sum of an incident wave potential $\phi_1(x,y,t)$, a diffraction wave potential - $\phi_2(x,y,t)$ - and radiation wave potentials - $\phi_{3k}(x,y,t)$.

The free-surface elevation is given by

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \phi(x,0,t)}{\partial t} = \text{Re} \left[\frac{i\omega}{g} \phi(x,0) e^{i\omega t} \right] \quad (7)$$

where

$$\phi(x,y) = \frac{Ag}{\omega} (\phi_1 + \phi_2) + \phi_{3k} \quad (8)$$

from which the transmission coefficient can be calculated.

II.2. The Equation of Motion of the Wavebreaker

The equation of motion of the wavebreaker with

three degrees of freedom is written as

$$|m_{kj}| \{\ddot{\eta}_k\} + |B_{kj}| \{\dot{\eta}_k\} + |C_{kj}| \{\eta_k\} = |F_k|$$

$$k, j = 1, 2, 3 \quad (9)$$

where $|F_k|$ is the hydrodynamic force which can conveniently be separated into two parts. Thus we, write

$$F_k = F_{ks} + \sum_{j=1}^3 F_{kj} \quad (10)$$

where F_{ks} is the force in the k th direction, on the wavebreaker, when it is assumed to be fixed in the presence of the incident wave and F_{kj} is the force in the k th direction due to the motion of the wavebreaker in the j th direction. Of course the F_{kj} force is related to the radiation problem and can be expressed in the form:

$$F_{kj} = - a_{kj} \ddot{\eta}_k - b_{kj} \dot{\eta}_k \quad (11)$$

the first term on the RHS is the increase of the inertia of the wavebreaker due to the fluid, therefore a_{ij} is the addedmass. The second term on the RHS represents the work done in generating surface waves which radiates away from the wavebreaker, thus b_{ij} represents the damping. The F_{ks} force is related to the diffraction potential and represents the exciting hydrodynamic force. Equation (9) can be written as

$$|\alpha_{kj}| \{\ddot{\eta}_k\} + |\beta_{kj}| \{\dot{\eta}_k\} + |C_{kj}| \{\eta_k\} =$$

$$= \{F_{ks}\}; k, j = 1, 2, 3 \quad (12)$$

where α_{kj} and β_{kj} includes also the a_{kj} and b_{kj} terms besides non-hydrodynamic mass and damper.

The a_{kj} and b_{kj} terms, and therefore the radiation potentials have to be obtained before solving equation (12). As can be seen from the boundary value problem - see also previous paper - the radiation potentials depend, through

the body boundary condition, on the motions of the wavebreaker.

To circumvent this difficulty we write the motion velocities

$$i\omega\bar{\eta}_k e^{i\omega t} = \dot{\bar{\eta}}_k \quad \eta_k = \text{Re} \left[\bar{\eta}_k e^{i\omega t} \right]$$

which allows us to define new velocity potentials

$$\phi_{3k}(x, y, t) = i\omega\bar{\eta}_k\bar{\phi}_{3k}(x, y, t) \quad k = 1, 2, 3 \quad (13)$$

These potentials - $\bar{\phi}_{3k}$ - are related to the motion of the wavebreaker with unit velocity. Details can be found in [6]. However it is worth to notice that due to the presence of the free surface $\bar{\phi}_{3k}$ are complex and the body condition in terms of these potentials is written as

$$\frac{\partial \bar{\phi}_{3k}}{\partial n} = n_k \quad (\text{components of the generalized unit normal vector}) \quad (14)$$

II.3. The Haskind-Newman Relations

In his work Pedrosa Jr. [6] was interested in finding the radiation and the diffraction potentials in order to find the motions of the wavebreaker and the wave pattern; in this way he was, also, able to calculate the pressure distribution. He used the Frank [1] method to solve the boundary value problem.

However, if we are not interested in so much information, we can use some results obtained first by Haskind [2] and extended by Newman [4]. From the scattering problem, which is represented by the velocity potential $\phi_s = \phi_1 + \phi_2 = \text{Re}[(\phi_1 + \phi_2) e^{i\omega t}]$, we can write

$$F_{ks} = - \iint_{S_b} p n_k ds = i\omega\rho e^{i\omega t} \iint_{S_b} (\phi_1 + \phi_2) \frac{\partial \phi_{3k}}{\partial n} ds \quad (15)$$

where use of relation (14) was made as well as the linearized Bernoulli equation. Using Green's theorem and taking into account the radiation, bottom and free surface condition we may write:

$$\iint_{S_b} \left(\phi_{3k} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial \phi_{3k}}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

Therefore

$$\iint_{S_b} \phi_2 \frac{\partial \phi_{3k}}{\partial n} ds = \iint_{S_b} \phi_{3k} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} ds = - \iint_{S_b} \phi_{3k} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds \quad (16)$$

since in the scattering problem we have

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi_1 + \phi_2) = 0 \quad \text{on } S_b$$

From (16) and (15) we can write

$$F_{ks} = i\omega\rho e^{i\omega t} \iint_{S_b} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_{3k}}{\partial n} - \phi_{3k} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) ds \quad (17)$$

$$= - i\omega\rho e^{i\omega t} \iint_{S_\infty} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_{3k}}{\partial n} - \phi_{3k} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) ds \quad (18)$$

where S_∞ is the surface far away from the body and the last relation was obtained by using Green's theorem. Thus F_{ks} depends only on the asymptotic behavior of the radiation potential, far away from the body; this means that we do not need to solve the scattering problem in order to

get F_{ks}]

For a 2D problem, after some algebra, we can show that [4].

$$b_{kk} = \frac{1}{2} \rho \omega (|A_k^+|^2 + |A_k^-|^2) \quad (19)$$

$$F_{ks} = \text{Re} [\rho g A A_k^+ e^{i\omega t}] \quad (20)$$

where we assumed that

$$\phi_{3k} \sim \begin{cases} \Lambda_k^+ e^{\nu y} - i\nu x & \text{as } x \rightarrow +\infty \\ \Lambda_k^- e^{\nu y} + i\nu x & \text{as } x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (21)$$

III - The Performance of a Wavebreaker

We restrict to the study of a 2D wavebreaker with one degree of freedom. In this case the equation of motion (9) is simplified to

$$m\ddot{\eta}_k + b\dot{\eta}_k + c\eta_k = F_k \quad (22)$$

Now, if we let $\eta_k = \text{Re} [\bar{\eta}_k e^{i\omega t}]$ and define the factor

$$\alpha = \frac{|\Lambda_k^-|^2}{|\Lambda_k^-|^2 + |\Lambda_k^+|^2}$$

the force F_k can be written as

$$F_k = F_{ks} + F_{kk} = F_{ks} + [-a_{kk} \ddot{\eta}_k - b_{kk} \dot{\eta}_k]$$

with F_{ks} given by (20) and b_{kk} by (19) or alternatively by

$$b_{kk} = \frac{1}{2} \frac{\rho \omega}{(1 - \alpha)} |\Lambda_k^+|^2 \quad (24)$$

From (22) the response of the wavebreaker to the incident wave is given by

$$[(m + a_{kk})\omega^2 - i(b_{kk} + b)\omega - c] \bar{n}_k = -\rho g A A_k^+ \quad (25)$$

We can also calculate the proportion of the power absorbed by the wavebreaker. Per unit length this power is given by:

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \dot{n}_k F_k dt = \frac{1}{2} \omega^2 b |\bar{n}_k|^2 \quad (26)$$

since the only contribution comes from the $b\dot{n}_k$ term in (22). As the mean energy flux per unit length across a vertical plane normal to the wave direction is $\rho g^2 |A|^2 / 4\omega$ the proportion of the power absorbed is

$$C_a = \frac{2\omega^3 b}{\rho g^2} \left| \frac{\bar{n}_k}{A} \right|^2 \quad (27)$$

which, using (24) and (25) can be reexpressed as

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{4\omega^2 b b_{kk} (1 - \alpha)}{\omega^2 (b_{kk} + b)^2 + [C - (m + a_{kk})\omega^2]^2} \quad (28) \\ &= \frac{2\omega^3 \rho b |A_i^+|^2}{\omega^2 (b_{kk} + b)^2 + [C - (m + a_{kk})\omega^2]^2} \end{aligned}$$

From these equations we can see that C_a is maximum when $c = (m + a_{kk})\omega^2$ and $b = b_{kk}$ in which case

$$C_{a_{\max}} = 1 - \alpha \quad (29)$$

Thus we see that a light absorption occurs when α is as small as possible, that is, the amplitude of the wave at $x \rightarrow -\infty$ in the radiation problem is as small as possible compared with the amplitude of the wave at $x \rightarrow +\infty$ (see defin-

ition of α , expression (23)).

Another importance of equations (28) is that C_a can be estimated for different frequencies of the incident wave since we can compute the a_{kk} , b_{kk} and α which are frequency dependent. Reference [6] gives numerical values for a_{kk} and b_{kk} for different configurations of wavebreakers, including catamaran type.

These results can presumably be generalized for motions with more than one degree of freedom, but very strong simplifications (symmetry and the like) are required in order to get simple expressions that permit one to draw general conclusions.

Finally it is important to mention that one should seek a relation a little bit different from C_a , more appropriated for wavebreaker analysis. The maximum of C_a gives us the condition of maximum absorption, allowing the minimum power transmitted, as required. However, maximum absorption implies very strong mooring, which is a very expensive item in the whole wavebreaker system.

REFERENCES

- [1] Frank, W. - " Oscillation of Cylinders in or Below the Free surface of Deep Fluids" NSRDC Report N° 2375 - 1967
- [2] Haskind, M.D. - "The Exciting Forces and Wetting of Ship in Waves" English Translation: DTMB. Report n° 307
- [3] Lopes, T.A.P. e Hirata, M.H. - "Coeficientes de Massa Virtual e de Amortecimento para Seções da Proa e da Popa de um Navio" - Congresso da SOBENA - Rio de Janeiro - 1974
- [4] Newman, J.N. - "The Exciting Forces on Fixed Bodies in Waves" - Journal of Ship Research - 6 - 1962
- [5] Newman, J.N. - "The Interaction of Stationary Vessels with REGular Waves" - 11th Symposium on Naval Hydrodynamics - University College - London - 1976
- [6] Pedrosa, Jr., O.A. - "Comportamento Hidrodinâmico de Quebra Mares Flutuantes"- MSc. Thesis - Programa de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - 1980
- [7] Pedrosa, Jr., O.A. and Hirata, M.H. - "Performance of a Floating Wavebreaker" - "V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - Campinas - 1979



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA
RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-30

P. P. 309 - 318

PUC/RJ

FLUXO NÃO ESTACIONÁRIO EM REDES DE RIOS OU CANAIS

Armando Miguel Awruch

Professor do Curso de
 Pós-Graduação em Engenharia Civil
 UFRGS

SUMÁRIO

Este trabalho apresenta a formulação de um modelo matemático para o estudo do fluxo não estacionário em redes de rios ou canais e é aplicado ao "Delta do Jacuí" (Rio Grande do Sul - Brasil). Para a discretização do espaço, usa-se o método dos elementos finitos e para discretizar o tempo, a regra trapecial. Os resultados são comparados com dados de campo obtidos através de medições de nível e vazões

SUMMARY

This work presents the formulation of a mathematical model to study unsteady flow in rivers or channels networks, which is applied to the "Delta do Jacuí" (Rio Grande do Sul - Brazil). The finite element method is used for space discretization and the trapezoidal rule for time discretization. The results are compared with field data obtained through level and discharge measurements.

1. Introdução

O presente trabalho consiste na apresentação de um modelo matemático uni-dimensional para o estudo do fluxo não estacionário em redes de rios ou canais. As equações que governam o problema são discretizadas no espaço e no tempo, usando o método dos elementos finitos e das diferenças finitas, respectivamente.

O modelo é aplicado ao Delta do Jacuí, no estado do Rio Grande do Sul (Brasil), o qual recebe o afluxo de quatro rios que são o Rio Jacuí, o Rio dos Sinos, o Rio Gravataí e o Rio Caí, e desemboca no Rio Guaíba (figura 1). Suas águas são utilizadas como fonte de abastecimento das populações da zona, para recreação e pesca, e como fonte de diluição de águas servidas domésticas e industriais.

O conhecimento das características do fluxo é de fundamental importância para se fazer estudos e previsões em relação à qualidade da água.

2. Aplicação do Método dos Elementos Finitos às Equações que Governam o Problema

O sistema de equações diferenciais em derivadas parciais que governam o problema, constituído pelas equações de movimento e de continuidade, pode escrever-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial l} + g \frac{\partial \eta}{\partial l} + Ig + \frac{g}{C^2} \frac{[u]}{R} u - \gamma \frac{V^2 \cos}{(h + \eta)} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [b(\eta+h)] + \frac{\partial}{\partial l} [b_s u (\eta+h)] + q = 0 \quad (2)$$

onde $u = u(l, t)$ e $\eta = \eta(l, t)$ são a velocidade média e a elevação do fluido sobre o plano de referência respectivamente, e constituem as incógnitas do problema; g é a aceleração da gravidade, $h(l)$ a distância do plano de referência ao fundo, $R(l, t)$ o raio hidráulico, $C(l, t)$ o coeficiente de Chezy, I a inclinação do fundo, γ um coeficiente de tensão provocado pelo vento, $V(l, t)$ a velocidade do vento, α um ângulo que indica a direção do vento, $b(l)$ a largura total, $b_s(l, t)$ a

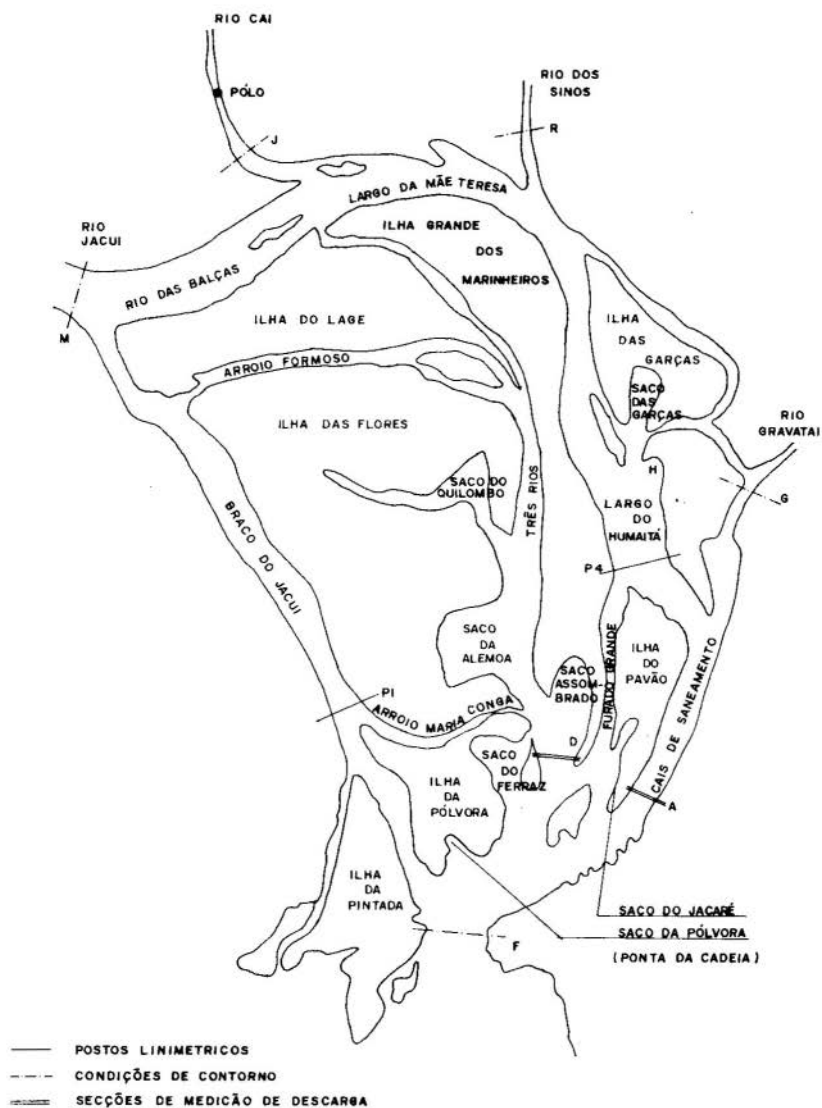


Figura 1 - Delta do Jacuí

largura do fluxo principal e $q(\ell, t)$ o fluxo suplementar que inclui infiltração, percolação, etc.; " ℓ " e " t " são as variáveis de espaço e tempo respectivamente.

A formulação do método dos elementos finitos, partindo do método dos resíduos ponderados, conduz à seguinte expressão matricial, onde os termos lineares e não lineares estão separados:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_1 & 0 \\ 0 & \underline{M}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{u}}^n \\ \dot{\underline{\eta}}^n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \underline{B} \\ \underline{G}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{\eta}^n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{N}(u, \eta) & 0 \\ \underline{G}_2(\eta) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{\eta}^n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{L} \\ \underline{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde

$$\underline{G}_1 = \underline{D}_1 + \underline{E}_1 + \underline{F}_1; \quad \underline{N}(u, \eta) = \underline{A}(u) + \underline{C}(u, \eta)$$

$$\underline{G}_2(\eta) = \underline{D}_2(\eta) + \underline{E}_2(\eta) + \underline{F}_2(\eta); \quad \underline{L} = \underline{S} + \underline{W}$$

sendo

$$\begin{aligned} \underline{M}_1 &= \int_{\ell} \phi \phi^T d\ell; & \underline{M}_2 &= \int_{\ell} (\phi^T \underline{b}^n) \phi \phi^T d\ell; & \underline{B} &= g \int_{\ell} \phi \frac{\partial \phi^T}{\partial \ell} d\ell \\ \underline{A}(u) &= \int_{\ell} (\phi^T \underline{u}^n) \phi \frac{\partial \phi}{\partial \ell} d\ell; & \underline{C}(u, \eta) &= \int_{\ell} \frac{g}{C_1^2} \frac{|\phi^T \underline{u}^n|}{(\phi^T \underline{H}^n)} \phi \phi^T d\ell \\ \underline{W} &= -\gamma V^2 \cos \alpha \int_{\ell} \frac{\phi}{(\phi^T \underline{H}^n)} d\ell; & \underline{S} &= g I \int_{\ell} \phi d\ell; & \underline{Q} &= - \int_{\ell} (\phi^T \underline{q}^n) \phi d\ell \\ \underline{D}_1 &= \int_{\ell} (\phi^T \underline{h}^n) (\phi^T \underline{b}_S^n) \phi \frac{\partial \phi}{\partial \ell} d\ell; & \underline{E}_1 &= \int_{\ell} (\phi^T \underline{b}_S^n) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \ell} \underline{h}^n \right) \phi \phi^T d\ell \\ \underline{F}_1 &= \int_{\ell} (\phi^T \underline{h}^n) \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial \ell} \underline{b}_S^n \right) \phi \phi^T d\ell \end{aligned}$$

As matrizes $\underline{D}_2(\eta)$, $\underline{E}_2(\eta)$ e $\underline{F}_2(\eta)$ são obtidas da mesma forma que \underline{D}_1 , \underline{E}_1 e \underline{F}_1 , respectivamente, substituindo \underline{h}^n por $\underline{\eta}^n$. Nas expressões anteriores, " n " indica o número de nós do elemento usado, T a operação de transposição e o pon

to acima da variável significa derivação em relação ao tempo; ϕ é a função de forma, $H=h+\eta$ é a profundidade total e C_1 um coeficiente que depende do coeficiente de Manning, da largura e da profundidade.

Em forma compacta, a expressão (3) pode escrever-se da seguinte forma:

$$\underline{M} \dot{\underline{X}} + \underline{K}_1 \underline{X} + \underline{K}_2 (X) \underline{X} + \underline{P} = 0 \quad (4)$$

Para deduzir a fórmula de recorrência da integração no tempo usa-se a regra trapecial, assumindo que

$$\underline{X}_{t+\Delta t} - \underline{X}_t = \frac{\Delta t}{2} (\dot{\underline{X}}_{t+\Delta t} - \dot{\underline{X}}_t) \quad (5)$$

onde $\underline{X}_{t+\Delta t}$ é a incógnita no tempo $t+\Delta t$ e \underline{X}_t a incógnita no tempo t .

Com (4) e (5), levando ao segundo membro os termos não lineares e usando um esquema iterativo, obtém-se a fórmula de recorrência final, que é a seguinte:

$$\left[\frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{K}_1 \right] \underline{X}_{t+\Delta t}^{R+1} = \left\{ \left[\frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{K}_1 - \underline{K}_2(\underline{X}_t) \right] \underline{X}_t - (\underline{P}_t + \underline{P}_{t+\Delta t}) \right\} - \underline{K}_2^k(\underline{X}_{t+\Delta t}) \underline{X}_{t+\Delta t}^k \quad (6)$$

onde k indica o número de iteração.

O membro esquerdo da expressão (6) é uma matriz banda, não simétrica e estacionária, já que é possível decompor $\underline{b}_s = \underline{b}_s(\ell, t)$ numa parte constante e outra variável no tempo, levando esta última ao segundo membro; isto significa que a matriz do primeiro membro deve ser triangularizada uma vez em todo o intervalo de simulação, o que implica numa redução significativa do tempo de processamento. O termo entre chaves deve ser avaliado uma vez em cada intervalo de tempo, sendo que $\underline{K}_2^k(\underline{X}_{t+\Delta t}) \underline{X}_{t+\Delta t}^k$ deve ser calculada em cada iteração até que $\underline{X}_{t+\Delta t}^{k+1} \approx \underline{X}_{t+\Delta t}^k$. Adota-se como critério de convergência a norma euclidiana do vetor \underline{X} , podendo-se usar um coeficiente de relaxação para reduzir o número de iterações.

3. As Junções

Para as junções, definidas como o encontro de dois ou mais ramais, segue-se o critério de Dronkers [1].

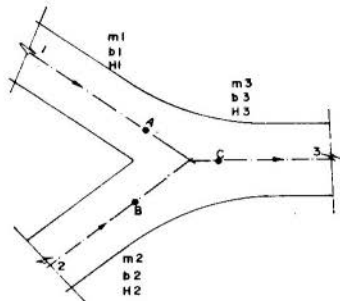


Figura 2

Analizando a figura 2, que representa uma junção, são válidas neste caso também as equações (1) e (2). Levando em conta que os trechos são pequenos, podem ser desconsiderados os efeitos de fricção no fundo, do vento, da inclinação do fundo e supor ainda que o fluxo é estacionário. Sob estas hipóteses, o sistema de equações fica expresso da seguinte forma:

$$b_1 H_1 u_1 + b_2 H_2 u_2 + b_3 H_3 u_3 = 0 \quad (7.a)$$

$$\frac{\psi}{2g} (u_3^2 - u_1^2) + H_3 - H_1 = 0 \quad (7.b)$$

$$\frac{\psi}{2g} (u_3^2 - u_2^2) + H_3 - H_2 = 0 \quad (7.c)$$

onde a (7.a) indica a condição de conservação da matéria, e (7.b) e (7.c) são as equações de Bernoulli para os trechos AC e BC respectivamente. O coeficiente ψ é um fator que leva em conta as perdas e o fato que as velocidades não se distribuem uniformemente na seção transversal.

O sistema (7) juntamente com as equações (1) e (2) de cada trecho que concorre à junção, fornecerá os resultados na referida junção.

4. O Termo de Viscosidade

As expressões (1) e (2) foram obtidas integrando na profundidade e na largura as equações originais de movimento e continuidade, considerando que a velocidade instantânea está composta por um valor médio e um desvio em relação a esse valor, levando em conta as condições cinemáticas para a superfície livre e assumindo uma distribuição hidrostática de pressões (o que significa anular os termos da aceleração e as correspondentes tensões na direção vertical).

No processo descrito acima, aparecem, além das forças de pressão e as tensões tangenciais na superfície (provocada pelo vento) e no fundo (provocada pela fricção entre o fluido e o leito), tensões internas dadas por

$$\frac{1}{b_s H} \frac{\partial}{\partial \ell} F_i = \frac{1}{b_s H} \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{-h}^n \left[\frac{\tau}{\rho} - (u')^2 \right] dz \quad (8)$$

onde τ é a tensão tangencial, ρ a densidade do fluido e u' o desvio da velocidade em relação ao valor médio. F_i pode ser considerada como uma força provocada pela viscosidade do fluido, e então o primeiro membro de (8) é aproximado pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{b_s H} \frac{\partial}{\partial \ell} F_i = \frac{1}{b_s H} \frac{\partial}{\partial \ell} \left[v \frac{\partial}{\partial \ell} (b_s H u) \right] \quad (9)$$

onde v é um coeficiente de viscosidade cujo valor é desconhecido.

A (9) pode ser introduzida na expressão matricial (3), adicionando as seguintes matrizes:

$$v \left(- \int \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \ell} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \ell} d\ell + \int_{\ell} f(\ell, t) \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \ell} d\ell - \int_{\ell} f(\ell, t) \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \ell} \underline{\phi}^T d\ell + \int_{\ell} f(\ell, t) \underline{\phi} \underline{\phi}^T d\ell \right) \underline{u}^n \quad (10)$$

onde

$$f(\ell, t) = \frac{1}{\underline{\phi}^T \underline{H}^n} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial \ell} \underline{H}^n + \frac{1}{\underline{\phi}^T \underline{b}_s^n} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial \ell} \underline{b}_s^n \quad (11)$$

O uso do termo viscoso é muito útil na eliminação de oscilações numéricas, e por esta razão as vezes é conveniente que seja introduzido, usando valores convenientes de v ,

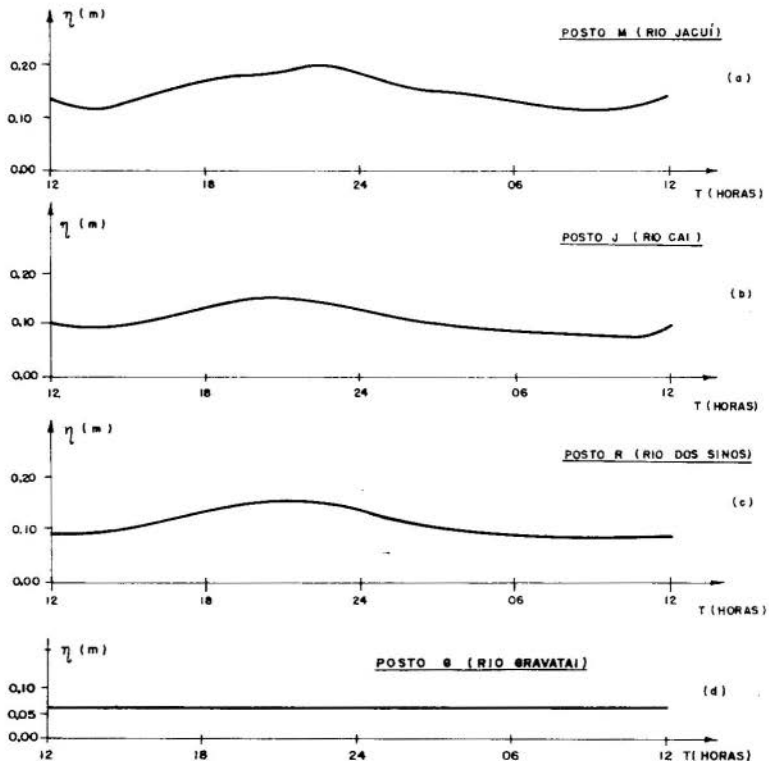
como é indicado na referência [2].

5. Aplicação do Modelo ao Delta do Jacuí

O modelo foi aplicado ao Delta do Jacuí, utilizando-se uma rede de 27 elementos isoparamétricos quadráticos unidimensionais com 76 nós. Os dados usados foram obtidos através de medições de campo efetuadas pelo IPH da UFRGS e de levantamentos feitos pelo DEPRC de Porto Alegre.

Na figura 3 são apresentadas as condições de contorno usadas e nas figuras 4 e 5 alguns resultados, os quais são comparados com observação de campo.

O coeficiente de Manning adotado para a fricção no fundo foi $n=0.02$, sendo que o coeficiente de Chezy oscila entre 50 e $70^{1/2}$ /seg. Considerou-se também o efeito do vento, com uma velocidade constante de 10 m/seg na direção NE-SO. Foram tomados intervalos de tempo de 300 segundos.



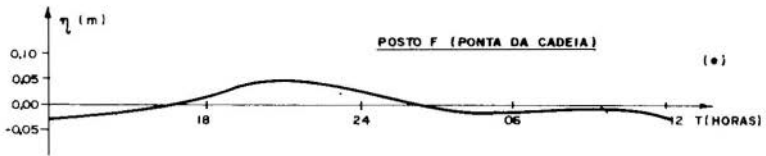


Figura 3 - Condições de Contorno

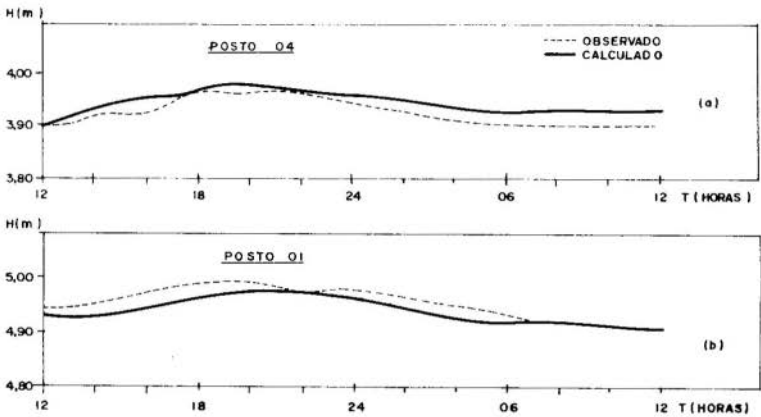


Figura 4 - Níveis calculados e observados

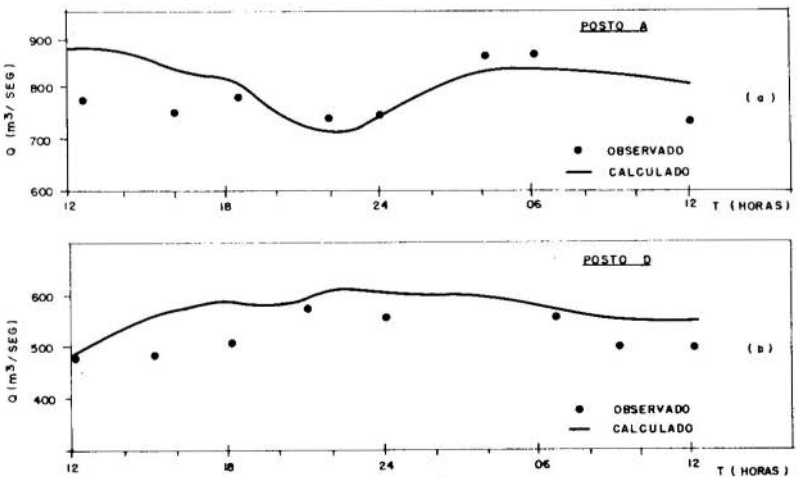


Figura 5 - Descargas observadas e calculadas

6. Conclusões

Embora estudos mais amplos devam ser feitos, para diversas condições, os resultados obtidos com o modelo permitem sermos otimistas em relação a futuras aplicações.

Ficam também alguns pontos para serem pesquisados, tais como a influência do coeficiente de Manning e os efeitos do termo viscoso. O intervalo de tempo adotado, que em muitos pontos é maior que o intervalo exigido pela condição de estabilidade de Courant-Friederich-Levy, permite obter poucas iterações em cada passo (2 ou 3); logicamente um intervalo de tempo maior acrescentaria o número de iterações e afetaria a precisão dos resultados. A tolerância imposta no processo iterativo é de 1%.

Os valores iniciais e o valor e direção do vento, que foi adotado em função de medidas isoladas, podem afetar em parte os resultados obtidos. Um outro aspecto que deve ser mencionado é que o fluxo uni-dimensional é uma hipótese simplificativa para este caso, que apresenta grandes dificuldades na determinação das larguras nos diferentes trechos e de uma representação adequada da topografia do fundo.

A coleção de novos dados de campo, juntamente com a aplicação intensiva deste modelo, permitirão ter alguns elementos necessários para auxiliar futuras tarefas de planejamento, reproduzindo e prevendo diversas condições.

REFERÊNCIAS

- 1 Dronkers, J.J., Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters, North - Holland, Amsterdam, (1964).
- 2 Connor, J.J. & Wang, J., "Finite Element Modelling of Hydrodynamic Circulation", International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Southampton (1973). Proceedings. London, Pentech Press, 1974, pp.355-387.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-31

P.P. 319 - 330

PUC/RJ

ANÁLISE DO ESCOAMENTO JUNTO A RESSALTOS EM CANALIZAÇÕES

Irlan Von Linsingen - Eng^o Mec. - M.Sc.

Rogério Tadeu da Silva Ferreira - Eng^o Mec. - Ph.D.

Departamento de Engenharia Mecânica
 Universidade Federal de Santa Catarina
 88.000 - Florianópolis - S.C.

SUMÁRIO

No presente trabalho são estudadas as características do escoamento interior em regime laminar, plenamente desenvolvido junto a um obstáculo anular de secção longitudinal quadrada. Por meio de uma bancada de testes são medidos os comprimentos de separação a jusante do obstáculo e as pressões diferenciais locais para vários números de Reynolds, em diferentes secções, com a finalidade de determinar os perfis de velocidade e de tensão de cisalhamento. São analisados os comportamentos dos comprimentos de separação e das velocidades e tensões máximas ao longo do escoamento.

SUMMARY

The main objective of this work is to study the laminar fully developed flow close to a circumferencial square hump placed at the wall of a smooth circular pipe. An experimental set up was used to determine the reattachment length and the velocity and shear stress profiles of the flow for different Reynolds numbers. Simple relations were obtained from the analysis of the data for the reattachment length, maximum velocity and maximum shear stress in different positions along the flow and different Reynolds numbers.

1. Introdução

Durante a década passada, considerável atenção foi dispensada ao desenvolvimento de dispositivos cardiovasculares protéticos e coração artificial. Atualmente, devido às dificuldades encontradas na determinação analítica dos padrões e parâmetros do escoamento sangüíneo, o projeto de próteses cardiovasculares é ainda, em grande parte, uma arte, pois os conhecimentos estão assentados em algumas medições experimentais esporádicas e conhecimentos empíricos. As superfícies artificiais dos dispositivos protéticos criam eventualmente problemas tais como a formação de trombos com consequentes danos aos elementos formadores do sangue, que estão intimamente relacionados com as características do escoamento.

Experimentações realizadas por Fry et al (1965), segundo citação de Cheng et al [1] em condutos com derivação, sugerem que a ocorrência crítica para a formação de trombos e possível desestruturação sangüínea está associada à região de separação do escoamento. Foi também mostrado por Fry (1968), citado em Cheng et al [1], que a deterioração e erosão de células endoteliais está intimamente relacionada às tensões cizalhantes que agem sobre as células.

Neste trabalho é efetuado o estudo experimental do escoamento interior junto a um obstáculo de secção transversal anular e longitudinal quadrada, fixado à parede de um duto circular liso, através da medição do comprimento de separação e perfis de velocidade nas regiões de recirculação para números de Reynolds variando entre 20 e 500. Segundo Guyton [2] esta faixa de variação do número de Reynolds é a que ocorre normalmente nas porções regulares das grandes artérias, tanto na circulação sistêmica quanto pulmonar.

É considerado que o escoamento seja laminar plenamente desenvolvido na região proximal do obstáculo e que o fluido utilizado tenha comportamento Newtoniano.

O fluido utilizado é uma solução a 2% de Metilcelulose (Methocel A-15 - Dow Chemical Inc.), que apresenta uma viscosidade de 10 cP a 20°C, movimentado por uma bomba peristáltica que fecha o circuito entre dois reservatórios mantidos em desnível controlável.

O desenvolvimento das pesquisas neste campo do conheci

mento está originalmente relacionado ao desenvolvimento de soluções numéricas para escoamento de Poiseuille uniforme, oscilatório e pulsátil junto a obstáculos de secção quadrada [3]. O escoamento é analisado bidimensionalmente através das equações de Navier-Stokes apresentadas na forma de transporte de vorticidade para solução pelo método de diferenças finitas.

Mais recentemente, segundo Cheng et al [4] as pesquisas igualmente numéricas, levando em conta os parâmetros do escoamento, tem sido direcionadas mais estreitamente às condições de fluxo sanguíneo reais, admitindo-se já, além dos obstáculos de secção quadrada (estenoses) fixas, distensões de parede (aneurismas) com variação temporal (paredes móveis).

Estão também sendo pesquisadas as influências das formações de estenoses e aneurismas em bifurcações simétricas e assimétricas sobre os parâmetros característicos do escoamento, segundo Liou [5].

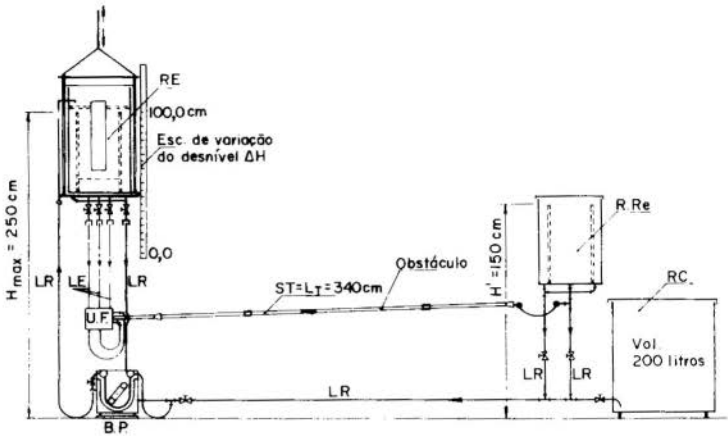
2. Bancada de Testes

A bancada de testes é constituída basicamente de uma secção de testes ligada a dois reservatórios mantidos em des-nível controlável.

O circuito é fechado por uma bomba peristáltica com fluxo positivo na direção do reservatório móvel (emissor). O reservatório de captação do fluido em escoamento através da secção de testes é chamado de reservatório receptor. Todo o sistema é ligado a um terceiro reservatório (de controle), cuja função principal é suprir eventuais perdas de fluido do circuito, considerando-se como função secundária, o armazenamento de fluido fora de operação. O sistema é ilustrado esquematicamente na Fig. 1.

A secção de testes fica completamente isolada do restante da instalação e, principalmente, do reservatório emissor a fim de ser evitada a transmissão de vibrações provenientes da bomba de alimentação, razão pela qual as ligações entre reservatório e secção de testes são flexíveis, da mesma forma que as estruturas de sustentação são independentes. O comprimento reto de canalização até o ressalto permite o

desenvolvimento completo do perfil de velocidades para a faixa de números de Reynolds testada.



S I M B O L O G I A			
	Registro gaveta		RC Reservatório de controle
	Conexão p/ linhas flexíveis		LE Linha de emissão
	Ligação flexível		LR Linha de retorno
	Expansão ou redução		► Direção do fluxo
	BP Bomba peristáltica		R Re Reservatório receptor
	UF Uniformizador de fluxo		ST Seção de testes
	RE Reservatório emissor		

Fig. 1. Esquema da bancada de testes.

Os comprimentos de separação são medidos através de método visual, determinando o comprimento necessário de duto transparente após o ressalto. Como o tubo de acrílico usado com $\phi = 1\ 3/4''$ é comercialmente liso, não são considerados os efeitos de rugosidade da parede sobre o escoamento.

A perpendicularidade do obstáculo em relação às linhas de corrente do escoamento, é particularmente importante, pois com isto evita-se que se formem correntes secundárias que além de prejudicarem a visualização, certamente afetam os parâmetros do escoamento.

A forma e dimensões da obstrução, indicada na Fig. 2, foram utilizadas por Cheng et al [1] na simulação numérica do escoamento.

O número de Reynolds pode ser controlado através da variação do desnível entre reservatórios e através de regis-

tros situados nas linhas de emissão. Para maior sensibilidade de controle, são usados três registros em paralelo.

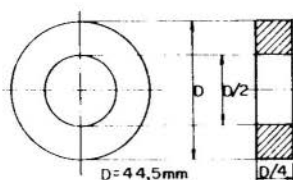


Fig. 2. Geometria do obstáculo.

3. Procedimentos Experimentais

3.1. Medição dos comprimentos de separação

A medição dos comprimentos de separação do escoamento a jusante da obstrução, é realizada através da avaliação da distância em que a linha de corrente tangente à superfície interna do obstáculo volta a reencontrar a parede da secção de testes, após o obstáculo. A avaliação destes comprimentos se torna possível por meio da injeção de corante próximo à parede da secção de testes a montante do obstáculo, a uma distância suficiente para que a linha de corrente visualizada se torne estável. Um dispositivo de iluminação posterior permite a visualização adequada do escoamento.

Observa-se através da Fig. 3 que o reencontro da linha de corrente tangente ao ressalto ocorre dentro de uma faixa de comprimentos, adotando-se o valor médio para o comprimento de separação.

A linha de separação apresentada na Fig. 3 não é real na direção transversal devido à distorção causada pela curvatura do tubo transparente.

Os comprimentos de separação assim obtidos para vários números de Reynolds são então adimensionalizados em relação ao diâmetro da secção de testes (λ_x/D) e plotados em função de Re_D .

3.2. Medição dos perfis de velocidade

Os perfis de velocidade são obtidos através da medição das pressões dinâmicas em 3 regiões de interesse, a saber: a

montante, no interior e a jusante do obstáculo.

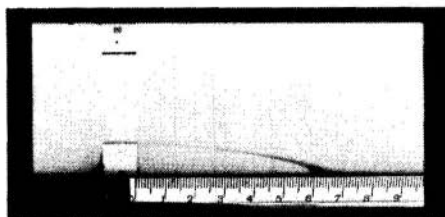


Fig. 3. Visualização do escoamento. (comprimento de separação para $Re_D = 55$).

São consideradas seis secções de medição, localizadas nos seguintes pontos: 26 mm a montante do obstáculo (secção 1), na secção de entrada do obstáculo (secção 2), na secção de saída do obstáculo (secção 3), a 30, 60 e 90 mm a jusante da obstrução (secções 4, 5 e 6 respectivamente).

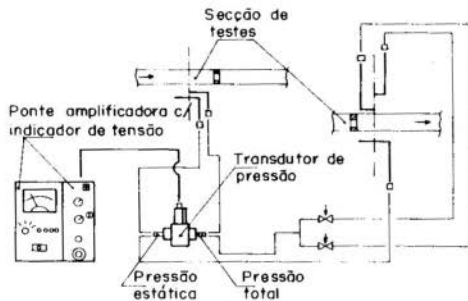
Devido às baixas pressões diferenciais existentes, principalmente na zona de recirculação após o obstáculo, utilizam-se transdutores de pressão diferencial indutivos de alta sensibilidade com pressão diferencial nominal de $0,01 \text{ kgf/cm}^2$ para as medições do perfil de velocidade. Os sensores de tomada de pressões total e estática são independentes, e constituídos por agulhas hipodérmicas de 1,5 mm de diâmetro. As tomadas de pressão, tanto estática quanto total, são realizadas sobre o mesmo plano transversal em cada secção considerada, sendo que para as secções a jusante do obstáculo, as pressões totais são medidas com o auxílio de dois tubos, um para as pressões do escoamento central e parte da região de recirculação e outro invertido para a região de recirculação abaixo da linha de inversão de velocidade. A Fig. 4 ilustra o sistema de medição de pressões estática e total.

Devido à simetria do escoamento comprovada por Linsingen [6] na fase de visualização do escoamento, as medições de pressões são realizadas sobre um único plano longitudinal em cada secção transversal.

Finalmente, as velocidades são determinadas pela Eq. (1):

$$U = \sqrt{2g \Delta P / \rho} \quad (1)$$

sendo que a massa específica ρ é função da temperatura da solução, tendo sido previamente determinada [6].



- a) A montante e no interior do obstáculo b) A jusante do obstáculo

Fig. 4. Conjuntos de medição de pressão diferencial.

3.3. Tensões de cisalhamento

As tensões cizalhantes são calculadas através da equação de Newton da viscosidade, Eq. (2):

$$\tau_i = \mu \cdot f'(x_i) \quad (2)$$

onde $f'(x_i)$ é o valor da derivada numérica da velocidade local, segundo Carnahan et al [7].

Alguns perfis de velocidade e tensão cizalhante para as diversas secções são apresentados nas Figuras 5 e 6.

4. Discussão dos Resultados

A análise dos resultados é efetuada a partir da consideração do escoamento como sendo laminar, plenamente desenvolvido nas secções consideradas e o fluido Newtoniano.

Linsingen [6] testou e comprovou as hipóteses acima estabelecidas, garantindo com isto a validade da análise.

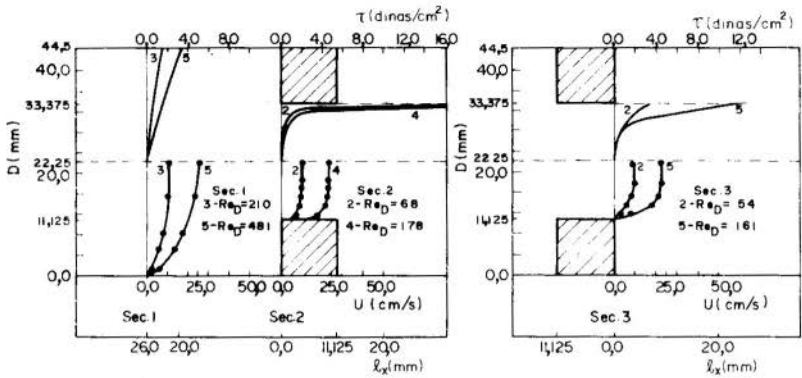


Fig. 5. Tensões cisalhantes para as secções 1, 2, e 3 correspondentes aos perfis de velocidade especificados.

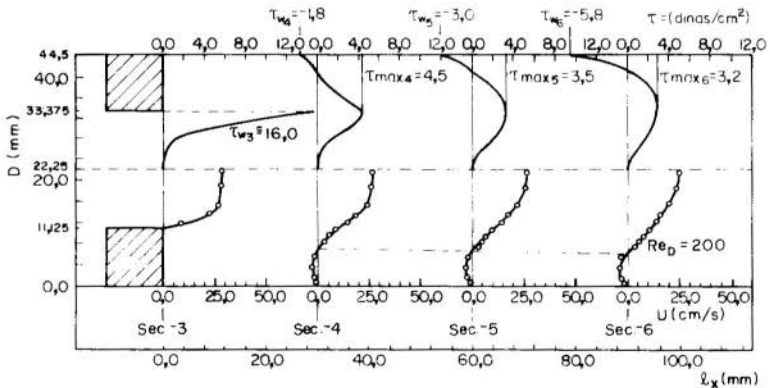


Fig. 6. Desenvolvimento dos perfis de velocidade e tensão de cisalhamento a jusante do obstáculo para $Re_D = 200$, com delimitação da linha de inversão de velocidade.

4.1. Comprimento de separação

Com relação aos comprimentos de separação, observa-se que a faixa de Re_D possível de ser medida pelo método empregado mostra-se relativamente baixa, admitindo valores entre $Re_D = 20$ e $Re_D = 200$.

O limite máximo de $Re_D = 200$, deve-se ao fato de que acima deste valor ou da faixa de valores próximos, a linha de corrente de controle apresenta uma certa instabilidade com relação à uniformidade da concentração de corante, o que dificulta consideravelmente as medições. Por outro lado, a aproximação desta linha de corrente da parede do tubo, ocorre em ângulo muito reduzido, o que aumenta drasticamente a faixa de reencontro e conseqüentemente o erro na avaliação do valor médio.

Observa-se que os comprimentos de separação (l_x/D), plotados em gráfico bilogarítmico conforme mostra a Fig. 7, seguem a lei de potência, dada pela Eq. (3).

$$\frac{l_x}{D} = 0,0383 Re_D^{0,9} \quad \text{para } 20 < Re_D < 200 \quad (3)$$

Embora a utilidade desta relação seja indiscutível, no que se refere ao conhecimento da evolução dos comprimentos de separação, não se pode, a priori, garantir sua validade para Re_D fora da faixa considerada, pois muito pouco se conhece a respeito do desenvolvimento desses comprimentos.

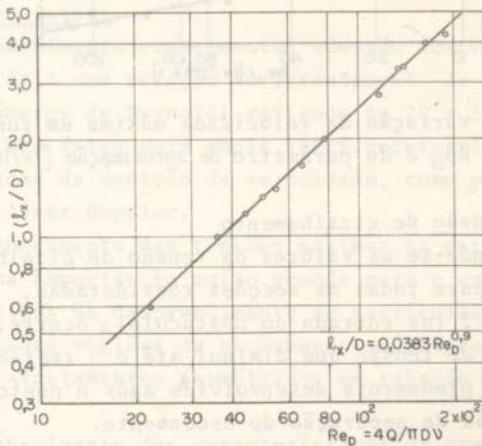


Fig. 7. Curva de variação dos comprimentos de separação em função do número de Reynolds.

4.2. Perfis de velocidade

Da análise dos perfis de velocidade à entrada e saída da obstrução, é estabelecida a seguinte função de variação da velocidade máxima na linha de centro para cada secção, em função do número de Reynolds e da distância entre as secções, como mostra a Eq. (4):

$$\frac{U_{m\acute{a}x}}{U_m} = 3,08 \{ [(x/D^*) + 1]^{0,176} \} Re_D^{-0,176} \quad (4)$$

onde: U_m = velocidade média experimental do escoamento no interior da obstrução = $Re_D \cdot \nu / D^*$

D^* = diâmetro característico da obstrução = $D/2$

x = distância entre as secções, com origem na secção 2 e valor $D/4$ na secção 3.

A Fig. 8 ilustra a correlação dos dados para a faixa de números de Reynolds variando entre 20 e 500.

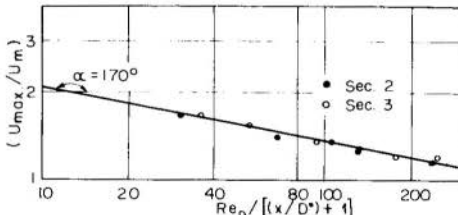


Fig. 8. Variação da velocidade máxima em função de Re_D e do parâmetro de aproximação $[(x/D^*) + 1]$.

4.3. Tensão de cisalhamento

Analisando-se os valores da tensão de cisalhamento máxima obtidos para todas as secções consideradas, observa-se que na secção 2 (na entrada do obstáculo), ocorre, como esperado, um pico de tensão que diminui até o restabelecimento do escoamento plenamente desenvolvido após o ponto de reencontro da linha de separação do escoamento.

A Fig. 9, ilustra a forma de variação da tensão máxima até a secção 6 para $Re_D = 200$.

A suposição de que a tensão de cisalhamento cresce bruscamente na região imediatamente anterior à secção 2, e indi-

cada pela linha tracejada, na Fig. 9, baseia-se no fato de que nesta região ocorre uma variação muito acentuada nas características do escoamento devido à presença do ressalto. O método de medição empregado não permite a obtenção de dados nesta região do escoamento.

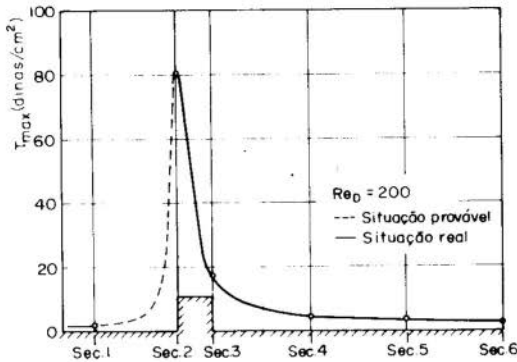


Fig. 9. Evolução da tensão máxima ao longo do escoamento para $Re_D = 200$.

5. Conclusões

O procedimento experimental adotado mostrou-se bastante satisfatório com relação ao levantamento de dados para a faixa de números de Reynolds variando de 20 a 500.

Para uma faixa mais ampla, será necessária a adoção de outros métodos de medição de velocidade, como por exemplo, o anemômetro laser Doppler.

O conhecimento das tensões máximas na entrada do obstáculo tem uma importância muito grande para o conhecimento das características do desprendimento de partículas de estenoses em determinadas regiões do escoamento sanguíneo, considerados os devidos afastamentos geométricos em relação aos sistemas reais.

O conhecimento das características da região de recirculação pode levar à determinação dos mecanismos de formação dessas estenoses em locais específicos do sistema circulatório, como por exemplo, em bifurcações, onde o desvio de fluxo promove a formação de região de separação e recirculação

nas zonas de baixa pressão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Cheng, L.C.; Clark, M.E.; Robertson, J.M. - Numerical calculation of oscillating flow in the vicinity of square wall obstacles in plane conduits - J. Biomechanics, Vol. 5 (1972), pp. 467-484.
- [2] Guyton, A.C. - Tratado de Fisiologia Médica, Ed. Guanabara Koogan S/A, 3a. Ed., (1969).
- [3] Cheng, L.C.; Clark, M.E.; Robertson, J.M. - Calculation of plane pulsatile flow past wall obstacles, Computer and Fluids, Vol. 2 (1974), pp. 363-380.
- [4] Cheng, L.C.; Clark, M.E.; Robertson, J.M. - Interactive on non-uniform unsteady physiological flows by finite difference transforms - Proc. of Symp Computer Methods in Eng. - U. of Southern Cal. Vol. 1 (1977), pp. 497-506.
- [5] Liou, R.J.; Clark, M.E.; Robertson, L.M.; Cheng, L.C. - The dynamics of unsteady bifurcation flows - Mid - Atl. Conf. Biofluid Mechanics, Vol. 2, (1980), pp. 457-474.
- [6] Linsingen, I. - Análise do Escoamento junto a Ressaltos em Canalizações, Dissertação M.Sc., Univ. Fed. de Sta. Catarina, (1980).
- [7] Carnahan, B.; Luther, H.A.; Wilkes, J.O. - Applied Numerical Methods, John Wiley (1969).



COBEM 81
 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
 ENGENHARIA MECANICA
 RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-32

p.p. 331 - 340

PUC/RJ

ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM GRADES LINEARES

Paulo Roberto de Castro
 ITA-IEM, CTA

Euclides Carvalho Fernandes
 ITA-IEM, CTA

SUMÁRIO

Através do Método das Singularidades analisou-se o escoamento em grades de máquinas de fluxo axiais. São feitas comparações com trabalhos analíticos e experimentais concluindo-se que há uma boa aproximação com os resultados experimentais.

SUMMARY

Using the Singularity Method the flow past cascades of axial machines is analysed. Comparisons with analytical and experimental work are made, concluding that there is a good agreement with the experimental results.

des. Nas equações (1) e (2) R e I representam as funções de interferência da grade sendo dadas por:

$$R = \frac{\cos\beta \operatorname{senh}M + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}N}{\operatorname{cosh}M - \cos N} - \frac{2\cos\beta}{M} \quad (5)$$

$$I = \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{senh}M - \cos\beta \operatorname{sen}N}{\operatorname{cosh}M - \cos N} \quad (6)$$

com:

$$\frac{M}{\cos\beta} = \frac{N}{\operatorname{sen}\beta} = \pi\lambda(\cos\phi - \cos\theta) \quad (7)$$

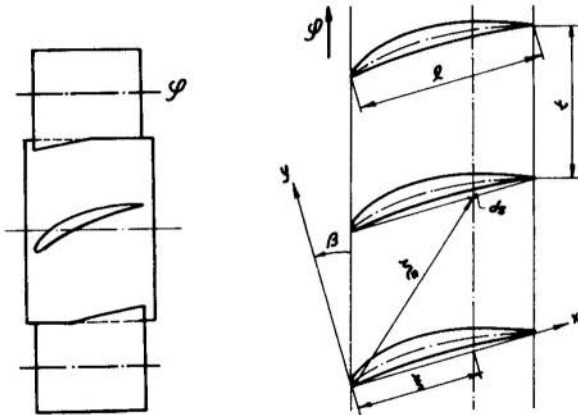


Figura 1: Grade

Considerando-se as distribuições de singularidades representadas por séries de Fourier segundo [4]:

$$\frac{Y(\phi)}{W_\infty} = 2 A_0 \frac{1 + \cos\phi}{\operatorname{sen}\phi} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} n\phi \quad (8)$$

$$\frac{q(\phi)}{W_\infty} = C_e \left[2 B_0 \frac{1 + \cos\phi}{\operatorname{sen}\phi} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\phi \right] \quad (9)$$

e substituindo nas equações (1) e (2) pode-se colocar que:

$$u = - \frac{W_{SX}}{W_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} (h_n A_n - C_e g_n B_n) \quad (10)$$

$$v = - \frac{W}{W^\infty} \frac{SY}{W^\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n A_n + C_e h_n B_n), \quad (11)$$

onde C_e representa um coeficiente que define a espessura máx^{ima} do perfil, g_n e h_n representam integrações na variável ϕ , independentemente da família de perfis considerada, as quais são determinadas pela substituição antes mencionada [6].

Com a consideração de pequenos ângulos de ataque, a condição de tangência da velocidade resultante na linha de esqueleto do perfil \tilde{e} expressa por:

$$\frac{dy_c}{dx} = f'_c(\theta) = \frac{\text{sen} \alpha - v}{1 - u} \quad (12)$$

A descrição de uma família de perfis genérica pode ser feita na forma das distribuições da linha de esqueleto e da espessura segundo, respectivamente, as seguintes expressões [1, 4]:

$$\frac{dy_c}{dx} = C_\lambda (C_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos m(\theta)) \quad (13)$$

$$\frac{dy_e}{dx} = \frac{q(\theta)}{2w^\infty} \quad (14)$$

onde $q(\theta)/w^\infty$ é dado pela equação (9) anterior e C_λ representa um coeficiente que relaciona uma determinada linha de esqueleto de um perfil com uma linha tomada como base.

Combinando as equações (10), (11), (12) e (13) determina-se um sistema de equações algébricas lineares, fixados um certo número de pontos nos quais se verifica a condição dada por (12). Para verificar esta condição independentemente da fixação destes pontos, multiplica-se todos os termos do citado sistema de equações por $\cos k\theta/\pi$ e integra-se no intervalo de 0 a π , tornando os coeficientes do sistema iguais a valores numéricos. Tal procedimento permite ainda um trun

camento do sistema de equações, estabelecendo-se um número reduzido de equações.

A forma deste sistema pode ser colocada como [6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} A_n = \delta_{ok} \text{sen} \alpha - \delta_{mk} C_m C_\ell + C_e \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk} B_n \quad (15)$$

onde δ_{mk} representa o delta de Kroenecker,

$$a_{nk} = g_{nk} - C_\ell \left[C_o h_{nk} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m (h_{n|m-k|} + h_{n|m+k|}) \right] \quad (16)$$

$$b_{nk} = h_{nk} + C_\ell \left[C_o g_{nk} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m (g_{n|m-k|} + g_{n|m+k|}) \right] \quad (17)$$

e onde os coeficientes numéricos g_{nk} e h_{nk} são determinados por integrações nas variáveis θ e ϕ [6]. B_n são os coeficientes da série representada por (14) e A_n são as incógnitas a serem determinadas. Definindo-se:

$$A_n = A_{n\alpha} \text{sen} \alpha + A_{nC} \frac{C_\ell}{2\pi} + A_{nE} \frac{C_e}{2\pi} \quad (18)$$

o sistema de equações representado por (15) pode ser desmembrado como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} A_{n\alpha} = \delta_{ok} \quad (19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} A_{nC} = -2\pi \delta_{mk} C_m \quad (20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} A_{nE} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk} B_n \quad (21)$$

A solução destes sistemas permite determinar a distribuição de velocidade e os coeficientes aerodinâmicos da grade.

3. Solução das equações

Para se determinar a solução dos sistemas de equações repre

sentados por (19), (20) e (21) é necessário conhecer-se os coeficientes numéricos g_{nk} e h_{nk} . No presente caso, conforme já comentado, tais coeficientes são gerais, sendo válidos independentemente da família de perfis considerada. Ao contrário disto, Mellor [2] analisou o problema em questão de terminando coeficientes válidos somente para a família de perfis NACA ($a=1$) da série 65. Observou que, devido a dependência das funções R e I com o argumento $(\cos\phi - \cos\theta)$ ou $(x - \xi)$, poderia efetuar as integrações duplas que determinam os coeficientes ao longo das linhas $(x - \xi) = \text{constante}$ e somente na região $0 \leq x - \xi \leq 1$, visto que R e I são antisimétricas com relação a linha $(x - \xi) = 0$. Assim, quando os integrandos são verificados como antissimétricos, conclui-se que os coeficientes correspondentes são nulos, o que é expresso pela condição de $n+k$ ímpar com $n \geq 1$. Entretanto o procedimento de integração num semi-plano, que aparentemente economiza tempo de processamento, não atinge os objetivos, uma vez que as expressões dos coeficientes, devido a mudança de coordenadas, apresentam indeterminações para $\theta=0$ e $\theta=\pi$, tornando necessário um excessivo refinamento da malha para se obter os resultados com uma certa aproximação. Tendo em vista estes inconvenientes, neste trabalho efetuou-se as integrações em toda a região $0 \leq \phi, \theta < \pi$ obtendo-se resultados finais mais precisos com um tempo de processamento da ordem de seis vezes menor [6].

Finalmente, para a solução do sistema de equações, deve-se determinar os coeficientes C_m e B_n , relativos, respectivamente à curvatura e a espessura de cada família de perfis.

Deve ser salientado que, como os coeficientes g_{nk} e h_{nk} são rapidamente convergentes para zero e muito pequenos já para n ou k maiores do que cinco basta considerar um sistema de 5 equações para se obter uma boa aproximação da solução [6].

4. Resultados

Considerando a expressão da distribuição de singularidades dada pela equação (8), o coeficiente de sustentação da grade é determinado por:

$$C_S = 2 \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{w^\infty} dx = 2\pi A_0 + 2\pi A_1 \quad (22)$$

Definindo-se:

$$A_\alpha = A_{0\alpha} + A_{1\alpha} \quad (23)$$

$$A_C = A_{0C} + A_{1C} \quad (24)$$

$$A_e = A_{0e} + A_{1e} \quad (25)$$

pode-se colocar, observada a equação (18), que:

$$C_S = 2\pi A_\alpha \operatorname{sen} \alpha + A_C C_\ell + A_e C_e \quad (26)$$

A tabela 1 apresenta os resultados obtidos no presente trabalho para o caso dos perfis NACA ($a=1$) da série 65 para fins de comparação principalmente com os resultados de Mellor [2] e Herrig [3].

β	C_ℓ	λ	A_α	A_C	A_e	β	C_ℓ	λ	A_α	A_C	A_e	
0°	0	0,5	0,8350	0,9122	0	15°	1,0	0,50	0,8506	0,9214	-0,0191	
		1,0	0,5839	0,7521	0			1,0	0,6035	0,7676	-0,0359	
		1,5	0,4169	0,6177	0			1,5	0,4318	0,6328	-0,0358	
	1,0	0,5	0,8350	0,9122	-0,0771		1,0	0,5	0,8345	0,9095	-0,0963	
		1,0	0,5839	0,7521	-0,0504			1,0	0,5770	0,7438	-0,0845	
		1,5	0,4169	0,6177	-0,0329			1,0	1,5	0,4068	0,6061	-0,0658
30°	0	0,5	0,8988	0,9486	-0,0372	45°	0	0,5	0,9817	0,9928	-0,0516	
		1,0	0,6698	0,8176	-0,0788			1,0	0,8128	0,9166	-0,1400	
		1,5	0,4824	0,6826	-0,0809			1,5	0,5930	0,7847	-0,1521	
	1,0	0,5	0,8670	0,9260	-0,1171		1,0	0,5	0,9364	0,9622	-0,1379	
		1,0	0,6114	0,7680	-0,1251			1,0	1,0	0,7053	0,8338	-0,1825
		1,5	0,4268	0,6257	-0,1039			1,5	0,4869	0,6845	-0,1585	

Tabela 1: Coeficientes da equação (26).

A comparação [6] com os resultados de Polasek [4], segundo esse autor analíticos, só pode ser feita em termos dos resultados publicados para os coeficientes g_{nk} e h_{nk} , observando-se uma boa concordância dentro de uma faixa de desvio da ordem de $\pm 0,001$, a menos dos coeficientes h_{22} e h_{33} para os quais se verificou haver sido cometido enganos por parte de Polasek [4].

A comparação [6] com os resultados de Mellor [2] mostrou uma razoável concordância entre os coeficientes g_{nk} porém grandes discrepâncias no caso dos coeficientes h_{nk} e B_k (definido por esse autor). Recalculando-se estes coeficientes segundo as mesmas equações usadas por Mellor [2] determinou-se resultados que concordam com os do presente trabalho com aproximação da ordem de 2 a 4%, distinguindo-se os enganos cometidos pelo citado autor.

Finalmente, foram comparados [6] resultados para o coeficiente de sustentação com os valores experimentais apresentados por Herrig et. als. [3] observando-se que, para uma faixa de pequenos ângulos de ataque, até 7° , há uma boa concordância, com um desvio da ordem de 10%.

Esta mesma comparação feita por Mellor [2] para um determinado caso, mostrou uma diferença entre os valores do coeficiente de sustentação da ordem de 30%, referentes à $C_s = 1,10$ calculado por Mellor [2] e $C_s = 0,85$ apresentado por Herrig et. als. [3].

Recalculando-se este caso com os resultados do presente trabalho determinou-se o valor $C_s = 0,93$, o que corresponde a um desvio da ordem de 10% relativamente aos valores experimentais.

5. Conclusões

As correções dos resultados do método potencial analisado por Mellor [2] e estabelecidas no presente trabalho conduzem a uma razoável aproximação com os resultados experimentais de Herrig et. als. [3], permitindo avaliar as características aerodinâmicas de uma grade, fixada a geometria. Através do conhecimento da distribuição de velocidades

pode-se finalmente relacionar as perdas de grade com a geometria objetivando-se uma escolha dos parâmetros geométricos que conduzem às características aerodinâmicas pretendidas, conforme discutido por exemplo por Baljé [7].

Referências Bibliográficas

- [1] Scholz, N., Aerodynamik der Schaufelgitter. Verlag, Karlsruhe, 1965.
- [2] Mellor, G.L., An Analysis of Axial Compressor Cascade Aerodynamics. Jour. of Basic Eng., Trans. ASME, series D, vol. 81, Part I 362-378, Part II 379-386, 1959. Errata, Jour. of Basic. Eng., 619-621, 1962.
- [3] Herrig, J., Emery, J.C., and Erwin, J.R., Systematic two Dimensional Cascade Tests of NACA 65 - series compressor Blades at Low Speeds. NACA TN 3916, 1957.
- [4] Polasek, J., Potential Flow Analysis of Axial Compressor Cascade Aerodynamics. Jour. of Appl. Mech., Trans. ASME, series D, vol. 83, 314-315, 1961.
- [5] Scholz, N., On the Calculation of Potential Flow Around Airfoils in Cascade. Jour. of the Aeron. Scie., vol.18, nº 1, 68-69, 1951.
- [6] Castro, P.R., Análise do Escoamento em Grades Lineares. Tese de Mestrado, ITA, 1981.
- [7] Baljé, O.E., Axial Cascade Technology and Application to Flow Path Designs. Jour. of Eng. for Power. Trans. ASME. 309-304, 1968.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-33

p. p. 341 - 353

PUC/RJ

TRANSIENTS IN PIPES

Dan Marchesin

Departamento de Matemática - PUC/RJ

Paulo Jorge Serpa Paes-Leme

Departamento de Matemática - PUC/RJ

Rubens Sampaio

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

O movimento de um fluido numa tubulação é comumente modelado usando-se as equações da continuidade e do movimento em uma dimensão. Estuda-se aqui a formação e propagação de choques usando-se o método da escolha aleatória. O efeito de variações de temperatura e a de diferentes mecanismos de separação são comparados para o caso de tubulações com gases.

SUMMARY

The motion of a fluid in a pipe is commonly modeled utilizing the one space dimension conservation laws of mass and momentum. We study the development of shocks and spikes utilizing the uniform sampling method. The effects of temperature variations and friction are compared for gas pipes.

The purpose of this work is to model the transient flow of fluids through pipelines. We study only the subsonic region, where the flow velocity v of the fluid is less than its sound speed c .

Flow of fluids through pipelines certainly is one of the most common engineering problem. It is not necessary to discuss its importance here. We want to study the behavior of shock waves in pipelines. The appearance of shock waves is a non-linear phenomenon. They can appear suddenly in the flow or can be easily generated by the closing of a valve. The effect of these waves is well known in engineering: they endanger the pipeline and its components, especially the pumps.

One of the feature of shock waves is their decay. We simulate several dissipation mechanisms to see their effect on the decay.

The numerical method used is basically the uniform sampling method [1,2,3]. This is especially adequate to catch and follow shock waves as one can see from the graphs we present.

We study several different one-dimensional models: isothermal and non-isothermal flow with and without mechanical dissipation. Gravity effects are neglected by considering the pipe to be horizontal. All our models fit in the framework of the three equations below written in conservation form:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (1)$$

$$(\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x = F_1 \quad (2)$$

$$e_t + ((e + pv)v)_x = F_2 \quad (3)$$

Equations (1), (2), (3) are the conservation of mass, momentum and total energy, respectively. The fields ρ, v, p, e are the mass

density, flow velocity, pressure and total energy density, respectively, the term F_1 may take several forms, to be discussed later, depending on the model we use. The same may happen with F_2 . We assume that the pressure p is a given function of e and ρ , i.e., $p = p(e, \rho)$.

The equations (1) - (2) describe the flow of a real fluid far away from pipe walls, if $F_1 = 0$. In this case shocks propagate with no decay due to mechanical dissipation. One way to introduce internal dissipation is taking (1)-(2) with $F_1 = (2\mu + \lambda)v_{xx}$, where $\bar{\mu}$ and λ are the shear and compression viscosities, respectively.

The influence of the boundary, given by the condition $v = 0$ at the wall, is lost in the one-dimensional model. It may be reintroduced by averaging the flow velocity in a cross section whose normal is in the direction of the flow. The boundary effect is then accounted in the momentum equation by assuming that the shear stress is the same as if the velocity were steady. This leads to the term $f_1 = -\frac{f v |v|}{2D}$ [4,5,6], where D is the diameter of the pipe and f is the well known Moody friction factor. Note that, formally, the Moody term replaces $(\mu + 2\lambda)v_{xx}$. Both terms take care of internal friction among the fluid particles only the latter takes into account the walls of the pipe. In the isothermal models we studied, we take equations (1)-(2) with F_1 being either zero, $(2\mu + \lambda)v_{xx}$, $-\frac{f v |v|}{2D}$, or their sum.

In the non-isothermal model we take equations (1), (2), (3) with F_1 as before. The term F_2 describing heat conduction through the wall is made proportional to the difference between the temperature of the fluid and the exter-

nal temperature.

All models were studied in the strip $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$. As boundary conditions we specify the pressure or the flux at each end of the pipe as a function of t . The initial condition at time zero was taken to be a steady state solution.

We give only a brief description of the numerical method. For more details, see [7,3].

The time axis is discretized. Suppose that we know the approximate solution at time level t_n . To advance the approximate solution from time t_n to time $t_n + \Delta t$ we use operator splitting. Taking the solution $(\rho(t_n), v(t_n), e(t_n))$ as Cauchy data we march by Δt through the hyperbolic conservation system given by (1), (2), (3) with the right hand side taken equal to zero (hyperbolic step). We obtain $(\tilde{\rho}, \tilde{v}, \tilde{e})$. This is then used as Cauchy data to march again by Δt through the system obtained from (1)-(2)-(3) by taking the spatial derivatives in the left hand side equal to zero (parabolic step). This gives the approximate solution at level $t_n + \Delta t$, i.e., $(\rho(t_n + \Delta t), v(t_n + \Delta t), e(t_n + \Delta t))$.

In the hyperbolic step we use either the uniform sampling method or the Lax-Wendroff scheme with or without an artificial viscosity term. The parabolic step, which can be split in several parts, depending on a suitable decomposition of the right hand side, typically yields a system of ordinary differential equations to be solved. This is done by any first order scheme.

Now we comment about the special numerical case we present in this work. We simulate the flow of an ideal gas at fixed temperature in a pipe with diameter of 20 cm and

length 800 m. We assume that at time zero there is a steady state motion with the pressure of the gas entering at the left being 10^5 N/m^2 (approximately 1 atmosphere), density equal to 1 kg/m^3 and speed 10 m/sec. To simplify our computation with friction we took a constant Moody factor equal to 0.01. Typical mesh sizes employed were 20 m. The pressure was increased by 10^5 N/m^2 linearly at both ends of the pipe in 0.1 sec and then kept fixed.

The results obtained with zero friction for the isothermal case are displayed in figure 1. Figures 2 and 3 shows the effect produced by the Moody term and the viscosity term respectively for the isothermal case. The results obtained for the non isothermal case are shown in figure A. In all figures displayed the uniform sampling method was used with 40 mesh points, as function of position. The scales are indicated by the number on the left. The time step number and the physical time are indicated at the upper right corner of the figure.

We see from the figures that both in the isothermal case and non-isothermal case with zero heat conductivity shocks are created and propagate without decay if dissipation is not taken into account ($F_1 = F_2 = 0$). The effect of the Moody term is to attenuate the amplitude of the shocks in time. When the viscosity term is present we know from theory that the solution is smooth, i.e., shocks do not appear. However, from the practical point of view, the difference between this case and the one without dissipation is a mild smooting of the edges of the shocks.

Comparing similar isothermal and non-isothermal

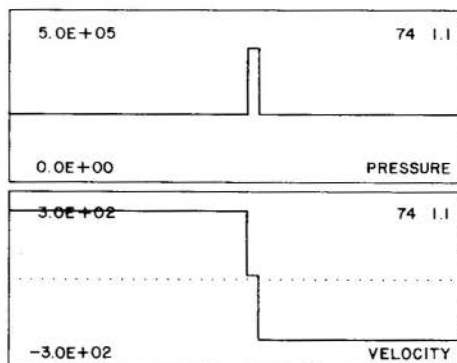
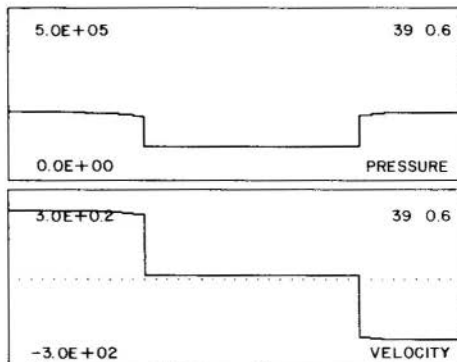
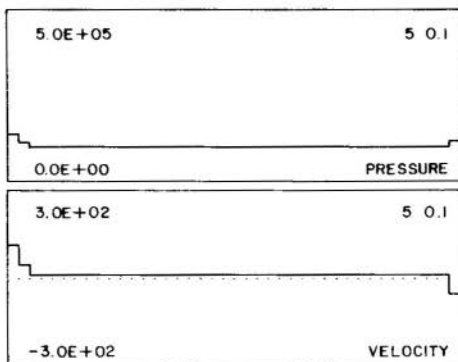
cases for small values of p and v , we see that for large times (after roughly 5 seconds) there is practically no difference between the solutions given by these two models.

Concerning the numerical method, we note that the uniform sampling method is well suited when discontinuities are the main feature of the problem. The method gives a sharp resolution of the size of the shock whenever it is present though its position is obtained with a typical error of one mesh block.

We want to comment on the work we have in progress. We are interested in other forms of dissipation terms more adapted to model laminar flow through pipes. This is necessary because while the Moody term is good for turbulent regime it is poor for laminar flow [8]. The influence of temperature variations is being studied more thoroughly. Other forms of heat losses are being considered. Finally, important applications, in gases and liquids, are being studied. The water hammer problem is one of them.

REFERENCES

1. J.Glimm, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 697.
2. A.J.Chorin, J. Comput. Phys. 22, (1976) 517.
3. D.Marchesin, P.J.Paes-Leme, to appear.
4. E.B.Wylie, V.Streeter, Fluid Transientes, Mc Graw-Hill, (1978).
5. T.Dupont, in "Constructive and Computational Methods for Differential and Integral Equations", Lecture Notes in Mathematics, No. 430, 112-130, Springer-Verlag, (1974).
6. M.Luskin, Math. Comp. Vol. 35, No. 152, (1980) 1093-1112.
7. G.A.Sod, J. Comput. Phys. 27, (1978).
8. W.Zielke, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, paper No. 67 - WA/FE-15, (1967).



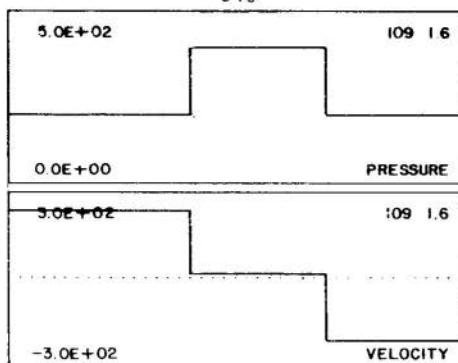
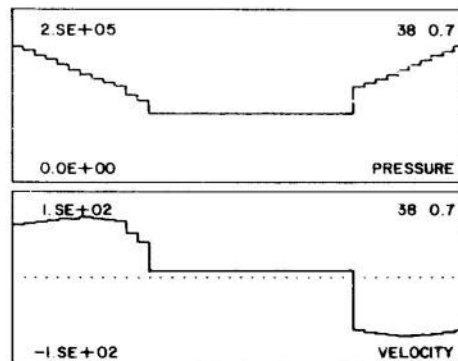
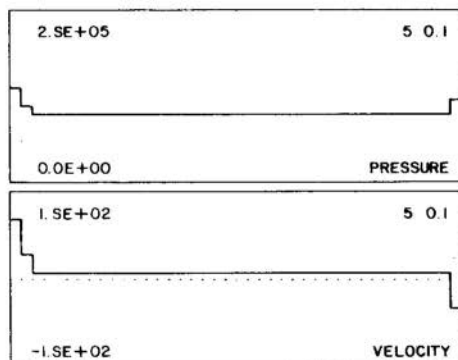


FIGURA 1



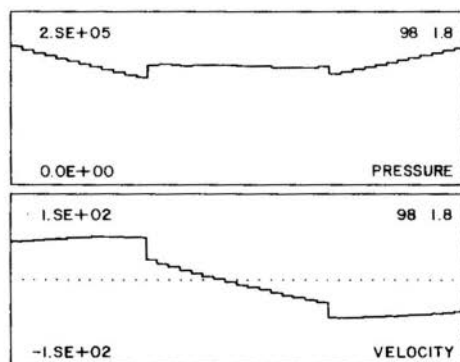
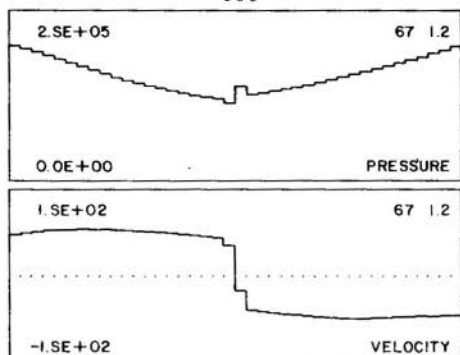
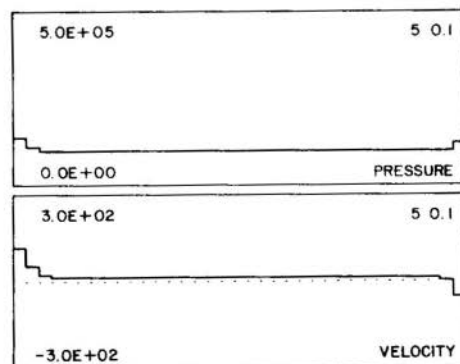


FIGURA 2



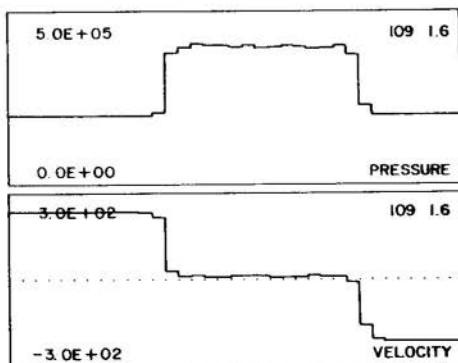
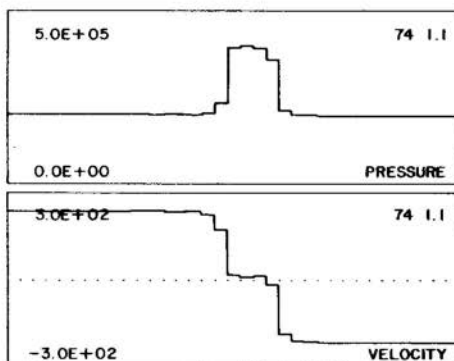
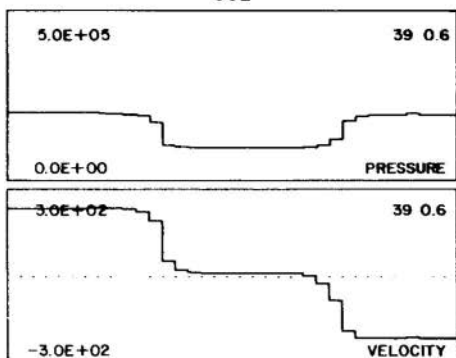
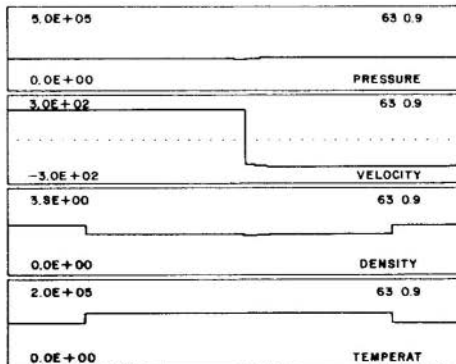
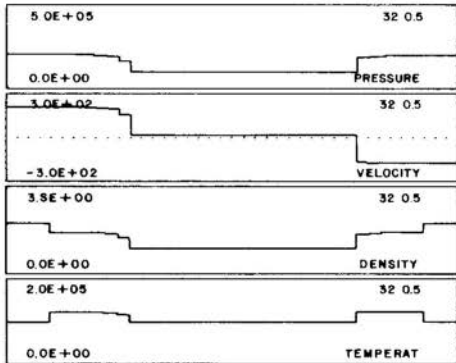
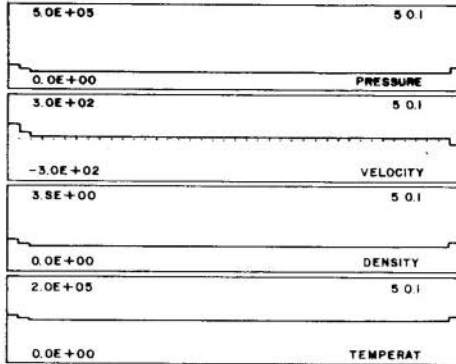


FIGURA 3



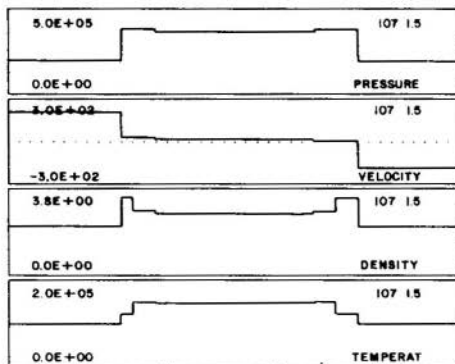


FIGURA 4



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-34

P.P. 355 - 362

PUC/RJ

MEDIDAS DE PRESSÃO ESTÁTICA E PERDA DE CARGA DO ESCOAMENTO
EM UM FEIXE DE SETE BARRAS COM ESPAÇADORES HELICOIDAIS

Marcos Coitinho Graça, Estudante

Henrique Ballve, Estudante

Eloi Fernandez y Fernandez, Professor Auxiliar

Pedro Carajilescov, Professor Associado

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

O coeficiente de atrito e as distribuições da pressão estática, nas direções axial e transversal, da parede do duto hexagonal contendo um feixe de sete barras com espaçadores helicoidais, foram obtidos experimentalmente, utilizando-se um circuito aberto de ar. Os números de Reynolds situam-se entre 10^3 e 5×10^4 . Os coeficientes de atrito são comparados com correlações existentes. As distribuições da pressão estática demonstram que a mesma não é hidrostática em uma secção reta do escoamento.

SUMMARY

The friction factor and the static pressure distributions, in the axial and transversal directions, in the wall of the hexagonal duct, enclosing a seven wire-wrapped rod bundle, were experimentally measured, using an air opened loop. The Reynolds numbers are in the range 10^3 — 5×10^4 . The friction factors are compared to existing correlations. The static pressure distributions show that the static pressure is not hydrostatic in the cross section of the flow.

1. Introdução

Diversas concepções de reatores nucleares do tipo LMFBR utilizam, como elementos combustíveis, feixes de barras, dotados de espaçadores helicoidais, de arranjo triangular, contidos em dutos hexagonais fechados, com o fluido refrigerante escoando entre as barras. Desta forma, nos últimos anos, o desempenho termohidráulico desta geometria tornou-se bastante importante. Diversos fatores geométricos e operacionais afetam este desempenho, tais como:

$$\frac{P}{D}, \quad \frac{H}{D}, \quad N, \quad R_e$$

onde $D \equiv$ diâmetro das barras;

$P \equiv$ distância entre os centros das barras;

$H \equiv$ passo da hélice do espaçador;

$N \equiv$ número de barras em um elemento combustível;

$R_e \equiv$ número de Reynolds do escoamento.

O conhecimento do coeficiente de atrito é necessário para a previsão da queda de pressão no elemento combustível e da potência de bombeamento. Diversos estudos experimentais tem sido realizados para a sua obtenção, entre os quais podemos mencionar os trabalhos de Bishop e outros (apresentado na referência [1]), Rehme [2], Chiu e outros [3], e Arwika e Fenech [4]. Estes dados serviram de base para a dedução de diversas correlações empíricas (vide, por exemplo, referências [5], [2], [3], [4]). Entretanto, estes trabalhos não são conclusivos quanto à influência dos fatores mencionados, produzindo resultados razoáveis apenas em faixas restritas de valores dos mesmos, tornando necessária a coleta de um volume maior de dados experimentais, em faixas diferentes de valores de P/D , H/D , N e R_e .

A presença da helicoidal provoca um aumento na taxa de troca de calor e intensa mistura entre os subcanais adjacentes, devido ao forte escoamento transversal induzido. As distribuições da pressão estática nas barras e na parede do duto hexagonal servem como base para o estudo do escoamento transversal e para comparação com previsões obtidas com programas computacionais de projeto. Lafay e co-autores [6] mediram a pressão estática na parede de um duto de uma secção

de teste de 19 barras, enquanto que Arwikar e Fenech [4] e Fernandez e Carajilescov [7] obtiveram distribuições de pressão estática ao longo da circunferência das barras. Tais trabalhos são pioneiros nesta área e os resultados obtidos não são suficientes para a avaliação da influência dos diversos parâmetros geométricos envolvidos.

O presente trabalho consiste na obtenção de dados experimentais do coeficiente de atrito e da distribuição da pressão estática na parede do duto hexagonal de um feixe de sete barras com helicoidais, com o número de Reynolds, R_e , contido na faixa entre 1×10^4 e 5×10^4 , com os parâmetros geométricos $\frac{P}{D} = 1,20$ e $\frac{H}{D} = 15$.

2. Aparato Experimental

O aparato experimental consiste em um circuito aberto de ar, conforme apresentado na Fig. 1. A vazão de ar é obtida através de um tubo de Pitot localizado no tubo de alimentação da câmara plena. A temperatura do ar, na entrada desta câmara, também é medida durante a experiência.

A secção transversal da secção de testes, assim como o esquema de uma barra, podem ser vistos na Fig. 2.

Para a medida do coeficiente de atrito, foram instaladas 14 tomadas de pressão, na direção axial do duto hexagonal. A localização destas tomadas é feita de forma que todas se encontrem na mesma posição relativa à helicoidal. Desta maneira, pode-se garantir que a leitura feita reflete apenas a perda de carga axial, eliminando-se as diferenças de pressão existentes em uma mesma secção transversal do escoamento. A localização destas tomadas pode ser observada na Fig. 1.

A distribuição da pressão estática foi obtida na posição $L/D = 40$, a partir da entrada, com as tomadas de pressão estática localizadas conforme mostra a Fig. 2.

A simulação da variação da posição axial é feita através da rotação das barras, alterando-se, assim a posição da helicoidal relativa às tomadas de pressão.

Detalhes adicionais do aparato experimental podem ser obtidos na referência [8].

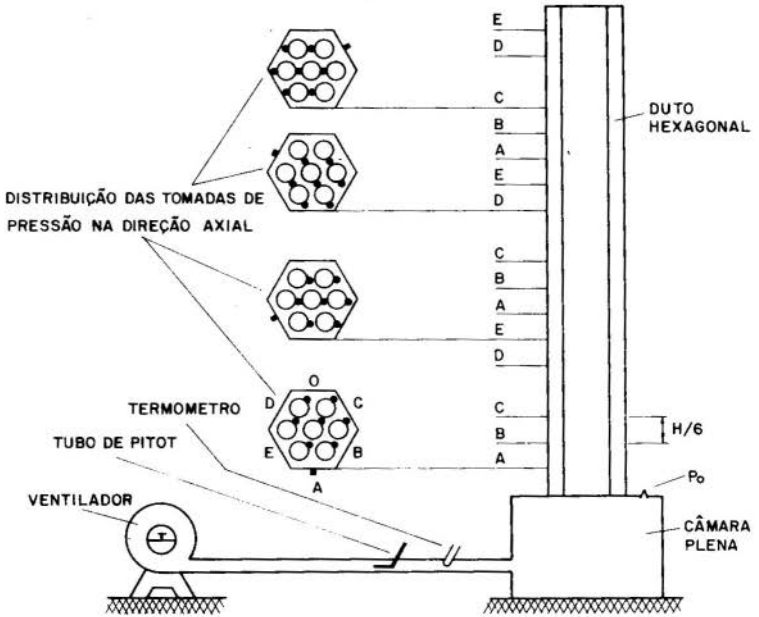


Fig. 1. Descrição do aparato experimental

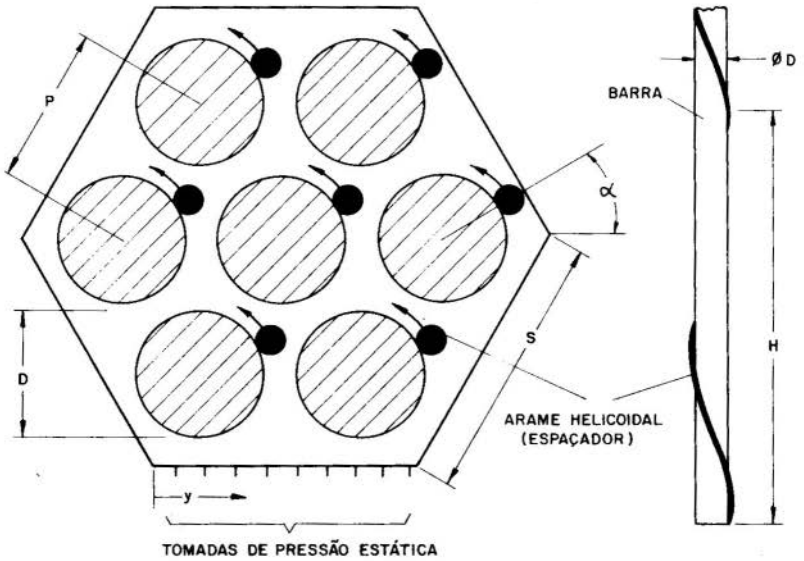


Fig. 2. Vista da secção transversal da secção de testes e de uma barra com helicoidal

3. Resultados

A distribuição axial de pressão, para $Re = 4,85 \times 10^4$, é apresentada na Fig. 3. O espalhamento dos pontos experimentais deve-se ao fato de medidas terem sido efetuadas para diferentes posições relativas da hélice com respeito às tomadas de pressão. Esta figura ilustra a necessidade de uma colocação criteriosa destas tomadas, uma vez que a pressão, além de não ser uniforme na secção, varia com a posição da hélice. Os valores do coeficiente de atrito, f , foram obtidos pela expressão

$$f = - \frac{\left(\frac{\Delta \bar{p}}{\Delta x} \right) \times D_h}{\left(\frac{\rho \bar{u}^2}{2} \right)}, \quad (1)$$

com o gradiente axial de pressão, $(\Delta \bar{p} / \Delta x)$, obtido utilizando o melhor ajuste dos pontos experimentais mostrados na Fig. 3. Valores de f são apresentados na Fig. 4, comparados com valores dados por diversas correlações empíricas. Observa-se que as correlações não representam bem os valores experimentais, demonstrando a necessidade de desenvolvimentos adicionais nesta direção.

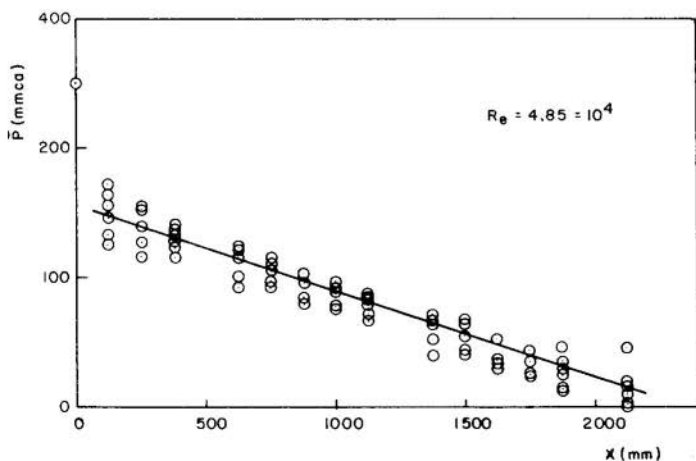


Fig. 3. Distribuição axial de pressão

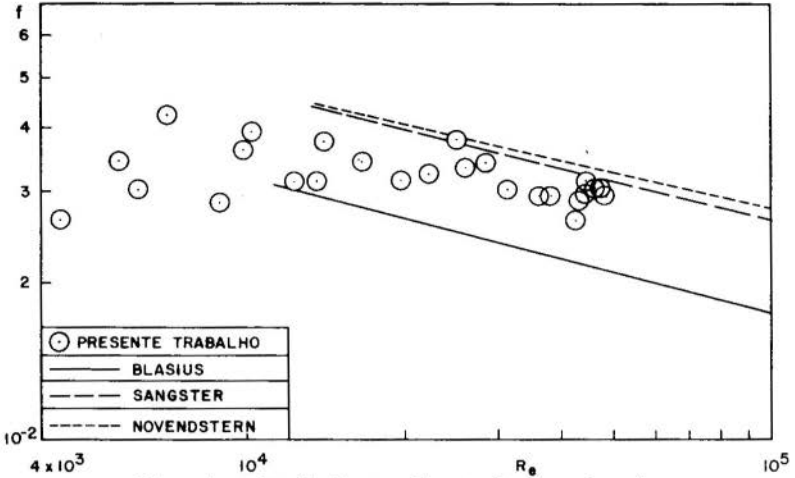


Fig. 4. Coeficiente de atrito em função do número de Reynolds

Distribuições da pressão estática na parede do duto, para diversos valores de R_e e diferentes posições da helicoidal, encontram-se na Fig. 5, adimensionalizada na forma

$$p^* = \frac{p - \bar{p}}{\left(\frac{\rho u^2}{2}\right)}, \quad (2)$$

onde \bar{p} é a pressão média na secção reta considerada. Observa-se que, através da adimensionalização proposta, as curvas tendem a ser independentes do número de Reynolds. A influência da posição da helicoidal com respeito à face onde estão as tomadas de pressão é claramente observada. Podemos, desta forma, concluir que a pressão estática, em uma secção reta do escoamento, não é hidrostática. As observações feitas estão, qualitativamente de acordo com as medidas de Lafay [6], embora as experiências tenham sido feitas em secções de teste com parâmetros geométricos diferentes.

A Fig. 6 mostra que, ao longo de uma direção axial, a pressão varia, ciclicamente, sobre a distância de um comprimento de hélice H . Não levar em consideração esta variação pode provocar a obtenção imprecisa do coeficiente de atrito para este tipo de geometria.

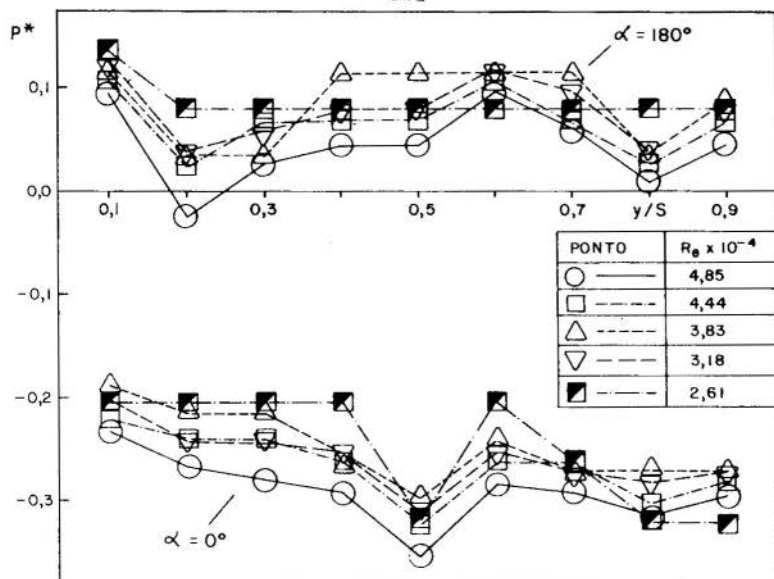


Fig. 5. Distribuição da pressão estática na parede do duto hexagonal

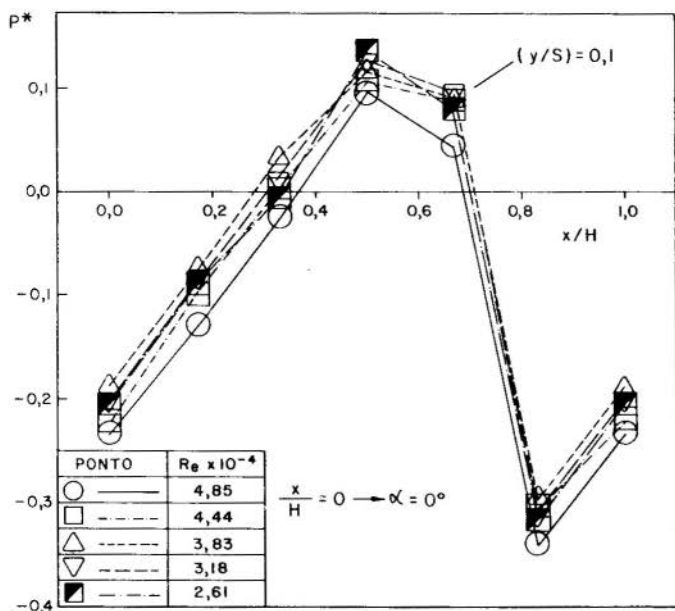


Fig. 6. Variação axial da pressão estática na posição $(y/S) = 0,1$

4. Agradecimentos

Este trabalho foi efetuado com o apoio financeiro da CNEN - Comissão Nacional de Energia Nuclear, através do Sub-Programa "Desenvolvimento da Tecnologia de Reatores", Projeto "Reatores Rápidos".

REFERÊNCIAS

- [1] Tong, L.S., "Pressure Drop Performance of a Rod Bundle", em Heat Transfer in Rod Bundles, 1968 ASME Winter Annual Meeting (New York).
- [2] Rehme, K., "Pressure Drop Correlations for Fuel Element Spacers", Nuclear Technology, Vol. 17, (1973), pp.15-23.
- [3] Chiu, C. et al, "Pressure Drop Measurements in LMFBR wire wrapped Blanket Assemblies", Report COO-2245-42TR, MIT Nucl. Eng. Dept., (1977).
- [4] Arwika, K. e Fenech, H., "Heat Transfer, Momentum Losses and Flow Mixing in a 61-Tube Bundle with wire-wrap", Nuclear Eng. Des., 55, (1979), pp. 403-417.
- [5] Novendstern, E.H., "Turbulent Flow Pressure Drop Model for Fuel Rod Assemblies Utilizing a Helical wire-wrap Spacer System", Nucl. Eng. Des. 22, (1972), pp. 19-27.
- [6] Lafay, J. et al., "Local Pressure Measurements in a Water 19-Rod Bundles Compared with FLICA II B Calculations: Influence of Helical wire-wrap Spacer System", Meeting on Liquid Metal Boiling Working Group, CEA-CONF-3491, Risley, UK (1975).
- [7] Fernandez, E.F. e Carajilescov, P., "Static Pressure Distribution in a Seven wire-wrapped Rod Bundle", Trans. ANS., Vol. 33, (1979), p. 633.
- [8] Ballve, H. et al., "Medidas da Pressão Periférica Local e da Queda de Pressão em um Feixe de Barras de Arranjo Triangular com Espaçadores Helicoidais", RI-DEM-04/81, PUC/RJ, (1981).



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-35

P.P. 363 - 372

PUC/RJ

SIMULATION OF A REFRIGERATION MULTI-CYLINDER
SINGLE STAGE RECIPROCATING COMPRESSOR

WILLIAM G. CARTWRIGHT and JOSÉ A.R. PARISE

Department of Mechanical Engineering
University of Manchester Inst. Sci. & Tech.
Manchester M60 1QD, England

SUMARIO

Um modelo de simulação do comportamento termodinâmico de um compressor alternativo de simples estágio é descrito. O ciclo do compressor é dividido em pequenos intervalos de tempo e um método numérico é utilizado na solução do sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o balanço de energia no volume de controle composto pelo cilindro. O efeito da troca de calor entre o gás e as paredes do cilindro é considerado. O fluxo instantâneo de massa é calculado em função da posição da válvula de sucção ou descarga, que, por sua vez, depende das características dinâmicas do sistema válvula-mola.

SUMMARY

A model is described for simulating the thermodynamic behaviour of a refrigeration multi-cylinder single stage reciprocating compressor. The compressor cycle is divided into small time-steps and a digital computer is used in the solution of partial differential equations which describe the energy balance in the cylinder control volume. Allowance is made for the effect of heat transfer to cylinder walls. Instantaneous mass flow rates are calculated in accordance with valve lift, which in turn, depends on valve dynamic characteristics. Results are compared with experimental data.

1. Introduction

The reciprocating type of compressor has been the subject of extensive development and is now capable of achieving a high standard of mechanical performance, in sizes ranging from a few Watts to several Megawatts of input power. Apart from many applications in process and manufacturing industries, reciprocating compressors have been used extensively for refrigeration and air conditioning. Heat pumping is a variation of refrigeration which is now receiving greatly increased attention because of its potential for energy saving, especially where heat is required at moderate temperature. It differs from refrigeration mainly in that interest is centered on the delivery of heat, rather than in the extraction of heat so as to sustain sub-atmospheric temperatures. A feature of heat pumping is that the temperature difference between the heat source and sink is likely to be more variable than in refrigeration. This results in a wider range of inlet and delivery pressures from the compressor. The heat flow rate or 'load' also varies widely. Variable speed of operation of the compressor is one method by which the changing operating conditions can be accommodated.

For these reasons, it is desirable to develop an analytical method of predicting the performance of any given compressor under different conditions of operation. Much research has already been undertaken, particularly on compressors working with gases approximating to the 'ideal gas' equation of state, $pV=RT$. Wambsganss and Cohen [1] pioneered in the analysis of spring loaded reed valves. Benson and Ucer [2] analysed the interaction between valve motion and pressure waves in the delivery and inlet ducts. Hamilton and Schwerzler [3] have modelled a commercial compressor, taking into account wave action, valve dynamics and real gas equations. A good level of accuracy was achieved though, as with all wave action calculations, data is required on the geometry of the inlet and outlet ducts, in addition to data on the compressor itself.

The present investigation aims to provide a relatively simple modelling of a compressor intended for refrigeration

or heat pumping. Pressure fluctuations in the inlet and delivery ducts are ignored, so that pressures external to the compressor are considered to be steady throughout the cycle. The interaction between cylinders is then zero, so that the analysis can readily be applied to single or multiple cylinder single stage compressors. Real gas properties are taken into account by polynomial approximations to the equation of state of any working fluid. The dynamics of valve opening and closing are considered, and allowance is made for heat transfer from the cylinder.

This simulation of the compressor is intended to be combined with analytical models of the evaporator, condenser and expansion valve, so providing a representation of the complete refrigerating or heat pumping system.

2. Analytical Model

The principal equations which have been used in the compressor simulation are presented in this section, though shortage of space prevents a complete analysis.

Fig 1 is a diagram of a single cylinder of the compressor. The valves are operated by pressure difference between the cylinder and the inlet or outlet duct. The sequence of events within the cylinder is; with suction and delivery valves closed, gas trapped in the clearance volume expands. The suction valve then opens, and gas flows into the cylinder. On the compression stroke, both valves are closed, until cylinder pressure lifts the delivery valve. Gas is then displaced into the delivery duct until the delivery valve closes and the cycle is repeated.

The specific internal energy u of a mass m of gas in the cylinder is affected by the addition of mass dm through the inlet valve at specific enthalpy h_i , heat addition dQ through the cylinder walls and work done by the gas on the piston, dW . The energy balance is

$$m \, du = h_i \, dm + dQ - dW \quad (1)$$

Quantities in equation (1) may change sign at different parts of the cycle, for example $\frac{dm}{dt}$ becomes negative during discharge. In terms of enthalpy h , (1) is:

$$(h-h_i) \frac{dm}{dt} + m \frac{dh}{dt} - V \frac{dp}{dt} - \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2)$$

where V is the cylinder volume at time t .

A kinematic equation relates V , t and crank geometry:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \left\{ x + R(1 - \cos \omega t) + L \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L} \sin \omega t \right)^2} \right] \right\} \quad (3)$$

where D is cylinder diameter, x is the effective length of the clearance volume, R is crank length, L is connecting rod length and ω is shaft speed.

The "real gas" equation of state was assumed to take the form of an equation relating enthalpy h , temperature T and pressure p ;

$$h = \sum_{i=0}^{i=3} (A_{i0} + A_{i1}T + A_{i2}T^2)p^i \quad (4)$$

It may be noted that equation (4) may also be applied to the ideal gas if all coefficients are zero except A_{00} , A_{01} and A_{02} .

The flow of gas through the valves is highly complex, being three-dimensional, compressible, time dependent and frictional. It is treated as one-dimensional flow through a variable area restriction in the present analysis. For isentropic flow through an orifice of area A_e from an inlet state 1 to a down-stream state 2, the mass flow rate is

$$\frac{dm}{dt} = A_e P_1 \left\{ \frac{2\gamma}{(\gamma-1)RT_1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (5)$$

The gas "constant" R and specific heat ratio γ may be evaluated at the upstream state 1. The flow passage through an open, or partly open reed valve takes the form of a circular orifice, followed by radial flow between the reed and valve plate. The greatest restriction usually occurs in the radial flow region. For compressible flow, the discharge coefficient C_d approximates to

$$C_d = 0.703 + 0.138 \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - 1.515 \frac{P_2}{P_1} \right) \right] \quad (6)$$

At full valve lift, the effective flow area is equal to the actual area A_{max} multiplied by C_d . At partial valve lift, experiments by Woollatt [4] and Wambsganss [1] show that the effective area of typical reed valves increases non-linearly as they open. Fig 2 shows the data provided by these investigators, together with the empirical curve fit used in the

present analysis which gives the effective area A_e at valve lift y as

$$A_e = C_d A_{\max} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{y_{\max}} \right) \quad (7)$$

Equations (5), (6) and (7) enable the instantaneous mass flow rate through a valve to be estimated at any lift y , when pressure differences are known. Lift and pressure difference are related by the dynamics of valve motion. The valve may be considered as being acted on by four forces. These are the aerodynamic force caused by pressure difference, the spring force, a viscous damping force, and finally the gravitational force. Newton's laws of motion applied to the valve give an equation for the valve lift y

$$m_v \frac{d^2 y}{dt^2} + k_v \frac{dy}{dt} + k_s y = -F_s + k_p A_p \Delta p + m_v g \quad (8)$$

The mass m_v of the valve includes a fraction of the spring mass. k_v is the viscous damping term, k_s is the spring stiffness and F_s is the spring force when the valve is closed. Δp is the pressure difference acting on the projected area A_p of the reed, and the coefficient k_p , typically 0.8, accounts for the variation of Δp across the surface of the reed. The sign of the gravitational term, $m_v g$, depends on the direction in which the valve opens.

The rate of heat transfer $\frac{dQ}{dt}$ from the cylinder wall at temperature T_w to the gas in the cylinder at temperature T is given by

$$\frac{dQ}{dt} = h A_c (T_w - T) \quad (9)$$

A_c is the area of the cylinder head and the fraction of the cylinder wall not covered by the piston. h is the corresponding value of the heat transfer coefficient, varying at different parts of the stroke and calculated by the method of Adair et al [5]. The cylinder wall temperature T_w was regarded as constant throughout the cycle. For air cooled cylinders, the value of T_w was selected to give a heat flow, between the cylinder and the surroundings, equal to the integrated heat flow between the gas and the cylinder wall during the complete cycle. The external area of the cylinder must, of course, allow for fin area and effectiveness, and

the external heat transfer coefficient must be appropriate to the type of cooling, eg forced or natural convection.

3. Method of Solution

The equations presented in Section 2 form a set of coupled non-linear ordinary differential equations. By integration with respect to time, a complete analysis of the sequence of events occurring in the compressor may be obtained. Input data to the computation includes all relevant dimensions of the compressor, shaft speed, refrigerant equation of state coefficients, ambient temperature and heat transfer coefficient to the surroundings. The state of the refrigerant in the inlet manifold must be specified completely, but for the delivery manifold, only pressure need be prescribed. The state of the refrigerant within the cylinder is not known initially at any point in the cycle.

The cycle is divided into small time steps - or crank angle values. The solution procedure adopted was to rearrange the governing equations as expressions for the rate of change of cylinder pressure p , temperature T and heat transferred Q . These three rate equations were solved by a fourth order Runge Kutta method to determine the increment in p , T and Q over each time step. The problem now becomes one of boundary values.

Starting with the piston at top dead centre, provisional starting values are needed for p , T and the cylinder wall temperature T_w . At the end of the cycle, final values of p , T and Q are obtained. The heat transfer from the gas to the cylinder wall must agree with that from the wall to the surroundings; if it does not, T_w is adjusted for a further cycle of calculation. End values of p and T may be used as starting values for the next cycle, or alternatively the adjustment may be modified by a damping factor. The cycle of calculations is repeated until the computation converges, so that final values of all variables at the end of the cycle are consistent with starting values at the beginning of the cycle.

Checks are also necessary to ensure that the time step is short enough. This is achieved by reducing the time step and ensuring that the same results are obtained. Typically,

the necessary time increment corresponded to between 0.2° and 0.5° of crank movement, depending on shaft speed.

4. Results

The simulation method has been applied to several compressors for which detailed geometrical data are known, but which have not been subjected to special tests to determine valve discharge coefficient, effective area as a function of valve lift, or cylinder heat transfer rates. These quantities were determined by the empirical methods outlined in Section 2. Much of the available published data refers to air compressors, and the method has been applied to these, as well as refrigeration compressors, to estimate both overall performance trends and more detailed fluid properties within the cylinder.

Fig 3 shows the variation of measured cylinder pressure with crank angle for the single cylinder air compressor described by Benson [2]. Also shown is the estimated cylinder pressure. The crank angle at which the valves open and close is predicted satisfactorily, although the frequency of the pressure fluctuation is inaccurate, possibly due to incorrect simulation of the viscous damping of the valve motion. The time step chosen for the cycle calculation must be short compared with the period of one pressure fluctuation.

Fig 4 shows a prediction of the performance of the same compressor operating over a wide speed range, with Refrigerant 12 as the working fluid. The simulation confirms the expected trends of decreasing volumetric efficiency with increasing speed, giving a non-linear increase of mass flow rate. Pressure drop across the valves also increases, so that with an inlet pressure of 5 bar, the minimum cylinder pressure during the suction stroke decreases from 4.7 bar at 200 rpm to only 2.2 bar at 2,200 rpm. The design speed is 900 rpm. At the delivery pressure of 10 bar, peak cylinder pressure rises from 10.4 bar to 14.9 bar over the same speed range. The combined effect of these irreversibilities causes the delivery temperature to increase from 68.9°C to the very high value of 93.9°C . The inlet gas temperature for these computations was 35°C , representing a superheat of almost 20°C .

Fig 5 shows experimental results for the delivery temperature of a twin cylinder refrigeration compressor, operated over a range of speeds, inlet pressures and delivery pressures. Predicted delivery temperatures for the same running conditions are also shown. The general trend is for predicted delivery temperatures to be too low, particularly at the higher temperature levels. The probable explanation is that the computed results ignore mechanical power losses due to bearing friction etc which, by implication, are assumed to be transferred as heat directly from the crank case to the surroundings. There is clearly scope for improving the computation by allowing for a fraction of the mechanical losses to be transferred to the refrigerant.

5. Conclusions

An analytical simulation of the performance of a reciprocating compressor is presented. When dimensional details of the compressor are provided, the method enables the overall and internal performance to be estimated. When compared with test data, the method gives a good qualitative estimate of performance trends, though improvements are needed to account for mechanical losses and a more accurate estimate of valve motion is desirable.

REFERENCES

- [1] Wambsganss, M.W. and Cohen, R., "Dynamics of a Reciprocating Compressor with Automatic Reed Valves". Proc. XII Int. Congress of Refrigeration, Madrid 1967, Paper 3.06.
- [2] Benson, R.S. and Ucer, A.S., "Some Recent Research in Gas Dynamic Modelling of Compressor Systems". Proc. Purdue Compressor Tech. Conf. 1972, pp. 491-498.
- [3] Hamilton, J.F. and Schwerzler, D.D., "Computer Aided Studies of a Refrigeration Compressor" Trans ASME, Jnl. of Mechanical Design vol.100, Oct.1978, pp 599-603.
- [4] Woollatt, D. "A Simple Numerical Solution for Compressor Valves with One Degree of Freedom". Proc. Purdue Compressor Tech. Conf. 1974, pp. 159-165.

- [5] Adair, R.P., Qvale, E.B., and Pearson, J.T. "Instantaneous Heat Transfer in Reciprocating Compressors". Proc. Purdue Compressor Tech. Conf. 1972, pp. 521-526.

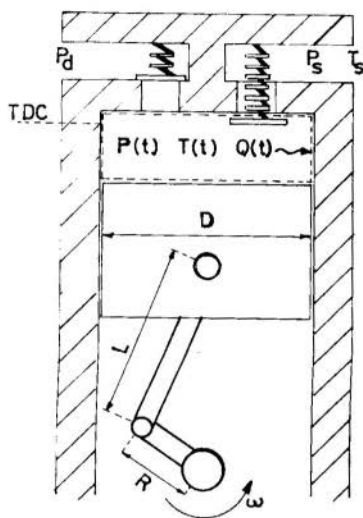


Fig 1. Arrangement of Compressor Cylinder.

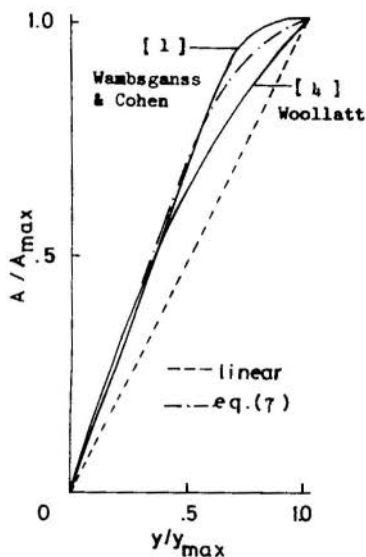


Fig 2. Valve Area Change at Partial Lift.

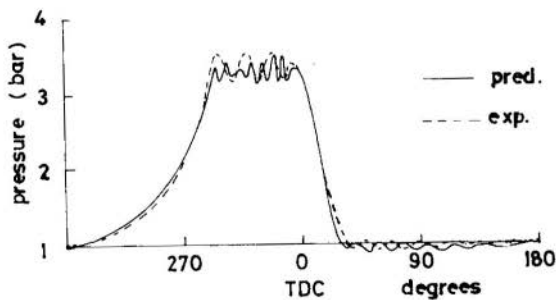


Fig 3. Predicted and Experimental Cylinder Pressure v Crank Angle.

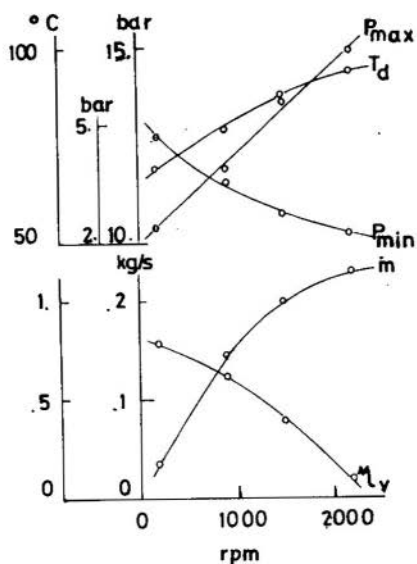


Fig 4. Effect of Compressor Speed on Performance.

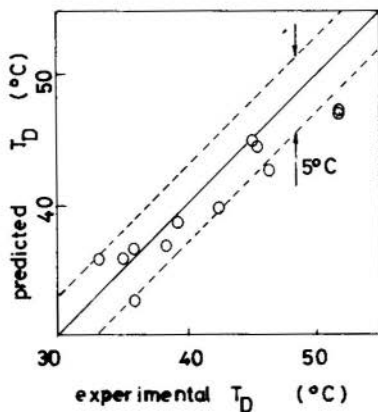


Fig 5. Comparison of Measured and Predicted Delivery Temperatures, T_D

ANAIS

PROCEEDINGS



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA
RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-36

P. P. 373 - 382

PUC/RJ

DESIGN AND CONSTRUCTION OF NEW ROTATING
COMBUSTION ENGINE PROTOTYPE

Jorge Mejía Lema

Department of Mechanical Engineering
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela

SUMMARY

This work describes the design and construction of a new rotating combustion engine prototype. The different component parts of the engine are shown and described. The assemble and operation of the prototype is shown step by step. The new alternating mechanism of the rotating piston will be published for first time.

1. Introduction

Many rotary internal combustion engines layouts have been designed since the middle of nineteenth century until our days. The developments can be compared to the alternating linear pistons engine.

Reference (1) describes a summary of different types of engines designs in order to use Otto cycle as rotating operation. Also it has been investigated the possibility to use the Diesel (2) and Stirling (3) cycles, the last one has external combustion cycle.

The rotary engines using the Otto cycle Wankel's engine has been well developed. Some advantages of Wankel engine are: 50% of the full size of current piston engine for equal power output (4), lower number of parts (633 v.s. 1029) according to (5), low level of vibration and NO_2 pollution. Although there are still some problems to be solved as: Cooling system (6), lubrication (4), compression losses (7), excessive emission of CO_2 and hydrocarbons (4) given a lower combustion efficiency. Due to friction the mechanical efficiency is bringing down.

Another engine model which has been investigated is the Tschudy's engine (Trangott Tschudy, Swiss designer 1927). This engine uses toroidal pistons and cylinder moving then as scissors.

The construction difficulties founded by Tschudy were solved by Euged Kauertz (8), changing the piston shapes to a radial piston driven into a cylinder.

The construction of Kauertz engine is easiest than Wankel engine and may have the same advantages and/or disadvantages.

Mr. Luis Zambrano has been developed a rotative engine prototype with a similar design of a Kauertz engine (by a curious coincidence) but with different alternating mechanism. This engine is shown and described in this paper. Some improvements to the prototype should be introduced at the School of Mechanical Engineer at Merida.

2. Design Justification

Justification for the adoption of this engine type will be appreciated from the following brief summary of established advantages:

a) Fuel Consumption. The specific fuel consumption is considerably lower than that of the corresponding alternating engine. Even with equal fuel cost per gallon the fuel cost per horsepower, is often from

20 to 30 per cent less (8). This saving is still greater in countries where cheaper fuels, including alternative grades are available.

b) Torque. The rotative engine has better torque characteristics than the equivalent alternating engine, the torque being more uniform over a wider range of engine speed. For automobiles this means a much better top gear performance.

c) Reliability. Rotary engines, due to low number of components parts and simplified mechanism are more reliable. Furthermore, if the rotary engine would be equipped with injector the absence of ignition and carburation equipment which, in automobiles, account for no less than 25 per cent of breakdown causes, are still more reliable.

d) Maintenance. The injection pump and injector of precision fit components are much more reliable than the ignition and carburettor systems of the petrol engine, so that maintenance attention is reduced. Injection pumps, once calibrated and adjusted, will operate for periods as long as 5,000 hours without servicing, while injectors require no more than sparking plugs.

e) Mixture Distribution. Because of the accurately metered fuel charges to the cylinder the mixture distribution is better than that of the carburetor so that engine running is more uniform and output higher on this account.

3. Description of the engine prototype

An isometric drawing of cylindrical combustion chamber, rotary pistons and the alternating mechanism is shown on Fig. 1.

a) Cylindrical combustion chamber, Fig. 1, N° 2, is constructed of one cast iron 250 mm internal diameter, 100 mm wide hollow cylinder. It has two closed sides; one side contains the supporting rolling bearing for the output shaft and the other side, Fig. 1, N° 2, has the support for the hollow shaft bearing and planetary.

b) Rotary pistons, Fig. 1, N° 1, 3, there are two sets of pistons that has a closely fitting one into the other as shown on Fig. 1. One set is fixed to the power shaft and the other fixed to the hollow concentric shaft. Both pistons are designed to rotate with different speeds. The pistons are constructed of aluminium castings, rather than steel, to

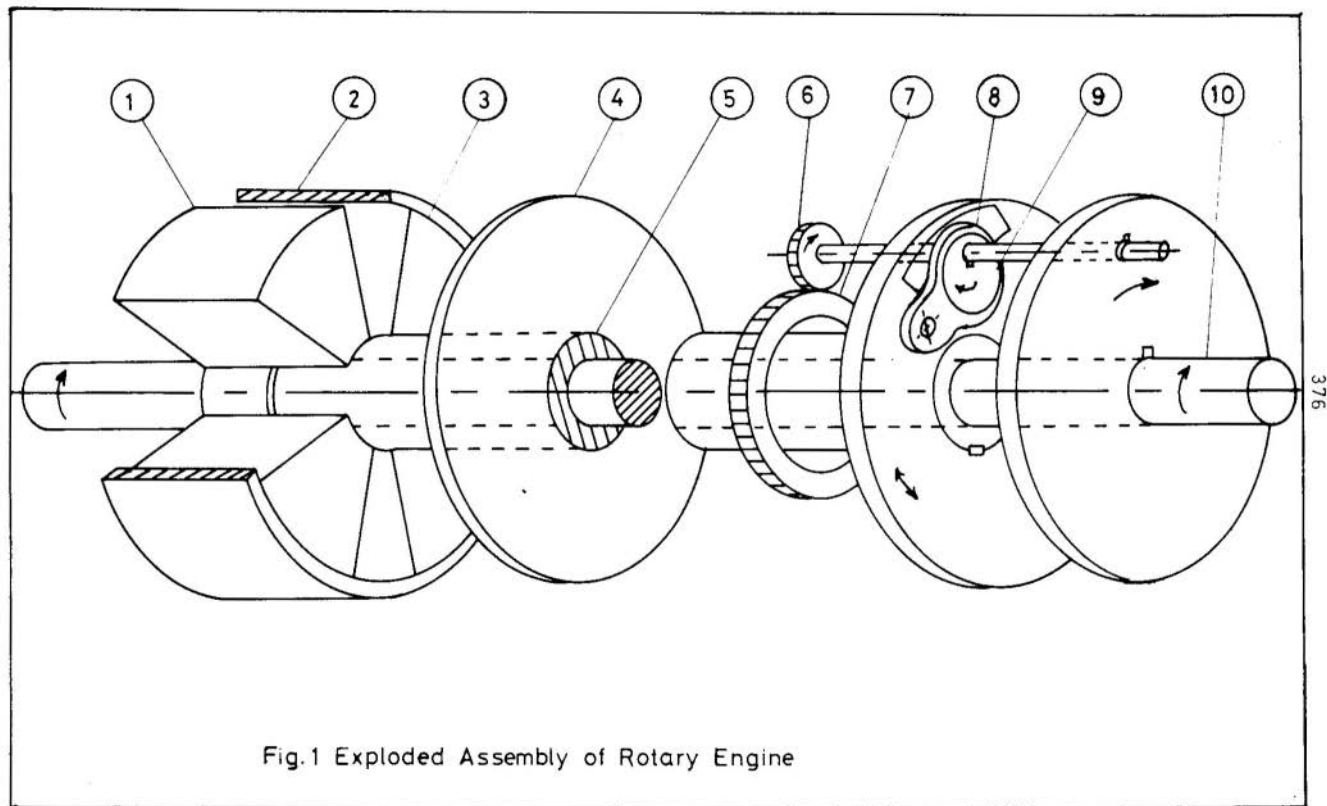


Fig.1 Exploded Assembly of Rotary Engine

avoid rusting and other corrosion problems and to produce a light pieces.

Due to the close fitting between each set of rotary pistons, they has been design in two different assemble parts as shown on Figure (3). In order to avoid compression losses, the pistons has been provided of radial and tangential grooves to locate wearing springs.

c) Alternating mechanism is an essentially a five link mechanism shown in Figure 1 (N° 6, 7, 8, 9). This mechanism is constructed with two discs, an excentric and its follower, which is an expanding pairing elements. One disc in fixed to the power shaft and rotates continuously. The other disc is fixed to the hollow shsft and rotate different speed than the disc fixed at power shaft. A planetary gearing system is used to drive the excentric link.

4. The fuel injection system

The complete system consists of a fuel supply tank, and deliver it to the fuel injection pump shown on Figure 2, N° 5 which, in turn; delivers accurately measured small amounts of fuel at high pressure to the engine. The fuel is supplied to a suitable type of fuel injection nozzle or fuel "Sprayer", mounted on the combustion chamber unit. Apart from these principal components, special fuel celeaning filters are placed in series with the components at suitable locations to extract any dirt particules before the fuel reaches the injection pump and, in some instances, the injection nozzles.

For this prototype was selected a fuel injection system used by General Motors Corporation that employ a combination fuel injection pump and injection nozzle such that the fuel from a low fuel pump delivers low pressure fuel to the combined unit. There, the high pressure pump element delivers a metered charge of fuel to the injection nozzle. Figure 2 illustrates the principle of this system and shows the method of operating the injection pump unit from the camshaft(N°7) through a lower rocker (N° 6), push-rod (N° 4) and over head rocker arm (N° 3). The prototype is equipped with a ignition system in order to be use petrol. At the end of the cranshaft there is a contact-breaker (N° 10) to supplies the sparks in the cylinder which ignite the air petrol mixture. The complete coil ignition system includes the battery, the ignition swich, high-tension coil, the contact-breaker and the sparking

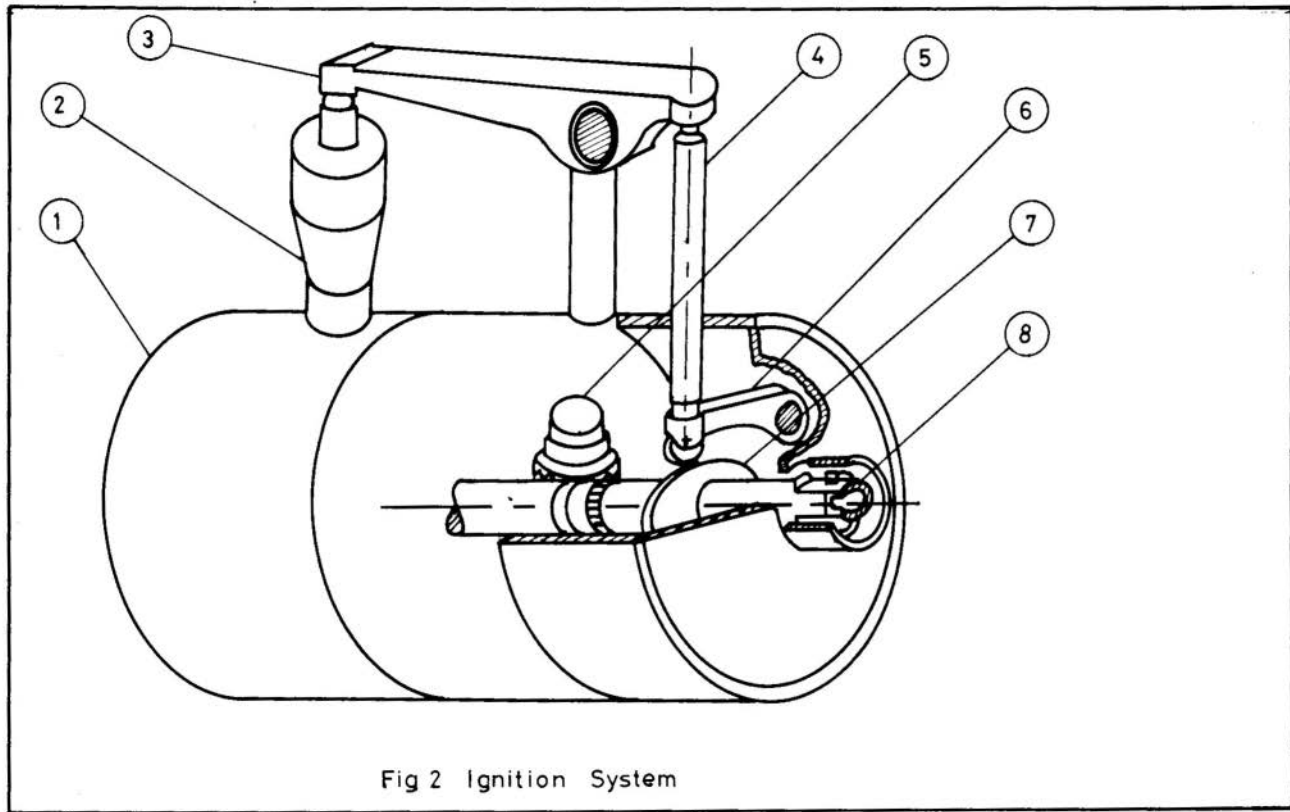


Fig 2 Ignition System

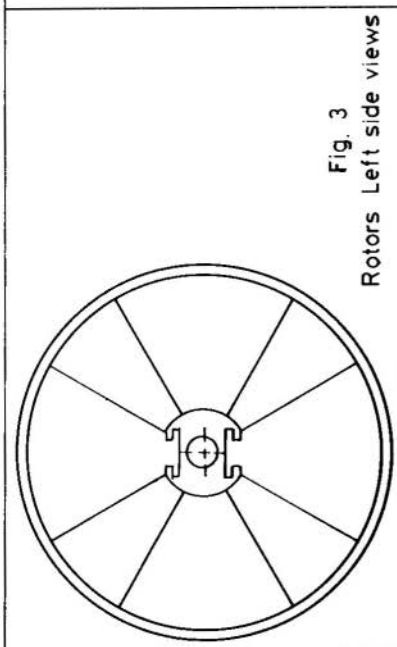


Fig. 3
Rotors Left side views

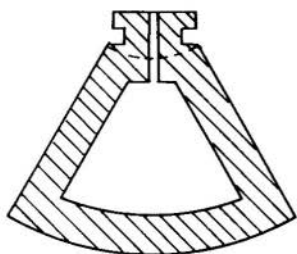


Fig. 4 Power Piston

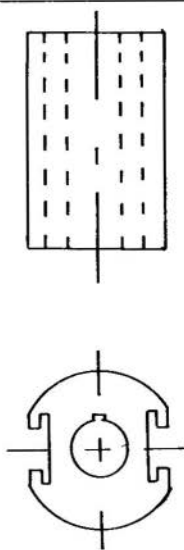
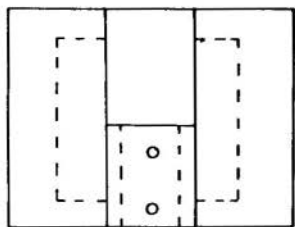


Fig. 6
Eccentric link and connecting Rod

plug on the cylinder.

5. Construction of the prototype

Conventional machine tools can be used for machining the different parts of the engine prototype. The assamblage of the power piston and reciprocating must be a precision fitting. Due to technological difficulty of get the precision piston set from one piece, the piston set is constructed in there pieces. Figures 4 and 5 illustrates one componet part of the piston power set and the piston attachment. Both component parts can be machining to close tolerances. Then they can be put together to get one piece.

Other componet parts of the prototype are easily constructed and put together. There are some standard parts which can be buying is the market.

6. Operation of the prototype

The fuel explosion into the combustion chamber is the prime mover, this effect is transmited to the reciprocating mechanism through the power shaft. The reciprocating mechanism is moved at different speed. The speed ratio between reciprocating mechanism and power shaft is 2:1 which is the ratio of planetary gearing. Figure 7 shows the four-cycle for one rotation of the piston.

Figure 7 N° 1 shows the ignition of compressed fuel, at this stage the two pistons will be separated by the fuel expansion. At the same time the other opposite side into the cylinder, the piston faces are separating and stanting the admission cycle. When, the admission cycle has been completed, the compression stage starts and continues until the ignition time will start again. When explosive forces are separating the pistons, the links (OC) and (OA) (Figure 8) will be either joint together or they will separte 180 degrees forward. When the link (BA) is pulling or pushing, the planetary gearing will rotate, given an additional turn to the cranshaft.

7. Cinematic Diagram

A cinematic diagram is shown on Figure (8), the link (OA) is the distance between the power shaft and the center of the crank link, the link (OC) is the distance between the center of the hollow shaft and

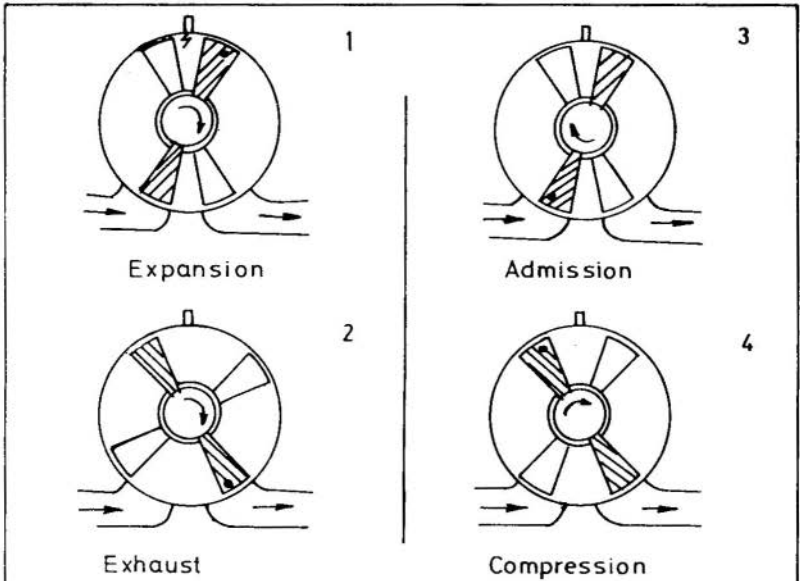


Fig 7 Four-cycle Rotary Engine

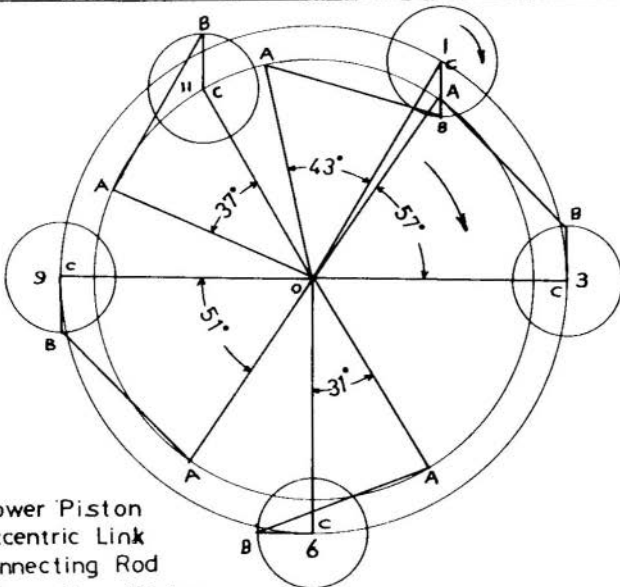


Fig 8 Cinematic Diagram

connecting rod (AB). The eccentricity is represented by the link (CB). Five positions of the reciprocating mechanism are shown on Figure 8, at position (1) the eccentric link has rotated 90 degrees and the link (OB) has moved 60 degrees. At this position the angle between links (OA) and (OC) is about 43 degrees. The link (OC) continues its movement and the angle between links (OA) and (OC) will increase and later on this angle will decrease. From position (6) to (11) the cycle is repeated again. For one complete rotation of link (OA) the piston will be opened and closed twice getting the four-cycle operation.

8. Conclusions

This rotary engine, at least on theory, is less complicated than Wankel engine because it has not an eccentric internal mechanism which are difficult to be cooled and lubricated. The seal problems presented on this engine are easier to be solved than the problems presented on Wankel engine. There are too much to be done in this field but some day the rotary engine will be a successfully answer energy-saving.

REFERENCES

- (1) Norbye. J. P., Wankel Engine, Chilton Co. Philadelphia, Pa. 1971.
- (2) Feller F., II motore rotativo a due stadi (Diesel) IME Proceedings 1970-1971, volume 185 13-71.
- (3) Bougard J., Importance de la Cinématique dans les Machines Stirling, Rev. M. Mech. V 21 n2 Jun-Jul 1975 p. 185-190 (Belgica).
- (4) Norbye J. O., II motore rotativo Wankel e l'industria automobilistica americana, Revista ATA, Nov. 1971, Torino.
- (5) Carroll W., Mazda Rotary Engine Manual, Auto Book Press, San Marcos, California, 1972.
- (6) Atesmen K. M., Heat Transfer in Rotary Combustion Engines (Wankel), ASME paper n 75-HT-FF, 1975 6 p.
- (7) MC Cuiston F.D., Analytical Evaluation of the Effect of Leakage on NO Emissions from a Rotary Engine, SAE Prepr. n 750023 for Meet Feb. 24-28, 1975, 6p.
- (8) Hugén Kavertz, Rev. Mecánica Popular, Vol. 31 N° 3, 1962.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-37

p.p. 383 - 394

PUC/RJ

ESTUDIO SOBRE LA INFLUENCIA DE LA ALTURA EN LOS MOTORES DE COMBUSTION INTERNA

Abelardo G. Ludeña Luque

Catedrático

Universidad Nacional de Ingeniería

Lima - Perú

RESUMEN

En el presente trabajo se expone una metodología para determinar la variación de los parámetros de potencia y economía de combustible de los motores de combustión interna terrestres en función de la altura sobre el nivel del mar en que actúan. Se muestran así mismo, algunos resultados experimentales obtenidos en un banco de ensayos estacionario construido especialmente para este fin y su comparación con los resultados de estudios similares efectuados por otros investigadores.

SUMMARY

In this paper it is shown out a method to determine the power and fuel economy parameters variation in internal combustion engines as a function of altitude over the sea level where they make their performance. At the sametime it is shown some experimental results obtained in a stationary testing bench specially structured and the corresponding matching with results of analogous studies issued by other authors.

1. Introducción

Los estudios y experimentos realizados en el Perú y en el extranjero nos permiten, desde ya, tomar medidas para corregir la negativa influencia de la menor densidad del aire en la altura en el comportamiento de los motores. Así, por ejemplo, se ha comprobado fehacientemente que es totalmente innecesario hacer funcionar los motores a gasolina en la altura con los mismos requerimientos de octanaje con que lo hacen en la costa. Según datos estimativos de los científicos V. Majaldiani [6], H. Bigley, B. Keller y T. Wusz [1], por cada mil metros de altura se requiere aproximadamente 12...16 unidades menos de octanaje. Esto significa que, para un rango de relaciones de compresión desde 7 hasta 9,5 (que comprende a la mayoría de los motores a gasolina), prácticamente a partir de los 2000 metros sobre el nivel del mar (s.n.m.) los motores estarían en condiciones de utilizar gasolinas del mas bajo octanaje producible (destilación primaria), como el de 66 octanos por ejemplo, y, obviamente, de mucho menor costo.

Pero la altura también influye en el mas rápido desgaste de las piezas fundamentales del motor. Esto se debe al empeoramiento de las funciones que efectúan los sistemas de lubricación y refrigeración.

Los trabajos de investigación realizados en este campo [6], [7], han mostrado que el aceite de los motores, especialmente los de encendido por chispa, pierde rápidamente sus cualidades lubricantes en la altura por efecto de la mayor contaminación que le producen las mezclas aire-combustible enriquecidas también por efecto de la altura, así como por una disminución rápida de su viscosidad. Esto significa una mayor frecuencia en los cambios de aceite (mayor costo de mantenimiento) y un mayor desgaste relativo de las superficies en fricción (menor vida útil y mayor costo por reparación). Así mismo, durante las subidas prolongadas de los vehículos por las pendientes de la cordillera el motor sufre por recalentamiento, y durante los descensos prolongados, por el contrario, de sobreenfriamiento. Estos significativos cambios de temperatura en las paredes de los cilindros, pistones y culatas principalmente, origina considerables tensiones térmicas

Tabla 1. Propiedades del aire atmosférico a diferentes alturas s.n.m. en territorio peruano

Lugar	H km	Presión atm.		Temperatura		Peso espec.
		kg/cm ²	mm Hg	°C	°K	
Aeropuerto Interna cional Callao	0,013	1,0310	758,64	18,81	291,81	1,206
Tacna	0,458	0,9500	698,94	17,20	290,20	1,118
Ricardo Palma (Lima)	1,040	0,9147	673,00	18,00	291,00	1,073
Matucana (Huarochirí)	2,020	0,8087	595,00	15,24	288,24	0,958
Arequipa	2,332	0,7300	537,08	13,60	286,68	0,869
San Mateo	3,020	0,7122	524,00	15,56	288,56	0,843
Huancayo	3,350	0,7000	515,00	12,00	285,00	0,839
Casapalca	4,010	0,6266	461,00	8,50	281,50	0,760
Cerro de Pasco	4,333	0,6133	451,24	4,10	277,10	0,756

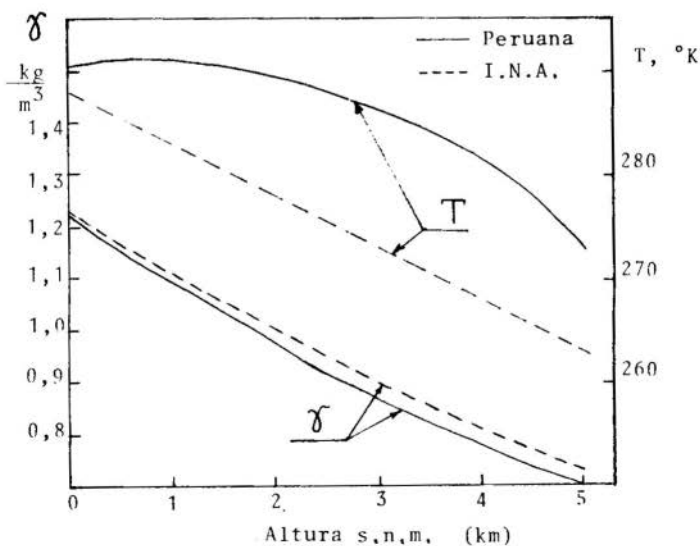


Fig. 1. Variación de la temperatura y del peso específico del aire en función de la altura.

que también dan lugar a una menor durabilidad de las piezas.

La mayoría de los trabajos de investigación efectuados en el extranjero [2], [7] han permitido obtener sendas expresiones matemáticas que vinculan los parámetros de potencia y economía del motor en función de la altura. Sin embargo, estas ecuaciones toman en cuenta la variación de las propiedades del aire según los datos proporcionados por la International Normal Atmosphere (I.N.A.), que son válidas para los países europeos y América del Norte pero no exactamente para todos los demás países, como el Perú por ejemplo.

2. Análisis teórico

Las diferencias observadas en la variación del peso específico y de la temperatura atmosférica en diferentes lugares del Perú, tal como se ilustra en la fig. N° 1 y en la tabla N° 1, con respecto a los datos de la I.N.A. son notorias. Esto consiguientemente significa ya una corrección de las mencionadas expresiones matemáticas para poder ser aplicadas correctamente en los países andinos. Estas y otras consideraciones, especialmente la variación de la composición de la mezcla con la altura, han servido para deducir una expresión analítica para el caso de la variación de la potencia de un motor de encendido por chispa en la altura [3]:

$$\frac{N_e}{N_{eo}} = (1 - 0.047 H) \left[\sqrt{p/p_0} - 0.65 \left(\frac{1}{\eta_{mo}} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} - \sqrt{\frac{p}{p_0}} \right) \right], \quad (1)$$

y para un motor Diesel [4]:

$$\frac{N_e}{N_{eo}} = (1 + 0.091 H^{0.826}) \left(1.11 - 0.11 \frac{\gamma}{\delta} \right) \frac{p}{p_0} \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \quad (2)$$

donde H - altura s.n.m., en km; p, T - presión y temperatura atmosférica a una altitud dada; γ - peso específico del aire a la misma altitud. El subíndice cero representa a los mismos parámetros pero considerados a nivel del mar.

Análogamente, las ecuaciones para la determinación de la variación del consumo específico de combustible (g_e) tan-

to para el motor a gasolina como para el Diesel se muestran las ecuaciones (3) y (4):

$$\frac{g_e}{g_{e0}} = 1 / \left[1 - 0.65 (1/\eta_{mo} - 1) \left(\frac{p_0}{p} \sqrt{\frac{T}{T_0}} - 1 \right) \right], \quad (3)$$

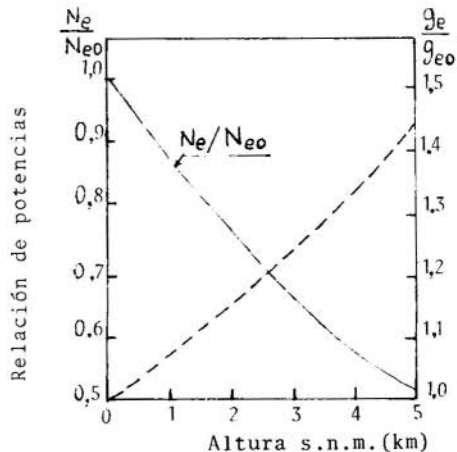
$$\frac{g_{e0}}{g_e} = \frac{N_e}{N_{e0}} = (1 + 0.091 H^{0,826}) (1,11 - 0,11 \frac{\gamma_0}{\gamma}) \frac{p}{p_0} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \quad (4)$$

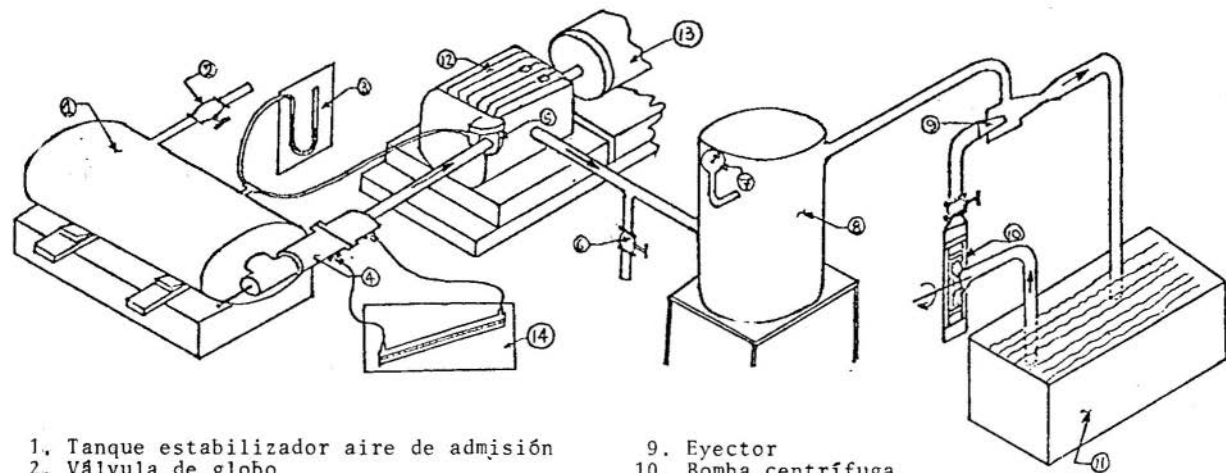
Los resultados de la variación de la potencia y economía de combustible en función de la altura s.n.m. en que se encuentra el motor se ilustran en la fig.2 y en las tablas 2 y 3.

Tabla 2. Variación de la potencia y economía de los motores Diesel en función de la altura (en Perú)

H (km)	1	2	3	4	5
p/p_0	0,887	0,785	0,692	0,603	0,533
T/T_0	0,977	0,993	0,982	0,962	0,934
γ/γ_0	0,890	0,791	0,705	0,632	0,570
α/α_0	0,897	0,778	0,698	0,620	0,552
N_e/N_{e0}	0,955	0,888	0,816	0,746	0,680
g_e/g_{e0}	1,047	1,126	1,225	1,340	1,471

Fig.2. Variación de la potencia y economía del motor de encendido por chispa en función de la altura





1. Tanque estabilizador aire de admisión
2. Válvula de globo
3. Manómetro diferencial
4. Medidor de flujo de aire
5. Carburador
6. Válvula compuerta
7. Vacuómetro
8. Tanque estabilizador gases de escape

9. Eyector
10. Bomba centrífuga
11. Tanque de agua
12. Motor de comb. int.
13. Freno dinámico
14. Micromanómetro

Fig.3. Esquema general del banco experimental para simular condiciones de altura

Tabla 3. Variación de los parámetros de potencia y economía de combustible de los motores a gasolina a diferentes alturas de la cordillera andina

H (km)	p (kg/cm ²)	$\frac{p}{p_0}$	T (°K)	δ (kg/m ³)	δ/δ_0	$\frac{N_e}{N_{e0}}$	g_c/g_{e0}	α/α_0
0	1,033	1,000	291,8	1,225	1,000	1,000	1,000	1,00
0,5	0,972	0,942	291,4	1,154	0,942	0,938	1,034	0,97
1,0	0,917	0,887	291,0	1,090	0,890	0,879	1,071	0,94
1,5	0,864	0,835	290,6	1,029	0,840	0,823	1,111	0,92
2,0	0,811	0,785	289,8	0,969	0,791	0,768	1,154	0,89
2,5	0,763	0,737	288,5	0,915	0,747	0,715	1,201	0,86
3,0	0,715	0,692	286,5	0,864	0,705	0,664	1,252	0,84
3,5	0,671	0,649	283,7	0,818	0,668	0,616	1,307	0,82
4,0	0,628	0,608	280,8	0,774	0,632	0,570	1,368	0,80
4,5	0,589	0,570	277,0	0,736	0,601	0,527	1,433	0,78
5,0	0,550	0,533	272,5	0,698	0,570	0,485	1,507	0,76

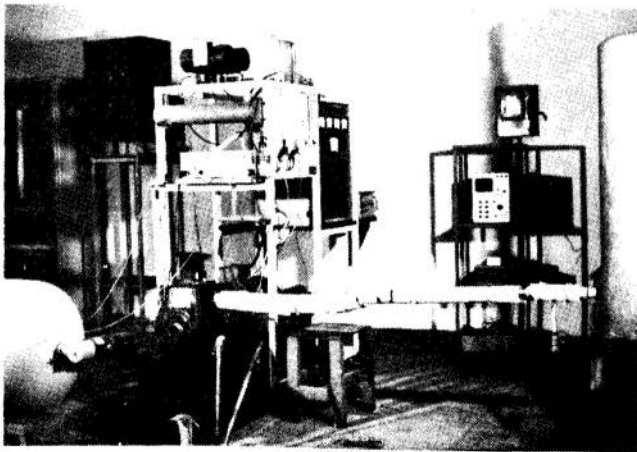


Fig.4. Fotografía del banco de pruebas para simulación de las condiciones de altura en el Laboratorio de Máquinas Térmicas de la Universidad Nacional de Ingeniería

3. Resultados experimentales

Las ecuaciones y los resultados teóricamente concebidos en esta primera etapa de la investigación tenían que ser comprobados experimentalmente. Con este fin se construyó en el Laboratorio de Máquinas Térmicas de la Universidad Nacional de Ingeniería en Lima, un banco de pruebas especial para simular las condiciones que existen a diferentes alturas s. n.m. y en las que deberán funcionar los motores a gasolina y Diesel experimentales.

En la fig.3 se muestra esquemáticamente la estructura del banco de simulación. Así mismo, en la fig.4 puede observarse una fotografía de las instalaciones del banco mencionado.

En las pruebas efectuadas con el motor Diesel monocilíndrico de cuatro tiempos marca Petters PH1W, se obtuvieron los resultados que se muestran en la fig.5. En este gráfico puede observarse la similitud entre la curva obtenida experimentalmente con los teóricamente calculados, tanto mediante el cálculo térmico (curva 2) como por las fórmulas deducidas por T.Wu [7] (curva 4) y por el suscrito (curva 3).

Los resultados han sido obtenidos para el caso cuando el coeficiente de exceso de aire (α) varía permanentemente con respecto a la variación de la altura. Es necesario mencionar que la caída de potencia y economía de los motores en la altura se debe no solamente a una disminución de la cantidad de sustancia de trabajo por efecto del enrarecimiento del aire, sino que además, vinculado a este factor, varían sustancialmente otros índices que contribuyen también al desmejoramiento de la combustión y por ende, al decrecimiento de la potencia y economía de los motores. Entre estos factores se encuentran la variación de la composición de la mezcla, el avance de la chispa o de la inyección (según corresponda el tipo de motor), la penetración del chorro de combustible durante la inyección a la cámara de combustión y el grado de pulverización, así como el tipo de combustible empleado, entre otros.

La composición de la mezcla α varía hasta en 24...45% a 5000 metros s.n.m., tal como se muestra en las tablas 2y3. En los motores de encendido por chispa, esta variación in-

fluye sobre los parámetros de potencia directamente proporcional a una magnitud igual a $K_{\alpha} = (1 - 0.047H)$, siendo H la altitud en kilómetros s.n.m. Para el caso de su economía de combustible, ésta varía inversamente proporcional a la mencionada magnitud.

Para los motores Diesel teóricamente se ha deducido un factor similar, que es igual a $K'_{\alpha} = 1 + 0.091 H^{0,826}$, con el efecto análogo sobre la potencia y economía mas arriba mencionado. Sin embargo, para los motores Diesel hay que tener en cuenta adicionalmente que un descenso del coeficiente de exceso de aire por debajo de 1,2 (20%) significaría la formación de grandes cantidades de humo en los gases de escape, así como sarro o carbonilla en la cámara y simultáneamente la mas rápida caída de la potencia y economía del motor. Los resultados experimentales realizados en el banco de pruebas [3] (ver fig. 6) nos muestran que para el caso que se tratara de mantener el coeficiente $\alpha = 1,5$ constante al que tenía en condiciones atmosféricas normales, la potencia decrece en un 30% a 5000 metros s.n.m. con respecto a la potencia del motor sin regulación de α . Por otro lado, se observa también que el consumo específico al freno de combustible disminuye en 21%, lo que indudablemente representa una notable ventaja.

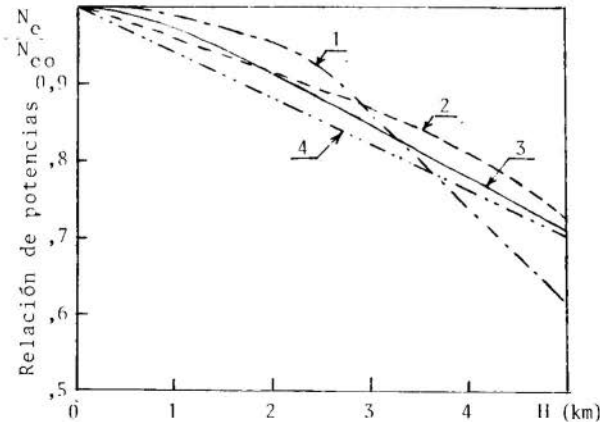


Fig.5 Variación de la potencia efectiva de un motor Diesel en función de la altura

Curva 1- Resultados experimentales; Curva 2- Según el cálculo térmico [4];
Curva 3- Según fórmula del autor [4]; Curva 4- Según fórmula de T.Wu [7]

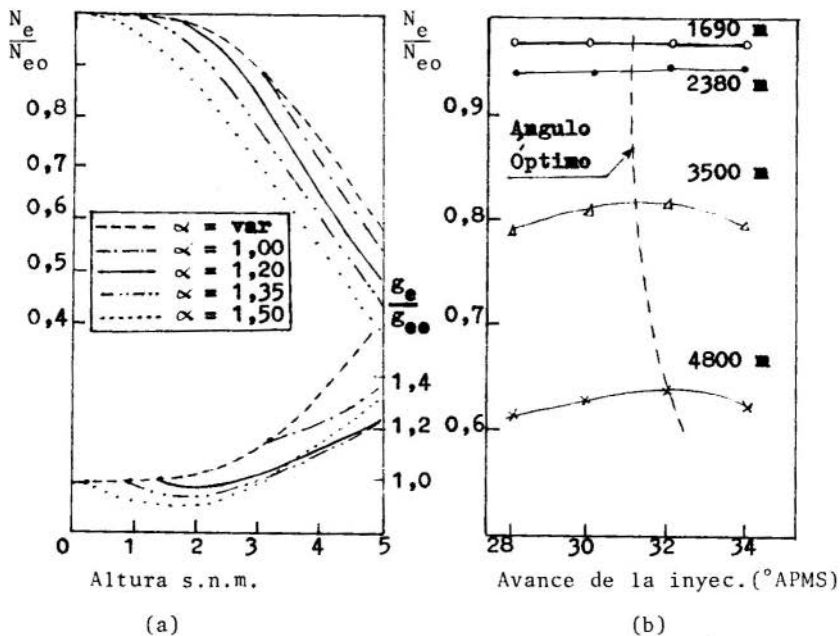


Fig. 6. Variación de la potencia y del consumo específico de combustible de un motor Diesel para diferentes valores del coeficiente de exceso de aire (gráfico a) e influencia del avance de la inyección en la potencia efectiva para diferentes alturas (gráfico b)

Con el objeto de evitar un descenso considerable de potencia pero, al mismo tiempo, conseguir un funcionamiento sin humos del motor ni formación de carbonilla en la cámara de combustión con el máximo de economía de combustible, se ha considerado adoptar $\alpha = 1,2$, valor que la mayoría de investigadores considera como el mínimo tolerable. Esta corrección significaría a 5000 metros una reducción de potencia en 15%, pero el consumo específico también bajaría en 23%, valores más aceptables.

Significativa importancia merece también el estudio de la influencia del avance de la inyección en la variación de potencia para una determinada altura en la que funciona el motor. En la fig. 6-b se muestra dicho gráfico, en el que se puede observar un ligero aumento de la potencia (5...6%) para alturas superiores a los 3000 metros s.n.m., cuando se incrementa

el avance de la inyección de 28° hasta 32° antes del punto muerto superior (APMS). Esto se explica por la mayor duración que requiere la mezcla para autoinflamarse a medida que disminuye la cantidad de aire introducida (enriquecimiento de la mezcla) con la altura. Un avance mayor de la inyección desmejora la combustión, ya que el combustible pulverizado se introduce en un medio donde la presión y la temperatura sobre todo, se han reducido aún más y, por lo tanto, la profundidad de la penetración del chorro de combustible es mayor, con la consiguiente dificultad de su autoinflamación.

4. Conclusiones

En base a las notorias diferencias entre los datos proporcionados por I.N.A. y los que existen en la cordillera de los Andes, se han modificado las fórmulas que permiten determinar con mayor precisión las potencias y consumos de combustible para cualquier altura sobre el nivel del mar.

Se ha logrado medir experimentalmente la variación de potencia efectiva y de consumo específico de combustible en función de la altura en un banco de pruebas especial. Se ha determinado que la potencia de los motores E.CH. disminuye aproximadamente en 10% por cada 1000 metros de altitud, y el consumo específico de combustible aumenta en el mismo porcentaje. La mezcla se enriquece en 5... 6%.

En los motores Diesel es recomendable hacerlos funcionar con un coeficiente de exceso de aire no menor de 1,2, lo que evitaría un descenso muy rápido de la potencia, pero el consumo de combustible se reduciría en 4... 5% por cada 1000 m. de altura.

La influencia del avance de la inyección es poco notable. Un avance adicional de 3... 4 grados produce un ligero incremento de la potencia (5... 6%) para alturas superiores a los 3000 metros s.n.m.

Conocidos cualitativa y cuantitativamente los parámetros de mayor incidencia en la potencia y en la economía de los motores se abre la posibilidad de regularlos (compensación parcial) en una primera etapa y de hallar los elementos de compensación total mediante la sobrealimentación.

BIBLIOGRAFIA

- 1 Bibley H.A., Keller B.D., Wusz T., "Effect of altitude on octane requirement-1972 cars", SAE Transactions, 1973, Vol. 82/3, pág. 1860.
- 2 Gagg R. F. y Farrar E.V., "Altitude performance of aircraft engines equipped with gear driven superchargers", SAE I Vol 34 (1934), N° 6 pág. 217.
- 3 Ludeña A. y García A., "Fundamentos para la construcción de un banco de pruebas estacionario para el estudio de la influencia de la altura sobre los m.c.i." Memoria del V CONIMERA, Lima, 1979.
- 4 Ludeña A., Flores P., Lira G., "Estudio teórico sobre la influencia de la altura en el ciclo real de los motores de encendido por compresión", Memorias del V CONIMERA, Lima, 1979.
- 5 Lira Guillermo, "Estudio teórico-experimental de un motor Diesel de aspiración natural en un banco de pruebas para simulación de altura", Tesis para optar el título de Ingeniero Mecánico, UNI, 1980.
- 6 Majaldiani V.V., O dvigateliaj dlja gornij avtomobiliei y tractorov, (en ruso), Ed. Metsniereba, 1968, pág. 43
- 7 Wu T., Mcaulay K.J., "predicting Diesel Engine Performance at various ambient conditions", SAE Transactions, 1973



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-38

p. p. 395-404

PUC/RJ

UM NOVO MÉTODO PARA CÁLCULOS DE PERDA DE CARGA E TRANSFERÊNCIA
DE CALOR EM TROCADORES DE CALOR DE CARÇAÇA E TUBOS.

Benedito Dias Baptista Filho

Engenheiro, Pesquisador

Centro de Engenharia Nuclear - IPEN - São Paulo - S.P.

Ahmet Aydin Konuk

Prof. Colaborador

Depto. de Eng^a Química - UNICAMP - São Paulo - S.P.

SUMÁRIO

Um novo método para cálculos de perda de carga (Δp) e transferência de calor (h_c) do fluido de carcaça de trocadores de calor de carcaça e tubos com chicanas segmentais é apresentado. O método é baseado na solução das equações de conservação de massa e quantidade de movimento em um trecho entre duas chicanas. As distribuições de pressão e velocidades calculadas fornecem respectivamente Δp e h_c . Os parâmetros Δp e h_c são correlacionados para uma dada geometria com a vazão em massa (\dot{m}) e as propriedades do fluido. Valores calculados e experimentais de calor trocado apresentaram boa concordância para um trocador ensaiado.

SUMMARY

A new method to calculate pressure drop (Δp) and shell-side heat transfer coefficient (h_c) in a shell-and-tube heat exchanger with segmental baffles is presented. The method is based on the solution of the equations of conservation of mass and momentum between two baffles. The calculated distributions of pressure and velocities given, respectively, Δp and h_c . The values of Δp and h_c are correlated for a given geometry with the shell side fluid properties and flow rate. The calculated and experimental results agree very well for a U-Tube heat exchanger.

1. Introdução

Uma das maiores dificuldades no projeto e nos cálculos de desempenho dos trocadores de calor de carcaça e tubos com chicanas é a avaliação precisa do coeficiente de transferência de calor (h) e da perda de carga (Δp) do fluido de carcaça. Essa dificuldade é decorrente da enorme complexidade da distribuição de fluxo no trocador. O escoamento nesses trocadores depende não só da geometria do feixe de tubos e das chicanas mas também das folgas entre feixe de tubos e carcaça, entre tubos e furos das chicanas e entre chicanas e carcaça.

Três tipos de métodos têm sido utilizados para o cálculo dos coeficientes de transferência de calor e da perda de carga nesses trocadores: métodos integrais; métodos analíticos e métodos de análise de correntes.

Nos métodos integrais as correlações consideram o trocador como um todo e não levam em conta o efeito de diferentes espaçamentos e folgas internas [1]. Já os métodos analíticos são baseados em correlações que utilizam fatores de correção para se considerar o efeito das diferentes correntes de fluxo [2]. Esses fatores de correção são obtidos pelo ajuste de dados experimentais de algumas unidades de trocadores com as correlações. Finalmente, o método de análise de correntes que foi introduzido por Tinker [3] em 1951 e posteriormente aperfeiçoado por Short [4], Palen e Taborek [5] e outros. O método de Palen e Taborek, mais aperfeiçoado que os demais, reduz o complexo escoamento do fluido de carcaça a um rede de correntes com resistências hidráulicas associadas a cada uma. A solução dessa rede fornece o fluxo através da abertura da chicana, o fluxo perpendicular ao feixe de tubos e as principais correntes através das folgas juntamente com a queda de pressão em um trecho entre chicanas. O coeficiente de transferência de calor é calculado utilizando-se uma média corrigida entre números de Reynolds na região de fluxo cruzado e na abertura da chicana. As resistências e as correções utilizadas foram obtidas pela minimização de erros do método com dados experimentais de 64 trocadores. Este método, apesar de apresentar melhores resultados que os demais, forneceu previsões dentro de $\pm 20\%$ no cálculo dos coeficientes h e cerca de $\pm 30\%$ nos cálculos de Δp para os trocadores simulados pelos autores.

Em 1975, Konuk [6] utilizou o método de análise de subcanais, desenvolvido para análise termo-hidráulica do núcleo de reatores nucleares, e dividiu o espaço entre duas chicanas de um trocador em volumes de controle para os quais foram derivadas e resolvidas as equações de conser-

vação de massa e de quantidade de movimento para se obter as distribuições isotérmicas de pressão e velocidades do fluido de carcaça. O modelo por ele desenvolvido reproduziu com alta precisão distribuições experimentais de fluxo e pressões [7]. Posteriormente, o modelo foi aperfeiçoado e complementado para a avaliação de coeficientes de transferência de calor locais, utilizando-se a distribuição de velocidades e também foram incluídas as equações de energia, escritas para volumes de controle ao longo de todo o trocador, permitindo a obtenção das distribuições de temperaturas dos fluidos de carcaça e tubos [8,9]. Este modelo, não contendo nenhuma correção ou parâmetro otimizado, permitiu previsões de troca de calor dentro de $\pm 5\%$ de desvio em relação a valores experimentais disponíveis de um resfriador água/hélio do Circuito Experimental de Hélio do IPEN. Infelizmente, a utilização do modelo para cálculos de trocadores com mais de cinco (5) chicanas acarreta em demasiado tempo de computação. Por isso, neste trabalho, propomos um outro método que consiste em se calcular um coeficiente de transferência de calor médio em um trecho entre duas chicanas (h_c), obtido pela média ponderada entre coeficientes locais e correspondentes área de troca de calor. Dispondo-se então de h_c , pode ser utilizado qualquer método para a solução do trocador, como por exemplo, a equação de troca de calor :

$$Q = U A \Delta T_{ml} \quad (1)$$

Assim, o método evita a solução das equações de energia para os volumes de controle utilizados para a obtenção das distribuições de velocidades mas, mantém a precisão fornecida pelo método de análise de subcanais. Note-se que eliminando as equações de energia, h_c e Δ_p têm que ser calculados para a temperatura média do fluido de carcaça. Nos casos porêm em que as propriedades do fluido e as temperaturas ao longo do trocador variam acentuadamente e, nos cálculos de desempenho aonde a geometria é dada mas variam as condições de operação, isto é, vazões e temperaturas, é desejável a disponibilidade de correlações para h_c e Δ_p , ao invés de se resolver muitas vezes as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento, o que consumiria muito tempo de computação. Assim, tentamos correlacionar h_c e Δ_p com a vazão e com a temperatura do fluido para uma dada geometria, afim de viabilizar a utilização do método. O objetivo deste trabalho é então a exposição do método idealizado e a demonstração da validade de correlações obtidas com sua utilização.

2. Método de cálculo dos coeficientes e Correlacionamento

Especificada a geometria do trocador e as condições de operação (m e temperaturas), são resolvidas as equações tridimensionais de conservação de massa e de quantidade de movimento para escoamento isotérmico em um trecho entre duas chicanas. Como resultado tem-se as distribuições de pressão e velocidades (duas componentes laterais e uma axial) nas condições de escoamento consideradas. A distribuição de pressão fornece a perda de carga no trecho (Δp_c). Com a distribuição de velocidades são calculados coeficientes de transferência de calor, em cada um dos volumes de controle do modelo (h_i). Nos volumes que contêm uma chicana, são calculados coeficientes que consideram o fluxo anular entre os tubos e os furos da chicana e o fluxo através da abertura. Nos outros volumes, os coeficientes h_i são calculados como a média ponderada entre coeficientes para fluxo paralelo e para fluxo cruzado aos tubos (Equação 2). Detalhes sobre esses cálculos são dados em [8].

$$h_i = \frac{\alpha h_{cr}^i + (90^\circ - \alpha) h_p^i}{90^\circ} \quad (2)$$

onde o índice i refere-se ao volume de controle considerado, α é o ângulo formado entre o vetor de velocidade resultante no volume e a direção axial do trocador, h_{cr} é o coeficiente de transferência de calor para fluxo cruzado e h_p para fluxo paralelo, ambos calculados utilizando-se correlações apropriadas disponíveis na literatura.

Feitos esses cálculos e, uma vez que os coeficientes h_i variam acentuadamente de ponto a ponto no espaço entre as duas chicanas, é avaliado um coeficiente médio (h_c), calculado como a média ponderada entre os coeficientes locais e as correspondentes áreas de troca de calor:

$$h_c = (\sum h_i A_i) / A_c \quad (3)$$

onde A_c é a área de transferência de calor total no trecho entre as duas chicanas, A_i a área de troca de calor do volume i e h_i os correspondentes coeficientes de transferência de calor.

Para o correlacionamento, podemos lembrar os métodos integrais mencionados na introdução. Podemos afirmar que sua imprecisão está no fato de ser praticamente impossível a definição de uma dimensão característica que possa ser utilizada no correlacionamento da perda de carga e

transferência de calor de uma forma geral, ou seja, independente das características de projeto do trocador tais como espaçamentos e folgas internas. Notamos porém que em trechos entre chicanas, tanto o coeficiente médio h_c da Equação (3) quanto a perda de carga (Δp_c) podem ser perfeitamente correlacionados com a vazão em massa (\dot{m}) e as propriedades físicas do fluido no trecho considerado. Assim, o modelo de análise de subcanais descrito nas referências [3,9] pode ser utilizado para se obter correlações individuais de perda de carga e transferência de calor para cada unidade de trocador que interesse, considerando-se todas suas características geométricas inclusive as diferentes folgas internas. O procedimento consiste na obtenção dos valores de h_c e Δp_c para as condições de escoamento de interesse, os resultados são correlacionados na forma das Equações (4) e (5), obtidas por um ajuste de mínimos quadrados.

$$\frac{\Delta p_c \rho}{\dot{m}^2} = C (\dot{m}/\mu)^n \quad (4)$$

$$\frac{h_c}{k Pr^{1/3}} = C' (\dot{m}/\mu)^{n'} \quad (5)$$

onde ρ é a densidade do fluido, μ a viscosidade, k a condutividade térmica, Pr o número de Prandtl para as condições isotérmicas consideradas e C e n as constantes de correlacionamento.

3. Utilização das correlações

Dispondo-se da correlação da Equação (5), a solução térmica de um dado trocador pode ser obtida utilizando-se a equação de troca de calor (Equação 1) ou outro método da literatura. A utilização dessa equação pode evidentemente apresentar bons resultados desde que a condição de U constante seja uma boa aproximação. No caso porém em que as propriedades do fluido variem muito ao longo do trocador, essa equação pode conduzir a resultados muito imprecisos, embora alguns testes indicaram erros dentro da faixa de $\pm 10\%$ [10], o que já indica um grande dispendício de alta precisão das correlações obtidas pelo método de análise de subcanais. Para esses casos é preferível a utilização de métodos numéricos que permitam a solução passo-a-passo do trocador, com a reavaliação dos coeficientes h_c para cada intervalo entre chicanas. Um método numérico que pode ser considerado, consiste basicamente na solução das equações de energia

de estado estacionário, escritas para cada intervalo entre duas chicanas, considerando-se somente variação axial de temperatura. Considerações sobre esse método são feitas pelos autores em outro trabalho apresentado neste congresso [10].

Quanto à perda de carga do fluido de carcaça, podem ser feitas duas considerações: a) tratando-se o trocador como um todo, a Equação (4) pode fornecer a perda de carga por chicana, avaliada na temperatura média do fluido de carcaça, obtendo-se assim a perda de carga total (Δp_t) como a somatória entre as perdas de todas as chicanas e as perdas nas seções de entrada (Δp_e) e saída (Δp_s) do trocador :

$$\Delta p_t = \Delta p_e + (N-1) \Delta p_c + \Delta p_s \quad (6)$$

onde N é o número de chicanas do trocador e Δp_e e Δp_s as perdas nas seções de entrada e saída respectivamente, considerando os efeitos de encurvamento, expansão e contração da corrente de fluido. Note-se que existindo um número elevado de chicanas, a perda de carga total pode ser aproximada na forma da Equação (7) .

$$\Delta p_t = (N+1) \Delta p_c \quad (7)$$

b) no caso de se utilizar um método numérico como mencionado anteriormente, a perda de carga em cada trecho entre chicanas pode ser obtida com uma função da temperatura e a Equação (6) pode ser reescrita como:

$$\Delta p_t = \Delta p_e + \sum_{i=1}^{N-1} (\Delta p_c)_i + \Delta p_s \quad (8)$$

onde i refere-se ao intervalo entre chicanas .

4. Resultados

O resfriador de hélio mencionado na introdução deste artigo, aonde o hélio circulando no lado dos tubos é resfriado por água no lado de carcaça, constituído de três (3) chicanas de placas segmentadas e noventa e cinco (95) tubos em "U", foi simulado segundo o método descrito. Metade de sua secção transversal foi dividida em 16 subcanais [8]. Foi considerado um trecho entre duas chicanas dividido em 5 níveis axiais (Figura 1). Uma típica distribuição de velocidades para uma relação (\dot{m}/μ) igual a 4030 é mostrada na Figura 2 .

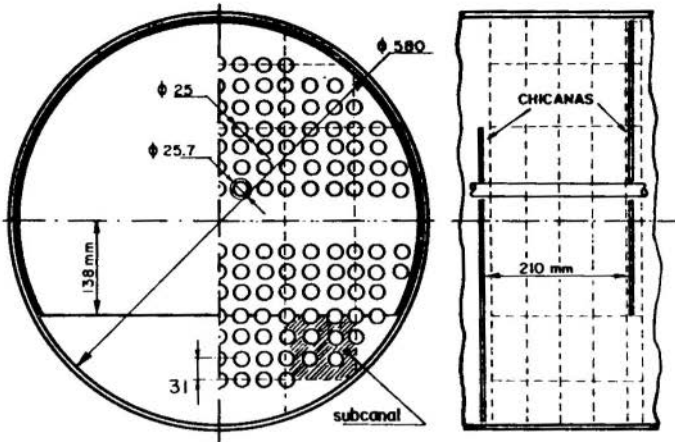


Figura 1 - Resfriador de Hélio - Modelo .

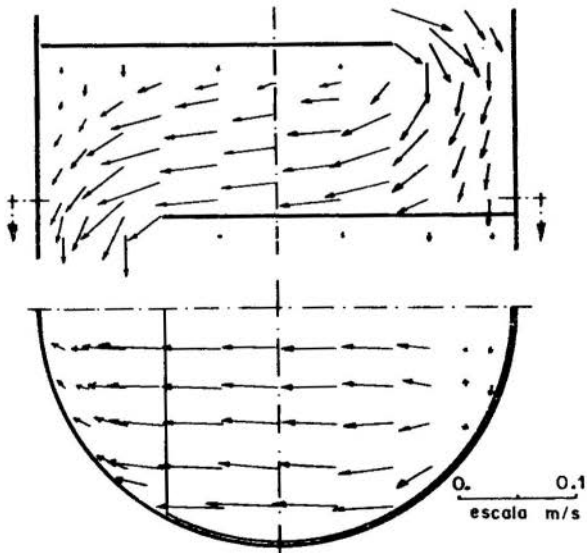


Figura 2 - Distribuição de velocidades - $\dot{m}/p = 4030$ m.

Para se obter as correlações do coeficiente de transferência de calor médio por chicana (Equação 5) e da perda de carga por chicana (Equação 4), válidas para a geometria considerada, foram simuladas operações na faixa de \dot{m}/μ entre 2000 m e 5500 m que é a faixa de utilização desse trocador. Os resultados são mostrados na Figura 3.

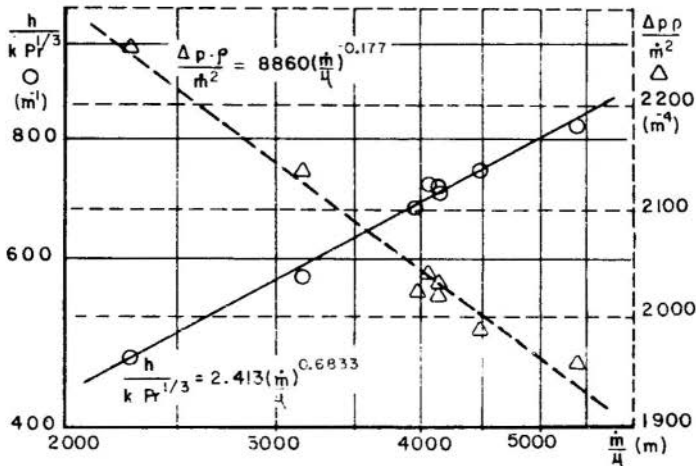


Figura 3 - Correlações de transferência de calor e perda de carga por chicana.

Nota-se na Figura 3 o perfeito correlacionamento dos pontos calculados, justificando a escolha de \dot{m}/μ como parâmetro de correlacionamento. Nota-se também que pode ser utilizado um número menor de pontos para serem obtidas as correlações, o que torna o método extremamente econômico.

A seguir são comparados dados experimentais de calor trocado com valores calculados utilizando-se a correlação de h_c da Figura 3. Foi utilizado o método dado pela Equação 1. São também comparados valores obtidos utilizando-se o método integral descrito por Donohue [1] (Figura 4).

Nota-se nessa figura que os resultados obtidos com o método proposto apresentaram um desvio da faixa de $\pm 5\%$ em relação aos dados experimentais enquanto que os desvios no caso do método integral atingiram até -17% . Os valores de calor trocado (Q) foram calculados utilizando-se a Equação 1 porque as hipóteses de U e C_p constantes, válidas para essa equação, são boas aproximações nas condições de operação desse trocador.

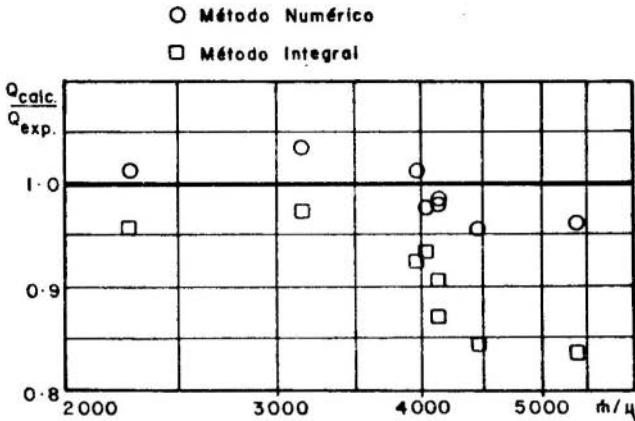


Figura 4 - Comparações entre valores de calor trocado experimentais e calculados.

5. Conclusões

Apresentou-se um método para cálculos de perda de carga e transferência de calor do fluido de carcaça de trocadores de calor de carcaça e tubos com chicanas. A perda de carga (Δp_c) é obtida pela distribuição de pressões entre duas chicanas. O coeficiente de transferência de calor (h_c) é calculado através de uma média ponderada entre coeficientes locais obtidos a partir da distribuição de velocidades entre as chicanas. As distribuições de pressão e velocidades são obtidas pela solução das equações de conservação de massa e quantidade de movimento formuladas utilizando-se o método de análise de subcanais.

Demonstrou-se que Δp_c e h_c correlacionam-se perfeitamente com a vazão em massa (\dot{m}) e as propriedades físicas do fluido.

Os resultados de troca de calor obtidos com a utilização do método proposto apresentaram boa concordância com os valores experimentais.

Como o método apresentado é baseado em um modelo geral, que não utiliza nenhum parâmetro otimizado e nenhum fator de correção, podemos esperar previsões de mesma ordem de precisão na simulação de outros trocadores o que tornará o método extremamente valioso, principalmente, por permitir a análise do escoamento do fluido de carcaça, o que não é possível por nenhum outro método.

REFERÊNCIAS

- [1] | Donohue, D.A., "Heat Transfer and Pressure Drop in Heat Exchanger", Ind. and Engng. Chem., Vol. 41(11), pp. 2499-2511, 1949 .
- [2] | Bell, K.J., "Exchanger Design based on Delaware Research Program", Petro/Chem. Engng., (C), pp. 26-40, 1960 .
- [3] | Tinker, T., "General Discussion on Heat Transfer", Inst. of Mech. Engrs., London, England, pp. 97-116, 1951 .
- [4] | Short, B.E., "Better Method to find Pressure Drop", Hydrocarbon Processing, Vol. 45, pp. 123-130, 1966 .
- [5] | Palen, J.W.; Taborek, J., "Solution of Shell-Side Flow Pressure Drop and Heat Transfer by Stream Analysis Method", Chem. Engng. Progrs. Symposium Series, Vol. 65(92), pp. 53-63, 1971 .
- [6] | Konuk, A.A., "Pressure and Flow Distribution in the Subchannels of Bundles with Segmental Baffles", Santa Barbara, California, 1975 (Ph.D. Thesis, University of California) .
- [7] | Konuk, A.A., Distribuição de Pressões e Velocidades em Trocadores de calor de carcaça e Tubos com Chicanas Segmentadas, V COBEM . Vol. D, 22, pp. 311-320, 1979 .
- [8] | Baptista FQ., B.D., Modelo Numérico para a solução Termo-Hidráulica de um Trocador de Calor de Carcaça e Tubos "U" com Chicanas Segmentais, IPEN, São Paulo, 1979 (Tese de Mestrado)
- [9] | Baptista FQ., B.D., Distribuição de Temperaturas em um Trocador de Calor de Carcaça e Tubos "U" com Chicanas Segmentadas, V COBEM, Vol. D, 22, pp. 291-300, 1979 .
- [10] | Konuk, A.A., Baptista FQ, B.D., Projeto de Trocadores de Calor por Métodos Numéricos, VI COBEM, 1981 .



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-39

P.P. 405 - 413

PUC/RJ

"UM MÉTODO PARA O PROJETO DE FORNOS COM O USO DE COMPUTADOR"

Demetrio Elie Baracat

Engenheiro Mecânico, Professor Instrutor da
Escola de Engenharia Mauá, de São Paulo.

Moses Szajnbok

Engenheiro Mecânico, Professor Assistente
Doutor da Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo

SUMÁRIO

Tradicionalmente, no dimensionamento de fornos, é suposta conhecida a sua temperatura interna [1]. Já o trabalho apresenta um modelo para o cálculo do revestimento de um forno a partir das condições da combustão, isto é, nenhuma hipótese é feita sobre a mencionada temperatura. No modelo são levadas em conta as interações térmicas entre as diversas superfícies internas do forno, a carga, e os gases. É utilizado o computador para se obter o dimensionamento dos refratários e isolantes, o fluxo térmico, e a temperatura da face interna do forno. De um conjunto de possíveis combinações de revestimentos é selecionada a que apresenta custo mínimo.

SUMMARY

Traditionally, the internal wall temperature is supposed known in furnace's design [1]. In this paper is shown a procedure to calculate the furnace wall lining, starting with informations about combustion, that is, no hypothesis is made about the above mentioned temperature. In this procedure are studied the thermal interactions between internal walls furnace, the loading, and the gas from combustion. The computer is employed to design: the thickness of refractories and insulating materials; the heat flow, and the internal wall temperature. From the set of feasible linings, the program selects the one that presents a minimum cost.

1. Introdução

Atualmente, num mercado competitivo e numa época de escassez de combustível, deve-se aproveitar ao máximo a energia disponível, garantida a operação adequada do sistema e com o mínimo dispêndio possível em instalações e equipamentos.

O método apresentado permite o dimensionamento do revestimento de fornos a combustão, que:

- atenda às condições tecnológicas, isto é, o material empregado deverá suportar as condições de trabalho;
- tenha o mínimo custo do revestimento refratário e isolante, mantendo o menor possível as perdas caloríficas.

2. Hipóteses Adotadas

O procedimento leva em conta as interações térmicas entre as diversas faces internas do forno, a carga, e os gases, e considera tanto o custo do revestimento como o do combustível. O método pode ser usado para revestimentos de muitas camadas (na forma atual de programa até cinco camadas, número que pode ser facilmente ampliado [2]).

O método envolve equações não lineares, cuja solução é facilitada pelo uso do computador.

Foram adotadas as seguintes hipóteses:

1. Os gases no interior do forno são não luminosos.
2. Os combustíveis queimados são líquidos.
3. Considera-se a opacidade do dióxido de carbono e do vapor d'água no interior do forno.
4. A quantidade de ar a ser empregada na combustão garante a queima completa do combustível.
5. Os gastos decorrentes dos custos relativos aos refratários e isolantes e, ao combustível são considerados variáveis com a solução adotada.

Os demais gastos, como os de implantação, operação, manipulação da carga, manutenção, reparo e depreciação podem ser considerados invariantes, e por isso não são analisados na escolha da solução.

6. Considera-se a variação com a temperatura da condutibilidade térmica dos refratários e isolantes.

7. As paredes internas do forno são consideradas re-radiantes.
8. As emissividades do dióxido de carbono e do vapor d'água variam com a temperatura. As emissividades da carga, do refratário e dos isolantes são consideradas constantes.
9. Não se considera a penetração de ar frio no interior do forno, por frestas ou abertura de portas.
10. A temperatura dos produtos de combustão na zona de aquecimento é a temperatura teórica de combustão corrigida por um fator de eficiência.
11. A carga está disposta simetricamente no interior do forno.
12. O forno opera em regime estacionário.
13. O fluxo calorífico perdido para o ambiente é obtido considerando-se a troca por radiação e convecção entre a face externa do forno e o meio.

3. Determinação da Temperatura da Face Interna

Tradicionalmente, considera-se conhecida a temperatura da face interna do forno [1],[2],[4],[5]. Neste método, esta temperatura resulta do balanço energético no interior do forno, considerados os gases da combustão, a presença da carga e a natureza re-radiante das faces internas do forno.

Usando a notação:

$$\overline{S_i S_j} = A_i F_{ij} = (\text{área do elemento } i)(\text{fator de forma da face } i \text{ para a face } j) (\text{m}^2)$$

$$\rho_i = \text{refletância da face } i$$

$$\epsilon_i = \text{emissividade da face } i$$

$$E_i = \text{potência emissiva da face } i \text{ (watt/m}^2\text{)}$$

$$\overline{gS_i} = A_i \epsilon_g = (\text{área da face } i)(\text{emissividade do gás}) (\text{m}^2)$$

$$E_g = \text{potência emissiva do gás (watt/m}^2\text{)}$$

$$W_i = \text{energia radiante emissiva da superfície cinzenta } i \text{ (watt/m}^2\text{)},$$

a interação devida à radiação pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix}
 \overline{s_1 s_1} - \frac{A_1}{\rho_1} & \overline{s_1 s_2} & \overline{s_1 s_3} & \dots \\
 \overline{s_1 s_2} & \overline{s_2 s_2} - \frac{A_2}{\rho_2} & \overline{s_2 s_3} & \dots \\
 \overline{s_1 s_3} & \overline{s_2 s_3} & \overline{s_3 s_3} - \frac{A_3}{\rho_3} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 W_1 \\
 W_2 \\
 W_3 \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{A_1 \epsilon_1 E_1}{\rho_1} - \overline{g s_1} E_g \\
 \frac{A_2 \epsilon_2 E_2}{\rho_2} - \overline{g s_2} E_g \\
 \frac{A_3 \epsilon_3 E_3}{\rho_3} - \overline{g s_3} E_g \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{ou } A \cdot W = B$$

O índice i serve tanto para as faces do forno como para o da carga.

Conhecidas as matrizes A e B de (1), calcula-se a matriz W .

Como as paredes são re-radiantes tem-se segundo [3] que:

$$W_i = E_i = \sigma T_i^4 \quad (2)$$

onde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ watt/m}^2 \text{ K}^4$.

A equação (2) permite determinar a temperatura T_i da face interna i .

4. O Programa do Computador

A Figura 1 apresenta as principais etapas do procedimento computacional:

1. Inicialmente indicam-se os códigos dos materiais a serem empregados no revestimento, as dimensões do forno, e as condições de combustão.
2. A sub-rotina ENERG calcula a energia liberada na combustão considerando-se a combustão completa. A sub-rotina TACOM calcula a temperatura teórica de combustão.
3. A sub-rotina RADIA permite a determinação da temperatura das faces internas do forno.

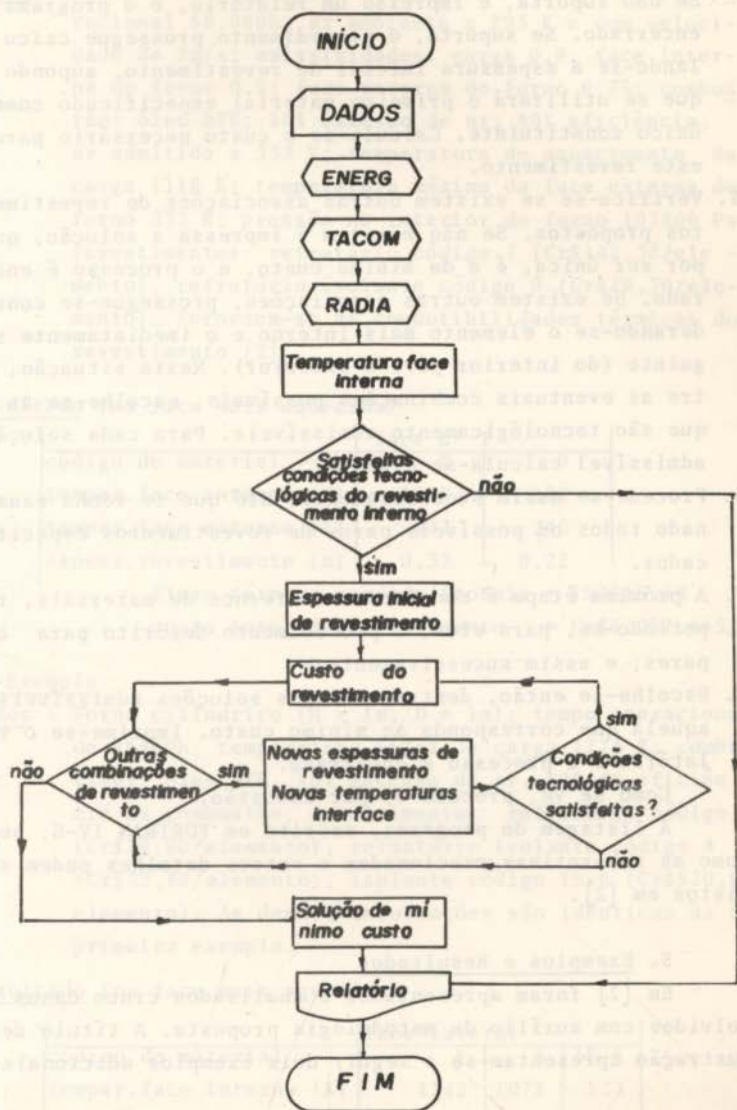


FIG. 1 FLUXOGRAMA

4. Verifica-se se o material especificado como revestimento interno suporta a temperatura prevista para aquela face. Se não suporta, é impresso um relatório, e o programa é encerrado. Se suporta, o procedimento prossegue calculando-se a espessura inicial de revestimento, supondo que se utilizará o primeiro material especificado como único constituinte. Calcula-se o custo necessário para este revestimento.
5. Verifica-se se existem outras associações de revestimentos propostos. Se não existem é impressa a solução, que por ser única, é a de mínimo custo, e o processo é encerrado. Se existem outras associações, prossegue-se considerando-se o elemento mais interno e o imediatamente seguinte (do interior para o exterior). Nesta situação, entre as eventuais combinações possíveis, escolhe-se as que são tecnologicamente admissíveis. Para cada solução admissível calcula-se o custo.
6. Procede-se assim sucessivamente, até que se tenha examinado todos os possíveis pares de revestimentos especificados.
7. A próxima etapa é considerar os ternos de materiais, repetindo-se, para eles, o procedimento descrito para os pares; e assim sucessivamente.
8. Escolhe-se então, dentre todas as soluções admissíveis, aquela que corresponda ao mínimo custo. Imprime-se o relatório e o processo é encerrado.

Como se vê, procede-se por exaustão.

A listagem do programa, escrito em FORTRAN IV-G, bem como as sub-rotinas mencionadas e outros detalhes podem ser vistos em [2].

5. Exemplos e Resultados

Em [2] foram apresentados e analisados cinco casos resolvidos com auxílio da metodologia proposta. A título de ilustração apresentam-se a seguir dois exemplos adicionais.

1º Exemplo

Dados - Forno paralelepipedico (11mx3,50mx5,75m); tempo operacional 58.080h; ar ambiente a 293 K e com velocidade de 2m/s; emissividades: carga 0,9; face interna do forno 0,5; face externa do forno 0,75; combustível: óleo BTE; 10% excesso de ar; 80% eficiência; ar admitido a 333 K; temperatura de aquecimento da carga 1118 K; temperatura máxima da face externa do forno 373 K; pressão no interior do forno 107800 Pa; revestimentos: refratário código 7 (Cr\$142,30/elemento), refratário isolante código 9 (Cr\$29,70/elemento). Fornecem-se as condutibilidades térmicas do revestimento [2].

Resultado (na face mais aquecida)

código do material	face nº 1	
	7	9
temper. face interna (K)	1185	972
temper. face externa (K)	972	340
espess. revestimento (m)	0,33	0,22

fluxo térmico perdido (total) = 197515,8W

custo total do revestimento = Cr\$5.092.465,00

2º Exemplo

Dados - Forno cilíndrico (H = 1m; D = 1m); tempo operacional de 46460h; temperatura final da carga 1273 K; combustível: óleo BTE, 10% excesso de ar, 80% de eficiência na combustão; revestimentos: refratário código 1 (Cr\$19,00/elemento), refratário isolante código 8 (Cr\$33,80/elemento), isolante código 1S-6 (Cr\$520,00/elemento). As demais informações são idênticas às do primeiro exemplo.

Resultado (na face mais aquecida)

código do material	face lateral		
	1	8	1S-6
temper. face interna (K)	1342	1071	525
temper. face externa (K)	1071	525	354
espess. revestimento (m)	0,22	0,11	0,10

A resolução dos cinco exemplos constantes de [2] foi de: I/O 5,6 segundos
CPU 26,2 segundos

A resolução de dois exemplos adicionais constantes deste trabalho foi de:

I/O 3,4 segundos
CPU 14,7 segundos

6. Conclusões

A análise dos exemplos constantes em [2], bem como as duas ilustrações deste trabalho permitem concluir que a metodologia proposta atinge o objetivo desejado, isto é, o desenvolvimento de um modelo de cálculo por computador do revestimento de um forno, a partir do cálculo da temperatura teórica de combustão.

As discrepâncias dos resultados do exemplo nº 1 de [2], no que se refere a temperaturas e espessuras de materiais empregados, entre fornos reais e o calculado não são significativas.

Além disso a disponibilidade do programa de computador com tempos de utilização pequenos permite a realização de muitas simulações para resolver casos práticos a custos relativamente baixos.

Note-se ainda que nos exemplos resolvidos, a diferença de temperaturas obtidas, entre a carga e a da face interna do forno, estão na faixa em que se encontram os valores empiricamente verificados, isto é, entre 30 e 70 K.

REFERÊNCIAS

- [1] Szajnbok, M. & Baracat, D.E. "Cálculo do Fluxo Térmico Através de Paredes de Fornos" - V COBEM, Vol.D (1979), pp. 331-340.

- [2] Baracat, D.E. "Um Método para o Dimensionamento Térmico de Fornos" - Tese de Mestrado do Departamento de Engenharia Mecânica - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, março de 1981.
- [3] Hottel, H.C. & Sarofim, A.F. "Radiative Transfer" - New York, McGraw Hill, (1967) 516p.
- [4] Heilmann, R.H. "Proposed Procedure for Calculating Heat Losses Through Furnace Walls", Annual Book of Standards, Part 13 (1972) pp.798-804.
- [5] Whittemore Jr., O.J. "Método para Calcular as Perdas Através de Paredes de Fornos" - Rev.Bras.Tecnologia Vol.7 (1976) pp.119-125.



COBEM 81
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA
RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
 PAPER

N.º A-40

P. P. 415 - 421

PUC/RJ

PROJETO DE TROCADORES DE CALOR POR MÉTODOS NUMÉRICOS

Ahmet Aydin Konuk

Prof. Colaborador - Depto. de Engenharia Química
 UNICAMP

Benedito Dias Baptista Filho

Pesquisador - IPEN - SP.

SUMÁRIO

São derivadas e resolvidas numericamente as equações diferenciais descrevendo a transferência de calor nos trocadores de calor de carcaça e de tubos. O método de $\Delta T_{m\ell}$ é comparado com o método proposto em casos onde o calor específico C_p e o coeficiente de transferência de calor global U variam com a temperatura. O erro do método de $\Delta T_{m\ell}$ no cálculo do comprimento do trocador de calor não ultrapassa + 10% nos casos considerados. Contudo, o método numérico, sendo mais preciso e, ao mesmo tempo, de utilização fácil e econômica, é recomendado no projeto de trocador de calor de carcaça e tubos.

SUMMARY

Differential equations describing the heat transfer in shell - and-tube heat exchangers are derived and solved numerically. The method of $\Delta T_{\ell m}$ is compared with the proposed method in cases where the specific heat at constant pressure, C_p and the overall heat transfer coefficient, U , vary with temperature. The error of the method of $\Delta T_{\ell m}$ for the computation of the exchanger length is less than + 10%. However, the numerical method, being more accurate and at the same time easy to use and economical, is recommended for the design of shell-and-tube heat exchangers.

1. Introdução

No cálculo de trocadores de calor de carcaça e tubos, é prática comum utilizar a equação

$$q = FUA \Delta T_{m\ell}$$

onde q é o calor trocado, F um fator de correção, U o coeficiente de transferência de calor global, \bar{A} a área de transferência de calor, e $\Delta T_{m\ell}$ a média logarítmica das diferenças de temperatura entre os fluidos de carcaça e de tubos. Eq. (1) baseia-se nas hipóteses de U e calores específicos C_p constantes. U e C_p podem variar com a temperatura ao longo do trocador de calor, e não se sabe o erro introduzido no cálculo de q devido a essas variações. O cálculo correto de q , quando U e C_p variam, pode ser feito através da solução de equações diferenciais que descrevem a transferência de calor no trocador de calor. Neste trabalho são derivadas e resolvidas numericamente tais equações diferenciais para trocadores de calor com um passo de carcaça e um passo de tubos operando em correntes paralelas, correntes contrárias, e para trocadores de calor com tubos em U. Óleo de algodão foi escolhido como fluido no lado da carcaça e no lado dos tubos devido às variações significativas de viscosidade μ e do C_p com a temperatura. Os resultados são comparados com os da eq. (1) para avaliar a precisão da eq. (1) quando U e C_p são variáveis.

2. Equacionamento

Para derivação das equações diferenciais mencionadas, são considerados três casos.

a) Correntes paralelas - passo único

As equações de conservação de energia são derivadas admitindo-se uma temperatura média na seção transversal do trocador de calor, para ambos os fluidos, ou seja, somente variação axial das temperaturas. Também não é considerada condução axial. Neste caso, tem-se as equações a seguir:

$$\frac{dh_t}{dx} = \frac{UA}{m_t} (T_c - T_t) \quad (2)$$

$$\frac{dh_c}{dx} = -\frac{UA}{m_c} (T_t - T_c) \quad (3)$$

onde os índices t e c referem-se respectivamente aos fluidos de tubos e carcaça, h é entalpia específica, x a direção axial, U o coeficiente de

troca de calor global, função da temperatura, A a área de transferência de calor por unidade de comprimento, m vazão em massa, constante, e T a temperatura na posição x.

Para eliminar as derivadas da entalpia, escreve-se:

$$\frac{dh}{dx} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dx} + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dx} \quad (5)$$

onde $\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$ é a definição do calor específico C_p e, o segundo termo do lado direito pode ser desprezado; p é a pressão.

Assim, as equações (2) e (3) podem ser reescritas:

$$\frac{dT_t}{dx} = \frac{UA}{m_t C_{p_t}} (T_c - T_t) \quad (5)$$

$$\frac{dT_c}{dx} = \frac{UA}{m_c C_{p_c}} (T_t - T_c) \quad (6)$$

onde C_{p_t} e C_{p_c} são funções da temperatura.

b) Correntes contrárias - passo único

Analogamente ao procedimento anterior são obtidas as equações de conservação de energia. Considerando-se a vazão do fluido dos tubos na direção x, sua equação é a mesma da eq. (5). Para o fluido de carcaça tem-se:

$$\frac{dT_c}{dx} = \frac{UA}{m_c C_{p_c}} (T_c - T_t) \quad (7)$$

c) Tubos em U - passo único

O esquema de um trocador de calor de tubos em U é mostrado na Figura 1.

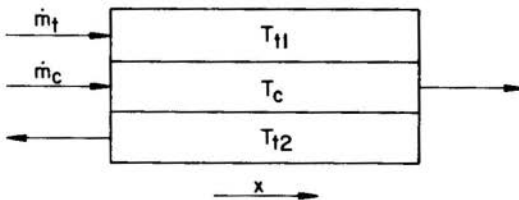


Figura 1 - Esquema de um trocador de calor de tubos em U

Para esse trocador, tem-se as seguintes equações:

$$\frac{dT_{t1}}{dx} = \frac{U_1 A}{2m_t C_{p_{t1}}} (T_c - T_{t1}) \quad (8)$$

$$\frac{dT_c}{dx} = \frac{A}{2m_c C_{p_c}} \left[U_1 (T_{t1} - T_c) + U_2 (T_{t2} - T_c) \right] \quad (9)$$

$$\frac{dT_{t2}}{dx} = \frac{U_2 A}{2m_t C_{p_{t2}}} (T_{t2} - T_c) \quad (10)$$

Na Figura 1 e nas equações acima, os índices 1 e 2 referem-se ao fluido dos tubos respectivamente nas direções x e $(-x)$.

3. Solução numérica das equações

As equações de energia apresentadas são resolvidas para problemas de projeto onde a área de transferência de calor por unidade de comprimento A , é conhecida. Neste caso, o problema consiste em calcular o comprimento L do trocador e pode ser resolvido numericamente como um problema de valores iniciais, utilizando métodos conhecidos como Euler, Runge-Kutta, etc.

No caso de trocador de calor com correntes paralelas, a solução numérica começa com os valores de entrada de T_t e T_c , e prossegue passo a passo na direção x , calculando-se T_t e T_c , até chegar à temperatura de saída especificada, no projeto, seja do tubo ou da carcaça. O valor de x neste ponto fornece L .

No caso de trocador de calor com correntes contrárias, usa-se como valores iniciais o valor de entrada de T_t e o valor de saída de T_c especificado no projeto. A solução passo a passo continua até chegar ao valor de entrada de T_c , e novamente L é dado por x neste ponto.

Para calcular L de um trocador de calor de tubos em U , utiliza-se como valores iniciais os valores de entrada de T_{t1} e de T_c , e o valor de saída de T_{t2} especificado no projeto. Como T_{t1} e T_{t2} tem que ter o mesmo valor no fim do trocador de calor, a solução prossegue passo a passo até $T_{t1} = T_{t2}$, e neste ponto, tem-se $L = x$.

A solução numérica das equações diferenciais não apresenta nenhuma dificuldade e pode ser obtida utilizando uma calculadora programável, como TI 58, TI 59, ou HP 41C, não necessitando uso de um computador.

4. Resultados

A eq. (1) e o método numérico apresentado foram utilizados para calcular o comprimento L para os três tipos de trocador de calor modelados (correntes paralelas, correntes contrárias e tubos em U), resolvendo três problemas de projeto para cada tipo. Os casos estudados são dados na Tabela 1.

Óleo de algodão, escolhido como fluido dos tubos e da carcaça, tem as seguintes propriedades:

$$\mu = 0.02937 e^{-0.01356 T} \text{ Btu/hr ft } ^\circ\text{F} \quad (T \text{ em } ^\circ\text{F})$$

$$C_p = 0.4125 + \frac{T}{1600} \text{ Btu/lb } ^\circ\text{F}$$

$$k = 0.0808 \text{ Btu/hr ft } ^\circ\text{F}$$

onde μ é a viscosidade dinâmica, e k a condutividade térmica.

O coeficiente de transferência de calor h é calculado utilizando:

$$h = 0.023 \frac{k}{D_H} \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^n \quad (11)$$

onde D_H é o diâmetro hidráulico, Re o número de Reynolds e Pr o número de Prandtl. O expoente n é 0.4 para fluido aquecendo, e 0.3 para fluido resfriando. Eq. (10) é apropriada para escoamento em tubos, mas foi também utilizada para calcular o h do fluido da carcaça. O cálculo apropriado de h para o fluido da carcaça é discutido em {1}.

Para calcular o termo ΔT_{ml} que aparece na eq. (1), é necessário conhecer a temperatura de saída não especificada no projeto. No caso de trocador de correntes paralelas, admitindo que as temperaturas de entrada (T_{tc} para fluido dos tubos e T_{ce} para fluido da carcaça) e a temperatura da saída dos tubos (T_{ts}) são dadas, a temperatura de saída (T_{cs}) do fluido da carcaça é calculada da seguinte maneira:

$$q = m_t \bar{C}_{p_t} (T_{ts} - T_{te}) \quad (12)$$

$$T_{cs} = T_{ce} - \frac{q}{m_c \bar{C}_{p_c}^i} \quad (13)$$

$$\bar{C}_{p_t} = C_{p_t} \left(\frac{T_{te} + T_{ts}}{2} \right) \quad (14)$$

$$\bar{C}_{p_c}^i = C_{p_c} \left(\frac{T_{ce} + T_{cs}^i}{2} \right) \quad (15)$$

Tabela 1 - Os resultados

Caso	Entrada (°F)		Saída (°F)		Vazão (lb/s)		L (ft)	Desvio em L, %	Variação de U, %
	T _t	T _c	T _t	T _c	m _t	m _c			
Paralelo - 1	70	255	124.38	172.56 172.53	35	20	84 81.13	- 3.42	54
Paralelo - 2	70	300	250.94	284.41 284.41	10	100	58 62.86	+ 8.38	84
Paralelo - 3	70	300	249.03	268.94 268.93	10	50	76 82.59	+ 8.67	72
Contrário - 1	70	255.26	125.18 125.18	171.5	35	20	74 72.76	- 1.68	48
Contrário - 2	70	299.55	250.47 250.46	284	10	100	54 57.15	+ 5.83	86
Contrário - 3	70	300	251.18 251.18	268.5	10	50	64 67.03	+ 4.73	82
	T _{t1}	T _c	T _{t2}	T _c					
Tubos em U-1	70	255	125	171.51 171.51	35	20	67.4 65.85	- 2.30	16
Tubos em U-2	70	300	250	284.52 284.50	10	100	35.01 37.28	+ 6.52	80
Tubos em U-3	70	300	250	268.78 268.74	10	50	45.86 48.67	+ 6.14	70

onde \bar{C}_{p_t} e \bar{C}_{p_c} são os calores específicos médios. As iterações indicadas na eq. (13) convergem rapidamente para o valor desejado de T_{CS} .

Nos casos de trocadores de correntes contrárias e de tubos em U, o mesmo método é utilizado para calcular a temperatura não conhecida. O fator F é determinado utilizando gráficos {2}.

Para solução numérica das equações diferenciais, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com um intervalo de integração de 1 ft foi utilizado. O erro numérico no cálculo de L é estimado inferior a 0.1%.

Os resultados são mostrados na Tabela 1. Nas colunas de temperatura de saída e de comprimento L, o valor acima se refere ao método numérico e o valor abaixo à eq. (1).

As temperaturas de saída calculadas pelas equações (12) a (15) e pelo método numérico são praticamente iguais, como é de se esperar pois C_p é uma função linear da temperatura.

A variação percentual de U entre a entrada e a saída, relativa a U médio, é dada na última coluna. Observa-se que os desvios no cálculo de L pela eq. (1) aumentam a medida que aumenta a variação percentual de U, o maior desvio em relação à solução numérica sendo de + 8.6%.

5. Conclusões

O método de ΔT_{mL} , baseado nas hipóteses de C_p e U constantes, fornece bons resultados em casos onde C_p e U tem variação significativas com a temperatura, o maior erro no cálculo do comprimento sendo inferior a + 10%. Contudo, em outros casos, o erro deste método poderia ser maior.

O método numérico permite o cálculo correto de transferência de calor nos trocadores, e como é de fácil utilização e baixo custo de computação, poderia substituir o método de ΔT_{mL} no projeto de trocadores de calor de carcaça e tubos.

REFERÊNCIAS

- {1} Baptista Filho, B.D., Konuk, A.A., "Um novo método para cálculo de perda de carga e transferência de calor em trocadores de carcaça e tubos" VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, RJ., 15-18, dezembro de 1981.
- {2} Foust, A.S. et. al. Principles of Unit Operations, John Wiley and Sons (1960).



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-41

P. P. 423 - 435

PUC/RJ

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO TERMOHIDRÁULICO DE GERADORES DE VAPOR TÍPICOS DE USINAS PWR

Carlos Valois Maciel Braga

Professor Auxiliar

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

Pedro Carajilescov

Professor Associado

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

Centrais-nucleares PWR utilizam, geralmente, geradores de vapor do tipo tubos "U" invertido, com recirculação interna natural. No presente trabalho desenvolve-se um modelo de simulação termohidráulica, para regime permanente, de tais geradores de vapor. Divide-se o escoamento secundário em duas partes individualmente homogêneas, com troca de calor e massa entre as mesmas. A pressão do secundário é determinada em função do título do vapor que alimenta a turbina. Aplicações são feitas ao gerador de vapor da usina Angra II, operando em condições nominal e com tubos parcialmente obstruídos.

SUMMARY

Generally, "U" tube steam generators with natural internal recirculation are used in PWR power stations. In the present work, a thermalhydraulic model is developed for simulation of such components, in steady state. The flow of the secondary cycle fluid is divided in two parts individually homogeneous, allowing for heat and mass exchange between them. The secondary pressure is determined by defining the moisture of the vapor that feeds the turbine. This model is applied to the Angra II steam generator, operating in nominal conditions and with tubing partially plugged.

1. Introdução

O gerador de vapor é o componente que faz o acoplamento térmico entre os ciclos primário e secundário de uma usina nuclear do tipo PWR (Pressurized Water Reactor), tendo, desta forma, ativa participação no comportamento dinâmico da usina. Assim sendo, a importância do desenvolvimento de modelos para simulação do comportamento termohidráulico destes componentes é óbvia.

A preferência dos fabricantes de usinas PWR, fornecedores do Brasil, recaiu em geradores de vapor do tipo tubos em "U" invertido, conforme esquematizado na Fig. 1.

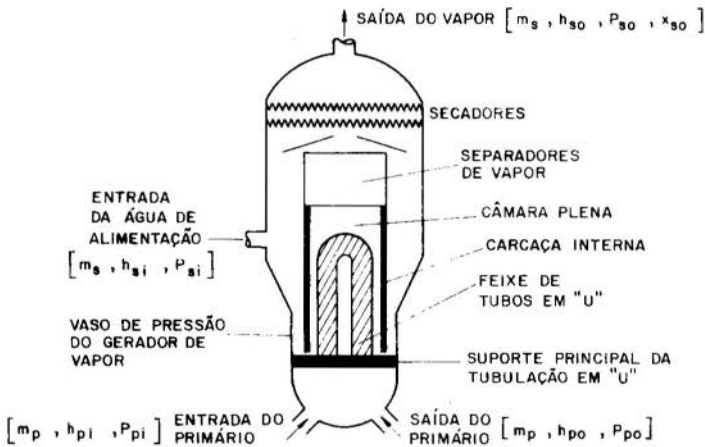


Fig. 1. Gerador de vapor do tipo tubos em "U" invertido

Neste gerador de vapor, o fluido primário entra através de um bocal localizado na base, atravessa uma câmara plena, penetrando, em seguida, na tubulação em "U". Esta tubulação é feita de Inconel. Após percorrer a tubulação, o fluido atravessa outra câmara plena e deixa o gerador de vapor por um bocal simétrico ao de entrada. O lado de subida dos tubos em "U" é chamado de perna quente e o de descida, perna fria.

Quanto ao lado do ciclo secundário, a água de alimentação entra no gerador de vapor através de um bocal localizado

ligeiramente acima do topo dos tubos, misturando-se com a água de recirculação, proveniente dos separadores de vapor e secadores. Esta água escoar para baixo através da região anular formada pelo vaso de pressão e a carcaça interna. Através de uma abertura inferior da carcaça, o fluido secundário penetra na região dos tubos, escoando, então, para cima. A temperatura de ebulição desta água é atingida e uma mistura bifásica deixa a seção interna, passando, posteriormente por separadores de vapor do tipo "ciclones" e secadores de vapor. A fase líquida recircula e o vapor é conduzido para as turbinas, com umidade abaixo de valores máximos admissíveis.

Diversos trabalhos são encontrados na literatura com respeito à simulação de geradores de vapor. Tais trabalhos variam em grau de complexidade, de acordo com os objetivos a que se propõem. Hargrove [1] apenas analisa o processo térmico, sem entrar em considerações hidráulicas. Murrell [2] e Cudlin [3] desenvolveram modelos para geradores de vapor com tubos retos, enquanto que Land e Steitler [4] e Christensen [5] modelaram geradores de vapor do tipo tubos em "U" invertido, com recirculação interna, assumindo, no entanto, escoamento do secundário, através do feixe de tubos, como sendo completamente homogeneizado. Esta hipótese não é realística, uma vez que as condições de troca de calor entre o fluido secundário e as pernas quente e fria da tubulação em "U" são muito diferentes, assim como as condições de queda de pressão. Não há razão para se esperar completa homogeneização do secundário.

Levantamento realizado por Willians e Green [6] aponta diversos problemas constatados em geradores de vapor em operação, tais como vibração dos tubos em "U", corrosão, erosão e queima da parte externa dos tubos. De forma a manter a usina em operação, é necessário a eliminação dos tubos que apresentaram falhas do processo de troca de calor através da obstrução dos mesmos.

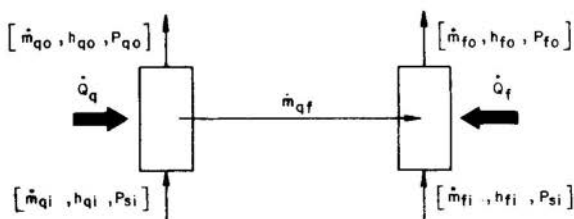
Baseado nas considerações acima, o presente trabalho apresenta um modelo de simulação de geradores de vapor do tipo tubos em "U" invertido, com recirculação natural, operando em regime permanente, permitindo a existência de escoamento transversal entre as regiões das pernas quente e fria, do

lado secundário. O modelo é aplicado ao gerador de vapor da usina Angra II, considerando-se frações variáveis de obstrução da tubulação em "U".

2. Modelo de Simulação

Os principais aspectos do modelo de simulação são: a) o escoamento do secundário é dividido em duas partes, individualmente homogêneas, escoando paralelamente, sendo uma associada à perna quente e outra, à perna fria; b) é permitida a existência de escoamento transversal ("cross-flow") entre estas duas partes, impondo-se que, em uma determinada seção transversal ao escoamento principal, a pressão seja a mesma nas duas partes; c) a umidade do vapor que alimenta a turbina é prefixada, sendo a pressão da água de alimentação determinada por esta imposição; d) a razão de recirculação interna da água é determinada pela aplicação da equação da conservação da quantidade de movimento ao canal de recirculação; e) as diversas regiões dos escoamentos primário e secundário são divididas em volumes de controle, aplicando-se aos mesmos as leis de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Este modelo pode ser visualizado através da Fig. 2.

O equacionamento do secundário é feito considerando-se pares simétricos de volumes de controle, conforme o esquema:



onde: \dot{m} = vazão em massa

h = entalpia específica

\dot{Q} = taxa de transferência de calor

P = pressão

Os índices "q" e "f" referem-se a perna quente e perna fria, respectivamente, e os índices "i" e "o" referem-se a entrada e saída dos volumes de controle.

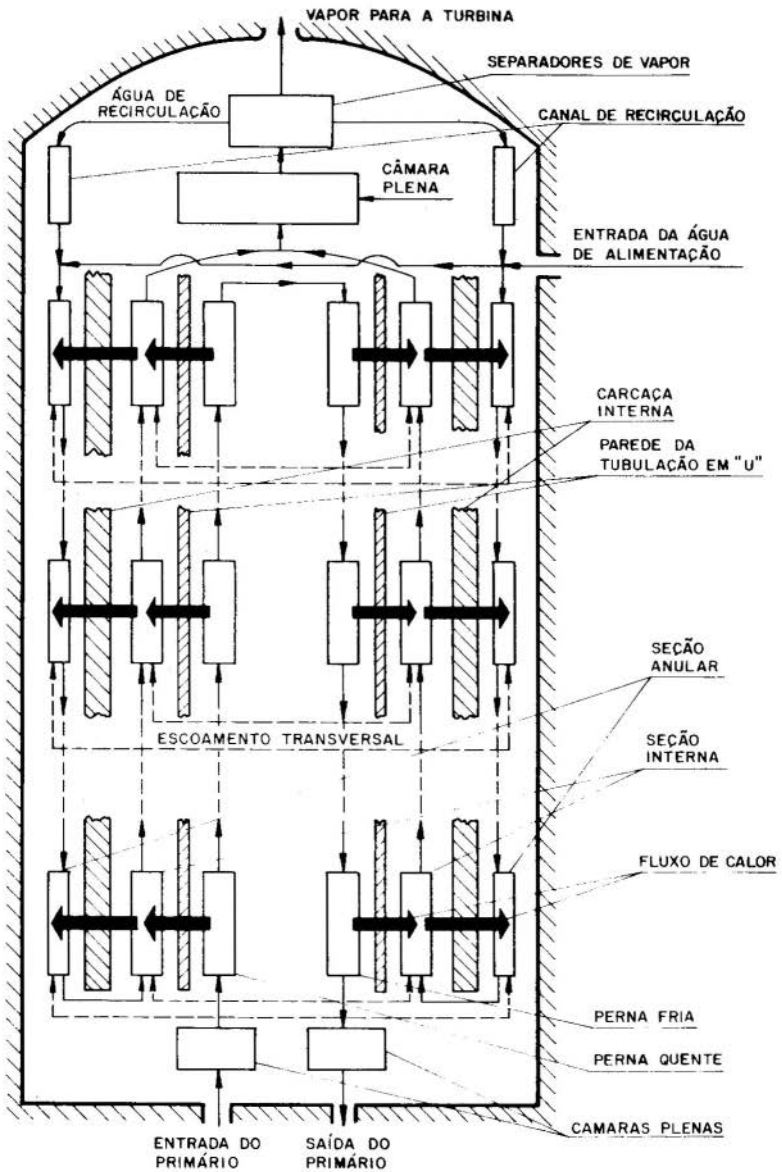


Fig. 2. Modelo físico para simulação do gerador de vapor

A conservação de massa impõe:

$$\dot{m}_{qo} = \dot{m}_{qi} - \dot{m}_{qf} \quad , \quad (1)$$

$$\dot{m}_{fo} = \dot{m}_{fi} + \dot{m}_{qf} \quad . \quad (2)$$

O balanço térmico, nos volumes de controle, fornece:

$$h_{qo} = \frac{\dot{m}_{qi} h_{qi} + \dot{Q}_q - \frac{1}{2} \dot{m}_{qf} h_{qi}}{\dot{m}_{qo} + \frac{1}{2} \dot{m}_{qf}} \quad , \quad \text{para } \dot{m}_{qf} \geq 0 \quad ; \quad (3)$$

$$h_{qo} = \frac{\dot{m}_{qi} h_{qi} + \dot{Q}_q - \frac{1}{2} \dot{m}_{qf} (h_{fi} + h_{fo})}{\dot{m}_{qo}} \quad , \quad \text{para } \dot{m}_{qf} < 0 \quad . \quad (4)$$

A pressão, na saída dos volumes de controle, é determinada pela equação da conservação da quantidade de movimento, obtendo-se:

$$p_{qo} = p_{si} + \frac{\dot{m}_{qi} V_{qi} - \dot{m}_{qf} \bar{V}^* - \dot{m}_{qo} V_{qo} - \frac{1}{2} K A \bar{V}_q - y \bar{\rho}_q g A \Delta z}{A} \quad (5)$$

onde: A = área transversal ao escoamento principal;

Δz = altura do volume de controle;

V = velocidade do escoamento (a barra indica valores médios);

K = fator de perda de carga, incluindo atrito e acidentes localizados.

O valor de \bar{V}^* é determinado pela direção do escoamento transversal:

$$\bar{V}^* = \begin{cases} \bar{V}_q & , \quad \text{para } \dot{m}_{qf} \geq 0 \quad ; \\ \bar{V}_f & , \quad \text{para } \dot{m}_{qf} < 0 \quad . \end{cases}$$

O parâmetro y é um indicador da direção do escoamento:

$$y = \begin{cases} 1 & , \quad \text{escoamento para cima (seção interna)} \quad ; \\ -1 & , \quad \text{escoamento para baixo (seção anular)} \quad . \end{cases}$$

Equações análogas são obtidas para o volume de controle da perna fria, assim como para o escoamento do fluido pri

mário, embora, neste caso, as equações sejam simplificadas pela inexistência de escoamento transversal.

O título do escoamento bifásico, na saída do volume de controle, é dado por

$$x_{qo} = \frac{(\dot{m}_v)_{qo}}{\dot{m}_{qo}} \quad , \quad (6)$$

onde $(\dot{m}_v)_{qo}$ é a vazão em massa de vapor. Com esta definição, obtém-se

$$x_{qo} = \frac{h_{qo} - h_\ell}{h_g - h_\ell} \quad , \quad (7)$$

sendo h_ℓ e h_g as entalpias de líquido e vapor saturados, determinadas à pressão P_{qo} , respectivamente.

A fração de vazios é dada por [7]:

$$\alpha_{qo} = \left[1 + \frac{1 - x_{qo}}{x_{qo}} \cdot \frac{v_\ell}{v_g} S \right]^{-1} \quad , \quad (8)$$

onde v_ℓ e v_g são os volumes específicos do líquido e do vapor saturados à pressão P_{qo} e S é a razão de escorregamento, determinada em função da pressão [8].

O valor da vazão, \dot{m}_{qf} , do escoamento transversal é obtida iterativamente, impondo-se

$$P_{qo} = P_{fo} \quad . \quad (9)$$

Fazendo-se

$$\Delta P_q = P_{qi} - P_{qo} - \left(\bar{m}_q \right)^n \quad , \quad (10)$$

obtém-se

$$\dot{m}_{qf} = \frac{(\Delta P_q)^{\frac{1}{n}}}{2 \dot{m}_{qi}} \quad . \quad (11)$$

Esta expressão é usada para o refinamento de \dot{m}_{qf} . A constante n foi determinada experimentalmente, tendo seu valor compreendido entre 2 e 3.

A taxa de transferência de calor, \dot{Q}_q , entre dois volumes de controle adjacentes, é determinada através da diferen

ça logarítmica média de temperatura e do coeficiente global de troca de calor. No cálculo deste coeficiente global, é levado em consideração o regime de troca de calor, sendo admitidos quatro mecanismos: convecção forçada, ebulição subresfriada, ebulição em massa, e vaporização por convecção forçada. As correlações adotadas podem ser encontradas na referência [9].

O nível d'água do gerador de vapor é definido como sendo a altura na qual a fração de vazios do secundário atinge 90%, conforme procedimento de Land e Steitler [4].

A razão de recirculação, R_r , é dada por

$$R_r = \frac{\dot{m}_r}{\dot{m}_s} \quad (12)$$

onde

$$\dot{m}_r = A_{cr} \left[\frac{2}{K_{cr}} \rho_r (P_{so} - P_{si}) + Z_{cr} \rho_r^3 g \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

com os índices r e cr referem-se à água de recirculação e ao canal de recirculação, respectivamente.

Baseado neste modelo, foi desenvolvido o programa GEVAP (linguagem Fortran) descrito detalhadamente na referência [9].

3. Resultados

Aplicações foram feitas para os geradores de vapor projetados pela KWU, da Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto, Unidade II, em construção em Angra dos Reis, Brasil, cujos dados principais são apresentados nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1. Dados Geométricos do Gerador de Vapor

Altura total da tubulação em "U", ft	34,203
Número total de tubos da tubulação em "U"	4086
Diâmetro interno dos tubos, ft	0,0643
Diâmetro externo dos tubos, ft	0,0722
Diâmetro interno da curvatura em "U", ft	0,689
Diâmetro externo da curvatura em "U", ft	9,795
Diâmetro interno da carcaça interna, ft	10,335
Diâmetro externo da carcaça interna, ft	10,466
Diâmetro do vaso de contenção, ft	11,375

Tabela 2. Condições dos Fluidos Primário e Secundário

PARÂMETRO	PRIMÁRIO	SECUNDÁRIO
Vazão em massa (lb/s)	10365,5	1136,2
Pressão na entrada (psia)	2273,6	981,7
Entalpia na entrada (Btu/lb)	640,0	402,0
Temperatura na entrada (°F)	619,0	424,4
Título na saída (%)	—	99,1

Testes preliminares mostraram que uma divisão da altura e, 10 volumes de controle produz resultados satisfatórios, sendo, portanto, adotada esta divisão.

A Tabela 3 apresenta uma comparação dos resultados obtidos com os dados fornecidos pela KWU, para condições nominais de operação.

Tabela 3. Resultados Obtidos e Comparação com Dados da KWU

	KWU	Presente Trabalho	Diferença Percentual
Queda de pressão total (psia)	33,35	24,42	-26,8%
Entalpia na saída do gerador de vapor (Btu/lbm)	553,90	553,92	0,00%
Temperatura na saída do gerador de vapor (°F)	555,98	555,09	0,02%
Pressão da água de alimentação (psia)	981,65	976,19	-0,56%
Queda da pressão total (psia)	-13,15	2,46	+118%
Entalpia da mistura que alimenta a turbina (Btu/lbm)	1187,34	1187,12	-0,02%
Temperatura da mistura que alimenta a turbina (°F)	544,10	541,53	-0,47%
Taxa total de calor transferida ao secundário (Btu/s)	892305,0	892049,9	-0,03%
Razão de recirculação	—	7,90	—

As diferenças observadas nas quedas de pressão foram causadas devido à necessidade de estimar-se os fatores de perda de carga localizada, não fornecidos pelo fabricante.

Considerando-se um título de 99,1%, prefixado, do vapor que alimenta a turbina, observou-se que a taxa total de troca de calor entre primário e secundário permaneceu inalterada, para bloqueios parciais da tubulação variáveis, provocando, no entanto, grandes reduções na pressão do vapor que alimenta a turbina, assim como maior queda de pressão no primário, uma vez que ocorre uma aceleração no escoamento, devido à menor área de escoamento disponível. Estes efeitos podem ser observados na Fig. 3.

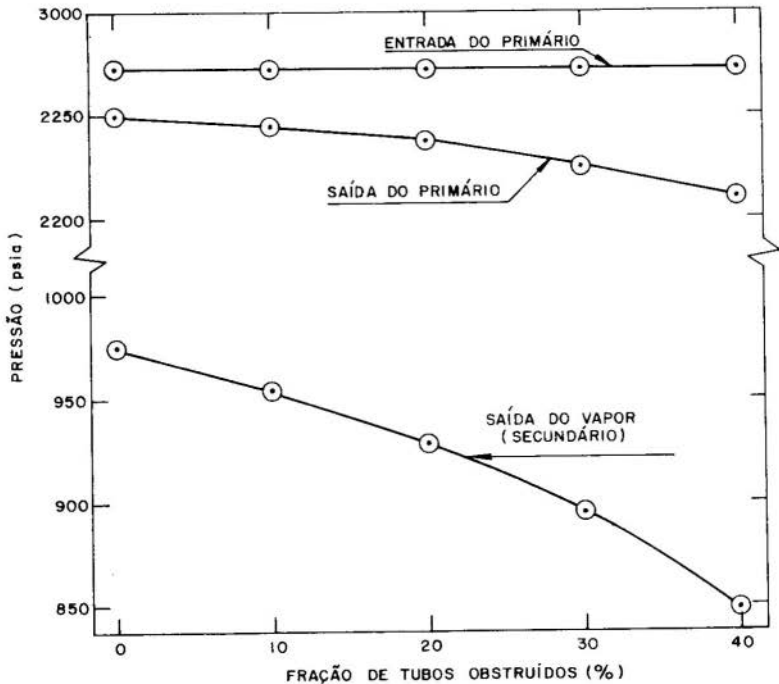


Fig. 3. Efeito da obstrução dos tubos nas pressões do sistema

As quedas de pressão do secundário decorreu da necessidade de aumentar-se a diferença de temperatura entre os fluí

dos primário e secundário, uma vez que a área de troca de calor sofreu uma redução e a taxa total de troca de calor deve permanecer constante. As distribuições de temperatura do primário e do secundário, para os casos de operação nominal e com 40% de tubos obstruídos, são mostradas na Fig. 4.

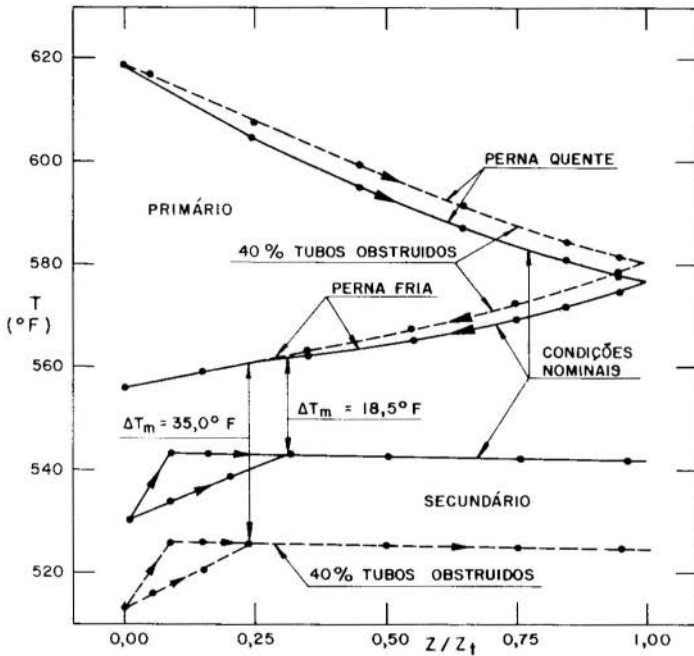


Fig. 4. Distribuição de temperatura dos fluidos primário e secundário

Observa-se apenas pequenas variações, ao longo do escoamento, nas condições do primário, mantendo-se, no entanto, a mesma condição de saída. Quanto ao secundário, as variações são bastante acentuadas, observando-se uma diminuição da temperatura com o aumento da fração de obstrução, ocorrendo assim, um aumento da diferença mínima de temperatura entre os fluidos primário e secundário, ΔT_m , denominado de "pinch-point".

A Fig. 5 apresenta a variação da vazão de fluido secundário pelo lado da perna quente, ao longo da altura do G.V., para diferentes valores da fração de obstrução. Observa-se que um aumento da taxa de obstrução tende a diminuir esta vazão.

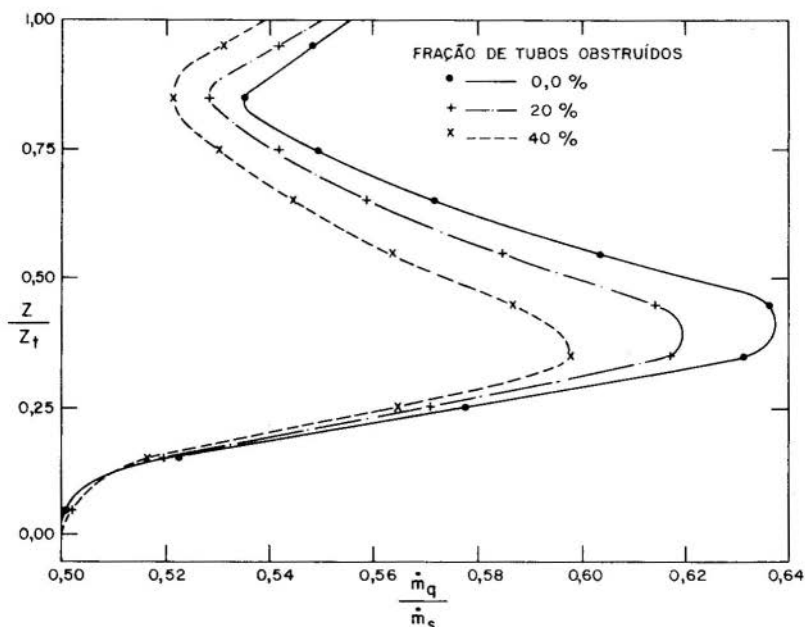


Fig. 5. Distribuição da vazão do secundário pelo lado da perna quente

4. Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o suporte financeiro da CNEN - Comissão Nacional de Energia Nuclear. Os autores agradecem o apoio recebido.

REFERÊNCIAS

- [1] Hargrove, H.G., "MARVEL - A Digital Computer Code for Transient Analysis of a Multiloop PWR System", Westinghouse Nuclear Energy System, WCAP-7909, 1972.

- [2] Murrell, M.D., Boiler Simulation, "PWR Station Dynamics", BNDC, Whetstone.
- [3] Cudlin, J.J. e Daggett, P.W., "TRAP-2-Fortran Program for Digital Simulation of the Transient Behavior of the Once-Through Steam Generator and Associated Reactor Coolant System", Babcock e Wilcox - Power Generation Group, Nuclear Power Generation Division, 1976.
- [4] Land, R.E. e Steitler, R.W. "Modeling the Effect of Inventory Loss on Steam Generator Heat Transfer", American Society of Mechanical Engineers (ASME), 1976.
- [5] Christensen, P.C., "Description of a Model of a U - Tube Steam Generator", Eletronic Department, Danish Atomic Energy Comission, Research Establishment Riso, 1972.
- [6] Willians, C.L. e Green, S.J., "Thermal Hidraulic Aspects of PWR Steam Generators", Steam Generator Project Office, Eletric Power Research Institute, 1980.
- [7] El-Wakil, M.M., Nuclear Heat Transport, International Textbook Company, 1971.
- [8] Rohsenow, W.M. e Hartnett, J.P., Handbook of Heat Transfer, McGraw-Hill Book Company, 1973
- [9] Braga, C.V.M., "Modelo Termohidráulico para Gerador de Vapor Típico de Usinas PWR", Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1980.



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981



TRABALHO
PAPER

N.º A-42

P. P. 437 - 449

PUC/RJ

UM NOVO MODELO PARA SIMULAÇÃO DE PRESSURIZADORES DE CENTRAIS PWR

Alzira Abrantes Madeira

Comissão Nacional de Energia Nuclear -
Centro de Informações Nucleares

Antonio Carlos de Oliveira Barroso

Comissão Nacional de Energia Nuclear -
Departamento de Reatores

SUMÁRIO

Neste trabalho o pressurizador é tratado como um sistema termodinâmico constituído de três regiões, homogêneas, de fronteiras móveis e submetidas à mesma pressão. Nas condições normais de operação, as duas regiões inferiores são ocupadas por água (líquida), com o vapor ocupando a região superior. São analisados os processos de condensação normal e induzida, devido ao aspergidor, de ebulição e de troca de calor na interface vapor-água. A região líquida do fundo do pressurizador recebe um tratamento simplificado de forma a reter a rapidez e simplicidade computacional dos modelos que consideram duas regiões.

SUMMARY

In this work the pressurizer is treated as a three-homogeneous region thermodynamic system, with movable boundaries, all regions considered under the same pressure. In Normal operation, the two bottom regions are occupied by water (liquid), and steam occupies the top region. Normal and spray induced condensation processes, evaporation and heat transfer across the steam-water interface are analysed. The liquid region at the very bottom of the pressurizer is treated in a simplified manner in order to retain the computational advantages of the two-region models.

1. Introdução

Em reatores PWR, o pressurizador é o responsável por manter a pressão constante em operação normal e limitar as variações da mesma durante transitórios operacionais.

A simulação do pressurizador envolve a consideração de vários fenômenos físicos e a modelagem de vários controles e acessórios, o que torna o modelo final razoavelmente complexo.

Neste trabalho visou-se obter bons resultados, sem complicar muito o modelo para evitar tempos e custos de computação exagerados. Procurou-se também usar um mínimo de coeficientes empíricos.

Após um estudo dos principais modelos anteriores, referências [2], [3], [4], [5], [6], [7] e levantamento de suas diferenças, procurou-se fazer uma avaliação dos méritos relativos entre elas, de forma a se escolher as melhores opções para o presente trabalho. Desta forma, alguns processos termodinâmicos e de transferência de calor apresentados não foram considerados na elaboração final do código, por não implicarem em melhorias nos resultados dos testes analisados.

2. O Pressurizador e Seus Controles

Trata-se de um vaso de pressão de forma cilíndrica com a base e o topo esféricos. Contém água e vapor nas proporções 60% - 40% em equilíbrio termodinâmico, quando em funcionamento normal (figura 1) e contém ainda os seguintes acessórios principais:

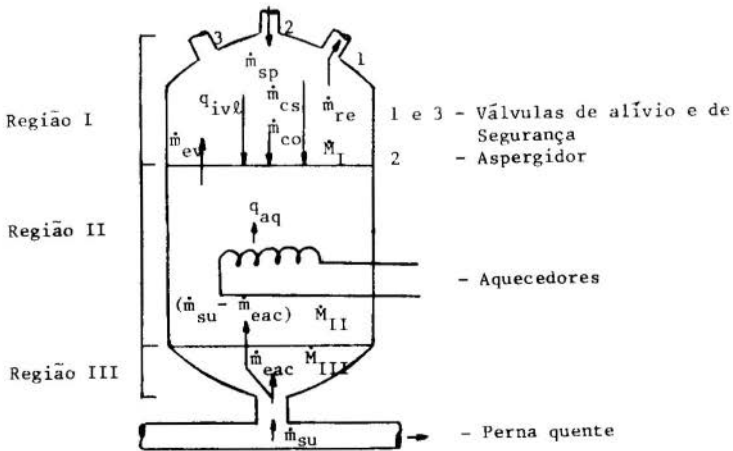


Fig. 1 - Diagrama esquemático do pressurizador

Aspergidor: Normalmente conectado com a perna fria do primário, borra gotículas de água sub-resfriada para condensar vapor no caso de aumento de pressão.

Válvulas de Alívio e de Segurança: Liberam vapor caso a pressão ultrapasse certos limites. O limite de pressão para abertura das válvulas de segurança é superior ao das válvulas de alívio.

Aquecedores Elétricos de Imersão: Os aquecedores são acionados em caso de queda de pressão. Uma parte deles funciona de forma proporcional e a outra tem atuação do tipo ligado-desligado.

Linha de Surto: Na calota inferior há uma conexão de pressurizador com a perna quente do circuito primário. A água escoava para dentro ou para fora do vaso (surto positivo ou negativo), caso esteja ocorrendo uma expansão ou contração do volume do refrigerante primário.

3. A Modelagem do Pressurizador

Suposições Teóricas: O modelo não impõe nenhuma restrição a priori quanto aos processos segundo os quais vapor e água irão evoluir durante a simulação.

A Zona de Vapor e a Zona Principal de Água podem apresentar as seguintes combinações de estados termodinâmicos:

- (i) Vapor superaquecido e líquido comprimido
- (ii) Vapor superaquecido e líquido duas fases
- (iii) Vapor duas fases e líquido comprimido
- (iv) Vapor duas fases e líquido duas fases.

Para a Zona de Acumulação basta considerar líquido comprimido, pois como a finalidade desta região é representar uma estratificação da temperatura da parte líquida, ela deixa de existir quando sua temperatura se iguala à da zona principal de água.

A massa de água borraçada pelo aspergidor tem inicialmente a entalpia da perna fria, adquirindo a entalpia de saturação para o líquido na pressão do pressurizador ao atingir a interface vapor-água.

O vapor é liberado pelas válvulas de alívio e de segurança com a entalpia da região gasosa.

O fluxo de massa condensado pelo aspergidor tem inicialmente a entalpia do vapor, e, ao final do processo, tem a entalpia do líquido saturado, na interface vapor-água, para a pressão do sistema.

O fluxo de massa evaporada tem, inicialmente, a entalpia do líquido saturado na Zona Principal de Água e assume a entalpia de saturação do vapor ao atingir a região gasosa.

Na condensação normal, a massa de vapor se condensando tem inicialmente, a entalpia da região de vapor e, após o processo, a entalpia do líquido saturado.

Foi considerado desprezível o fenômeno de condensação de vapor nas paredes do pressurizador.

Dos processos de transferência de calor, apenas o calor trocado pela região de vapor com a interface vapor-água foi considerado como contribuição importante.

A vazão de surto é suposta conhecida ao longo do tempo de simulação do transitório. Para surto positivo, a entalpia do mesmo é considerada conhecida e igual à entalpia da perna quente. Para surtos negativos, a entalpia associada a este é função das entalpias da Zona Principal de Água e da Zona de Acumulação.

Foi considerada uniforme a pressão dentro do pressurizador, por serem desprezíveis as variações de pressão em pontos diversos no seu interior.

Equações do Modelo

Aquecedores: O funcionamento dos aquecedores é determinado pela seguinte equação diferencial de primeira ordem [3]:

$$\tau_{aq} \frac{d}{dt} q_{aq} = Q_{aq} - q_{aq}, \quad (1)$$

onde Q_{aq} é a potência elétrica dos aquecedores, τ_{aq} é o tempo de atraso e q_{aq} é o calor transferido para a Zona Principal de água.

Para os aquecedores do tipo "on-off", Q_{aq} é uma função degrau: Para os aquecedores proporcionais, Q_{aq} varia linearmente segundo a fórmula [8]:

$$Q_{aq} = \begin{cases} 0 & p \leq p_{lig} \\ (p - p_{lig}) f & p > p_{lig} \end{cases}, \quad (2)$$

onde p é a pressão do sistema, p_{lig} é a pressão de acionamento e f é o fator de ganho dos aquecedores proporcionais.

A equação [2] é usada até o ponto em que o valor de Q_{aq} atinge a potência máxima. O modelo inclui também a possibilidade de um banco de aquecedores atuando por temperatura, para atender à característica de algumas centrais PWR.

Aspergidor: O aspergidor possui uma determinada vazão e, uma vez

ligado, tem o fluxo variando linearmente de acordo com a pressão no sistema e seus parâmetros de funcionamento (pressão de ligamento, pressão de desligamento e pressão em que o fluxo é máximo [7]).

Válvulas de Alívio e de Segurança: O procedimento usado para simular as válvulas de alívio e de segurança é análogo ao utilizado para o aspergidor [7].

Condensação Induzida pelo Aspergidor: A taxa de condensação induzida pelo aspergidor é calculada através de um balanço de entalpias, assumindo-se que no percurso de queda elas realizem todo o seu potencial como núcleos de condensação, atingindo a temperatura de saturação [4] antes de chegar na interface líquido-vapor:

$$\dot{m}_{cs} = \dot{m}_{sp} \frac{h_f - h_{sp}}{h_I - h_f}, \quad (3)$$

onde h_f é a entalpia de saturação do líquido, h_{sp} é a entalpia da água borrifada, h_I é a entalpia da Região I, \dot{m}_{sp} é a vazão do aspergidor e \dot{m}_{cs} é a vazão de massa sendo condensada.

Ebulição: Para o fenômeno da ebulição, foi utilizada a seguinte equação de primeira ordem [3]:

$$\frac{d}{dt} \dot{m}_{ev} = \frac{1}{\tau_b} (\dot{m}_b - \dot{m}_{ev}), \quad (4)$$

sendo:

$$\dot{m}_b = \frac{A_T}{V_{II}} u_b \alpha, \quad (5)$$

onde \dot{m}_b seria a vazão transportada pelas bolhas em regime estacionário [4], \dot{m}_{ev} é a vazão efetivamente transportada, considerando-se um tempo de atraso τ_b [3], A_T é a área da seção transversal do pressurizador, V_{II} é o volume específico da Zona Principal de Água, α é a fração de vazio e u_b é a velocidade de subida de bolhas.

Condensação Normal: Para condensação normal o procedimento foi análogo ao da ebulição [3]:

$$\frac{d}{dt} \dot{m}_{co} = \frac{1}{\tau_c} (\dot{m}_c - \dot{m}_{co}), \quad (6)$$

sendo:

$$\dot{m}_c = \frac{A_T}{v_I} u_c (1-\alpha), \quad (7)$$

onde \dot{m}_c seria a vazão de massa condensada na Zona Principal de Água em regime estacionário [4], \dot{m}_c é a vazão efetivamente transportada para a Região Líquida após o tempo de atraso τ_c [3], v_I é o volume específico da Região de Vapor e u_c é a velocidade de queda de condensado.

Calor Trocado através da Interface: A equação de transferência de calor utilizada é [3]:

$$q_{iv\ell} = u_{iv\ell} A_T (T_I - T_{sat}), \quad (8)$$

onde $u_{iv\ell}$ é o coeficiente de transferência de calor da Região de Vapor para a interface, T_I é a temperatura do sistema na Região de Vapor e T_{sat} é a temperatura de saturação para a pressão do sistema.

Parcela de Surto Entrando na Zona de Acumulação: Qualquer modelo que considere 2 regiões líquidas no pressurizador, tem a necessidade de formular algumas hipóteses quanto às parcelas da vazão de surto que se misturam a uma e outra região. No modelo de Meissner, [6], foi suposto que a razão entre essas parcelas é uma constante, que deve ser simplificada em cada caso. Na realidade, essa proporção não se mantém constante ao longo de um transitório, e no presente modelo isto foi levado em conta, supondo-se que a fração do surto que vai para a Zona de Acumulação é uma função da vazão de surto (\dot{m}_{su}).

Nesta função, um polinômio cúbico, procurou-se representar o seguinte comportamento: (i) para pequenas vazões de surto não há praticamente estratificação da parte líquida e portanto a fração do surto que vai para a Zona de Acumulação é muito pequena, (ii) à medida que a vazão aumenta, esta fração também aumenta até atingir um valor máximo, quando toda a água estaria entrando na Zona de Acumulação.

Análise Termodinâmica das Três Regiões: Além das equações de conservação de massa e energia, que serão aplicadas a cada região, tem-se que usar também a condição de que o volume total do pressurizador não varia, ou seja,

$$\frac{dV_I}{dt} + \frac{dV_{II}}{dt} + \frac{dV_{III}}{dt} = 0 \quad (9)$$

Aplicando-se as equações de conservação de massa e energia às Regiões I, II e III pode-se escrever:

Região I, (Zona de Vapor)

$$\frac{dM_I}{dt} = \dot{m}_{ev} - \dot{m}_{co} - \dot{m}_{cs} - \dot{m}_{re} \quad (10)$$

$$\frac{dH_I}{dt} = \sum \dot{m}_e h_e |_I - \sum \dot{m}_s h_s |_I + \frac{1}{J} V_I \dot{p} - q_{iv\ell} \quad (11)$$

Região II, (Zona Principal de Água)

$$\frac{dM_{II}}{dt} = \dot{m}_{co} + \dot{m}_{cs} + \dot{m}_{sp} + (1 - \xi_1 F_1) \dot{m}_{su} + \xi_2 F_{1,\tau} \dot{m}_{su,\tau} - \dot{m}_{ev} \quad (12)$$

onde F_1 é a fração que determina a partição da vazão do surto, $(1 - \xi_1 F_1) \dot{m}_{su}$ é a parcela do surto se misturando com a Região II e $\xi_2 F_{1,\tau} \dot{m}_{su,\tau}$ é a quantidade de água, que após um certo período de acumulação na Região III, mistura-se à Região II.

$$\frac{dH_{II}}{dt} = \sum \dot{m}_e h_e |_{II} - \sum \dot{m}_s h_s |_{II} + \frac{1}{J} V_{II} \dot{p} + q_{iq} + q_{iv\ell} \quad (13)$$

Região III, (Zona de Acumulação): A Zona de Acumulação será apresentada com as simplificações que a ela foram atribuídas, de modo que suas equações pudessem ser resolvidas desacopladas das outras.

$$\frac{dM_{III}}{dt} = \xi_1 F_1 \dot{m}_{su} - \xi_2 F_{1,\tau} \dot{m}_{su,\tau} \quad (14)$$

O subscrito τ refere-se ao valor do surto alguns τ segundos antes do instante t considerado.

ξ_1 e ξ_2 são meros coeficientes de controle para evitar que a massa computada para a Zona de Acumulação assumia valores negativos.

$$\frac{dH_{III}}{dt} = \sum \dot{m}_e h_e |_{III} - \sum \dot{m}_s h_s |_{III} + \frac{1}{J} V_{III} \dot{p} \quad (15)$$

As parcelas $\sum \dot{m}_e h_e |_i - \sum \dot{m}_s h_s |_i$, que aparecem nas equações das 3 regiões, representam a taxa líquida de transporte de entalpia para cada região.

Maiores informações sobre a resolução das equações de conservação de massa e energia da Zona de Acumulação desacoplada das demais regiões podem ser encontradas na referência [1].

Com as equações que foram apresentadas, pode-se obter uma expressão para a variação temporal da pressão para cada combinação de estados termodinâmicos possíveis no pressurizador, aliando-se às equações de massa e energia de cada uma das regiões mais algumas peculiares a cada um dos quatro estados.

Condição (i): Considerando a pressão e a entalpia como as variáveis de referência, pode-se expressar a derivada temporal do volume específico, de cada região, da seguinte forma:

$$\dot{v}_j = \left(\frac{\partial v_j}{\partial h_j} \right)_p \dot{h}_j + \left(\frac{\partial v_j}{\partial p} \right)_h \dot{p}, \quad (16)$$

onde $j = I, II$ para as Regiões I e II respectivamente. De maneira análoga, a taxa de variação do volume total de cada região pode ser expressa:

$$\dot{V}_j = \dot{M}_j v_j + M_j \dot{v}_j, \quad j = I, II \quad (17)$$

Para \dot{h}_j , a seguinte equação nos será útil:

$$\dot{h}_j = \frac{1}{M_j} (\dot{H}_j - \dot{M}_j h_j). \quad (18)$$

Com o uso das equações (9) e (16) a (18), a expressão da variação da pressão no tempo para a condição (i) é:

$$\dot{p} = \frac{\dot{M}_I v_I + \dot{M}_{II} v_{II} + \dot{M}_{III} v_{III} + \left(\frac{\partial v_I}{\partial h_I} \right)_p (\sum \dot{m}_e h_e |_I - \sum \dot{m}_s h_s |_I - q_{ivl} - \dot{M}_I h_I)}{\left(\frac{\partial v_I}{\partial h_I} \right)_p \frac{1}{V_I} + M_I \left(\frac{\partial v_I}{\partial p} \right)_h + \left(\frac{\partial v_{II}}{\partial h_{II}} \right)_p \frac{1}{V_{II}} + M_{II} \left(\frac{\partial v_{II}}{\partial p} \right)_h} - \frac{\left(\frac{\partial v_{II}}{\partial h_{II}} \right)_p (\sum \dot{m}_e h_e |_{II} - \sum \dot{m}_s h_s |_{II} + q_{aq} + q_{ivl} - \dot{M}_{II} h_{II})}{\left(\frac{\partial v_I}{\partial h_I} \right)_p \frac{1}{V_I} + M_I \left(\frac{\partial v_I}{\partial p} \right)_h + \left(\frac{\partial v_{II}}{\partial h_{II}} \right)_p \frac{1}{V_{II}} + M_{II} \left(\frac{\partial v_{II}}{\partial p} \right)_h} \quad (19)$$

Condição (ii): As condições para o vapor superaquecido permanecem as mesmas da condição (i). Para a Região II, a duas fases, existem as seguintes equações adicionais:

$$M_{II} = M_{IIg} + M_{II f} \quad (20)$$

$$Y_{II} = M_{IIg} y_g + M_{II f} y_f \quad (21)$$

onde Y representa a propriedade que se está considerando. No caso do volume $Y = H$ e $y = h$.

Note-se que, neste caso, as propriedades específicas dependem apenas de uma variável de estado, portanto pode-se escrever:

$$y_g = y_g(P) \quad (22)$$

$$y_f = y_f(P) \quad (23)$$

Com as equações acima, pode-se obter uma expressão para taxas de variação da entalpia e volume totais da Região II, ou seja:

$$\dot{H}_{II} = \dot{M}_{IIg} h_g + \dot{M}_{II f} h_f + \dot{M}_{IIg} \frac{dh_g}{dp} \dot{p} + \dot{M}_{II f} \frac{dh_f}{dp} \dot{p} \quad (24)$$

$$\dot{V}_{II} = \dot{M}_{IIg} v_g + \dot{M}_{IIg} \frac{dv_g}{dp} \dot{p} + \dot{M}_{II f} v_f + \dot{M}_{II f} \frac{dv_f}{dp} \dot{p} \quad (25)$$

Comparando-se as equações (13) e (25) decorre,

$$\dot{M}_{II f} = - \frac{\sum \dot{m}_e h_e |_{II} - \sum \dot{m}_s h_s |_{II} + \dot{V}_{II} \dot{p} + q_{ivl} + q_{ivv} - \dot{M}_{IIg} \frac{dh_g}{dp} \dot{p} - \dot{M}_{II f} \frac{dh_f}{dp} \dot{p} - \dot{M}_{IIg} h_g}{h_g - h_f} \quad (26)$$

Rearranjando as equações (9) com (16) a (18), (25) e (26), chega-se à equação da variação temporal da pressão na condição (ii):

$$\dot{p} = - \frac{\{ \dot{M}_{II} v_I + \dot{M}_{II} v_{II} + \dot{M}_{III} v_{III} - (\frac{\partial v_I}{\partial h_I})_p (\sum \dot{m}_s h_s |_{II} - \sum \dot{m}_e h_e |_{II} + q_{ivl} + \dot{M}_{II} h_f) \} (h_g - h_f) + \{ (\frac{\partial v_I}{\partial h_I})_p \dot{V}_{II} + \dot{M}_{II} (\frac{\partial v_I}{\partial p})_{h_I} + \dot{M}_{IIg} \frac{dv_g}{dp} + \dot{M}_{II f} \frac{dv_f}{dp} \} (h_g - h_f) \dot{p}}{\quad} //$$

$$\frac{+(v_g - v_f) \left(\sum \dot{m}_e h_e |_{II} - \sum \dot{m}_s h_s |_{II} + q_{aq} + q_{ivl} - \dot{M}_{II} h_f \right)}{+(v_g - v_f) \left(\frac{1}{J} V_{II} - M_{IIg} \frac{dh_g}{dp} - M_{II f} \frac{dh_f}{dp} \right)} \quad (27)$$

Condição (iii): As condições para o líquido comprimido continuam as mesmas da condição (i). Para a Região I a duas fases, são válidas as equações (22) e (23) e existem as seguintes equações adicionais análogas às equações (20), (21), (24) e (25) da Região II na condição (ii):

$$M_I = M_{Ig} + M_{If} \quad (28)$$

$$Y_I = M_{Ig} y_g + M_{If} y_f \quad (29)$$

$$\dot{V}_I = \dot{M}_{Ig} v_g + M_{Ig} \frac{dv_g}{dp} \dot{p} + M_{If} v_f + M_{If} \frac{dv_f}{dp} \dot{p} \quad (30)$$

$$\dot{H}_I = \dot{M}_{Ig} h_g + M_{Ig} \frac{dh_g}{dp} \dot{p} + M_{If} h_f + M_{If} \frac{dh_f}{dp} \dot{p} \quad (31)$$

Igualando-se as equações (11) e (31), fica determinada a taxa de variação de massa do líquido existente na Região I:

$$\dot{M}_{If} = \frac{\dot{M}_I h_g + (M_{Ig} \frac{dh_g}{dp} + M_{If} \frac{dh_f}{dp} - \frac{1}{J} V_I) \dot{p} - \sum \dot{m}_e h_e |_I + \sum \dot{m}_s h_s |_I}{h_g - h_f} \quad (32)$$

Combinando-se (9) com (16) a (18), (30) e (32) após uma arrumação dos termos, obtém-se a seguinte expressão para a variação de pressão em relação ao tempo, para a condição (iii):

$$\dot{p} = \frac{(h_g - h_f) \left[\dot{M}_I v_g + \dot{M}_{II} v_{II} + \dot{M}_{III} v_{III} + \left(\frac{\partial v_{II}}{\partial h_{II}} \right)_p \left(\sum \dot{m}_e h_e |_{II} - \sum \dot{m}_s h_s |_{II} + q_{aq} - \dot{M}_{II} h_{II} \right) \right] -}{(h_g - h_f) \left[M_{Ig} \frac{dv_g}{dp} + M_{If} \frac{dv_f}{dp} + \left(\frac{\partial v_{II}}{\partial h_{II}} \right)_p \frac{1}{J} V_{II} + M_{II} \left(\frac{\partial v_{II}}{\partial p} \right) h_{II} \right]} \quad //$$

$$\frac{-(v_g - v_f) \left(M_I h_g - \sum \dot{m}_e h_e |_I + \sum \dot{m}_s h_s |_I \right)}{-(v_g - v_f) \left(M_{Ig} \frac{dh_g}{dp} + M_{If} \frac{dh_f}{dp} - \frac{1}{J} V_I \right)} \quad (33)$$

Condição (iv): Para a Região I a duas fases e a Região II a duas fases, as derivadas em relação ao tempo dos volumes I e II já estão definidas respectivamente nas condições (iii) e (ii). O desenvolvimento da equação (9) aplicada ao caso, fornece a variação temporal da pressão na condição (iv):

$$\begin{aligned}
 \dot{P} = & - \frac{(h_g - h_f) \left(\dot{M}_{I g} v_g + \dot{M}_{II g} v_g + \dot{M}_{III g} v_{III} \right) + (v_g - v_f) \left(-\dot{M}_{I g} h_g - \sum \dot{m}_e h_e |_{I} - \sum \dot{m}_s h_s |_{I} \right)}{(h_g - h_f) \left(M_{I g} \frac{dv_g}{dp} + M_{II g} \frac{dv_g}{dp} + M_{III g} \frac{dv_g}{dp} \right) - (v_g - v_f) \left(M_{I g} \frac{dh_g}{dp} + M_{II g} \frac{dh_g}{dp} \right)} // \\
 & // \frac{- \dot{M}_{II g} h_g + \sum \dot{m}_e h_e |_{II} - \sum \dot{m}_s h_s |_{II} + q_{aq}}{- \frac{1}{J_{VI}} + M_{I g} \frac{dh_g}{dp} + M_{II g} \frac{dh_g}{dp} - \frac{1}{J_{VII}}} \quad (34)
 \end{aligned}$$

4. Resultados e Conclusões

Foram feitos diversos testes de simulação para o pressurizador de Angra I e o da Usina Atômica de Shippingport, obtendo-se em todos eles resultados satisfatórios, com discrepâncias sempre menores que 5% em relação aos resultados fornecidos pelo fabricante (no caso de Angra I) e experimental (no caso de Shippingport).

Para ilustrar este trabalho, foi escolhida a simulação do comportamento do pressurizador, durante um acidente de perda total de circulação forçada no circuito primário, da Central de Angra I. Os dados de vazão de surto, função excitadora do modelo, foram obtidos na referência [9]. Esta referência apresenta resultados de simulação de vários transitórios em Angra I, usando o código "ALMOD", desenvolvido no GRS-Garching (RFA). A comparação dos resultados do presente trabalho com os da referência [9] cresce de importância, porque o programa "ALMOD" incorpora o modelo do pressurizador desenvolvido por Meissner [6], um dos mais completos e sofisticados que encontramos na literatura disponível.

Observando-se as curvas de pressão obtidas com os dois modelos, verifica-se que ambas têm basicamente o mesmo comportamento. O ponto de máximo ocorre exatamente no mesmo instante, $t = 3,90$ seg., e os valores obtidos no pico diferem de 0,37% apenas.

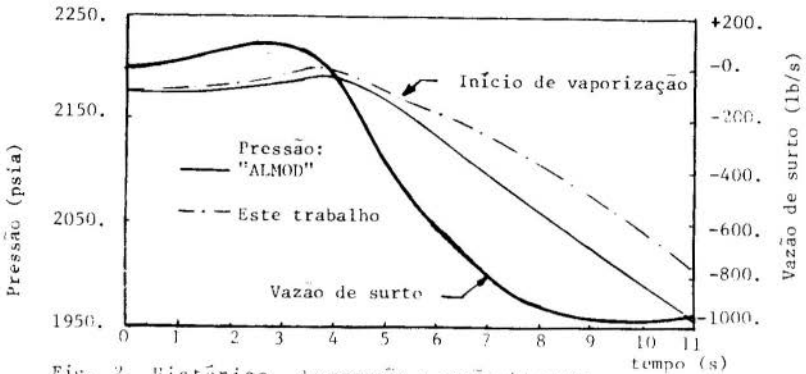


Fig. 2. Histórico de pressão e vazão de surto no pressurizador para o teste de Angra I.

Em ambos os modelos a pressão, após um período de ascensão devido a um surto positivo, atinge o máximo quando este inverte o seu sentido. No período inicial de queda de pressão ambas as curvas apresentam a mesma inclinação até o instante $t = 5,30$ seg., quando é atingida a condição de saturação para a Zona Principal de Água e a vaporização do líquido começa a atenuar a queda de pressão. A partir desse ponto as duas curvas diferem um pouco no seu formato, até os 8,0 segundos quando voltam a apresentar a mesma inclinação.

De qualquer forma, durante todo o intervalo de simulação, a maior discrepância observada na pressão calculada pelos dois modelos foi de 2,64%.

O presente modelo vem sendo aprimorado a fim de ser integrado a um projeto mais amplo para simulação do comportamento de todos os componentes do circuito primário durante transientes operacionais, em colaboração IEN/CNEN, o que será objeto de um próximo trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Madeira, A.A., Um Novo Modelo para Simulação de Pressurizadores de Centrais PWR, Tese - UFRJ, Fac.Eng., Rio de Janeiro. 1980, 192p.
- [2] Redfield, J.A. e Margolis, S.G. - TOPS-A FORTRAN Program for the Transient Thermodynamics of Pressurizers, WADP-TM-545, Bettis Atomic Power Laboratory, dezembro, 1965.

- [3] Nahavandi, A.N. e Makkenchery, S. - An Improved Pressurizer Model with Buble Rise and Condensate Drop Dynamics, Nuclear Engineering and Design, 12(1): 135-147, 1970.
- [4] Baron, R.C. - Digital Model Simulation of a Nuclear Pressurizer. Nucl. Science and Engineering, 52(1): 283-291, 1973.
- [5] RETRAN - A Program for One Dimensional Transient Thermal-Hidraulic Analysis of Complex Fluid Power System, EPRI CCMS - Computer Code Manual, 1978.
- [6] Meissner, R. - Druckhaltermodel zur Simulation von Betriebsstörungen in Druckwasserreaktoranlagen, MRR-154 Laboratorium für Reaktorregelung and Anlagensicherung, Garching, 1976.
- [7] Vanni, E. A. - Simulador Digital do Pressurizador e Bomba do Circuito Primário de um Reator com Água Pressurizada, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1978, 173p.
- [8] FURNAS - Centrais Elétricas S.A., Angra Nuclear Power Plant one F-E-20/32. Precautions, Limitations and Setpoints for Nuclear Steam Supply Systems - Revision 3, August 1980.
- [9] Camargo, C.T.:. - Primeira Simulação de Acidentes em Angra I Usando o Código ALMOD, Rel. DR nº 95/81, CNEN, 1981.