

COBEM

V CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

79

ANAIS - PROCEEDINGS

VOLUME D

MÉTODOS NUMÉRICOS E ANALÍTICOS
NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS

Campinas - SP

12/15 Dezembro 1979

COBEM
V CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA **79**

ANAIS - PROCEEDINGS

VOLUME D
MÉTODOS NUMÉRICOS E ANALÍTICOS
NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS

Campinas - SP
12/15 Dezembro 1979

ÍNDICE - VOLUME D

MÉTODOS NUMÉRICOS E ANALÍTICOS
NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS

- Trab. Tecnológico N° 01 p. 001-010
 Fremond, M; Friaa, A.
 Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
 Plasticite et Materiau de Norton-Hoff Generalise
- Trab. de Pesquisa N° 01 p. 011-019
 Taroco, E.; Feijó, R.A.
 CBFP - (Brasil)
 Soluciones Aproximados en Elasto/Viscoplasticidad
- Trab. de Pesquisa N° 02 p. 020-030
 Andrade, J.E.L.; Ribeiro, S.V.G.; Barroso, A.C.O.
 CNEN - (Brasil)
 Exclusão da Solução Elástica para o Regime Elasto-
 Plástico usando Aplicação ao Estudo do Chicoteamen-
 to de tubos.
- Trab. de Pesquisa N° 03 p. 031-041
 Zindeluk, M.; Bevilacqua, L.
 COPPE/UFRJ - (Brasil)
 Propagação de onda plana em uma barra não homoge-
 neizada.
- Trab. de Pesquisa N° 04 p. 042-051
 Groels, A.G.; Creus, G.Z.
 UFRGS - (Brasil)
 Resolução de Sistemas de Equação em Problemas de
 Plasticidade.
- Trab. de Pesquisa N° 05 p. 052-067
 Feijó, P.A.; Taroco, E.
 CBPF - (Brasil)
 Formulaciones Variacionales y Aproximaciones nume-
 ricas en elasto Plasticidad.

- Trab. de Pesquisa Nº 06 p. 068-077
 Predeleanu, M.; Dahan, M.
 École Polytechnique - (França)
 Contact Problems for Viscoelastic Anisotropic
 Bodies.
- Trab. Tecnológico Nº 02 p. 078-087
 Barcellos, C.C.; Rosa, E.
 UFSC - (Brasil)
 Arquitetura de um Sistema de Elementos Finitos
 I - Característica.
- Trab. de Pesquisa Nº 07 p. 088-098
 Zovain, N.; Herkovits, J.
 PUC/RJ - (Brasil)
 Proyecto Óptimo de Estructuras que presentan
 grandes Deformaciones.
- Trab. Tecnológico Nº03 p. 099-107
 Segenreich, S.A.; Gouvea, J.P.; Araujo, M.G.
 PUC/RJ - (Brasil)
 Grafo - Um Sistema para Geração de Desenhos Via
 Impressora de Saída
- Trab. Tecnológico Nº 04 p. 108-118
 Back, N.; Barcellos, C.S.
 UFSC - (Brasil)
 Efeito de malha em Problemas Assimétricos modela-
 dos por elementos finitos lineares.
- Trab. de Pesquisa Nº 08 p. 119-129
 Guerreiro, J.N.C.; Galeão, C.N.R.; Loula, A.F.D.
 CBPF - (Brasil)
 Pipe-Whip - Um Programa Geral de Análise.
- Trab. de Pesquisa Nº 09 p. 130-143
 Costa Jr, J.A., Alves D.B.
 UFSC - (Brasil)
 Teoria não Linear de Cascas Elásticas.
- Trab. de Pesquisa Nº 10 p. 144-155
 Anond, S.C.
 Clemson University - (USA)
 Substructuring Technique in nonlinear Finit
 Element Analysis.

- Trab. de Pesquisa Nº 11 p. 156-165
 Alves, D.B.
 UFSC - (Brasil)
 Programa Analisador Dinâmico de Cascas Ortotrópi-
 cas de Revolução.
- Trab. de Pesquisa Nº 12 p. 166-180
 Pamplona, C.F.M.; Stuckembruck, S.
 PUC/RJ - (Brasil)
 Tensões por Ação Gravitacional em uma esfera Maci-
 ça - Aplicações para o Estudo dos Planetas.
- Trab. Tecnológico Nº 05 p. 181-190
 Barcellos, C.S.; Rosa, E.
 UFSC - (Brasil)
 Arquitetura de um Sistema Modular de Elementos Fi-
 nitos - II Aplicações.
- Trab. de Pesquisa Nº 13 p. 191-199
 Toledo, E.M.; Ebecken, N.F.F.
 COPPE/UFRJ - (Brasil)
 Modelos mistos para a análise de membranas e sólidos
 axissimétricos de materiais hiperelásticos in-
 compressíveis.
- Trab. Tecnológico Nº 06 p. 200-207
 Groehs, A.G.; Creus, G.I.
 UFRGS - (Brasil)
 Análise Elastoplástica de carga limite de uma cha-
 veta de gerador.
- Trab. Tecnológico Nº 07 p. 208-216
 Ruziċ, D.
 Faculty of Mechanical Eng. - (Yugoslavia)
 Elasto-Plastic Bending with Inhibited Torsion of a
 thin walled channel section Becom.
- Trab. de Pesquisa Nº 14 p. 217-229
 Guenther, R.; Alves, D.B.
 UFSC - (Brasil)
 Análise de Tensões Térmicas em Cascas de Revolução.

D VI

- Trab. de Pesquisa Nº 15 p. 230-239
 Rohatg , J.S.
 UFRGS (Brasil)
 Determination of Strain Energies in an Elastic :
 A Case Study of Twisting of Filaments.
- Trab. de Pesquisa Nº 16 p. 240-246
 Rios Neto, A.
 UEP Julio de Mesquita Filho - (Brasil)
 Estimaco Linear ótima aplicada ¢ gerao de má-
 todo Direto de busca em otimizao de Par¢metros.
- Trab. de Pesquisa Nº 17 p. 247-259
 Hsu, L.
 COPPE/UFRJ - (Brasil)
 Parametric Excitation of Linear and Nonlinear
 Systems: The Normal Form Method.
- Trab. de Pesquisa Nº 18 p. 260-266
 Broscwiski B.
 Johann Wolfgang Goethe Universitat - (Frankfurt)
 On the Continuity of the minimum set in Parametric
 Programing.
- Trab. de Pesquisa Nº 19 p. 267-276
 Rosa, E.
 UFSC - (Brasil)
 Modelos para Estimativa da confiabilidade usando a
 teoria da interferência.
- Trab. Tecnológico Nº 08 p. 277-290
 Silva, A.S.; Sampaio Filho, R.
 COPPE/UFRJ - (Brasil)
 Superfícies Singulares: Condioes de compatibilidade.
- Trab. de Pesquisa Nº 20 p. 291-300
 Baptista Filho, B.D.; Komuk, A.A.
 IEA - (Brasil)
 Distribuico de temperaturas em um trocador de calor
 de carcaa e tubos "U" com chicanas segmentadas.

- Trab. de Pesquisa Nº 21 p. 301-310
Gomes, A.V.; Komuk, A.A.
UNICAMP - (Brasil)
Dinâmica e controle de um gerador de vapor tipo
"passo único".
- Trab. de Pesquisa Nº 22 p. 311-320
Komuk, A.A.
UNICAMP - (Brasil)
Distribuição de Pressões e velocidades em Troca-
dores de calor de carcaça e tubos com chicanas
segmentadas.
- Trab. de Pesquisa Nº 23 p. 321-330
Welter, A.N.U.; Komuk, A.A.
IEA - (Brasil)
Modelo Numérico de isolação Térmica Interna tipo
Fibra de Dutos de Gás Quente.
- Trab. Tecnológico Nº 09 p. 331-340
Laton, B.G.A.G.
PROMEC/SC - (Brasil)
Estudo do comportamento dinâmico térmico de um
forno.
- Trab. Tecnológico Nº 10 p. 341-350
Laton, B.G.A.G.
PROMEC/SC - (Brasil)
Estudo do comportamento dinâmico térmico de um
forno.
- Trab. de Pesquisa Nº 24 p. 351-360
Halász, L.
UNICAMP - (Brasil)
Trocadores de Calor de Tubos aletados conceitos
de dimensionamento.
- Trab. de Pesquisa Nº 25 p. 361-368
Braga Filho, W.
PUC/RJ - (Brasil)
Uma técnica para a interpolação por polinômios.

D VIII

- Trab. Tecnológico Nº 11 p. 369-381
Müller , A.; Bevilacqua, L.
PUC/RJ - (Brasil)
Tensões de membrana em vasos esféricos apoiados em colunas.
- Trab. de Pesquisa Nº 26 p. 382-391
Naschie, M.S.F.
University of Rayadh - (Arábia)
Catastrophe and stability theory in applied science.
- Trab. Tecnológico Nº 12 p. 392-401
Alves, D.B.
UFSC - (Brasil)
Programa analisador dinâmico de sistemas estruturais.
- Trab. de Pesquisa Nº 27 p. 402-419
Srinath, L.S.
Deptº of Mech. Eng. Indian Institute of Science
Stresses near an interior crack tip a new scattered light approach.


PLASTICITE et MATERIAU DE NORTON-HOFF GENERALISE

M. Frémond

 Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et
 Chaussées

A. Friaâ

Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

 Laboratoire Central des Ponts et Chaussées,
 Paris (France)

RESUME

La loi de Norton, très utilisée en pratique dans des disciplines variées, se généralise au cas des sollicitations multiaxiales. Nous montrons le lien étroit entre les lois de la plasticité et la loi de Norton-Hoff généralisée. Des applications numériques en analyse limite sont données.

SUMÁRIO

A lei de Norton, muito utilizada na prática em diferentes disciplinas, é generalizada para levar em conta solicitações multiaxiais. Apresenta-se a estreita relação entre a lei de plasticidade e a lei de Norton Hoff generalizada. Aplicações numericas ao problema de cargas limites são também apresentadas.

1. INTRODUCTION ET LOI DE NORTON-HOFF GENERALISEE1.1. La loi de Norton

La loi de Norton [1] est souvent utilisée pour décrire le fluage secondaire de nombreux matériaux sous sollicitations unidimensionnelles et à température constante. Elle s'écrit

$$\dot{\epsilon} = \alpha |\sigma|^{q-2} \sigma, \quad (1)$$

où $\dot{\epsilon}$ désigne la vitesse de déformation, σ , la contrainte de fluage. α et q sont deux paramètres réels positifs ($q > 2$) dépendant du matériau et de la température.

Parmi les nombreux matériaux qui vérifient la loi (1) on peut citer notamment : les aciers à hautes températures, certains types de verres, les glaciers, les sols gelés, les matériaux lithosphériques, certains solides cristallins à hautes températures, les peintures solides etc... .

Cette loi peut également servir pour décrire le comportement visqueux de certains matériaux dans des essais quasi-statiques divers. C'est le cas de certains bitumes [2].

1.2. La loi de Norton-Hoff classique

Dans le cas des sollicitations multidimensionnelles, la loi la plus utilisée est celle de Norton-Hoff [3]. Celle-ci relie le tenseur des vitesses de déformation ($\dot{\epsilon}_{ij}$), $1 \leq i, j \leq 3$ au déviateur du tenseur des contraintes (s_{ij}), elle s'écrit en adoptant la convention classique de sommation sur les indices répétés

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \alpha (\sqrt{s_{kl} s_{kl}})^{q-2} s_{ij}, \quad (2)$$

α et q ayant la même signification que dans le cas unidimensionnel. La loi (2) s'inverse aisément et l'on trouve

$$s_{ij} = \beta (\sqrt{\dot{\epsilon}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}})^{p-2} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (3)$$

où

$$p, \text{ désigne le conjugué de } q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et

$$\beta = \alpha^{1-p}. \quad (4)$$

Cette loi admet comme cas particulier, la loi du fluide Newtonien pour $q = 2$, β est alors le double de la viscosité du fluide. Il faut bien noter que la dimension de β dé-

pend du paramètre p , on verra plus loin qu'il est possible de l'exprimer à l'aide de deux paramètres ayant une dimension fixe et admettant une interprétation physique intéressante. Enfin les lois (3) et (2) admettent comme cas "limite" la loi de la plasticité parfaite avec critère de von Mises lorsque q tend vers $+\infty$.

Une autre façon de généraliser la loi de Norton au cas des sollicitations multidimensionnelles est donnée par la loi de Norton-Hoff généralisée

1.3. La loi de Norton-Hoff généralisée

On se donne un critère de plasticité défini par une fonction f convexe définie sur l'espace S_3 des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^3 .

On définit le convexe C associé à f par :

$$C = \{ \sigma \in S_3 ; f(\sigma) \leq 0 \}.$$

On suppose que l'origine est intérieure au convexe C .

Soient $\pi(\cdot)$ et $g(\cdot)$, les fonctions d'appui et jauge [4] du convexe C , définies par

$$\pi(\dot{\epsilon}) = \sup \{ \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} ; \sigma \in C \}, \quad \forall \dot{\epsilon} \in S_3,$$

$$g(\sigma) = \inf \{ \mu > 0 ; \sigma \in \mu C \}, \quad \forall \sigma \in S_3$$

On définit alors le sur-potentiel $\phi(\cdot)$ [4] par

$$\phi(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{p} \lambda^{1-p} [\pi(\dot{\epsilon})]^p, \quad (5)$$

et son dual

$$\phi^*(\sigma) = \frac{1}{q} \lambda [g(\sigma)]^q; \quad (6)$$

λ , étant un paramètre réel positif dont on verra la signification physique dans des cas particuliers

La loi de Norton-Hoff généralisée s'écrit alors [5] sous l'une des formes équivalentes suivantes :

$$\dot{\epsilon} \in \partial \phi^*(\sigma), \quad (7)$$

$$\sigma \in \partial \phi(\dot{\epsilon}), \quad (8)$$

$$\phi(\dot{\epsilon}) + \phi^*(\sigma) = \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij}, \quad (9)$$

$$p\phi(\dot{\epsilon}) = q\phi^*(\sigma) = \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij}, \quad (10)$$

où ∂ désigne le sous-différentiel [4]. Plus précisément la

la relation (7) est équivalente à l'inégalité :

$$\dot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) + \phi^*(\sigma) \leq \phi^*(\sigma^*), \quad \forall \sigma^* \in S_3, \quad (11)$$

Remarque. Si l'on remplace dans (7) ou (11) la fonction $\phi^*(\cdot)$ par l'indicatrice $\psi(\cdot)$ du convexe C ($\psi(\sigma) = 0$ si $\sigma \in C$, $\psi(\sigma) = +\infty$ sinon), on obtient la loi de normalité classique en plasticité ou encore l'expression du principe du travail maximal.

1.4. Exemples

Critère de von Mises. Le critère de von Mises s'écrit

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - \bar{K}^2 = 0,$$

où s est le déviateur du tenseur σ et $\bar{K} = \frac{K}{\sqrt{2}}$, la limite en cisssion simple du matériau plastique parfait associé.

Les fonctions d'appui et jauge du convexe C associé sont alors :

$$\Pi(\dot{\epsilon}) = \begin{cases} K \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}, & \text{si } \dot{\epsilon}_{ii} = 0, \quad g(\sigma) = \frac{1}{K} \sqrt{s_{ij} s_{ij}}. \\ +\infty & \text{si non,} \end{cases}$$

La loi de Norton-Hoff généralisée coïncide dans ce cas avec la loi de Norton-Hoff classique, avec

$$\beta = \lambda^{1-p} K^p$$

On peut donner, dans ce cas, une signification physique au paramètre λ : il égale la puissance élémentaire dissipée dans une expérience de cisaillement pure effectuée sur le matériau de Norton-Hoff généralisé lorsque la contrainte de cisaillement est égale à la limite \bar{K} en cisssion simple du matériau rigide plastique associé.

Critère de Tresca. Il s'écrit :

$$\max\{|\sigma_i - \sigma_j|, 1 \leq i, j \leq 3\} - K = 0,$$

où les σ_i désignent les contraintes principales et K , la limite en traction simple du matériau plastique-parfait associé.

Les fonctions d'appui et jauge du convexe C associé sont

$$\Pi(\dot{\epsilon}) = \begin{cases} \frac{K}{2} (|\dot{\epsilon}_1| + |\dot{\epsilon}_2| + |\dot{\epsilon}_3|) & \text{si } \dot{\epsilon}_{ii} = 0, g(\sigma) = \frac{1}{K} \max\{|\sigma_i - \sigma_j|, \\ +\infty & \text{si non, } 1 < i, j < 3\}. \end{cases}$$

La loi de Norton-Hoff généralisée associée s'obtient alors à partir de (5) à (10). Le paramètre λ désigne dans ce cas [6] la puissance élémentaire dissipée dans un essai de traction simple lorsque la contrainte de traction est égale à la limite en traction simple du matériau plastique parfait associé.

1.5. Autre formulation de la loi de Norton-Hoff généralisée. Il est plus commode dans certaines situations pratiques d'utiliser la formulation suivante de la loi de Norton-Hoff généralisée [6]

$$\text{si } g(\sigma) = 0, \dot{\epsilon} = 0,$$

si $g(\sigma) \neq 0$, on introduit un tenseur de contraintes intermédiaire σ' , tel que :

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda^{1-p} [\Pi(\dot{\epsilon})]^{p-1} \sigma', \\ \dot{\epsilon} &\in \partial\psi(\sigma'), \end{aligned}$$

où ψ est l'indicatrice du convexe C (Remarque §1.2).

2. PROBLEME D'ECOULEMENT

2.1. Position du problème

On considère une structure occupant un ouvert régulier Ω de \mathbb{R}^3 , ou \mathbb{R}^2 , constituée d'un matériau de Norton-Hoff généralisé. On suppose que pour les temps $t < 0$, la structure est dans un état neutre sans contraintes ni déformations, à partir de l'instant $t = 0$, on lui applique des efforts extérieurs définis par une distribution volumique \bar{f} dans Ω et une distribution surfacique \bar{T} sur une partie Γ_T de la frontière Γ de Ω , on impose enfin à la structure une vitesse de déplacement \bar{v} sur la partie Γ_U complémentaire de Γ_T dans Γ . On suppose que l'évolution est isotherme et quasi-statique. On se place enfin dans le cadre classique des petites déformations. Le problème d'écoulement consiste alors à trouver le champ de vitesse de déplacement v_p et le champ de contrainte σ_p qui s'établissent dans la structure.

On démontre [6], que si le convexe C est borné ou borné à l'addition d'un tenseur sphérique près le problème d'écoulement admet une solution. On a de plus les deux principes variationnels suivants :

2.2. Principe cinématique

Le champ de vitesses de déplacement v_p , solution du problème d'écoulement minimise la fonctionnelle $H(\cdot)$ parmi tous les champs de vitesses de déplacement cinématiquement admissibles (i.e. assez régulier et vérifiant $v = \bar{v}$ sur Γ_U), avec :

$$H(v) = \int_{\Omega} \phi(\epsilon(v)) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{T} \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_T} \bar{T} \cdot v d\Gamma,$$

où

$$\epsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

2.3. Principe statique

Le champ de contraintes σ_p solution du problème d'écoulement minimise la fonctionnelle $H^*(\cdot)$ parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles, avec :

$$H^*(\sigma) = \int_{\Omega} \phi^*(\sigma) d\Omega - \int_{\Gamma_U} (\sigma \cdot n) \bar{v} d\Gamma$$

n , étant la normale extérieure à Γ au point considéré.

De plus, on a

$$H(v) + H^*(\sigma) = 0. \quad (12)$$

Il est à noter l'analogie entre le principe cinématique et le principe de l'énergie potentielle en élasticité de même que l'analogie entre le principe statique et le principe de l'énergie complémentaire en élasticité, l'identité (12) est également bien connue en élasticité.

Ces principes variationnels sont très commodes pour les calculs numériques. Pour le matériau de Norton-Hoff classique, ils ont été mis en oeuvre pour résoudre divers problèmes pratiques, [7], [8], [9].

3. APPLICATIONS EN ANALYSE LIMITE

3.1. Rappel d'analyse limite

On considère une structure occupant un ouvert Ω de \mathbb{R}^s , $s = 2$ ou 3 , constituée d'un matériau plastique parfait de con-

vexe de plasticité C , et soumise à un processus de chargement proportionnel à une distribution volumique de forces extérieures \bar{f} dans Ω et à une distribution surfacique de forces extérieures \bar{T} sur une partie Γ_T de Γ soit $(\mu\bar{f}, \mu\bar{T})$ où μ est un réel positif, on impose enfin à la structure une vitesse de déplacement nulle sur la partie Γ_U complémentaire de Γ_T dans Γ . L'objet fondamental de l'analyse limite est de déterminer la charge limite de la structure dans le processus considéré :

$$(\mu_\ell \bar{f}, \mu_\ell \bar{T}),$$

de sorte que $\mu < \mu_\ell$ si et seulement si le chargement $(\mu\bar{f}, \mu\bar{T})$ est équilibré par un champ de contrainte dans C .

Nous ne revenons pas sur les deux méthodes classiques: méthode statique et méthode cinématique qui sont bien connues. On va indiquer deux nouvelles méthodes utilisant la loi de Norton-Hoff généralisée associée au convexe C . On suppose que celui-ci vérifie les hypothèses du § 2.1

3.2. Nouvelle méthode statique

Au convexe C , on associe la loi de Norton-Hoff généralisée comme indiquée dans 1.3., on résoud le problème d'écoulement en contraintes en supposant que la structure est constituée d'un matériau qui obéit à cette loi et soumise au chargement $(\mu\bar{f}, \mu\bar{T})$, on pose :

$$S_p(\mu) = H^*(\sigma_p).$$

On démontre alors [6] que

$$\mu < \mu_\ell \iff (S_p(\mu) \rightarrow 0, \text{ quand } p \rightarrow 1)$$

$$\mu > \mu_\ell \iff (S_p(\mu) \rightarrow +\infty, \text{ quand } p \rightarrow 1).$$

3.3. Nouvelle méthode cinématique

On résoud le problème d'écoulement en vitesses de déplacement pour le chargement $(\mu\bar{f}, \mu\bar{T})$, et on pose

$$C_p(\mu) = H(v_p),$$

on a alors

$$\mu < \mu_\ell \iff (C_p(\mu) \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow 1)$$

$$\mu > \mu_\ell \iff (C_p(\mu) \rightarrow \infty \text{ quand } p \rightarrow 1).$$

3.4. Exemples

Exemple 1 : Couronne sphérique soumise à une pression intérieure et à une pression extérieure uniformes.

On considère ici un exemple classique en analyse limite. Il s'agit d'une couronne sphérique de petit rayon a , de grand rayon b constituée d'un matériau plastique parfait homogène et isotrope avec critère de Tresca (cf. §1.4). La couronne est soumise à une pression intérieure uniforme Q et à une pression extérieure uniforme αQ , $\alpha > 0$. On cherche la pression limite Q_{lim} sous l'hypothèse des petites déformations.

En raison de la symétrie sphérique, les contraintes principales sont $N_1 = n$ portées par le rayon vecteur et $N_2 = N_3 = t$ portées par le plan normal au rayon vecteur. La solution complète du problème d'écoulement est dans [6], on trouve

$$S_p(Q) = 4\pi \hat{A}_p(a, b) \frac{\lambda}{q} \left[\frac{|1-\alpha|Q}{2K \hat{A}_p(a, b)} \right]$$

avec

$$\hat{A}_p(a, b) = \frac{q-1}{3} \left[\left(\frac{1}{a^3} \right)^{\frac{1}{q-1}} - \left(\frac{1}{b^3} \right)^{\frac{1}{q-1}} \right]$$

on note que $\hat{A}_p(a, b) \rightarrow \text{Ln} \frac{b}{a}$ quand $p \rightarrow 1$.

On en déduit, par la nouvelle méthode statique que :

$$Q_{lim} = \frac{1}{|1-\alpha|} 2k \text{Ln} \frac{b}{a} \text{ si } \alpha \neq 1, \quad +\infty \text{ si } \alpha = 1.$$

On retrouve ainsi le résultat bien connu.

Exemple 2 : Plaque mince comprimée entre les plateaux rigides rugueux d'une presse.

Il s'agit d'une plaque mince rectangulaire de longueur b , de largeur a , constituée d'un matériau plastique parfait avec critère de von Mises (cf. §1.4). La plaque est comprimée suivant ses grands côtés par les plateaux rigides d'une presse avec une force $F = bQ$ par unité d'épaisseur. On cherche la valeur Q_{lim} dans le cas des plateaux rugueux et en admettant l'hypothèse des petites déformations avec $\frac{b}{a} = 2$. La valeur exacte de Q_{lim} n'est pas connue dans ce cas. En revanche Frey [10] a trouvé une valeur inférieure à Q_{lim} en résolvant un problème d'élasto-plasticité et N'Guyen [11] a

traité le même problème en utilisant les théorèmes classiques de l'analyse limite.

Nous avons utilisé la nouvelle méthode cinématique, nous avons résolu le problème en vitesses par une méthode d'éléments finis. Cette méthode est détaillée dans [6]. Les valeurs obtenues sont indiquées sur le tableau où NDL désigne le nombre de degrés de libertés et \bar{K} la limite en cis-sion simple du matériau de von Mises.

Tableau :

VARIATION DE LA CHARGE LIMITE
EN FONCTION DU NOMBRE DE
DEGRES DE LIBERTE (NDL)
PLATEAUX RUGUEUX

N°	NDL	Q/2 \bar{K}
1	60	.918
2	95	.914
3	158	.909
4	148	.906

Nous retenons la valeur $\left(\frac{Q}{2\bar{K}}\right)_{\text{lim}} = 0,906$, les valeurs données dans [10] et [11] sont respectivement 0,89 et 0,918.

3.5. Nouvelle méthode et estimation de l'erreur

La méthode donnée ci-après permet de traiter le problème de l'analyse limite en ne considérant qu'une seule valeur du paramètre p . Le principe de cette méthode est le suivant : on désigne par $\text{mes}(\Omega)$ le volume (ou surface) occupé par la structure. On pose pour μ donné (cf. 3.1) et $\lambda = 1$,

$$G_p(\mu) = \frac{q}{\text{mes}(\Omega)} S_p(\mu) = - \frac{q}{\text{mes}(\Omega)} C_p(\mu)$$

et

$$\mu_p = \sup\{\mu > 0; G_p(\mu) \leq 1\}, \text{ on a alors } 0 < \frac{\mu_p^{-\mu_\ell}}{\mu_\ell} < \frac{1}{q-1},$$

autrement dit en prenant $(\mu_p \bar{F}, \mu_p \bar{T})$ comme charge limite, l'erreur relative commise est inférieure à $1/q-1$.

Exemple : On reprend l'exemple 2 du 3.4 en supposant cette fois-ci que les plateaux de la presse sont lisses. La charge limite exacte est connue et vaut $\left(\frac{Q}{2\bar{K}}\right)_{\text{lim}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866025$,

nous avons appliqué la méthode ci-dessus pour résoudre le problème. Les résultats sont indiqués sur le tableau qui suit, on obtient une charge limite de 0,86602 !

Tableau :

PLAQUE RECTANGULAIRE EN
MATERIAU DE VON MISES COM-
PRIMEE ENTRE DEUX PLATEAUX
RIGIDES ET LISSES

$\bar{Q}=Q/2k$	$1/(q-1)$	Gp
.86606	.01	.1000E+01
.86604	.01	.1000E+01
.86601	.01	.9988
.8656	.01	.9543

Bibliographie sommaire

- [1] Norton, F.H., The creep of steel at high temperatures. Mc Graw-Hill, N.Y., 1929.
- [2] Friaâ, A.; Such, Ch., C.R. Acad. Sc. Paris, t.288, Série B, p. 197, 1979.
- [3] Hoff, N.J., Quart. Appl. Math., vol.12, n°1, p. 49, 1954.
- [4] Moreau, J.J., On unilateral constraints, Friction and Plasticity. New var. tech. Math. Phys., CIME Bressanone, 1973.
- [5] Friaâ, A., C.R. Acad. Sc. Paris, t.286, Ser. A, p. 953, 1978.
- [6] Friaâ, A., Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI, à paraître.
- [7] Delbecq, J.M.; Frémond, M.; Pecker, A.; Salençon, J. J. Mech. Appl, vol.1, n°3, p.267-304, 1977.
- [8] Péliissier, M.C., Sur quelques problèmes non-linéaires en Glaciologie. Thèse de Doctorat d'Etat Université de Paris Orsay, 1975.
- [9] Daignières, M.; Frémond, M.; Friaâ, A., C.R. Acad. Sc. Paris, t. 286, sér. B, p.371, 1978.
- [10] Frey, F., Rapport interne du Laboratoire de mécanique des matériaux et de statique des constructions, Univ. de Liège, n°33, Juillet 1973.
- [11] N'guyen, D.H., J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. vol. 8, n°1, p. 81-116, 1976.



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-01

P.P. 011 - 019

SOLUCIONES APROXIMADAS EN ELASTO/VISCOPLASTICIDAD

Edgardo Taroco

Raúl A. Feijóo

Laboratório de Cálculo/CBPF
 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

RESUMEN

En este trabajo se presenta la ley constitutiva y una formulación variacional mediante la cual es posible obtener soluciones aproximadas en problemas de elasto/viscoplasticidad. Para la obtención de dichas soluciones se propone un algoritmo numérico en el que se utiliza el Método de Euler conjuntamente con el Método de Elementos Finitos.

SUMMARY

In this work the constitutive law and a variational formulation through which approximate solutions in elasto/viscoplastic problems may be obtained are presented. Also, an algorithm using the Finite Element Method and the Euler Method is proposed.

1. Introducción

En la mecánica de sólidos es usual estudiar por separado las propiedades plásticas y las propiedades reológicas de los materiales. Cuando se analizan fenómenos plásticos, la hipótesis común a todas las teorías es admitir que las deformaciones dependen de la historia de como esas deformaciones fueron procesadas y no del tiempo. [1]

Sin embargo los ensayos de metales ponen en evidencia que los efectos reológicos se presentan en forma más pronunciada cuando el estado plástico es alcanzado, obteniéndose tensiones superiores a las de el ensayo estático a medida que aumenta la velocidad de carga. [2]

En el acero común, por ejemplo, una sollicitación rápida puede hasta triplicar el valor de la tensión de fluencia y producir una marcada reducción en el fenómeno de endurecimiento [3].

A lo anterior se deben las discrepancias que en muchos casos surgen entre los resultados experimentales del análisis de materiales sometidos a cargas variables en el tiempo con los obtenidos mediante la aplicación de la Teoría de la Plasticidad, en que los fenómenos reológicos son despreciados [2].

En el elasto/viscoplasticidad se admite que existe una región del espacio de tensiones dentro de la cual el material se comporta elásticamente y fuera de ella tanto propiedades plásticas como viscosas son llevadas en cuenta.

Existirá por tanto una función de tensiones que limita ambas regiones a ser establecida y una ley constitutiva correspondiente a la zona viscoplástica a ser postulada.

El modelo elasto/viscoplástico presenta la ventaja adicional que a partir de él se pueden obtener tanto el modelo plástico como el modelo de creep.

2. Leyes Constitutivas en Viscoplasticidad

Las leyes constitutivas en viscoplasticidad fueron formuladas en un principio para estados de tensión simples y posteriormente generalizadas para estados de tensión más complejos.

El primero en analizar el comportamiento viscoplástico de los materiales fue Bingham [4]. En su libro "Fluidity and Plasticity" postuló la ley constitutiva que relaciona tensiones con velocidades de deformación para el caso particular de corte puro. Esta ley puede expresarse de la siguiente manera:

$$2\mu \dot{E}_{12} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f \frac{T_{12}}{|T_{12}|} & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

donde $f = |T_{12}| - k$, T_{12} y \dot{E}_{12} son las componentes del tensor de tensiones y velocidad de deformación respectivamente, μ y k constantes que dependen del material y donde $|T_{12}|$ representa el valor absoluto de T_{12} .

Hohenemser y Prager [4] generalizaron la ley anterior para estados de tensión arbitrarios a través de la expresión:

$$2\mu \dot{E} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f \frac{S}{|S|} & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

donde \dot{E} y S son respectivamente el tensor velocidad de deformación y el tensor desviador de tensiones, $f = |S| - k$ es la función de fluencia, $|S| = (\frac{1}{2} S \cdot S)^{1/2}$ y donde $S \cdot S$ representa el producto escalar.

Puede verificarse fácilmente que la ley de Hohenemser-Prager representa deformaciones a volumen constante ($\text{tr } \dot{E} = 0$) y que en el caso particular de corte puro se reduce a la ley de Bingham. También, es posible verificar que a partir de la ley anterior y como casos límites pueden ser obtenidas la ley viscosa lineal de Newton ($\mu \neq 0$, $k = 0$), o la ley de plasticidad ideal correspondiente a la función de fluencia de von Mises ($k \neq 0$, $\mu \rightarrow 0$) [5].

Una ley más general que las anteriores y que las in

cluye como caso particular ha sido propuesta por Perzyna [6]. La misma puede expresarse como:

$$\mu \dot{\mathbf{E}} = \langle \phi(f) \rangle f_T$$

en la que ϕ es una función real de variable real, f_T representa la derivada de la función de fluencia respecto al tensor de tensiones y donde:

$$\langle \phi \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ \phi & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

La función ϕ (que satisface ciertas propiedades [5]) es determinada a través de ensayos uniaxiales [2]. A su vez, si $\phi = |S| - k$ la ley anterior se reduce a la formula da por Hohenemser y Prager, para $\phi = (|S| - k)^n$ y $k = 0$ se obtiene la ley de creep secundario formulada por Odqvist [5].

Como puede observarse de las leyes anteriores la velocidad de deformación debido a fenómenos viscoplásticos depende solamente del estado actual de tensiones y si se quiere de la historia de la deformación.

3. Ley Constitutiva en Elasto/Viscoplasticidad. Problema de Valor de Contorno

Dentro de la teoría de deformaciones infinitesimales se admite que la velocidad de deformación $\dot{\mathbf{E}}$ puede ser descompuesta en dos sumandos:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^{VP}$$

$\dot{\mathbf{E}}^e$ es la velocidad de deformación elástica y está relacionada con $\dot{\mathbf{T}}$ a través de la expresión:

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \mathbb{D}^{-1} \dot{\mathbf{T}}$$

donde \mathbb{D} es el tensor de elasticidad de cuarta orden que se supone satisface las propiedades de simetría, inversibilidad y positividad. [7]

La parte viscoplástica $\dot{\mathbf{E}}^{VP}$ estará asociada al estado

actual de tensiones y a la historia de la deformación a través, por ejemplo, de la ley propuesta por Perzyna:

$$\dot{E}^{VP} = \frac{1}{\mu} \langle \phi \rangle f_T$$

Con los elementos anteriores el problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad limitado al caso de deformaciones infinitesimales y restringido a problemas cuasi-estáticos puede formularse de la siguiente manera.

Sea un cuerpo de material elasto/viscoplastico que ocupa la región Ω de contorno Γ del espacio euclidiano tridimensional. Dado el sistema de fuerzas (b, \bar{a}) , donde:

$$b = b(X, t) \quad , \quad (X, t) \in \Omega \times [0, \theta] \quad , \quad \text{densidad de fuerzas de volumen}$$

$$\bar{a} = a(X, t) \quad , \quad (X, t) \in \Gamma_T \times [0, \theta] \quad , \quad \text{densidad de fuerzas de superficie}$$

y el desplazamiento prescrito \bar{u} :

$$\bar{u} = \bar{u}(X, t) \quad , \quad (X, t) \in \Gamma_u \times [0, \theta]$$

determinar el desplazamiento $u(X, t)$, la deformación $E(X, t)$, la tensión $T(X, t)$ y la deformación viscoplastica $E^{VP}(X, t)$ tal que satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{div } \dot{T} + \dot{b} &= 0 \\ \dot{T} &= \mathbb{D}(\dot{E} - \dot{E}^{VP}) && \text{en } (X, t) \in \Omega \times [0, \theta] \\ \mu \dot{E}^{VP} &= \langle \phi \rangle f_T \\ \dot{E} &= \frac{1}{2} (\nabla \dot{u} + \nabla \dot{u}^T) = (\nabla \dot{u})^S \end{aligned}$$

con las condiciones de contorno

$$\dot{T}_n = \dot{\bar{a}} \quad \text{en } (X, t) \in \Gamma_T \times [0, \theta]$$

$$\dot{u} = \dot{\bar{u}} \quad \text{en } (X, t) \in \Gamma_u \times [0, \theta]$$

y las condiciones iniciales

$u(X, 0) = u_0$, $E(X, 0) = E_0$, $E^{VP}(X, 0) = 0$, $T(X, 0) = T_0$
asociados a la solución del correspondiente problema elás-

tico en el instante $t=0$.

En las expresiones anteriores n es el vector unitario normal a Γ , Γ_T y Γ_u son las partes de Γ donde están especificadas las fuerzas de superficie y los desplazamientos respectivamente.

4. Formulación Variacional y Aproximaciones Numéricas

Es posible mostrar [5] la equivalencia entre el problema de valor de contorno planteado y el problema variacional obtenido, por ejemplo, a partir del Principio de las Potencias Virtuales.

Defínase Kin y Var como:

$$Kin = \{v = v(X), \text{ regular en } X \in \Omega, v = \dot{\bar{u}} \text{ en } X \in \Gamma_u\}$$

$$Var = \{\hat{v} = \hat{v}(X), \text{ regular en } X \in \Omega, \hat{v} = 0 \text{ en } X \in \Gamma_u\}$$

conocidos respectivamente como espacios de velocidades y variaciones de velocidades cinematicamente admisibles. Luego, el problema variacional equivalente consiste en:

Para cada instante de tiempo $t \in [0, \theta]$ determinar $v \in Kin$ tal que:

$$\int_{\Omega} \dot{T} \cdot \hat{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} \dot{b} \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot \hat{v} \, d\Gamma$$

se verifique para todo $\hat{v} \in Var$, con las condiciones iniciales y el campo \dot{T} definidos como en la sección anterior y donde $\hat{E} = (\nabla \hat{v})^S$.

Para la obtención de soluciones aproximadas del problema variacional anterior se procede a definirlo en espacios Kin^a y Var^a de dimensión finita. La construcción de estos espacios de aproximación deberá realizarse de manera que las restricciones impuestas, cuando la definición de Kin y Var , sean también satisfechas en Kin^a y Var^a . Una de las maneras para lograr lo anterior consiste en aproximar los campos v y \hat{v} por otros v^a , \hat{v}^a definidos de la siguiente forma:

$$v^a = \phi_{\alpha}(X) v^a + \bar{v}, \quad \hat{v}^a = \phi_{\alpha}(X) \hat{v}^a$$

donde en las expresiones anteriores se ha adoptado la convención de índices repetidos para indicar sumatoria y donde:

$\phi_\alpha(X)$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ son los vectores de interpolación tales que $\phi_\alpha(X) = 0$ para todo α y todo $X \in \Gamma_u$.

v^α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$ escalares a definir en cada instante t a partir del problema variacional propuesto

\hat{v}^α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$ escalares arbitrarios
 \bar{v} campo vectorial tal que para todo $X \in \Gamma_u$ se verifica $\bar{v} = \dot{u}(X, t)$

En el caso de utilizar el Método de Elementos Finitos los escalares v^α y \hat{v}^α pasan a tener un significado físico preciso [5]. Con las aproximaciones propuestas el problema variacional queda definido como:

Para cada $t \in [0, \theta]$ determinar el campo $v^\alpha \in \text{Kin}^\alpha$ tal que:

$$\int_{\Omega} (\mathbb{D} \hat{E} - \mathbb{D} \hat{E}^{VP}) \cdot \hat{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{b} \cdot \hat{v}^\alpha \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \hat{a} \cdot \dot{v}^\alpha \, d\Gamma$$

para todo $\hat{v}^\alpha \in \text{Var}^\alpha$ con las condiciones iniciales ya enunciadas y donde:

$$\hat{E} = (\nabla v^\alpha)^S, \quad \hat{E}^{VP} = \frac{1}{\mu} \langle \phi \rangle_{f_T}, \quad \hat{E} = (\nabla \hat{v}^\alpha)$$

El problema anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$K_{\beta\alpha} v^\alpha - H_\beta^{VP} = F_\beta^1 + F_\beta^2$$

donde:

$$K_{\beta\alpha} = \int_{\Omega} \mathbb{D} (\nabla \phi_\alpha)^S \cdot (\nabla \phi_\beta)^S \, d\Omega,$$

$$H_\beta^{VP} = \int_{\Omega} \mathbb{D} \hat{E}^{VP} \cdot (\nabla \phi_\beta)^S \, d\Omega,$$

$$F_{\beta}^1 = \int_{\Omega} \dot{b} \cdot \phi_{\beta} d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot \phi_{\beta} d\Gamma, \quad F_{\beta}^2 = - \int_{\Omega} D(\nabla \bar{v})^S \cdot (\nabla \phi_{\beta})^S d\Omega$$

Luego supuesto conocido en el instante t_n el estado de tensiones y deformaciones el cálculo en el instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ se puede realizar de la siguiente manera:

1. Se calcula \dot{E}^{VP} en el instante t_n a través de:

$$\dot{E}^{VP} = \frac{1}{\mu} \langle \phi \rangle f_T$$

2. Se calcula el campo de velocidades a través del problema variacional propuesto
3. Conocido v^{α} se determina $\dot{E} = (\nabla v^{\alpha})^S$ y con ello se determina $\dot{T} = D(\dot{E} - \dot{E}^{VP})$ para el instante t_n .
4. Con estos elementos en el instante t_{n+1} se tiene :

$$E = E_n + \dot{E} \Delta t, \quad T = T_n + \dot{T} \Delta t, \quad E^{VP} = E_n^{VP} + \dot{E}^{VP} \Delta t$$

$$u = u_n + v \Delta t$$

Conocido el nuevo estado se procede a repetir los pasos 1-4.

La técnica de integración propuesta corresponde al Método de Euler pudiéndose recurrir a otros métodos tales como el de Runge-Kutta etc.

Con el algoritmo propuesto y según fue presentado anteriormente no sólo pueden resolverse problemas de elasto/viscoplasticidad sino también problemas de creep [5], y de plasticidad [7].

Bibliografía

- [1] Kachanov, L.M., Foundations of the Theory of Plasticity, North-Holland series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 12
- [2] Perzyna, P., Fundamental problems in viscoplasticity Recent Advances in Applied Mechanics, Chap. 9, pp 243. Academic Press, New York, 1966.

- [3] Campbell, J.D. and J. Durby, The Yield behaviour of mild steel in dynamic compression, Proc. Royal Soc., 236A, pp. 24, 1956.
- [4] Prager, W., Introduction to Mechanics of Continua. Ginn and Company Boston, 1961.
- [5] Taroco, E., R. Feijóo, Introducción a elasto/viscoplasticidad, II Escola de Mat. Aplic. a ser realizada en enero de 1980, LAC-CBPF, Rio de Janeiro.
- [6] Perzyna, P., The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, Quart. Appl. Math., 20, pp. 321, 1963.
- [7] Feijóo, R. y E. Taroco, Introducción a los principios y métodos variacionales en elasto-plasticidad, II Escola de Mat. Aplic. a ser realizada en enero de 1980, LAC-CBPF, Rio de Janeiro.



EXTENSÃO DA SOLUÇÃO ELÁSTICA PARA O REGIME ELASTO PLÁSTICO
VISANDO APLICAÇÃO AO ESTUDO DO CHICOTEAMENTO DE TUBOS

José Eudes Leite de Andrade
 Pesquisador, DEN
 UFPE - Recife - PE - Brasil

Sérgio V. Guerreiro Ribeiro
 Depto. de Reatores
 CNEN - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Antônio Carlos de O. Barroso
 Depto. de Reatores
 CNEN - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

SUMÁRIO

O método implementado trata deformações plásticas específicas como forças aplicadas equivalentes, reduzindo a análise de uma estrutura elasto-plástica à de uma estrutura elástica idêntica, com um conjunto adicional de forças aplicadas. Assim, a matriz de rigidez do sistema e os autovetores não variam com o tempo, permitindo que a resposta do sistema seja computada, usando coeficientes de influência dinâmicos, obtidos da solução elástica. O método será aplicado ao estudo do chicoteamento de tubulação de alta energia.

SUMMARY

A numerical method was implemented in which plastic strain is treated as equivalent applied forces, reducing the elastic-plastic analysis of the structure to an elastic analysis of the same structure with a set of additional applied forces. So the stiffness matrix and the eigenvectors do not vary with time. This procedure allows the response of the system to be computed by using dynamic influence coefficients, which are calculated from the elastic solution. The method will be applied to study the dynamics of pipe whip.

1. Introdução

Entre os requisitos necessários ao projeto de centrais nucleares, estão a consideração e a análise dos efeitos de certos tipos de acidentes postulados. A ruptura das tubulações de alta e média energia é um tipo de acidente postulado. No projeto de tais tubulações, utilizam-se certos critérios estabelecidos em normas, que permitem postular número, tipo e localização de possíveis rupturas [1, 2]. A consequência de uma ruptura é que o tubo fica repentinamente sujeito a violento impulso externo. A resposta do tubo rompido a tal força acarreta um fenômeno designado na literatura como Chicoteamento de Tubulação ("Pipe Whip"). É necessário, portanto, fazer uma análise para determinar se o tubo deforma a ponto de pôr em risco a integridade de equipamentos essenciais a uma condição segura de desligamento do reator. Se esta análise demonstra a possibilidade de ocorrência desses danos, a deflexão do tubo deve ser limitada através de restrições externas contra esses efeitos dinâmicos - Restrições ao Chicoteamento de Tubulação ("Pipe Whip Restraints").

Tratando-se de uma área relativamente recente, alguns modelos teóricos têm sido propostos: S. M. Ma e K. Bathe [3] utilizaram um modelo bidimensional, considerando um estado plano de tensões e admitindo, para o material do tubo e das restrições, um comportamento elasto-plástico perfeito; L. Bevilacqua e M. Silva [4] utilizaram um modelo unidimensional rígido-plástico; A. Loula, A. Galeão e J. Guerreiro [5] analisaram o tubo de acordo com a teoria de vigas e simularam as restrições como molas, admitindo, para ambos, um comportamento elasto-plástico bilinear. A maioria dos modelos existentes utiliza integração passo a passo, para a dependência temporal das equações.

Neste trabalho utiliza-se um método matemático que permite analisar o tubo, de acordo com a teoria clássica de vigas, admitindo-se um comportamento elasto-plástico bilinear. Além disso, a utilização do conceito de "força equivalente" permite o uso dos coeficientes de influência dinâmicos, obtidos da solução elástica, mesmo depois que a deformação plástica tenha ocorrido. No cálculo de um campo de

deformação específica num corpo elasto-plástico, mostra-se que o gradiente da deformação plástica específica tem o mesmo efeito que uma força aplicada [6]. A analogia entre deformação plástica específica e forças aplicadas reduz a análise inicial de um corpo elasto-plástico à de um corpo elástico, idêntico ao inicial, com um conjunto adicional de forças aplicadas. Isto possibilita o uso de soluções elásticas conhecidas para analisar a deformação específica, tensão e, portanto, os deslocamentos das estruturas elasto-plásticas correspondentes. No uso combinado de deformação específica incremental e superposição modal utilizando-se o conceito de "força equivalente", já proposto por S. C. Lui e Tung H. Lin [7] para vigas de seção cheia e lajes biapoiadas, os cálculos são baseados na matriz de rigidez elástica e modos normais, que já não variam com o tempo, eliminando o cálculo de autovetores a cada novo intervalo de tempo. Assim, do ponto de vista computacional, o método proposto torna-se consideravelmente mais simples que outros métodos.

Os autovetores necessários ao uso de superposição modal serão computados, usando-se elementos finitos. Contudo, nos testes iniciais, onde o nosso objetivo principal era julgar a potencialidade do modelo proposto, usamos exemplos para os quais a solução elástica analítica era disponível. Por este motivo, neste trabalho o método proposto é aplicado a vigas biapoiadas.

Nosso objetivo final, ora em andamento, trata-se do desenvolvimento de um código computacional que permita o estudo do chicoteamento de tubulação. Nesse código o tubo será analisado como uma estrutura tipo viga, com vários apoios e admitindo a possibilidade de pontos angulosos. Além disso, serão considerados outros efeitos, como tensão de cisalhamento e as restrições ao chicoteamento de tubulação.

2. Descrição do Método

2.1. Formulação do Problema

Considerando-se uma viga submetida a um carregamento transversal $q=q(x,t)$ ultrapassando o limite elástico, e desprezando-se a inércia de rotação, a equação do movimento é

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q(x,t) = m \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad (1)$$

onde ω é o deslocamento transversal, m a massa por unidade de comprimento, t representa o tempo e M , o momento fletor. Designando a deformação total específica por ϵ , a tensão longitudinal por σ , a deformação plástica específica por ϵ^P e o módulo de elasticidade de Young por E , tem-se, então,

$$\sigma = E (\epsilon - \epsilon^P). \quad (2)$$

De acordo com a hipótese de Bernoulli-Euler,

$$\epsilon = -y \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad (3)$$

com y representando a distância da linha neutra ao elemento de área, da seção transversal, dA . Logo, pode-se escrever:

$$M = \int_A \sigma y \, dA \quad \text{e, portanto,}$$

$$M = -E I \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - E \int_A \epsilon^P y \, dA, \quad (4)$$

onde I representa o momento de inércia da seção transversal. Substituindo (4) em (1), obtém-se:

$$E I \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = q(x,t) + \bar{q}(x,t), \quad (5)$$

onde $\bar{q}(x,t)$ é equivalente a um carregamento fictício, definido como:

$$\bar{q}(x,t) = -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_A \epsilon^P y \, dA. \quad (6)$$

Assim, o movimento de uma viga elasto-plástica é análogo ao de uma viga elástica, idêntica, com um carregamento adicional $\bar{q}(x,t)$.

2.2. Forma Incremental

Divide-se a viga por meio de M seções igualmente espaçadas de uma distância igual a ΔL , e o tempo t , em k incrementos iguais a Δt . Considere-se, genericamente, o coeficiente de influência dinâmico $G(i,j,k)$, que é definido como o deslocamento na seção $x_i = (i-1)\Delta L$, no instante $t = k\Delta t$, causado por uma força unitária degrau, aplicada na seção $x_j = (j-1)\Delta L$, no instante $t=0$. Desta forma, o deslocamento $w(i,n)$ em $x_i = (i-1)\Delta L$, no instante $t = n\Delta t$, devido ao carregamento degrau $\Delta q(j,k)$, aplicado em $x_j = (j-1)\Delta L$, no instante $t = k\Delta t$, com $k < n$, é dado por:

$$w(i,n) = G(i,j,n-k) \Delta q(j,k).$$

Quando ocorre a deformação plástica específica, esta é substituída por um carregamento equivalente, $\bar{q}(x,t)$. Escrevendo (6) na forma incremental, tem-se:

$$\Delta \bar{q}(x,t) = -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_A \Delta \varepsilon^p y \, dA, \quad (7)$$

onde $\Delta q(j,k)$ ou $\Delta \bar{q}(j,k)$ representam o incremento de $(k-1)\Delta t$ a $k\Delta t$. Na aproximação da curva do carregamento no tempo, utiliza-se o valor no ponto médio de cada intervalo de tempo, como se vê na Fig. 1.

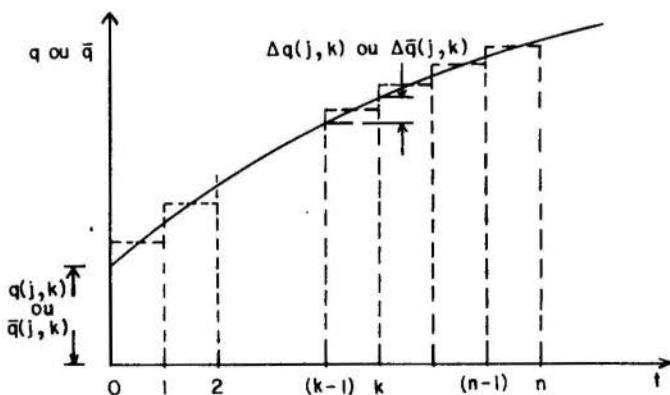


Fig. 1 - Curva carregamento-tempo na seção "j"

O deslocamento transversal em $x_j = (j-1)\Delta L$, no instante $t = n\Delta t$, causado por $[\Delta q(j,k) + \Delta \bar{q}(j,k)]$, é dado por:

$$\begin{aligned}\Delta \omega(i,n) &= \frac{1}{2} [G(i,j,n-k) + G(i,j,n-k+1)] [\Delta q(j,k) + \Delta \bar{q}(j,k)] \\ &= \bar{G}(i,j,n-k) [\Delta q(j,k) + \Delta \bar{q}(j,k)] .\end{aligned}$$

O deslocamento causado pelos carregamentos real e fictício de $t=0$ a $t=n\Delta t$, em todas as seções da viga, é

$$\begin{aligned}\omega(i,n) &= \sum_{j=1}^M G(i,j,n) [q(j,0) + \bar{q}(j,0)] + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^M \bar{G}(i,j,n-k) [\Delta q(j,k) + \Delta \bar{q}(j,k)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M G(i,j,1) [\Delta q(j,n) + \Delta \bar{q}(j,n)] .\end{aligned} \quad (8)$$

Inicialmente, estima-se $\omega(i,n)$ desprezando-se $\Delta \bar{q}(j,n)$. Com este $\omega(i,n)$, calcula-se

$$\Delta \varepsilon(i,n) = -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta \omega(i,n) \quad (9)$$

e, portanto, $\Delta \varepsilon^P(i,n)$ da relação tensão-deformação específica do material. Deste $\Delta \varepsilon^P(i,n)$, calcula-se $\Delta \bar{q}(j,n)$ de (7). Agora, estima-se um novo $\omega(i,n)$ usando (8), sem desprezar $\Delta \bar{q}(j,n)$. Repete-se o processo até que dois valores consecutivos de $\omega(i,n)$ sejam aproximadamente iguais. Observa-se que o único termo a ser iterado é o que contém $\Delta \bar{q}(j,n)$, pois, todos os outros envolvem carregamentos incrementais de intervalos de tempo anteriores e, portanto, já conhecidos. Além disso, este termo tem somatório simples, que também contribui para uma rápida convergência.

Considera-se que a relação tensão-deformação específica do material é bilinear, conforme mostrado na Fig. 2. Quando ocorre o descarregamento, admite-se que tal relação segue o percurso BCDFG, onde BC e DF são paralelos a OA, e CD paralelo a AB.

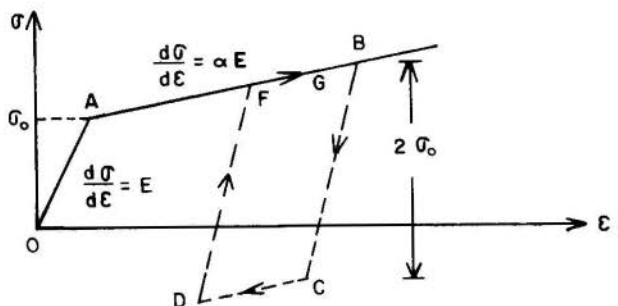


Fig. 2 - Curva tensão-deformação específica bilinear

2.3. Cálculo dos Coeficientes de Influência Dinâmicos para Vigas Biapoiadas

A equação do movimento é

$$E I \frac{\partial^4 \omega(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t).$$

Considere-se uma força unitária concentrada no ponto $x=x_j$, aplicada subitamente no instante $t=0$, como sendo

$$q(x,t) = 1(t) \delta(x-x_j),$$

onde $\delta(x-x_j)$ é a função delta de Dirac. A resposta da viga é dada por:

$$G(i,j,k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 L^3}{E I \pi^4} \frac{\text{sen} \left[\frac{n\pi(i-1)\Delta L}{L} \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi(j-1)\Delta L}{L} \right]}{n^4} \times \\ \times (1 - \cos \beta_n k \Delta t), \quad (10)$$

onde

$$\beta_n^2 = \frac{E I}{m} \left(\frac{n \pi}{L} \right)^4,$$

n é um número inteiro, L é o comprimento da viga e $G(i,j,k)$ são os coeficientes de influência dinâmicos, já definidos.

3. Resultados e Comparações

Considerou-se uma viga biapoiada, de seção tubular, submetida a um carregamento uniformemente distribuído igual a 1000 lbf/in. As propriedades do material da viga são: $E=26980000$ psi, $\sigma_0=29140$ psi, $\rho=0.00073$ lbf. s²/in⁴. As dimensões da viga são indicadas na Fig. 3. Devido à simetria da configuração e carregamento da viga, somente um quarto desta necessita ser analisado. Para o cálculo das deformações específicas, considera-se a viga dividida por 21 seções igualmente espaçadas, sendo cada seção dividida em 50 fibras.

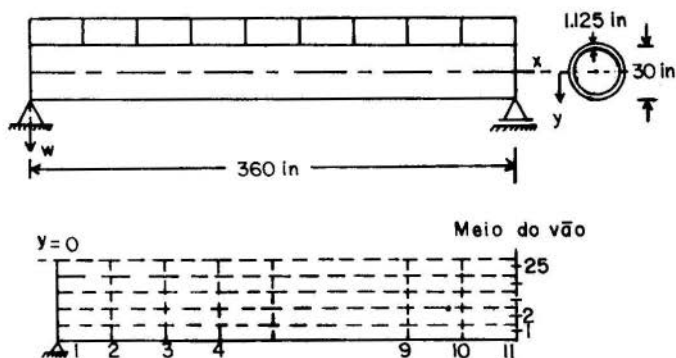


Fig. 3 - Dimensões da viga e sua divisão em seções

Compara-se o presente método com a referência [5], para valores de $\alpha=0.5$, $q=1000$ lbf/in e o intervalo de tempo $\Delta t=6.001 \times 10^{-4}$ s, verificando-se que ambos os métodos apresentam mesmo grau de precisão, como se vê na Fig. 4.

Na Fig. 5 estuda-se a resposta da viga quando submetida a diferentes magnitudes de carregamentos. Para o carregamento $q=1000$ lbf/in, usou-se $\Delta t=6.001 \times 10^{-4}$ s. Para o carregamento $q=3000$ lbf/in, variou-se o incremento de tempo, usando um $\Delta t=6.001 \times 10^{-4}$ s e depois $\Delta t=1.8003 \times 10^{-3}$ s. Desta forma, verificou-se como se comporta o amortecimento e observou-se que a variação em Δt não alterou a precisão da resposta. Verificou-se, também, que o período efetivo (tempo para alcançar a máxima deflexão) de vibração da viga elasto-plástica aumenta com a intensidade do carregamento.

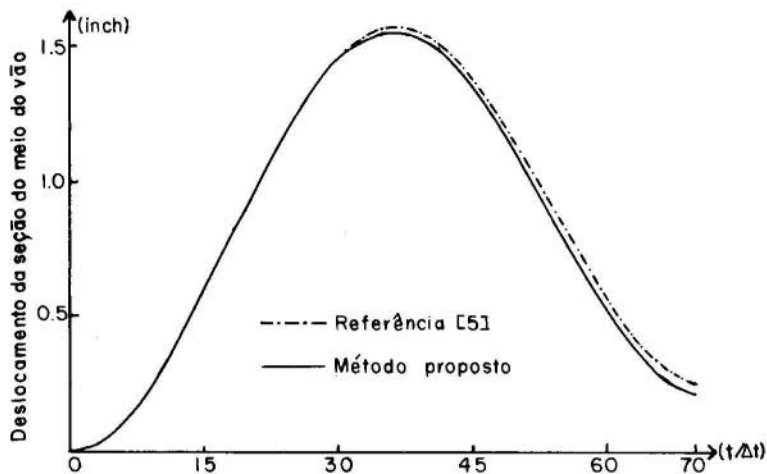


Fig. 4 - Resultados de diferentes métodos

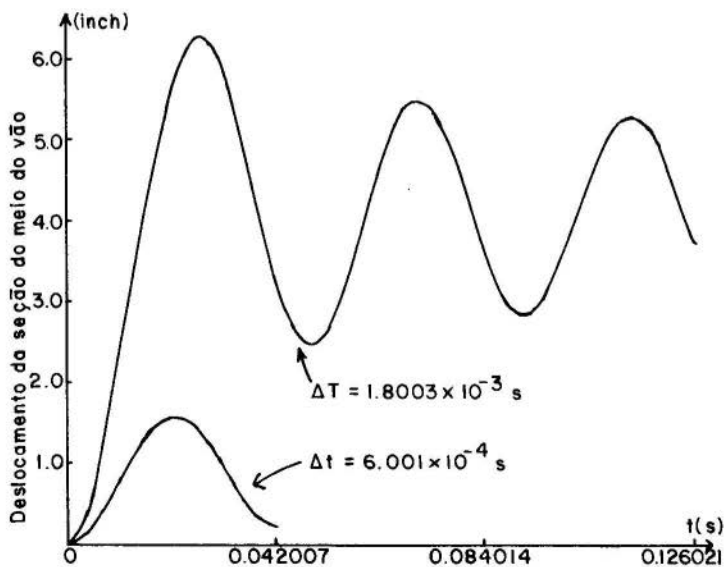


Fig. 5 - Viga biapoiada submetida a diferentes carregamentos

Finalmente, estuda-se o efeito do encruamento (Strain hardening) da relação tensão-deformação específica na deflexão da viga, para um carregamento $q=1000$ lbf/in . As respostas dos deslocamentos da viga no meio do vão para valores diferentes de α são dadas na Fig. 6. Verifica-se que o período efetivo de vibração da viga decresce com o aumento do coeficiente de encruamento α .

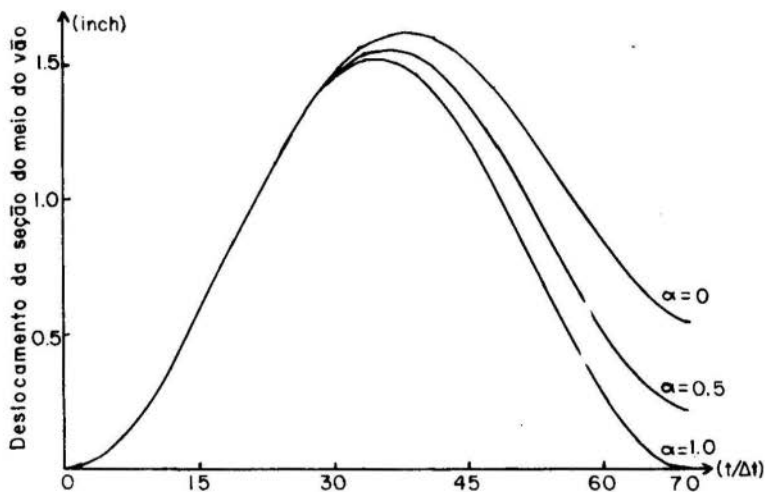


Fig. 6 - Efeito do encruamento do material nos deslocamentos da viga

4. Conclusões

O método proposto destina-se à análise dinâmica elasto-plástica de estruturas a partir da solução elástica.

A **necessidade** de se usar um processo iterativo, para o cálculo do carregamento equivalente, não comprometeu as vantagens do método, já que a convergência foi rápida. Na maioria dos casos, duas ou três iterações foram suficientes. Os resultados numéricos obtidos, utilizando-se este método, concordaram perfeitamente bem com os da referência [5].

Para as estruturas cujas soluções dinâmicas elásticas analíticas não são disponíveis, tais soluções serão obtidas usando-se o método dos elementos finitos.

Bibliografia

- [1] Regulatory Guide 1.46, Protection Against Pipe Whip Inside Containment, U S Atomic Energy Commission, May (1973).
- [2] ANSI N176, Design Basis for Protection Against Pipe Whip, Amer. Nucl. Soc., June (1973).
- [3] Ma, S. M., e Bathe, K. J., On Finite Element Analysis of Pipe Whip Problems, Nucl. Eng. Des. 37, pp. 413-430, (1976).
- [4] Bevilacqua, L., e Silva, M., Estudo do "Pipe-Whip" para Tubulações Nucleares, I Escola de Matemática Aplicada, CBPF/CNPq, Rio de Janeiro, (1978).
- [5] Loula, A., Galeão, A. C., e Guerreiro, J. N., Um Modelo de Elemento Finito para o Estudo do Chicoteamento em Tubulações de Alta Energia, Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares, Porto Alegre, RS, Paper Nº 53, (1978).
- [6] Lin, T. H., Theory of Inelastic Structures, John Wiley e Sons, pp. 43-55, (1968).
- [7] Lui, S. C., e Lin, T. H., Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Structures Using Known Elastic Solutions.



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-03

p.p. 031 - 041

PROPAGAÇÃO DE ONDA PLANA EM UMA BARRA NÃO-HOMOGENEA

Moyses Zindeluk

Prof. Adjunto - Deptº de Eng. Mecânica
 COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Luiz Bevilacqua

Prof. Associado - Deptº de Eng. Mecânica
 PUC/RJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

SUMÁRIO

Apresenta-se a solução de propagação de ondas planas em uma barra infinita não homogênea. Utiliza-se o método de Riemann para resolver o problema, transformado em termos de novas variáveis dependentes e independentes. O método é utilizado para a solução de propagação de um pulso de tensão e um de deslocamento em um meio não homogêneo. Fica claro da solução a dispersão e a alteração da forma do pulso principal provocadas pela não homogeneidade.

SUMMARY

It is presented in this paper the solution for plane waves propagation in non-homogeneous rod. The Riemann method is used to solve the problem, transformed for a new set of dependent and independent variables. The method is used to solve the problem of propagation of a stress pulse and a displacement pulse in a non-homogeneous medium. It is clear from the solution the dispersion and distortion of the main pulse induced by the non-homogeneity.

1. Introdução

O problema de propagação de ondas em sólidos tem assumido uma importância crescente. Deve-se este fato as exigências de consideração de tensões de impacto (como no projeto de usinas nucleares), aos programas de investigação mais aprofundados em geotecnia orientados para a prospecção de jazidas petrolíferas ou similares, aos processos de ensaios não destrutivos e ao estudo do fenômeno de fratura e propagação de fissuração.

Como subsídio importante aos possíveis processos de ensaio não destrutivos para a detecção de não-homogeneidades e inclusões em sólidos, desenvolveu-se em [1] um estudo de propagação de ondas planas em meios não-homogeneos. Parte dos resultados foram apresentados em [2], [3] sendo o presente trabalho orientado para um meio específico que apresenta características singulares, provavelmente inesperadas para muitos engenheiros e pesquisadores.

2. Equações Fundamentais

Ficaremos restritos ao problema de propagação de ondas em barras infinitas com diâmetro pequeno em relação ao comprimento de onda ou ao intervalo sobre o qual está definida a condição inicial. Sejam $A(x)$, $\rho(x)$ e $E(x)$ a área da secção transversal a massa específica e o módulo de Young referentes a barra. O eixo x coincide com o eixo da barra. Chamando $u(x)$ e $\sigma(x)$ o deslocamento e a tensão de tração na direção da barra respectivamente, e escrevendo-se a condição de conservação de quantidade de movimento obtem-se [1]:

$$u_{tt} - c^2 \left[u_{xx} + \left(\frac{A'}{A} + \frac{E'}{E} \right) u_x \right] = 0 \quad x \in R, t > 0 \quad (1.a)$$

$$\sigma_{tt} - c^2 \left[\sigma_{xx} + \left(\frac{A'}{A} - \frac{\rho'}{\rho} \right) \sigma_x + \rho \left(\frac{A'}{\rho A} \right) \right] = 0 \quad x \in R, t > 0 \quad (1.b)$$

onde $c^2 = E/\rho$, $()_{tt} = \partial^2()/\partial t^2$, $()_{xx} = \partial^2()/\partial x^2$ etc... e $()' = d()/dx$. Estamos admitindo a barra livre de excitação externa. As condições iniciais estão definidas num intervalo R_u ou R_σ sobre o eixo x :

$$u(x,0) = u_0(x) \quad e \quad u_t \Big|_{t=0} = v_0(x) \quad x \in R_u$$

$$\sigma(x,0) = \sigma_0(x) \quad e \quad \sigma_t \Big|_{t=0} = w_0(x) \quad x \in R_\sigma$$

Em função das novas variáveis, $\xi = \tau(x) + t$, $\eta = \tau(x) - t$ e $U(\xi, \eta) = \Lambda_u(\xi, \eta) u(\xi, \eta)$, $T(\xi, \eta) = \Lambda_\sigma(\xi, \eta) \sigma(\xi, \eta)$ obtém-se:

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{dy}{c(y)} \quad (2.a)$$

$$\Lambda_u = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{(\xi+\eta)/2} K_u(\tau) d\tau\right) \quad (2.b)$$

$$\Lambda_\sigma = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{(\xi+\eta)/2} K_\sigma(\tau) d\tau\right) \quad (2.c)$$

$$K_u = c(E'/E - c'/c + A'/A) \quad (2.d)$$

$$K_\sigma = c(-\rho'/\rho - c'/c + A'/A) \quad (2.e)$$

$$U_{\xi\eta} - \frac{1}{16} F_u \left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) U = 0 \quad (3.a)$$

$$T_{\xi\eta} - \frac{1}{16} F_\sigma \left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) T = 0 \quad (3.b)$$

$$F_u = K_u^2 + 2 \frac{dK_u}{d\tau} \quad (4.a)$$

$$F_\sigma = K_\sigma^2 + 2 \frac{dK_\sigma}{d\tau} - 4 E (A'/\rho A) \quad (4.b)$$

As condições iniciais transformam-se respectivamente em:

$$U(\xi, \xi) = \bar{u}_0(\xi) / \Lambda_u(\xi) \quad (5.a)$$

$$(U_\xi - U_\eta) \Big|_{\xi=\eta} = \bar{v}_0(\xi) / \Lambda_u(\xi) \quad \xi \in \bar{R}_u \quad (5.b)$$

$$T(\xi, \xi) = \bar{\sigma}_0(\xi) / \Lambda_\sigma(\xi) \quad \xi \in \bar{R}_\sigma \quad (6.a)$$

$$(T_\xi - T_\eta) \Big|_{\xi=\eta} = \bar{w}_0(\xi) / \Lambda_\sigma(\xi) \quad (6.b)$$

As equações do movimento sob a nova forma (3.a) e (3.b) podem ser resolvidas facilmente com o método de Riemann [1], [4]. No novo plano (ξ, η) a rede de características é definida pelas retas $\xi = \text{const.}$ e $\eta = \text{const.}$ O eixo x é mapeado na reta $\xi = \eta$ e o eixo t na reta $\xi = -\eta$ (Fig. 1a). Observe que o eixo x sofre uma deformação não uniforme ao ser mapeado no plano ξ, η .

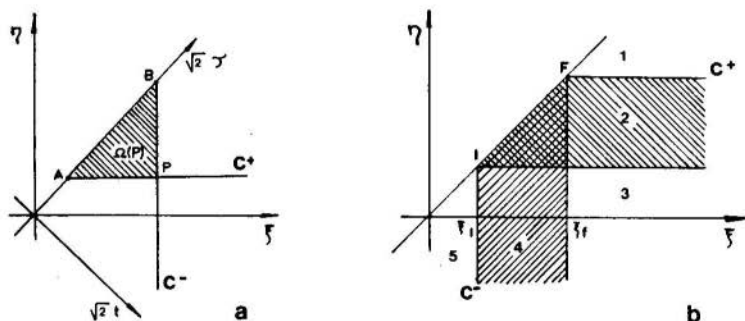


Figura 1. Plano característico

- Domínio de dependência para a solução no ponto P
- Regiões definidas pela propagação de um pulso

3. Solução de Riemann

Estando as equações que governam o fenômeno sob as formas escritas em 3a-b, o método de Riemann [4] surge como o mais natural. Pode-se mostrar que a solução em um ponto P (ξ_0, η_0) tem a seguinte representação para o caso de deslocamentos:

$$U(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2} [\phi(\xi_0) + \phi(\eta_0)] + \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\xi_0} \{ \psi(\xi) W(\xi_0, \eta_0, \xi, \xi) - \phi(\xi) [W_\xi - W_\eta] (\xi_0, \eta_0, \xi, \xi) \} d\xi \quad (7)$$

onde $W(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta)$ é a função de Riemann e $\phi(\xi)$ e $\psi(\xi)$ são as condições iniciais dadas por (5.a) e (5.b). A função W é regida pela equação integral de Volterra:

$$W(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta) = 1 + \frac{1}{16} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} F_u\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) W(\xi_0, \eta_0, r, s) dr ds \quad (8)$$

Para o caso de tensões, a solução é idêntica, sendo $\phi(\xi)$ e $\psi(\xi)$ na expressão (7) dadas por (6.a) e (6.b) e a função de Riemann designada por $V(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta)$ em lugar de W . A equação integral para V é idêntica a (8) substituindo F_u por F_σ dado em (4.b).

A Fig. 1b, mostra as principais regiões de evolução da propagação de um pulso numa barra infinita, definido para $t=0$ no intervalo IF. As regiões 1 e 5 correspondem a tempos inferiores a passagem das frentes de onda progressivas. A região 2 corresponde a propagação da onda progressiva principal à direita (C^+). A frente de onda à direita caminha ao longo da característica $F C^+$. De (7), (6), (5) e (2) pode-se mostrar as seguintes relações, para o caso de $A=\text{const.}$:

$$u(x, t) = u_0(x_F) (\rho c(x_F)/\rho c(x))^{1/2} \quad (9.a)$$

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(x_F) (\rho c(x)/\rho c(x_F))^{1/2} \quad (9.b)$$

Isto é, o pulso de deslocamento atenua-se para impedâncias crescentes e amplifica-se para impedâncias decrescentes. O caso inverso acontece para o pulso de tensões. A região 3, para tempos posteriores à passagem da onda principal, contem os pontos atingidos pela reflexão contínua das ondas principais que se propagam à direita e à esquerda. A região 4 é idêntica a 2 para a onda principal à esquerda.

A solução do problema fica reduzida então praticamente à solução de (8). Em geral a equação integral (8) não possui solução fechada. Foi desenvolvido um método numérico [1] baseado em [5] para a sua solução, cujos resultados foram satisfatórios.

Em [1] este método de solução foi aplicado a vários modelos. Examinaremos aqui um tipo de não homogeneidade que apresenta características interessantes e de possíveis aplicações práticas.

4. Propagação em uma Barra Não Homogenea

Variando convenientemente o módulo de elasticidade, a massa específica ou a área da secção transversal da barra podemos interferir substancialmente no processo de propagação de um pulso. Um fenômeno interessante ocorre por exemplo quando, mantidas a massa específica e a área da secção transversal constantes, varia-se o módulo de elasticidade segundo a lei $E = E_0(1 + \alpha x^2)^2$. Obtem-se neste caso a velocidade de propagação:

$$c(x) = c_0 (1 + \alpha x^2) \quad , \quad \alpha > 0$$

assim como o tempo de propagação e os núcleos F_u e F_σ :

$$\tau(x) = (c_0^2 \alpha)^{-1/2} \arctg(\sqrt{\alpha} x)$$

$$F_u = 4 c_0^2 (1 + 2 \alpha x^2)$$

$$F_\sigma = -4 c_0^2 \alpha$$

A função de Riemann para o problema de tensões, pode ser obtida de (8) por um método iterativo conduzindo à forma fechada:

$$V(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta) = I_0 \left[c_0 \sqrt{\alpha} (\xi_0 - \xi) (\eta - \eta_0) \right]$$

Entretanto como isto não é possível em geral, tendo-se que recorrer a um processo de integração numérica para a obtenção da função de Riemann, a solução em ambos os casos foi calculada a partir do algoritmo de integração desenvolvido em [1].

A figura 2a mostra a evolução de um pulso de desloca-

mentos na região à direita do pulso inicial. Como o previsto pelas expressões (9.a-b) o pulso de deslocamentos amplia-se quando se propaga no sentido da impedância decrescente. A cauda de reflexão inclui os efeitos dos pulsos se propagando à direita e à esquerda.

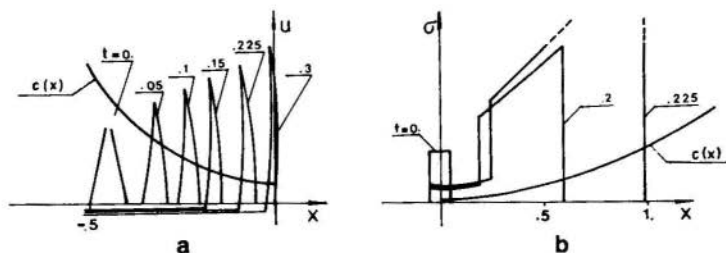


Figura 2. Pulsos crescentes

- a) Triangular de deslocamento, ρc decrescente
- b) Triangular de tensão, ρc crescente

As figuras 2.b e 3, mostram as formas de evolução de um pulso de deslocamento e de tensão propagando-se na direção de impedância crescente (x positivo). Há que se notar que as "caudas" de reflexão contínua que estão representadas nas figuras são de fato a superposição das caudas dos pulsos que se propagam à direita e à esquerda.

Ainda conforme o previsto pelas expressões (9.a-b), a frente do pulso de tensão amplia-se no sentido de x crescente e o pulso de deslocamento fica atenuado. A barra funciona como um amplificador do pulso de tensões com energia específica decrescente. Deve-se observar que embora $\sigma(x)$ cresça sem limites quando $x \rightarrow \infty$, a energia acumulada na barra permanece constante, como deve ser. Para se ter uma indicação disto, basta avaliar a energia específica σ^2/E na frente de onda. Com a expressão de E e (9), chega-se facilmente a $\sigma^2/E = \gamma / (1 + \alpha x_F)$ onde γ é uma constante e x_F a posição atual da frente de onda. Observa-se que a energia é decrescente, e integrada no intervalo $(0, \infty)$ conduz a

um valor finito. Em virtude da simetria do pulso com relação às propriedades mecânicas, tanto o pulso à esquerda como o pulso à direita propagam-se no sentido da impedância crescente, o meio "endurecendo". Pode-se concluir então da figura, que como o sugerido no estudo de propagação em meios estratificados, a reflexão do pulso de deslocamentos é invertido e o de tensões mantém-se com o mesmo sinal quando há propagação no sentido de impedâncias crescentes.

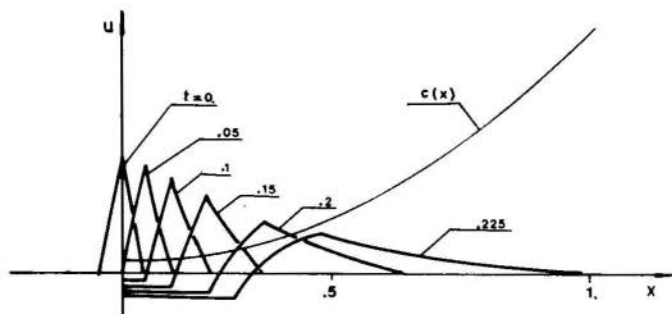


Figura 3. Pulso triangular de deslocamento no sentido ρc crescente

Convém ressaltar um comportamento muito interessante da solução associado a dois fatos: a) O eixo x é mapeado no plano ξ, η num segmento finito MN de comprimento $\sqrt{2} \pi / c_0$ conforme pode ser determinado de $\tau(x)$ (Fig. 4); b) tanto o pulso de tensões como o de deslocamentos atinge o infinito em um tempo finito (Fig. 4). Sendo as condições iniciais definidas, por exemplo, no intervalo AB , simétrico em relação à origem, as frentes de onda à direita e à esquerda, chegarão aos pontos $+\infty$ e $-\infty$, simultaneamente no tempo mostrado na figura como t_{lim} . Dentro da região $A'B'$ MN o método proposto pode ser aplicado sem maiores restrições. Fora desta região para $t > t_{lim}$ tornam-se necessários certos cuidados na obtenção da solução, uma

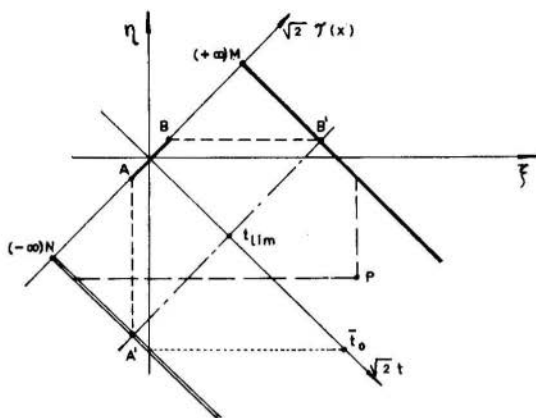


Figura 4. Limites no plano ξ, η definidos pelo mapeamento $x \rightarrow \tau$

vez que devem ser computados os efeitos provenientes da reflexão no ponto infinito, como seria o caso do ponto P da figura. Por outro lado associado a estas duas caracterís-

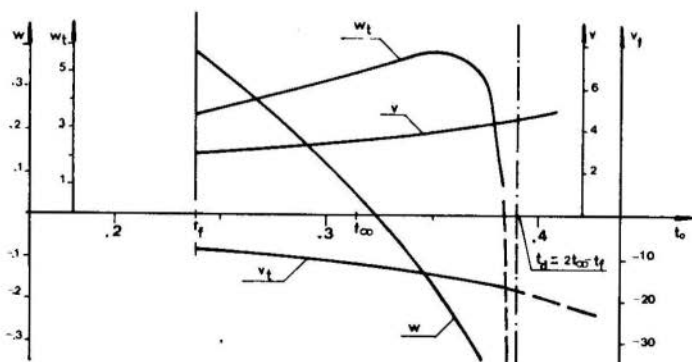


Figura 5. Funções de Riemann e derivadas, para $\alpha=25$ e o argumento $(x_0, t_0, x, t) = (.5, t_0, 0, 0)$, com $c_0 = 1$

ticas a função de Riemann W para o deslocamento e sua derivada W_t apresentam um comportamento singular conforme mostra a Fig. 5, para o tempo t_d que corresponde ao tempo limite para o qual o domínio de integração - ver eq. (8) - permanece dentro da faixa regular $M B'$, $N A'$ (Fig. 4). Embora comecem a aparecer problemas de integração numérica quando $t \rightarrow t_d$ a figura 5 representa o andamento esperado até pontos próximos de t_d .

Certamente a solução está limitada aos casos lineares. Quando a tensão σ e o deslocamento u crescem indefinidamente, começam a surgir não linearidades materiais e geométricas respectivamente. Nestes casos o problema passa a ser não linear e pode haver a formação de ondas de choque.

5. Conclusões

A variação das características de impedância de uma barra não homogênea conduzem a resultados que podem apresentar comportamentos das características de propagação em função do núcleo característico F_σ ou F_u merecendo atenção especial. Eventualmente os resultados analíticos, poderão ser aproveitados em aplicações experimentais ou industriais. Por outro lado, como ficou patente no exemplo anterior a utilização de um método numérico deve ser precedida de um exame cuidadoso do problema. No caso por exemplo de utilização de um método que discretize um domínio espacial ilimitado, as fronteiras do modelo matemático não podem ser arbitrárias, uma vez que existe reflexão dos pontos $x = \pm \infty$ em um tempo finito. É interessante observar que a reflexão do infinito em tempo finito não ocorre com barras com secção variável mantendo-se constantes E e ρ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] Zindeluk, M., "O Método de Riemann na Propagação de Ondas Planas em Meios Elásticos Inhomogêneos", Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Novembro 1978.
- [2] Bevilacqua, L., Zindeluk, M., Feijoo, R.A., "Riemann Solution for Plane Waves in Non-

-Homogeneous Media", I.U.T.A.M., XIV Congress, Delft, Holanda 1976.

- [3] Zindeluk, M., Bevilacqua, L., "Solução Semi-Analítica para Pulsos em Barras", V Jornadas Latino-Americanas de Acústica, Curitiba 1979.
- [4] Garabedian, P.R., "Partial Differential Equations", J. Wiley, N.Y., 1964.
- [5] De Hoog, F., Weiss R., "Implicit Runge-Kutta Methods for Second Kind Volterra Integral Equations", Numer. Math., 23, 199-213, 1975.

ANAIS



TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER

COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

PROCEEDINGS



N.º D-04

P.P. 042 - 051

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES EM
PROBLEMAS DE PLASTICIDADE

Ademar Gilberto Groehs

Prof. Assistente - C.P.G.E.C.

UFRGS - Porto Alegre - Brasil

Guillermo Juan Creus

Prof. Visitante - C.P.G.E.C.

UFRGS - Porto Alegre - Brasil

SUMÁRIO

Neste trabalho discutimos alguns fatores que influenciam a escolha de um algoritmo para a solução de sistemas de equações lineares, apropriado para programas de análise elastoplástica. Em particular, propomos um procedimento baseado no método de Cholesky, que parece apresentar as vantagens de simplicidade e eficiência.

SUMMARY

Some factors influencing the choice of adequate algorithms for the solution of systems of linear equations appropriate for elastoplastic analysis are discussed. In particular, a procedure based on Cholesky method, which offers some advantages from the point of view of simplicity and efficiency, is proposed.

1. Introdução

Neste trabalho desenvolvemos um método para a resolução de sistemas de equações, resultantes de problemas de análise elastoplástica.

Na seção 2 analisamos a influência do tipo de computador sobre a escolha do algoritmo. Na seção 3 estudamos o problema das matrizes esparsas. Na seção 4 abordamos o problema de matrizes que são decompostas repetidas vezes e que sofrem apenas poucas mudanças, em alguns de seus elementos, entre duas decomposições seguidas. É proposto um esquema de solução que evita a decomposição total da matriz a cada passo. Como veremos nesta seção, na resolução de problemas não lineares físicos (pequenas deformações), o método de Cholesky possui vantagens sobre os demais. Por isso estaremos, ao longo do trabalho, interessados neste método.

No que segue consideramos a matriz a ser decomposta como simétrica e positivo-definida.

2. Tipo de computador

A importância do computador na escolha de um algoritmo está diretamente ligada à memória disponível e ao tempo de acesso dos elementos de um arranjo.

Considerando que o computador possua uma memória principal e uma memória secundária (unidade de fita ou disco), podemos ter basicamente dois tipos de máquina:

- a) aquelas em que o usuário deve manter na memória principal, através de seu programa, apenas parte do programa que está sendo executado e chamar, da memória secundária, apenas os dados necessários para a execução da referida parte.
- b) quando as operações acima podem ser feitas, automaticamente, pelo sistema operacional da máquina sem interferência do usuário (memória virtual). Os computadores desse tipo são chamados de computadores de quarta geração.

No caso de usarmos a facilidade de operação apresentada pelos computadores de quarta geração, o algoritmo de solução pode ser imaginado como se todo o sistema de equações, bem como o programa, estivesse contido na memória principal.

No caso em que a máquina empregada não é de quarta-ge-

ração ou quando não usamos esta vantagem o algoritmo de solução deve conter, além do método de solução, os comandos necessários para realizar a conexão entre a memória principal e a memória secundária. Na literatura encontramos vários algoritmos deste tipo estando entre elas os devidos a Irons [1] e Hood [2].

Outra influência do tipo de máquina usado diz respeito ao tempo de acesso dos elementos de um arranjo. Em certas máquinas o tempo de acesso de elementos pertencentes a arranjos unidimensionais é menor do que o tempo de acesso de elementos pertencentes a arranjos bidimensionais. Tal fato irá caracterizar a maneira pela qual a matriz de rigidez é armazenada. Por outro lado quando o acesso é mais rápido em arranjos unidimensionais existirá em contrapartida um cálculo de índices com o correspondente gasto adicional de tempo.

3. Matrizes esparsas

Devemos distinguir entre matrizes esparsas interna e externamente. Diremos que uma matriz banda é externamente esparsa se os zeros atingirem o limite da banda (fig. 1). Caso contrário, ela será internamente esparsa (fig. 2).

Os elementos nulos de uma matriz esparsa externa podem ser levados em consideração se dispormos de um vetor que possua as posições dos primeiros elementos não nulos de uma coluna. Um tal vetor, que chamaremos de vetor-perfil, para

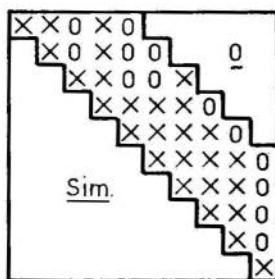


fig 1

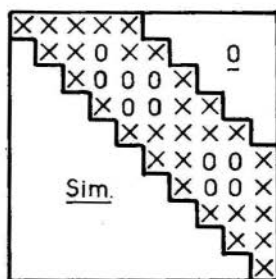


fig 2

a matriz representada na figura 1 teria valores (1 1 3 1 4 4 3 5 6 10).

Quando queremos introduzir o vetor-perfil, dois métodos são especialmente apropriados: o método de Crout modificado, usado por Mondkar e Powell [3], e o método de Cholesky [4]. Por razões que ficarão claras na seção 4 estaremos interessados neste último.

Vejamos como o vetor perfil pode ser utilizado para poupar operações inúteis no método de Cholesky. Representando por a_{ij} a matriz dada e por S_{ij} a matriz triangular resultante da decomposição temos [5]:

$$1) \text{ para a primeira linha } S_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (3.1)$$

$$S_{1j} = \frac{a_{1j}}{S_{11}} \quad (3.2)$$

$$2) \text{ para linha } i \quad S_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{\ell=1}^{i-1} S_{\ell i}^2} \quad (3.3)$$

$$S_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{\ell=1}^{i-1} S_{\ell i} S_{\ell j}}{S_{ii}} \quad j > i \quad (3.4)$$

Denominando o vetor perfil de PER[i] a fórmula (3.3) passa a ser

$$S_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{\ell=\text{PER}[i]}^{i-1} S_{\ell i}^2} \quad (3.5)$$

e fazendo $L = \max(\text{PER}[i], \text{PER}[j])$ a fórmula (3.4) passa a ser

$$S_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{\ell=L}^{i-1} S_{\ell i} S_{\ell j}}{S_{ii}} \quad j > i \quad (3.6)$$

Portanto, uma simples alteração do limite inferior do somatório na (3.5) e (3.6) permite a eliminação de uma série de operações inúteis.

Para uma matriz esparsa interna devemos considerar que as próprias operações de decomposição alteram os elementos nulos e, não raro, os eliminam completamente. Uma forma de levarmos em conta os zeros internos é usar o método de Gauss operando por blocos [6]. Este procedimento, além de bastante mais elaborado, conduz na maioria dos casos a tempos maiores do que a utilização de um método que use o vetor-perfil.

No que diz respeito à retro-substituição e substituição avante o vetor-perfil pode ser introduzido seguindo o mesmo esquema da decomposição.

4. Decomposição repetida de uma matriz com algumas modificações na mesma entre as decomposições

A solução de problemas de não-linearidade física por elementos finitos exige a solução repetida de um sistema de equações lineares. Em cada passo alguns dos elementos da matriz do sistema são modificados. Um enfoque interessante do problema foi feito por Argyris et al [7] englobando todos os elementos modificados em uma pequena matriz (K_{Δ}). Esta é convenientemente manipulada e a partir daí podemos obter a solução do problema. Entretanto, a manipulação desta matriz é bastante complexa. Os autores em [7] chegam à conclusão que só há vantagens de tempo computacional quando o número de linhas da matriz K_{Δ} é menor do que $0,75 B$, onde B é semi largura de banda da matriz de rigidez global da estrutura. Isto limita, em muitos problemas, a aplicação do processo.

Achamos mais prático observar que o procedimento de Cholesky só altera os elementos da linha que estamos decompondo e que na decomposição de uma linha só usamos elementos situados acima desta linha. Suponhamos agora que os nós dos elementos plastificados sejam aqueles que correspondam às últimas linhas da matriz. Obviamente, só teremos modificações nessas linhas e a parte da matriz, já decomposta no primeiro passo e não modificada nos passos subsequentes, não precisará ser decomposta novamente. Assim se L_{min} represen

tar a linha a partir da qual temos modificações e supondo $L_{min} > 1$ as fórmulas a empregar na decomposição serão as (3.5) e (3.6) com

$$i > L_{min} \quad (4.1)$$

No caso de termos $L_{min} = 1$ é lógico que deveremos realizar toda a decomposição (fórmulas (3.1), (3.2), (3.5), (3.6)). Desta forma sempre que $L_{min} > 1$ teremos eliminação de operações inúteis e, conseqüentemente, menor gasto de tempo. O método de Cholesky é o método que melhor se adapta a este tipo de procedimento. A adoção do método de Cholesky, munido de vetor-perfil e de decomposição parcial usando a (4.1), nos parece o melhor método não iterativo que pode ser usado em problemas não lineares físicos (pequenas deformações).

5. Exemplos

Um algoritmo baseado no método de Cholesky, que usa o vetor-perfil e que só volta a decompor a matriz a partir da linha onde foram introduzidas as modificações, foi implementado num programa de elementos finitos para cálculos de não linearidade física. Testes de tempo foram realizados para dois exemplos em um computador do tipo quarta geração Burroughs B-6700 pertencente a U.F.R.G.S.

O primeiro exemplo corresponde a uma viga em balanço com carga na extremidade como mostra a figura 3 abaixo. O único cuidado para termos a máxima vantagem é fazer com que

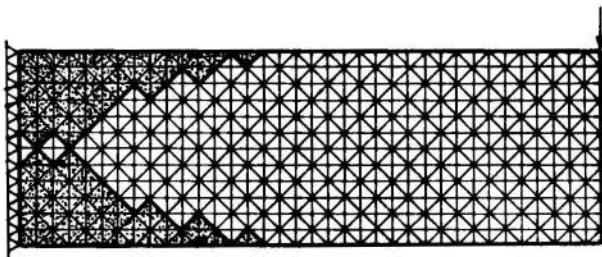


fig. 3

Tabela I

ETAPA	1	2	3	4	5	7	16
Tempo de solução total (s)	64	6,0	8,7	15,9	18,6	24,6	27,7
Tempo de decomposição (s)	59,8	1,7	6,7	13,4	16,2	21,8	24,2
Tempo de substituição avante(s)	2,5	2,6	0,3	0,6	0,7	1,0	1,2
Tempo de retro-substituição(s)	1,7	1,7	1,7	1,9	1,7	1,8	1,8
Lmin	1	911	833	755	703	625	547

os nós dos apoios correspondam às últimas linhas da matriz de rigidez, uma vez que nesta região teremos o material entrando na região plástica. Com isto ocorrerão modificações só nas últimas linhas da matriz de rigidez.

A Tabela I mostra os tempos obtidos em diversas etapas. A matriz possui 962 linhas e uma semilargura de banda igual a 30. Na figura 3 vemos a malha utilizada; a zona sombreada representa os elementos que foram plastificados até a etapa 16 inclusive. Podemos notar na tabela a otimização apreciável de todos os tempos, com excessão do tempo de retro-substituição.

Assim, se não fosse utilizado o sistema de decomposição parcial da matriz gastaríamos, em 16 etapas, somente em solução de sistema de equações um tempo aproximado de 1023s. Usando a decomposição parcial, gastamos apenas 398s.

Um outro exemplo examinado é o de uma placa em tração que possui um entalhe em seu centro. Devido a simetria somente precisamos analisar a quarta parte desta placa. Na figura 4 apresentamos a malha utilizada na análise.

Na Tabela II temos os tempos observados em diversas etapas. Neste exemplo, a matriz possui 112 linhas e semi-lar

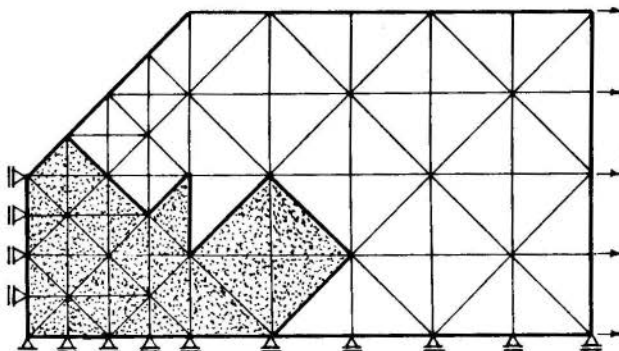


fig. 4

gura de banda igual a 20. Na figura 4 a zona sombreada representa os elementos que foram plastificados até a etapa 14 inclusive. A tabela II nos dá uma idéia da diminuição dos tempos devido ao uso da decomposição parcial. O tempo

Tabela II

ETAPA	1	2	3	4	5	7	14
Tempo de solução total (s)	1,44	0,36	0,27	0,43	0,50	0,83	1,2
Tempo de decomposição (s)	1,19	0,11	0,12	0,27	0,32	0,63	0,97
Tempo de substituição avante(s)	0,12	0,10	0,01	0,03	0,03	0,06	0,09
Tempo de retro-substituição (s)	0,13	0,15	0,14	0,13	0,15	0,14	0,14
Lmin	1	99	97	85	85	67	33

total para 14 etapas que seria gasto em solução, caso a decomposição parcial não fosse usada, seria de 20,16s aproximadamente. Usando a decomposição parcial, este tempo diminui para 11,67s.

6. Conclusão

A partir do que foi exposto, bem como dos exemplos apresentados, acreditamos que o uso do método de Cholesky, para resolução de problemas não-lineares onde ocorram pequenas modificações da matriz em cada passo, apresenta claras vantagens sobre os demais devido a possibilidade de decomposição parcial. Esta decomposição pode ser facilmente introduzida num algoritmo, já existente, baseado no método de Cholesky. Sempre teremos alguma vantagem de tempo enquanto a decomposição for parcial.

Bibliografia

- [1] Irons B.M., "A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis". Int.J.Num.Meth.Eng., Vol. 2, pp. 5-32, (1970).
- [2] Hood P., "Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices", Int.J.Num.Meth.Eng., Vol. 10, pp.379-399 (1976).
- [3] Mondkar G.P., Powell G.H., "Towards Optimal in Core Equation Solving", Comp. & Struct., Vol. 4, pp. 531-548, (1974).
- [4] Tong P., Rossettos J.N, "Finite Element Method", The MIT-Press, (1977).
- [5] Brebbia C.A., Ferrante A.J., "Computational Methods for the Solution of Engineering Problems", Pentech Press (1978).
- [6] Turkieniez M., "Um esquema eficiente para a solução de sistemas lineares esparsos", tese de mestrado

do apresentada no C.P.G.E.C. - U.F.R.G.S., (1974).

- [7] Argyris J.H., Brönlund O.E., Roy J.R., Scharpf D. W., "A Direct Modification Procedure for the Displacement Method, AIAA Journal, Vol. 9, nº 9, (1971).



FORMULACIONES VARIACIONALES Y APROXIMACIONES NUMERICAS EN
ELASTO-PLASTICIDAD

Raúl Feijóo

Edgardo Taroco

Laboratório de Cálculo/CBPF

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

RESUMEN

En este trabajo se presentan algunas formulaciones variacionales equivalentes al problema "quase-estático" en elasto-plasticidad dentro del campo de las deformaciones infinitesimales. En la resolución aproximada de estos problemas son comentados los algoritmos numéricos del tipo paso-a-paso donde en cada etapa el problema se reduce a determinar velocidades (velocidades de desplazamientos o velocidad del tensor de tensiones). Discútese también las dificultades inherentes en la selección del paso de integración.

SUMMARY

In this work, some infinitesimal deformation variational formulation are presented to quasi-static elasto-plastic problems. Stepwise algorithms for the numerical approximations of solutions are also presented. Finally, difficulties in the selection of integration steps are discussed.

1. Introducción

No se pretende realizar aquí un análisis del estado actual de los principios y métodos variacionales en elasto-plasticidad. Los mismos se encuentran en una etapa de rápida evolución debido principalmente a los recientes progresos del Análisis Convexo y sus aplicaciones a Mecánica [1,2,3].

Dentro de las hipótesis de deformaciones infinitesimales e isotérmicas, la plasticidad será vista en este trabajo de una manera clásica [4,5]. Lo anterior permite razonar de la siguiente manera: conocido el estado actual de tensiones, deformaciones, deformaciones plásticas, e historia de dichas deformaciones, el problema consiste en determinar las velocidades de los desplazamientos y del tensor de tensiones (\dot{u} , \dot{T}) conocidas las velocidades de las fuerzas aplicadas y de los desplazamientos prescriptos.

En el caso de $A \geq 0$ (A mide el endurecimiento por deformación) se puede demostrar la existencia de dos principios de mínimo asociados [4,6,14]. En la resolución numérica de estos problemas variacionales en general, dos técnicas son empleadas. La primera asociada a métodos iterativos que consisten en sucesivas soluciones 'elásticas' [7,8,9], y la segunda corresponde a los algoritmos para la determinación del mínimo de una función convexa con restricciones [10,11,12].

En este trabajo serán comentados algunos algoritmos numéricos de tipo iterativo y los inconvenientes existentes en la determinación del paso Δt .

Para facilitar la lectura se ha dividido la presentación en tres secciones. La primera se refiere a las ecuaciones constitutivas en elasto-plasticidad, la segunda a los Principios de Mínimo y la última a los algoritmos de tipo iterativo.

2. Ecuaciones Constitutivas en Elasto-Plasticidad

Para describir el comportamiento de un material más allá de su rango elástico, es necesario definir al menos los siguientes aspectos.

i) Un criterio que permita establecer la transición

inicial de comportamiento elástico al plástico. Este criterio es llamado 'criterio inicial de fluencia' y si se designa con T al tensor de tensiones puede expresarse como:

$f(T) < 0$ el punto se encuentra dentro del comportamiento elástico.

$f(T) = 0$ el punto ha alcanzado el límite elástico y podrá iniciar su comportamiento plástico o no dependiendo del proceso de carga a que sea sometido.

La función f satisface ciertas propiedades [4,5,13] que permiten definir en el espacio de tensiones un dominio convexo C conteniendo el origen $T = 0$ en su interior, el cual a su vez es el dominio elástico. Por ejemplo, una forma particular de f que representa la condición inicial de fluencia en metales está dada por:

$$T \in C \Leftrightarrow f(T) \leq 0, \quad f(T) = \left(\frac{1}{2} S.S\right)^{1/2} - \chi_0$$

propuesta por Huber en 1904 y von Mises en 1913 de allí' el nombre de criterio de Huber-von Mises, y donde S es la parte desviadora de T y $S.S$ representa el producto escalar.

ii) Modificación del criterio de fluencia. Si el proceso de carga continúa una vez alcanzada la condición inicial de fluencia, ciertos materiales sufren un fenómeno de endurecimiento por deformación (work-hardening). La condición de fluencia inicial cambiará, a medida que las deformaciones plásticas ocurran.

El material en que este fenómeno está ausente es decir, la condición inicial de fluencia permanece inalterada cualquiera que sea el proceso de carga, recibe el nombre de material elasto-plástico perfecto o ideal.

Una ley de variación corresponde, por ejemplo, al caso conocido con el nombre de 'isotropic work-hardening' y está dada por:

$$f(T, \chi) \leq 0,$$

donde $\chi = \chi(h)$, $h = \int_0^t T.D^P dt$ o bien $h = \int_0^t \left(\frac{2}{3} D^P.D^P\right)^{1/2} dt$ y

donde $D^P dt$ es el incremento de deformación plástica producido en el intervalo de tiempo $(t, t+dt)$. Si es una función monótona creciente de su argumento h , la función de fluencia inicial crecerá uniformemente en todas las direcciones manteniendo su forma a medida que las deformaciones plásticas aumentan.

Otros criterios de modificación de ésta función inicial han sido propuestos de manera de llevar en cuenta fenómenos tales como el efecto Baushinger, formación de puntos angulosos, etc. [4,5,13].

iii) Relación entre deformaciones plásticas y tensiones. Las hipótesis correspondientes a lo que se conoce en plasticidad como 'flow theory', consisten en:

$$D = D^e + D^P, \quad D^e \text{ tasa de deformación elástica,} \\ D^P \text{ tasa de deformación plástica,} \\ D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) = \text{Sym}(\nabla v), \nabla \text{ operador gradiente.}$$

Admite la existencia de una función $\phi = \phi(T, X)$, llamada 'función potencial de plasticidad', y la existencia de un escalar $\dot{\lambda} > 0$ tales que para los materiales con endurecimiento se verifica:

$$D^P = \dot{\lambda} \phi_T \quad \text{si } f(T, X) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \dot{T} > 0 \\ D^P = 0 \quad \text{si } f(T, X) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \dot{T} \leq 0 \\ \text{o } f(T, X) < 0$$

En el caso de elasto-plasticidad perfecta resulta $\dot{\lambda} \geq 0$ indeterminado verificándose:

$$D^P = \dot{\lambda} \phi_T \quad \text{si } f(T) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \dot{T} = 0 \\ D^P = 0 \quad \text{si } f(T) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \dot{T} < 0 \\ \text{o } f(T) < 0$$

El coeficiente $\dot{\lambda}$ para materiales con endurecimiento queda definido una vez establecido el criterio de fluencia, de endurecimiento y la curva $T_{11} - E_{11}^P$ de un ensayo uniaxial (E^P es el tensor de deformación plástica). En efecto ,

considerando el criterio de Huber-von Mises resulta:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_T \cdot \dot{T}}{A}$$

donde A es la pendiente de la curva $T_{11} - E_{11}^P$. Puede observarse que en materiales elasto-plásticos perfectos toda vez que $D^P \neq 0$ se verifica $A = 0$ y $f_T \cdot \dot{T} = 0$ quedando $\dot{\lambda} \geq 0$ indeterminado. Cuando $\Phi \equiv f$ la teoría recibe el nombre de ley asociativa de la plasticidad. De las relaciones anteriores se sigue que D^P está orientado según la normal saliente al convexo de plasticidad. Esta ley será adoptada en este trabajo.

Por último también supone que:

$$\dot{T} = \mathbb{D} D^e$$

donde D es el tensor de cuarta orden de elasticidad que satisface condiciones de:

simetría	$\mathbb{D} = \mathbb{D}^T$,	
inversibilidad	$\mathbb{D}\mathbb{D}^{-1} = \Pi$, Π tensor identidad	de
		cuarta orden
positividad	$\mathbb{D}\mathbb{D}.D > 0 \quad \forall D \neq 0 \in \text{Sym}$	
	$\mathbb{D}\mathbb{D}.D = 0$ si y sólo si $D = 0$	

Por ejemplo, si el material es isotrópico resulta:

$$\mathbb{D} = 2\mu \Pi + \bar{\lambda} I \otimes I,$$

$\mu, \bar{\lambda}$ constantes de Lamé y \otimes representa el producto tensorial.

De la inspección de las relaciones anteriores se sigue que para todo proceso con deformación plástica ($\dot{\lambda} > 0$) resulta:

$$\mathbb{D}\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{D}^e + \mathbb{D}\mathbb{D}^P = \mathbb{D}\mathbb{D}^e + \dot{\lambda} \mathbb{D}f_T = \dot{T} + \dot{\lambda} \mathbb{D}f_T$$

de donde:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_T \cdot \mathbb{D}\mathbb{D}}{A + f_T \cdot \mathbb{D}f_T}$$

De esta última expresión se sigue que D^P puede definirse en función del producto $f_T \cdot DD$ en lugar del producto $f_T \cdot \dot{T}$ [14]. La selección dependerá fundamentalmente de cual es la variable independiente, en otras palabras si se trabaja con desplazamientos o con tensiones como variables principales.

Por otra parte $T = D(D - D^P)$, y en virtud del resultado anterior:

$$T = (D - \frac{Df_T \otimes Df_T}{A + f_T \cdot Df_T}) D = D^{ep} D$$

Nótese que D^{ep} es simétrico no resultando así si $\phi \neq f$.

La expresión anterior válida para materiales con o sin endurecimiento, fue deducida solamente para $D^P \neq 0$. Los otros estados pueden ser incluidos en esta expresión de la siguiente forma:

$$\dot{T} = (D - \alpha \frac{Df_T \otimes Df_T}{A + f_T \cdot Df_T}) D = D^{ep} D$$

donde:

materiales con endurecimiento	materiales elasto-plásticos perfectos
$\alpha=1$ si $f(T,X)=0$ y $f_T \cdot \dot{T} > 0$	si $f(T) = 0$ y $f_T \cdot \dot{T} = 0$
$\alpha=0$ si $f(T,X)=0$ y $f_T \cdot \dot{T} \leq 0$	si $f(T) = 0$ y $f_T \cdot \dot{T} < 0$
o $f(T,X) < 0$	o $f(T) < 0$

En el caso de trabajar con desplazamientos como variable independiente, la definición de α resulta [14] :

$\alpha=1$ si $f(T,X)=0$ y $f_T \cdot DD > 0$	si $f(T)=0$ y $f_T \cdot DD \geq 0$
$\alpha=0$ si $f(T,X)=0$ y $f_T \cdot DD \leq 0$	si $f(T)=0$ y $f_T \cdot DD < 0$
o $f(T,X) < 0$	o $f(T) < 0$

Por último la inversa de la expresión $\dot{T} = D^{ep} D$ sólo existe para el caso de materiales con endurecimiento y está dada por:

$$\begin{aligned}
 D &= D^e + D^p = \mathbb{D}^{-1} \dot{\hat{T}} + \alpha \dot{\lambda} f_T = \mathbb{D}^{-1} \dot{\hat{T}} + \alpha \frac{f_T \cdot \dot{\hat{T}}}{A} f_T = \\
 &= (\mathbb{D}^{-1} + \alpha \frac{f_T \otimes f_T}{A}) \dot{\hat{T}}
 \end{aligned}$$

3. Principios Variacionales

Considérese un cuerpo ocupando la región Ω en el instante t en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas (b, \bar{t}) , donde b es la fuerza por unidad de volumen y \bar{t} es la densidad de fuerza superficial prescrita en S_T parte del contorno S de Ω . En la parte complementaria que será designada por S_u , está prescrito el campo de desplazamiento \bar{u} .

Permítase ahora que el sistema de fuerzas y las restricciones en el campo de desplazamientos varíen durante el intervalo $(t, t+dt)$ de manera que las fuerzas de inercia sean despreciables.

Dentro de las hipótesis de deformaciones infinitesimales a temperatura constante, désignase como 'problema incremental de equilibrio' [19] de la teoría cuasi-estática de la elasto-plasticidad al problema de determinar los campos \hat{T} , D y v , tales que satisfagan las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones de equilibrio:

$$\text{div } \hat{T} + \dot{b} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$D = \text{Sym} (\nabla v) \equiv \text{Sym} (\nabla \dot{u})$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\hat{T} = (\mathbb{D} - \alpha \frac{\mathbb{D} f_T \otimes \mathbb{D} f_T}{A + f_T \cdot \mathbb{D} f_T}) D, \quad \alpha \text{ definido en la Sección 2.}$$

Condiciones de contorno:

$$\hat{T}_n = \dot{\bar{t}} \quad \text{en } S_T$$

$$v = \dot{\bar{u}} \quad \text{en } S_u$$

donde $(\dot{b} dt, \dot{\bar{t}} dt)$ y $\dot{\bar{u}} dt$ son los incrementos dados al sistema de fuerzas y al desplazamiento prescrito respectivamente.

Como puede apreciarse el problema de valor de contorno es no lineal ya que el coeficiente α , que permite distinguir la región de comportamiento elástico y la de comportamiento elasto-plástico, depende de la propia solución del problema. Dada la no linealidad la solución aproximada del problema incremental se hace necesaria.

A continuación se presentan algunos principios variacionales que serán útiles en la determinación de soluciones aproximadas. Para este fin, serán introducidas las siguientes definiciones:

Kin_v , campo de velocidades cinemáticamente admisibles:

$$Kin_v = \{ v^*; v^* \text{ regular, } v^* = \dot{u} \text{ en } S_u \}$$

$Est_{\dot{T}}$, campo de tasas de tensiones estáticamente admisibles:

$$Est_{\dot{T}} = \{ \dot{T}^0; \text{div } \dot{T}^0 + \dot{b} = 0 \text{ en } \Omega, \dot{T}^0 n = \dot{t} \text{ en } S_T \}$$

P.A. $_{\dot{T}}$, campo de tasas de tensiones plásticamente admisibles:

$$P.A._{\dot{T}} = \{ \dot{T}; \text{si } f(T, X) = 0 \text{ luego } f_T \cdot \dot{T} \leq 0 \}$$

i) *Principios Variacionales donde v es la incógnita principal. Materiales con o sin endurecimiento.*

No resulta difícil demostrar [4,6,7,14] que el problema incremental de equilibrio es equivalente al siguiente principio de mínimo:

"De todas las velocidades cinemáticamente admisibles, $v^* \in Kin_v$, aquella que hace que el funcional $\Pi(v^*)$ alcance un mínimo (mínimo absoluto) es la solución del problema incremental de equilibrio".

Es decir, si v representa dicha solución resulta:

$$\Pi(v^*) \geq \Pi(v) \text{ para } \forall v^* \in Kin_v \text{ e igual si y sólo si } v^* = v$$

donde:

$$\Pi(v^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{T}^* \cdot D^* \, d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^* \, d\Omega - \int_{S_T} \dot{c} \cdot v^* \, dS$$

\dot{T}^* y D^* definidos a través de las ecuaciones constitutivas y de compatibilidad en función de v^* . Como puede apreciarse, el problema del mínimo está definido en todo Kin_v y consiste en determinar el mínimo de un funcional cuadrático sin restricción. No obstante lo anterior, el problema es no lineal por cuanto el coeficiente α (que surge en \dot{T}^*) depende de la propia solución.

ii) *Principios variacionales donde \dot{T} es la incógnita principal.*

Nuevamente aquí no resulta difícil mostrar que el problema incremental es equivalente a los siguientes principios de mínimo:

Materiales con endurecimiento. "De todas las tasas de tensiones estáticamente admisibles, $\dot{T}^0 \in \text{Est}_{\dot{T}}$, aquella que conduce al funcional $\Pi_C(\dot{T}^0)$ a un mínimo (mínimo absoluto) es la solución del problema incremental".

Es decir, si \dot{T} representa dicha solución se verifica que:

$$\Pi_C(\dot{T}^0) \geq \Pi_C(\dot{T}) \text{ para } \forall \dot{T} \in \text{Est}_{\dot{T}} \text{ e } = \text{ si y sólo si } \dot{T}^0 = \dot{T}$$

donde:

$$\Pi_C(\dot{T}^0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{T}^0 \cdot D^0 \, d\Omega - \int_{S_u} \dot{T}^0 n \cdot \dot{u} \, dS$$

y donde D^0 está definido a través de las ecuaciones constitutivas:

$$D^0 = (\mathbb{D}^{-1} + \alpha \frac{f_T \otimes f_T}{A}) \dot{T}^0 \quad \alpha \text{ definido según la Sección 2.}$$

Nuevamente, si bien el problema se reduce a determinar el mínimo de un funcional cuadrático sin restricciones el problema es no lineal ya que α depende de la propia solución.

Material sin endurecimiento. De la definición de α se tiene que, en este caso, el problema se reduce a:

$$\min_{T^0 \in \text{Est}_{\hat{T}} \cdot \text{OP} \cdot A \cdot \hat{T}} \{ \Pi_C(\hat{T}^0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{T}^0 \cdot \mathbb{D}^{-1} \hat{T}^0 d\Omega - \int_{S_u} \hat{T}^0 n \cdot \dot{u} dS \}$$

Es decir, es el problema del mínimo de un funcional cuadrático con restricciones: \hat{T}^0 debe ser simultáneamente es tática y plásticamente admisible. Obsérvese que la restricción es lineal en \hat{T}^0 .

De estos principios de mínimo se sigue la unicidad de \hat{T} y D [4,6,14] teoremas de unicidad del campo de tensiones y deformaciones pueden ser consultados en el trabajo de KOITER [6]. El problema de existencia de la solución es más complicado no estando totalmente resuelto [15].

4. Métodos Iterativos en la Resolución de los Problemas de Mínimo.

Aquí serán presentadas las ideas fundamentales de los algoritmos iterativos más conocidos en la literatura y utilizados conjuntamente con el Método de Elementos Finitos.

i) *Incógnita principal v, materiales con o sin endurecimiento.* Aquí existen fundamentalmente dos procesos iterativos:

Matriz de rigidez modificada en cada paso. A través del resultado del paso anterior se define la región plástica, el problema consiste en:

$$\min_{v^{*n+1} \in \text{Kin}_v} \{ \Pi(v^{*n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}_n^{\text{ep}} D^{*n+1} \cdot D^{*n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^{*n+1} d\Omega - \int_{S_T} \dot{t} \cdot v^{*n+1} dS \}$$

donde:

$$\mathbb{D}_n^{\text{ep}} = (\mathbb{D} - \alpha_n \frac{\mathbb{D}f_T \otimes \mathbb{D}f_T}{A + f_T \cdot \mathbb{D}f_T}) ,$$

$$\alpha_n = 1 \quad \text{si } f = 0 \text{ y } f_T \cdot \mathbb{D} D^{*n} \geq 0$$

$$\alpha_n = 0 \quad \text{si } f = 0 \text{ y } f_T \cdot \mathbb{D} D^{*n} < 0$$

o $f < 0$

y el proceso se inicia con $D^{*0} = 0$.

Al aplicar el M.E.F. se tiene $K_n v^{*n+1} = F$ es decir, la matriz de rigidez es modificada en cada paso lo que implica un mayor consumo de tiempo de máquina. Por otra parte, la convergencia de este proceso iterativo aún no ha sido demostrada.

Proceso iterativo elástico con tensiones iniciales. En este proceso se supone conocido λ a través del resultado del paso anterior, luego el proceso consiste en:

$$\min_{v^{*n+1} \in \text{Kin}_V} \{ \Pi(v^{*n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D^{*n+1} \cdot D^{*n+1} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n \frac{Df_T \cdot D^{*n}}{A + f_T \cdot Df_T} Df_T \cdot D^{*n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^{*n+1} d\Omega - \int_{S_T} \dot{t} \cdot v^{*n+1} dS \}$$

donde α_n está definido como anteriormente y donde el proceso se inicia con $D^{*0} = 0$.

La serie $\pi(v^{*n+1})$ es decreciente y la convergencia está demostrada únicamente para $A > 0$. Al utilizar el M.E.F. el algoritmo anterior conduce a un esquema:

$$K v^{*n+1} = F + F_n$$

es decir la matriz permanece constante y sólo es modificado el término independiente. Lo anterior induce una economía de tiempo por cuanto K es triangularizada una sola vez.

ii) Incógnita principal T

a) Materiales con endurecimiento, $A > 0$. Nuevamente aquí se presentan fundamentalmente dos procesos iterativos:

Matriz de flexibilidad variable en cada paso. El proceso iterativo consiste en:

$$\min_{T^{*n+1} \in \text{Est}_T} \{ \Pi_c(T^{*n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{t}^{*n+1} \cdot (D^{ep})_n^{-1} \dot{t}^{*n+1} d\Omega - \int_{S_u} \dot{t}^{*n+1} \cdot \dot{u} dS \}$$

donde:

$$(\mathbb{D}^{ep})_n^{-1} = \mathbb{D}^{-1} + \alpha_n \frac{f_T \otimes f_T}{A} ,$$

$$\alpha_n = 1 \text{ si } f(T, X) = 0 \text{ y } f_T \cdot T^{0n} \geq 0$$

$$\alpha_n = 0 \text{ si } f(T, X) = 0 \text{ y } f_T \cdot T^{0n} < 0$$

$$0 \text{ si } f(T, X) < 0$$

siendo que el proceso se inicia con $\alpha_0 = 0$.

Nuevamente, en este algoritmo la matriz debe recalcularse en cada paso y la convergencia no está demostrada.

Proceso iterativo elástico con deformaciones iniciales. Consiste en "atrasar" el término asociado al trabajo de las tensiones debido a las deformaciones plásticas que es así considerada como una deformación inicial. El proceso consiste en:

$$\begin{aligned} \min_{T^{0n+1} \in \text{Est}_{\dot{T}}} \{ \Pi_C(\dot{T}^{0n+1}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} T^{0n+1} \cdot \mathbb{D}^{-1} T^{0n+1} d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n \frac{f_T \cdot \dot{T}^{0n}}{A} f_T \cdot \dot{T}^{0n+1} d\Omega - \int_{S_u} \dot{T}^{0n+1} n \cdot \dot{u} dS \} \end{aligned}$$

Con α_n definido como anteriormente. Como puede apreciarse la matriz de flexibilidad se mantiene constante en todo el proceso iterativo modificándose solamente el término independiente. La convergencia del método tampoco está demostrada.

b) Materiales sin endurecimiento (elasto-plásticos perfectos). Los algoritmos anteriores pueden ser aplicados pero aquí, en general, se recurre a los métodos existentes para determinar el mínimo de una función cuadrática con restricciones lineales. En efecto, el problema consistía en:

$$\min_{T^0 \in \text{Est}_{\dot{T}} P \cdot A \cdot \dot{T}} \{ \Pi_C(\dot{T}^0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{T}^0 \cdot D^{-1} T^0 d\Omega - \int_{S_u} \dot{T}^0 n \cdot \dot{u} dS \}$$

Es decir, los \dot{T}^0 admisibles son aquellos que siendo estáticamente admisibles son a su vez plásticamente admi-

bles es decir si $f(T) = 0$ se cumple que $f_T \cdot \dot{T}^0 \leq 0$ restricción ésta lineal en \dot{T}^0 . Para estas técnicas consúltese los trabajos [10,11,12,17].

Con los principios variacionales anteriores conjuntamente con los algoritmos presentados, el problema de la determinación de las velocidades (tanto de desplazamientos como de tensiones) queda resuelto. Si el incremento de tiempo es infinitesimal (dt) el nuevo estado en que se encontrará el cuerpo satisface automáticamente la condición de plasticidad $f \leq 0$. Desde el punto de vista computacional lo anterior es imposible siendo necesario incrementos finitos de tiempo Δt . Conocidas las velocidades para el instante t_n el estado para $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ quedará definido, por ejemplo, por:

$$\begin{aligned} T(t_{n+1}) &\cong T(t_n) + \dot{T}(t_n) \Delta t \\ u(t_{n+1}) &\cong u(t_n) + v(t_n) \Delta t \end{aligned}$$

debe notarse que este esquema, muy empleado por la mayoría de los autores que trabajan en el área [7,16], dará resultados "satisfactorios" si Δt se hace suficientemente pequeño y el intervalo de integración no es grande ya que, ninguno de los esquemas vistos es capaz de controlar la distancia al convexo de plasticidad. En este proceso de integración paso-a-paso los errores de irán acumulando y al final del mismo la condición $f \leq 0$ podrá no estar satisfecha.

Estas dificultades han sido motivo de numerosas discusiones y algunos esquemas iterativos han sido propuestos, de manera de controlar esta distancia [7,12,18]. La convergencia de estos métodos no ha sido demostrada a excepción del esquema iterativo propuesto por NGUYEN [18].

5. Conclusión

En este trabajo se ha presentado rápidamente los principios de mínimo, los algoritmos para determinar soluciones aproximadas y sus dificultades generales. Como puede apreciarse se hace necesario formular nuevos métodos capaces de satisfacer la condición de plasticidad $f \leq 0$ a la vez que

permitan la demostración teórica de la convergencia de la solución.

Bibliografía

- [1] Moreau, J.J.; "Application of convex analysis to the treatment of elasto-plastic systems", IUTAM/IMU Symp. Applic. Meth. Functional Analysis to Problems of Mechanics", Marsella (1975).
- [2] Nayroles, B.; "Structure algébrique des théories classiques de plasticité", Séminaire "Plasticité et Viscoplasticité", École Polytechnique, Paris, (1972), McGraw Hill (1974).
- [3] Rockafellar, R.T.; "Convex Analysis", Princenton Univ. Press (1970).
- [4] Hill, R.; "The mathematical theory of plasticity", Oxford Univ. Press (1950).
- [5] Ilyushin, A.A.; "Some problems of the theory of plastic deformation", Trans. Brown Univ, (1946).
- [6] Koiter, W. T.; "General problems of elastic plastic solids", Progress in Solid Mechanics. North Holland, (1960).
- [7] Zienkiewicz, O.C.; Valliappan, S.; King, I.P ; "Elastoplastic solutions of engineering problems "initial stress" finite element approach", Int . J. Num. Meth. Engng., 1, 75-100, (1969).
- [8] Capurso, M.; "A general method for the increment solution of elastic-plastic problems", Meccanica, 4, (1969).
- [9] Nguyen, Q.S.; Zarka, J.; "Quelques méthodes de résolution numérique en plasticité classique et

en viscoplasticité, Seminario citado en referencia 2.

- [10] Maier, G.; "Quadratic programming and the theory of elastic-plastic structures", *Meccanica*, vol.3, (1968).
- [11] Gavarini, C.; "L'analyse limite des structures au Moyen de la programmation mathématique", Seminario referencia 2.
- [12] Donato, O.D.; Franki, A.; Garg, V.K; Anand, S.G; Belytschko, T.B.; "Elastic plastic analysis by quadratic programming", *J. Engng, Mech. Div.*,100, 126-131 (1974).
- [13] Olszak, W.; Mroz, Z.; Perzyna, P.; "Recent trends in the development of the theory of plasticity", Pergamon Press, (1963).
- [14] Feijoo, R.; Taroco, E.; Notas de aula del curso "Introducción a los principios y Métodos variacionales en elasto-plasticidad", II^a Escola de Mat. Aplic. a realizarse en Enero de 1980, CBPF-Rio de Janeiro.
- [15] Duvaut, G.; Lions, J.L.; "Les inéquations en Méchanique et en physique", Dunod, (1972).
- [16] Zienkiewicz, O.C.; "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, (1971).
- [17] Glowinski, R.; Lions, J.L.; Trémolières, R.; "Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles", Dunod, Paris, (1976).
- [18] Nguyen, Q.S.; "On the elastic-plastic initial-boundary value problem and its numerical integration", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 11,

817-832, (1977).

- [19] Del Piero, G.; "On the mathematical theory of elastic-plastic materials", Arch. Mech. 27, 2, 253-271, (1975).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-06

p. p. 068 - 077

CONTACT PROBLEMS FOR VISCOELASTIC ANISOTROPIC BODIES

M. PREDELEANU and M. DAHAN

LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES
ECOLE POLYTECHNIQUE
91128 PALAISEAU (France)

SUMMARY

In the theory of viscoelasticity, the study of the contact problems introduce additional mathematical difficulties due of time-varying boundary conditions ; in this paper, the basic integral equations of this class of problems are deduced for linearly viscoelastic media with transverse isotropy. Effective solutions are given for indentation problems for several boundary geometries with axial symmetry. The possible testing procedures for rheological behaviour of the materials in contact are discussed by utilising the obtained results.

RESUME

Le problème axi-symétrique du contact de deux corps transversalement isotropes est considéré pour une classe de matériaux viscoélastiques. A partir de la solution générale, on en déduit les solutions sous forme explicite pour la pénétration d'un poinçon rigide de différents profils dans un demi-espace déformable. Les résultats obtenus sont appliqués aux problèmes d'identification globale des caractéristiques rhéologiques du matériau.

1.- Introduction

Numerous technical applications of the contact problems has given rise in the last decades to special studies in the range of the isotropic viscoelasticity theory. In such problems, the viscoelastic-elastic correspondance principle is inapplicable because the regions over which different types of boundary conditions are given, vary with time. For this, alternative methods of solution are necessary, and mathematically, these mixed value problems are most interesting of the quasi-static type. Such methods have been given by Lee and Radok [1], Predeleanu [2], Graham [3], Ting [4]. These methods can be used to solve the contact problem for anisotropic bodies, like composites, whose the mixture presents viscoelastic effects or some class of soils. In the last time, much attention was given to contact problems for transversely isotropic elastic bodies and available solutions was obtained by Dahan [5].

This paper is concerning with the contact problem for transversely isotropic bodies which presents linear viscoelastic effects in dilatation and shear deformation. In section 2 the integral equation of the contact of two deformable bodies is deduced and general solution is discussed.

In section 3, the closed form solutions of the indentation problem are obtained for rigid punch of various profil (flat-ended, conical and spherical).

In section 4, applications to testing procedures are presented. Basic relations for determining creep uniaxial compliance and relaxation modulus are deduced by using step functions for loading. Also a testing procedure for checking linearity of the material behaviour is indicated.

Some constitutive hypothesis used in the present analysis have been inspirated from transverse isotropic elasticity whose range, the measurements are more developped.

2.- Basic equations

Let us consider two deformable bodies, occupying respectively the regions B_1 and B_2 , with boundaries ∂B_1 and ∂B_2 , in the three-dimensional euclidian space referred to a fixed rectangular cartesian coordinate system $(0, x, y, z)$. Let be t , the time variable, denoting by t the present time moment and by τ the values of t for $\tau \leq t$.

For an axisymmetrical deformation state with respect to Oz -axis of the cylindrical coordinate system (r, θ, z) we shall note by (u, v, w) the components of the displacement vector, $(\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz})$ the non-zero components of strain tensor and $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz})$ the components of stress tensor.

If us consider that the two bodies in contact exhibit the linear viscoelastic effects and transverse isotropy, the general strain-stress relations can be written :

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= A_{11} * d\sigma_{rr} + A_{12} * d\sigma_{\theta\theta} + A_{13} * d\sigma_{zz} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= A_{12} * d\sigma_{rr} + A_{11} * d\sigma_{\theta\theta} + A_{13} * d\sigma_{zz} \\ \epsilon_{zz} &= A_{13} * (d\sigma_{rr} + d\sigma_{\theta\theta}) + A_{33} * d\sigma_{zz} \\ \epsilon_{rz} &= A_{44} * d\sigma_{rz} \end{aligned} \quad (1)$$

where A_{ij} are creep functions. By $\varphi * d\psi$ is noted the Stieltjes convolution of two real-valued functions φ and ψ defined by:

$$(\varphi * d\psi)(t) = \int_0^t \varphi(t, \tau) d\psi(\tau)$$

under approximate conditions formulated, for instance in [6].

By assuming that

- i - instantaneous elastic response and Poisson ratios are time-invariable ;
- ii - the time-behaviour in shear and dilatation are similar , then creep functions can be expressed in the following form :

$$A_{ij}(t, \tau) = a_{ij} F(t, \tau) \equiv a_{ij} E_A \phi(t, \tau) \quad (2)$$

where ϕ is the creep compliance in uniaxial deformation defined by :

$$\phi(t, \tau) = \frac{1}{E_A} + c(t, \tau) \quad , \quad (t, \tau) \in R_+ \times R_+ \quad (3)$$

with :

$$c(t, t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad , \quad \forall t \in R_+$$

and E_A , instantaneous elastic modulus in axial déformation. a_{ij} are elastic constants which can be defined by means of instantaneous elastic modulus and Poisson coefficients. In the equations(1)- (3) the aging effects are also included. If $c(t, \tau) = c(t - \tau)$, the rheological properties of the material are considered invariable during the time and in this case, some simplifications can be obtained by using the integral Laplace transform.

Let us assumed that in the free-stress configuration the bodies have the initial contact in 0 and that the surfaces ∂B_1 and ∂B_2 admet the (x, y) -plane as common tangent plane at 0. We shall note with :

$$z = z_1(r) \quad , \quad z = -z_2(r) \quad , \quad 0 \leq r < \infty \quad (4)$$

the surface equation of ∂B_1 and ∂B_2 .

If the bodies are pressed, at instant t , a deformed region of contact $D(t)$ will appear and the common contact curve of ∂B_1 and ∂B_2 will be a circle of radius $r_0(t)$.

By using Hertz's hypothesis and Lekhnitski's solution of the problem of normal point force on a transversely isotropic elastic half-space [7] , the following integral equation is obtained for the friction-less contact pressure $p(r, t)$ between the bodies

$$f(r, t) = [k^{(1)} F^{(1)} + k^{(2)} F^{(2)}] * d \left(\iint_{D(\tau)} \frac{p(r', \tau) ds}{\rho(r, r')} \right) , r \in D(t) \quad (5)$$

where ds is the surface element situated at a distance r' from origine point 0, ρ the distance between the points $M(r)$ and $M(r')$, $M, M' \in D(\tau)$. $F^{(i)}$, $i = 1, 2$, are the creep functions of the two bodies B_1 and B_2 , $k^{(i)}$, $i = 1, 2$, the constants defined in terms of a_{ij} , by :

$$\begin{aligned}
 k &= \lambda (a_{11} - a_{12}) (s_1 + s_2) / 2\pi \\
 s_{1,2} &= \left(\frac{a + c \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4d}}{2d} \right)^{1/2} ; \quad \lambda = \frac{(1 - b) \sqrt{d}}{d - a c} \\
 a &= \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12})}{a_{11} a_{33} - a_{13}^2} ; \quad b = \frac{a_{13}(a_{13} + a_{44}) - a_{12} a_{33}}{a_{11} a_{33} - a_{13}^2} \\
 c &= \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12}) + a_{11} a_{44}}{a_{11} a_{33} - a_{13}^2} , \quad d = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11} a_{33} - a_{13}^2} . \quad (6)
 \end{aligned}$$

We have noted :

$$f(r, t) = h(t) - z_1(r) - z_2(r) \equiv h(t) - f_0(r) \quad (7)$$

where $h(t)$ is the total approach of the bodies at time t . If in (3) we consider $c^{(i)} = 0$, $i = 1, 2$, the integral equation (5) gives a one-parameter family of solutions of the contact problem for two elastic bodies.

Its general solution has been given for arbitrary f (see for instance [8]) and this can be used to solve the integral equation (5) which introduce supplementary mathematical difficulties due of time-varying domain of integration $D(t)$. The method used in [1]- [3] can be used to deduce the viscoelastic solution.

For instance, if Hertz problem is considered, i.e. :

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1} , \quad z_2 = \frac{-r^2}{2R_2} \quad (8)$$

where R_1, R_2 are geometrical constants, then the solution of integral equation (5) for monotonic increasing contact area is given by :

$$\begin{aligned}
 p(r, t) &= \frac{2}{\pi^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \Psi^{-1} (t, \tau) * d (\sqrt{[r_0(\tau)]^2 - r^2}) \\
 [r_0(t)]^3 &= \frac{3\pi}{4} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \Psi(t, \tau) * d P(t) \\
 h(t) &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} [r_0(t)]^2 \quad (9)
 \end{aligned}$$

where P is the total force defined by :

$$P(t) = \iint_{D(t)} p(r', t) ds , \quad (10)$$

$\Psi = k^{(1)} F^{(1)} + k^{(2)} F^{(2)}$, Ψ^{-1} is the inverse operator of Ψ , defined by the convolution equation $\Psi^{-1} * \Psi = H$, H being the Heaviside function.

3.- Solutions for axisymmetric indentation problem

Let us consider the contact problem of a rigid indenter which is pressed on a viscoelastic transversely isotropic half-space defined by (1), (2).

Then we shall put in the equation (5) $z_2(r) = 0$, $k^{(1)} = 0$ and from general solution can be deduced the relations for contact characteristics on plane deformable surface ($z = 0$). For strain and stress distribution inside of the half-space ($z < 0$), we shall use the corresponding elastic solution of the problem given in [5]. Thus, we have to solve the following boundary value problem :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \begin{cases} -p(r, t) & , \quad r \leq a(t) \\ 0 & , \quad r > a(t) \end{cases} \\ \sigma_{rz} &= 0 & , \quad r \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

with regularity conditions at infinite.

The elastic solution are independent of time t , which in equations (11) can be considered as a parameter characterising various degree of indentation.

Let us consider an elastic half-space, defined by stress-strain relations(1), (2) in which $F(t, \tau) \equiv 1$, and subjected to boundary conditions (11). The corresponding solution for each t , was deduced in [5].

To deduce the viscoelastic solution, let us concerned in the present analysis only creep effects and does not consider creep-recovery effects. The surface of the indenter is supposed convex, therefore the contact region is a simply connected domain. Closed form solutions can be obtain for usual indenter. We shall give here the principal results :

a- Flat-ended cylindrical indenter :

The relation between the depth of penetration h and total load P is given by :

$$h(t) = \frac{k'}{4a_0} (F * P)(t) \quad (12)$$

where a_0 is the constant radius of the flat-ended rigid cylinder, $k' = 2k\pi$

Also, the pressure under the indenter is :

$$p(r, t) = \frac{P(t)}{2\pi a_0} (a_0^2 - r^2)^{-1/2} \quad (13)$$

It is worth to note that the pressure under the indenter coincide with the elastic one. Also, it is easy to deduce that for the boundary value problem defined by (11) with $r_0(t) = \text{Const.}$, the stress state in the half-space defined by (1) and (2) is identical to stress state in the elastic half-space. For the isotropic case the general conditions in which the viscoelastic solution is identical with the elastic one are deduced in [9].

The displacement field is generally time-variable and for instance, for $z = 0$, is given by :

$$u_r(r, 0, t) = \begin{cases} \frac{2(a + \sqrt{d})}{\pi\sqrt{d}(s_1 + s_2)} \frac{a_0}{r} \left[1 - \left(1 - \frac{a_0^2}{r^2}\right)^{1/2} \right] h(t) & , \quad 0 \leq r \leq a_0 \\ \frac{2(a + \sqrt{d})}{\pi\sqrt{d}(s_1 + s_2)} \frac{a_0}{r} h(t) & , \quad r > a_0 \end{cases} \quad (14)$$

$$w(r, 0, t) = \begin{cases} h(t) & , \quad 0 \leq r \leq a_0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a_0}{r} h(t) & , \quad r > a_0 \end{cases} \quad (15)$$

If $h(t) = w_0 H(t)$, the displacement field constant during the time. This result can be easily deduced for the boundary value problem in displacements in which on a part of the boundary, ∂B_u , are given the displacements, and on the complementary part ∂B_σ the stress vector is zero.

It is worth to note that the deformed surface $z = w(r, 0, t)$, $r > r_0$ are not depending of material constants.

b- Conical indenter

Let be considered a rigid cone of angle 2θ . Then the contact surface is time variable. We obtain :

$$r_0^2(t) = \frac{k}{2} \tan^2 \theta (F * P)(t) \quad (16)$$

$$h(t) = r_0(t) \cot \theta \quad (17)$$

$$p(r, t) = \frac{\cot \theta}{k} (F^{-1} * \operatorname{argch} \frac{r_0}{r})(t) \quad (18)$$

c- Spherical indenter

If a rigid spherical indenter of radius R , is considered we obtain

$$r_0^3(t) = \frac{3kR}{8} (F * P)(t) \quad (19)$$

$$h(t) = \frac{1}{R} [r_0(t)]^2 \quad (20)$$

$$p(r,t) = \frac{4}{\pi k R} (F^{-1} * P)(t) \quad (21)$$

The strain and stress state inside of semi-infinite space can be deduced also from general elastic solution.

4.- Applications to testing procedures

Present analysis permits by simple testing procedures to determine the viscoelastic behaviour of a material with transverse isotropy.

Both creep and relaxation functions can be determined by a global testing procedure which avoid the rheological identification by using test specimens, difficult to realise for some non-homogeneous materials, like for instance soils, rocks, concrete, etc...

If we take $P = P_0 H(t - \tau_0)$, where P_0 is a constant, there from (12) we obtain :

$$h(t) = \frac{k}{4a_0 a_{33}} P_0 \phi(t, \tau_0) H(t - \tau_0) \quad (22)$$

The relation permits to determine the creep compliance in uniaxial compression by using a flat-ended cylindrical indenter. Similar results can be obtained if conical or spherical indenters are used.

For non-aging materials, i.e. $F(t, \tau) = F(t - \tau)$, a dynamic testing procedure can be used for rapid determination of the complex visco-elastic modulus by using the relations (12), (13) in Hertz impact equation

$$P(t) = M \ddot{h}(t) \quad (23)$$

The determination of the relaxation function can be obtained if a suddenly constant penetration h_0 is applied. The measurements during the time of the total load will determine the relaxation function on the basis of the following relation :

$$P(t) = \frac{4 a_0 a_{33}}{k} \phi^{-1}(t, \tau_0) H(t - \tau_0) \quad (24)$$

where ϕ^{-1} is the relaxation modulus in uniaxial compression.

An other type of testing procedure are suitable to check linearity of analysed model.

Indeed, if a spherical indenter is used, to avoid the ruptures of some parts of material, from (19), (20) we deduce :

$$h^{3/2}(t) = \frac{3 k}{8 \sqrt{R} a_{33}} P_0 \phi(t, \tau_0) H(t - \tau_0). \quad (25)$$

To verify the physical linearity of the material behaviour then we have compared different values of P_0 with corresponding values of $h^{3/2}(t)$, for any t .

Alternatively, on the basis of the relation :

$$P(t) = \frac{8 \sqrt{R} a_{33}}{3 k} h_0^{3/2} \phi^{-1}(t, \tau_0) H(t - \tau_0) \quad (26)$$

we can verify the linearity between $h_0^{3/2}$ and the corresponding measured values of the total force, for any t .

5.- Conclusions

The present analysis has shown that for the class of anisotropic viscoelastic bodies defined by (1) and (2) it is possible to obtain the general solution of the contact of two bodies and closed forms solutions for various indentation problems. The material constitutive hypothesis adopted in this paper have permitted to deduce suitable basic relations for testing procedures and engineering design calculations, knowing the difficulties introduced by measurements of anisotropic viscoelastic characteristics. These hypothesis was been inspired from transverse isotropic elasticity, whose range the measurements are more easily performed (see for instance [10], [11]).

This first approach has concerned only creep behaviour and not creep recovery. No fundamental difficulties introduce the contact problem when the time dependent contact area has any number of maxima and minima. The analysis utilised in [3], [4] can be applied to the case concerned in this paper.

REFERENCES

- [1] Lee, E.H., Radok, J.R.M., The contact problem for viscoelastic bodies. J. Appl. Mech. 27, pp. 438-444, (1960).
- [2] Predeleanu, M, On spatial contact problem in the linear creep theory, Bul. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. 6(54), pp. 219-229, (1962).
- [3] Graham, G.A.C., The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the time dependent area has any number of maxima and minima, Int. J. Eng. Sci. 5, pp. 495-514, (1967).
- [4] Ting, T.C.T., Contact problems in the linear theory of viscoelasticity, J. Appl. Mech. 34, pp. 248-254, (1968).
- [5] Dahan, M., Poinçons axisymétriques rigides sur un massif élastique semi-infini transversalement isotrope, J. Mécanique Appliquée 3(3), pp. 1-14 (1979).
- [6] Gurtin, M.E., Sternberg, E., On the linear theory of viscoelasticity, Arch. Rati. Mech. Anal., 11, pp. 291-356, (1962).
- [7] Lekhnitski, Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, Holden Day, San Francisco, (1963).
- [8] Sneddon, I.N., The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile, Int. J. Eng. Sci., 3, pp. 47-57, (1965).
- [9] Predeleanu, M., Mathematical methods for stress analysis in viscoelastic ageing materials. In structure, Solid Mechanics and Engineering Design. The proceedings of the Southampton 1969 Civil Engineering Materials Conference, edited by M. TE'EHl, Wiley-interscience, London, (1971).
- [10] Zienkiewicz, O.C., Stagg, K.G., Cable method of in situ rock testing, Int. J. Roch. Mech. Min. Sci., 4, pp. 273-300, (1967).
- [11] Eftimie, A., Stress state in anisotropic foundations soils, Buletinul Institut. Politech. Iasi, Sectia V, XIX(XXIII), pp. 23-29 (1973).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO TÉCNICO
 TECHNICAL PAPER

N.º DT-02

P.P. 078 - 087

ARQUITETURA DE UM SISTEMA MODULAR DE ELEMENTOS FINITOS

I - CARACTERÍSTICAS

Clóvis Sperb de Barcellos

Prof. Titular - Depto. Eng. Mecânica
 CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Edison da Rosa

Prof. Assistente - Depto. Eng. Mecânica
 CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Sumário

Neste trabalho são apresentadas algumas das características da arquitetura de um sistema modular de elementos finitos, ora em desenvolvimento. Os objetivos globais do sistema, além da solução de problemas, são de caráter de pesquisa e didáticos. A modularidade é usada para permitir ampla flexibilidade para a inclusão e pesquisa de novas formulações quer de elementos quer de processos numéricos de solução. A finalidade didática é atingida pela identificação das várias etapas inerentes ao método e pelo grau crescente de sofisticação do uso das memórias principal e secundária.

Summary

Some of the properties of a finite element modular system currently under development is present. It was implemented for research and teaching purposes, besides its use for problem solving capabilities. The modularity is used for allowing a great flexibility for the inclusion and research of new element formulations as well as improved numerical solution procedures. Its adequacy for teaching use is obtained by the easy identification of the program steps and by the growing in the main and secondary memory utilization.

1. Introdução

Neste artigo é apresentado um relatório inicial de um sistema que está sendo desenvolvido com o objetivo de criar uma infraestrutura computacional para o ensino e pesquisa em Mecânica dos Meios Contínuos através de técnicas de elementos finitos.

O trabalho aqui descrito surgiu da necessidade de absorção e disseminação da tecnologia do Método de Elementos Finitos, visto que, a maioria dos programas em uso no Brasil são de origem estrangeira, com poucas exceções, como o PROASE [2], e o LORANE [6]. A maior parte dos programas disponíveis não são adequados para o ensino do Método dos Elementos Finitos, bem como para a sua alteração com o fim de pesquisar novas formulações ou novas utilizações do método. Para preencher essas lacunas, o presente sistema possui finalidades múltiplas, ou seja, didática, pesquisa e comercial. O seu uso para atividades didáticas será de familiarizar o estudante a compreender e identificar a estrutura de um sistema, a partir de conhecimentos teóricos já adquiridos. Quanto à pesquisa, será usado para a formulação de novos elementos, estudo de convergência, pesquisa de novos procedimentos numéricos, etc. Na parte comercial, o sistema poderá ser usado para a resolução de problemas da mecânica sólida, fluida e térmica, bem como acoplamentos entre si.

Para cumprir estas finalidades, o desenvolvimento do presente sistema é acompanhado de uma ampla e minuciosa documentação, tanto no que se refere à metodologia numérica como de programação. Isto é essencial para o ensino do Método de Elementos Finitos, bem como para a pesquisa e aprimoramento do sistema.

2. Problemas solúveis pelo Método de Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos foi inicialmente formulado para solucionar problemas estruturais elásticos, tendo atualmente expandido o seu campo de atuação para uma ampla gama de problemas da Mecânica dos Meios Contínuos. Estes problemas diferem quanto ao meio sobre o qual está defi

nido o domínio, bem como quanto às equações diferenciais ou princípios variacionais que regem o fenômeno que se realiza neste meio. Consequentemente existe uma gama bastante variada de problemas resultantes das possíveis combinações meio contínuo-fenômeno.

O método se baseia na partição do domínio, a qual fornece a forma geométrica dos elementos finitos, na definição de funções de interpolação adequadas sobre esses elementos e através do uso de um princípio variacional, ou balanço energético ou ainda, o método de Galerkin. Um grande número de problemas da Mecânica dos Meios Contínuos, quando atacados por este método, resultam em sistemas de equações de um dos seguintes formatos:

$$K X = F \quad (1)$$

$$C \dot{X} + K X = F \quad (2)$$

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F \quad (3)$$

Exemplificando, temos os tipos de problemas abaixo indicados, que recaem em sistemas de equações simultâneas do formato (1), (2) ou (3) respectivamente.

Formato (1): Problemas elásticos, elasto-plásticos, condução de calor.

Formato (2): Condução de calor em regime transiente, problemas de fluência, instabilidade.

Formato (3): Problemas de elasto-dinâmica, acoplamento fluido-estrutura.

Os programas para a resolução destes problemas apresentam partes que são inerentes à combinação meio contínuo-fenômeno, enquanto que outras são inerentes ao método. Desta última, algumas são usadas em problemas de qualquer um dos formatos enquanto outras são específicas ao formato e/ou ao processo de solução em questão. Existe, portanto, a conveniência de construir sistemas modulares para tirar proveito das similaridades e distinções existentes entre os diversos tipos de problemas da Mecânica dos Meios Contínuos e

entre os diversos processos para a solução de tais problemas. Tal pode ser exemplificado pelo uso de um domínio que é inicialmente analisado quanto ao campo de temperatura existente, seja regime transiente ou estacionário, sendo estes resultados usados para obter o campo de tensões térmicas, sobre o mesmo domínio.

3. Características necessárias

De forma a cumprir de uma maneira completa os objetivos, o sistema deve possuir uma série de características sendo que uma das principais delas é a modularidade do conjunto.

Uma lista das características desejadas do sistema, com um detalhamento das implicações que cada uma destas fornece, permite a apreciação dos objetivos finais para o sistema.

Modularidade

De um modo geral qualquer programa de elementos finitos, pode ser encarado como um processo de solução para uma certa classe de problemas do contínuo. Neste processo de solução existem diversos procedimentos para gerar a geometria, calcular as matrizes de comportamento dos elementos, montagem do sistema global, solução deste, etc. Partes desses procedimentos são inerentes ao problema físico em questão, ou seja, dependente do meio onde se situa o domínio e dependente do princípio físico que rege o fenômeno. Outras partes podem ser classificadas como inerentes ao Método de Elementos Finitos propriamente dito, como as necessárias para resolver o sistema final de equações simultâneas, para manipulação de informações, etc. As partes que são inerentes ao procedimento, podem ser usadas em qualquer tipo de problema do mesmo formato, que seja resolvido por elementos finitos. Por outro lado, as partes que dependem do meio já são de uso restrito a classes de problemas de interesse para esse meio.

A constatação do fato de que o processo de resolução de diferentes classes de problemas por elementos finitos

possui inúmeras partes operacionais comuns, leva naturalmente ao conceito de modularidade do sistema, de forma a aproveitar as mesmas partes comuns do programa, em diferentes problemas. Em uma arquitetura de programação deste tipo, onde se deseja o maior uso possível de partes comuns, a menor unidade em que o processo pode ser dividido é o módulo.

Um módulo pode ser então definido como um conjunto estanque de subrotinas ou funções, programado para executar uma tarefa específica. Esta programação é realizada sem ter em vista a resolução de um problema específico, mas sim a possibilidade de ser empregado em qualquer tipo de problema cujo processo de solução requer esse tipo de tarefa.

A constituição modular do sistema permite que este apresente uma grande flexibilidade, tanto no que diz respeito à inclusão de novas formulações como permite um desenvolvimento em paralelo de diferentes módulos, respeitando apenas a estrutura de armazenamento de dados. Permite ainda que outros módulos sejam usados em determinados problemas, quando são mais eficientes do que outros.

Expansibilidade

A estrutura modular do sistema permite que este seja facilmente expandido para o uso de diferentes elementos, dentro da mesma classe de problemas. A expansão para o uso de outras técnicas numéricas fica também bastante facilitada. Em uma pesquisa mais avançada, o sistema pode servir de suporte para o desenvolvimento de novos métodos de análise de problemas da Mecânica dos Meios Contínuos, diverso do Método de Elementos Finitos, usando porém as suas vantagens, procurando eliminar as desvantagens.

Confiabilidade

A margem de que erros de lógica passem de uma forma despercebida fica bastante restrita, já que sendo os módulos estanques, estes podem ser facilmente testados e verificados, reduzindo assim o trabalho de depuração do programa.

Portabilidade

O sistema está sendo desenvolvido de forma a possibi-

litar o uso em computadores de médio porte, com capacidade de memória interna da ordem de 200 k bytes. Deste modo o sistema é portátil, no sentido em que pode ser facilmente instalado em praticamente qualquer equipamento de computação cuja capacidade seja ao menos a citada. Outro fator que permite esta portabilidade é que todo o sistema está programado em FORTRAN IV, linguagem disponível em praticamente todos os computadores de porte.

Refino de precisão

O Método de Elementos Finitos é um processo numérico onde existem diversas fontes de erros, que fazem com que o resultado obtido não seja exatamente a solução do problema. Uma das fontes de erro é a aproximação feita para a variável incógnita pelas funções de interpolação, dentro do domínio do elemento. Uma forma usual de melhorar os resultados é o refino da malha, que leva, no limite, à solução exata. Tal no entanto é um processo extremamente trabalhoso, pois é necessário que parte dos dados referentes à conectividade e coordenadas sejam refeitos. O sistema aqui apresentado usa elementos de segunda geração [9], os quais permitem alterar o grau de aproximação da solução sem alterar a malha de elementos finitos. O processo utilizado é de permitir que um dado elemento possa usar funções de interpolação de ordem maior, pelo uso de parâmetros não nodais, os quais são depois eliminados por uma compactação da(s) matriz(es) do elemento. O usuário do programa pode especificar a ordem da função de interpolação, em cada elemento, para cada uma de suas dimensões.

Flexibilidade

A estrutura do programa permite que este seja facilmente modificado ou adaptado para trabalhar com outros meios, bem como permite uma mudança na técnica de solução de uma forma bastante simples. Outro aspecto da flexibilidade é o que diz respeito aos formatos disponíveis para o relatório dos resultados que pode ser especificado pelo usuário, como quais as informações que devem constar ao nível de cada elemento.

Didatismo

Uma das finalidades do sistema é o ensino do Método de Elementos Finitos. Desta forma o sistema procura ser o mais didático possível, o que com a modularização permite a identificação imediata dos diversos passos de processamento inerentes ao método.

A programação é feita também com esta preocupação, sendo a sofisticação desta, feita de uma maneira progressiva. Assim, nas primeiras partes do programa, onde o volume de informações a manipular não é muito elevado, é usada uma maneira simples de trabalhar com os arquivos onde são mantidos os dados ou resultados intermediários. Conforme o volume de informações aumente, o uso da memória principal deve ser otimizado e assim a estrutura de uso dos arquivos e buffers passa a ser mais complexa. Deste modo o aluno vai se inteirando da forma de programação exigida por um sistema de grande porte.

Macro-programação

A característica de macro-programação consiste em permitir, através dos cartões de dados, definir o conjunto de módulos que constituirão o procedimento de ser processado. Isto permite ao usuário definir os módulos do sistema necessários à solução de seu problema, bem como facilita a preparação dos dados, desde que de forma coerente.

Compactabilidade

A propriedade de compactabilidade de um sistema se torna importante quando se deseja, a partir dos módulos ou subrotinas do sistema, obter um programa de aplicações específicas. Algumas vantagens destes programas, são a de que requerem uma confecção de dados mais simples, bem como possuem um tempo de processamento bastante inferior do que seria consumido com o uso do sistema geral.

Elementos cópia

Uma outra característica do sistema que permite reduzir o tempo de execução de um problema, consiste em tirar proveito da existência de elementos com igual configuração

geométrica e de carregamentos volumétricos (gradientes térmicos ou força de massa). Para isto, informações adequadas devem ser fornecidas para definir quais são os elementos bases e quais são os elementos cópias, bem como de que elementos esses são cópias. A economia de tempo decorre do fato de que esses elementos tem a mesma matriz de rigidez e os mesmos vetores de forças equivalentes devido aos carregamentos volumétricos.

4. Fase inicial do sistema

O sistema está sendo atualmente desenvolvido para solução de problemas elasto-estáticos e condução de calor em regime permanente, admitindo ambas propriedades dos materiais variáveis ponto a ponto. Devido à modularidade, toma-se quase que de imediato a extensão a outros tipos de problemas do Formato (1), como por exemplo, para fenômenos regidos pela equação de Helmholtz. Para isso, a biblioteca de elementos está sendo inicialmente dimensionada para comportar:

- a. família de elementos volumétricos: hexaedros de 32, 20 e 8 nós, sólidos de revolução de 4 e 8 nós.
- b. família de elementos bidimensionais: placas e cascas de 4, 8 e 12 nós e cascas de revolução de 2 a 4 nós.
- c. família de elementos uni-dimensionais: hastes e vigas retas e curvas, tubos pressurizados retos e curvos.

As pesquisas programadas para um futuro próximo se concentrarão em funções de interpolação adicionais e alternativas para a análise de precisão, e novas formulações para elementos de casca, incluindo cascas espessas, através de formulações mais elaboradas baseadas na Teoria de Cascas. Paralelamente, o sistema será ampliado para permitir análise dinâmica de problemas do contínuo, através da análise modal e procedimentos iterativos.

5. Conclusões

Devido ao fato de que o emprego do Método de Elementos Finitos tem sido aplicado a uma gama de problemas cada vez mais ampla, e que os sistemas disponíveis são aplicá-

D-000

veis a alguns tipos de problemas da Mecânica dos Meios Contínuos, surge então a necessidade de se dispor de pessoas e de infraestrutura computacional adequada à análise e programação de novos sistemas para resolver problemas que não podem ser resolvidos pelos sistemas disponíveis. Esses sistemas, obviamente, não devem ser unicamente orientados para a solução de problemas técnicos, mas também propiciar, como ferramenta, pesquisas em áreas do contínuo.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem à Financiadora de Estudos e Projetos - FINEP, e à Comissão Nacional de Energia Nuclear - CNEN, que deram suporte para a realização do trabalho.

Bibliografia

- [1] Abdulrahman, H.O., ISA, Iterative stress analysis University of Illinois Report, UILU - Eng-76-2028.
- [2] Alves, D.B., Programa Analisador de Sistemas Estruturais, III COBEM, Rio de Janeiro, pp. 1067-1078, (1975).
- [3] Bathe, K.J.; Wilson, E.L., Numerical methods in finite element analysis, Prentice Hall, (1976).
- [4] Cook, W.A., Ingen: A general purpose mesh generator for finite element codes. Los Alamos Scientific Laboratory report LA-7135-MS.
- [5] Drysdale, W.H.; Zak, A.R., Structural problems in thick shell. Thin shell structures, Ed. by Y.C. Fung and E.E. Sechler, Prentice Hall (1974).
- [6] Ferrante, A.J., The Lorane system, Chapter 13 in the finite element technique, Ed. by Brebbia, C.A. Ferrante, A.J.; UFRGS (1975).

- [7] Jones, Jr. R.F., A curved finite element for general thin shell structures. Nuclear Engineering and Design 48(1978), 415-425.
- [8] Nagy, D.A., Software engineering for finite element analysis, Journal of the Structural Division, ASCE, August, (1978), pp. 1287-1298.
- [9] Szabo, B.A., A second generation finite element computer program for stress analysis. 3rd. Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, London (1975) - North Holland.
- [10] Zienkiewicz, O.C., The finite element method, McGraw-Hill (1977).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-07

P.P. 088 - 098

PROYECTO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS QUE PRESENTAN
GRANDES DEFORMACIONES

Néstor Zouain

Prof. Assist. - Deptº de Eng. Mecânica
 PUC - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

José Herskovits

Prof. Assist. - Prog. de Eng. Mecânica
 COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

RESUMEN

Se plantea el problema de optimización de estructuras que presentan grandes deformaciones elásticas. Un método general de optimización de estructuras utilizando análisis no lineal es desarrollado a partir de un algoritmo de programación matemática y de un método iterativo de análisis por elementos finitos. Las ecuaciones generales son explicadas para el caso de un reticulado e implementadas en un programa con el cual se procesa una torre de transmisión. Los resultados muestran que el método es eficiente para estructuras de porte real.

ABSTRACT

The problem of structural optimization involving large elastic deformations is established. This paper presents a general approach for solving this problem, developed on a mathematical programming algorithm and also using an iterative method for non-linear structural analysis by finite element method. The general equations obtained are developed for pin jointed trusses and a numerical example is treated. The results obtained, together with those obtained when linear analysis is done, show that the method is efficient for actual size structures.

1. Introducción

El proyecto de estructuras eficiente ha merecido bastante atención en los últimos años [1-3]. Proyectar estructuras es entendido como la determinación de ciertas variables de proyecto de la estructura (p.ej. áreas transversales de barras en reticulados o espesores en membranas). Un proyecto será mas eficiente cuando el valor de su función de mérito (p.ej. peso e costo) sea mejor y resultará óptimo cuando esta función presente un mínimo. Es claro que los valores posibles para las variables de proyecto deben satisfacer restricciones que provienen de los criterios de resistencia utilizados en el análisis de la estructura (p.ej. verificación de tensiones y desplazamientos comparados con valores admisibles).

Definimos así nuestro concepto de proyecto como un proceso iterativo de optimización que se vale del análisis estructural para verificar cada diseño tentativo.

Varios trabajos [1-3] presentan formulaciones generales de métodos de optimización estructural utilizando análisis lineal, válido para pequeños desplazamientos y deformaciones así como comportamiento físico lineal del material. En éstos se encuentran descripciones mas extensas de la optimización estructural.

En este trabajo presentamos los conceptos básicos necesarios para desarrollar la formulación de un método general de optimización de estructuras con grandes desplazamientos y deformaciones. Esta formulación se hace en la sección 2 y en la 3 es aplicada a estructuras reticuladas. Una torre de transmisión es procesada como ejemplo en la sección 4.

2. Formulación del método

De acuerdo al concepto de proyecto mencionado, llamamos: \underline{A} al vector de variables de proyecto, $P(\underline{A})$ a la función de mérito y $c_j(\underline{A}) \leq 0$, $j=1, \dots, R$ a las restricciones (evaluadas en el análisis estructural). El problema a resolver es:

$$\text{Minimizar } P(\underline{A}) \quad (2.1.a)$$

$$\text{para } \underline{A} \text{ tal que } c_j(\underline{A}) \leq 0 \quad j=1, \dots, R \quad (2.1.b)$$

El método de programación matemática que vamos a utilizar es el de las referencias [4,5]. Este algoritmo produce una mejor aproximación \underline{A}^{v+1} del óptimo del problema (2.1) cuando conocidas la aproximación anterior \underline{A}^v y los valores de P , $\partial P / \partial \underline{A}$, \underline{c} , $\partial \underline{c} / \partial \underline{A}$ en \underline{A}^v . Si el algoritmo converge el vector \underline{A} obtenido satisface las condiciones de Kuhn-Tucker para un mínimo local.

Debemos entonces mostrar como efectuar el cálculo de las restricciones y sus derivadas cuando el análisis es no lineal.

El análisis de la estructura se realiza por el método de elementos finitos, siendo \underline{U} el vector de desplazamientos nodales elegido.

El principio de trabajos virtuales puede ser escrito de varias formas [6-8] dependiendo de la configuración de referencia para tensiones y deformaciones y del referencial utilizado. Las formulaciones más usadas son la Lagrangeana actualizada y Lagrangeana total. Si bien esta elección determina las ecuaciones básicas, es irrelevante en cuanto todas proporcionan idénticos resultados y podrán ser utilizadas indistintamente.

La ecuación constitutiva que vamos a considerar es de tipo elástico lineal, aunque esto no restringe la formulación del método y solamente implica que el método de Newton para el análisis no lineal resulta eficiente y no se hace necesario la aplicación incremental de cargas y técnicas de mejoramiento de convergencia.

De acuerdo a la discretización establecida y a la formulación y ecuación constitutiva elegidas, el principio de trabajos virtuales proporciona la ecuación en \underline{U} para el equilibrio [6,8]:

$$\underline{R} - \underline{F} = 0 \quad (2.2)$$

en que \underline{R} es el vector de cargas nodales equivalente a las cargas externas y \underline{F} es el vector de cargas nodales equivalente a las tensiones asociadas a \underline{U} .

Es evidente que \underline{F} depende solo de \underline{U} cuando la estructura está completamente determinada. Aquí vamos a conside

rar la función $\underline{F} = \underline{F}(\underline{A}, \underline{U})$ que evalúa las fuerzas internas para cualquier estructura y desplazamiento.

Las cargas externas \underline{R} frecuentemente son constantes pero aquí vamos a trabajar con la hipótesis mas general: $\underline{R} = \underline{R}(\underline{A})$.

La ecuación (2.2) puede ser utilizada directamente cuando se considera un análisis lineal. Para el análisis no lineal se escribe el principio de trabajos virtuales en la forma incremental [6], obteniéndose:

$$(K_L + K_{NL}) \underline{\Delta U}^k = \underline{R} - \underline{F}^{k-1} \quad (2.3)$$

en que $\underline{\Delta U}^k = \underline{U}^k - \underline{U}^{k-1}$; \underline{F}^{k-1} es el vector de cargas equivalentes a las tensiones producidas por \underline{U}^{k-1} , y K_L y K_{NL} son matrices de rigidez lineal y no lineal evaluadas para el desplazamiento \underline{U}^{k-1} .

La igualdad (2.3) produce una iteración del método de Newton para la ecuación (2.2) ya que:

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} = K_L + K_{NL} \quad (2.4)$$

Para cada estructura \underline{A} existe una deformación \underline{U}^* correspondiente al equilibrio. Sean entonces las funciones $\underline{U} = \underline{U}^*(\underline{A})$ y $\underline{F} = \underline{F}^*(\underline{A}) = \underline{F}(\underline{A}, \underline{U}^*(\underline{A}))$. En consecuencia:

$$\underline{R}(\underline{A}) - \underline{F}^*(\underline{A}) \equiv 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \underline{A}_i} (\underline{R}(\underline{A}) - \underline{F}^*(\underline{A})) = 0$$

$$\frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{A}_i} - \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{A}_i} - \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial \underline{A}_i} = 0$$

y aplicando (2.4) resulta

$$(K_L + K_{NL}) \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial \underline{A}_i} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{A}_i} - \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{A}_i} \quad (2.5)$$

Este sistema de ecuaciones lineales permite calcular las derivadas de los desplazamientos, una vez conocidos los desplazamientos para un diseño $\underline{\Lambda}$ determinado de la estructura.

En cada elemento estructural puede ser definida una o varias tensiones características $\bar{\sigma}$ que serán utilizadas para verificar si la estructura soporta tensiones inferiores o superiores a la admisible. El valor de estas tensiones resulta de la evaluación de una función no lineal de \underline{U} :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\underline{U}) \quad (2.6)$$

consecuencia de la ecuación constitutiva y de las funciones de interpolación elegidas.

La derivación en relación a Λ_i de (2.6) permite calcular

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Lambda_i} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial \Lambda_i} \quad (2.7)$$

Un método de optimización que realiza análisis no lineal de la estructura puede ser esquematizado como sigue:

- 1- Assumir una estructura inicial $\underline{\Lambda}^0$.
- 2- $v=1$, comienzan las iteraciones de minimización.
- 3- Asumir un desplazamiento inicial \underline{U}^0 (p.ej. obtenido por análisis lineal).
- 4- Calcular \underline{R} , $\frac{\partial \underline{R}}{\partial \Lambda_i}$, $i=1, \dots, N$.
- 5- $k=1$, comienzan las iteraciones del método de Newton.
- 6- Calcular \underline{F}^{k-1} , K_L y K_{NL} .
- 7- Calcular $\underline{\Delta U}^k$ resolviendo $(K_L + K_{NL}) \underline{\Delta U}^k = \underline{R} - \underline{F}^{k-1}$.
- 8- $\underline{U}^k = \underline{U}^{k-1} + \underline{\Delta U}^k$.
- 9- Si $\| \underline{\Delta U}^k \| > \epsilon_U$. $\| \underline{U}^{k-1} \|$ incrementar k y volver a 6.
- 10- Calcular $\frac{\partial \underline{F}}{\partial \Lambda_i}$, $i=1, \dots, N$.
- 11- Calcular $\frac{\partial \underline{U}^*}{\partial \Lambda_i}$, $i=1, \dots, N$.

$$\text{resolviendo } (K_L + K_{NL}) \frac{\partial U^*}{\partial \bar{A}_i} = \frac{\partial R}{\partial \bar{A}_i} - \frac{\partial F}{\partial \bar{A}_i} .$$

$$12- \text{ Calcular } \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(U) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{A}_i} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial U} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial \bar{A}_i} \quad , \quad i=1, \dots, N.$$

13- Calcular el valor de las restricciones \underline{c} :

$$c_j = \frac{|U_n|}{U_n^{\text{adm}}} - 1 \quad \text{en que } n \text{ es un índice que recorre los}$$

grados de libertad limitados por valores admisibles.

$$c_\ell = \frac{|\bar{\sigma}_m|}{\sigma_m^{\text{adm}}} - 1 \quad , \quad m=1, \dots, M \quad , \quad \text{en que } M \text{ es el número}$$

de elementos finitos.

14- Calcular el valor de la matriz de derivadas de las res-

tricciones $\frac{\partial \underline{c}}{\partial \bar{A}}$; utilizando

$$\frac{\partial c_j}{\partial \bar{A}_i} = \frac{Sg U_n}{U_n^{\text{adm}}} \cdot \frac{\partial U_n^*}{\partial \bar{A}_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial c_\ell}{\partial \bar{A}_i} = \frac{Sg \bar{\sigma}_m}{\sigma_m^{\text{adm}}} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_m}{\partial \bar{A}_i} \quad \text{para } i=1, \dots, N.$$

15- Calcular P y $\frac{\partial P}{\partial \bar{A}}$.

16- Utilizando \bar{A}^v , P , $\frac{\partial P}{\partial \bar{A}}$, \underline{c} , y $\frac{\partial \underline{c}}{\partial \bar{A}}$ realizar una iteración del algoritmo de optimización calculando un nuevo valor \bar{A}^{v+1} del vector de proyecto.

17- Si la estructura no satisface los criterios de optimalidad, incrementar v y volver a 4 tomando como valor inicial U^0 para Newton la previsión lineal

$$(U^*)^v + \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{A}} \right)^v \cdot (\bar{A}^{v+1} - \bar{A}^v)$$

3. Aplicación a estructuras de barras biarticuladas

Como ejemplo de aplicación del método expuesto consideremos una estructura reticulada compuesta por barras biarticuladas de sección constante.

Cada variable de proyecto A_i es el área transversal de un conjunto de barras que constituyen un grupo de union. La función de mérito es el peso $P = \sum \gamma_j L_j A_j$. Los vecto-

res \underline{X} y \underline{U} están constituidos por las coordenadas nodales en la configuración deformada y los desplazamientos de los nodos en el sistema cartesiano global. El vector \underline{R} contiene las componentes de cargas externas en esas direcciones generalizadas, para cada estado de carga a que la estructura es sometida.

Vamos a establecer las expresiones necesarias para la aplicación del método a partir de una formulación Lagrangeana actualizada [6].

Para una barra j de extremos P_j y Q_j la tensión es calculada según la ecuación constitutiva lineal

$$\sigma_j = E \frac{L_j - L_j^0}{L_j^0} \quad (3.1)$$

donde $L_j = \left[\sum_{m=1}^3 (X_{3Q_j+m-3} - X_{3P_j+m-3})^2 \right]^{1/2}$, L_j^0 la longitud inicial y E el módulo de Young.

El vector de fuerzas internas \underline{F} resulta de sumar convenientemente

$$\underline{f}^j = A_i \sigma_j \{-\ell_1^j \quad -\ell_2^j \quad -\ell_3^j \quad \ell_1^j \quad \ell_2^j \quad \ell_3^j\}^T \quad (3.2)$$

para todos los elementos. Siendo que A_i es el área del grupo a que la barra j pertenece, y

$$\ell_m^j = \frac{X_{3Q_j+m-3} - X_{3P_j+m-3}}{L_j}, \quad m=1,2,3$$

La matriz de rigidez tangente es calculada sumando convenientemente $K_L^j + K_{NL}^j$ para todos los elementos. Siendo que

$$K_L^j = (T^j)^T \cdot \bar{K}_L^j \cdot T^j \quad \text{con} \quad \bar{K}_L^j = \frac{EA_i}{L_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$T^j = \begin{bmatrix} \ell_1^j & \ell_2^j & \ell_3^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell_1^j & \ell_2^j & \ell_3^j \end{bmatrix}$$

$$\text{y con } K_{NL}^j = \frac{A_i \sigma_j}{L_j} \begin{bmatrix} I_3 & -I_3 \\ -I_3 & I_3 \end{bmatrix} \quad (I_3 \text{ identidad } 3 \times 3).$$

El vector $\frac{\partial F}{\partial A_i}$ se obtiene sumando apropiadamente

$$\frac{\partial f^j}{\partial A_i} = \sigma_j \{-\ell_1^j \quad -\ell_2^j \quad -\ell_3^j \quad \ell_1^j \quad \ell_2^j \quad \ell_3^j\}^T$$

para todos los elementos del grupo i .

Finalmente notamos que la tensión característica $\bar{\sigma}_j$ solo puede ser definida como σ_j y que derivando (3.1) se tiene

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial A_i} = \frac{E}{L_j} \sum_{m=1}^3 \ell_m^j \frac{\partial}{\partial A_i} (U_{3Q_j+m-3} - U_{3P_j+m-3})$$

4. Optimización de una torre de transmisión

Como ejemplo de aplicación tratamos la minimización de peso de la torre de la Figura 1 que sometida a dos estados de carga diferentes debe presentar tensiones en las barras y desplazamientos en las juntas menores que los valores admisibles dados.

Este problema ya fue tratado, con un modelo lineal de la estructura, por varios autores [2] y utilizado para comparar la eficiencia de diferentes algoritmos de optimización. Aquí servirá también para comparación aun cuando nuestra estructura final no debe coincidir puesto que es calculada mediante análisis no lineal.

El método de que trata este trabajo fue implementado en el programa AUTOR-NL, versión no lineal del programa de optimización de estructuras reticuladas AUTOR que utiliza el esquema de optimización de las referencias [3-5]. El problema propuesto fue procesado en ambos programas.

Las 25 barras de la torre están agrupadas en 8 grupos de unión definidos en la tabla 1.

Los dos estados de carga aplicados son los siguientes
 Carga 1: $R(1Y)=R(2Y)=10000.\text{lb}$, $R(1Z)=R(2Z)=-5000.\text{lb}$,
 $R(3X)=R(6X)=500.\text{lb}$, $R(1X)=1000.\text{lb}$

Carga 2: $R(1Y)=-R(2Y)=20000.\text{lb}$, $R(1Z)=R(2Z)=-5000.\text{lb}$

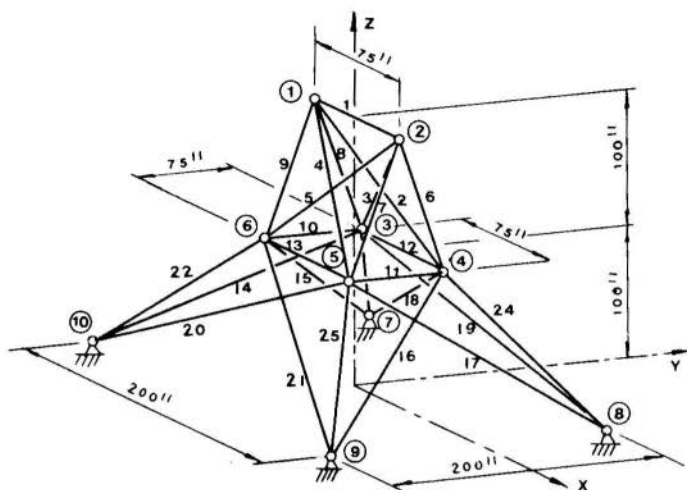


Figura 1. Torre de transmisión de 25 barras

Variable de proyecto	Elementos	Tensiones adm. de compresión. (psi)
1	1	35092.
2	2 3 4 5	11590.
3	6 7 8 9	17305.
4	10 11	35092.
5	12 13	35092.
6	14 15 16 17	6759.
7	18 19 20 21	6759.
8	22 23 24 25	11082.

TABLA 1. Grupos de unión y tensiones admisibles en compresión

Las propiedades materiales son $E = 10^7$ psi y $\gamma = 0.1$ lb/in³.

Los desplazamientos son limitados por 0.35 in para todos los nodos.

Las tensiones son limitadas por 4×10^4 psi para barras traccionadas y por los valores de la tabla 1 para las comprimidas. Estos valores son los usados por Schmit [2] para incluir efectos de pandeo. Aqui son utilizados para mantener coherencia en la comparaci3n aun cuando el programa AUTOR tiene otros medios mas adecuados para considerar la inestabilidad local.

Las 3reas iniciales son todas 2 in^2 y las m3nimas 0.01 in^2 .

A efecto de aumentar la no linealidad, el problema anterior (problema 1) es modificado duplicando las cargas (problema 2) y triplicando (problema 3). Los resultados estan en la tabla 2.

Variable de proyecto	Problema 1		Probl.2	Probl.3	
	An3lisis lineal		An3lisis no lineal		
	ACCESS1	AUTOR	AUTOR-NL		
1	0.010	0.010	0.035	0.010	0.037
2	1.985	1.953	1.944	2.786	5.796
3	2.996	2.991	2.915	6.727	8.959
4	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
5	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
6	0.684	0.694	0.799	1.282	1.541
7	1.667	1.709	1.762	4.669	5.180
8	2.662	2.643	2.555	4.769	3.589
Peso	545.17	545.35	548.60	1119.0	1364.5

TABLA 2. 3reas (in^2) y pesos (lb) finales

5. Conclusiones

El m3todo propuesto parece requerir un esfuerzo computacional no mucho mayor que el correspondiente a esquemas de optimizaci3n que utilizan an3lisis lineal. Sin embargo el tipo y tama3o de la estructura pueden tener mayor influencia cuando se tratan problemas no lineales.

Cabe mencionar que en los ejemplos procesados el n3mero medio de iteraciones Newton es 2 (para $\epsilon_{ij}=0.01$), 3sto debido a la elecci3n hecha de desplazamientos iniciales.

Obviamente otros planteos del mismo problema tratado aqui son posibles. Uno particularmente atrayente es la mi nimizaci3n de la funci3n de m3rito sujeta a las restricciones de desplazamiento, tensi3n y compatibilidad (m inimo de la energia potencial) para un vector de variables ampliado con los desplazamientos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Venkayya, V.B., "Structural Optimization, a Review and Some Recommendations", Int. J. for Numerical Met. in Engineering, Vol. 13, pp.203-228, (1978).
- [2] Schmit, L. e Miura, H., "Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis", NASA CR-2552, (1976).
- [3] Herskovits, J., "Un sistema autom3tico de proyecto de estructuras 3ptimas", Tesis M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1976).
- [4] Zouain, N., "Un algoritmo de optimizaci3n para proyecto de estructuras de gran porte", Tesis de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1976).
- [5] Segenreich, S., Zouain, N., Herskovits, J., "An Optimality Criteria Method Based on Slack Variables Concept for Large Structural Optimization", Symp. on Applications of Computer Met. in Engineering, Los Angeles, USA, (1977).
- [6] Ebecken, N., "LORANE-NL Uma Linguagem Orientada 3 An3lise Estrutural N3o-Linear", Tese D.Sc., COPPE/ /UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [7] Bathe, K. y Ozdemir, H., "Elastic-Plastic Large Deformation Static and Dynamic Analysis", Comp. and Struct., Vol. 6, pp. 81-92, (1976).
- [8] Stricklin, A., y Haisler, W., "Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis", Comp. and Struct., Vol. 7, pp.125-136, (1977).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO TÉCNOLÓGICO
 TECHNICAL PAPER

N.º DT-03

P. P. 099 - 107

GRAFO - UM SISTEMA PARA GERAÇÃO DE DESENHOS
VIA IMPRESSORA DE SAÍDA

Solly Andy Segenreich

Professor Associado - Dept. Eng. Mecânica
 PUC/RJ - Rio de Janeiro, Brasil

Jayme Pereira de Gouvêa

Aluno de Mestrado - Dept. Eng. Mecânica
 PUC/RJ - Rio de Janeiro, Brasil

Marcellus Geraldo de Araújo

Aluno de Mestrado - Dept. Eng. Mecânica
 PUC/RJ - Rio de Janeiro, Brasil

SUMÁRIO

O presente trabalho apresenta um sistema para a geração de desenhos de estruturas reticuladas utilizando a impressora de saída. O sistema apresentado permite a geração de perspectivas cônicas, cortes ou vistas ortogonais. A entrada de dados é compatibilizada com os dados de entrada de vários programas comerciais.

SUMMARY

The present work presents a computer program which uses the line printer to generate drawings of bar type structures. The user may obtain either conical or orthogonal views. Cuts by arbitrary planes may be generated too. The input data format is compatible with the input of several comercial programs on structural analysis.

1. Introdução

A representação gráfica de uma estrutura à partir dos dados geométricos fornecidos a um programa de análise ou de síntese estrutural, serve a uma dupla finalidade. Primeiro, é uma rápida e conveniente forma de checar a consistência dos dados de entrada no que diz respeito à geometria. Segundo, é uma forma de embelezar os relatórios finais de cálculo.

Normalmente, utiliza-se o "plotter" para tal finalidade de sendo que a maioria dos programas de análise estrutural de uso comercial, tem pré-processadores que geram fitas para a alimentação do "plotter".

Se bem que os desenhos gerados pelo "plotter" são de elevada qualidade, sua utilização é geralmente cara e demorada. Neste sentido, torna-se atraente a utilização da própria impressora de saída para a geração dos desenhos, o que é simples, barato e veloz.

O sistema GRAFO objeto deste trabalho, representa a generalização de um sistema gráfico para impressora de saída, baseado num sistema mais simples anteriormente desenvolvido e que está incorporado aos programas AUTOBAR e AUTOMIN [1], [2], [3], [4]. Outro esforço neste sentido é dado em [5].

O programa GRAFO apresentado neste trabalho, gera perspectivas cônicas, cortes ou vistas de estruturas reticuladas. Tanto o plano de projeção como os planos de corte ou a localização do ponto de vista são arbitrários.

O programa tem sua entrada de dados compatibilizada com os programas AUTOBAR, EASE2, STARDYNE e AUTOMIN e representa um esforço no sentido de prover o mercado com "software" de tecnologia nacional.

2. Perspectiva e Rebatimento

O programa GRAFO utiliza para representação gráfica das figuras a perspectiva cônica. Assim, define-se um plano de projeção e um ponto de vista. O plano de projeção passa sempre pela origem e tem sua direção arbitrária. A localização do ponto de vista é arbitrária também.

Seja P_0 o ponto de vista com coordenadas (x_0, y_0, z_0) e A o ponto de coordenadas (x, y, z) que queremos projetar sobre o plano de projeção π .

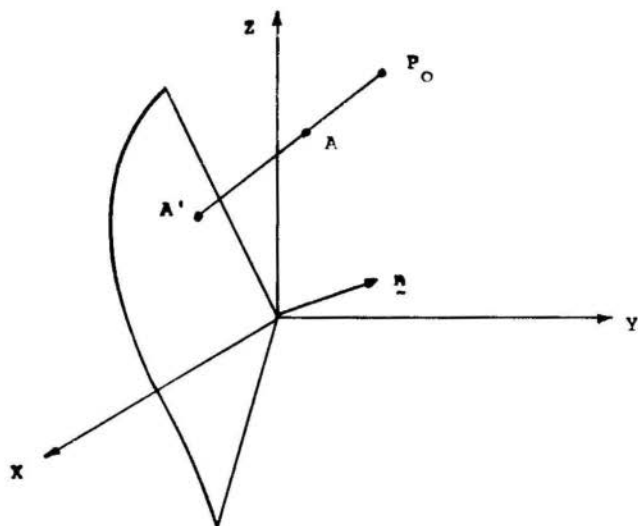


Fig. 2.1. Obtenção gráfica da projeção A' do ponto A

O plano de projeção π é dado pelas coordenadas (a, b, c) de sua normal. Assim, qualquer ponto pertencente ao plano π satisfaz a equação

$$ax' + by' + cz' = 0 \quad (2.1)$$

A projeção A' é obtida pela interseção da reta $\overline{AP_0}$ com o plano π .

Formalmente,

$$\begin{aligned} x' &= \{x_0 [b(y-y_0) + c(z-z_0)] + (by_0 + cz_0)(x-x_0)\}.K \\ y' &= \{y_0 [a(x-x_0) + c(z-z_0)] + (ax_0 + cz_0)(y-y_0)\}.K \\ z' &= \{z_0 [a(x-x_0) + b(y-y_0)] + (ax_0 + by_0)(z-z_0)\}.K \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

$$K = |a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)|^{-1}$$

A expressão

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) \quad (2.3)$$

não pode ser nula o que significa que a reta projetante $\overline{P_0A}$ não deve ser paralela ao plano projetante π . Isto sempre é possível mediante uma conveniente escolha do ponto de vista P_0 .

No caso de estruturas reticuladas basta obter a projeção dos nós da estrutura já que a projeção dos membros é obtida ligando simplesmente a projeção dos nós.

Assumiremos, convencionalmente, que o plano xy é o plano do papel com os eixos x e y paralelos, respectivamente, às margens horizontal e vertical. Para podermos reproduzir graficamente a perspectiva, devemos, então, rebater o plano π sobre o plano xy .

Adicionalmente, assumiremos que o observador está "em pé" sobre o plano xy . Isto significa que o traço do plano π com o plano xy deve aparecer paralelo ao eixo x . Para tanto, antes do rebatimento, devemos efetuar uma rotação do plano π em torno do eixo z até que a normal \overline{OP}_n pertença ao plano yz . Seja θ o ângulo desta rotação.

A rotação θ , seguida do rebatimento, por hipótese β , são mostrados na figura 2.2.

Analiticamente, as duas rotações são representadas pelo produto das matrizes R_1 e R_2 , onde

$$R_1 = \begin{bmatrix} -\frac{y_n}{D_1} & -\frac{x_n}{D_1} & 0 \\ \frac{x_n}{D_1} & \frac{y_n}{D_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_n}{D_2} & \sqrt{1 - \left(\frac{z_n}{D_2}\right)^2} \\ 0 & -\sqrt{1 - \left(\frac{z_n}{D_2}\right)^2} & \frac{z_n}{D_2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$D_1 = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

$$D_2 = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}$$

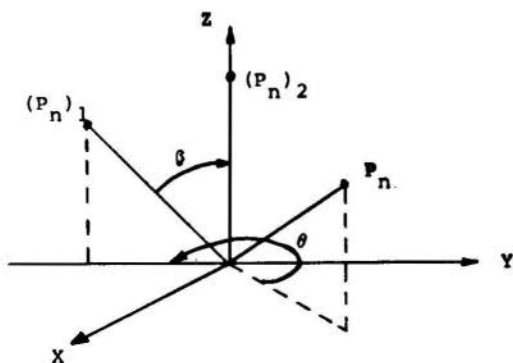


Fig. 2.2. Rotações da normal ao plano π para fazê-lo coincidir com o plano xy

A transformação de coordenadas dos pontos da perspectiva será dada por

$$\begin{Bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{Bmatrix} = R_2 \cdot R_1 \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

No caso especial em que o plano π coincide com o plano xy ($D_1=0$), nenhuma rotação é necessária.

3. Cortes e Vistas

Muitas vezes é conveniente obter cortes ou vistas da estrutura.

O caso de corte é tratado da seguinte maneira:

- a- Define-se o plano de corte que pode ser geral não passando, necessariamente, pela origem.
- b- Define-se uma "semi-espessura" ϵ do plano de corte.
- c- Efetua-se as rotações $R=R_2R_1$ sobre todos os pontos (nós) que estão situados no interior da faixa de espessura 2ϵ , ignorando os pontos que estão fora da faixa.

O caso de vistas da estrutura é um caso particular de cortes em que ϵ é escolhido de forma a abranger toda a estrutura, obtendo-se assim a vista desejada.

4. Geração dos Desenhos

Os desenhos são gerados mediante a impressão de pontos através da impressora de saída. Este processo é feito usando-se formulários contínuos normais.

Devido à baixa resolução do processo, uma única página do formulário pode ser insuficiente para uma clara apresentação do desenho. Para contornar este inconveniente, o processo GRAFO permite a geração do desenho sobre um reticulado de páginas do formulário contínuo. A figura 3.1 exemplifica esta situação.

1	3	5
2	4	6

Fig. 3.1. Reticulado de páginas do formulário contínuo para a geração de desenhos.

O usuário fornece os valores de l e h que são, respectivamente, o número de páginas na largura e o número de páginas na altura que comporão o desenho.

O desenho é impresso por colunas verticais da esquerda para a direita. Assim, na Fig. 3.1 as páginas são impressas na ordem indicada.

O desenho é automaticamente centralizado e a escala é automaticamente calculada de forma que a maior dimensão do desenho na vertical ou na horizontal ocupe integralmente o espaço disponível.

Seja n_l o número máximo de colunas por página e n_h o número máximo de linhas por página.

Definimos os fatores de escala e_l e e_h

$$e_l = \frac{ln_l}{(x_R)_{\max} - (x_R)_{\min}} \quad (4.1)$$

$$e_h = \frac{hn_h}{(y_R)_{\max} - (y_R)_{\min}}$$

A escala a ser usada deve ser menor entre e_l e e_h ($e = \min\{e_l, e_h\}$) para que o desenho não ultrapasse o espaço a ele reservado.

A aplicação da escala é dada pela equação abaixo

$$\bar{x} = e \cdot x_R \quad (4.2)$$

$$\bar{y} = e \cdot y_R$$

A operação final consiste na centralização do desenho. Isto é feito trasladando-se o centro do desenho em \bar{x} , \bar{y} para o ponto $(\frac{ln_l}{2}, \frac{hn_h}{2})$.

Assim, as coordenadas finais do desenho a ser impresso são dadas por

$$\begin{aligned} X &= \bar{x} + \left(\frac{ln_l}{2} - \bar{x}_m\right) \\ Y &= \bar{y} + \left(\frac{hn_h}{2} - \bar{y}_m\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$\bar{x}_m = \frac{\bar{x}_{\max} - \bar{x}_{\min}}{2}$$

$$\bar{y}_m = \frac{\bar{y}_{\max} - \bar{y}_{\min}}{2}$$

A impressão de cada página do desenho é feita mediante a geração de uma "matriz geométrica" G(I,J) de natureza alfanumérica que contém brancos e pontos.

O programa examina, para cada página, que pontos a ela pertencem gerando sua matriz geométrica. Em seguida, imprime a matriz da página passando para a seguinte.

Para maior facilidade de interpretação dos desenhos, o programa imprime, também, o número dos nós.

5. Entrada de Dados

Para uma máxima versatilidade e simplicidade do programa GRAFO, a entrada de dados foi compatibilizada com a entrada de dados geométricos dos programas AUTOBAR, EASE2, STARDYNE e AUTOMIN. Estes programas são de largo uso comercial integrando várias bibliotecas.

Além da entrada dos dados geométricos referentes às coordenadas nodais e incidência dos membros, o programa GRAFO tem cartões de comando próprio através dos quais informa-se a natureza da operação (perspectiva ou corte), a posição do plano de projeção, a posição do observador e, se for o caso, a espessura ϵ . Para maior simplicidade, todos estes dados são fornecidos num único cartão.

O programa GRAFO encontra-se disponível para uso público através da rede Cybernet da Control Data do Brasil.

6. Conclusões

O sistema GRAFO representa um esforço de desenvolvimento de "software" nacional. O sistema é econômico e dispensa a necessidade de "plotter" que é um equipamento caro e nem sempre disponível.

Futuros desenvolvimentos para a inclusão de elementos de tubulações e elementos finitos bi e tri-dimensionais estão em estudo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Segenreich, S.A., "AUTOBAR - Uma Alternativa para a Análise de Estruturas Reticuladas", I Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Dezembro 1977.
- [2] Segenreich, S.A., "Manual do Usuário AUTOBAR", Control Data do Brasil, 1977.
- [3] Segenreich, S.A., e Zouain, N., "AUTOMIN3 - Um Sistema Comercial para a Otimização de Treliças", II Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, CESP, São Paulo, Dezembro 1978, Ed. J. Ferrante.
- [4] Segenreich, S.A., "Manual do Usuário AUTOMIN", Control Data do Brasil, 1978.
- [5] Lima Torres, P.A., Groehs, A. e Creus, G., "Representação Gráfica de Estruturas Mediante o uso da Impressora", II Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, CESP, São Paulo, Dezembro 1978, Ed. J. Ferrante.



EFEITO DE MALHA EM PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS
MODELADOS POR ELEMENTOS FINITOS LINEARES

Nelson Back

Professor Titular - Depto. Eng. Mecânica
 CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Clovis Sperb de Barcellos

Professor Titular - Depto. Eng. Mecânica
 CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Sumário

No presente artigo é apresentada uma análise da precisão dos resultados calculados através de um programa de elementos finitos - Programa de Análise de Sólidos Axissimétricos - no qual é utilizado um elemento de revolução triangular com funções de interpolação lineares. Para esta análise usou-se um modelo de tubo de parede espessa, no qual foi considerado o efeito do tipo e tamanho de malhas sobre a convergência e precisão dos resultados. Os resultados obtidos permitem uma orientação no traçado da malha bem como uma melhor interpretação dos resultados calculados pelo programa.

Summary

This paper presents an analysis of the precision of the results obtained by a finite element programe, using an element of revolution with a triangular cross section adopting linear interpolation functions. For this analysis a thick walled tube with internal pressure was used and the effect of the mesh type and its size on the convergence of the results was considered. The results obtained give some orientation about the adequate mesh to be used and about the interpretation of the results of the programe.

1. Introdução

Em estruturas mecânicas, é frequente a ocorrência de peças de revolução submetidas a cargas e/ou gradientes térmicos axissimétricos. Para a análise de tais elementos estruturais, através de elementos estruturais, através de elementos finitos, é conveniente o uso de elementos de revolução, a fim de minimizar o número de elementos e de nós e de melhor aproximar a geometria da peça. Um programa, Análise de Sólidos Axissimétricos - ASAS, para a análise de tais problemas, foi elaborado [1], no qual são utilizados elementos de revolução triangular com funções de interpolação lineares [2] para descrever o campo de deslocamento. O processo adotado para a solução do sistema de equações é o de semi-banda, onde são evitadas as operações triviais [3].

Como este é o mais simples elemento sólido de revolução, ele apresenta sérias inconveniências para a aproximação dos campos de tensões [4] já que não aproxima de modo conveniente os gradientes de deslocamentos. Isto requer que os resultados obtidos sofram uma interpretação cuidadosa. Neste artigo são mostradas análises típicas dos resultados que devem ser feitas pelos usuários de programas que utilizam esse tipo de elemento.

2. Análise de convergência dos resultados do programa ASAS

Para a análise dos resultados de cálculo das tensões e deformações pelo programa ASAS, foi adotado o exemplo de um tubo de aço de parede espessa, de 50 mm de diâmetro interno e 110 mm de diâmetro externo, submetido à pressão interna de 10 kgf/mm². Estes resultados foram comparados com os teóricos, considerando um estado plano de deformações, com as seguintes equações:

$$\sigma_r = -p \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(\frac{r_o^2}{r^2} - 1 \right) \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = p \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(\frac{r_o^2}{r^2} + 1 \right) \quad (2)$$

$$\sigma_a = 2\mu p \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (3)$$

$$u_r = p \frac{r}{E} \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left[\frac{r_o^2}{r^2} (1 + \mu) + (1 - \mu) - 2\mu^2 \right] \quad (4)$$

onde σ_r , σ_θ , σ_a e u_r são respectivamente a tensão radial, tensão tangencial, tensão axial e o deslocamento radial num raio genérico r .

Para verificar o efeito do tipo e tamanho da malha de elementos finitos, sobre a convergência e precisão dos resultados, foram adotados, como mostra a figura 1, três tipos de malhas denominadas M-1, M-2 e M-3 e para cada um destes tipos foram ainda considerados de 3 a 4 refinamentos. O tamanho real das malhas pode ser verificado na figura 1 através das dimensões indicadas.

Analisando, agora, os resultados obtidos, tem-se primeiramente na figura 2, os deslocamentos radiais ao longo da espessura da parede para os três tipos de malhas e diferentes refinamentos. Como se verifica, para efeito da precisão de cálculo dos deslocamentos radiais comparados com os valores teóricos, o tipo de malha não apresenta apreciável diferenciação de resultados e até mesmo o tamanho da malha. A diferença entre os valores calculados e teóricos foi, para todos os modelos de malhas, muito pequena, chegando no máximo a erros de 1%.

Quanto às tensões, estas já não apresentaram uma correlação tão boa ao longo da espessura do tubo. Na figura 3a tem-se representados os valores calculados, das tensões nodais tangenciais do modelo M-3, comparados com os resultados teóricos da equação (2). Neste caso verifica-se um erro considerável no nó do raio interno e mesmo uma convergência bem lenta para o valor teórico, considerando o refinamento da malha. Nos demais nós, ao longo da espessura da parede, os resultados calculados apresentam-se bem próximos dos valores teóricos. Analisando os resultados calculados da tensão tangencial nodal, pode-se constatar que a tensão no nó

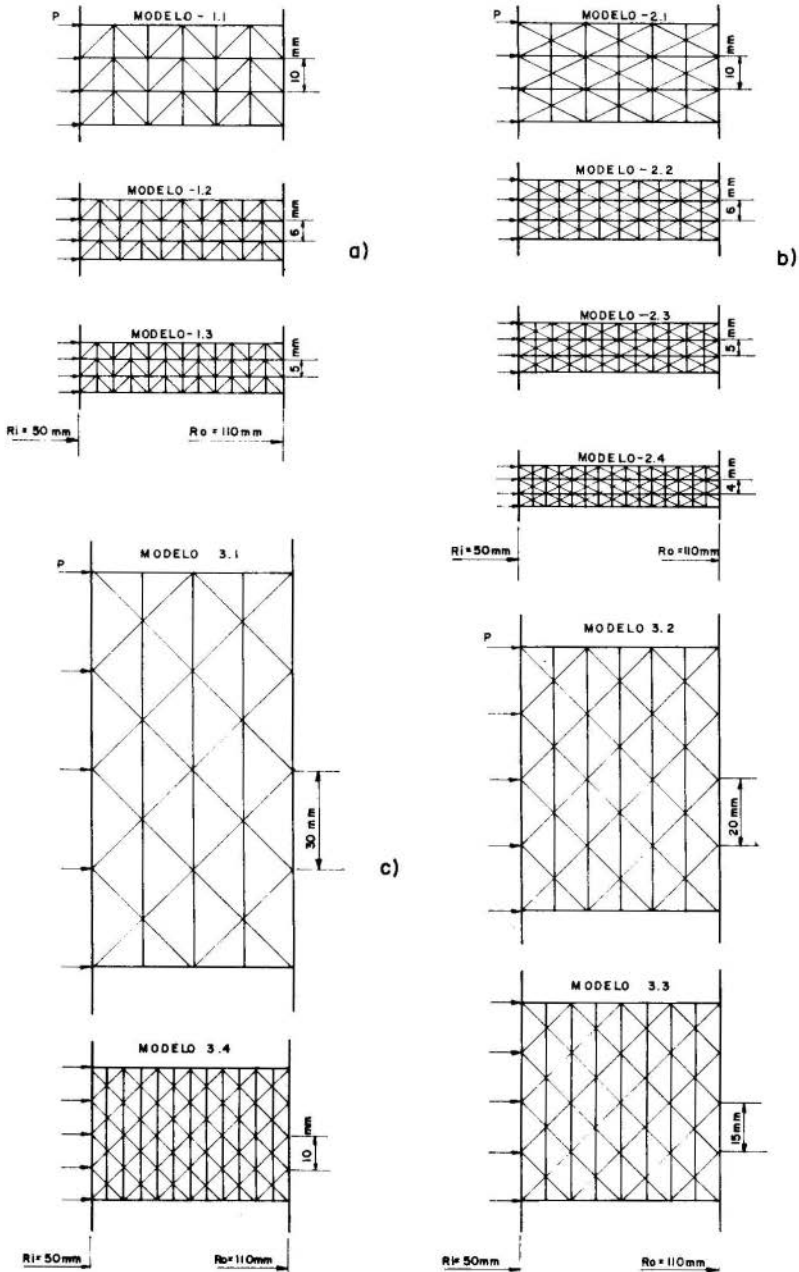


FIG. 1 - Malhas empregadas para verificação da convergência das tensões e deformações no tubo de parede espessa.

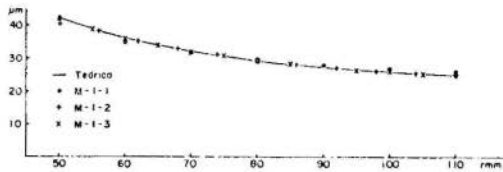


Fig. 2a - Deslocamento radial no tubo de parede espessa, modelo M-1.

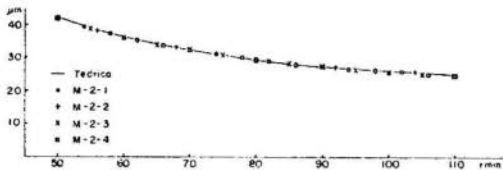


Fig. 2b - Deslocamento radial no tubo de parede espessa, modelo M-2.

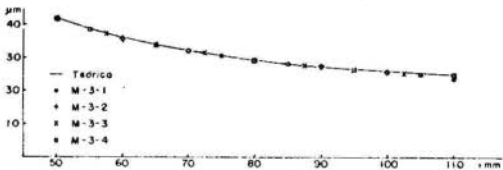


Fig. 2c - Deslocamento radial no tubo de parede espessa, modelo M-3.

do raio interno poderá ser obtido, com boa precisão, através de uma extrapolação mesmo adotando uma malha menos refinada.

Na figura 3b estão indicadas as tensões tangenciais centroidais, onde não se verifica boa correlação, considerando uma comparação, de ponto em ponto, entre os resultados calculados e os teóricos. Pode-se constatar uma oscilação dos resultados calculados, mas quando se considera o conjunto dos resultados e efetuando-se uma interpolação, então tem-se uma boa aproximação entre os valores calculados e teóricos.

Os modelos de malha M-1 e M-2 mostraram comportamentos semelhantes, quanto a tensão tangencial nodal e centroidal e na figura 4 tem-se indicados os erros dos valores calculados quando comparados com os teóricos.

Considerando agora a tensão radial na parede do tubo tem-se, nas figuras 5a e 5b, as tensões radiais nodais e centroidais, adotando novamente o modelo de malha M-3. Como

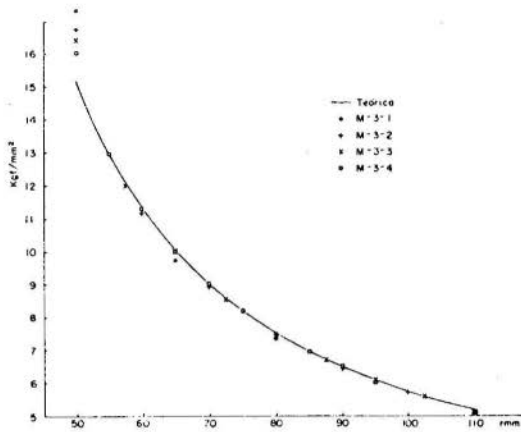


Fig 3a - Tensão tangencial na tubo de parede espessa, média nodal, modelo M-3

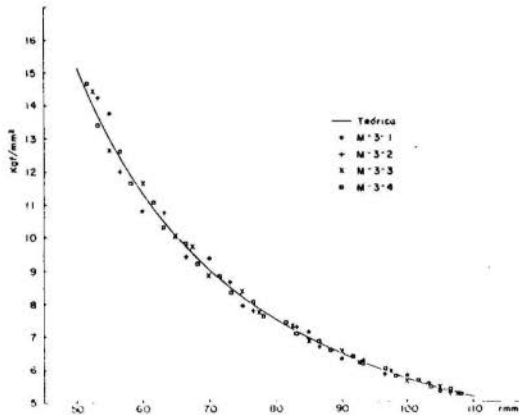


Fig 3b - Tensão tangencial na tubo de parede espessa, centroidal, modelo M-3

se observa, na figura 5a, tanto na face interna como na externa do tubo, tem-se consideráveis erros nos valores das tensões radiais nodais. Mas analisando os valores no interior do tubo, constata-se que estes valores convergem rapidamente para o valor teórico e que os valores nos nós extremos poderão ser avaliados através de uma extrapolação. Na figura 5b tem-se representados os valores calculados da tensão radial centroidal. Como já se verificou no caso da tensão tangencial, os resultados apresentam uma considerável

sociado ao princípio de energia potencial total.

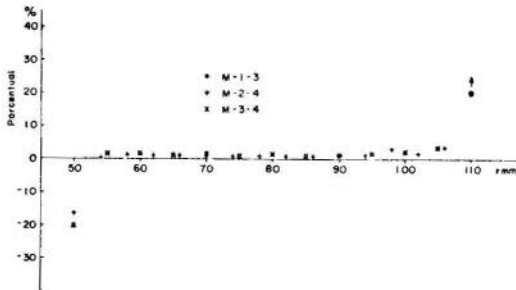


Fig. 6a - Erro percentual da tensão radial, média nodal

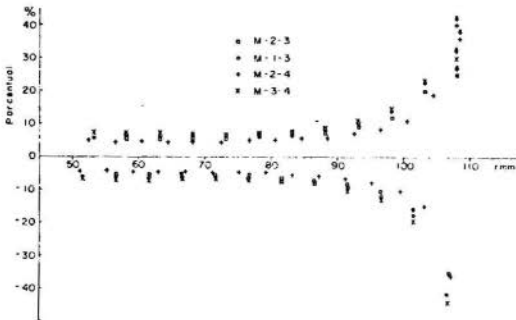


Fig. 6b - Erro percentual da tensão radial, centroidal

3. Conclusões

Como é do conhecimento, na prática e principalmente na área de vasos sob pressão é muito frequente a ocorrência da análise de tensões em problemas com axissimetria de forma e de carregamento tais como: em vasos cilíndricos com tampas das mais diversas formas e em vasos esféricos com bocais radiais. Para estes tipos de problemas obtém-se a maior economia de processamento quando se emprega elementos axissimétricos e ainda mais se estes elementos são simples como é o caso do empregado no presente programa. Ainda, para a economia de processamento principalmente quando a solução é por semi-banda, o programa permite a geração de coordenadas e da topologia. É então recomendável que se adote uma malha a mais uniforme e pouco refinada através da espes-

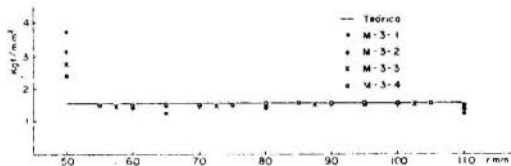


Fig 7a - Tensão axial no tubo de parede espessa, média nodal, modelo M-3.

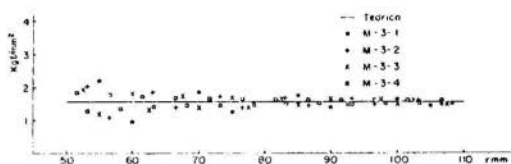


Fig 7b - Tensão axial no tubo de parede espessa, centrada, M-3.

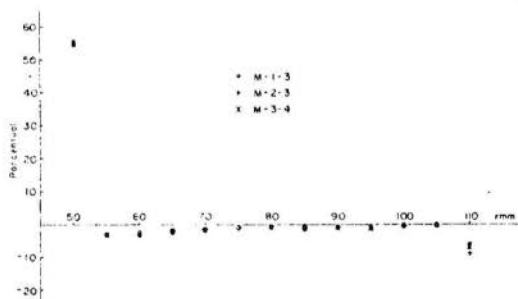


Fig 8a - Erro percentual da tensão axial no tubo de parede espessa, média nodal

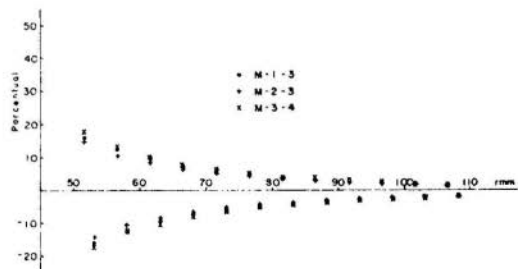


Fig 8b - Erro percentual da tensão axial no tubo de parede espessa, centrada.

sura e ao longo da parede do vaso. Se esta orientação for a dotada e como foi visto anteriormente, em pontos onde não se tem acentuadas descontinuidades, pode-se com a análise dos resultados, estabelecer, através de interpolações e extrapolações, valores suficientemente precisos para as tensões em toda a espessura da parede mesmo adotando malhas pouco refinadas. Isto permite analisar, inicialmente, estes sistemas com uma malha maior e em pontos de menores descontinuidades, estabelecer com boa precisão, condições de contorno para uma posterior análise, com uma malha mais adequada, das zonas que apresentam descontinuidades.

Quanto à malha a ser adotada se recomenda o uso do tipo M-3 mostrado na figura 1c, que é um tipo de malha simétrica e que tem mostrado bons resultados.

4. Agradecimentos

Os autores agradecem à Financiadora de Estudos e Projetos - FINEP e à Comissão Nacional de Energia Nuclear-CNEN que deram suporte para a realização do trabalho.

Bibliografia

- [1] Barcellos, C.S.de, Análise de tensões em corpos de revolução sob carregamentos e gradientes térmicos axissimétricos. Publicação interna 06/78 CNEN.
- [2] Huebner, K.H., The finite element method for Engineers, Wiley (1975).
- [3] Batke, K.J. and Wilson, E.L., Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall (1976)
- [4] Zienkiewicz, O.C., The finite element method, McGraw-Hill (1977).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-08

P.P. 119 - 129

PIPE-WHIP - UM PROGRAMA GERAL DE ANÁLISE

João N. C. Guerreiro
 Augusto C. N. R. Galeão
 Abimael F. D. Loula

Laboratório de Cálculo
 Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/CNPq.
 Rio de Janeiro, Brasil

SUMÁRIO

O problema do chicoteamento em tubulações de alta energia (pipe-whip) é estudado, admitindo-se um comportamento elasto-plástico para o material do tubo, e levando-se em conta o efeito da pressão interna. As restrições são simuladas como molas bilineares e amortecedores viscosos. Um programa geral, baseado no método dos elementos finitos, foi desenvolvido para análise do fenômeno. A influência dos parâmetros: "gap", coeficiente de amortecimento, rigidez e posicionamento da restrição é estudada.

SUMMARY

The pipe-whip problem is studied assuming an elasto-plastic behavior for the pipe and taking internal pressure effects into account. The restraints are simulated as a combination of bilinear springs and viscous dampers. Numerical examples obtained with the finite element code developed shows the relative influence of parameters such as : gap, damping coefficient, rigidity and positioning of pipe restraints on system behavior.

1. Introdução

Na análise da segurança de usinas nucleares, considera-se a possibilidade de ruturas bruscas nas tubulações , tendo em vista os prováveis danos produzidos pelo chicoteamento (pipe-whip) do tubo rompido. Os pontos de rutura são postulados segundo critérios especificados em normas [1], [2], e baseiam-se em níveis de tensão, fadiga, imperfeições e pontos críticos, tais como conexões, joelhos e terminais. Dois tipos de rutura são postulados: rutura longitudinal e rutura circunferencial total ou parcial. Uma vez localizados os pontos de rutura e caracterizada a possibilidade de que equipamentos vitais à segurança sejam atingidos, torna-se necessário a colocação de restrições, visando controlar os movimentos do tubo. Inicialmente, deve existir um afastamento ("gap") entre a tubulação e as restrições para evitar que estas introduzam esforços durante o funcionamento normal da planta.

De acordo com o tipo de rutura, o trecho da tubulação rompida pode ser modelado como uma viga em balanço (rutura circunferencial total) ou como uma viga bi-apoiada (rutura longitudinal). Em ambos os casos considera-se a ação de uma força concentrada, variável no tempo, decorrente do escapamento do fluido através da rutura. Tanto o tubo quanto as restrições devem experimentar deformações plásticas capazes de absorver a energia liberada pela decompressão e escapamento do fluido.

Diferentes modelos mecânicos têm sido desenvolvidos, para a análise do pipe-whip, [3], [4], [5]. Em um trabalho anterior [6], os autores propõem um modelo elasto-plástico perfeito de flexão de vigas, no qual se admite um diagrama de tensão triangular na região elástica e retangular na região plastificada da seção transversal. Este modelo, entretanto, não é aplicável a ciclos de carga e descarga em que haja inversão do sinal da tensão de plastificação, nem a estados bi ou tridimensionais de tensões [7].

No presente trabalho o tubo é também analisado dentro da teoria clássica de vigas, com um comportamento elasto-plástico bi-linear, realizando-se uma integração numérica na seção transversal. A cada iteração, ou incremento

de carga, verifica-se o critério de plasticidade e a lei constitutiva incremental, nos pontos de integração da seção transversal. As restrições são simuladas como molas elasto-plásticas e amortecedores viscosos. Considerou-se ainda a influência de uma pressão interna constante no tempo e seccionalmente linear com a posição. A história no tempo da força de chicoteamento é considerada como um dado. Apresentam-se alguns resultados, onde se procura analisar a influência de parâmetros do problema, tais como: gap, posicionamento da restrição, rigidez da mola e coeficiente do amortecedor.

2. Equações do problema

A equação do movimento, na forma incremental, de uma viga elasto-plástica de comprimento L , densidade ρ e área de seção transversal A , sujeita a N restrições do tipo descrito anteriormente, é, de acordo com o princípio dos trabalhos virtuais,

$$\int_0^L \rho A {}^{n+1}\ddot{\hat{w}} \hat{w} \, dx + \int_0^L \int_A {}^n E \Delta \epsilon_x \hat{\epsilon}_x \, dA \, dx + \sum_{r=1}^N {}^n K_r \Delta w_r \hat{w}_r + \sum_{r=1}^N {}^n C_r {}^{n+1}\dot{\hat{w}}_r \hat{w}_r = {}^{n+1}\hat{w} - \int_0^L \int_A {}^n \sigma_x \hat{\epsilon}_x \, dA \, dx - \sum_{r=1}^N {}^n F_r \hat{w}_r, \quad (1)$$

onde, \hat{w} é o campo de deslocamentos virtuais, e $\Delta w(x,t) = {}^{n+1}w(x,t) - {}^n w(x,t)$, é o incremento de deslocamento transversal da viga, entre duas configurações próximas n e $n+1$. ${}^{n+1}\ddot{\hat{w}}$ e ${}^{n+1}\dot{\hat{w}}$, são as acelerações e velocidades transversais no instante $n+1$.

${}^n C_r$ e ${}^n K_r$ são os coeficientes de amortecimento e de rigidez da restrição r , no instante n , figura 1. ${}^n F_r$ é a força na mola da restrição r , no instante n .

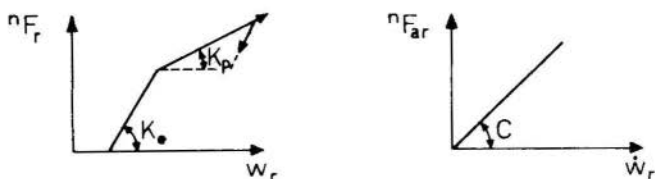


Fig. 1 - Características das Restrições

${}^{n+1}\hat{W}$ é o trabalho virtual das forças externas, no caso, trabalho virtual da força de chicoteamento, no instante $n+1$.

O incremento de deformações lineares $\Delta\epsilon_x$ é,

$$\Delta\epsilon_x = \frac{\partial\Delta u}{\partial x} - z \frac{\partial^2\Delta w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

onde Δu é o incremento de deslocamento longitudinal, e z é uma ordenada na direção transversal, medida a partir do eixo da viga.

Desprezando-se a tensão cisalhante, e considerando a pressão interna (no caso de seções tubulares), o critério de plastificação de von Mises, é:

$$F = ({}^n\sigma_x - \sigma_\theta)^2 + {}^n\sigma_x\sigma_\theta - {}^n\sigma_y^2 = 0 \quad (3)$$

onde $\sigma_\theta = pR/h$, é a tensão circunferencial gerada pela pressão interna do tubo.

A relação constitutiva incremental associativa, neste caso é,

$$\Delta\sigma_x = {}^nE\Delta\epsilon_x, \quad (4)$$

onde,

$${}^nE = E, \text{ para } \begin{cases} F < 0, \text{ ou} \\ F = 0 \text{ e } (2 {}^n\sigma_x - \sigma_\theta)\sigma_x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

ou,

$${}^nE = E_p, \text{ para } F = 0 \text{ e } (2 {}^n\sigma_x - \sigma_\theta)\sigma_x \geq 0 \quad (6)$$

sendo,

$$E_p = E \left[1 - \frac{(E - E_T)(2 {}^n\sigma_x - \sigma_\theta)}{2 {}^n\sigma_y E_T + (E - E_T)(2 {}^n\sigma_x - \sigma_\theta)} \right] \quad (7)$$

com E , módulo de elasticidade e E_T módulo tangente.

3. Solução Numérica.

Utilizou-se o método dos elementos finitos para discretização espacial da equação (1), através do elemento de viga de dois nós e dois graus de liberdade por nó, obtendo o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo.

$$[M] \{^{n+1}\ddot{D}\} + [^nC] \{^{n+1}\dot{D}\} + [^nK] \{\Delta D\} = \{^{n+1}F\} - \{^nP\}, \quad (8)$$

$[M]$ é a matriz de massa, constante, $[^nC]$ é a matriz de amortecimento, devida ao amortecimento da restrição, podendo incluir o amortecimento estrutural do tubo, considerado como sendo proporcional à matriz de massa e à matriz de rigidez elástica. $[^nK]$ é, a matriz de rigidez tangente à configuração n . $\{^{n+1}\ddot{D}\}$ e $\{^{n+1}\dot{D}\}$ são os vetores de acelerações e velocidades na configuração $n+1$. $\{\Delta D\}$ é o vetor de incrementos de deslocamentos entre as configurações n e $n+1$. $\{^{n+1}F\}$ resulta da discretização de \hat{W} e $\{^nP\}$ é obtido da discretização dos demais termos do segundo membro de (1).

Soluções de (8), num intervalo de tempo limitado $\{0, T\}$, foram obtidas usando o algoritmo implícito de Newmark, com $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$ [8]. Neste caso as velocidades e acelerações no instante $n+1$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \{^{n+1}\dot{D}\} &= \frac{2}{\Delta t} \{\Delta D\} - \{^n\dot{D}\}, \\ \{^{n+1}\ddot{D}\} &= \frac{4}{\Delta t^2} \{\Delta D\} - \frac{4}{\Delta t} \{^n\dot{D}\} - \{^n\ddot{D}\}. \end{aligned} \quad (9a-b)$$

Substituindo (9a-b) em (8), obtém-se o sistema de equações algébricas.

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [^nC] + [^nK] \right) \{\Delta D\} &= \{^{n+1}F\} - \{^nP\} + \\ &+ [M] \left(\frac{4}{\Delta t} \{^n\dot{D}\} + \{^n\ddot{D}\} \right) + [^nC] \{^n\dot{D}\}, \end{aligned} \quad (10)$$

que resolvido fornece os incrementos de deslocamentos entre dois instantes próximos t_n e $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. As velocidades e acelerações no instante $n+1$, são calculadas atra

vés de (9a-b).

Dentro de cada incremento podem ser feitas iterações, recalculando-se o vetor de cargas, [7].

4. Resultados

Analisou-se basicamente o problema apresentado na figura 2, variando-se o posicionamento da restrição, o comprimento do tubo e os parâmetros relativos à mola e ao amortecedor. Utilizou-se 6 elementos iguais, na discretização de elementos finitos, exceto no estudo relativo ao posicionamento da restrição, onde são utilizados 7 elementos. Em todos os casos, o intervalo de tempo de integração utilizado, foi de 5×10^{-5} s.

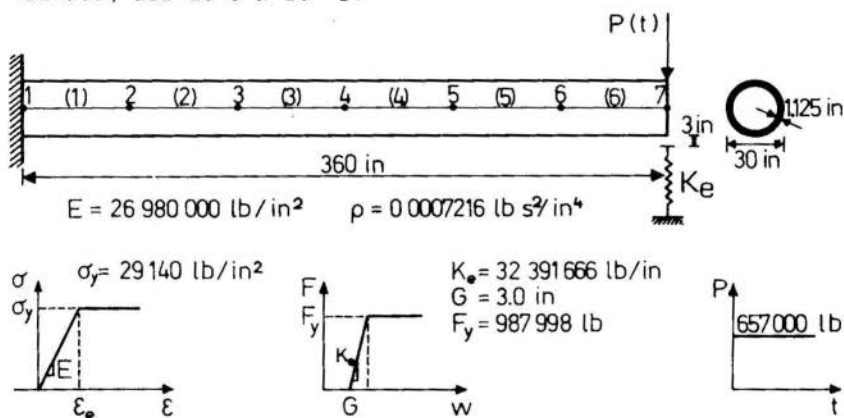


Fig. 2 - Características do exemplo analisado

(a) Influência do gap e do amortecimento da restrição.

Na figura 3, apresentam-se as histórias no tempo do deslocamento transversal da extremidade livre do tubo, onde está aplicada a força de chicoteamento e colocada a restrição, para "gaps" de 1.5 e 3.0 polegadas, e diferentes coeficientes de amortecimento da restrição. Observa-se que a redução do "gap" implica em redução do deslocamento máximo do tubo, bem como do tempo de parada. Efeito similar é verificado com a consideração do amortecimento. Deve-se notar que a força do amortecedor surge de forma brusca, uma vez que no instante do choque, o tubo possui grande veloci

dade. Entretanto a ação isolada do amortecedor, sem a mola, não é capaz de parar o tubo, porque quando a velocidade tende a zero, a reação no amortecedor também tende a zero, ficando a força de chicoteamento para ser equilibrada apenas pelo tubo.

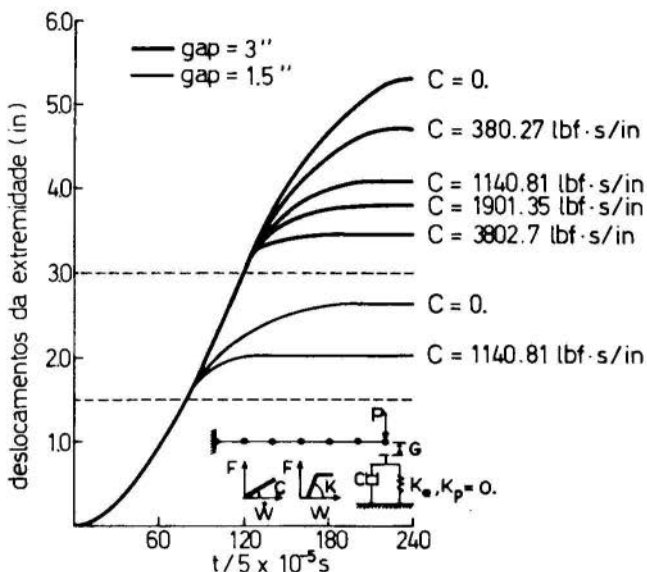


Fig. 3 - Influência do "gap" e do amortecimento da restrição

(b) Influência da rigidez da restrição.

Os resultados apresentados nas figuras 4a-b, referem-se a diferentes coeficientes de endurecimento e de rigidez elástica da mola da restrição. Da análise destes resultados conclue-se que aumentando o coeficiente de endurecimento, figura 4a, diminui o deslocamento máximo, porém ocorrem oscilações do sistema em torno de uma posição final, conseqüência de menores deformações plásticas da mola, e portanto de menor capacidade de dissipação de energia. Maior rigidez elástica, figura 4b, implica em menores deslocamentos máximos e menores tempos de parada.

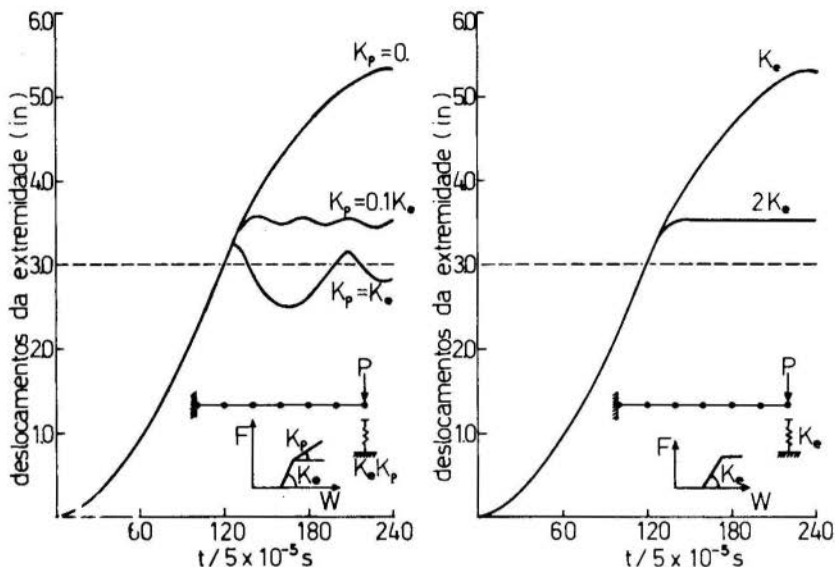


Fig. 4a-b - Influência da rigidez da restrição

(c) Variação da posição da restrição e do comprimento do tubo.

A figura 5 procura retratar o estado do tubo (deslocamentos e velocidades), para diferentes posicionamentos da restrição, no instante em que se anula a velocidade do ponto onde está colocada a restrição. Pode-se notar claramente que na medida em que cresce a distância b , entre os pontos de aplicação da força e de posicionamento da restrição, crescem muito os deslocamentos do tubo, evidenciando a grande importância que tem a previsão dos pontos de ruptura e o adequado posicionamento da restrição.

Foram analisados, ainda, tubos de diferentes comprimentos, com $K_p = 0,1 K_0$ e $C = 0$, mantendo-se fixas as demais características. Neste estudo, fig. 6, observa-se uma mudança nas regiões plastificadas do tubo, ocorrendo um deslocamento destas regiões em direção ao apoio, à medida que o comprimento do tubo decresce. Para os três tubos a-

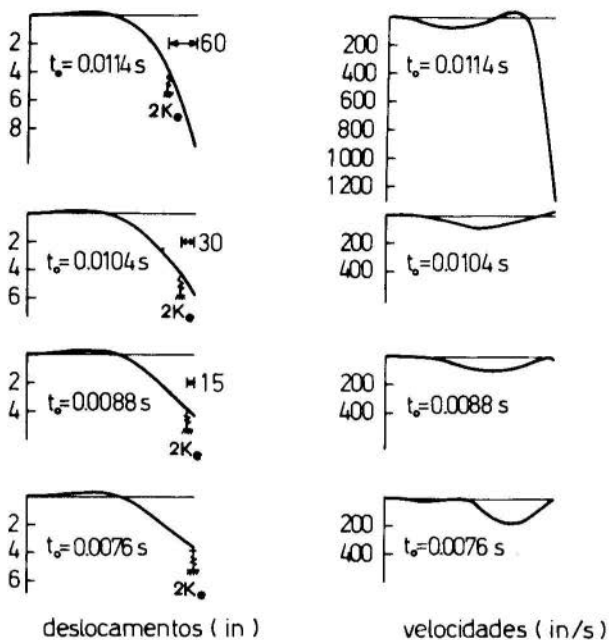


Fig. 5 - Deslocamentos e velocidades do tubo para diferentes posicionamentos da restrição.

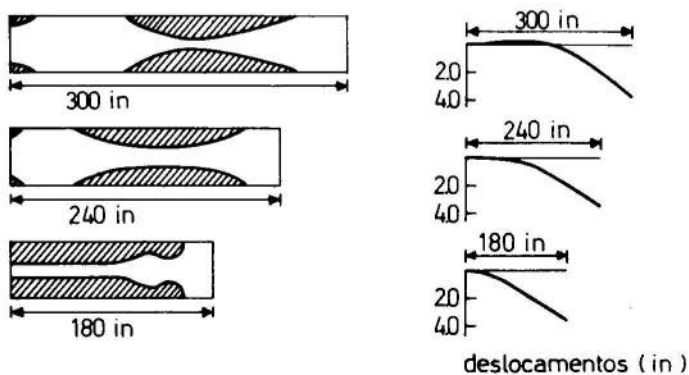


Fig. 6 - Regiões de plastificação e deformadas para tubos de diferentes comprimentos.

nalizados, os deslocamentos máximos, tempos de parada e as reações máximas da mola, são praticamente iguais, o que significa que os três tubos absorveram praticamente a mesma quantidade de energia.

Paracincos dos casos anteriormente estudados, mantendo-se fixas as características do tubo, o gap e a força de chicoteamento, e variando-se a rigidez da mola o amortecimento e a distância b , foram calculadas as porcentagens de energia, absorvidas pela mola da restrição e pelo conjunto tubo + amortecedor, no instante de parada. Os resultados são apresentados na tabela 1. É interessante notar que para $b = 60\text{cm}$, caso 5, a porcentagem de energia absorvida pela mola é de apenas 26%. Isto se deve ao grande deslocamento ocorrido no ponto de aplicação da força de chicoteamento, que neste caso não coincide com a posição da restrição.

Tabela I

Caso	D a d o s	% de energia absorvida	
		Mola	Tubo + Amortecedor
1	$K_e, K_p=0, c=0, b=0$	64.	36.
2	$2K_e, K_p=0, c=0, b=0$	47.	53.
3	$K_e, K_p=0.1K_e, c=0, b=0$	43.	57.
4	$K_e, K_p=0, c=380.27, b=0$	54.	46.
5	$2K_e, K_p=0, c=0, b=60$	26.	74.

5. Conclusões

a) A localização dos prováveis pontos de rutura e o adequado posicionamento das restrições é fator importante na limitação dos movimentos do tubo;

b) Aumentando-se a rigidez da mola da restrição, diminuem os deslocamentos do tubo, mas por outro lado decresce a porcentagem da energia total, absorvida pela mola.

c) A consideração do amortecimento da restrição reduz sensivelmente os deslocamentos do tubo, entretanto, a ação isolada do amortecedor não é capaz de parar o movimen

to do tubo, uma vez que a força de amortecimento é proporcional a velocidade.

Bibliografia

- [1] ASME Boiler and Pressure Vessel Code, section III, Nuclear Power Plant Components, (1974)
- [2] Protection against pipe-whip inside containment Regulatory Guide 1.46, US Atomic Energy Commission, (1973).
- [3] Ma, S.M., and Bathe, K.J., "On finite element analysis of pipe-whip problems", Nucl. Eng. Des. 37, pp. 413-430, (1976).
- [4] Dini, D. and Lazzeri, L. "Modelling techniques for pipe-whip analysis", Nucl. Eng. Des. 37, pp. 361-372, (1976).
- [5] Silva, M. e Bevilacqua L., "Estudo do "pipe-whip" para tubulações nucleares", I Escola de Matemática Aplicada, LAC/CBPF/CNPq, Rio, (1978).
- [6] Loula, A. F., Galeão, A.C. e Guerreiro, J.N. , "Um modelo de elementos finitos para o estudo do chicoteamento em tubulações de alta energia", Anais da Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares", pp 983-998, Porto Alegre, (1978).
- [7] Guerreiro, J.N., Galeão, A.C. e Loula, A.F. , "Análise dinâmica elasto-plástica de vigas" , Anais da XX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Córdoba, (1979).
- [8] Newmark, N.M., "A method of computation for structural dynamics", Proc. ASCE, 85, EM-3, pp. 67-94, (1959).



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER

N.º D-09

P.P. 130 - 143

TEORIA NÃO LINEAR DE CASCAS ELÁSTICAS

Jesus Adjalma da Costa Junior

Aluno de Pós-Graduação, Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Domingos Boechat Alves

Prof. Titular - Depto. Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - BrasilSumário

Neste trabalho são apresentadas as relações de deformação-deslocamento, as equações de equilíbrio, de compatibilidade e constitutivas para uma teoria não linear de cascas elásticas, na qual não é usada a hipótese de Kirchhoff-Love.

Summary

This work presents the strain-displacement relations and the equilibrium, the compatibility and constitutive equations for a nonlinear elastic shell theory in which the Kirchhoff-Love assumption was not used.

1. Introdução

Neste trabalho é descrita uma teoria não linear para cascas elásticas, isotrópicas, na qual não é usada a hipótese de Kirchhoff-Love. Os tensores, em termos das componentes do vetor deslocamento, são obtidos através das relações cinemáticas entre as superfícies deformada e indeformada. As equações de equilíbrio, em relação à superfície deformada, são obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais.

2. Propriedades métricas das cascas

Uma casca é definida como sendo um corpo elástico tridimensional de volume V , delimitado por duas superfícies externas, uma superior (S^+) e outra inferior (S^-), distantes de uma superfície de referência S^0 , de h^+ e h^- , respectivamente, com a condição de que $h^+ - h^-$, denominada espessura da casca, seja menor do que o raio de curvatura no ponto considerado. A posição do ponto P na superfície de referência indeformada é denotado por \bar{r}_0 ; do ponto P^* , na deformada, por \bar{r}_0^* , como ilustra a figura 2.1.

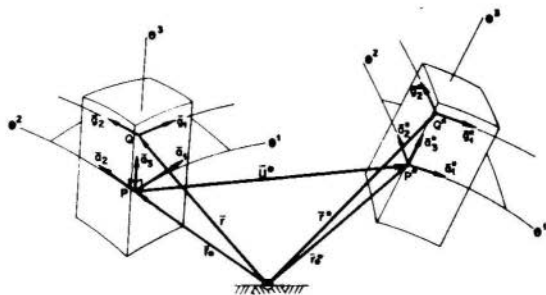


Fig. 2.1

O vetor posição de um ponto Q numa superfície arbitrária é dado por:

$$\bar{r}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}_0(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (2.1)$$

onde (θ^i) ($i = 1, 2, 3$) são coordenadas curvilíneas, e \bar{a}_3 é o vetor unitário normal à superfície de referência indefor-

mada, cujos vetores tangentes são:

$$\bar{a}_\alpha = \partial \bar{r}_0 / \partial \theta^\alpha = \bar{r}_{0,\alpha} \quad (2.2)$$

e o tensor métrico

$$a_{\alpha\beta} = \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta, \quad a^{\alpha\lambda} a_{\beta\lambda} = \delta_\beta^\alpha, \quad \bar{a}^\alpha = a^{\alpha\lambda} \bar{a}_\lambda \quad (2.3)$$

onde δ_β^α é o tensor de Kronecker. Os vetores tangentes e as componentes do tensor métrico para o ponto Q, são

$$\bar{g}_\alpha = \bar{a}_\alpha - \theta^3 b_\alpha^\beta \bar{a}_\beta \quad (2.4)$$

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 b_{\alpha\beta} b_\beta^\alpha \quad (2.5)$$

$$\bar{g}_3 = \bar{g}^3 = \bar{a}_3 = \bar{a}^3, \quad g_{33} = g^{33} = a_{33} = a^{33} = 1 \quad (2.6)$$

$$g_{\alpha 3} = g^{\alpha 3} = a_{\alpha 3} = a^{\alpha 3} = 0 \quad (2.7)$$

onde b_β^α são as componentes mistas do tensor da segunda forma fundamental da superfície de referência definidos por:

$$b_\beta^\alpha = b_{\beta\lambda} a^{\alpha\lambda}, \quad b_{\alpha\beta} = -\bar{a}_{3,\alpha} \cdot \bar{a}_\beta = \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_{\alpha,\beta}$$

O elemento de volume, em termos das coordenadas curvilíneas da superfície de referência S^0 , e da coordenada θ^3 é

$$dv = \mu d\theta^3 ds^0, \quad ds^0 = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 \quad (2.8)$$

$$\mu = \sqrt{g/a} = 1 - 2\theta^3 H + (\theta^3)^2 K \quad (2.9)$$

onde

$$K = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha, \quad H = \frac{1}{2} \delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} b_\alpha^\lambda b_\beta^\mu, \quad g = \det (g_{ij}), \quad a = \det (a_{\alpha\beta}) \quad \dots (2.10)$$

Sendo H e K as curvaturas média e gaussiana, respectivamente, e ds^0 elemento de área da superfície de referência indeformada.

Da figura 2.1, o vetor posição do ponto Q^* na superfície arbitrária é dado por:

$$\bar{r}^* = \bar{r}_0^*(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3^*(\theta^1, \theta^2) \quad (2.11)$$

Para as componentes do tensor métrico da superfície deformada são válidas as equações (2.3) com asteriscos e (2.4) a (2.7) se transformam em

$$\bar{g}_\alpha^* = \bar{a}_\alpha^* + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha}^* \quad (2.12)$$

$$g_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta}^* + \theta^3 (\bar{a}_{3,\alpha}^* \cdot \bar{a}_\beta^* + \bar{a}_{3,\beta}^* \cdot \bar{a}_\alpha^*) + (\theta^3)^2 (\bar{a}_{3,\alpha}^* \cdot \bar{a}_{3,\beta}^*) \quad (2.13)$$

$$g_{\alpha 3}^* = a_{\alpha 3}^* + \theta^3 (\bar{a}_{3,\alpha}^* \cdot \bar{a}_3^*); \quad \bar{g}_{33}^* = a_{33}^* \quad (2.14)$$

3. Relações deformação-deslocamento

Definindo-se dois vetores deslocamento que determinam o vetor posição \bar{r}^* dado por, $\bar{U}^0 = \bar{r}_0^* - \bar{r}_0$ e $\bar{U}^1 = \bar{a}_3^* - \bar{a}_3$, o que resulta

$$\bar{g}_\alpha^* = \bar{a}_\alpha^* + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha}^* = (\bar{a}_\alpha + \bar{U}^0_{,\alpha}) + \theta^3 (\bar{U}^1_{,\alpha} - b_\alpha^\mu \bar{a}_\mu) \quad (3.1)$$

$$\bar{g}_3^* = \bar{a}_3^* = \bar{a}_3 + \bar{U}^1 \quad (3.2)$$

O tensor deformação tridimensional é:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - g_{ij}) \quad (3.3)$$

no qual, usando as aproximações (3.1) e (3.2), resulta em:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^1 (\theta^3) + e_{\alpha\beta}^2 (\theta^3)^2 \quad (3.4)$$

$$\epsilon_{\alpha 3} = e_{\alpha 3}^0 + e_{\alpha 3}^1 (\theta^3) \quad (3.5)$$

$$\epsilon_{33} = e_{33}^0 \quad (3.6)$$

onde

$$e_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (\bar{a}_\alpha \cdot \bar{U}^0_{,\beta} + \bar{a}_\beta \cdot \bar{U}^0_{,\alpha} + \bar{U}^0_{,\alpha} \cdot \bar{U}^0_{,\beta}) \quad (3.7)$$

$$e_{\alpha 3}^0 = \frac{1}{2} (\bar{a}_3 \cdot \bar{U}_{,\alpha}^0 + \bar{a}_\alpha \cdot \bar{U}^1 + \bar{U}^1 \cdot \bar{U}_{,\alpha}^0) \quad (3.8)$$

$$e_{33}^0 = \bar{a}_3 \cdot \bar{U}^1 + \frac{1}{2} \bar{U}^1 \cdot \bar{U}^1 \quad (3.9)$$

$$e_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} (\bar{a}_\alpha \cdot \bar{U}_{,\beta}^1 + \bar{a}_\beta \cdot \bar{U}_{,\alpha}^1 - b_\alpha^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{U}_{,\beta}^0 - b_\beta^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{U}_{,\alpha}^0 + \bar{U}_{,\alpha}^0 \cdot \bar{U}_{,\beta}^1 + \bar{U}_{,\beta}^0 \cdot \bar{U}_{,\alpha}^1) \quad (3.10)$$

$$e_{\alpha 3}^1 = \frac{1}{2} (\bar{a}_3 \cdot \bar{U}_{,\alpha}^1 - b_\alpha^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{U}^1 + \bar{U}^1 \cdot \bar{U}_{,\alpha}^1) \quad (3.11)$$

$$e_{\alpha\beta}^2 = -\frac{1}{2} (b_\alpha^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{U}_{,\beta}^1 + b_\beta^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{U}_{,\alpha}^1 - \bar{U}_{,\alpha}^1 \cdot \bar{U}_{,\beta}^1) \quad (3.12)$$

4. Equações de equilíbrio

O trabalho virtual das forças internas para um corpo tridimensional é expresso por:

$$TVI = \int_{V^*} \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dV^* \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

onde σ^{ij} é o tensor tensão simétrico, ϵ_{ij} é o tensor deformação e V^* denota o volume do corpo deformado. A equação (4.1) pode ser reescrita como

$$TVI = \int_{V^*} (\sigma^{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\alpha 3} \delta \epsilon_{\alpha 3} + \sigma^{33} \delta \epsilon_{33}) dV^* \quad (4.2)$$

Introduzindo as equações (3.4) a (3.6) em (4.2) levando-se em conta as relações de \bar{U}^0 e \bar{U}^1 , obtém-se

$$\begin{aligned} TVI = \int_{S^0} \{ & N^{\alpha\beta} (\bar{a}_\alpha + \bar{U}_{,\alpha}^0) \cdot \delta \bar{U}_{,\beta}^0 + M^{\alpha\beta} ((\bar{a}_\alpha + \bar{U}_{,\alpha}^0) \cdot \delta \bar{a}_{3,\beta}^* + \\ & + \bar{a}_{3,\beta}^* \cdot \delta \bar{U}_{,\alpha}^0) + B^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\alpha}^* \cdot \delta \bar{a}_{3,\beta}^* + S^\alpha (\bar{a}_\alpha + \bar{U}_{,\alpha}^0) \cdot \delta \bar{a}_3^* + \\ & + \bar{a}_3^* \cdot \delta \bar{U}_{,\alpha}^0) + Q^\alpha (\bar{a}_3^* \cdot \delta \bar{a}_{3,\alpha}^* + \bar{a}_{3,\alpha}^* \cdot \delta \bar{a}_3^* + \bar{P}^3 \cdot \delta \bar{a}_3^*) \} dS^0 \\ & \dots (4.3) \end{aligned}$$

onde S^0 é a área da superfície de referência deformada e a seguinte notação é usada

$$\begin{aligned}
 N^{\alpha\beta} &= \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha\beta} d\theta^3, & M^{\alpha\beta} &= \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha\beta} \theta^3 d\theta^3, \\
 B^{\alpha\beta} &= \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha\beta} (\theta^3)^2 d\theta^3, & S^\alpha &= \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha 3} d\theta^3 \\
 Q^\alpha &= \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha 3} \theta^3 d\theta^3, & \bar{P}^3 &= \bar{a}_3^* \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{33} d\theta^3 \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

O trabalho virtual das cargas atuantes nas superfícies externas, \bar{T}_e , e o das forças associadas às condições de contorno, \bar{T}_c , (fig. 4.1), são respectivamente:

$$TVE_e = \int_{S^*} \bar{T}_e (\delta \bar{U}^0 + \theta^3 \delta \bar{a}_3^*)_e dS^* \quad (4.5)$$

$$TVE_c = \int_{S^*} \bar{T}_c (\delta \bar{U}^0 + \theta^3 \delta \bar{a}_3^*)_c dS^* \quad (4.6)$$

onde o subscrito (e) e (c) refere-se à superfície exterior e ao contorno, respectivamente.

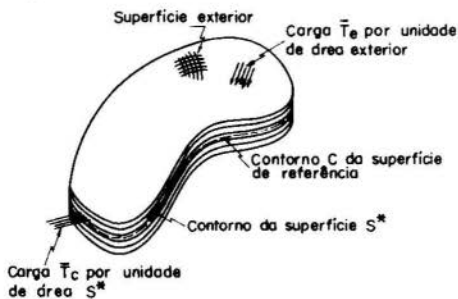


Fig. 4.1

A expressão (4.5) pode ser transformada para superfície de referência:

$$TVE_e = \int_{S^{0*}} \sqrt{\frac{g_e^*}{a^*}} \bar{T}_e (\delta \bar{U}^0 + \theta^3 \delta \bar{a}_3^*) dS^{0*} \quad (4.7)$$

Denotando por \bar{n} o vetor unitário normal a S^* e por C o con

torno da superfície de referência, a equação (4.6) é reescrita:

$$\text{TVE}_c = \int_{S^*} \int_{\theta^3} \bar{T}_c (\delta \bar{U}^0 + \theta^3 \delta \bar{a}_3^*) (\bar{n} \cdot (\bar{a}_\alpha^* \times \bar{a}_3^*)) \frac{d\theta^\alpha}{dC} d\theta^3 dC \quad \dots(4.8)$$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais tem-se

$$\text{TVI} = \text{TVE} = \text{TVE}_e + \text{TVE}_c \quad (4.9)$$

no qual, como não foi imposta nenhuma condição de vínculo, todas as variações estaticamente admissíveis que aparecem nesta expressão são independentes.

Das equações (4.3) a (4.9), obtêm-se as equações de equilíbrio

$$[N^{\beta\alpha} (\bar{a}_\beta + \bar{U}^0_{,\beta}) + M^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\beta}^* + S^\alpha \bar{a}_3^*]_{;\alpha} + \sqrt{g_e^*/a^*} \bar{T}_e = 0 \quad (4.10)$$

$$[M^{\alpha\beta} (\bar{a}_\alpha + \bar{U}^0_{,\alpha}) + B^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\alpha}^* + Q^\beta \bar{a}_3^*]_{;\beta} - S^\alpha (\bar{a}_\alpha + \bar{U}^0_{,\alpha}) + Q^\alpha \bar{a}_{3,\alpha}^* - \bar{p}^3 + \sqrt{g_e^*/a^*} \theta^3 \bar{T}_e = 0 \quad (4.11)$$

onde (;) denota diferenciação covariante no estado deformado e ambas as equações possuem somente 3 componentes não nulas.

As condições de contorno associadas com as equações (4.10) e (4.11) são, respectivamente,

$$(N^{\beta\alpha} (\bar{a}_\beta + \bar{U}^0_{,\beta}) + M^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\beta}^* + S^\alpha \bar{a}_3^*) v_\alpha = \int_{\theta^3} \bar{T}_e [\bar{n} \cdot (\bar{a}_\alpha^* \times \bar{a}_3^*)] \frac{d\theta^\alpha}{dC} d\theta^3 \quad \text{ou } \bar{U}^0 \text{ prescrito} \quad (4.12)$$

$$(M^{\alpha\beta} (\bar{a}_\alpha + \bar{U}^0_{,\alpha}) + B^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\alpha}^* + Q^\beta \bar{a}_3^*) v_\beta = \int_{\theta^3} \bar{T}_c \theta^3 [\bar{n} \cdot (\bar{a}_\alpha^* \times \bar{a}_3^*)] \frac{d\theta^\alpha}{dC} d\theta^3 \quad \text{ou } \bar{a}_3^* \text{ prescrito} \quad (4.13)$$

onde v_α é o vetor unitário normal à curva de contorno da superfície de referência S^{0*} .

5. Equações de compatibilidade

Para a obtenção das equações de compatibilidade pode-se utilizar o teorema de Riemann para o qual, desde que o espaço seja plano, os tensores g_{ij} e g_{ij}^* são funções não arbitrárias das coordenadas e deverão satisfazer as seguintes equações:

$$R_{ijkl} = 0 \quad \text{e} \quad R_{ijkl}^* = 0 \quad (5.1)$$

onde (5.1) são os tensores de Riemann Christoffel cujas expressões são, respectivamente,

$$R_{ijkl} = \Gamma_{jli,k} - \Gamma_{jki,l} + \Gamma_{jkm} \Gamma_{il}^m - \Gamma_{jlm} \Gamma_{ik}^m \quad (5.2)$$

$$R_{ijkl}^* = {}^*\Gamma_{jli,k} - {}^*\Gamma_{jki,l} + {}^*\Gamma_{jkm} {}^*\Gamma_{il}^m - {}^*\Gamma_{jlm} {}^*\Gamma_{ik}^m \quad (5.3)$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{il,k}) \Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ijl} \quad (5.4)$$

O tensor métrico do sistema deformado é expresso em termos do tensor deformação e do tensor métrico do estado indeformado por

$$g^{*ij} = -2 g^{il} g^{jk} \epsilon_{lk} + g^{ij} \quad (5.5)$$

Utilizando as equações (5.4) e (3.2) para calcular símbolos de Christoffel deformado, tem-se:

$${}^*\Gamma_{jli} = \Gamma_{jli} + \epsilon_{ji,l} + \epsilon_{li,j} - \epsilon_{jl,i} \quad (5.6)$$

$${}^*\Gamma_{jki} = \Gamma_{jki} + \epsilon_{ji,k} + \epsilon_{ki,j} - \epsilon_{jk,i} \quad (5.7)$$

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie são calculados a partir de (5.4) e (5.5) resultando:

$$\begin{aligned} {}^*\Gamma_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^k - 2 g^{ks} g^{lr} (\Gamma_{ijl} + \epsilon_{il,j} + \epsilon_{jl,i} - \epsilon_{ij,l}) (\epsilon_{sr}) + \\ &+ g^{kl} (\epsilon_{il,j} + \epsilon_{jl,i} - \epsilon_{ij,l}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Multiplicando (5.6) por (5.8) e fazendo troca de índices, tem-se:

$$\begin{aligned}
 +\Gamma_{jkm} \star \Gamma_{i\ell}^m &= \Gamma_{i\ell}^m \Gamma_{jkm} + \Gamma_{i\ell}^m (\epsilon_{jm,k} + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) - \\
 - 2g^{ms} g^{pr} \epsilon_{sr} &(\Gamma_{i\ell p} + \epsilon_{ip,\ell} + \epsilon_{lp,i} - \epsilon_{i\ell,p}) (\Gamma_{jkm} + \epsilon_{jm,k} + \\
 + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) &+ g^{mp} (\epsilon_{ip,} + \epsilon_{lp,i} - \epsilon_{i\ell,p}) (\Gamma_{jkm} + \epsilon_{jm,k} + \\
 + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) & \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Substituindo a equação (5.9) e as derivadas de (5.6) e (5.7) com relação a k e ℓ , respectivamente, na equação (5.3) e fazendo uso das relações (5.1), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_{jk,i\ell} + \epsilon_{li,jk} - \epsilon_{jl,ik} - \epsilon_{ki,j\ell}) &+ \Gamma_{i\ell}^m (\epsilon_{jm,k} + \epsilon_{km,j} - \\
 - \epsilon_{jk,m}) - \Gamma_{ik}^m &(\epsilon_{jm,\ell} + \epsilon_{lm,j} - \epsilon_{jl,m}) + 2g^{ms} g^{pr} \epsilon_{sr} \cdot \\
 \cdot ((\Gamma_{ikp}) &(\Gamma_{j\ell m} + \epsilon_{jm,\ell} + \epsilon_{lm,j} - \epsilon_{j\ell,m})) + (\Gamma_{j\ell m}) (\epsilon_{ip,\ell} + \\
 + \epsilon_{lp,i} - \epsilon_{i\ell,p}) - 2g^{ms} g^{pr} \epsilon_{sr} &((\Gamma_{i\ell p}) (\Gamma_{jkm} + \epsilon_{jm,k} + \\
 + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) - &(\Gamma_{jkm}) (\epsilon_{ip,\ell} + \epsilon_{lp,i} - \epsilon_{i\ell,p})) + \\
 + g^{mp} (\epsilon_{ip,\ell} + \epsilon_{lp,i} - \epsilon_{i\ell,p}) &(\Gamma_{jkm} - \epsilon_{jm,k} + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) - \\
 - g^{mp} (\epsilon_{ip,k} + \epsilon_{kp,i} - \epsilon_{ik,p}) &(\Gamma_{j\ell m} + \epsilon_{jm,\ell} + \epsilon_{lm,j} - \epsilon_{j\ell,m}) = 0 \\
 \dots & \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

A equação (5.10) juntamente com a identidade de Bianchi [3]

$$R_{k\ell mn;p}^* + R_{k\ell np;m}^* + R_{k\ell pm;n}^* = 0 \quad (5.11)$$

constituem as equações de compatibilidade em termos das componentes do tensor deformação da superfície de referência.

6. Equações constitutivas de um sólido elástico isotrópico

De acordo com a teoria do estado natural, um corpo perfeitamente elástico e isotrópico, possui uma função densidade de energia ϕ da seguinte forma [3]

$$\phi = \phi(\theta^i, I_1, I_2, I_3) \quad (6.1)$$

onde θ^i ($i = 1, 2, 3$) são coordenadas referidas a um certo estado de referência e I_i ($i = 1, 2, 3$) são os invariantes de deformação definidos por:

$$I_1 = K_1; I_2 = \frac{1}{2}(K_1^2 - K_2); I_3 = \frac{1}{6}(K_1^3 - 3K_1 K_2 + 2K_3) \quad (6.2)$$

onde

$$K_1 = g^{ij} \epsilon_{ij}; K_2 = g^{ip} g^{jq} \epsilon_{ij} \epsilon_{pq}; K_3 = g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{ij} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr} \quad (6.3)$$

A relação entre o tensor tensão σ^{ij} e o tensor deformação ϵ_{ij} é obtida da seguinte forma:

$$\sigma^{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \text{onde } \rho_0 = \rho \sqrt{g^*}, \quad \rho = \text{densidade} \quad (6.4)$$

A equação (6.4) foi introduzida por Boussinesq (1870-1872). Derivando parcialmente a relação (6.1), resulta

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial \phi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \phi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \phi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (6.5)$$

Usando as expressões (6.2) para os invariantes, tem-se

$$\frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} = g^{ij} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} = I_1 g^{ij} - g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} = I_2 g^{ij} - I_1 (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\ + (g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} = & C_1 g^{ij} + C_2 [(I_1 g^{ij} - g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq})] + \\ & + C_3 [(I_2 g^{ij} - I_1 (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\ & + (g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr})] \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde

$$C_1 = \frac{\partial \phi}{\partial I_1} \quad C_2 = \frac{\partial \phi}{\partial I_2} \quad C_3 = \frac{\partial \phi}{\partial I_3} \quad (6.10)$$

A expressão (6.4) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\rho}{\rho_0} [C_1 g^{ij} + C_2 (I_1 g^{ij}) - \\ & - (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + C_3 (I_2 g^{ij} - I_1 (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\ & + (g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr}))] \end{aligned} \quad (6.11)$$

Considerando ϕ como uma função analítica das deformações, ela pode ser expressa como uma série de potência dos invariantes de deformação e portanto

$$C_3 = \frac{\partial \phi}{\partial I_3} = C_{TWY} I_1^T I_2^W I_3^Y \quad (6.12)$$

onde $T, W, Y = 0, 1, 2, \dots$, e a soma dos índices fica subentendida como sendo aquela que não aparece repetida.

Com C_3 dado por (6.12), tem-se

$$\frac{\partial C_3}{\partial I_2} = \frac{\partial C_2}{\partial I_3} = W C_{TWY} I_1^T I_2^{W-1} I_3^Y \quad (6.13)$$

e integrando resulta em

$$C_2 = \frac{W}{Y+1} C_{TWY} I_1^T I_2^{W-1} I_3^{Y+1} + D_{TW} I_1^T I_2^W \quad (6.14)$$

onde o segundo termo do lado direito da equação representa uma função arbitrária de integração. Similarmente, com o re

sultado (6.14) obtêm-se

$$\frac{\partial C_2}{\partial I_1} = \frac{\partial C_1}{\partial I_2} = \frac{TW}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^{W-1} I_3^{Y+1} + T D_{TW} I_1^{T-1} I_2^W \quad (6.15)$$

e integrando obtêm-se

$$C_1 = \frac{T}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^W I_3^{Y+1} + \frac{T}{W+1} D_{TW} I_1^{T-1} I_2^{W+1} + E_T I_1^T \quad (6.16)$$

onde o terceiro termo do lado direito representa uma função arbitrária de integração.

Com base em (6.13), (6.14) e (6.16) o tensor tensão (6.14) é novamente reescrito como:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & \frac{\rho}{\rho_0} \left[\left(\frac{T}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^W I_3^{Y+1} + \frac{T}{W+1} D_{TW} I_1^{T-1} I_2^{W+1} + \right. \right. \\ & + E_T I_1^T (g^{ij} + \left. \left(\frac{W}{Y+1} C_{TWY} I_1^T I_2^{W-1} I_3^{Y+1} + \right. \right. \\ & + D_{TW} I_1^T I_2^W) (I_1 g^{ij} - g^{ij} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\ & + C_{TWY} I_1^T I_2^W I_3^Y (I_2 g^{ij} - I_1 (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\ & \left. \left. + g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr}) \right) \right] \quad (6.17) \end{aligned}$$

As equações constitutivas em termos das tensões são obtidas substituindo a equação (6.17) em (4.4).

7. Conclusões

As equações obtidas se reduzem às apresentadas por vários autores quando são introduzidas as respectivas hipóteses simplificativas.

Assim, as relações tensões-deformações (3.8) a (3.12) quando utilizada a hipótese de Kirchhoff-Love se reduzem às equações apresentadas na ref. [5]. Além disso, quando é tomado no sistema de referência para o estado deformado a terceira componente \bar{a}_3^* como produto vetorial das componentes tangentes à superfície de referência deformada, estas relações se reduzem às apresentadas na ref. [6].

Utilizando as equações de equilíbrio de Naghdi [4], ob

tidas por processo diferente do aqui apresentado, Birickoglu e Kalnins [1] chegaram às equações, que a menos de notações são idênticas às relações (4.10) e (4.11).

Linearizando as deformações na relação (5.12) obtém-se, a menos de notação, a equação (4.13) da ref. [2].

Desenvolvendo as relações (4.1) da ref. [5] em termos dos invariantes do tensor de deformação chega-se às equações constitutivas (6.17) apresentadas neste trabalho. Supondo a hipótese de Kirchhoff-Love e adotando as seguintes hipóteses linearizadoras

$$C_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = \lambda + 2G - \alpha(3\lambda + 2G)(T - T_0)$$

$$C_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} = -2G \quad \text{e} \quad C_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = 0$$

nas quais λ e G são, respectivamente, o coeficiente de Lamé e módulo de cisalhamento, e α o coeficiente de expansão térmica, as equações (6.11) se reduzem às apresentadas na ref. [4].

8. Agradecimento

Os autores agradecem à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e à Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) que apoiaram a realização desta pesquisa.

Bibliografia

- [1] Birickoglu, V. and Kalnins, A., Large elastic deformations of shells with the inclusion of transverse normal strain., Int. J. Solids Struct., 7, 431-444 (1971).
- [2] Chien Wei-Zang, Intrinsic theory of shells and plates, Part I - General Theory, Q. Appl. Math. 1, 297-327 (1944).
- [3] Erigen, A.C., Nonlinear theory of continuous média McGraw-Hill (1962).

- [4] Naghdi, P.M., Foundations of elastic shell theory, Progress in Solid Mechanics, Vol. 4, North-Holland (1963).
- [5] Naghdi, P.M. and Nordgreen, R.P., On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchhoff Hypothesis, Q. Appl. Math. 21, 49-59 (1963).
- [6] Sanders, J.L., Nonlinear theories for thin shells, Q. Appl. Math 21, 21-36 (1963).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-10

P.P. 144 - 155

SUBSTRUCTURING TECHNIQUES IN NONLINEAR
FINITE ELEMENT ANALYSIS

Subhash C. Anand

Department of Civil Engineering
 Clemson University
 Clemson, S.C. 29631 USA

SUMMARY

Although substructuring technique and finite element mesh-grading schemes have been utilized independently in computer structure analysis within the elastic range, no evidence exists in the literature of their simultaneous use, especially in the inelastic range. A joint application of the two techniques using elastic-plastic finite element analysis is presented in this paper. It is shown that the two can be applied together quite successfully and may even lead to some savings of computational effort.

SUMÁRIO

Duas técnicas de análise estrutural através do computador eletrônico têm sido utilizadas independentemente dentro da zona elástica-a técnica de separação da estrutura em partes e a técnica de "mesh grading" através de elementos finitos. A literatura técnica, todavia, não mostra evidência alguma da aplicação simultânea destas duas técnicas, especialmente através da zona inelástica. Neste trabalho elas são apresentadas em conjunto, pela utilização da análise por meio de elementos finitos nas zonas elástica e plástica. Esta aplicação conjunta pode ser muito bem sucedida, causando inclusive alguma economia no uso do computador eletrônico.

INTRODUCTION

Since the substructuring technique was introduced in 1960's for the solution of aerospace structures having large degrees of freedom [1], many refinements and variations of the technique have been reported in the literature [2-6]. The major effort in all of these studies has been to devise ways to reduce the number of unknowns that must be retained in the computer memory during the solution process and to develop an ability to solve very large structural systems with relatively small to medium in-core capacities of the available computers.

Another topic that has recently attracted the attention of investigators working in the area of finite element analysis concerns the development of efficient mesh-refinement or mesh-grading schemes [7-8]. The objective, in this case, is to rapidly change the element grid size from fine in the area of high stress gradient to coarse in areas where stress changes are small. This has been accomplished by creating special grids in which edges common to neighboring elements do not necessarily have same lengths. Consequently, intermediate nodes, called 'interface points', are generated on sides of larger elements. Displacement field assumed in the large element is enforced at the interface points leading to constrained equations for the smaller elements [7]. In another scheme, modified quadrature formulas to numerically integrate discontinuous functions in a larger element arising out of the individual displacement functions of the two smaller elements with the common side have been proposed [8].

The use of the substructuring technique in conjunction with the mesh-grading scheme for elastic-plastic finite element analysis is presented in this paper. It is shown that both techniques can be applied together quite successfully and their use may reduce the computational effort by 15-20% in addition to substantial reduction in the requirement of computer storage.

THE SUBSTRUCTURING CONCEPT

A continuous structure is idealized first by using the desired number of regular elements, the so called 'parent' elements. In a

region of the structure where greater accuracy is desired, each parent element is subdivided into subelements by defining additional nodes within the parent element. Such a parent element may be called a 'superelement' or a 'substructure'. These additionally created nodes are designated as 'internal' nodes and do not appear in the equations of the total structure due to the condensation of the stiffness matrix with respect to the internal degrees of freedom. This procedure of mesh refinement by substructuring or superelement technique can be continued for as many levels as desired at any part of the structure.

The stiffness matrix for the parent element at any level of substructuring is obtained by a systematic addition of the individual stiffness matrices of the subelements at that level and the desired elimination of the corresponding internal degrees of freedom, as shown in Fig. 1. This procedure leads to a structure stiffness matrix with relatively small number of degrees of freedom even if an extremely refined mesh has been used in some parts of a structure. The elimination of the internal degrees of freedom can be achieved by the standard reduction schemes known in the theory of matrix structural analysis. The resulting matrix equations relate the external nodal loads directly to the external nodal displacements. After the problem has been solved for the external nodal displacements, the internal nodal displacements can then be calculated easily.

For the example problems presented in this paper, 2-level superelements were utilized in the development of the computer program. A 2-level superelement is a parent element with the entire element, or certain areas thereof, refined twice by the substructuring technique. An example of a finite element mesh with superelements is shown in Fig. 1, in which element 'A' is a 2-level superelement and element 'B' a 1-level superelement.

A MESH-REFINEMENT SCHEME

In a finite element grid, the elements are usually so arranged that when two elements have a common edge (or surface), that edge is common to the two elements over its entirety. Another arrangement, in which the edge of one element coincides with the edges of several adjacent elements, is also possible. This scheme permits the refinement locally in a finite element mesh without the unnecessary

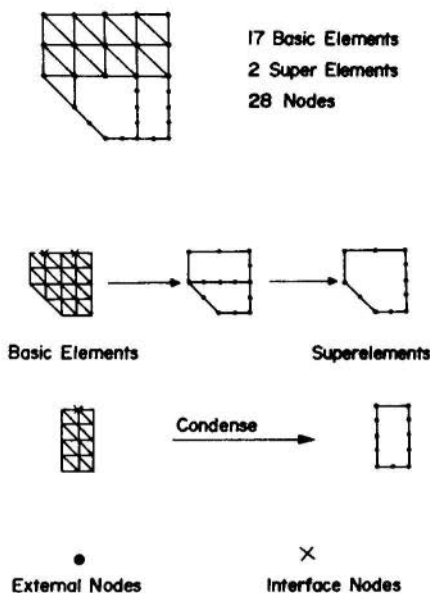


Fig. 1 The Substructuring Concept

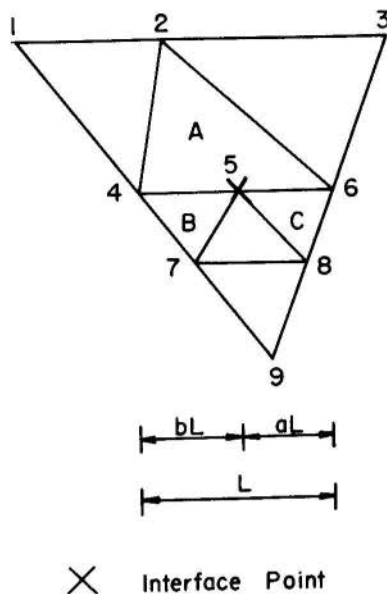


Fig. 2 Finite Element Mesh with Interface Point

refinement throughout the body. The basic idea of mesh-refinement is to enforce either compatibility or equilibrium at the interfaces of adjacent elements which leads to constrained equations. Such constrained equations can be handled easily in the theory of matrix structural analysis.

A concept, called 'the interface point concept', for constant strain triangular elements is presented in this paper in which compatibility of displacements along the interface boundaries of adjacent elements is enforced. The resulting constrained equations and the corresponding modification of the stiffness matrix can be given as follows:

Modified Nodal Displacement Vector for an Element

As an example, consider a finite element-mesh shown in Fig. 2 in which node 5 is an interface point. To maintain the compatibility of displacements along the interface edge 4-5-6, the nodal displacements at node 5 are a linear combination of the nodal displacements at

nodes 4 and 6, which may be given as

$$\begin{aligned} u_5 &= a u_4 + b u_6 \\ v_5 &= a v_4 + b v_6 \end{aligned} \quad (1)$$

where a and b are length ratios indicated in Fig. 2, and u and v correspond to x and y directions, respectively. Interface point 5 can be considered as a dependent node whose displacements may be expressed in terms of the corresponding displacements at the two independent nodes 4 and 6 located at the ends of the interface edge 4-5-6. The nodal displacement vector for element B with one of its vertices at the interface point 5 may, therefore, be written as a function of the independent nodal displacements as

$$\begin{Bmatrix} u_4 \\ u_7 \\ u_5 \\ v_4 \\ v_7 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_7 \\ u_6 \\ v_4 \\ v_7 \\ v_6 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

which is the resulting constrained equation. This equation may be expressed in a symbolic form as

$$\{\delta\} = [T] \{\delta'\} \quad (3)$$

In Eq. 3, $\{\delta\}$ is the original nodal displacement vector, $\{\delta'\}$ is the nodal displacement vector in which the displacements of the interface point 5 have been replaced by the independent displacements at nodes 4 and 6, and $[T]$ is a transformation matrix.

Modified Nodal Force Vector for an Element

Since interface points are dependent nodes, nodal loads acting at these points can also be replaced by a set of nodal loads acting at the connecting independent nodes. This may be achieved by equating the virtual work done by the nodal loads in the two cases which leads to

$$\{F'\} = [T]^T \{F\} \quad (4)$$

in which $\{F\}$ is the original nodal load vector of an element and $\{F'\}$ is the modified vector of nodal loads acting at independent nodes.

Modified Element Stiffness Matrix

The expression for the stiffness matrix $\{k\}$ of a constant strain triangular element is standard and may be given as

$$\{k\} = t \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (5)$$

in which t and A are the thickness and area of the element, respectively. The strains $\{\epsilon\}$ in the element are related to the stresses $\{\sigma\}$ by

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (6)$$

and to the nodal point displacements $\{\delta\}$ by

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\} \quad (7)$$

In Eq. 6, $[D]$ for a plane stress elastic case is given by

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

The modified element stiffness matrix for element B, which relates the forces $\{F'\}$ at the independent nodes 4, 7 and 6 to the corresponding displacements $\{\delta'\}$ at these nodes, is obtained by equating the external virtual work in terms of $\{F'\}$ and $\{\delta'\}$ to the internal virtual work, in which stresses and strains have also been expressed in terms of $\{F'\}$ and $\{\delta'\}$, to yield after simplification

$$\{F'\} = [T]^T [k] [T] \{\delta'\} \quad (9)$$

in which $[T]^T [k] [T]$ is the modified element stiffness matrix. Equation 9 is the most general equation for the application of the interface point technique for an element in the mesh-refinement scheme.

SOLUTION SCHEME

To obtain the solution of a planer structure within the elastic range by the standard finite element method, element stiffness matrices of the type given in Eq. 5 are systematically added to obtain the stiffness matrix of the complete structure. This leads to a set of linear equilibrium equations, solution of which yields the values of the unknown nodal displacements of the total structure, and consequently the nodal displacements for each element. The element strains and stresses can then be calculated using Eqs. 7 and 6, respectively.

If the structure has been subdivided into various substructures, then the equilibrium equations are expressed in terms of the loads and displacements of the external nodes only and are solved for the unknown nodal displacements of these external nodes which are then used to find the displacements of the internal nodes. The procedure for finding the element strains and stresses remains the same.

If the mesh in the finite element model contains 'interface' points along the common boundaries of some large and small elements, then the modified element stiffness, given by $[T]^T[k][T]$, is used for an element with an interface point as one of its nodes to compute the stiffness matrix for the complete structure. This stiffness matrix relates the forces at the independent nodes to the corresponding displacements at these nodes. If the substructuring technique is also utilized, then the equilibrium equations involving independent nodes are further separated into those expressed in terms of the external nodes and the internal nodes as described in the previous paragraph. Nodal displacements, element strains and stresses can be calculated as before.

As the load is increased, the structure reaches its elastic limit at the initial yield load. The relationships between stresses and strains in the plastic region become a function of the existing values of stresses and can only be defined in the rate form. The solution of the equilibrium equations must then be obtained by the incremental technique, in which the structure stiffness matrix is redefined at every load increment by substituting the appropriate plastic stiffness matrices for the yielded elements. The incremental stress-strain relations within the inelastic range may be written as

$$\{d\sigma\} = [D^P] \{d\epsilon\} \quad (10)$$

which are utilized in place of Eq. 6 in the development of the element stiffness matrix and calculation of stress increments in a plastic element due to an increment of load. The solution at a given load level is obtained by summation of the various piecewise-linear incremental solutions. The plastic stress-strain matrix $[D^P]$ in Eq. 10 has previously been developed by Yamada et al. and may be found in Ref. [9]. The substructuring and mesh-refinement techniques, described earlier for elastic analysis, are also applicable for each load increment within the plastic range.

The solution of the incremental form of the equilibrium equations, in general, poses no problems. However, due to the presence of the nonlinearity in the system, the final stresses in the plastic elements do not satisfy the yield condition exactly unless special schemes, such as Newton-Raphson iteration technique, are employed. Since this technique is well established and is documented elsewhere [10], it will not be described in this paper.

EXAMPLES

In order to demonstrate the application of the substructuring and mesh-refinement techniques, finite element models of two structures subjected to a monotonically increasing loads were analyzed. The first model, which consisted of a disk resting on a rigid surface, was made of a coarse mesh with interface points and was selected for a verification of the proposed technique. The second model of a notched tension specimen, on the other hand, had a much finer mesh and was selected without interface points so that a comparison of the computational effort with and without the use of the substructuring technique could be assessed. The details of these two examples follow:

Example 1

The finite element model of a disk with 2-level substructuring is shown in Fig. 3. The disk is first divided into 68 parent elements with 51 nodal points. Elements 1, 2 and 3, shown with hatched lines around the contact point B, are superelements and the rest 65 elements are of the constant strain triangular (CST) type. Superelements 1 and 2 each consist of 2 CST elements C and 2 sub-superelements, Q and T, respectively. Sub-superelement Q is further subdivided into 8 CST elements, while sub-superelement T consists of 10 CST elements. Superelement 3 has been divided into 8 CST elements and 1 sub-superelement S at Level-1, and this sub-superelement is further subdivided into 12 CST elements. In this example, sub-superelements Q and T have two and four interface points, respectively. The material used is assumed to have a linear strain-hardening property defined by the slope H' of the equivalent stress vs. the plastic strain curve equal to $0.032E$. The disk is subjected to a monotonically increasing concentrated load P at the lowest point B of the disk which is also supported at the center.

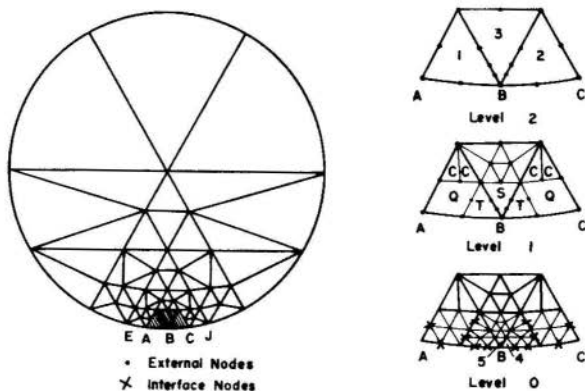


Fig. 3 Finite Element Model of the Disk

For convenience, the load may be expressed by a non-dimensional parameter $\rho = P/(\sigma_0 \cdot d \cdot t)$, in which σ_0 is the initial yield stress of the material, and d and t are the diameter and the thickness of the disk, respectively. The initial yield for the disk occurs in the lowest element, denoted as 5 in substructuring Level-0 in Fig. 3, at $\rho = 0.0183$. The load is increased gradually and the problem solved in a piecewise-linear fashion, as described in the earlier sections, without any particular difficulty. Plastic zones grow gradually around the contact point with increase in load and the loading is stopped at $\rho = 0.0502$.

The complete model of the disk consists of 77 nodal points, of which 12 are interface points and 14 are internal nodes. Consequently, elimination of these nodes in the substructuring technique leads to a problem with 51 external nodes and 102 degrees of freedom. The solution of this model is obtained on an IBM 370/165 computer and the average CPU time per iteration is 1.3 seconds. Generally, one Newton-Raphson iteration is required to complete a load increment.

Example 2

The second problem consisted of a notched tension specimen with fairly fine mesh near the minimum width of the specimen. The motivation in this case was to investigate whether substructuring in elastic-plastic analysis requires any significantly additional computational effort due to the iterations that are necessary to satisfy the yield condition for yielded elements. These iterations are performed using

the modified Newton-Raphson technique. The notched tension specimen is also analyzed without using the substructuring technique and the computational efforts for the two cases are compared.

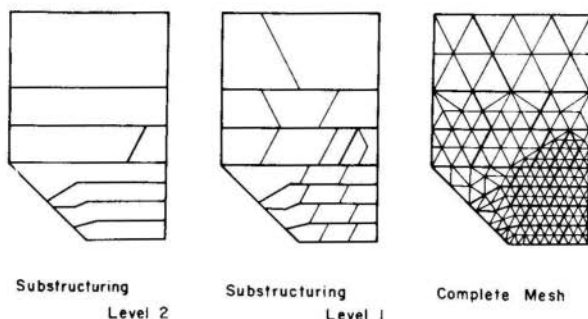


Fig. 4 Finite Element Model of the Notched Tension Specimen

The finite element mesh, in this case, is shown in Fig. 4, and the corresponding element and nodal point data is given in Table 1. As can be seen from this Table, the 2-level substructuring reduces the number of unknowns from 316 in the case of a model without substructuring to 180 with substructuring. The half band width of the total

Table 1. Element and Nodal Point Data of Example 2

<u>Without Substructuring</u>	<u>With Substructuring</u>
Total number of CST elements = 272	<u>Level 1</u>
Total number of nodes = 158	Total number of superelements = 22
Half band width = 52	Total number of nodes = 107
	<u>Level 2</u>
	Total number of superelements = 8
	Total number of nodes = 90
	Half band width = 52

stiffness matrix, on the hand, still remains the same. The requirements for storage of the stiffness matrix are reduced from 16,432 locations to 9,360 locations, almost half the initial requirement.

The solution for this problem in the plastic range for a monotonically increasing load is obtained for the two models using the incremental technique described earlier. The initial yield occurs at the notch root for both models and the two solutions remain identical at higher loads indicating the stability of the proposed substructuring technique for elastic-plastic finite element analysis.

It is of interest to compare the amount of computational effort that is required for the two models. This comparison is shown in Table 2, from which it is obvious that CPU time necessary for the solution using the substructuring technique is approximately 16% less than the one when no substructuring is employed.

Table 2. CPU Time on IBM 370/165 for Example 2

Total number of load increments	= 17	
Total number of iterations	= 23	
Therefore, total number of solutions	= 40	
	<u>Without</u>	<u>With</u>
	<u>Substructuring</u>	<u>Substructuring</u>
Total CPU time	213.7 sec	182.1 sec
CPU time per solution	5.34 sec	4.55 sec

CONCLUSIONS

From the solutions obtained for the two examples in the previous section, it may be concluded that the substructuring technique can be successfully employed in conjunction with the 'interface point' mesh-refinement scheme in elastic-plastic finite element analysis. A joint application of the substructuring and mesh-refinement schemes permits the analyst to select an extremely small mesh size near the point of interest in a problem and expand it easily to a coarse size without using the unnecessary large computer storage that would be required without substructuring. In addition, the use of the substructuring technique in elastic-plastic analysis leads to some savings of computational effort.

ACKNOWLEDGEMENTS

The research reported in this paper was supported by Grant No. GK-37150 from the National Science Foundation. The financial support NSF is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1]. Przemieniecki, J.S., 'Matrix Structural Analysis of Substructures,' AIAA Journal, Vol. 1. pp. 138-147 (1963).

- [2]. Rosen, R., and Rubinstein, M.F., 'Substructure Analysis by Decomposition,' Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 96, pp. 663-670 (1970).
- [3]. Furuike, T., 'Computerized Multiple Level Substructuring Analysis,' Computers and Structures, Vol. 2, pp. 1063-1073 (1972).
- [4]. Williams, F. W., 'Comparison Between Sparse Stiffness Matrix and Substructure Methods,' International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 383-394 (1973).
- [5]. Petersson, H. and Popov, E.P., 'Substructuring and Equation System Solutions in Finite Element Analysis,' Computers and Structures, Vol. 7, pp. 197-206 (1977).
- [6]. Gurujee, C.S. and Deshpande, V.L., 'An Improved Method of Substructure Analysis,' Computers and Structures, Vol. 8, pp. 147-152 (1978).
- [7]. Carey, G.F., 'A Mesh-Refinement Scheme for Finite Element Computations,' Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 7, pp. 93-105 (1976).
- [8]. Gupta, A.K., 'A Finite Element for Transition from a Fine to a Coarse mesh,' International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp. 35-45 (1978).
- [9]. Yamada, Y., Yoshimura, N., and Sakurai, T., 'Plastic Stress-strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method,' International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 10, pp. 343-354 (1968).
- [10]. Weisgerber, F.E., and Anand, S.C., 'Interpolative vs. Iterative Solution schemes for Tresca Yield Condition in Elastic-Plastic Finite Element Analysis,' International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp. 756-777 (1978).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-11

P.P. 156 - 165

PROGRAMA ANALISADOR DINÂMICO DE CASCAS
ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO

Domingos Boechat Alves

Prof. Titular - Depto. Eng. Mecânica
 CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Sumário

É apresentada uma descrição do processo computacional do Programa Analisador Dinâmico de Cascas (PADCAS) compostas de subcascas uniaxiais de revolução, reforçadas por anéis circulares e/ou nervuras longitudinais. Cada subcasca tem para geratriz da superfície de referência uma função analítica e o seu conjunto constitui uma função seccionalmente contínua. Inicialmente uma solução aproximada é obtida através de princípios energéticos e empregada, em seu refino usando uma generalização do processo iterativo de Vianello-Stodola.

Summary

In this work, the computational process used by the Shell Dynamic Analysis Program (PADCAS) for the determination of the frequencies and vibration mode functions of shells of revolution stiffened by reinforced rings and/or longitudinal strings, is presented. The reference surface generator, for the whole shell, can be a sectionally continuous function. Initially an approximated solution is obtained by energetic principles and used in an iterative generalized Vianello-Stodola process.

1. Introdução

Este trabalho descreve o processo utilizado pelo PADCAS, para determinação da solução estática e/ou dinâmica de estruturas constituídas por uma sucessão uniaxial de subcasca de revolução reforçadas por anéis circulares e nervuras longitudinais. Cada subcasca poderá ser modelada por um conjunto de elementos finitos curvos, do tipo ortotrópico ou sandwich, especificado pelo usuário. As subcasca apresentam ou não continuidade de forma em suas interligações. A função meridiano em cada elemento de cada subcasca apresenta uma forma quadrática, o que permite a continuidade da função e suas derivadas através das interfaces dos elementos.

2. O método de solução

A casca é representada por N elementos finitos de forma anular de geratriz curva e comprimento l no qual a configuração deslocamento é aproximada por uma combinação linear de oito funções linearmente independentes de modo a existir uma correspondência biunívoca entre os coeficientes da função, α_i , ($i = 1, 8$) e os deslocamentos e rotações das interfaces dos elementos, i . É, os α_i 's podem ser expressos em termos das três componentes do deslocamento e da rotação meridional nos contornos dos elementos. Todas as condições de compatibilidade são automaticamente satisfeitas se as $4(N+1)$ componentes do deslocamento do contorno são selecionadas como coordenadas generalizadas.

O uso do método do elemento finito, com as coordenadas generalizadas dadas pelas componentes do deslocamento de sua interface, tem sido empregada por pesquisadores usando soluções standard tais como Cholesky-Givens, rotações pivotaes de Jacobi, etc., entretanto este procedimento é limitado por um aumento de tempo computacional e por problemas de precisão numérica para valores grandes de N , sendo portanto restrito a problemas de autovalores de pequena ordem.

A formulação aqui apresentada é uma variante da técnica de solução usada no PROASED - Programa Analisador Dinâmico de Sistemas Estruturais [1]. Na solução para o J -ésimo

modo, associado com um número de onda circunferencial, o estado da casca é caracterizado pelos coeficientes de J configurações deslocamentos total da estrutura, dos quais os J-1 primeiros são aproximações mais precisas, previamente determinadas, dos J-1 primeiros modos e a J-ésima função é a aproximação da J-ésima forma modal. A maior frequência, solução do problema de autovalores de ordem J, fornece uma aproximação intermediária do J-ésimo modo, a qual é usada no cálculo da carga estática equivalente e, através desta, uma nova aproximação melhorada do J-ésimo modo é calculada. Este processo é repetido até a obtenção da precisão desejada.

As funções configuração-deslocamento de toda a estrutura são determinadas por uma combinação linear de configurações de cargas ou deslocamentos especificados pelo usuário. A condição necessária e suficiente para que a solução convirja para uma determinada forma modal é que as cargas especificadas contêmam uma participação do modo desejado, e a sua convergência é tanto mais rápida quanto maior for a participação deste modo nas funções deslocamento associadas às cargas especificadas.

A repetição do processo iterativo descrito acima requer a determinação da configuração deslocamento, D, associada a uma configuração de carga P. Essas soluções são obtidas através da superposição da configuração deslocamento da estrutura como um todo, quando se vincula todas as interfaces dos elementos, D', com a configuração deslocamento, D'', obtida aplicando nos contornos dos elementos com interfaces não vinculadas, exceto condições vinculares de contorno, a configuração deslocamento produzida pela configuração de forças fixas de contorno com o sinal trocado.

Designando por (fig. 1)

$$X_m^\pm = [U_m^\pm, F_m^\pm] = [u_{1m}^\pm, u_{2m}^\pm, u_{3m}^\pm, u_{4m}^\pm, f_{1m}^\pm, f_{2m}^\pm, f_{3m}^\pm, f_{4m}^\pm] \quad (2.1)$$

os vetores de estado nas faces origem (-) e término (+) do m-ésimo elemento, no qual os quatro primeiros elementos são componentes do vetor deslocamento U e os quatro últimos as componentes do vetor tensão resultante, tem-se

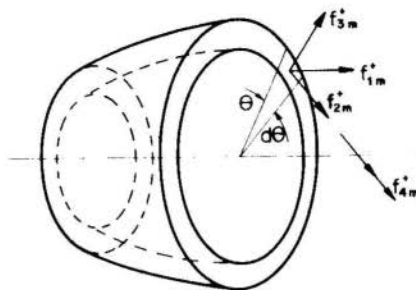
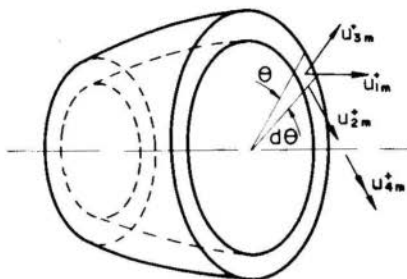
Componentes do vetor forças seccionais F_m Componentes do vetor deslocamento U_m

Fig. 1 - Componentes do vetor estado da face término do m-ésimo elemento.

$$X_m^+ = \bar{T}_m X_m^- + \bar{Q} \quad (2.2)$$

onde \bar{T}_m é uma matriz de ordem oito cujas submatrizes de ordem quatro são determinadas em função das submatrizes de mesma ordem da matriz de rigidez intrínseca, K , do m-ésimo elemento por

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11}^m &= - (K_{12}^m)^{-1} K_{11}^m \\ \bar{T}_{12}^m &= (K_{12}^m)^{-1} \\ \bar{T}_{21}^m &= K_{21}^m - K_{22}^m (K_{12}^m)^{-1} K_{11}^m \\ \bar{T}_{22}^m &= K_{22}^m (K_{12}^m)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

e \bar{Q} é o vetor definido por

$$\begin{aligned}\bar{G}_1^m &= (K_{12}^m)^{-1} \bar{F}_m^+ \\ \bar{G}_2^m &= K_{21}^m (K_{12}^m)^{-1} \bar{F}_m^- + \bar{F}_m^+\end{aligned}\quad (2.4)$$

sendo \bar{F}_m^- e \bar{F}_m^+ os vetores forças atuantes nas faces origem e término do m-ésimo elemento sujeito às forças de superfície e com bordas fixas. A matriz \bar{T} e o vetor \bar{Q} são denominados matriz de transferência e vetor carga, respectivamente.

Compatibilidade de deslocamento e condições de equilíbrio da (m+1)-ésima borda comum ao m-ésimo e (m+1)-ésimo elemento fornecem, respectivamente,

$$U_m^+ = U_{m+1}^- \quad (2.5)$$

$$F_m^+ + F_{m+1}^- + \bar{K}_{m+1} U_m^+ + \bar{S}_m = 0 \quad (2.6)$$

onde \bar{K}_{m+1} é a matriz de rigidez definidora da influência de um anel de reforço situado na (m+1)-ésima borda e \bar{S}_{m+1} é o vetor carga externa aplicado ao anel.

Denotando por

$$R_{m+1} = \begin{bmatrix} I_4 & \Theta \\ -\bar{K}_{m+1} & -I_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S_{m+1} = \begin{Bmatrix} \Theta \\ -\bar{S}_{m+1} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

as equações (2.5) e (2.6) podem ser combinadas em

$$X_{m+1}^- = R_{m+1} \bar{T}_m X_m^- + R_{m+1} G_m + S_{m+1} \quad (2.8)$$

As quantidades X_1^- e X_{N+1}^+ são especificadas como condições de contorno nas faces extremas da casca, e a partir da face inicial pode-se escrever com

$$T_m = R_{m+1} \bar{T}_m \quad \text{e} \quad G_m = R_{m+1} \bar{G}_m \quad (2.9)$$

$$X_2^- = T_1 X_1^- + G_1 + S_2$$

$$X_3^- = T_2 T_1 X_1^- + T_2(G_1 + S_2) + (G_2 + S_3)$$

$$X_4^- = T_3 T_2 T_1 X_1^- + T_3 T_2(G_1 + S_2) + T_3(G_2 + S_3) + G_3 + S_4$$

$$\vdots$$

$$X_{m+1}^- = \left(\prod_{k=1}^m T_i \right) X_1^- + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\prod_{j=k+1}^m T_j \right) (G_k + S_{k+1}) + (G_m + S_{m+1})$$

$$\vdots$$

$$X_{N+1}^- = \left(\prod_{k=1}^N T_i \right) X_1^- + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\prod_{j=k+1}^N T_j \right) (G_k + S_{k+1}) + (G_N + S_{N+1})$$

...(2.10)

A última equação (2.10) é compactada em

$$\bar{Y} = \bar{A} X_1 + \bar{B} \quad (2.11)$$

Seja P_1 a matriz representativa da permutação que reordena o vetor \bar{X}_1 de tal forma que p grandezas conhecidas apareçam nas p primeiras posições. Similarmente P_2 reordena o vetor \bar{Y} com grandezas conhecidas nas q primeiras posições. Então com

$$X = P_1 \bar{X}_1 \quad Y = P_2 \bar{Y}$$

$$A = P_2 \bar{A} P_1 \quad e \quad B = P_2 \bar{B} \quad (2.12)$$

tem-se

$$Y = A X_1 + E \rightarrow \begin{Bmatrix} Y_c \\ Y_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_c \\ X_d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

de onde resulta

$$X_d = A_{12}^{-1} (Y_c - A_{11} X_c - B_1) \quad (2.14)$$

$$Y_d = A_{12} X_c + A_{22} X_d + B_2 \quad (2.15)$$

Assim, calculados X_d e Y_d usando as condições de contorno extremas forma-se X_1 e através das relações (2.10) de terminam-se os vetores de estado X_k para $k = 2, n$.

3. Estrutura do programa PADCAS

Foi codificado em FORTRAN IV um programa digital para a implementação do processo descrito anteriormente. A figura 2 apresenta a sequência de subprogramas que o PADCAS utiliza na solução das funções modais de vibrações livres. A finalidade de cada um desses subprogramas é sumarizada abaixo.

A subrotina LEDADO lê o cartão de controle geral, as propriedades geométricas do meridiano das subcasca, as propriedades mecânicas das subcasca, dos anéis e das nervuras longitudinais, o número aproximado desejado de elementos em cada subcasca, posição de anéis e vínculos especiais.

O subprograma PROCED processa esses dados e determina as submatrizes armazenadoras das propriedades geométricas do meridiano (PRMERD), dos elementos de cada subcasca (PRCASC), dos anéis de reforços (PRANEL), das nervuras longitudinais (PRNERV), das condições de contorno (PRCONT), e dos vínculos especiais (PRVINC). Além disso esse subprograma determina os endereços do início de todas as submatrizes, as quais são armazenadas sequencialmente em uma matriz global A (fig. 2), e constroi as matrizes de coordenadas origem dos elementos casca (XSUB), o número e o tamanho axial desses elementos (NELE e XELE).

No subprograma CASCAM, as matrizes de rigidez e massa de cada elemento (MRIGD, MMSS) são construídas e armazenadas em A. Similarmente são construídas as matrizes de tensões para os extremos do elemento (TENSA e TENS B). Quando o espaço reservado em A, para essas matrizes, se esgotar, o programa as transfere para unidades secundárias de armazenamento (discos). De maneira similar, no subprograma ANELM, são construídas e armazenadas as matrizes de rigidez e massa dos anéis e nervuras longitudinais (MRRIGD, MRMSS, MNRIGD, MNMSS).

O subprograma SEQRED constroi as matrizes

$$\prod_{i=1}^m T_i \quad \text{e} \quad \prod_{j=k+1}^m T_j$$

as reordena, de acordo com as relações (2.12) e as condições vinculares da estação considerada, e as armazena em unidades

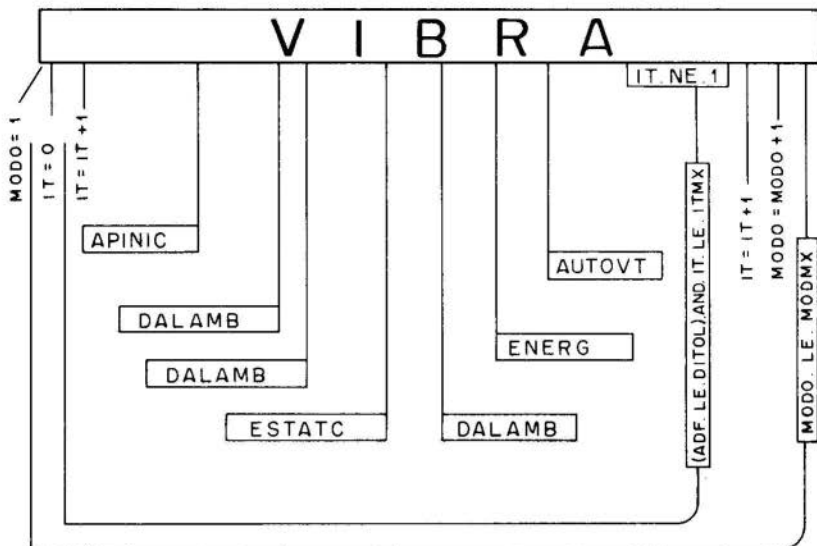


Fig. 3 - Fluxograma reduzido do subprograma VIBRA.

iteração para o M-ésimo modo é obtido o valor máximo das diferenças, ADF.

$$X(K,M,I) - X(K,M,I-1), \quad K = 1, N$$

O subprograma compara as variáveis IT e ADF, respectivamente, com os limites máximos ITMX, DITOL, retornando ao seu início se um desses limites for alcançado.

Após alcançar a última forma modal, o subprograma retorna ao programa principal para impressão dos resultados.

Antes dessa impressão, são escritos vários valores de erros, tais como, erros energéticos máximos, erros no equilíbrio de forças nas diversas estações e, também, nos diversos elementos, os quais constituem uma informação de grande valia na verificação da validade da solução.

4. Agradecimento

O autor agradece à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e à Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) que

apoiaram a realização desta pesquisa.

Bibliografia

- |1| Den Hartog, J.P., Advanced strength of material, McGraw-Hill Book Company, Inc., pp. 268-273 (1952)
- |2| Alves, D.B., Programa Analisador Dinâmico de Sistemas Estruturais, V COBEM, Campinas (SP), (1979).
- |3| Alves, D.B., Características dinâmicas de sistemas de cascas uni-axiais de revolução, Centro Tecnológico - UFSC, Florianópolis(SC).



TENSÕES POR AÇÃO GRAVITACIONAL EM UMA ESFERA MACIÇA
 - APLICAÇÕES PARA O ESTUDO DOS PLANETAS -

Carlos Fernando Martins Pamplona

Prof. Associado - Dept^o de Eng. Mecânica
 PUC/RJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Sidney Stuckenbruck

Prof. Associado - Dept^o de Eng. Mecânica
 PUC/RJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

SUMÁRIO

A análise da distribuição de densidades em corpos esféricos de grandes dimensões é feita com base nas tensões geradas pela ação gravitacional, verificando-se que uma expressão na forma elíptica para distribuição radial de massas específicas fornece resultados razoáveis para as propriedades mecânicas no interior da Terra. Modelos para a distribuição de densidades dos planetas terrestres e Lua são propostos, baseados na hipótese de semelhança para os materiais dos núcleos densos. Os valores do momento de inércia para Venus e Mercúrio são estimados.

SUMMARY

The analysis of the density distribution in large spherical bodies was made based on the stresses generated by gravitational action. It was found that an elliptical expression for the radial density distribution gives reasonable results for the mechanical properties of Earth interior. Starting with this assumption, several models for density distribution for terrestrial planets and moon were proposed, based on the assumption of similarity of core material of these bodies. The values of moment of inertia of inner planets are proposed.

1. Introdução

Os dois parâmetros básicos que indicam a distribuição de propriedades mecânicas no interior de um planeta [1], a massa específica média $\bar{\rho}$ e o momento de inércia em relação ao eixo polar $I = z M R^2$ (onde M é a massa, R o raio e z o momento de inércia adimensional do planeta), podem ser determinados pela análise da trajetória de satélites ou sondas espaciais no campo gravitacional do planeta.

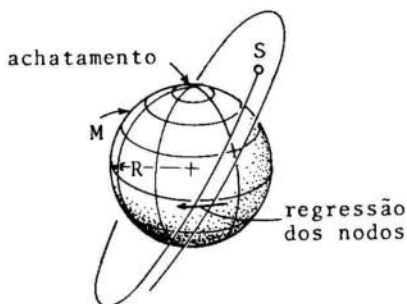


Fig. 1. Massa e momento de inércia dos planetas: determinados pela análise da trajetória de seus satélites (período, semi-eixo maior da órbita, regressão dos nodos)

Além da composição química e estrutura cristalográfica, são importantes as propriedades elásticas dos materiais bem como sua variação com a pressão [2]. De especial interesse é a relação K/ρ (módulo de elasticidade volumétrico/massa específica), relacionada com as velocidades de propagação das ondas mecânicas (ondas sísmicas [3]), bem como o valor $\partial K/\partial P$ que ocupa uma posição de destaque na análise do comportamento mecânico de materiais submetidos à altas pressões (P) [4].

A determinação das tensões geradas pela ação gravitacional auto-induzida no interior do planeta é proposta no presente trabalho, inicialmente supondo o material elástico e homogêneo e em seguida levando-se em conta a variação das propriedades mecânicas provocada por aquelas tensões e a presença de um núcleo denso.

Através desses resultados, estabelece-se um modelo de distribuição de densidades para o interior da Terra que é comparado com as informações disponíveis através da Sismologia. Testado o modelo, ele é então aplicado aos demais planetas terrestres permitindo que se faça uma estimativa do momento de inércia e raio do núcleo pesado de Venus e Mercúrio, valores desconhecidos pelo fato desses planetas não possuírem satélites naturais conhecidos.

2. Tensões Devido a Ação Gravitacional

A ação gravitacional auto-induzida em um elemento de massa de uma esfera maciça formada de camadas esféricas

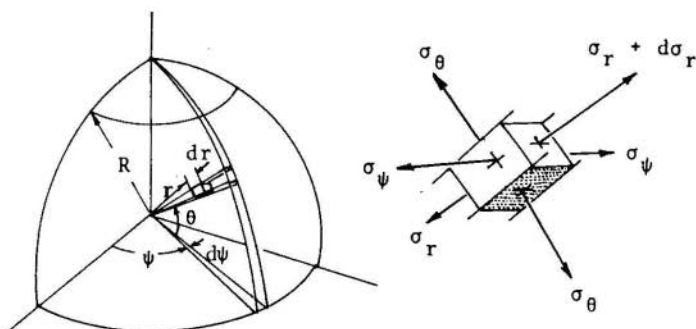


Fig. 2. Tensões geradas por ação gravitacional em um elemento em coordenadas esféricas

concêntricas, isótropas e homogêneas, provoca tensões que, levando em consideração as condições de equilíbrio do elemento, nos permitem escrever, dada a simetria geométrica e do carregamento, que

$$r^2 \frac{d\sigma_r}{dr} + 2r(\sigma_r - \sigma_\theta) = G \rho M_r \quad (1)$$

onde M_r é a massa do núcleo interno de raio \underline{r} .

2.1. Tensões Considerando a Esfera Homogênea

Para uma esfera homogênea com propriedades elásticas constantes (caso simplificado para astros de pequenas dimensões como a Lua, cujo valor do momento de inércia adimensional z se aproxima do valor $2/5$ correspondente ao de uma esfera homogênea) teremos $\rho(r) = \bar{\rho}$, $M_r = \frac{4}{3} \pi r^3 \bar{\rho}$ e, chamando $\eta = r/R$, (1) se torna:

$$\eta^2 \frac{d\sigma_r}{d\eta} + 2\eta(\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{4}{3} \pi G R^2 \bar{\rho}^2 \eta^3. \quad (2)$$

Para um material sem rigidez, incapaz de suportar tensões tangenciais (o que para esferas de grandes proporções como os corpos celestes é uma hipótese razoável tendo em vista o fenômeno da fluência [4]), teremos um estado hidrostático de tensões ($\sigma_r = \sigma_\theta = -P$) e obtemos, da integração de (2),

$$P = \frac{2}{3} \pi G \bar{\rho}^2 R^2 (1 - \eta^2). \quad (3)$$

Para uma esfera com as dimensões da Lua ($R = 1.738$ km e $\bar{\rho} = 3.344$ kg m⁻³ [2]), suposta homogênea, obtem-se para o centro:

$$(P_0)_{\text{Lua}} = 0,0472 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}.$$

Supondo, por outro lado, que não ocorra o escoamento do material e que este se comporte na fase elástica, a integração de (2), usando a Lei de Hooke para pequenas deformações [7], nos leva a

$$\sigma_r = -2 \pi G \bar{\rho}^2 R^2 \frac{3-\nu}{15(1-\nu)} (1 - \eta^2) \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = -2 \pi G \bar{\rho}^2 R^2 \frac{3-\nu}{15(1-\nu)} \left(1 - \frac{1+\nu}{3-\nu} \eta^2\right) \quad (5)$$

que aplicadas à Lua (para um coeficiente de Poisson $\nu = 0,300$) nos fornecem

$$(P_0)_{\text{Lua}} = 0,0364 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}.$$

2.2. Tensões Considerando a Variação das Propriedades Mecânicas com a Pressão

O elevado valor das tensões calculadas no item precedente nos permite concluir que a hipótese da invariância das propriedades mecânicas (densidade e elasticidade) com a distância ao centro é descabida, exceto para astros de pequenas dimensões. Desta forma, consideraremos para os demais casos a massa específica ρ , o módulo de elasticidade volumétrico K e a pressão P (estado hidrostático de tensões), em pontos do interior da esfera, como variáveis em função da distância ao centro r .

Para um estado hidrostático de tensões, de (1) tiramos

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{-\delta}{\eta^2} \int_0^\eta \delta \eta^2 d\eta \quad (6)$$

e da definição do módulo de elasticidade volumétrico [4]

$$K = \rho \frac{dP}{d\rho} \quad \text{ou} \quad k = \delta \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{d\delta} \quad (7)$$

obtemos

$$k = - \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^2 \left(\frac{d\eta}{d\delta}\right) \int_0^\eta \delta \eta^2 d\eta, \quad (8)$$

onde $\delta = \rho/\bar{\rho}$, $k = K/4 \pi G R^2 \bar{\rho}^2$ e $p = P/4 \pi G R^2 \bar{\rho}^2$.

Supondo que o material tenha um módulo de elasticidade variável com a pressão segundo a lei linear [4]

$$k = k_1 + b p \quad (9)$$

onde k_1 é o valor de k na superfície ($\eta=1$) onde $P=0$ e b é o valor de dk/dp , suposto constante, obtem-se a equação de estado

Tabela I . Parâmetros adimensionais correspondentes a um módulo de elasticidade (k) variável na forma $k = k_1 + b p$ ($b = dk/dp$).

(a)	Densidade Relativa no Centro da Esfera ($\delta_0 = \rho_0 / \bar{\rho}$)				
δ_1	b = 2,0	b = 2,5	b = 3,0	b = 3,5	b = 4,0
0,999	1,0015	1,0015	1,0015	1,0015	1,0015
0,900	1,1580	1,1509	1,1444	1,1385	1,1330
0,800	1,3324	1,3021	1,2771	1,2559	1,2369
0,700	1,5232	1,4514	1,3947	1,3547	1,3206
0,600	1,7303	1,5972	1,5048	1,4365	1,3849
(b)	Módulo de Elasticidade Adimensional na Superfície $k_1 = -\delta_1^2 / 3\delta_1$				
δ_1	b = 2,0	b = 2,5	b = 3,0	b = 3,5	b = 4,0
0,999	66,497	66,472	66,448	66,425	66,403
0,900	0,5637	0,5423	0,5218	0,5021	0,4832
0,800	0,2325	0,2137	0,1966	0,1810	0,1669
0,700	0,1239	0,1079	0,0942	0,0823	0,0720
0,600	0,0712	0,0582	0,0478	0,0393	0,0323
(c)	Pressão Adimensionalizada no Centro ($p_0 = P_0 / 4 \pi G R^2 \bar{\rho}^2$)				
δ_1	b = 2,0	b = 2,5	b = 3,0	b = 3,5	b = 4,0
0,999	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667
0,900	0,1848	0,1842	0,1836	0,1831	0,1826
0,800	0,2062	0,2034	0,2011	0,1990	0,1968
0,700	0,2313	0,2241	0,2184	0,2137	0,2101
0,600	0,2606	0,2460	0,2353	0,2270	0,2211
(d)	Momento de Inércia Adimensional ($z = C / MR^2$)				
δ_1	b = 2,0	b = 2,5	b = 3,0	b = 3,5	b = 4,0
0,999	0,3999	0,3999	0,3999	0,3999	0,3999
0,900	0,3883	0,3885	0,3888	0,3890	0,3892
0,800	0,3761	0,3771	0,3780	0,3789	0,3797
0,700	0,3633	0,3657	0,3679	0,3698	0,3715
0,600	0,3501	0,3546	0,3584	0,3618	0,3647

$$k = \frac{k_1}{(\delta_1)^b} \delta^b. \quad (10)$$

Substituindo (10) em (8), obtemos a equação diferencial para δ ,

$$\frac{d^2\delta}{dn^2} + \frac{2}{n} \frac{d\delta}{dn} + \frac{b-2}{\delta} \left(\frac{d\delta}{dn}\right)^2 + \frac{\delta_1^b}{k_1} \delta^{3-b} = 0. \quad (11)$$

A integração de (11) foi feita [1] numericamente pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, nos permitindo obter os resultados apresentados na Tabela I, para valores de $b = dk/dp$ entre 2,0 e 4,0 (faixa que abrange a maioria dos materiais terrestres e meteoríticos [5]).

Supondo a Lua constituída de uma única fase de um mesmo material que se adensa no sentido do centro em decorrência da pressão segundo a equação de estado (10) e levando em conta o valor de $z = 0,392$ [12], obtemos os resultados indicados na Tabela II que informam as características mecânicas do material lunar na superfície e no centro.

Tabela II. Características do material lunar segundo a hipótese $K = K_1 + b P$

b	ρ_1	K_1	ρ_0	K_0	P_0
3,0	3,109	0,219	3,689	0,371	50,60
3,5	3,102	0,212	3,684	0,389	50,57
4,0	3,100	0,198	3,676	0,400	50,53

Unidades: $\rho \rightarrow 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; $K \rightarrow 10^{11} \text{ N m}^{-2}$; $P \rightarrow 10^8 \text{ N m}^{-2} (\text{kb})$

2.3. Tensões Considerando uma Distribuição de Densidade Segundo a Forma Elíptica

Uma função que se ajusta à condição $dk/dp = 3,5$ [1] é

$$\delta = \delta_0 (1 - an^2)^{1/2}. \quad (12)$$

Variando o parâmetro a entre 0 e 1, construiu-se a Tabela III [1].

Tabela III. Parâmetros adimensionais correspondentes à distribuição de densidades na forma elíptica: $\delta = \delta_0 (1 - an^2)^{1/2}$

a	δ_1	k_1	(dK/dP)	δ_0	k_0	P_0	z
0,000	1,0000	∞	3,6000	1,0000	∞	0,1667	0,4000
0,001	0,9998	332,93	3,5997	1,0003	333,53	0,1667	0,3999
0,010	0,9980	32,933	3,5979	1,0030	33,534	0,1670	0,3998
0,100	0,9786	2,9358	3,5782	1,0315	3,5468	0,1702	0,3976
0,200	0,9539	1,2718	3,5534	1,0665	1,8956	0,1743	0,3948
0,300	0,9250	0,7194	3,5251	1,1056	1,3581	0,1791	0,3917
0,400	0,8906	0,4453	3,4922	1,1498	1,1017	0,1847	0,3880
0,500	0,8488	0,2829	3,4545	1,2004	0,9607	0,1914	0,3837
0,600	0,7965	0,1770	3,4069	1,2594	0,8812	0,1996	0,3786
0,700	0,7284	0,1041	3,3493	1,3298	0,8421	0,2099	0,3721
0,800	0,6334	0,0528	3,2749	1,4164	0,8359	0,2237	0,3639
0,900	0,4835	0,0179	3,1722	1,5291	0,8659	0,2431	0,3525
1,000	0,0000	0,0000	3,0000	1,6977	0,9607	0,2761	0,3333

Para uma esfera com as dimensões da Lua, obtemos $\rho_1 = 3,10$ e $\rho_0 = 3,64 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; $K_1 = 0,215$ e $K_0 = 0,396 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$; $P_0 = 50,6 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$; valores que se ajustam aos obtidos no item 2.2 (Tab. II).

2.4. Tensões Considerando a Presença de um Núcleo Pesado

O baixo valor do momento de inércia adimensional da Terra ($z = 0,3308$) e de outros planetas, quando comparados com os valores apresentados nas Tabelas I(d) e III, é uma evidência de que não se pode supor o planeta como consti-

tuido de um único material que se adensa continuamente no sentido do centro. Esta conclusão está de acordo com a hipótese da formação da Terra por acrescentamento de partículas em um certo ponto da nebulosa solar, que gerou a formação de um corpo esférico basicamente homogêneo [9]. O estágio seguinte consistiu no aquecimento, principalmente devido à radioatividade, que resultou na fusão do ferro junto a superfície, onde eram menores as pressões, dando formação a grandes "gotas" que depois afundaram na direção do centro pela ação gravitacional. Segundo B. H. Mason [10], a superfície original da proto-Terra teria sido "engolfada e digerida", não restando hoje nenhum vestígio da mesma.

Imaginaremos neste item a esfera constituída de dois materiais, ou duas fases de um mesmo material: a) um núcleo denso (metálico) e b) um manto mais leve (silicatado).

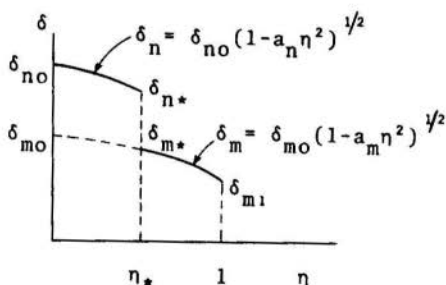


Fig. 3. Distribuição de densidades considerando a presença de um núcleo pesado

A Fig. 3 mostra a distribuição de densidades em função da distância ao centro tendo-se adotado a relação (12) que se mostrou satisfatória em termos do valor dk/dp e onde o índice \underline{n} se refere ao núcleo, \underline{m} ao manto e o subscrito (*) à interface entre o núcleo e o manto.

Na superfície teremos,

$$\delta_{m1} = \delta_{m0} (1 - a_m)^{1/2}$$

$$k_{m1} = \frac{\delta_{m1}}{3} \left(\frac{1 - a_m}{a_m} \right)$$

e

$$a_m = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{m1} + 3k_{m1}} \quad (13)$$

que nos dão a distribuição de densidades no manto, pelo conhecimento das características mecânicas do material na superfície (δ_{m1} e k_{m1}).

A distribuição de densidades no núcleo (determinada pelos parâmetros δ_{no} , a_n e η_*) pode ser obtida [1] levando em conta os valores conhecidos da massa total, do momento de inércia z e do fato que o módulo de elasticidade não sofre descontinuidade entre o manto e o núcleo ($K_{m*} = K_{n*}$) [3] vínculos que nos permitem obter um sistema determinado de 3 equações a 3 incógnitas.

Como um teste do método proposto, utilizaremos os valores conhecidos para o manto superior da Terra (indicados pelo equilíbrio da crosta - Isostasia [4]), a saber

$$\rho_{m1} = 3,31 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \text{ e } K_{m1} = 0,800 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

bem como os dados conhecidos [2]

$$\bar{\rho} = 5,52 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}, R = 6,37 \times 10^6 \text{ m e } z = 0,331$$

que nos permitem obter $\delta_{m1} = 0,600$ e $k_{m1} = 0,0742$, que levados em (13) fornecem $a_m = 0,7214$ e $\delta_{mo} = 1,137$.

As restrições de massa total, momento de inércia e módulo de elasticidade, nos conduzem a

$$\eta_* = 0,556 \quad a_n = 1,10 \quad \text{e} \quad \delta_{no} = 2,20$$

A Tabela IV dá uma idéia da precisão do método, comparando os resultados obtidos com as informações sismológicas disponíveis [6].

Calculando as pressões na Terra através da integração de (6), utilizando-se os valores adotados para a_m , δ_{mo} , a_n , δ_{no} e δ_* obtemos:

$$p_* = 0,1269$$

$$P_* = 1,315 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

$$p_o = 0,3421$$

$$P_o = 3,544 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

que comparados com os valores obtidos pelas informações sismológicas [6], a saber,

$$P_* = 1,352 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2} \quad \text{e} \quad P_o = 3,617 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

nos indicam uma diferença de 3%.

Tabela IV. Propriedades Mecânicas do Material Terrestre (a) calculadas segundo o método proposto e (b) determinadas pelas informações sismológicas [6].

	ρ_{no}	ρ_{n*}	ρ_{m*}	K_{no}	K_{n*}	K_{m*}	R_*
(a)	12,1	9,86	5,53	15,2	7,26	7,26	3,54
(b)	12,6	9,96	5,53	13,6	6,35	6,43	3,49
USI	10^3 kg m^{-3}			10^{11} N m^{-2}			10^6 m

3. Modelos para os Planetas Terrestres

3.1. Modelos para a Terra, Lua e Marte

O conhecimento do interior de nosso planeta, desenvolvido pelos estudos sismológicos, nos permite estabelecer pares de valores para a massa específica (ρ_{m1}) e módulo de elasticidade volumétrica (K_{m1}) na superfície que, segundo o método introduzido no capítulo precedente, nos levam a obter o valor conhecido $\eta_* = 0,547$ para o raio do núcleo pesado da Terra. A partir desses resultados é possível construir-se uma série de modelos para o interior da Terra dos quais foi selecionado o que mais se ajusta aos valores indicados por Anderson e Hart (1977) [6] que correspondem, para o material do núcleo, a uma massa específica $\rho_{n1} = 5,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, reduzida à pressão zero.

A partir dos resultados obtidos para a Terra e, partindo do pressuposto que o material do núcleo da Lua e Mar

te é da mesma natureza, tornou-se possível elaborar a Tabela V que apresenta um modelo proposto para cada um desses astros, dos quais se conhece o momento de inércia \underline{z} .

Tabela V. Modelos propostos para a Lua, Marte e Terra

	(USI)	L U A		M A R T E		T E R R A	
		PROP.	[11]	PROP.	[8]	PROP.	[6]
ρ_{no}	10^3	6,320	5,223	7,54	—	12,32	12,58
ρ_{n*}	kgm^{-3}	6,275	5,209	7,04	—	10,06	9,96
ρ_{m*}		3,415	3,434	3,94	—	5,60	5,53
η_*		0,249	(0,2)	0,458	0,455	0,547	0,547
R_*	10^6 m	0,438	0,338	1,555	1,544	3,485	3,485
K_{no}		1,498	1,423	3,04	—	15,45	13,64
K_{n*}	10^{11}	1,461	1,400	1,59	—	7,51	6,35
K_{m*}	N m^{-2}	1,461	1,745	1,59	—	7,51	6,43
P_{no}		0,0583	0,053	0,385	—	3,584	3,617
P_{n*}		0,0479	0,048	0,203	—	1,354	1,352

3.2. Modelos para Venus e Mercúrio

A ausência de satélites naturais para esses dois planetas interiores do sistema solar impossibilitou, até o presente, o conhecimento do momento de inércia, importante informação relativa ao desenvolvimento de modelos para suas constituições.

No caso do planeta Venus, que por suas proporções muito se assemelha à Terra, faremos a hipótese de que os materiais, do manto e do núcleo, sejam da mesma natureza dos materiais terrestres ($\rho_{m1} = 3,30 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ e $K = 0,770 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$).

Adotando-se os valores conhecidos ($R = 6,055 \times 10^6 \text{ m}$ e $\bar{p} = 5,246 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ [2]) obtemos

$$\delta_{m1} = 0,629 \quad k_{m1} = 0,0910 \quad a_m = 0,6973 \quad \delta_{m0} = 1,1433$$

Para cada valor atribuído a η_* , obteve-se os correspondentes de a_n , δ_{no} e z . Desses valores, selecionou-se aqueles que dão, para o material do núcleo, o valor $\rho_{n1} = 5,9 \times 10^3 \text{ kg m}^3$, correspondente ao material terrestre, reduzido à pressão zero, nos permitindo propor para Venus:

$$\eta_* = 0,532 \quad z = 0,336 \quad R_* = 3,22 \times 10^6 \text{ m}$$

(VENUS)

$$\rho_{no} = 11,6 \times 10^3 \quad \rho_{n*} = 9,65 \times 10^3 \quad \rho_{m*} = 5,37 \times 10^3 \text{ (kg m}^{-3}\text{)}.$$

A incerteza na determinação do diâmetro de Mercúrio nos permite apenas uma estimativa grosseira de sua massa específica mas que, apesar de tudo, desde 1960 [2] se sabe que é grande para as dimensões do planeta ($\bar{\rho} = 5,4 \times 10^3 \text{ kg m}^3$). Não seria plausível portanto, supor-se que o material do manto fosse semelhante ao da Terra e Venus.

Adotando-se para o material do manto de Mercúrio as características mecânicas da Olivina Ferrosa (Faialita) para a qual se conhece [5]

$$\rho = 4,39 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad e \quad K = 1,32 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

e como para Mercúrio, $R = 2,443 \times 10^6 \text{ m}$, obtemos:

$$\delta_{m1} = 0,8130 \quad k_m = 0,9045 \quad e \quad (dk/dp)_1 = 4,9.$$

Procedendo da mesma forma como foi feito para o planeta Venus, selecionou-se o modelo que nos leva às mesmas características para o material do núcleo, que corresponde a

$$\eta_* = 0,760 \quad z = 0,371 \quad R_* = 1,86 \times 10^6 \text{ m}$$

(MERCÚRIO)

$$\rho_{no} = 6,89 \times 10^3 \quad \rho_{n*} = 6,27 \times 10^3 \quad \rho_{m*} = 4,66 \times 10^3 \text{ (kg m}^{-3}\text{)}.$$

4. Conclusão

A introdução da função elíptica (12) para representar a distribuição de densidades no interior dos planetas ter-

restres se mostrou adequada, principalmente no que diz respeito à variação do módulo de elasticidade com a pressão (dK/dP em torno de 3,5). Através dela tornou-se possível estabelecer estimativas dos parâmetros que descrevem as propriedades mecânicas daqueles astros, baseado na hipótese da uniformidade de propriedades mecânicas para os materiais de seus núcleos densos. Os resultados obtidos nos permitem propor uma equação que se ajusta ao comportamento do módulo de elasticidade em função da pressão, a saber

$$K = 1,31 + 4,69 P - 0,0222 P^2 \quad (10^{11} \text{ N m}^{-2}) \quad (14)$$

onde $K_1 = 1,31 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ e $(dK/dP)_1 = 4,69$, valores compatíveis com os materiais meteoríticos (olivina, piroxênio, etc [5]).

A estimativa da pressão no centro da Terra, do módulo de elasticidade do material no centro da Lua, do raio do núcleo pesado de Venus ou do momento de inércia de Mercúrio, presentes neste trabalho, não visam o interesse intrínseco dessas determinações. Da mesma forma que um astrônomo, ao medir a distância de uma galáxia longínqua, está motivado pelo problema maior da natureza do Cosmos, teve-se em mente coletar informações que possam fortalecer uma teoria sobre a origem e a formação do Sistema Solar.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Pamplona, C.F.M., "Tensões Geradas por Ação Gravitacional Auto-Induzida em uma Esfera Maciça", Tese de Mestrado - PUC/RJ, (1978).
- [2] Cook, A.H., "The Internal Structures of the Planets", Journal of Geophysical Research, Vol.42, (1975).
- [3] Bullen, K.E., "An Introduction to the Theory of Seismology", (3^a ed.), Cambridge University Press, (1963).

- [4] Birch, F., "Elasticity and Constitution of the Earth's Interior", J.G.R. - Vol. 57, (1952).
- [5] Davies, G.F., "The Estimation of Elastic Properties from Analogue Compounds", J.G.R. -Vol. 44, (1976).
- [6] Anderson & Hart, "Earth Model", J.G.R.- Vol. 82 , (1977).
- [7] Lowe, A.E.H., "The Mathematical Theory of Elasticity", (4^a ed.), Dover Publications, N.Y., (1944).
- [8] Reasenberg, R., "The Moment of Inertia and Isostasy of Mars", J.G.R. - Vol. 82, (1977).
- [9] Elsasser, W.M., "História Precoce da Terra", Earth Science and Meteoritics (1-30), John Wiley e Sons, (1963).
- [10] Mason, B.H., "Princípios de Geoquímica", Tradução: Rui Ribeiro Franco, Editora U.S.P., (1966).
- [11] Bills, B.G. & Ferrari, A.J., "A Lunar Density Model Consistent With Topography, Gravitational, Librational and Seismic Data", J.G.R.- Vol. 82, (1977).
- [12] Blackshear, W.T. & Gapcynski, J.P., "An Improved Value of the Lunar Moment of Inertia", J.G.R., Vol. 82, (1977).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO TÉCNOLÓGICO
 TECHNICAL PAPER

N.º DT-05

P.P. 181 - 190

ARQUITETURA DE UM SISTEMA MODULAR DE ELEMENTOS FINITOS

II - APLICAÇÕES.

Clovis Sperb de Barcellos

Prof. Titular - Depto. Eng. Mecânica

CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Edison da Rosa

Prof. Assistente - Depto. Eng. Mecânica

CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil.

Sumário

Neste artigo são apresentadas características do Sistema Modular de Elementos Finitos, SIMELF, ilustrados para elementos sólidos isoparamétricos de 8, 20 ou 32 nós. A aplicação inicial se destina à análise estática de tensões em sólidos elásticos, devido à cargas distribuídas, concentradas e gradientes térmicos.

Summary

The architecture characteristics of a Finite Element Modular System, SIMELF, is illustrated for isoparametric solid elements with 8, 20 or 32 nodes. This System is initially applied for thermoelastostatic analysis in solids for concentrated and distributed loads.

1- INTRODUÇÃO

Em trabalho anterior [1], foram apresentadas as características desejáveis para um sistema de elementos finitos. Um sistema modular de elementos finitos SIMELF, com tais características está sendo desenvolvido. Este sistema consiste basicamente de um amplo conjunto de módulos que podem ser aglutinados por programas gerenciais de diversos modos. Por exemplo os módulos podem ser acoplados de modo a se obter um programa adequado para a solução de uma classe específica de problemas em um dado meio contínuo. Por outro lado, tais módulos podem ser conectados também por um programa gerencial mais sofisticado, para constituir um programa de uso mais geral, isto é, um programa apto para resolver diferentes classes de problemas, bem como em meios diversos.

Como ilustração é descrito neste trabalho o processo de solução de problemas termoelastoestático lineares em sólidos de forma qualquer. Tais fenômenos são descritos por equações do tipo $KX = F$ onde F é o vetor de forças de origem térmica e de carregamentos nodais e distribuídos superficial e volumetricamente. Na matriz de rigidez K estão definidas todas as propriedades do meio e as condições de contorno. O usuário pode opcionalmente calcular a matriz K incluindo as propriedades elásticas do material numa temperatura de referência, uniforme em todo o sólido, ou então, nas temperaturas locais instantâneas correspondentes ao campo de temperatura de um carregamento térmico específico.

2- ARQUITETURA DO SISTEMA.

O sistema é formado por um conjunto de fases operacionais de processamentos independentes entre si. A interligação entre as fases é feita pelo programa principal, sendo a transferência de dados feita pelos arquivos definidos nas unidades secundárias, bem como por áreas comuns. O sistema apresenta flexibilidade suficiente para permitir a substituição ou inclusão de diferentes fases operacionais, conforme seja requerido pelo processo de solução e tipo de problema.

As fases necessárias para constituir um programa de elementos finitos, para o tipo de problema acima mencionado, podem ser definidas como: fase de leitura e geração de dados

-LEGER, fase de cálculo das matrizes de comportamento-CALMA, fase de montagem das matrizes globais-SOBRE, fase de resolução do sistema de equações, onde pode ser a solução pelo processo de matriz de banda-SOMBA, ou solução frontal-SOFRO, fase de processamento final e confecção do relatório-RELATO. No caso do SIMELF, foi incluída uma fase, PREPE, logo após a de leitura e geração para realizar um pré-processamento dos dados visando uma redução de memória na próxima fase.

As fases são constituídas de um conjunto de módulos que são acoplados por subrotinas gerenciadoras. Um módulo pode ser definido como um conjunto de subrotinas e funções programado para executar uma tarefa específica. Esta programação é feita sem ter em vista a resolução de um problema específico, mas sim a possibilidade de ser utilizado em qualquer tipo de problema, quando possível. Deste modo, a resolução de um problema termoelastoestático linear pode ser realizada conforme mostra a figura 1.

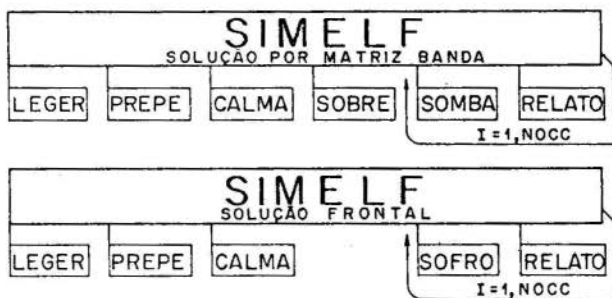


Fig.1. Arquitetura do sistema para a solução de problemas estáticos lineares.

3- ARQUITETURA DAS FASES.

Cada fase do SIMELF é constituída por um conjunto de módulos que executam tarefas específicas tendo uma pequena e precisa interface com o sistema gerenciador. Esse sistema gerenciador possui tarefas como: inicialização de variáveis, controle de execução e transferência, definir e redefinir endereços, transferência de dados na área usada como "buffer" para os arquivos secundários, preparação de dados de entrada para os módulos e ordenar a sua execução. Nas figuras 2 e 3 estão

esquematzadas as fases com seus módulos e as subrotinas.

A fase LEGER é constituída dos seguintes módulos:

- TOPO- Leitura e geração de dados que definem a topologia dos elementos, bem como, parâmetros definidores destes.
 COOR- Leitura e geração de dados das coordenadas dos nós.
 PROMA- Leitura e definição das matrizes de propriedades dos materiais. Certos materiais tem seus dados embutidos.
 DISLO- Leitura de condições de cargas térmicas e distribuídas até o máximo de 30 carregamentos independentes.

A fase PREPE é constiuída dos módulos:

- PRTEM- Redispõe as temperaturas nodais de acordo com a numeração dos nós dos elementos, conforme o Arquivo 2 de elementos e as coloca no Arquivo 4.
 PROCOOR- Coloca as coordenadas dos nós de cada elemento, toma das a partir do Arquivo 1 e as coloca junto ao pacote de informações desse elemento no Arquivo 2.

Para determinar as matrizes elementares em termos de valores nodais, a fase CALMA usa os seguintes módulos:

- INGE- Inicializa e define matrizes de parâmetros para a subrotina gerencial ordenar a execução correta das tarefas a serem executadas.
 MAPI- Determina as propriedades locais do material.
 FIDE- Determina os valores locais da funções de interpolação e de suas derivadas, bem como, o operador jacobiano.
 MTEL- Define os cabeçalhos das matrizes de tensão e de rigidez, bem como a integra.
 CARV- Determina as matrizes de forças equivalentes às cargas térmicas e de massa.
 CARS- Determina as matrizes de forças equivalentes às cargas superficiais.
 ELEC- Processa os elementos cópia.
 COMPAC- Elimina os parâmetros não nodais, caso existam.
 ARQMA- Armazena as matrizes dos elementos no Arquivo 6.

Se o processo de solução escolhido for o de matriz ban da, são usadas as fases SOBRE e CALMA. A fase SOBRE obtém as matrizes de força e de rigidez elementares com seus cabeçalhos

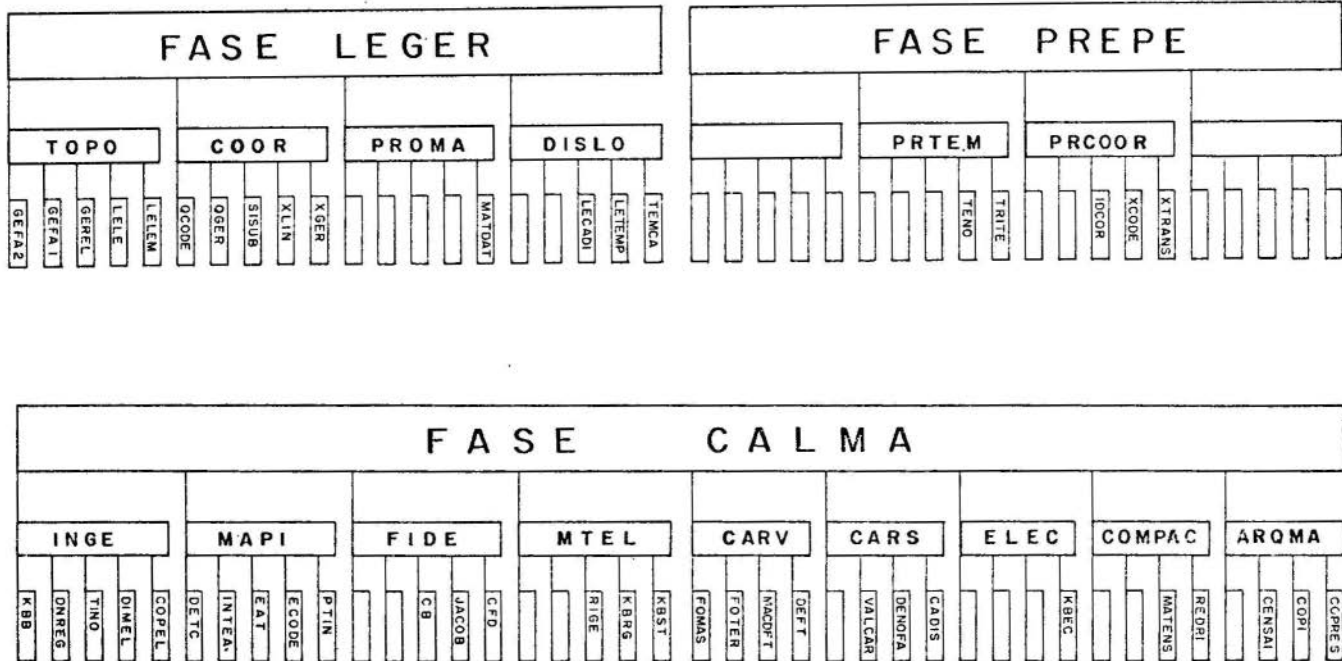


Fig.2- Arquitetura das fases LEGER, PREPE e CALMA.

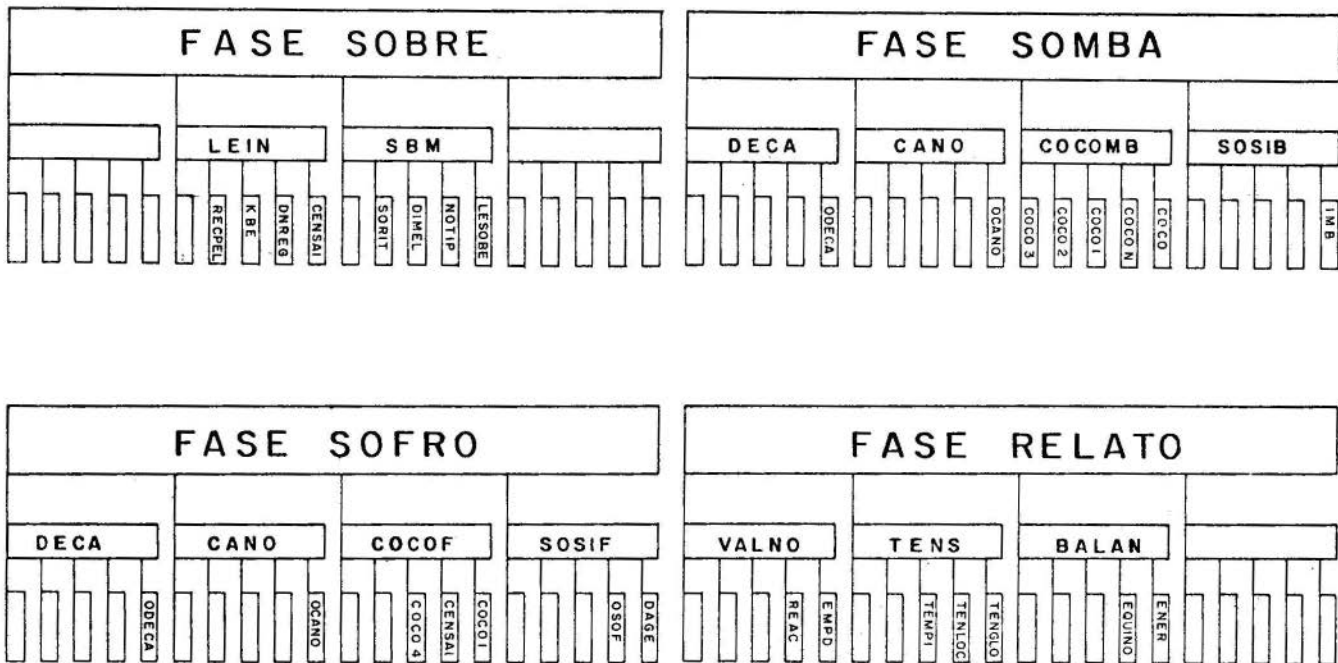


Fig.3- Arquitetura das fases SOBRE, SOMBA, SOFRO e RELATO.

do Arquivo 6, pelo módulo LEIN e interpreta os cabeçalhos e sobrepõe as matrizes para obter as matrizes de rigidez e força globais pelo módulo SBM. A seguir, a fase SOMBA determina as soluções do sistema de equações para cada tipo de condições de contorno. Assim, para cada tipo de condição de contorno são executados os módulos:

- DECA- Define os carregamentos. Aqui, vetores de carregamentos já obtidos podem ser dispostos e sobrepostos conforme for desejado.
- CANO- As cargas nodais são lidas e sobrepostas ao carregamento já definido no módulo DECA.
- COCOMB- As condições de contorno são lidas e interpretadas e as matrizes de rigidez e força são modificadas apropriadamente.
- SOSIB- Os vetores solução para os respectivos vetores força são obtidos.

Caso o processo de solução seja o de solução frontal são executados os módulos DECA e CANO já comentados, bem como COCOF- As condições de contorno são lidas, interpretadas e processadas.

SOSIF- Obtém os vetores solução correspondentes aos vetores carga.

A fase RELATO, executa os módulos de pós-processamento e geração de relatórios para cada carregamento. Os módulos operacionais são os seguintes:

- VALNO- Imprime os valores dos graus de liberdade nodais.
- ENER- Calcula os balanços de energia global, externa e interna, bem como a energia de cada elemento, imprimindo os resultados.
- EQUINO- Calcula os equilíbrios nodais e as incógnitas de contorno (reações) e gera o respectivo relatório.
- TENGL0- Calcula as componentes de tensão nos pontos solicitados, em relação ao sistema global, imprimindo.
- TENLOC- Calcula as componentes de tensão nos pontos solicitados, em relação a um sistema local, imprimindo os resultados.
- TENPI- Calcula e imprime as tensões principais e suas respectivas direções.

No sistema SIMELF existem ainda dois módulos comuns a todas as fases, que são GERECI e MANDA. O módulo GERECI se destina a definir os parâmetros que irão determinar o procedimento de execução do programa. Tais parâmetros definem a sequência de execução, características dos elementos disponíveis e características dos Arquivos secundários. O módulo é constituído de um conjunto de subrotinas e áreas de informação em COMMON.

Em um programa de elementos finitos, pelo volume de informações processadas, é vital que exista um conjunto de subrotinas específicas para a manipulação de dados, no que se refere a entrada e saída de arquivos secundários, zera-gem, controle de "buffer", impressão padronizada, etc. Essas operações são executadas pelo módulo MANDA.

4- ESTRUTURA DOS ARQUIVOS

O arquivamento dos dados processados, ou a serem processados, é feita em uma série de arquivos definidos em unidades secundárias de memória. Os arquivos possuem uma numeração interna do programa sequencial de 1 até o número total de arquivos. No programa principal é feita a correspondência entre a numeração interna e externa, usada nos DEFINE FILE.

O Arquivo 1 possui 4 áreas de armazenamento, onde são guardadas as informações correspondentes aos dados dos materiais, orientações dos sistemas de referência, origens dos sistemas de referência subestruturais e as coordenadas dos nós, relativas aos sistemas subestruturais. As propriedades dos materiais podem ser fornecidas pelo usuário, ou então usar algum dos 10 materiais com propriedades já embutidas no programa. As propriedades termoelásticas são consideradas variáveis com a temperatura, de acordo com as informações contidas no ASME BOILER AND PRESSURE VESSEL CODE, SECTION III.

O Arquivo 2 guarda as informações de cada elemento, como o número do elemento, tipo de material, tipo de elemento, ordem das funções de interpolação, ordem da integração, tipo de informação desejada no relatório, número dos nós do elemento e coordenadas dos nós, estas relativas ao sistema global.

O Arquivo 3 contém informações correspondentes ao

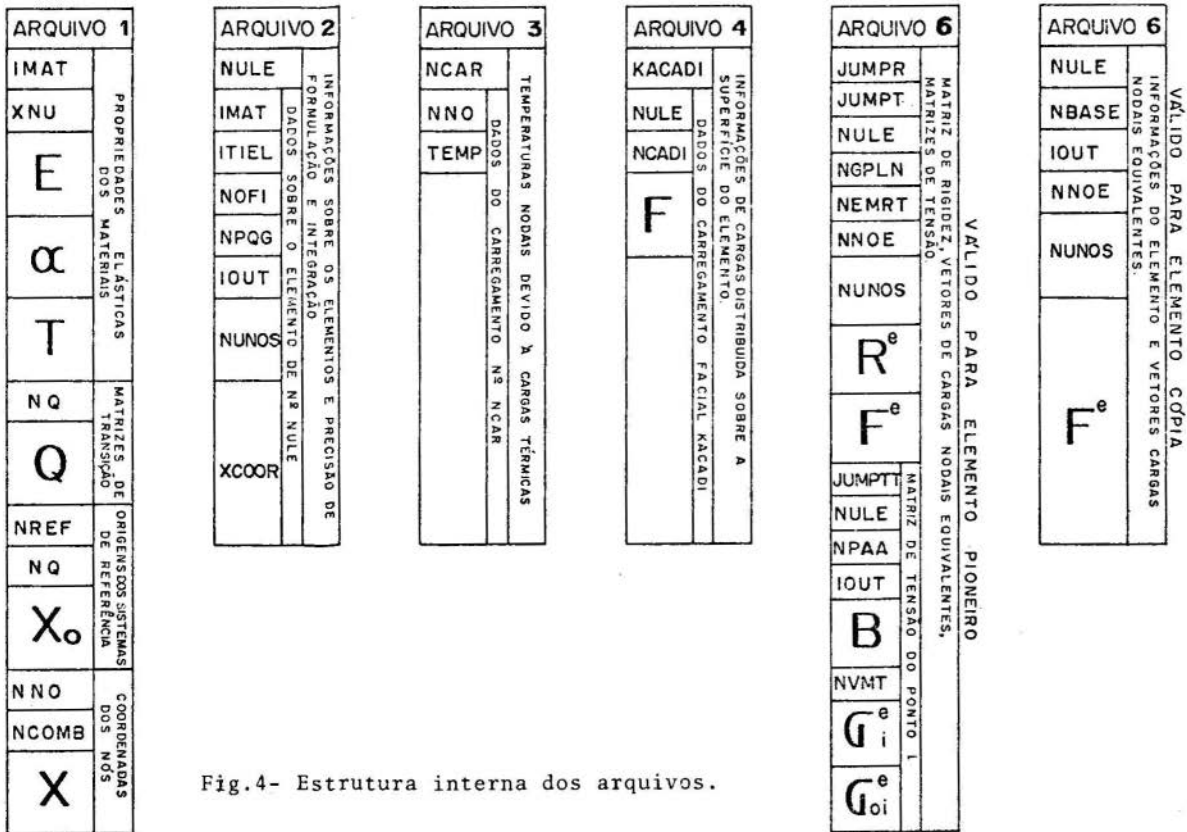


Fig.4- Estrutura interna dos arquivos.

carregamento térmico que está solicitando a estruturas, ou seja, devido a distribuição de temperaturas. O Arquivo guarda informações de vários carregamentos térmicos.

O Arquivo 4 possui 2 áreas de informações de valores nodais, uma de carregamento distribuído e outra de temperaturas. Os dados neste Arquivo são guardados em pacotes de informação por elemento, de modo a facilitar o processamento posterior. O Arquivo 5 funciona como área de trabalho, para armazenamento provisório de matrizes. O Arquivo 6 contém as informações finais, já processadas de todos os elementos que formam o modelo, em termos das matrizes de rigidez, vetores de carregamento (térmico e distribuído) e matrizes de tensão nos pontos de interesse, matrizes de rigidez e forças globais do sistema.

COMENTÁRIOS.

Com a implantação do sistema modular de elementos finitos, SIMELF, tem sido criada uma biblioteca de subrotinas e funções para a solução de tarefas numéricas. Essa infraestrutura de programas disponíveis, embora esteja no momento incompleta, já tem sido utilizada em tarefas de ensino e pesquisa, cumprindo assim, parte de seus objetivos.

AGRADECIMENTOS.

Os autores agradecem à Financiadora de Estudos e Projetos-FINEP- e a Comissão Nacional de Energia Nuclear-CNEN-que deram suporte para a realização do trabalho.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Barcellos, C.S.; Rosa, E.da; Arquitetura de um Sistema Modular de Elementos Finitos-I: Características V Cobem- Campinas 1979.
- [2] Rodrigues, L.A.F.; Barcellos, C.S.; Sistema de Elementos Finitos para a solução de Problemas de Condução de Calor em Regimes Estacionários e Transientes. A ser publicado.
- [3] Bento Fº, A.; Barcellos, C.S.; Desenvolvimento de um Modelo de Elemento de Haste Curva de Grande Curvatura, pelo Método de Elementos Finitos. A ser publicado.



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.^o D-13

P.P. 191 - 199

MODELOS MISTOS PARA A ANÁLISE DE MEMBRANAS E SÓLIDOS
AXISSIMÉTRICOS DE MATERIAIS HIPERELÁSTICOS INCOMPRESSÍVEIS

Elson Magalhães Toledo

Pesquisador, COPPE/UFRJ

COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Nelson Francisco Favilla Ebecken

Professor, COPPE/UFRJ

COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

SUMÁRIO

Neste trabalho, elementos finitos mistos isoparamétricos são derivados para a análise de estado plano de tensões e de sólidos axissimétricos. É feita a consideração de grandes deformações, com o uso de um princípio variacional incremental.

Relações constitutivas de materiais hiperelásticos incompressíveis são também consideradas.

Alguns resultados são apresentados e comparados com outras aproximações.

SUMMARY

In this work, mixed isoparametric finite elements are derived to analyse plane stress and axisymmetric problems. Finite strain is considered with a incremental variational principle.

Incompressible hyperelastic materials are also included.

Some results are presented and compared with others approximations.

1. Introdução

A análise de elasticidade finita pelo M.E.F. é extensivamente desenvolvida na referência [1]. Nesses estudos tem sido utilizado uma forma modificada do princípio dos trabalhos virtuais. No presente trabalho a análise de grandes deformações de materiais elásticos e hiperelásticos é conduzida por elementos mistos isoparamétricos derivados de um princípio variacional incremental, tipo Reissner. A análise se vale de formulação Lagrangeana e é aplicada a problemas de estado plano de tensões e sólidos axissimétricos. O elemento desenvolvido é isoparamétrico quadrático, aproximando-se tanto as tensões como os deslocamentos pela mesma função.

Nos exemplos analisados utilizou-se um processo puramente incremental.

2. Princípio Variacional Incremental

O funcional incremental de Hu-Washizu [7] correspondente a configuração de tempo $t + \Delta t$ e referido a configuração indeformada, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \Delta \pi_{H.W.} = & \int_{oV} U_{\Delta} \circ dV + \int_{oV} {}^t_0 S_{ij} \circ n_{ij} \circ dV - {}_0R - \\ & - \int_{oV} {}_0S_{ij} \left[{}_0l_{ij} - \frac{1}{2} ({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} + \right. \\ & \left. + {}_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j}) \right] \circ dV - \int_{oS_u} {}_0t_i (u_i - \bar{u}_i) \circ dS \quad (1) \end{aligned}$$

onde:

U_{Δ} - função energia de deformação incremental

${}^t_0S_{ij}$ - 2º tensor de Piola-Kirchhoff na configuração de tempo t referida a configuração indeformada

${}_0S_{ij} = {}^{t+\Delta t}_0S_{ij} - {}^t_0S_{ij}$ - Incremento das tensões

$o^{\varepsilon}_{ij} = o^{\ell}_{ij} + o^n_{ij}$ - Incremento das deformações de Green-Lagrange

$$o^{\ell}_{ij} = \frac{1}{2} (o^{u_{i,j}} + o^{u_{j,i}} + o^{t_{u_{k,i}}} o^{u_{k,j}} + o^{t_{u_{k,j}}} o^{u_{k,i}})$$

$$o^n_{ij} = \frac{1}{2} (o^{u_{k,i}} o^{u_{k,j}})$$

$u_i = t+\Delta t u_i - t u_i$ - Incremento dos deslocamentos

$$o^{u_{k,i}} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

o^R - Potencial dos incrementos das forças externas referidas a configuração indeformada.

A notação empregada é proposta na referência [3].

O último termo da expressão refere-se a relaxação das condições de contorno em termos de deslocamentos.

No funcional descrito tem-se as seguintes quantidades sujeitas a variação: $o^{S_{ij}}$, u_i , o^{ℓ}_{ij} , t_i , e nenhuma condição subsidiária. A condição de estacionaridade desse funcional acarreta $\delta \Delta \pi_{H.W.} = 0$, que é a forma incremental do princípio variacional de Hu-Washizu.

O funcional incremental generalizado apresentado pode ser reduzido a um funcional incremental do tipo Hellinger-Reissner expresso por:

$$\begin{aligned} \Delta \pi_R = & - \int_{oV} o^D_{ijkl} o^{S_{ij}} o^{S_{kl}} o^dV + \int_{oV} o^{S_{ij}} o^{\ell}_{ij} o^dV \\ & + \int_{oV} o^{t_{S_{ij}}} o^n_{ij} o^dV - o^R \end{aligned} \quad (2)$$

onde assumiu-se que $u_i = \bar{u}_i$ em o^{S_u} e:

$$U_{\Delta C} = o^{S_{ij}} o^{\ell}_{ij} - U_{\Delta}$$

é a função energia complementar de deformação incremental.

$$o^{\ell}_{ij} = o^D_{ijkl} o^{S_{kl}}$$

é a relação incremental tensão-deformação.

A forma incremental do princípio de Hellinger-Reissner estabelece que os campos ${}^0S_{ij}$, u_i , que tornam estacionário o funcional, $\Delta \pi_R$ podem ser obtidos por:

$$\delta \Delta \pi_R = 0 \quad (3)$$

3. Modelo Discreto - Materiais Elásticos

Na presente análise valeu-se de elementos mistos isoparamétricos utilizando-se as mesmas funções de interpolação quadráticas para os deslocamentos e tensões.

Estas expansões são representadas matricialmente por:

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{v} \quad , \quad {}^0\underline{S} = \underline{A} \underline{{}^0P} \quad (4)$$

onde:

\underline{v} - vetor dos incrementos dos deslocamentos nodais

${}^0\underline{P}$ - vetor dos incrementos das tensões nodais

Considerando-se um único elemento $\Delta \pi_R$ pode ser escrito por:

$$\Delta \pi_R = - \frac{1}{2} {}^0\underline{P}^T \underline{f} \underline{{}^0P} + {}^0\underline{P}^T \underline{g} \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{v} \underline{k}_\sigma \underline{v} - \underline{v}^T \underline{{}^0Q} \quad (5)$$

onde:

$$\underline{f} = \int_V \underline{A}^T \underline{D} \underline{A} \, {}^0dV \quad , \quad \underline{k}_\sigma = \int_V \underline{N}'^T \underline{\sigma} \underline{N}' \, {}^0dV$$

$$\underline{g} = \int_V \underline{A}^T \underline{B} \, {}^0dV \quad , \quad \underline{{}^0Q} = \int_V \underline{N}^T \underline{{}^0F} \, {}^0dV + \int_S \underline{N}^T \underline{{}^0T} \, {}^0dS$$

$${}^0\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{u} \quad \quad \underline{u}' = \underline{N}' \underline{v}$$

A variação de $\Delta \pi_R$ fornece:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \vdots & \underline{g}^T \\ \hline \underline{g} & \vdots & -\underline{f} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \underline{k}_\sigma & \vdots & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \vdots & \underline{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{v} \\ \underline{0} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \underline{0} \\ \underline{0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{0} \\ \underline{0} \end{array} \right] \quad (6)$$

Definindo-se os parâmetros nodais, ${}_0v_i^*$ por:

$${}_0v_i^* = \left[\begin{array}{ccc} {}_0S_{11} & {}_0S_{22} & {}_0S_{12} \\ u & v \end{array} \right]_i^T \quad (7)$$

A equação (6) toma a forma seguinte:

$$(\underline{k}_0^* + \underline{k}_\sigma^*) {}_0v^* - {}_0Q^* = \underline{0} \quad (8)$$

Esta equação é estendida a todo o domínio somando-se as contribuições de cada elemento, e resolvida em cada incremento segundo os processos usuais.

4. Modelo Discreto - Materiais Hiperelásticos Incompressíveis

Para problemas de estado plano de tensão algumas simplificações são possíveis, de modo que não há alterações nas expressões apresentadas.

A equação constitutiva a ser utilizada encontra-se na referência [8].

Tratando-se de problemas tridimensionais, estado plano de deformação e sólidos axissimétricos, a dependência de S_{ij} com relação a pressão hidrostática h , deve ser considerada. Os incrementos de tensão são então expressos por:

$${}_0S_{ij} = \frac{\partial {}_0^t S_{ij}}{\partial {}_0^t \epsilon_{kl}} {}_0\epsilon_{kl} + \frac{\partial {}_0^t S_{ij}}{\partial {}_0^t h} {}_0h \quad (9)$$

ou

$${}_0S_{ij} = {}_0S'_{ij} + ({}_0^t C_{ij})^{-1} {}_0h \quad (10)$$

onde:

$${}_0^t C_{ij} = 2 {}_0^t \epsilon_{ij} + \delta_{ij} \quad (11)$$

$$o^{\epsilon_{ij}} = o^{D_{ijkl}} o^{S'_{kl}}$$

sendo

$o^{S'_{kl}}$ - incremento das tensões de distorção

A relação (11), para problemas de estado plano de deformação, por exemplo, é:

$$\begin{bmatrix} o^{S'_{11}} \\ o^{S'_{22}} \\ o^{S'_{12}} \end{bmatrix} = -2 \underset{o}{t}_h \begin{bmatrix} \underset{o}{t}_{C_{22}}^2 & \underset{o}{t}_{C_{12}}^2 & - \underset{o}{t}_{C_{12}} \underset{o}{t}_{C_{22}} \\ & \underset{o}{t}_{C_{11}}^2 & - \underset{o}{t}_{C_{12}} \underset{o}{t}_{C_{11}} \\ \text{SIMÉTRICA} & & \frac{\underset{o}{t}_{C_{11}} \underset{o}{t}_{C_{22}} + \underset{o}{t}_{C_{12}}^2}{2} \end{bmatrix} +$$

$$+ 4 C_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o^{\epsilon_{11}} \\ o^{\epsilon_{22}} \\ 2 o^{\epsilon_{12}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde utilizou-se uma função energia de deformação do tipo Mooney-Rivlin.

Nesses casos o funcional (2) ficará acrescido da expressão

$$\int_{oV} o^h \underset{o}{t}_{C_{ij}} o^{\epsilon_{ij}} o^dV$$

e os incrementos de tensões totais serão agora incrementos de tensão de distorção.

Acrescentando-se ao modelo discreto anterior a aproximação $o^h = \underline{N}_h o^{\underline{h}}$ chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_\sigma & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{G}^T & \underline{G}_h^T \\ \underline{G} & \underline{F} & \underline{0} \\ \underline{G}_h & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \\ o^{\underline{p}} \\ o^{\underline{h}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o^{\underline{Q}} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

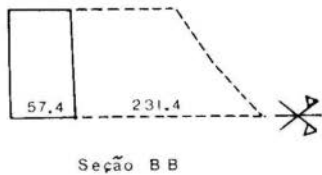
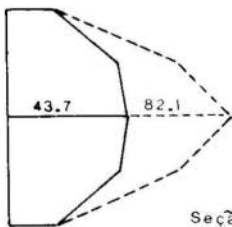
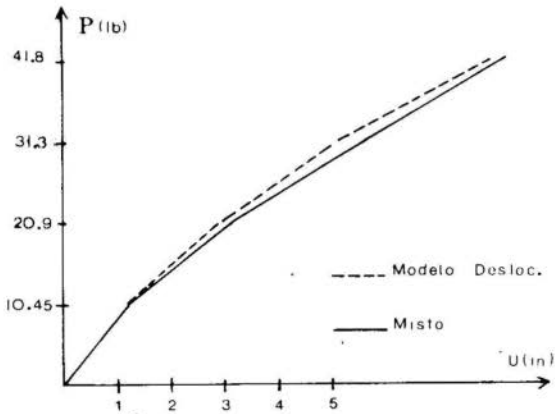
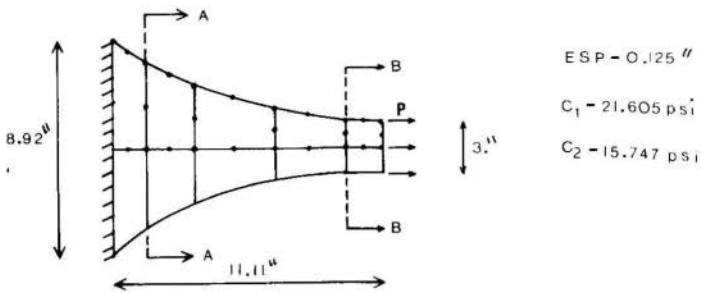


FIGURA 1 - MEMBRANA INCOMPRESSÍVEL.

onde a submatriz \underline{G}_h é dada por

$$\underline{G}_h = \int_{\Omega_V} \underline{N}_h^T \underline{Q} \underline{B}^0 dV$$

sendo \underline{Q} um vetor que contém os termos distintos de $({}^t C_{ij})^{-1}$, convenientemente arranjados.

5. Resultados da Análise

Para ilustrar a aplicação da formulação apresentada, analisou-se a membrana indicada na Figura 1. A configuração final foi atingida em 16 incrementos de carga. Deve-se notar que o deslocamento final do lado de aplicação de carga é da ordem do comprimento original da peça.

Os resultados mostraram concordância com os da referência [6] e para evidenciar a grande diferença das tensões Piola-Kirchhoff e Cauchy a distribuição dessas grandezas é apresentada em duas seções.

6. Conclusão

A análise de grandes deformações pelo método dos elementos finitos tem sido extensivamente desenvolvida por modelos de deslocamento. Apenas recentemente, mostrou-se interesse para a consideração de modelos mistos e híbridos.

Esses modelos fornecem soluções satisfatórias mesmo com o uso de procedimentos puramente incrementais. Além disso, essas aproximações podem se tornar convenientes para diversas outras aplicações.

Bibliografia

- [1] Oden, J.T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill Inc., 1972.
- [2] Scharnhorst, T., Pian, T.H.H., Finite Element Analysis of Rubber-Like Materials by a Mixed Model, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp 665-676, 1978.

- [3] Bathe, K.J., Ramm, E., Wilson, E.L., Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 9, pp 353-386, (1975).
- [4] Iding, H., Pister, K.S., Taylor, R.L., Identification of Nonlinear Elastic Solids by a Finite Element Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 4, pp 121-142, (1974).
- [5] Landau, L., Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, (1976).
- [6] Ebecken, N.F.F., Grandes Deformações de Membranas de Materiais Hiperelásticos Incompressíveis, Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - Florianópolis, (1977)
- [7] Horrigmoe, G., Bergan, P.G., Incremental Variational Principles and Finite Element Models for Nonlinear Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 7, 201-217, (1976).
- [8] Bathe, K.J., Ozdemir, H., Wilson, E.L., Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis Report UCESM 74-4, Berkeley, California University, (1974).
- [9] Toledo, E.M. e Ebecken, N.F.F., Elementos Finitos Mistos para Análise de Grandes Deformações, I Congresso Brasileiro de Energia, Rio de Janeiro, dezembro, (1978).



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO TECNOLÓGICO
TECHNICAL PAPER

N.º DT-06

P.P. 200 - 207

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DA CARGA LIMITE
DE UMA CHAVETA DE GERADOR

Ademar Gilberto Groehs

Prof. Assistente - C.P.G.E.C.
UFRGS - Porto Alegre - Brasil

Guillermo Juan Creus

Prof. Visitante - C.P.G.E.C.
UFRGS - Porto Alegre - BrasilSUMÁRIO

Por razão da consulta de uma empresa foi determinada a resistência de uma chaveta de duralumínio, usando um programa de análise elasto-plástico com elementos finitos. Posteriormente os resultados numéricos foram comparados com uma determinação experimental.

SUMMARY

Following a consult by a firm, a strength of a key was determined using a elastoplastic finite element program. Numerical results are compared with experimental date.

1. Introdução

O presente trabalho descreve a aplicação de um programa de análise elastoplástica, apresentado e discutido nas referências [1], [2], a um problema técnico originado da consulta de uma firma local.

A peça indicada na fig. 2 é uma chaveta pertencente ao rotor de um gerador elétrico. As chavetas, construídas em duralumínio, vem de fábrica pintadas com uma tinta especial, que sofre uma mudança de cor se a temperatura ultrapassar um certo limite máximo admissível. Devido a um aquecimento acidental, essa temperatura limite foi atingida. O pessoal encarregado da manutenção do gerador solicitou ao Curso de Pós Graduação uma análise elástica, que foi realizada usando o sistema Lorane [3]. Tal análise mostrou a existência de concentração de tensões no ponto D da fig. 4.

Eventualmente, a firma resolveu o problema trocando as chavetas. No entanto, surgiu nos autores a idéia de estudar o comportamento elastoplástico da referida peça. O problema resultou bastante interessante e com algumas facetas complexas. A solução obtida é aqui apresentada com o intuito de indicar algumas das dificuldades que podem aparecer nas análises elastoplásticas de situações reais (em contraste com problemas de tipo acadêmico, geralmente com condições de contorno melhor definidas) e mostrar que, apesar destas dificuldades, pode ser obtida uma aproximação razoável.

Nas Seções 2 e 3 são descritos os detalhes das análises experimental e teórica realizadas. Na Seção 4 são comparados os resultados e na Seção 5 são apresentadas as conclusões.

2. Análise Experimental

O estado de carga sobre a peça em estudo foi simulado usando o sistema indicado na fig. 1, em conjunto com uma máquina de ensaios. O elemento "a", sendo bem mais rígido que a peça ensaiada aplica a carga na forma de deslocamentos (aproximadamente) uniformes ao longo de AB. Esta condição

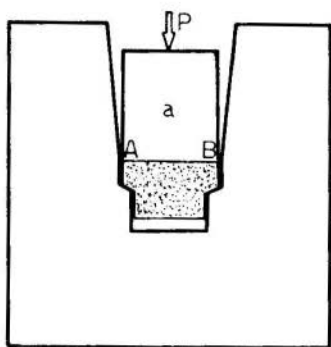


fig. 1

pode não corresponder exatamente à condição existente na situação real.

Durante o ensaio determinou-se a curva carga-deslocamento para a linha AB usando um extensômetro tipo "clip" com precisão de 0.01 mm. Para estabelecer as deformações específicas usou-se uma retícula gravada na peça, fig. 2. As deformações da retícula foram determinadas a posteriori por meio da tela de um durômetro com amplificação.

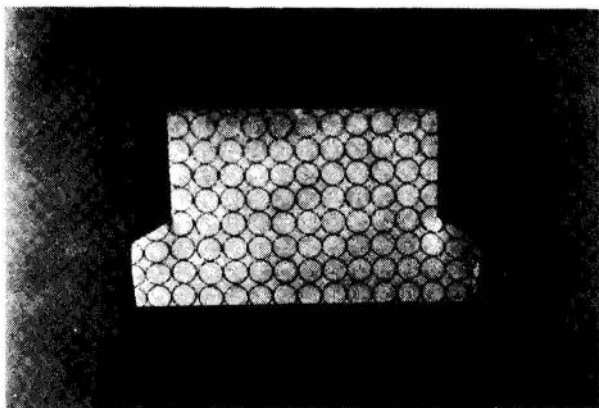


fig. 2

A relação tensão-deformação para o material, determinada por compressão de um corpo de prova cilíndrico é indicada na fig. 3.

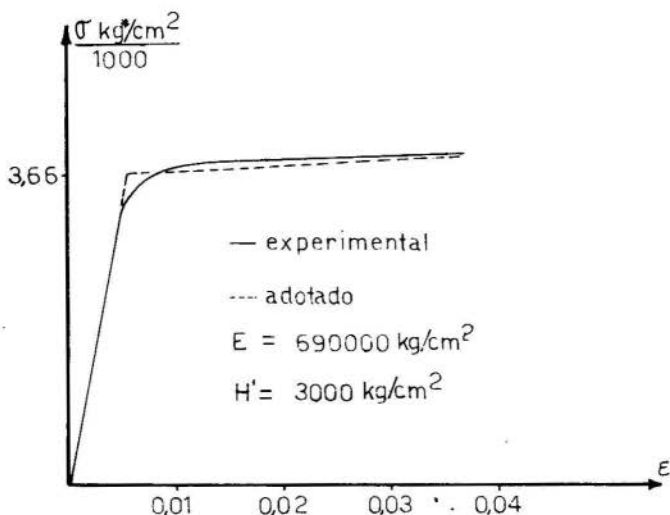


fig. 3

3. Análise Numérica

A análise numérica foi realizada empregando um programa elastoplástico baseado na técnica dos elementos finitos. Esse programa usa o método incremental com matriz tangente, considerando o caso de pequenas deformações elásticas e grandes deformações plásticas (descrição referencial). A teoria básica, alguns exemplos clássicos e outras referências podem ser encontradas em [1], [2]. No presente momento o programa está limitado à utilização de elementos triangulares com variação linear de deslocamentos, estado plano de tensões (com

variação de espessura) e critério de escoamento de von Mises com endurecimento isotrópico linear. A ampliação das capacidades do sistema em várias direções está em andamento.

A fig. 4 indica a malha utilizada para a análise, com 97 elementos e 63 nós. De acordo com o indicado na Seção 2 a carga foi assumida na forma de deslocamentos impostos, uniformes sobre AB. Ao longo de CD não foi considerado o efeito do atrito. Esta hipótese simplificadora, embora esteja provavelmente do lado da segurança, deverá ser reestudada.

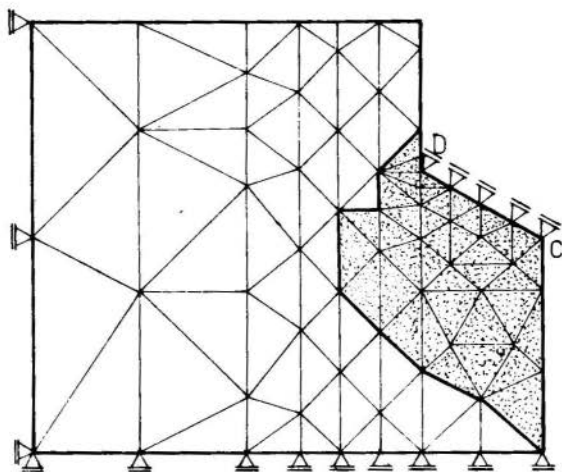


fig 4

4. Apresentação de resultados

A zona sombreada na fig. 4 indica a região plastificada de acordo com a solução numérica, para o espécime com uma carga $P=5219$ Kg.

Fig. 5-a indica linhas de nível para a espessura do espécime sob uma carga de $P=5219$ Kg, obtidas pela análise numérica. Estas linhas de nível podem ser comparadas com as

determinadas, por medição, sobre o corpo de prova deformado, fig. 5-b. Observa-se uma razoável aproximação qualitativa. As diferenças podem ser atribuídas às aproximações feitas na análise numérica. As deformações específicas também aproximam razoavelmente bem as obtidas experimentalmente.

Na fig. 6 comparamos as relações carga-deslocamento para a linha AB, obtidas das experiências e da análise numérica.

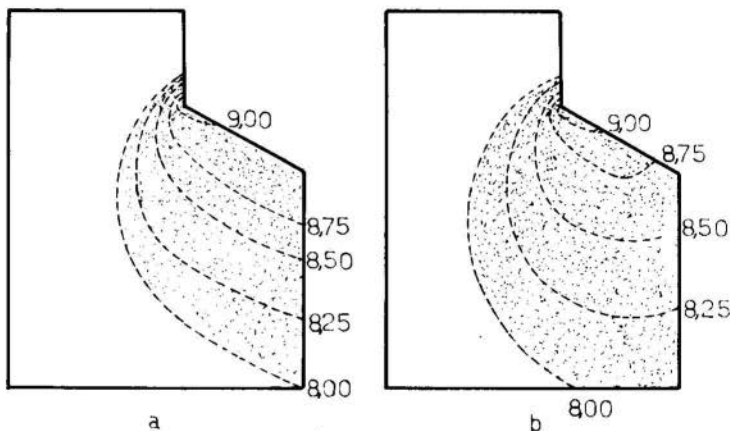


fig. 5

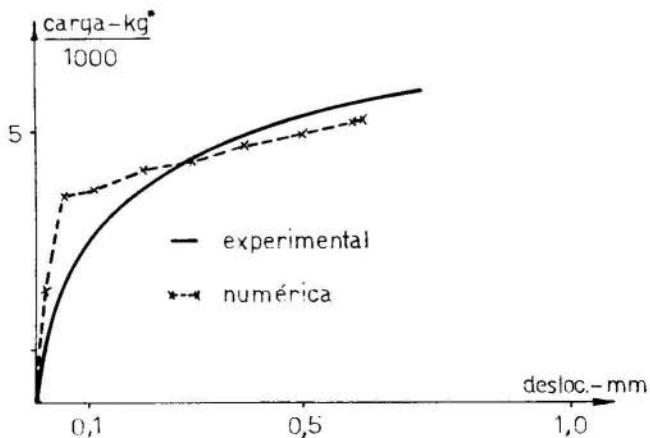


fig. 6

5. Conclusões

O exemplo descrito indica que o programa desenvolvido pode ser de utilidade para estimar o comportamento elasto-plástico de peças de máquinas ou estruturas com deformações plásticas finitas.

Devido à concentração de deformações plásticas com importantes mudanças de espessura e ao efeito de atrito, o estado de tensões real tende a afastar-se do estado plano. Um programa com elementos finitos tridimensionais isoparamétricos está em estágio de desenvolvimento e esperamos, num futuro próximo, usá-lo para resolver o mesmo problema e conferir os resultados. Diversos critérios de endurecimento serão também implementados.

Outras dúvidas, de mais difícil elucidação correspondem às condições reais de carga e apoio. Este último tema, e em particular a representação do atrito, é de grande importância e será objeto de um estudo mais aprofundado.

Agradecimentos

Ao pessoal dos Cursos de Pós-Graduação em Metalurgia da UFRGS e da UFMG pela colaboração na parte experimental.

Bibliografia

- [1] Groehs, A.G. e Creus, G.J., Análise Elastoplástica de Estados Planos de Tensões Utilizando Elementos Finitos. IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, dezembro, (1977).
- [2] Groehs, A.G. e Creus, G.J., Análise de Grandes Deformações Plásticas. II Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, São Paulo, (1978).

- [3] Ferrante, A.J., Santos, M.I.G., Chagas Fº, E. e Franco, J.S.G., A Linguagem Lorane Linear para Análise Estrutural por Computador. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, setembro, (1977).

AN AIS



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

PROCEEDINGS



TRABALHO TÉCNICO
TECHNICAL PAPER

N.º DT-07

P. P. 208 - 216

ELASTO-PLASTIC BENDING WITH INHIBITED TORSION OF A THIN
WALLED CHANNEL SECTION BEAM

D. Ruzic

Faculty of Mechanical Engineering,
University of Belgrade, Belgrade,
Yugoslavia

SUMMARY

The common expression for the determination of the bimoment is derived for elasto-plastic channel section subjected to bending and inhibited torsion separately. The same expression is applied for the simultaneous loading. Conditions defining the initial yield stress and the final total plastification of the section are derived and corresponding diagrams are presented.

RESUMÉ

La formule commune pour la détermination du bimoment est dérivée en domaine élasto-plastique pour une section en U à parois minces, subie séparément à la flexion et à la torsion empêchée. La même formule est appliquée en cas de chargement simultané. Les conditions pour la contrainte d'écoulement initial, ainsi que pour la plastification totale de la section sont trouvées et les diagrammes correspondants sont donnés.

1. INTRODUCTION

There are many metal structures that are composed of open section thin walled elements. In some of those structures, as for example in commercial vehicle chassis frames, the theory of elastic properties of open section thin walled beams has obvious applications. Frames typically consist of channel section side members and open section side members. The joints between these elements provide the most obvious area for the application of the theory of inhibited warping.

The problem of the torsion of open section thin walled beams in elastic region was discussed for some fifty years by many authors like S. Timoshenko, R. Maillart, H. Wagner, V. Vlasov, C. Kollbrunner, N. Hajdin.

The torsion and inhibited warping of thin walled beams in elasto-plastic region drew the attention during last ten years. Between several papers written by Strelbizkaja, B. Akesson and J. Bäcklund, it is necessary to mention two volumes written by C. Kollbrunner and N. Hajdin [1], [2].

This paper is mainly based on the results given in [2]. The author tried to derive the expressions for calculation of bending moment and bimoment for elasto-plastic beam in the forms in which they were not written before. Those expressions were applied in order to find the conditions for the first appearance of yield stress in the section and for total plastification of the cross-section, loaded by a bending moment and bimoment simultaneously. The material of the beam was assumed to be elasto-plastic.

2. THE DEFINITION OF A BIMOMENT

If an open section thin walled beam is subjected to torsion, some warping of cross sections will take place. In the case of inhibited warping, normal stresses, perpendicular to the cross section, will appear. In the elastic region their distribution over the cross section will be

proportional to so called sectorial coordinate ω . The diagram of the sectorial coordinate ω for a channel section (Fig. 1) is shown in Fig.2 (see [1]), where d_0 defines the position of a point called shear center.

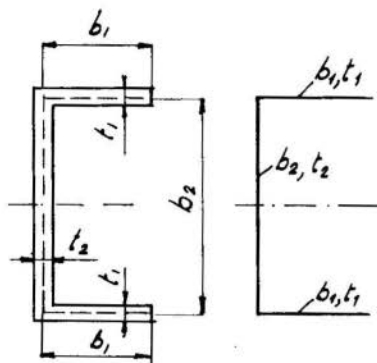


Fig. 1. A channel section

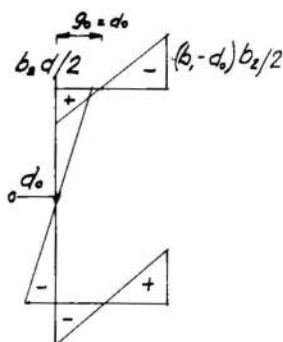


Fig. 2. Sectorial coordinate

For the reasons explained later that point will be called here the principal pole.

A bimoment is by definition (see [1]) given by the expression

$$M_{\omega} = \int_F \sigma \omega \, dF . \quad (1)$$

3. ELASTO-PLASTIC PURE BENDING

If a beam of an arbitrary cross-section is loaded only by a bending moment M_y about the axis x (see Fig. 1), it can be assumed that only normal bending stresses will appear. They will be distributed over the cross-section according to the following well known expressions

$$\sigma(M_y) = \begin{cases} E \varepsilon & = - E \gamma'' y \quad , \quad \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ \sigma_T \operatorname{sign} y = \sigma_T \operatorname{sign} y & , \quad \varepsilon > \varepsilon_r \end{cases} \quad (2)$$

where E is the modulus of elasticity, ϵ is a strain, y is a coordinate (see Fig. 1), γ is a displacement in y direction, $\gamma'' = \partial^2 \gamma / \partial z^2$, z is a coordinate measured along a beam, σ_T is the yield stress and ϵ_T is the strain which corresponds to the first appearance of the yield stress.

A bending moment can be calculated from

$$M_y = \int_F \sigma y dF, \quad (3)$$

and a bimoment must be zero.

For a channel section the distribution of the normal stresses is shown in Fig. 3, a - d.

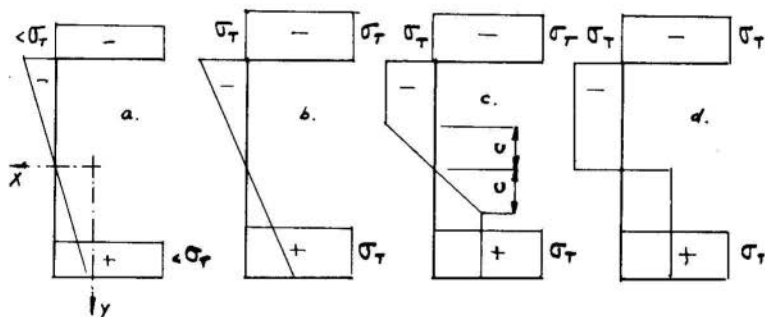


Fig. 3 Elasto-plastic bending of a channel section beam

From the condition that the bimoment must be zero it follows

$$d/b_1 = 6 / (12 + \lambda (3 - \delta^2)), \quad (4)$$

that is in agreement with the expressions in [1].

This means that the shear center (or bending center) of a channel section changes its position during the plastification. That is why the geometrical characteristic d_0 of the channel section will be called the principal pole.

Those two points will coincide only until the normal stresses in the section are smaller than σ_T .

It can be shown, after some calculations, that in the case of elastoplastic pure bending of a channel section beam a bending moment is obtained from (3), and that a bimoment will be zero if it is calculated from

$$M_\omega = \begin{cases} \sigma \omega dF & , M_y \leq M_{yT} \\ \sigma \omega dF + d_0 (M_y - M_{yT}) & , M_y > M_{yT} \end{cases} \quad (5)$$

It is necessary to underline that (1) or (5₁) can be used only in elastic region.

4. ELASTO-PLASTIC INHIBITED WARPING

If an arbitrary thin walled section is loaded only by a bimoment M_ω , some normal stresses will appear in the section and they can be distributed according to

$$\sigma(M_\omega) = \begin{cases} -E \varphi'' (\omega + \Delta\omega), & \varepsilon \leq \varepsilon_T \\ \sigma_T \text{ sign}(\omega + \Delta\omega), & \varepsilon > \varepsilon_T \end{cases} \quad (6)$$

where φ is the angle of rotation of the cross section, and $\Delta\omega$ is an additional member having the dimension of the sectorial coordinate ω .

For a channel section the stress distribution can be assumed to be as it is shown in Fig. 4, a - d.

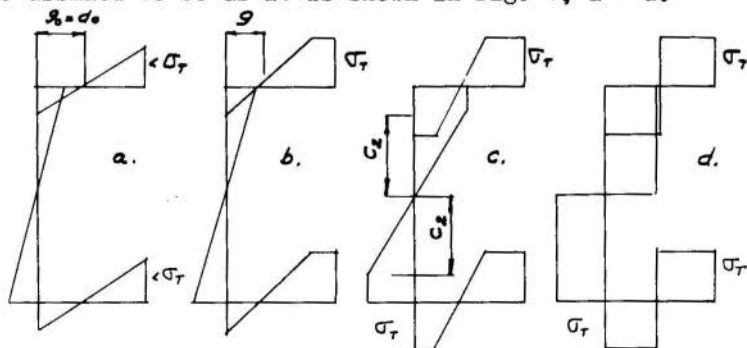


Fig. 4 Channel section loaded by a bimoment

The additional member $\Delta\omega$ for a channel section can be calculated from the expression

$$\Delta\omega = \xi b_2 (\xi_0 - \xi)/2\xi, \quad (7)$$

where ξ is the distance from the vertical web (see Fig. 5), and ξ_0 and ξ are shown in Fig. 4.

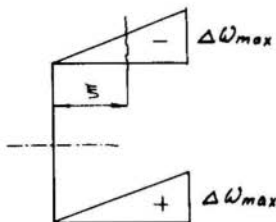


Fig.5 $\Delta\omega$ diagram

The bending moment M_y must be zero in the considered case of loading and such a result will be obtained if M_y is calculated using (3). The bimoment can be calculated from the same expressions (5) as in the previous case of pure bending.

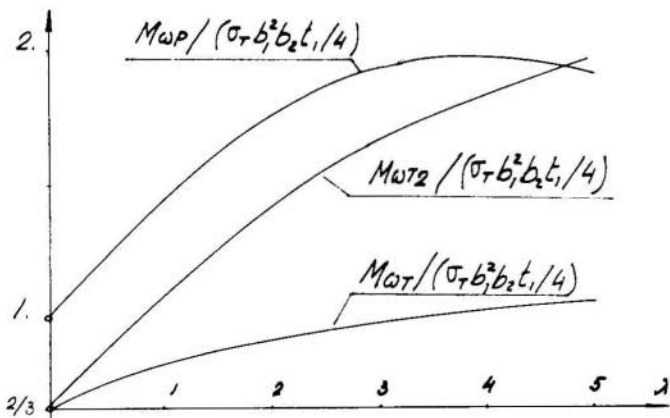


Fig. 6 $M_{\omega T}$, $M_{\omega T_2}$ and $M_{\omega P}$

There are three special values of the bimoment during the propagation of plastic zones along the cross section and they are the first appearance of yield stress in the section $\rightarrow M_{OT}$ (see Fig. 4,a), the first yield stress in the vertical web $\rightarrow M_{OT2}$ (see Fig. 4,b) and the total plastification of the section $\rightarrow M_{OP}$ (see Fig. 4,d). The change of M_{OT} , M_{OT2} and M_{OP} with respect to the dimensionless coefficient $\lambda = b_2 t_2 / b_1 t_1$ is shown in Fig.6.

5. A CHANNEL SECTION LOADED BY A BENDING MOMENT AND A BIMOMENT SIMULTANEOUSLY

If a cross section is loaded by bending moment and a bimoment simultaneously, both of them will cause some normal stresses perpendicular to the cross section so that they may easily be superposed. The resultant diagram of normal stresses for a channel section can be obtained by the superposition of Figs. 3 and 4.

The values of the bending moment and the bimoment will be calculated using the same expressions (3) and (5) as before.

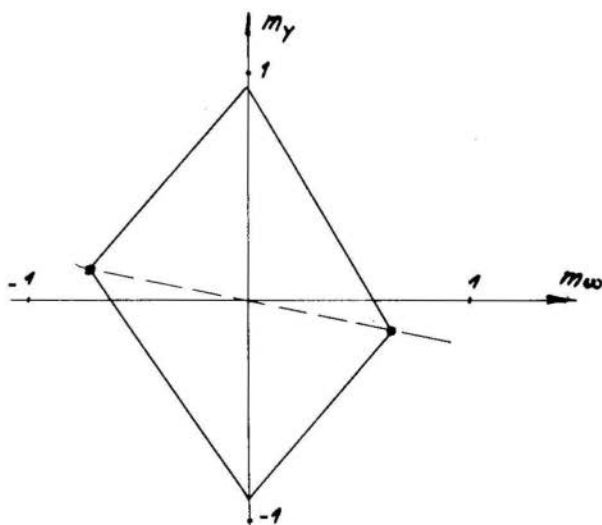


Fig. 7 "Curve T" for channel section $\lambda = 1$

5.1 INITIAL YIELD STRESS CONDITION (CURVE T)

For the determination of the conditions for the appearance of the first yield stress in the section it is important to know whether the bimoment and the bending moment are of the same or of the opposite sign, and to know proportions of the stresses due to each of those quantities. The curve which corresponds to these conditions will be denoted by "Curve T". For the channel section the "Curve T" is composed of four straight parts and is shown in Fig.7 for the section with coefficient $\lambda = 1$.

5.2 TOTAL PLASTIFICATION CONDITION (CURVE P)

At the moment when total plastification of the channel section takes place the final stress distribution

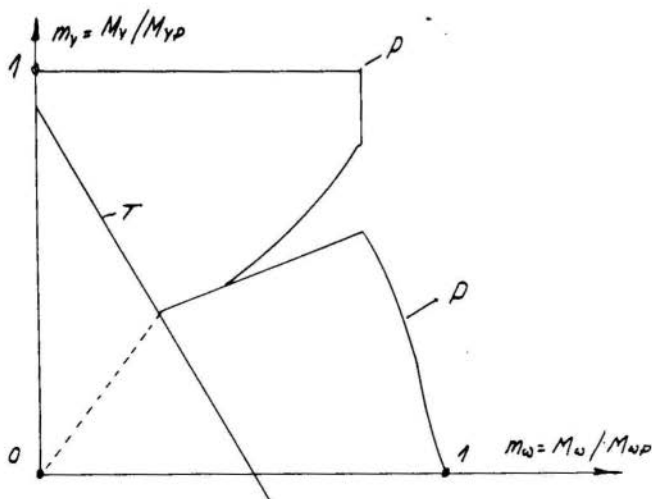


Fig. 8 "Curve P" for channel section $\lambda = 1$

will depend again on the signs of the bimoment and bend-

ing moment, and on their proportions. The curve corresponding to these conditions will be named "Curve P". That curve is presented in Fig. 8 for the channel section with the coefficient $\lambda = 1$.

6. CONCLUSIONS

It was shown that the unusual expression (5) for the bimoment can be applied in both sections 3 and 4, and it was used in the section 5 as well.

The interesting results presented in Fig. 8 are going to be experimentally verified.

ACKNOWLEDGEMENTS

It is a pleasure to record my thanks for the valuable discussions to Professor N. Hajdin of Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade.

REFERENCES

- [1] Kollbrunner, C.F., Hajdin, N., Dünnewandige Stäbe, Band 1., Stäbe mit undeformierbaren Querschnitten. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York (1972).
- [2] Kollbrunner, C.F., Hajdin, N., Dünnewandige Stäbe, Band 2., Stäbe mit deformierbaren Querschnitten, Nicht-elastisches Verhalten dünnwandiger Stäbe. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1975).



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER

N.º D-14

P.P. 217 - 229

ANÁLISE DE TENSÕES TÉRMICAS EM CASCAS DE REVOLUÇÃO

Raul Guenther

Prof. Aux. de Ensino - Depto. Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Domingos Boechat Alves

Prof. Titular - Depto. Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - BrasilSumário

Neste trabalho apresenta-se um modelo analítico-numérico para a determinação de tensões resultantes, deslocamentos e deformações em cascas finas de revolução, submetidas a uma distribuição de temperatura $T = T(s, \theta, z)$. O desenvolvimento analítico é realizado utilizando-se a primeira aproximação de Love, e a formulação numérica é feita através de diferenças finitas, sendo os resultados apresentados obtidos através de um programa digital.

Summary

This work describes an analitic-numerical process to analyse stress resultants, strains and displacements in thin shells of revolution, subjected to an arbitrary temperature distribution $T = T(s, \theta, z)$. The analitical development is based on Love's first approximation, and the numerical formulation is made by finite difference equations. The results presented are obtained by a digital program.

1. Introdução

Este trabalho apresenta um modelo analítico para o cálculo de tensões resultantes, deslocamentos e deformações em cascas finas de revolução, quando submetidas a uma dada distribuição de temperaturas $T = T(s, \theta, z)$. O material da casca é considerado elasto-termicamente ortotrópico, podendo ter propriedades variáveis ao longo do meridiano. A distribuição de temperatura no sentido circunferencial, deve ser suficientemente suave para que possa ser expandida em série de Fourier, e o módulo de elasticidade nesta direção, por ser considerado constante, é tomado para a temperatura média. A formulação numérica do modelo é baseada em diferenças finitas, e os resultados obtidos através de um programa digital desenvolvido em FORTRAN IV.

2. Equações fundamentais

A figura 1 mostra um elemento genérico com o sistema de referência da casca, as tensões resultantes, os deslocamentos e os parâmetros geométricos adimensionalizados através de a_0 e h_0 , respectivamente o comprimento e a espessura de referência.

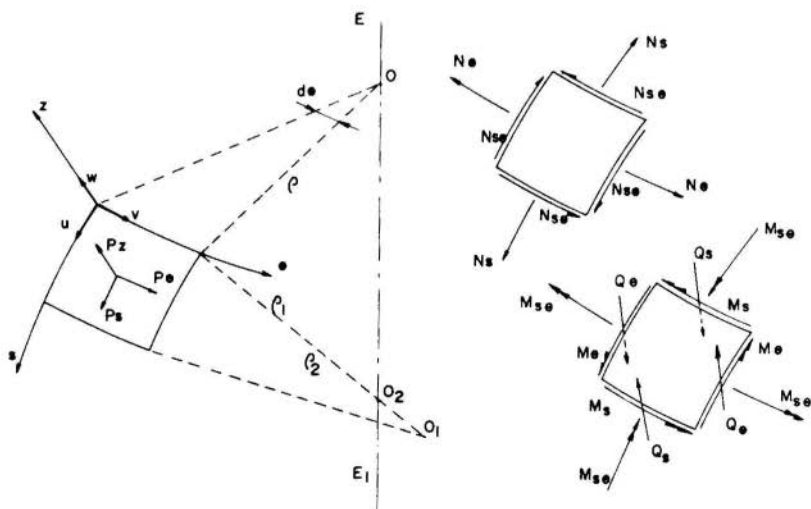


Fig. 1 - Elemento de casca e tensões resultantes

Integrando as equações de equilíbrio, determinadas na teoria da elasticidade [4], ao longo da espessura da casca, obtém-se as equações diferenciais de equilíbrio de um elemento genérico de cascas de revolução:

$$\begin{aligned}
 (\rho N_s)' + \dot{N}_{s\theta} - \rho' N_\theta + \frac{\rho}{\rho_1} Q_s &= -\rho p_s \\
 (\rho N_{s\theta})' + \dot{N}_\theta + \rho' N_{s\theta} - \rho_1 \rho'' Q_\theta &= -\rho p_\theta \\
 (\rho Q_s)' + \dot{Q}_\theta - \frac{\rho}{\rho_1} N_s + \rho_1 \rho'' N_\theta &= -\rho p_z \quad (1) \\
 (\rho M_s)' + \dot{M}_{s\theta} - \rho' M_\theta - \rho Q_s &= 0 \\
 (\rho M_{s\theta})' + \dot{M}_\theta + \rho' M_{s\theta} - \rho Q_\theta &= 0
 \end{aligned}$$

onde $()' = \partial/\partial s()$ e $(\dot{ }) = \partial/\partial \theta()$.

Se a superfície média da casca for tomada como a superfície de referência, e se as propriedades elásticas do material forem simétricas em relação à superfície média, a relação entre os vetores tensões resultantes $N = (N_s, N_\theta, N_{s\theta})$, $M = (M_s, M_\theta, M_{s\theta})$ e os vetores deformação $\epsilon = (\epsilon_s, \epsilon_\theta, \epsilon_{s\theta})$, e mudança de curvatura $k = (k_s, k_\theta, k_{s\theta})$ na superfície média é:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_T \\ M_T \end{Bmatrix} \quad (2)$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$ são as constantes de rigidez extensionais, $d_{ij} = d_{ji}$ são as constantes de rigidez flexionais, $P_T = (P_{Ts}, P_{T\theta}, 0)$ e $M_T = (M_{Ts}, M_{T\theta}, 0)$ são respectivamente a força e o momento térmico [2].

As relações entre os vetores deformação e deslocamento, e mudança de curvatura e deslocamento utilizadas neste trabalho, foram desenvolvidas a partir das mesmas relações estabelecidas na teoria da elasticidade [4], observando-se as hipóteses e particularidades geométricas do problema de cascas delgadas de revolução [2].

$$\epsilon_s = u' + \rho_1^{-1} w$$

$$\epsilon_\theta = \rho^{-1} (\rho' u + \dot{v} - \rho_1 \rho'' w) \quad (3)$$

$$\epsilon_{s\theta} = \rho^{-1} \dot{u} - \rho' \rho^{-1} v + v'$$

$$k_s = -\rho_1' \rho_1^{-2} u + \rho_1^{-1} u' - w''$$

$$k_\theta = \rho' (\rho \rho_1)^{-1} u - \rho_1 \rho'' \rho^{-2} \dot{v} - \rho^{-2} \ddot{w} - \rho' \rho^{-1} w' \quad (4)$$

$$k_{s\theta} = (\rho \rho_1)^{-1} \dot{u} + [2\rho_1 \rho' \rho'' \rho^{-2} - (\rho_1 \rho'')' \rho^{-1}] v - \\ - \rho_1 \rho'' \rho^{-1} v' + 2\rho' \rho^{-2} \dot{w} - 2\rho^{-1} \dot{w}'$$

Eliminando todas as incógnitas exceto u, v, w e M_s , obtem-se um sistema de quatro equações diferenciais parciais. Expandindo as variáveis que são funções de θ em série de Fourier de maneira compatível [5], resulta um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias na variável s , para cada harmônico n . Adimensionalizando todas as variáveis usando a_0, h_0, E_0 (módulo de elasticidade de referência), σ_0 (tensão de referência), T_0 (temperatura de referência) e considerando $X = (u, v, w, M_s)$, resulta:

$$PX'' + QX' + RX = C \quad (5)$$

onde os elementos das matrizes P, Q e R são funções dos parâmetros geométricos e das constantes de rigidez da casca, o vetor C é função dos parâmetros geométricos, dos carregamentos e da distribuição de temperaturas, e se encontram indicados no Apêndice.

O sistema de equações diferenciais (5) é de oitava ordem, exigindo portanto a prescrição de quatro condições de contorno em cada borda. Se

$$\hat{N}_{s\theta} = N_{s\theta} - \rho_1 \rho'' \rho^{-1} \beta M_{s\theta}, \quad \hat{Q}_s = Q_s + n \rho^{-1} \beta M_{s\theta} \quad (6)$$

são as tensões resultantes efetivas nas bordas, as condi-

ções de contorno em cada borda podem ser dadas [1]:

$$\begin{aligned} g_1 N_s + h_1 u &= e_1 \\ g_2 \hat{N}_{s\theta} + h_2 v &= e_2 \\ g_3 \hat{Q}_s + h_3 w &= e_3 \\ g_4 \phi_s + h_4 M_s &= e_4 \end{aligned} \quad (7)$$

onde $\phi_s = \rho_1^{-1} u - w'$ é a rotação da tangente à linha de coordenadas s .

Como N_s , $\hat{N}_{s\theta}$, \hat{Q}_s e ϕ_s podem ser escritas em função de X e X' , a equação diferencial que governa os contornos é:

$$EX' + FX = Y \quad (8)$$

onde os elementos das matrizes E , F e do vetor Y encontram-se indicados no Apêndice.

Resolvida a equação diferencial (5) com as condições de contorno (8), as tensões resultantes, deformações e mudanças de curvatura da superfície de referência, são determinadas respectivamente pelas equações (2), (3) e (4):

3. Formulação numérica

A formulação numérica das equações (5) e (8) é feita por diferenças finitas usando:

$$\begin{aligned} X'_1 &= (2h)^{-1}(-3X_1 + 4X_2 - X_3) + \Theta h^2 \\ X'_i &= (2h)^{-1}(X_{i+1} - X_{i-1}) + \Theta h^2 \quad i = 2, n-1 \\ X'_n &= (2h)^{-1}(X_{n-2} - 4X_{n-1} + 3X_n) + \Theta h^2 \\ X''_i &= h^{-2}(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}) + \Theta h^2 \quad i = 2, n-1 \end{aligned} \quad (9)$$

onde h é o espaçamento pivotal e n é o número de pontos pivotaes.

Aplicando as equações (9) na equação (5), obtém-se:

$$A_{1i} X_{i-1} + A_{2i} X_i + A_{3i} X_{i+1} = C_i \quad i = 2, n-1 \quad (10)$$

com $A_{1i} = h^{-2}P_i - (2h)^{-1}Q_i$, $A_{2i} = R_i - 2h^{-2}P_i$ e

$$A_{3i} = h^{-2}P_i + (2h)^{-1}Q_i$$

Aplicando as equações (9) na equação (8), obtém-se para as bordas:

$$A_{11} X_1 + A_{21} X_2 + A_{31} X_3 = Y_1 \quad (11)$$

$$A_{1n} X_{n-2} + A_{2n} X_{n-1} + A_{3n} X_n = Y_n$$

onde $A_{11} = F_1 - 1,5h^{-1}E_1$, $A_{21} = 2h^{-1}E_1$, $A_{31} = -(2h)^{-1}E_1$

$$A_{1n} = (2h)^{-1}E_n, \quad A_{2n} = -2h^{-1}E_n, \quad A_{3n} = 1,5 h^{-1}E_n + F_n$$

Como as matrizes A_{11} e A_{3n} podem ser singulares, o sistema deve ser modificado antes de se proceder sua solução. Essa modificação consiste na obtenção de duas equações pela aplicação de (10) nos pontos $i = 2$ e $i = n-1$, com as quais elimina-se respectivamente A_{11} e A_{3n} , obtendo-se:

$$\bar{A}_{21} X_2 + \bar{A}_{31} X_3 = \bar{C}_2 \quad (12)$$

$$\bar{A}_{1,n-1} X_{n-2} + \bar{A}_{2,n-1} X_{n-1} = \bar{C}_{n-1}$$

onde $\bar{A}_{21} = A_{11}(A_{12})^{-1}A_{22} - A_{21}$, $\bar{A}_{31} = A_{11}(A_{12})^{-1}A_{32} - A_{31}$

$$\bar{C}_2 = A_{11}(A_{12})^{-1}C_2 - Y_1, \quad \bar{A}_{1,n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}A_{1,n-1} - A_{1n}$$

$$\bar{A}_{2,n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}A_{2,n-1} - A_{2n},$$

$$\bar{C}_{n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}C_{n-1} - Y_n$$

Utilizando as equações (10) e (12) constroi-se um si

tema linear com uma forma característica, cuja solução através de um esquema numérico simples, que utiliza pouca memória de computador, encontra-se apresentada na referência [5]. Obtém-se, desta forma, as soluções para X_i , $i = 2, n-1$, sendo então X_1 e X_n determinados por

$$\begin{aligned} X_1 &= (A_{12})^{-1}(C_2 - A_{22} X_2 - A_{32} X_3) \\ X_n &= (A_{3,n-1})^{-1}(C_{n-1} - A_{1,n-1} X_{n-2} - A_{2,n-1} X_{n-1}) \end{aligned} \quad (13)$$

4. Resultados

Utilizando o programa desenvolvido, resolveu-se problemas com solução analítica conhecida, com o objetivo de verificar o modelo.

A figura 3 mostra o comportamento do deslocamento e das tensões resultantes próximas a uma extremidade livre de uma casca cilíndrica (figura 2), com temperatura interna constante positiva ($\Delta T/2$) e uma temperatura externa constante negativa ($-\Delta T/2$) de igual valor à temperatura interna, (ou seja, cujo carregamento é apenas um "momento térmico"). A solução analítica foi obtida a partir da referência [6], podendo-se observar que os resultados numéricos são bastante próximos a ela.

A figura 4 apresenta os resultados obtidos para uma casca cilíndrica uniformemente aquecida até uma temperatura T , engastada nos extremos. A solução analítica deste problema, é obtida nas referências [2, 3], considerando que a "força térmica" na direção axial é nula ($P_{Ts} = 0$), ao longo da casca e nos contornos. Introduzindo esta simplificação no programa, a solução numérica aproxima-se bastante da solução analítica, como pode ser observado. Para mostrar a implicação desta simplificação nos resultados, apresenta-se, também, a solução numérica sem considerá-la.

Soluções numéricas para outros harmônicos ($n \neq 0$), mostram a convergência dos coeficientes de Fourier para este problema.

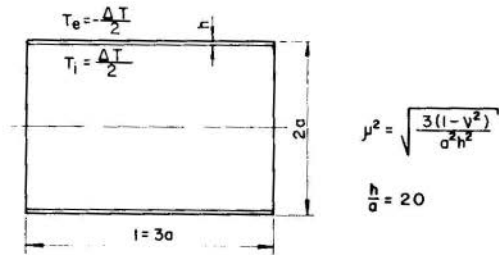


Fig.2 Casca cilíndrica com "momento térmico"

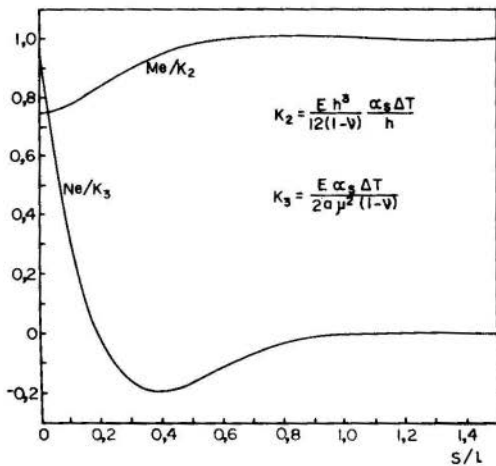
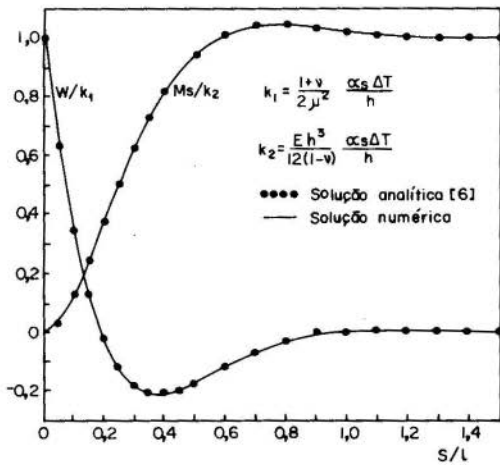


Fig.3 Deslocamento e tensões resultantes

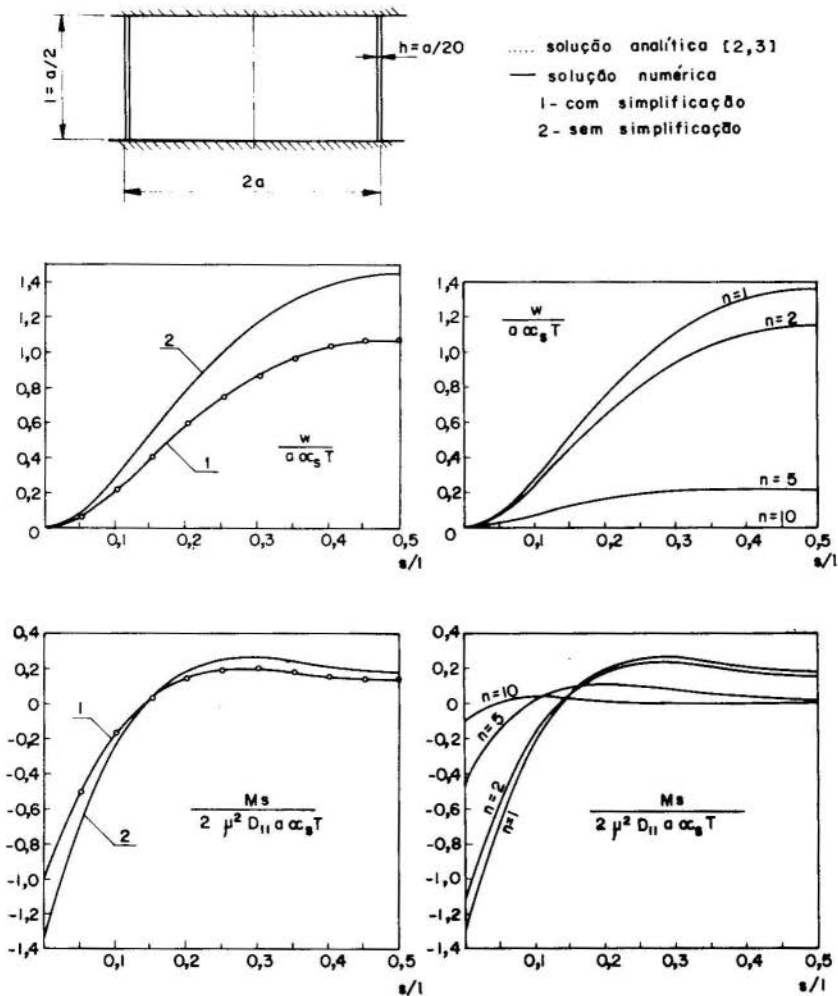


Fig.4 Casca cilíndrica uniformemente aquecida

5. Agradecimento

Os autores agradecem à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e à Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) que apoiaram a realização desta pesquisa.

Bibliografia

- [1] Alves, D.B., "Análise numérica de cascas ortotrópicas", Anais do IV COBEM, Paper nº A-11, pp. 131-142 (1977).
- [2] Kraus, H., "Thin elastic shells", John Wiley and Sons, Inc., New York (1967).
- [3] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of plates and shells", 2nd. Ed., McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo, (1959).
- [4] Alves, D.B., "Teoria da elasticidade" - Centro Tecnológico/UFSC (1977).
- [5] Guenther, R., "Análise de tensões térmicas em cascas de revolução", Dissertação de Mestrado - UFSC (1979).
- [6] Kent, C.H., "Thermal stresses in thin-walled cylinders". Transactions of ASME - Applied Mechanics - APM - 53-13, pp. 167-180, (1953).

Apêndice

Elementos não nulos das matrizes P, Q, R e do vetor C:

$$P_{11} = \rho a_{11}, \quad P_{22} = \rho a_{33} + (\rho_1 \rho'')^2 (2\rho)^{-1} \beta d_{33},$$

$$P_{23} = -\rho^{-1} \rho_1 \rho'' \beta d_{33} n, \quad P_{32} = -\rho^{-1} \rho_1 \rho'' \beta d_{33} n,$$

$$P_{33} = \rho^{-1} (\rho')^2 \beta d_{33} \theta + 2\rho^{-1} \beta d_{33} n^2, \quad P_{34} = \rho \beta, \quad P_{43} = d_{11},$$

$$Q_{11} = \rho' a_{11} + \rho a'_{11}, \quad Q_{12} = [a_{12} + a_{33} - (2\rho)^{-1} \rho'' \beta d_{33}] n$$

$$Q_{13} = \rho_1^{-1} \rho a_{11} - \rho_1 \rho'' a_{12} + (\rho \rho_1)^{-1} (\rho')^2 \beta d_{33} \theta + (\rho \rho_1)^{-1} \beta d_{33} n^2$$

$$\begin{aligned}
q_{14} &= \rho_1^{-1} \rho \beta, \quad q_{21} = -[a_{12} + a_{33} - (2\rho)^{-1} \rho'' \beta d_{33}] n \\
q_{22} &= \rho' a_{33} + \rho a'_{33} + \rho^{-1} \rho_1 \rho'' \beta \{[(\rho_1 \rho'')]' - (2\rho)^{-1} \rho_1 \rho'' \rho'\} d_{33} + \\
&+ \rho_1 \rho'' d'_{33} / 2, \quad q_{23} = -(\rho^{-1} \rho_1 \rho'' d'_{33} + \rho^{-2} \rho_1 \rho'' \rho' d\theta) \beta n \\
q_{31} &= \rho_1 \rho'' a_{12} - \rho_1^{-1} \rho a_{11} - (\rho \rho_1)^{-1} (\rho')^2 \beta d\theta - (\rho \rho_1)^{-1} \beta d_{33} n^2 \\
q_{32} &= \{2[\rho^{-2} \rho_1 \rho'' \rho' - \rho^{-1} (\rho_1 \rho'')']\} d_{33} - \rho^{-1} \rho_1 \rho'' d'_{33} + \\
&+ \rho^{-2} \rho_1 \rho'' \rho' d\theta \} \beta n, \quad q_{33} = \{[2\rho^{-1} \rho' \rho'' - \rho^{-2} (\rho')^3] d\theta + \\
&+ \rho^{-1} (\rho')^2 d\theta'\} \beta - 2(\rho^{-2} \rho' d_{33} - \rho^{-1} d'_{33}) \beta n^2 \\
q_{34} &= \rho' (2-ds) \beta, \quad q_{41} = -\rho_1^{-1} d_{11}, \quad q_{43} = \rho^{-1} \rho' d_{12} \\
r_{11} &= \rho'' a_{12} + \rho' a'_{12} - \rho^{-1} (\rho')^2 a_{22} - (\rho \rho_1^2)^{-1} (\rho')^2 \beta d\theta - \\
&- [\rho^{-1} a_{33} + (2\rho \rho_1^2)^{-1} \beta d_{33}] n^2 \\
r_{12} &= \{a'_{12} - \rho^{-1} \rho' (a_{22} + a_{33}) + \beta[\rho^{-2} \rho' \rho'' (d_{33} + d\theta) - \\
&- (2\rho \rho_1)^{-1} (\rho_1 \rho'')' d_{33}]\} n \\
r_{13} &= (\rho_1^{-1} \rho' - \rho_1^{-2} \rho \rho_1') a_{11} + \rho_1^{-1} \rho a'_{11} - [(\rho_1 \rho'')' + \rho_1^{-1} \rho'] a_{12} - \\
&- \rho_1 \rho'' a'_{12} + \rho^{-1} \rho_1 \rho'' \rho' a_{22} - (\rho_1 \rho^2)^{-1} \rho' \beta (d_{33} + d\theta) n^2 \\
r_{14} &= \rho_1^{-1} \rho' \beta (1-ds), \quad r_{21} = -[\rho^{-1} \rho' (a_{22} + a_{33}) + a'_{33} - \\
&- \rho^{-2} \rho' \rho'' \beta (d_{33} / 2 + d\theta) - (2\rho)^{-1} \rho'' \beta d'_{33} + (2\rho \rho_1)^{-1} \rho_1 \rho'' \beta d_{33}] n \\
r_{22} &= -[\rho^{-1} (\rho')^2 + \rho''] a_{33} - \rho' a'_{33} + \rho^{-1} \rho_1 \rho'' \beta \{[(\rho_1 \rho'')]' / 2 - \\
&- (2\rho)^{-1} (\rho_1 \rho'')' \rho' - \rho^{-1} \rho_1 (\rho'')^2\} d_{33} + [(\rho_1 \rho'')' / 2 - \\
&- \rho^{-1} \rho_1 \rho'' \rho'] d'_{33} \} - [\rho^{-1} a_{22} + \rho^{-3} (\rho_1 \rho'')^2 \beta d\theta] n^2
\end{aligned}$$

$$r_{23} = \rho^{-3} \rho_1 \rho'' \beta d\theta n^3 - [\rho_1^{-1} a_{12} - \rho^{-1} \rho_1 \rho'' a_{22} - \rho^{-2} \rho_1 (\rho'')^2 \beta d_{33} - \rho^{-2} \rho_1 \rho'' \rho' \beta d_{33}'] n, \quad r_{24} = \rho^{-1} \rho_1 \rho'' \beta ds n$$

$$r_{31} = \rho^{-1} \rho_1 \rho'' \rho' a_{22} - \rho_1^{-1} \rho' a_{12} + [(\rho^2 \rho_1)^{-1} (\rho')^3 - 2(\rho \rho_1)^{-1} \rho' \rho'' + (\rho \rho_1^2)^{-1} (\rho')^2 \rho_1'] \beta d\theta - (\rho \rho_1)^{-1} (\rho')^2 \beta d\theta' - [(\rho \rho_1)^{-1} d_{33}' - (\rho \rho_1^2)^{-1} \rho_1' d_{33} + (\rho^2 \rho_1)^{-1} \rho' d\theta] \beta n^2$$

$$r_{32} = \{-\rho_1^{-1} a_{12} + \rho^{-1} \rho_1 \rho'' a_{22} + [2\rho^{-2} (\rho_1 \rho'')' \rho' + 2\rho^{-2} (\rho_1 \rho'') \rho'' - 2\rho^{-3} \rho_1 \rho'' (\rho')^2 - \rho^{-1} (\rho_1 \rho'')''] \beta d_{33} + [2\rho^{-2} \rho_1 \rho'' \rho' - \rho^{-1} (\rho_1 \rho'')''] \beta d_{33}' + [\rho^{-2} (\rho_1 \rho'')' \rho' - 2\rho^{-3} \rho_1 \rho'' (\rho')^2 + \rho^{-2} \rho_1 (\rho'')^2] \beta d\theta + \rho^{-2} \rho_1 \rho'' \rho' \beta d\theta'\} n + \rho^{-3} \rho_1 \rho'' \beta d\theta n^3$$

$$r_{33} = 2\rho'' a_{12} - \rho_1^{-2} \rho a_{11} - \rho^{-1} (\rho_1 \rho'')^2 a_{22} - \{2[\rho^{-2} \rho'' - \rho^{-3} (\rho')^2] d_{33} + 2\rho^{-2} \rho' d_{33}' + [\rho^{-2} \rho'' - 2\rho^{-3} (\rho')^2] d\theta + \rho^{-2} \rho' d\theta'\} \beta n^2 - \rho^{-3} \beta d\theta n^4$$

$$r_{34} = [\rho''(1 - ds) - \rho' ds'] \beta - \rho^{-1} \beta ds n^2$$

$$r_{41} = \rho_1^{-2} \rho_1' d_{11} - (\rho \rho_1)^{-1} \rho' d_{12}, \quad r_{42} = \rho^{-2} \rho_1 \rho'' d_{12} n$$

$$r_{43} = -\rho^{-2} d_{12} n^2, \quad r_{44} = 1$$

$$c_1 = -\rho p_s + \rho p_{T_s}' + \rho' (p_{T_s} - p_{T_\theta}) + \rho_1^{-1} \rho' \beta (ds M_{T_s} - M_{T_\theta})$$

$$c_2 = -\rho p_\theta - n p_{T_\theta} - \rho^{-1} \rho_1 \rho'' \beta n (ds M_{T_s} - M_{T_\theta})$$

$$c_3 = -\rho p_z + \rho_1 \rho'' p_{T_\theta} - \rho_1^{-1} \rho p_{T_s} + \beta [\rho' ds' M_{T_s} + \rho'' (ds M_{T_s} - M_{T_\theta}) + \rho^{-1} (ds M_{T_s} - M_{T_\theta}) n^2 + \rho' (ds M_{T_s}' - M_{T_\theta}')]$$

$$c_4 = -M_{TS}$$

Elementos não nulos das matrizes E, F e do vetor Y:

$$e_{11} = g_1 a_{11}, \quad e_{22} = g_2 [(2\rho^2)^{-1}(\rho_1 \rho'')^2 \beta d_{33} + a_{33}]$$

$$e_{23} = -g_2 \rho^{-2} \rho_1 \rho'' \beta d_{33} n, \quad e_{32} = -g_3 \rho^{-2} \rho_1 \rho'' \beta d_{33} n$$

$$e_{33} = g_3 [\rho^{-2} (\rho')^2 \beta d\theta + 2\rho^{-2} \beta d_{33} n^2], \quad e_{34} = g_3 \beta, \quad e_{43} = -g_4$$

$$f_{11} = g_1 \rho^{-1} \rho' a_{12} + h_1, \quad f_{12} = g_1 \rho^{-1} a_{12} n, \quad f_{13} = g_1 (\rho_1^{-1} a_{11} - \rho^{-1} \rho_1 \rho'' a_{12}),$$

$$f_{12} = g_2 [(2\rho^2)^{-1} \rho'' \beta d_{33} - \rho^{-1} a_{33}] n$$

$$f_{22} = -g_2 \{\rho^{-1} \rho' a_{33} + \rho^{-1} \rho_1 \rho'' [\rho^{-2} \rho_1 \rho'' \rho' - (2\rho)^{-1} (\rho_1 \rho'')] \beta d_{33}\}$$

$$+ h_2, \quad f_{23} = g_2 \rho^{-3} \rho_1 \rho'' \rho' \beta d_{33} n, \quad f_{31} = -g_3 [(\rho_1 \rho^2)^{-1} (\rho')^2 \cdot \beta d\theta + (\rho_1 \rho^2)^{-1} \beta d_{33} n^2],$$

$$f_{32} = g_3 [\rho^{-3} \rho_1 \rho'' \rho' (2d_{33} + d\theta) - \rho^{-2} (\rho_1 \rho'')' d_{33}] \beta n, \quad f_{33} = -g_3 \rho^{-3} \rho' (2d_{33} + d\theta) \beta n^2 + h_3$$

$$f_{34} = g_3 \rho^{-1} \rho' (1 - ds) \beta, \quad f_{41} = g_4 \rho_1^{-1}, \quad f_{44} = h_4$$

$$y_1 = e_1 + g_1 p_{TS}, \quad y_2 = e_2, \quad y_3 = e_3 + g_3 \rho^{-1} \rho' \beta (ds M_{TS} - M_{T\theta})$$

$$y_4 = e_4$$

onde

$$ds = \frac{d_{12}}{d_{11}} \quad d\theta = \frac{d_{11} d_{22} - d_{12}^2}{d_{11}} \quad \beta = h_0/a_0$$



UNICAMP

COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-15

p.p. 230 - 239

DETERMINATION OF STRAIN ENERGIES IN AN ELASTIC: A CASE
STUDY OF TWISTING OF FILAMENTS

Janardan Singh Rohatgi

Professor Visitante, Depto. de Engenharia Mecânica,
 UFRN - Natal-RN-Brasil.

SUMMARY

A study has been made to calculate the strain energies stored in the twisted yarn assuming that a fibre behaves like an elastic. The shape of the fibre before twisting is straight and after twisting is of the form of a right-circular helix. The expression of the strain energies in the twisted yarn is the sum of bending and shear-strain energies of the helices. Further, this expression is elaborated to the self-twisted yarn. The results obtained agree fairly well with the postulated theory.

SUMÁRIO

Um estudo foi feito para calcular a energia de alongamento relativo armazenado no fio torcido. Supondo que a fibra tem comportamento como elástico. A figura da fibra antes de torção é como reta e após de torção é da forma hélice circular. A expressão de energia de alongamento relativo é a soma de energias de flexão e de cisalhamento das hélices. Adiante, esta expressão é elaborada para o fio de auto-torção. Os resultados obtido concordarão bem pela teoria postulado.

I. INTRODUCTION-

The twisting of yarn is the most important process in the textile manufacture. It is employed to bind the near-parallel fibres or filaments into a stable and strong state so as to avoid the disintegration of the constituent fibres during further processing or in the end-use. The insertion of twist in the fibres is the most costly and low productive process among all the stages of yarn production. During the last 30 years or so many novel methods of twist insertion have been invented by which is reduced the yarn production cost to a large extent, however, none of them were as economic as the process of SELF-TWISTING, which is nearly 10-times more productive than over the conventional process. Because of high rate of production the popularity in the industrial sector has created interest to study the mechanics of twisting or exactly, the self-twisting.

2. MECHANICS OF SELF TWISTING-

The identical twisted yarns, i.e., each of them if twisted in the alternate directions: in the clockwise and anti-clockwise directions, and when are combined together then they twist around each other by themselves and form a stable two-ply structure. This phenomenon is known as self-twisting. The path of a filament in a single yarn is assumed to conform to an helix. It is interesting to mention that each of them is not stable because of the fact that the alternate twists will cancel each other and thus it can not remain stable at its own, however, two such yarns form a stable structure. Further, in self-twist yarn the helix is doubly wound, i.e., helix around helix. Therefore, it is first necessary to define the geometry of yarn and helix.

2.1 YARN GEOMETRY-

The yarn is nothing but an integrated form of filaments, thus to define yarn, we have to go down to filaments. As such the following assumptions are made-

1. The filaments are circular in cross-section and uniform along their axes with their diameters negligibly small. The yarn diameter is uniform along its length and its cross-sectional shape is circular.

2. Each filament forms a perfect circular helix around the yarn axis.

3. The filament are packed in a close hexagonal arrangement such

that maximum packing density in the yarn cross-section is obtained.

4. The filaments are incompressible and exhibit perfectly elastic stress-strain behaviour.

The actual structural geometry often departs from the idealised model used. Nonetheless the value of such idealised model has been sufficiently well established so that their use is justified [1].

2.2 EQUATION OF AN HELIX-

A circular helix [2] is defined as a curve drawn on the surface of a right circular cylinder cutting the generators at a constant angle. The equation of such an helix, Figure I, is given by-

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \dots\dots\dots(1) \\ z &= R \theta \cot q \end{aligned}$$

where, R = radius of an helix, θ = angle which specifies the rotation of the radius, and q = helix angle in radians.

The helix is defined by its radius and the angle it makes with the axis (z-axis), that is-

$$\tan q = 2\pi RT_s \dots\dots\dots(2)$$

where T_s is the turns per unit length in the yarn.

2.3 CURVATURE AND TORSION OF HELIX-

In differential geometry, the rate of turning of binormal is called torsion and is given by,

$$t = \frac{\sin q \cos q}{R} \dots\dots\dots(3)$$

and the curvature of helix is given by,

$$k = \frac{\sin q}{R} \dots\dots\dots(4)$$

3. DETERMINATION OF STRAIN ENERGIES -

After discussing assumptions and the curvature and torsion of an helix, expression for the strain energies in a single yarn may be found.

3.1 BENDING STRAIN ENERGY (BSE) -

BSE per unit filament length (L_f) is given by [3],

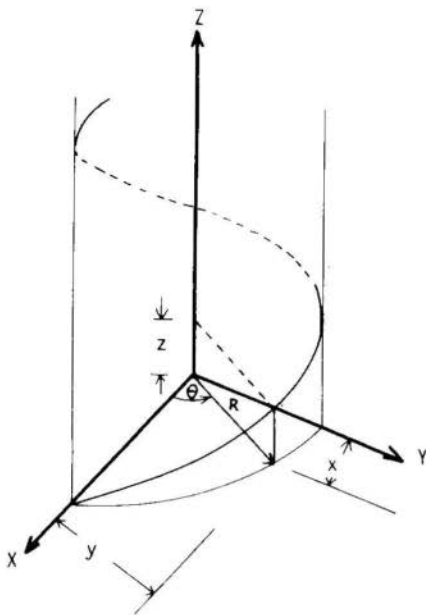


FIGURE 1- A CIRCULAR HELIX SHOWING THE ROTATION OF VECTOR R.

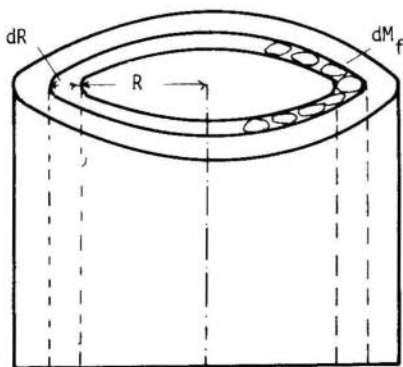


FIGURE 2- CROSS-SECTION OF YARN SHOWING ELLIPTICAL SHAPE OF THE FILAMENTS.

$$(BSE)_{f=} = \frac{I}{2} B_f k^2 \dots\dots\dots(5)$$

where B_f is the rigidity of bending of the filament. The equation (5) gives t the BSE per unit bent filament length and to transform to per unit yarn length (L_h) we use the following-

$$L_f = L_h \sec q \dots\dots\dots(6)$$

therefore, BSE per unit yarn length is,

$$(BSE)_f = \frac{I}{2} B_f k^2 \sec q \dots\dots\dots(7)$$

However, the BSE of all filaments in the yarn is determined in a different manner. As the yarn is composed of, say, M_f number of filaments and in transverse section of the yarn the filaments will look like elliptical in section, as shown in Figure 2. Then in an annulus of diameter dR , there are dM_f number of filaments. The assumption of close hexagonal packing implies that the number of filaments per unit area of yarn cross-section is constant over the whole cross-section, i.e., the total number of filaments per unit area of cross-section is, $M_f/\pi R_s^2$.

Then, we have,

$$= r_f \sqrt{\frac{M_f}{p}} \dots\dots\dots(8)$$

where, r_f , R_s and P are filament radius, yarn radius, and packing coefficient respectively. The area of annulus is simply $2 R dR$ and the area occupied by filaments should be multiplied by packing factor, thus we have-

$$\text{Area occupied by film.} = 2 \pi R dR P \dots\dots\dots(9)$$

The equation (9) may also be obtained in a different manner. As the filaments in an annulus are elliptical and of helix angle q , then the apparent area of each filament is of the magnitude-

$$\pi r_f^2 \sec q \quad .$$

Then we have,

$$\text{Area occupied by filaments} = \pi r_f^2 \sec q dM_f \dots\dots\dots(10)$$

Using equations (8), (9) and (10), we get-

$$dM_f = \frac{M_f \cos q \, RdR}{2R_s^2} \dots \dots \dots (II)$$

The equation(7) is the BSE of a filament per unit yarn length.Hence, BSE of all filaments may be obtained by multiplying by dM_f and integ- rating between the limits $R=0$ and $R=R_s$,we get

$$(BSE)_s = \frac{I}{2} \int_0^{R_s} B_f k^2 \sec q \, dM_f \dots \dots (I2)$$

Substituting the values of k and dM_f from equations (4) and (II) and multiplying by yarn length, L_h , we get

$$(BSE)_s = \frac{M_f B_f L_h}{R_s^2} \int_{R=0}^{R=R_s} \frac{\sin^4 q}{R} \, dq \dots \dots (I3)$$

The value of dR may be obtained from equation(2) ,i.e. $dR = \sec^2 q / 2\pi RT_s$ and limits of integration are changed from 0 to Q_s , substituting equa- tion (I3) ,we get

$$(BSE)_s = \frac{M_f B_f L_h}{R_s^2} \int_0^{Q_s} \frac{\sin^4 q \sec^2 q}{\tan q} \, dq$$

Upon integration of the above expression ,we get

$$(BSE)_s = \frac{M_f B_f L_h}{2R_s^2} (\log_e \sec^2 Q_s - \sin^2 Q_s) \dots (I4)$$

The equation (I4) is the expression for the bending strain energy of yarn, $(BSE)_s$, of length L_h where Q_s is the surface helix angle of the filament.

3.2 SHEAR STRAIN ENERGY (SSE)-

The shear strain energy in a twisted single yarn is taken as the sum of the shear strain energies of its twisted filaments.The

The shear strain energy per unit filament length is given by,

$$(SSE)_f = \frac{1}{2} C_f J_f \dots\dots\dots (I5)$$

where, C_f = torsional rigidity of filament and J_f the unit twist in the filaments per unit length in radians. The twisting of the filaments in the form of a bundle of parallel and straight-filaments produces a twisted yarn and the path of each filament in it assumed to be helical, and therefore, twist in the filament (in the yarn state) is the torsion of helix as given in equation (3) and is equal to $J_f [4]$, we get,

$$J_f = \frac{\sin q \cos q}{R} \dots\dots\dots (I6)$$

The shear strain energy of all filaments in a yarn of length L_h is obtained by integrating procedure similar to used in section 3.1. Substituting value of J_f from equation (I6) in equation (I5) and integrating from 0 to Q_s , we get

$$(SSE)_s = \frac{M_f C_f L_h \sin^2 Q_s}{2R_s^2} \dots\dots\dots (I7)$$

3.3 TOTAL STRAIN ENERGY -

The total strain energy of all filaments in a single and straight twisted yarn of L_h is the sum of $(BSE)_s$ and $(SSE)_s$, i.e., the sum of equation (I4) and (I7).

3.4 ENERGY IN THE PLIED STATE (TSE)_p -

As already dealt that when two like twisted single yarns are brought together then they automatically twist about each other and result into a plied stable structure. The path of a filament in this state is of the doubly wound helix. During this phenomenon (and which has been called: self-twisting) the original twist contained in the single yarn diminishes and also the straight single yarns bend to a helical configuration (i.e., new helix) and form helix. Then the total strain energy in the equilibrium plied state is the sum of three items: (1) BSE_s as given in equation (I4); (2) SSE_s of equation (I7); and (3) the bending

strain energy of the single yarn, $(BSE)_p$, of the newly formed helix. The expression for this strain energy may be given by,

$$(BSE)_p = \frac{I}{2} B_p k_p^2 L_h \dots\dots\dots (18)$$

where, K_p is the curvature of the yarn and is,

$$K_p = \frac{\sin^2 Q_p}{R_s}$$

and $B_p = M_f B_f$. The equation (18) is simply,

$$(BSE)_p = \frac{M_f B_f \sin^4 Q_p L_h}{2R_s^2} \dots\dots\dots (19)$$

Thus total energy in the plied state is the sum of equations (14), (17) and (19), changing Q , as Q_{sp} , which is the helix angle at the surface in the plied state, we get

$$(TSE)_p = \frac{M_f L_h}{2R_s^2} \left[B_f (\log_e \sec^2 Q_{sp} - \sin^2 Q_{sp}) + C_f \sin^2 Q_{sp} + B_f \sin^4 Q_{sp} \right] \dots\dots\dots (20)$$

4. EXPERIMENTS-

The bending rigidity of filament (B_f) was calculated using the method of Livesey and Owen [5] i.e., it was determined: 7.4×10^{-5} gf.cm². The torsional rigidity (C_f) was determined by torsional pendulum method [6], its value was 4.2×10^{-5} gf.cm².

The helix angles were determined by travelling microscope and they are related to the twist in the yarn, i.e.,

$$T_{sp} = \frac{\tan Q_{sp}}{2R_s} \dots\dots\dots (21)$$

and,

$$T_p = \frac{\tan Q_p}{2R_s} \dots\dots\dots (22)$$

Theyarn diameter R_s and twists T_{sp} and T_p were thus found to be for a typical specimen of wool yarn containing II6 fibres (M_f) as $R_s = 0.0186$ cm $T_p = 2.52$ per cm and $T_{sp} = 2.19$ per cm. The values of $Q_p = 16.4$ and $Q_{sp} = 14.3$ degrees were calculated from equation (21) and (22) respectively. The twist in the single yarn $T_s = 4.51$ was obtained from the relationship

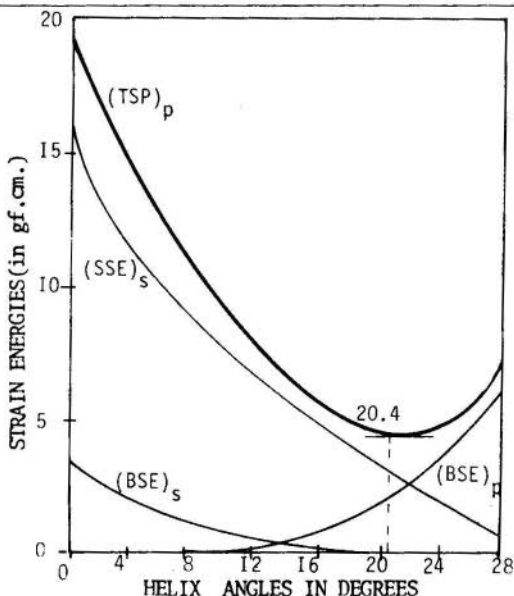
$$T_s = T_{sp} + \frac{\sin Q_p \cos Q_p}{2\pi R_s}$$

and the results are shown in the following table. In the same table is also shown the individual strain energies.

TABLE: THE HELIX ANGLES AND THE STRAIN ENERGIES ($\times 10^{-3}$ gf.cm)

Q_p	T_{sp}	Q_{sp}	BSE _s	BSE _p	SSE _s	TSE _p
0	4.51	27.8	349.7	0	1563.0	1912.8
4	3.92	24.6	222.0	0	1243.7	1465.9
8	3.34	21.3	116.6	4.9	947.1	1068.6
12	2.27	17.9	58.3	23.6	683.0	764.8
16	2.25	14.7	27.3	70.7	463.4	561.4
20	1.76	11.6	13.6	169.6	292.8	476.1
24	1.36	8.9	1.2	339.3	170.6	511.1
28	0.97	6.5	0	602.5	90.8	693.3

FIGURE 3-
RELATION
BETWEEN
HELIX
ANGLES
AND STR-
AIN EN-
ERGIES.



In Figure 3 is shown the relation between helix angles and the strain energies, i.e., the bending energy of filaments, BSE_f , bending energy of the twisted yarn in the helical state, BSE_p and the shear strain energy of the filaments, SSE_f . The energies have been calculated from the equation (20).

5. CONCLUSION.

From the Figure 3 we note that at the minimum energy level, of the total energy curve, the corresponding value of $Q_p = 20.4$ degrees, which is quite approximate to the experimental value of 16.4 degrees. Thus the theory developed agrees fairly well with the results obtained.

6. REFERENCES-

- [1] Tayebi, A., and Backer, S., in Mechanics of Self Twist Ply Yarns, M.S. Thesis of Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, 1972.
- [2] Weatherburn in the book. Differential Geometry, page 26.
- [3] Timoshenko, S., in Strength of Materials Part I, chapter II.
- [4] Love, A.E.H., in the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge, 1927, chapter 18.
- [5] Livesey, R.G., and Owen, J.D., Journal of Textile Institute, 1964, 55, T516.
- [6] Meredith, R., Journal of Textile Institute, 1954, 45, T489.
- [7] Rohatgi, J.S., Ph.D. Thesis, University of Leeds, 1974.

ACKNOWLEDGEMENTS-

I express my sincere thanks to Professor P. Grosberg, Ph.D., FTI, MIMechE, of The University of Leeds, England, who gave me constant advice and encouragement during this work [7], which was presented for the degree of Ph.D.



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-16

P.P. 240 - 246

ESTIMAÇÃO LINEAR ÓTIMA APLICADA À GERAÇÃO DE
MÉTODO DIRETO DE BUSCA EM OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS

A. Rios Neto

Professor Depto Engenharia Mecânica
 USP/UNESP - São Paulo - S.P. - Brasil

RESUMO

O método numérico apresentado se aplica a otimização de parâmetros, com a função objetivo e os vínculos não lineares. Adota-se procedimento de perturbação linear com critério de busca direta, na direção do gradiente da função objetivo e na direção de satisfação dos vínculos. A associação deste procedimento a uma interpretação estocástica dos erros envolvidos na aproximação linear, reduz a determinação do incremento de busca, em cada iteração, a uma estimação linear ótima com o emprego do filtro de Kalman.

ABSTRACT

The numerical method presented in this paper applies to nonlinear parameter optimization problems. A linear perturbation procedure is adopted with a criterion of direct search in the direction of the objective function gradient and in the direction of meeting the constraints. Associating this to a interpretation of the errors as random variables, one reduces, in each iteration, the determination of the search increment to a optimal linear estimation, using the kalman filter.

1. Introdução

O método proposto se aplica à solução numérica de problemas de otimização de parâmetros com função objetivo e vínculos não lineares. O procedimento de busca associado é do tipo direto (1), em que a determinação do incremento nos parâmetros, numa iteração típica, se condiciona à satisfação do critério de obtenção de um vetor que combine deslocamentos na direção de satisfação dos vínculos e na direção do gradiente da função objetivo. Este procedimento é desenvolvido pela utilização de estimação linear ótima na determinação do incremento de busca. Em cada iteração, através de uma aproximação linear para a função objetivo e os vínculos, associada à satisfação do critério de busca e de uma interpretação dos erros como sendo variáveis aleatórias, o problema é reduzido a um de estimação linear com informação "a priori". O incremento de busca é, então, determinado pelo emprego sequencial do Filtro de Kalman (1-3). Segundo o conhecimento do autor, o método proposto constitui uma contribuição original, no sentido de estender a aplicação de estimação linear ótima à geração de um método numérico para solução de problemas de otimização de parâmetros.

2. Formulação do Problema

O método proposto se aplica à solução de problemas como o formulado a seguir.

$$\text{Minimizar: } L(X) \quad (2.1)$$

$$\text{Sujeito a: } M(X) = 0 \quad (2.2)$$

onde, sem perda de generalidade, o problema de otimização é colocado como uma minimização; X é o vetor de dimensão n , a ser determinado para otimização da função de desempenho (ou objetivo, ou custo), $L(X)$; $M(X)$, função vetorial de dimensão m ($m < n$), constitui os vínculos do problema.

O procedimento desenvolvido nas seções seguintes se constitui num método direto de busca, do tipo gradiente (1), em que o incremento de busca, x , tomado a partir de um va

lor nominal, \bar{X} , deve, em cada passo, ser tal que:

$$\begin{aligned}x &= x_1 + x_2 \\ x_1^T &= -\alpha L_{\bar{X}}\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$M(\bar{X} + x_2) - M(\bar{X}) = -\beta M(\bar{X})$$

onde, $L_{\bar{X}} \triangleq \left. \frac{d}{dX} L(X) \right|_{\bar{X}}$, vetor gradiente; $0 < \beta \leq 1$; $\alpha > 0$.

Assim, o problema que se coloca é o de se determinar o deslocamento x de forma a se caminhar na direção da solução, isto é, de modo a se satisfazer ao critério de, simultaneamente, se aproximar do valor mínimo de $L(X)$ e da satisfação dos vínculos, $M(X)$.

3. Fundamentos do Método

Para valores de $\|x\|$ e q suficientemente pequenos, resulta

$$M_{\bar{X}} x + o(2) = -q M(\bar{X}) \quad (3.1)$$

onde, $M_{\bar{X}} \triangleq \left. \frac{d}{dX} M(X) \right|_{\bar{X}}$ e $o(2)$ representa os termos de ordem superior.

Sob as hipóteses em que a equação acima foi obtida, $o(2)$ é tal a estar dentro da faixa de erro desprezível nas computações numéricas envolvidas, isto é, confunde-se com o vetor zero numérico de ordem m . Por outro lado, é razoável modelar-se este vetor zero numérico como um vetor aleatório, de componentes não correlacionadas, de média nula, uniformemente distribuído na faixa de erro desprezível, isto é,

$$M_{\bar{X}} x + \epsilon_M = -q M(\bar{X}) \quad (3.2)$$

onde

$$E(\epsilon_M) = 0, \quad E(\epsilon_M \epsilon_M^T) = \text{diag.}(\alpha_{m1}^2, \alpha_{m2}^2, \dots, \alpha_{mm}^2) = R$$

Dada a hipótese de distribuição uniforme para ϵ_M e sendo $e_m > 0$, o máximo erro numérico desprezível, tem-se:

$$\alpha_{mi}^2 = \frac{1}{3} e_m^2, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

Para satisfação da exigência correspondente a equação (2.3) e para garantir que o deslocamento x seja suficientemente pequeno, é razoável considerar-se a condição a seguir, para ϵ_L^2 uniformemente distribuído e de componentes não correlacionadas,

$$-p L_{\bar{X}}^T = x + \epsilon_L', \quad 0 < p \leq 1 \quad (3.4)$$

$$E(\epsilon_L') = -\frac{1}{2} p (L_{\bar{X}})^T = \bar{\epsilon}_L'$$

$$E((\epsilon_L' - \bar{\epsilon}_L')(\epsilon_L' - \bar{\epsilon}_L')^T) = \text{diag.}(\alpha_{\ell 1}^2, \alpha_{\ell 2}^2, \dots, \alpha_{\ell n}^2) = \bar{P}$$

$$\alpha_{\ell i}^2 = \frac{1}{12} (p L_{\bar{X}_i})^2 + \frac{1}{3} e_{\ell}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

onde e_{ℓ} é o valor do erro numérico admissível nas componentes de x , compatível com o erro e_m , como explicado mais a diante (Eq.3.8). Por outro lado, subtraindo-se $\bar{\epsilon}_L'$ membro a membro na equação (3.4),

$$-\frac{1}{2} p L_{\bar{X}}^T = x + \epsilon_L \quad (3.6)$$

$$E(\epsilon_L) = 0, \quad E(\epsilon_L \epsilon_L^T) = \bar{P} \quad (3.7)$$

O valor de e_{ℓ} deve ser recolhido de modo a se garantir a prioridade de satisfação dos vínculos (Eq.(3.2)). Para tanto, impõe-se que

$$E(M_{\bar{X}} E_L E_L^T M_{\bar{X}}^T) \gg E(\epsilon_M \epsilon_M^T) \quad (3.8)$$

$$E(E_L) = 0, \quad E(E_L E_L^T) = \frac{1}{3} e_{\ell}^2 I_n$$

ou, para $\beta \gg 1$, tal que βe_m seja o erro admissível para os vínculos, é razoável considerar-se

$$e_{\ell} = \text{Max.} \{ e_{\ell i} : \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \bar{X}_j} M_i(X) \Big|_{\bar{X}} \right)^2 \right) e_{\ell i}^2 = \beta^2 e_m^2, i = 1, 2, \dots, m \} \quad (3.9)$$

O valor de q deve ser escolhido a partir do valor de p , de modo a se garantir a hipótese de perturbação linear. Assim é razoável considerar-se:

$$q = \text{Min.} \{ q_i : q_0 = 1, q_1^2 M^T(\bar{X}) \cdot M(\bar{X}) = p^2 \left\{ (M_{\bar{X}}^T L_{\bar{X}}^T)^T (M_{\bar{X}} L_{\bar{X}}^T) + e_{\ell}^2 \cdot (M_{\bar{X}} 1_n)^T (M_{\bar{X}} \cdot 1_n) \right\} \}$$

onde 1_n é o vetor de ordem n , de componentes unitárias.

4. Método Proposto

Numa iteração típica, a consideração simultânea das Eqs. (3.2) e (3.6) para determinação de x , leva ao seguinte problema de estimação com informação a priori,

$$\bar{x} = x + \epsilon_L \quad (4.1)$$

$$z = Hx + \epsilon_M \quad (4.2)$$

onde $\bar{x} \triangleq -\frac{1}{2} p L_{\bar{X}}^T$, $z \triangleq -q M(X)$, $H \triangleq M_{\bar{X}}$

A solução do problema anterior pode ser obtida por estimação linear (1-3), através da utilização do filtro de Kalman para se estimar o valor do incremento x .

$$\hat{x} = \bar{x} + K(z - H\bar{x}) \quad (4.3)$$

$$K = P H^T R^{-1} \quad (4.4)$$

$$P = \bar{P} - \bar{P} H^T (H \bar{P} H^T + R)^{-1} H \bar{P} \quad (4.5)$$

onde \hat{x} é o valor estimado para o incremento; R e \bar{P} matrizes de covariâncias dos erros, como definidas nas Eqs. (3.2) e (3.4).

Por outro lado, o fato do vetor aleatório ϵ_L ser independente do vetor aleatório ϵ_M e deste último ter componentes não correlacionadas, permite tratar o problema de uma outra forma, pela estimação de x como o estado de um processo de múltiplos estágios, como indicado a seguir.

$$\bar{x}^{i+1} = \hat{x}^i, \bar{x}^1 = \bar{x}, \bar{p}^1 = \bar{p} \quad (4.6)$$

$$z_i = h_i x + \epsilon_{Mi} \quad (4.7)$$

$$\hat{x}^i = \bar{x}^i + K_i (z_i - h_i \bar{x}^i) \quad (4.8)$$

$$K_i = p^i h_i^T R_i^{-1} \quad (4.9)$$

$$p^i = \bar{p}^i - \bar{p}^i h_i^T (h_i \bar{p}^i h_i^T + R_i)^{-1} h_i \bar{p}^i \quad (4.10)$$

$$\bar{p}^{i+1} = p^i$$

onde $i = 1, 2, \dots, m$; $H^T = (h_1^T : h_2^T : \dots : h_m^T)$; $z^T = (z_1, z_2, \dots, z_m)$; $\epsilon_M^T = (\epsilon_{M1}, \epsilon_{M2}, \dots, \epsilon_{Mm})$; $R_i = E(\epsilon_{Mi}^2)$; e, naturalmente, $\hat{x}^m = \hat{x}$, $p^m = p$, resultados idênticos aos das Eqs.(4.3) e (4.5).

Vê-se, portanto, que a determinação do incremento x ficou reduzida a uma estimação sequencial em que as componentes de z são processadas uma a uma. Desta forma, a matriz a ser invertida, na Eq.(4.10), é de ordem um, evitando-se, assim, o problema de inversão existente para a solução na forma das Eqs.(4.3) a (4.5).

Antes de se proceder a uma nova iteração é preciso fazer as verificações a seguir, para $i = 1, 2, \dots, m$.

$$i) \text{ Se } /M_i(\bar{X})/ > \beta e_m \text{ e } /M_i(\bar{X} + \hat{x})/ \leq /M_i(\bar{X})/ ,$$

então $x = \hat{x}$ e procede-se a uma nova iteração, \bar{X} novo sendo $\bar{X} + \hat{x}$; caso contrário diminui-se p e recalcula-se \hat{x} .

$$ii) \text{ Se } /M_i(\bar{X})/ \leq \beta e_m \text{ e } /M_i(\bar{X} + \hat{x})/ \leq \beta e_m \text{ e}$$

$L(\bar{X} + \hat{x}) < L(\bar{X})$ passa-se à verificação seguinte; caso contrário diminui-se p e recalcula-se \hat{x} .

iii) Se a verificação anterior for satisfeita e $\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \bar{X}_j} M_i(X) \Big|_{\bar{X}} p L_{\bar{X}_j} \right)^2 < \beta^2 e_m^2/3$, a solução convergiu; caso contrário procede-se a uma nova iteração, com \bar{X} novo.

5. Conclusões

O método proposto encontra-se, ainda, na fase de teste. A qualidade dos resultados já obtidos, nas aplicações efetuadas, justifica a divulgação para a extensão e aprofundamento de sua avaliação como ferramenta de cálculo numérico, na área de controle e otimização. Cumpre destacar a característica sequencial dos procedimentos de cálculo envolvidos, que evita a necessidade de inversão de matrizes. Isto qualifica o método para solução de problemas pelo emprego de mini-computadores e das modernas mini-calculadoras programáveis.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Bryson, A. E. and Ho, Y. C., "Applied Optimal Control". Blaisdell Publishing Co., pp. 348 - 388 - (1969).
- (2) Gelb, A. et al, "Applied Optimal Estimation". The M.I.T. Press, pp. 105 - 142 - (1974).
- (3) Jazwinski, A. H., "Stochastic Processes and Filtering Theory". Academic Press, pp. 194 - 262 - (1970).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-17

P. P. 247 - 259

PARAMETRIC EXCITATION OF LINEAR AND NONLINEAR
SYSTEMS: THE NORMAL FORM METHOD

Liu Hsu

Prof. of Dept. of Mechanical Engineering
 COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

SUMMARY

In this paper is presented an analytical method for determining the stability and the local dynamical behavior of the trivial solution $\underline{x} = \underline{0}$ of the system $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, \underline{F} periodic in t . The method consists basically of two steps: (a) construction of an equivalent autonomous system, (b) normalization of the later system. The proposed approach is well suited for numerical programming and can treat simple or combination resonances, subharmonic oscillations and other local dynamical features.

SUMÁRIO

Neste artigo é apresentado um método analítico para a determinação da estabilidade e do comportamento dinâmico local da solução trivial $\underline{x} = \underline{0}$ do sistema $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, \underline{F} periódico em t . O método consiste basicamente de dois passos: (a) construção de um sistema autônomo equivalente, (b) normalização deste sistema. O enfoque proposto é bem adequado para programação em computador e pode tratar de ressonância simples ou combinatória, oscilações subharmônicas e outras características do comportamento dinâmico local.

1. Introduction

Parametric excitation has been extensively studied particularly in the linear case. This fact reflects the importance of the subject from an applied point of view as stressed by Bolotin [1]. To solve the stability problem in the linear case, several methods are available and can be used in principle, e.g., small parameter methods [1] [3] [4], Bolotin's Method [1], Point Mapping method [5], Hill's method [6], Harmonic Balance [7], etc... However, when the dimension of the system is large, application of these methods becomes involved or time-consuming especially when more accurate results are required (higher order approximations).

In the present paper a new method is proposed to deal with the dynamical problems of harmonically excited systems. The unusual aspect of this method is that the original nonautonomous system is regarded as an autonomous system coupled with a linear harmonic oscillator in a nonlinear manner. This idea would be perhaps of scant use if some applicable formulae had not been developed as in [8] concerning the obtention of a Normal form for nonlinear differential systems [9].

This paper will be restricted to the presentation of the fundamental ideas of the method. A more complete version will appear elsewhere.

2. Basic Notation

\underline{x} , \underline{z} , etc... or $\{x_j\}$, $\{z_j\}$, etc ... : vectors;

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v_i \geq 0$ integers;

$$|v| = \sum_i v_i;$$

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n); \Lambda \cdot v = \sum_i \lambda_i v_i;$$

$$\lambda_{vj} = \Lambda \cdot v - \lambda_j; \sum_{\lambda_{vj}=0} = \sum_{|v|=2,3,\dots,\infty} \quad (v \text{ such that } \lambda_{vj}=0)$$

$\underline{x}^v = x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n}$; δ_{mn} = delta of kronecker

$$\sum_{I, J}^{(v)} = \sum_{\substack{J=1, \dots, n \\ I=1, \dots, n, v_I \neq 0}} ; * \text{ denotes "conjugate";}$$

$\delta_I = (\delta_{I,1}, \delta_{I,2}, \dots, \delta_{I,n})$; $\phi_j^v, \bar{\phi}_j^v, B_j^v, \phi_j^v, G_j^v$: constants

$$\sum_{\lambda_{vj}=0}^{(N)} = \sum_{|v|=2,3,\dots,\infty} \quad (v \text{ such that } \lambda_{vj}=0 \text{ if } |v| \leq N)$$

3. The Normal form:

Let us consider the (autonomous) system:

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{f}(\underline{x}), \quad \underline{f}(\underline{0}) = \underline{0} \quad (1)$$

where $\underline{x}, \underline{f} \in \mathbb{R}^n$, A is an $n \times n$ real matrix, \underline{f} is analytical around $\underline{x} = \underline{0}$ and contains only terms of degree not lower than two in \underline{x} .

Let us suppose that all roots λ_i of A have zero real parts and that they are simple (i.e., A has a diagonal canonic form).

The function \underline{f} can be expressed as a power series:

$$\underline{f} = \left\{ \sum_{|v|=2}^{\infty} \phi_j^v \underline{x}^v \right\} \text{ or } f_j = \sum_{|v|=2}^{\infty} \phi_j^v \underline{x}^v \quad (2)$$

where the ϕ_j^v 's represent real constants.

By means of a linear change of variables (see Appendix I [11]) the system (1) can be reduced to the form:

$$\dot{\underline{z}} = \Lambda \underline{z} + \left\{ \sum_{|v|=2}^{\infty} \bar{\phi}_j^v \underline{z}^v \right\} \quad (3)$$

where $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$ and $\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$ is a diagonal $n \times n$ matrix

We now seek for the elimination of the second order terms of (3) by means of a substitution $\underline{z} \rightarrow \underline{\xi}$ of the form:

$$\underline{z} = \underline{\xi} + \left\{ \sum_{|\nu|=2} B_j^\nu \underline{\xi}^\nu \right\} \quad (4)$$

As in [8] we get:

$$B_j^\nu = \bar{\phi}_j^\nu / \lambda_{\nu j} \quad \text{for } |\nu|=2 \text{ and } \lambda_{\nu j} \neq 0 \quad (5)$$

The second order terms such that $\lambda_{\nu j}=0$ are called resonant and cannot be eliminated by (4). For such terms we set:

$$B_j^\nu = 0 \quad (|\nu|=2 \text{ and } \lambda_{\nu j} = 0) \quad (6)$$

Thus, the substitution defined by (4)(5)(6) brings system (3) to the form:

$$\underline{\dot{\xi}} = \mathcal{A} \underline{\xi} + \left\{ \sum_{|\nu|=2, \lambda_{\nu j} \neq 0} \phi_j^\nu \underline{\xi}^\nu \right\} + \left\{ \sum_{|\nu|=3}^{\infty} \phi_j^\nu \underline{\xi}^\nu \right\} \quad (7)$$

where

$$\phi_j^\nu = \bar{\phi}_j^\nu \quad ; \text{ for } |\nu|=2 \text{ and } \lambda_{\nu j} = 0 \quad (8)$$

$$\phi_j^\nu = \bar{\phi}_j^\nu + \sum_{I, J}^{(\nu)} \bar{\phi}_j^{\delta I + \delta J} B_j^{\nu - \delta I} I(1 + \delta_{IJ}) \quad ; \text{ for } |\nu|=3$$

Similarly we can seek for the elimination of the third order terms in (7), by means of a substitution of type (4) where $|\nu|=2$ is changed to $|\nu|=3$. This procedure is formally consistent and could be carried out indefinitely although for the present purposes we restrict ourselves to examining second and third order terms only.

The system (3) is said to be in normal form if it can be written as:

$$\underline{\dot{z}} = \mathcal{A} \underline{z} + \left\{ \sum_{\lambda_{\nu j} = 0} G_j^\nu \underline{z}^\nu \right\} \quad (9)$$

that is, the only nonlinear terms are the resonant ones.

In most practical problems we don't need the system to be "completely" normal as in (9), but only normal up to a certain finite order N , i.e.;

$$\dot{\underline{z}} = \mathcal{A} \underline{z} + \left\{ \sum_{\lambda_{\nu j}=0}^{(N)} G_j^{\nu} \underline{z}^{\nu} \right\} \quad (10)$$

Let us call the form (10) as N -normal. The most common cases are $N=2$ and $N=3$. The form (10) can be achieved by applying successive substitutions of type (4) with $|\nu| = 2, 3, \dots, N$.

In particular, for $N=3$ one has:

$$G_j^{\nu} = \Phi_j^{\nu} \quad ; \quad \lambda_{\nu j} = 0 \quad , \quad |\nu| = 2, 3 \quad (11)$$

where Φ_j^{ν} were defined by (8).

Here, the Appendix I [11] together with formulae (11) (8) and (5) provide a relatively simple way for obtaining such coefficients even for higher dimension systems. The mentioned formulae can be easily implemented in a computer.

4. Parametric Excitation: Linear Case

Let us begin with the classical differential equation (Mathieu's equation):

$$\ddot{x} + (Q^2 - \epsilon \cos t) x = 0 \quad (12)$$

The idea, which is going to be followed in the remaining, is to regard the excitation " $\epsilon \cos t$ " as a state variable of a linear harmonic oscillator. This leads to the consideration of an augmented autonomous system of dimension 4 (two coupled oscillators):

$$\begin{cases} \ddot{x} + Q^2 x - u x = 0 \\ \ddot{u} + u = 0 \end{cases} \quad (\text{nonlinear}) \quad (13)$$

The parameter ϵ is taken into account by the initial

conditions of $\ddot{u} + u = 0$.

To obtain the normal form of (13) according to Sec III, it is necessary to bring (13) to the form (3). This is achieved by the linear complex transformation.

$$X = x + j \frac{\dot{x}}{Q} = y^* , \quad U = u + j \dot{u} = V^*$$

The transformed system is:

$$\begin{cases} \dot{X} = -j Q X + \frac{j}{4Q} (U+V)(X+Y); & \dot{Y} = j Q Y - \frac{j}{4Q} (U+V)(X+Y) \\ \dot{U} = -j U & ; \dot{V} = j V, \end{cases} \quad (14)$$

Knowing that $X = Y^*$ and $U = V^*$ we can drop the equations of \dot{Y} and \dot{V} .

Consider now the well known stability problem related with Q near the parametric resonance values $Q = 1/2$ and $Q = 1$.

$$a) \quad Q = 1/2 + \Delta\omega \quad (\Delta\omega \text{ small})$$

For $\Delta\omega = 0$ one has the following 2-normal form:

$$\dot{X} = -j Q X + \frac{j}{4Q} U Y + \dots , \quad \dot{U} = -j U \quad (15)$$

To avoid the problem of "small denominators" as $\Delta\omega \rightarrow 0$, substitution (4) is chosen as to bring (14) to the same form as (15) for $\Delta\omega = 0$.

Defining polar coordinates as:

$$X = Y^* = r_1 e^{j\theta_1} , \quad U = V^* = \zeta e^{j\phi} , \quad (16)$$

the system (15) is written as:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = -(1/4 Q) r_1 \zeta \sin(\phi - 2\theta_1) + \dots ; & \dot{\zeta} = 0 \\ \dot{\theta}_1 = -Q + (1/4 Q) \zeta \cos(\phi - 2\theta_1) + \dots ; & \dot{\phi} = -1 \end{cases} \quad (17)$$

As a first approximation the terms represented by the dots are neglected. Thus, setting $\theta = \phi - 2\theta_1$ one has from (17):

$$\dot{\theta} = (2Q - 1) - \frac{\zeta}{2Q} \cos\theta \quad (18)$$

Stationary solutions of (18) (that is $\theta = \text{constant}$) are easily seen to imply a diverging solution for r_1 (instability). If stationary solutions are not possible for (18) stability is implied. Therefore the boundary of stability is given by:

$$|2 \Delta\omega(1+2 \Delta\omega)| = \zeta \quad (19)$$

(stability: $|2 \Delta\omega(1+2 \Delta\omega)| > \zeta$; instability: $|2 \Delta\omega(1+2 \Delta\omega)| < \zeta$). Now if $\zeta = \epsilon$, (19) gives a first approximation of the stability boundary for the Mathieu's equation (12) near the resonance $Q=1/2$. Since only terms of the first order in ϵ are considered (19) can be written simply as:

$$\epsilon > 2|\Delta\omega|, \quad (20)$$

a well known result [10].

If one desires a better approximation of the stability boundary the second approximation can be found using the 3-normal form of (14):

$$\dot{X} = -jQ X + \frac{j}{4Q} UY + \phi_1^{(1011)} X UV + \dots; \quad \dot{U} = -jU \quad (21)$$

$\phi_1^{(1011)} = j/32 Q^2$ is calculated from (8).

Then, instead of (18) one has:

$$\dot{\theta} = (2Q-1) - \frac{\zeta}{2Q} \cos \theta - \frac{\zeta^2}{16 Q^2} \quad (22)$$

As preceedingly putting $\zeta = \epsilon$ and taking into account only terms of order up to ϵ^2 we get instead of (20):

$$\epsilon > |2 \Delta\omega + \frac{3}{4} \epsilon^2| \quad (23)$$

in agreement with the result obtained by a perturbation method in [10].

b) $Q = 1 + \Delta\omega$ ($\Delta\omega$ small)

In this case no second order terms appears in the normal form corresponding to $Q=1$. Thus at least the 3-normal form must be obtained. The possible resonant terms in X are

those satisfying $\lambda_{v1}=0$ for $|v|=3$, i.e., X^2Y , X^2V , XYU , YUV , YU^2 and U^2V .

It can be shown that, in fact only two of them actually appear. The 3-normal form is

$$\dot{X} = -j Q X + \phi_1^{(1011)} XUV + \phi_1^{(0120)} YU^2 + \dots; \quad \dot{U} = -jU \quad (24)$$

From (8) one determines the ϕ 's:

$$\phi_1^{(1011)} = j / (12 Q^2) \quad ; \quad \phi_1^{(0120)} = j / (8 Q^2)$$

Defining $\Theta = \phi - \theta_1$ the equation corresponding to (18) is in this case:

$$\dot{\Theta} = \Delta\omega - \frac{\zeta^2}{4(1+\Delta\omega)^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cos \right], \quad (25)$$

from which the stability boundary is derived as:

$$|\Delta\omega - \frac{\zeta^2}{6}| < \frac{\zeta^2}{4}, \quad (26)$$

again in agreement with a previous result [10].

5. Nonlinear Case

The following differential equation is considered as an illustration:

$$\ddot{x} + 2\alpha\mu \dot{x} + \omega_0^2 (1 - \mu \cos t) x = -c x^2, \quad (\mu \ll 1) \quad (27)$$

According to the idea developed in section IV, (27) is replaced by the system:

$$\ddot{x} + 2\alpha\mu \dot{x} + \omega_0^2 (1 + \mu \cdot u) x = -c x^2, \quad \ddot{u} + u = 0 \quad (28)$$

Here we have conserved the small parameter μ for convenience. The linear transformation that brings (28) to the form (3) is in this case ($y=x$):

$$X = \left[1 + \mu \frac{j\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2 \alpha^2}} \right] x + \frac{j}{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2 \alpha^2}} y, \quad (Y=X^*) \quad (29)$$

Keeping only terms of order not higher than μ the 3-normal form of (28) is $(\bar{\alpha} = \mu\alpha)$:

$$\dot{X} = (\alpha - j\omega_0 X + \mu \frac{j\omega_0}{4} UY + \phi_1^{2100} X^2 Y, \dot{U} = -jU \quad (30)$$

where ϕ_1^{2100} is evaluated from (8) ($\mu=0$) giving, $\phi_1^{2100} = \frac{10c^2}{3}j$.

In polar coordinates as defined in section IV, (30) is reduced to ($UV=1$):

$$\dot{\Theta} = (2\omega_0 - 1) - \mu \frac{\omega_0}{2} \cos \Theta - \frac{20c^2}{3} r_1^2, \quad \dot{r}_1 = -\bar{\alpha} r_1 - \mu \frac{\omega_0}{4} r_1 \sin \Theta \quad (31)$$

where $\Theta = \phi - 2\theta_1$.

Two problems can be solved using (31):

- Stability of the solution $x=0$

Here, the term $20 r_1^2 c^2 / 3$ in (31) can be dropped (linear approximation). The boundary of stability is determined by the following equations:

$$\bar{\alpha} = -\mu \frac{\omega_0}{4} \sin \Theta \quad (\dot{r}_1 = 0); 2\omega_0 - 1 = \mu \frac{\omega_0}{2} \cos \Theta \quad (\dot{\Theta} = 0) \quad (32)$$

Setting $2\Delta\omega = 2\omega_0 - 1$ and eliminating Θ we obtain:

$$\bar{\alpha}^2 + \Delta\omega^2 = \mu^2 / 64 \quad (\text{Boundary of stability}) \quad (33)$$

- Subharmonics of period $2 \times 2\pi$:

Now the term $20 r_1^2 c^2 / 3$ has to be included. Again setting $\dot{r}_1 = \dot{\Theta} = 0$ in (31) comes:

$$\bar{\alpha} = -\mu \frac{\omega_0}{4} \sin \Theta, \quad 2\Delta\omega = \mu \frac{\omega_0}{2} \cos \Theta + \frac{20}{3} c^2 r_1^2 \quad (34)$$

Remark 1: $\dot{\Theta} = 0$ because $\phi - 2\theta_1 = 0$ (1/2 subharmonic).

Thus, solving (34) for r_1 one has the subharmonic "amplitudes":

$$r_1^2 = \frac{3}{20c^2} \left[2\Delta\omega \pm \frac{1}{4} \mu \sqrt{1 - \left(\frac{8\bar{\alpha}}{\mu}\right)^2} \right] \quad (35)$$

"+" : stable subharmonic, "-" : unstable subharmonic.

6. Systems of Higher Dimension:

From the example of section V it becomes clear that no special difference exists in the application of the method for either linear or nonlinear case. Thus, for the sake of clarity, without loss of generality, only the linear problem is considered hereafter:

$$\dot{\underline{x}} = (A_0 + \epsilon \cos t \ A_1) \underline{x}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (36)$$

where A_0 and A_1 are real square matrices and ϵ is a small parameter. For simplicity, suppose A_0 with only pure imaginary eigenvalues $\lambda_i = j\omega_i$, pairwise distinct. Similarly to the preceding sections (36) is replaced by the autonomous nonlinear system:

$$\dot{\underline{x}} = A_0 \underline{x} + u A_1 \underline{x}, \quad \ddot{u} = -u. \quad (37)$$

With an adequate linear transformation (37) is brought to the form (first step of normalization):

$$\dot{\underline{z}}^{(1)} = \left(\Lambda^{(1)} + \left(\frac{z_{2n+1} + z_{2n+2}}{2} \right) B_1 \right) \underline{z}^{(1)}, \quad \dot{z}_{2n+1} = -j z_{2n+1}; \quad (38)$$

$\Lambda^{(1)} = \text{diag}(\lambda_i)$, under the conditions: $z_i^* = z_{i+1}$, $(i=1, \dots, 2n+1)$, $\underline{z}^{(1)T} = (z_1, \dots, z_{2n})$.

Defining the vector $\underline{z}^T = (\underline{z}^{(1)T}, z_{2n+1}, z_{2n+2})$, system (38) can be identified with system (3) and normalization is achieved as described in section III.

The following facts become clear from the proposed approach:

F.1: The subsequent normalizing transformations are linear with respect to $\underline{z}^{(1)}$. As a consequence the only effective (leading to instability) resonance relationships are $|1|$:

$$\omega_k + \omega_i = s \quad (s \text{ integer}; k, i = 1, 2, \dots, 2n) \quad (39)$$

$k=i$: simple resonance; $k \neq i$: combination resonance

Remark 1: In the above statement, instability mechanisms not generated by resonance relationships $\lambda_{vi} = 0$ have been excluded (e.g., the phenomena of "total instability" as described in [2])

F.2: When only one condition (39) is satisfied (or, almost satisfied) then, in order to obtain the N^{th} approximation of the stability condition we proceed as follows:

- Find the N -normal form
- Set all z_k ($k \neq i, i+1, 2n+1, 2n+2$) equal to zero.
- The reduced system thus obtained determines the N^{th} approximation of the stability condition. From the above it follows that, in the first approximation, the nonresonant modes are decoupled from the resonant ones, when the system is under form (40). As an illustration the simple resonance problem is considered. Suppose, without loss of generality, that $k=i=1$ in (41). Then, if $s=1$, according to F.2 the problem of stability is reduced to considering the reduced system:

$$\dot{z}_1 = -j\omega_1 z_1 + G_1 z_2 U + F_1 z_1 UV ; z_2 = z_1^* \dot{U} = -jU, V = U^* \quad (40)$$

with

$$G_1 = \frac{b_{12}}{2} ; F_1 = - \sum_{\substack{J=1 \\ (J \neq 2)}}^{2n} \frac{b_{1J} b_{J1}}{2^j} \left[\frac{\omega_1 - \omega_J}{(\omega_1 - \omega_J)^2 - 1} \right] \quad (41)$$

($j = \sqrt{-1}$), where b_{1J}, b_{J1}, b_{12} are elements of matrix B in (38). The explicit second approximation of the stability boundary is thus:

$$\Delta\omega = \pm \epsilon |G_1| - \epsilon^2 \text{Im} (F_1) / |G_1| \quad (42)$$

Remark 2: In practical problems A_0 may also depend on ϵ . In this case a perturbation scheme combined with the present method can be used. This leads to important simplifications in the computations. A similar procedure was used in [11].

Remark 3: Relation (42) shows that mode interaction is present only in the second approximation when a system of form (40) is considered.

7 Conclusion

A new analytical method for studying parametric resonance was presented. The method has been called the Normal Form method. Instead of the usual averaging or harmonic balance procedures, successive normalizing transformations (change of variables) were proposed leading to a simplified reduced system. Stability and other dynamical features can be dwelt from the later.

The method is applicable to a large class of problems: linear and nonlinear parametric resonance, simple or combination resonances, subharmonic oscillations, etc... Extension to more general excitations than harmonic, is possible, e.g., a Fourier Series or an almost-periodic excitation.

The normal form approach, as shown in section VI, provides a clear understanding of the physical mechanism of instability. Furthermore, a uniform theory is presented for linear and nonlinear systems.

For a large number of degrees of freedom, numerical implementation is relatively simple up to the second order approximation.

REFERENCES

- [1] Bolotin, V.V., "The Dynamic Stability of Elastic Systems". Holden Day , Inc.,(1964)
- [2] Cesari, L., "Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations", Springer Verlag OHG, (1963)
- [3] Hsu, C.S., On the Parametric Excitation of Dynamic Systems Having Multiple Degree of Freedom; Journal of Applied Mechanics, Vol.30,pp.363-372,(1963)
- [4] Bogoliubov, N.N., and Mitropolski, Y.A., "Asymptotic Methods In the Theory of Nonlinear Oscillations", Hindustan Publishing Corporation ,India(1961)
- [5] Bernussou, J. et al., "Point Mapping Stability Pergamon Press, (1977)
- [6] Valeev, K.G., On Hill's Method in the Theory of

- Linear Differential Eq. With Periodic Coefficients.
Determination of the Characteristics Exponents, PMM,
Vol.25, No.2, pp.314-318, (1961)
- |7| Szemplinska-Stupnika, W., The Generalized Harmonic
Balance Method for Determining The Combination
Resonance..., J. of Sound and Vibr., Vol.58(3),
pp.347-361, (1978)
- |8| Hsu, L., On the Analysis of 4th order Systems near
a Bifurcation, Mech. Res. Comm
- |9| Brjuno, A.D., Trans. Moscow Math. Soc., Vol.25,
pp.131-288, (1971); Vol.26, pp.199-239, (1972)
- |10| Blaquière, A., "Nonlinear System Analysis", Academic
Press, (1966)
- |11| Hsu, L., and Tavares, G.A., A Direct Method for the
Analysis of Critical and Post-Critical Behavior of
Nonlinear Mechanical Systems, COBEM 77, Vol.A,
pp.285-297, (1977)



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-18

p.p. 260 - 266

ON THE CONTINUITY OF THE MINIMUM SET IN PARAMETRIC
 PROGRAMMING

B. Brosowski

Professor im Fachbereich Mathematik
 Universität Frankfurt, F.R.Germany

SUMMARY

In this paper we consider semi-infinite linear optimization problems which depend on a parameter. We derive conditions that the set of optimal solutions depends continuously on this parameter. This result gives an extension of earlier results of the author [1], [2], [3].

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit betrachten wir semi-infinite lineare Optimierungsprobleme, die von einem Parameter abhängen. Wir leiten Bedingungen ab für die stetige Abhängigkeit der Menge der optimalen Lösungen von diesem Parameter. Dieses Ergebnis gibt eine Erweiterung früherer Ergebnisse des Verfassers [1], [2], [3].

1. INTRODUCTION

Let a_1, a_2, \dots, a_n, b be continuous real valued functions defined on a compact Hausdorff-space T . For each $(n+1)$ -tupel of such functions we consider the following linear minimization problem:

(*) Minimize $p(x) := \sum_{v=1}^n p_v x_v$ subject to

$$\forall_{t \in T} \sum_{v=1}^n a_v(t) \cdot x_v \leq b(t),$$

where p_1, p_2, \dots, p_n are given real numbers.

For any "parameter" $\sigma := (a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ we define the set of feasible points

$$Z_\sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{t \in T} \sum_{v=1}^n a_v(t) \cdot x_v \leq b(t) \right\},$$

the minimum value $E_\sigma := \inf\{p(v) \in \mathbb{R} \mid v \in Z_\sigma\}$, and the set of minimal solutions

$$P_\sigma := \{v \in Z_\sigma \mid p(v) = E_\sigma\}.$$

Obviously the sets Z_σ and P_σ and the real number E_σ depend on the parameter σ . In practical applications the parameter σ is only known approximatively up to an error. Therefore it is natural to ask if the set of optimal solutions change "continuously" when the error tends to zero.

In this paper we consider the following general situation. Let

$$A_1, A_2, \dots, A_n, B$$

be nonempty subsets of the space $C(T)$ of all real valued continuous functions f normed by

$$\|f\| := \max_{t \in T} |f(t)|.$$

For each parameter

$$\sigma \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B$$

we consider the minimization problem (*). In this way a family of optimization problems is defined with family parameter σ and parameter space

$$\Sigma := A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B.$$

In the following we derive conditions for the upper and lower semicontinuity of the in general set-valued mapping

$$P: \Sigma \rightarrow \text{POT}(\mathbb{R}^n).$$

2. DEFINITIONS

If (X, d) is a metric space, the Hausdorff metric on the collection $H(X)$ of all closed and bounded subsets of X is defined by

$$h(A, B) := \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

where $d(x, Y) := \inf \{d(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \in Y\}$.

Let $t_0 \in T$. A mapping $F: T \rightarrow H(X)$ is called:

- (a) upper semicontinuous at t_0 iff for each open set W with $F(t_0) \subset W$, there is a neighborhood U of t_0 such that $F(t) \subset W$ for each $t \in U$;
- (b) lower semicontinuous at t_0 iff for each open set W with $F(t_0) \cap W \neq \emptyset$, there is a neighborhood U of t_0 such that $F(t) \cap W \neq \emptyset$ for each $t \in U$;

(c) Hausdorff-continuous at t_0 iff for each $\epsilon > 0$, there is a neighborhood U of t_0 such that

$$h(F(t_0), F(t)) < \epsilon$$

for each $t \in U$.

3. A CONDITION FOR UPPER SEMICONINUITY

THEOREM 1. Let the minimization-problem (*) be given and let Z be compact and $\overset{\circ}{Z}_\sigma \neq \emptyset$ for each $\sigma \in \Sigma$.

Then the mapping $P: \Sigma \rightarrow \text{POT}(\mathbb{R}^n)$ is upper semi-continuous and the mapping $E: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous.

PROOF: For every pair $\sigma, \tau \in \Sigma$ we have the estimate $|E_\sigma - E_\tau| \leq \|P\| \cdot h(E_\sigma, E_\tau)$ (cf. [1]). Since $\overset{\circ}{Z}_\sigma \neq \emptyset$ and Z_σ compact we can conclude that the mapping $\sigma \rightarrow Z_\sigma$ is Hausdorff-continuous. Consequently $\sigma \rightarrow E_\sigma$ is continuous. To prove the upper semicontinuity of $\sigma \rightarrow P_\sigma$ assume that the theorem is false. Then there is a $\sigma_0 \in \Sigma$, an open set $W \supset P_{\sigma_0}$, and a sequence $\sigma_m \rightarrow \sigma_0$ such that $P_{\sigma_m} \setminus W \neq \emptyset$. Choose y_m in $P_{\sigma_m} \setminus W$ for $m=1, 2, \dots$. The Hausdorff-continuity of $\sigma \rightarrow Z_\sigma$ implies $d(y_m, Z_{\sigma_0}) \rightarrow 0$. Using the compactness of Z_{σ_0} we can find a sequence $(a_m^0) \subset Z_{\sigma_0}$ and an element $a^0 \in Z_{\sigma_0}$ such that

$$d(y_m, a_m^0) = d(y_m, Z_{\sigma_0}).$$

and $a_m^0 \rightarrow a^0$. Thus

$$|E_{\sigma_0} - p(a^0)| \leq |E_{\sigma_0} - E_{\sigma_m}| + \|p\| d(y_m, a^0)$$

$$\leq |E_{\sigma_0} - E_{\sigma_m}| + \|p\| \{d(y_m, a_m^0) + d(a_m^0, a^0)\} \rightarrow 0$$

for $m \rightarrow \infty$. Consequently we have $p(a^0) = E_{\sigma_0}$ and hence $a^0 \in P_{\sigma_0}$. It follows that $y_m \in W$ eventually, which contradicts $y_m \in P_{\sigma_m} \setminus W$.

4. CONDITIONS FOR LOWER SEMICONTINUITY

In general the mapping $\sigma \rightarrow P_{\sigma}$ is not lower semicontinuous. We give now necessary and sufficient conditions for the following case: Each of the sets A_1, A_2, \dots, A_n contains only one element, i.e. we consider a parameter space of the type $B \subset C(T)$.

We first state some necessary definitions: For $b \in B$ and $v \in P_b$ we define the compact and nonempty set

$$M_{b,v} := \{t \in T \mid \sum_{v=1}^n a_v(t) \cdot v_v = b(t)\}$$

In [2] we have shown that

$$E_b := \bigcap_{v \in P_b} M_{b,v}$$

is also non empty and compact. For $b \in B$, we set

$$N_b := \bigcap_{v \in P_b} \{t \in T \mid \sum_{v=1}^n a_v(t) \cdot (v_v - v_{v_0}) = 0\},$$

where v_0 is an arbitrary element in P_b . It is easy to see that N_b is independent of the chosen element v_0 and that one has the inclusion $N_b \supset E_b$. Then we have the following

THEOREM 2. Let $P: B \rightarrow \text{POT}(\mathbb{R}^n)$ be upper semicontinuous and for $b \in B$ let P_b be compact.

If there exists an open set $U \subset T$ such that $N_b \supset U \supset E_b$, then the mapping P is lower semicontinuous.

For the proof compare [2]. We mention here only the

COROLLARY 3. If the set T is finite, i.e. there are only a finite number of inequalities, then the mapping P is lower semicontinuous.

This corollary follows from the observation that every subset of finite set is open.

The condition of theorem 2 is also necessary for the lower semicontinuity. In [3] we proved the

THEOREM 4. Let B be a subset of $C(T)$ such that $b_0 \in B$ and $P_{b_0} \supset P_b$ implies $b \in B$.

Whenever the mapping $P: B \rightarrow \text{POT}(\mathbb{R}^n)$ is lower semicontinuous, then for each b in B the closed set N_b is also open.

From theorem 4 we can conclude the

COROLLARY 5. Let T be a connected space. If the mapping $P: B \rightarrow \text{POT}(\mathbb{R}^n)$ is lower semicontinuous, then the minimization problem is uniquely solvable for each b in B .

5. CONCLUSION

In many applications of semiinfinite optimization the compact space T is a connected space, f.e. a time

interval $[a,b]$. In this case one cannot expect that the minimum set depends continuously on the parameter. The only exception is that the optimization problems are uniquely solvable.

REFERENCES

- [1] Brosowski, B., On parametric linear optimization. Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 157, pp. 37-44 (1978).
- [2] Brosowski, B., Zur parametrischen linearen Optimierung. II. Eine hinreichende Bedingung für die Unterhalbstetigkeit. Erscheint demnächst.
- [3] Brosowski, B., On parametric linear optimization. III. A necessary condition for lower semicontinuity. To appear.

AN AIS



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

PROCEEDINGS

TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER

N.º

D-19

P. P. 267 - 276

MODELOS PARA ESTIMATIVA DA CONFIABILIDADE
USANDO A TEORIA DA INTERFERÊNCIA

Edison da Rosa

Prof. Assist. - Centro Tecnológico
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

SUMÁRIO

A partir dos conceitos da teoria da interferência de duas populações, através de uma generalização no seu cálculo, foram determinadas curvas que fornecem a probabilidade de interferência para diversas combinações de distribuições probabilísticas. No trabalho são apresentados os resultados na forma de diversos gráficos, bem como um exemplo de aplicação.

SUMMARY

Trough the concepts of the interference theory of two populations, via a generalization in their computation, several curves were determined, which give the interference probability for some combinations of probabilistics distributions. In this paper the results are presented in a graphical form, and also an illustrative example are given.

1. Introdução

O aspecto de confiabilidade vem encontrando diversas aplicações, sendo exigência do uso de sistemas mais elaborados e dispendiosos, onde uma falha pode ter conseqüências desastrosas. A confiabilidade do sistema é especificada através de uma análise detalhada de custos [2, 8], envolvendo custo do controle de qualidade, projeto, fabricação, manutenção, bem como os custos devido à falha do sistema. A confiabilidade especificada será a que minimiza o custo total para o período de vida útil. Dependendo da configuração do sistema é possível determinar a alocação ótima da confiabilidade em cada um dos componentes [2, 8], de modo a minimizar os custos. Uma vez definida a confiabilidade C de cada componente e conhecendo-se o modo de falha característico deste, é possível determinar qual deve ser a probabilidade de interferência P_I entre a distribuição da demanda S e da capacidade R do componente, já que a probabilidade de falha P_f ($P_f = 1 - C$) é função de P_I , [3, 4, 6]. A probabilidade de interferência, definida como $P_I = P(R \leq S)$, é calculada a partir das funções densidade de probabilidade (FDP) da demanda, $f_S(s)$ e da capacidade, $f_R(r)$ [2, 4, 7] como

$$P_I = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds$$

onde $F_R(r)$ é a função de probabilidade acumulada de R .

O cálculo de P_I exige em geral uma integração numérica o que restringe o valor calculado para os valores numéricos dos parâmetros usados no cálculo. Para contornar este problema foi usada uma generalização no cálculo de P_I , tornando possível representar P_I em função dos fatores assintóticos, K_0 e K_1 , [6].

2. Modelos para cálculo de P_I

A probabilidade de interferência depende da expressão de $f_S(s)$ e de $f_R(s)$, que devem ser obtidas seja experimental, analiticamente ou por simulação. Uma vez definidas as FDP da capacidade e da demanda, é possível calcular P_I . O enfoque dado neste trabalho é de projeto do sistema ou com-

ponente, procurando sintetizá-lo respeitando a confiabilidade especificada, através da probabilidade de interferência. Para este processo de síntese, o modo mais objetivo de resolver o problema é, a partir da probabilidade de interferência obter o fator de projeto n , definido como $n = \mu_R/\mu_S$ ou seja, a relação entre a média da capacidade e a média da demanda. O fator de projeto pode ser pensado como uma definição mais rigorosa do coeficiente de segurança normalmente usado em sistemas estruturais. O fator de projeto dá o afastamento relativo entre as médias das duas populações, de modo que exista uma margem de segurança para compensar as dispersões inerentes.

Para três tipos de FDP existe solução analítica que permite obter o fator de projeto a partir da probabilidade de interferência. Quando ambas as FDP envolvidas são exponenciais, o fator de projeto é dado por [4],

$$n_{EE} = 1/P_I - 1$$

Para o caso em que tanto a capacidade como a demanda são normais, com coeficientes de dispersão V_R e V_S , respectivamente, o fator de projeto vale [4]

$$n_{NN} = \frac{1}{\delta_R} [1 + \sqrt{1 - \delta_R \delta_S}]$$

onde $\delta_i = 1 - (Z V_i)^2$ e $V_i = \sigma_{xi}/\mu_{xi}$

sendo Z a abcissa da curva padrão normal que fornece a probabilidade de interferência. Quando ambas as distribuições são lognormal, o fator de projeto é calculado por [4]

$$n_{LL} = \left[\frac{1 + V_R^2}{1 + V_S^2} \right]^{1/2} \exp [Z(\ln(1 + V_R^2)(1 + V_S^2))]$$

onde as variáveis envolvidas são as mesmas definidas no caso das distribuições normais.

Outras combinações de f_S e f_R exigem a solução numérica e o resultado é fornecido na forma de gráficos. As dis-

COMBINAÇÃO SRRW

FATOR DE PROJETO

$$n_o = \frac{\Omega_w + \xi(1 - \Omega_w)}{\Omega_w + K_o(1 - \Omega_w)}$$

$$n_1 = \frac{\Omega_r + K_1(1 - \Omega_r)}{\Omega_r + \xi'(1 - \Omega_r)}$$

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

$$K_o = \frac{\xi(1 - \Omega_w)(\Omega_r + \xi'(1 - \Omega_r)) - \Omega_w(1 - \Omega_r)(K_1 - \xi')}{(\Omega_r + K_1(1 - \Omega_r))(1 - \Omega_w)}$$

$$K_1 = \frac{1}{1 - \Omega_r} \left[\frac{\Omega_w + \xi(1 - \Omega_w)}{\Omega_w + K_o(1 - \Omega_w)} (\Omega_r + \xi'(1 - \Omega_r)) - \Omega_r \right]$$

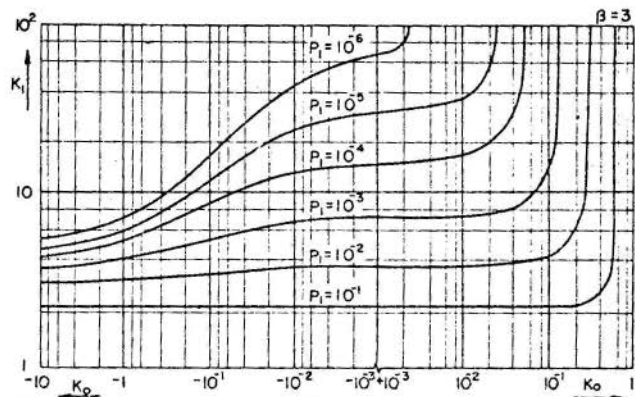
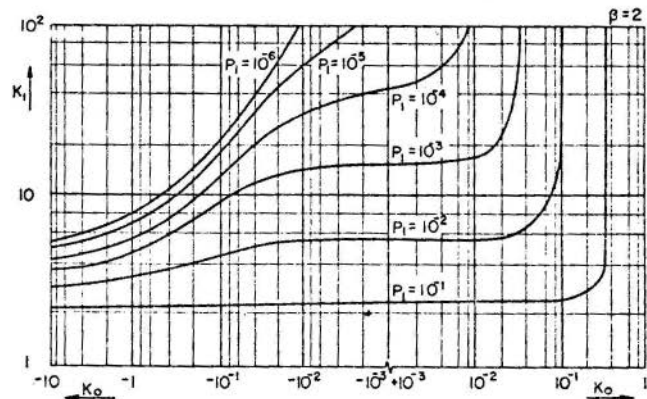
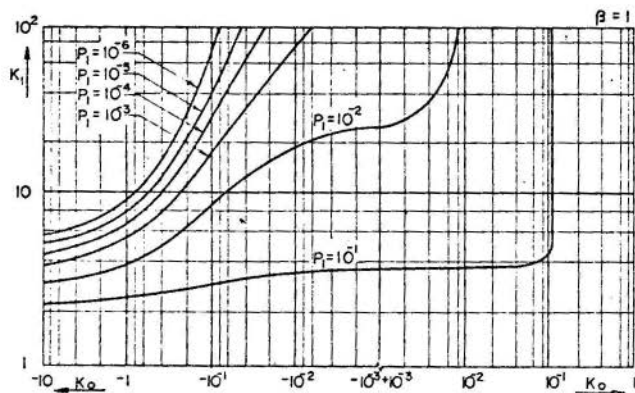


Figura 1

FATOR DE PROJETO

$$n_o = \frac{\Omega_w + \xi(1 - \Omega_w)}{\Omega_w + K_o(1 - \Omega_w)} \quad n_1 = 1 + K_1 V_s$$

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

$$K_o = \frac{(1 - \Omega_w)\xi - \Omega_w K_1 V_s}{(1 + K_1 V_s)(1 - \Omega_w)}$$

$$K_1 = \frac{(1 - \Omega_w)(\xi - K_o)}{V_s(\Omega_w + K_o(1 - \Omega_w))}$$

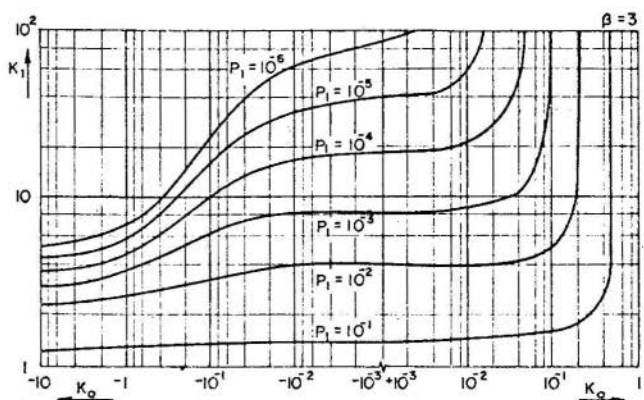
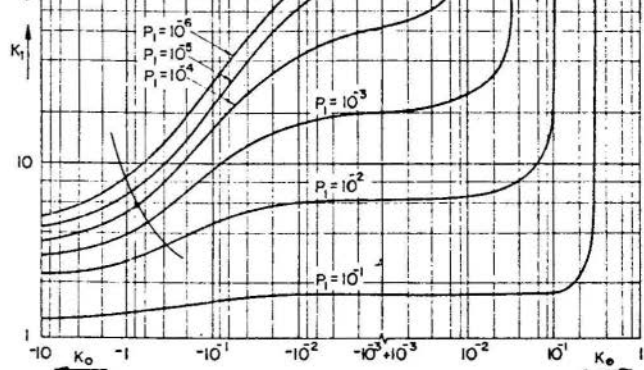
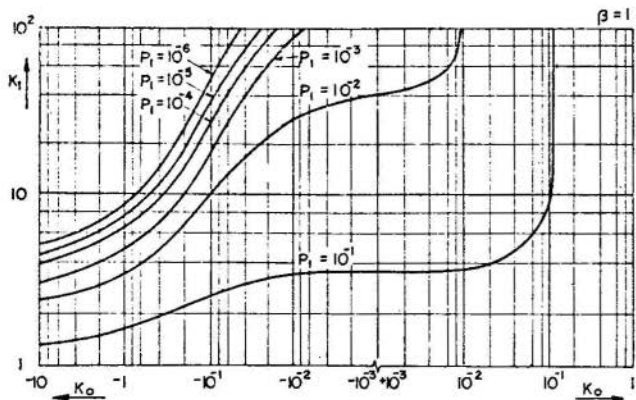


Figura 2

COMBINAÇÃO SERW

FATOR DE PROJETO

$$n_o = \frac{\Omega_w + \xi(1 - \Omega_w)}{\Omega_w + K_o(1 - \Omega_w)} \quad n_1 = \Omega_e + K_1(1 - \Omega_e)$$

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

$$K_o = \frac{\xi(1 - \Omega_w) - \Omega_w(\Omega_e + K_1(1 - \Omega_e) - 1)}{(\Omega_e + K_1(1 - \Omega_e))(1 - \Omega_w)}$$

$$K_1 = \frac{\Omega_w + \xi(1 - \Omega_w) - \Omega_e(\Omega_w + K_o(1 - \Omega_w))}{(\Omega_w + K_o(1 - \Omega_w))(1 - \Omega_e)}$$

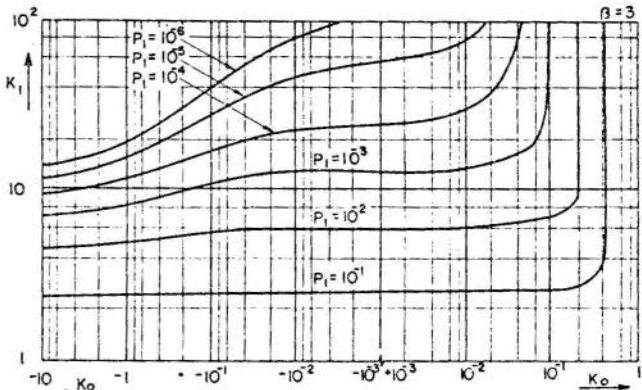
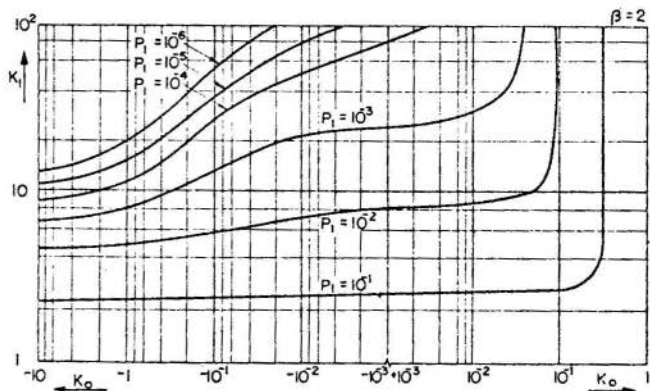
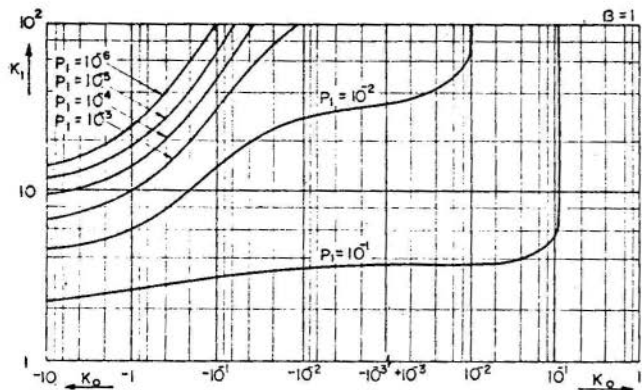


Figura 3

FATOR DE PROJETO

$$n_o = \frac{1}{1 - K_o V_R} \quad n_i = \Omega_e + K(1 - \Omega_e)$$

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

$$K_o = \frac{\Omega_e + K_i(1 - \Omega_e) - 1}{(\Omega_e + K_i(1 - \Omega_e))V_R} \quad K_i = \frac{1 - \Omega_e(1 - K_o V_R)}{(1 - K_o V_R)(1 - \Omega_e)}$$

FATOR DE PROJETO

$$n_o = \frac{1}{1 - K_o V_R} \quad n_i = \frac{\Omega_r + K_i(1 - \Omega_r)}{\Omega_r + \xi'(1 - \Omega_r)}$$

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

$$K_o = \frac{(1 - \Omega_r)(K_i - \xi')}{V_R(\Omega_r + K_i(1 - \Omega_r))} \quad K = \frac{\xi' + \Omega_r(K_o V_R - \xi')}{(1 - \Omega_r)(1 - K_o V_R)}$$

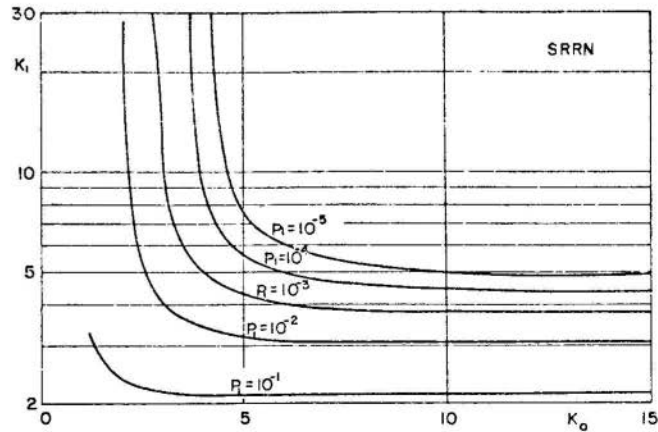
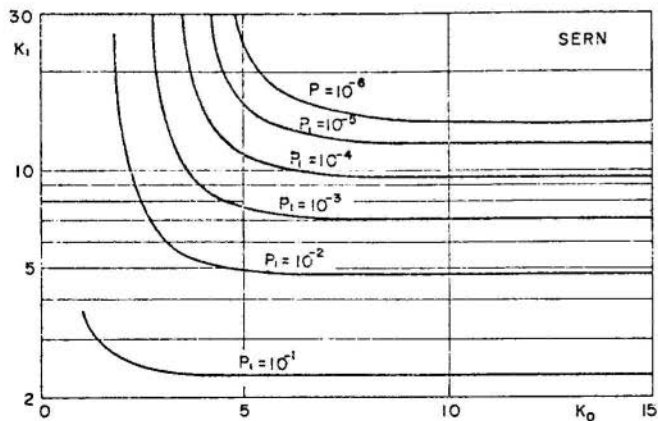


Figura 4

tribuições usadas foram, para a demanda: Normal, Rayleigh e Exponencial e para a capacidade: Normal e Weibull, sendo que as distribuições de Rayleigh e Exponencial são generalizadas no sentido de que são definidas para valores superiores a um limite inferior, não necessariamente nulo, [7]. As combinações entre as FDP da demanda e as FDP da capacidade, excluindo o caso normal-normal, SNRN, são SRRW, SNRW, SRRN e SERN.

3. Equação de compatibilidade

Nos casos em que a integração numérica é usada no cálculo de P_I , os resultados são plotados em função dos parâmetros assintóticos K_0 e K_1 nos gráficos que seguem. Para obter o fator de projeto nestes casos é necessário entrar com os dados que caracterizam as distribuições $f_R(r)$ e $f_S(s)$ e com a probabilidade de interferência desejada. O modo de obter o fator de projeto é através da equação de compatibilidade do problema [6], que representa justamente o aspecto físico do problema. A equação de compatibilidade representa uma curva no plano $K_0 \times K_1$ e a intersecção desta com a curva de P_I constante fornece o ponto de solução do problema, já que a partir das coordenadas do ponto de intersecção é calculado o fator de projeto. As expressões que definem o fator de projeto em função de K_0 ou K_1 , bem como as equações de compatibilidade para cada combinação de distribuições estatísticas utilizada constam junto aos gráficos que fornecem a probabilidade de interferência, figuras 1 a 4.

4. Exemplo de aplicação

É um fato reconhecido atualmente que qualquer estrutura de grande porte, principalmente quando é uma estrutura soldada, apresenta defeitos macroscópicos no material, na forma de vazios, inclusões ou mesmo pequenas fissuras. Com a aplicação cíclica da carga durante a vida da estrutura, estes defeitos dão origem a trincas que se propagam, até que eventualmente atingem um tamanho crítico em que ocorre a ruptura final. A partir do controle de qualidade usado para detectar os defeitos iniciais e da Mecânica da Fratura é

possível obter uma estimativa do tamanho das trincas após um período de vida da estrutura.

A solicitação em um elemento trincado pode ser posta em termos do fator de intensidade de tensões K , que fornece o nível de tensões no extremo da fissura. A ruptura brusca ocorre quando o fator de intensidade de tensões atinge um valor crítico K_c , característico do material.

A distribuição estatística para K pode ser estimada por simulação numérica a partir das distribuições das variáveis envolvidas ou mesmo analiticamente nos casos mais simples [1]. No presente caso será suposto que a demanda segue uma FDP normal, com coeficiente de dispersão $V_S = 0,20$, onde $V_S = \sigma_S/\mu_S$.

O valor crítico do fator de intensidade de tensões é bastante afetado por heterogeneidades na microestrutura, sendo assim bastante disperso. Neste exemplo é considerado que K_c segue uma distribuição de Weibull com o expoente $\beta = 2$ e coeficiente de dispersão $V_R = 0,15$. Admitindo uma probabilidade de interferência $P_I = 10^{-4}$, deve ser obtido um fator de projeto que leve a esta probabilidade. A figura 2 fornece os gráficos para o caso de demanda normal e capacidade Weibull.

Para obter a equação de compatibilidade é necessário Ω_w , ξ e V_S , onde Ω_w pode ser obtido a partir de V_R , pois no caso da distribuição de Weibull [7]

$$V_R = \frac{(1-\Omega_w)\phi}{(1-\Omega_w)\xi + \Omega_w} \quad \text{com } \xi = \Gamma(1+1/\beta) \text{ e } \phi^2 = \Gamma(1+2/\beta) - \Gamma^2(1+1/\beta)$$

e como $\beta = 2$, resulta $\Omega_w = 0,688$ para $V_R = 0,15$. A equação de compatibilidade para $\Omega_w = 0,688$, $\xi = 0,886$ e $V_S = 0,20$ está traçada no gráfico de $\beta = 2$ da figura 2. A intersecção desta equação com a curva de $P_I = 10^{-4}$ possui como coordenadas $K_0 = -0,733$ e $K_1 = 5,50$ e assim resulta $n_0 = n_1 = n = 2,10$.

Isto significa que o material deve possuir um valor médio de K_c igual a 2,10 vezes o valor médio do fator de intensidade de tensões previsto para um período de vida do componente. Deste modo é possível selecionar o material ou

o tratamento térmico adequado, ou por outro lado analisar a influência do controle de qualidade.

5. Conclusões

São apresentados neste trabalho os resultados numéricos obtidos para a probabilidade de interferência na forma de gráficos, para diferentes combinações de distribuições estatísticas para a demanda e para a capacidade. Em três situações particulares existe uma solução analítica para o fator de projeto, enquanto que no caso de uma solução numérica é necessário o conceito de equação de compatibilidade.

Com o enfoque de confiabilidade no projeto é possível quantificar a influência de diversas variáveis que de outro modo seriam consideradas de uma forma puramente empírica. No entanto o processo exige um volume de informações bastante superior ao processo convencional e na maioria das vezes estas informações não são completamente disponíveis.

Bibliografia

- [1] Arnett, L.M., Optimization of inservice inspection of pressure vessels, Savannah River Lab. DP-1428, 1976.
- [2] Carter, A.D.S., Mechanical reliability, McMillan, 1972
- [3] Freudenthal, A.M., Critical appraisal os safety criteria and their basic concepts, 8th Congress, Int. Assoc. for Bridge and Struc. Engineers, New York, 1968.
- [4] Freudenthal, A.M.; Schveller, G.I., Risikoanalyse von Ingenieurtragwerken, Konstr. Ingenieurbau, 1976, pp.7-95
- [5] Nichols, R.W., The assesment and assurance of pressure Vessel realiability, Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol. 189 nº 47-75, 1975.
- [6] Rosa, E. da., Aplicação da teoria da interferência de duas populações na previsão da confiabilidade. IV COBEM
- [7] Rosa, E. da., Generalização no cálculo da probabilidade de interferência entre a solicitação e a resistência, em sistemas, Tese, UFSC, 1976.
- [8] Siddal, J.N., Analytical decision making in engineering design, Prentice Hall, 1972.
- [9] Smith, R.E.; Ayres, D.J., Statistical analysis of charpy-V impact properties SA 533 grade B class 1 and SA 516 grade 70 plate material, Journal of Engineering for Industry, February, 1973, pp. 158 - 162.



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO TECNOLÓGICO
TECHNICAL PAPER

N.º DT-08

P.P. 277 - 290

SUPERFÍCIES SINGULARES: CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Antônio Santos Silva

Universidade Federal de Sergipe e
COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Rubens Sampaio Filho

Escola de Química da UFRJ e
COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - RJ - BrasilSUMÁRIO

Através do estudo de superfícies e movimento de superfícies apresentamos uma definição bem motivada de derivada deslocamento. Com a introdução do conceito de superfícies singulares, escrevemos as condições de compatibilidade obtidas de forma simples e intrínseca.

SUMMARY

Through singular surfaces and surface motion a well motivated definition of displacement derivative is presented. Compatibility conditions are obtained in a simple and intrinsic form.

1. INTRODUÇÃO

Fenômenos como propagação de ondas, passagem através de uma membrana semi-permeável, etc podem ser estudados usando a teoria de superfícies singulares. Por outro lado, a teoria de superfícies singulares requer o estudo de superfícies e derivada deslocamento que nos permitem obter condições de compatibilidade sobre uma superfície de descontinuidade. O conceito de derivada deslocamento foi introduzido por Thomas (1957) e, no trabalho de Bowen e Wang (1971), encontramos formas mais generalizadas do mesmo. O objetivo deste trabalho, apesar de uma grandeza tensorial ser de ordem qualquer, é usar uma forma intrínseca e bem clara nas definições e resultados: definição bem motivada de derivada deslocamento e obtenção de condições de compatibilidade por meio de um caminho simples e intrínseco.

A parte matemática necessária ao trabalho pode ser encontrada no Apêndice de [4].

2. MOVIMENTO DE SUPERFÍCIES

2.1 Velocidade de Deslocamento e Movimento Normal

Representemos por ξ o espaço Euclidiano pontual tridimensional. Seja H uma função suave definida num sub-conjunto do espaço produto $\xi \times (-\infty, \infty)$ com valores reais, e consideremos t_0 um parâmetro real fixo. O lugar geométrico das posições x de ξ satisfazendo

$$H(x, t_0) = 0$$

é uma superfície S . Supondo que $\text{grad } H \neq 0$, o vetor unitário n normal a superfície S , em cada ponto de S , é dado por:

$$n = \frac{\text{grad } H}{\|\text{grad } H\|} \quad (1)$$

A condição $\text{grad } H \neq 0$ permite representar S na forma paramétrica:

$$x = \hat{x}(\omega^1, \omega^2, t_0),$$

onde os parâmetros ω^1 e ω^2 são coordenadas curvilíneas da superfície S (coordenadas superficiais). A interseção das curvas independentes $\omega^i = \text{constante}$ ($i=1,2$) sobre S determina um ponto de S . Daí, o par (ω^1, ω^2) representa um ponto de S , chamado ponto superfície.

Os vetores $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i}$ ($i=1,2$) são tangentes a S e linearmente independentes. Então, eles geram qualquer vetor tangente a S , e o conjunto

$$\left\{ \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1}(x), \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2}(x), n(x) \right\} \quad (2)$$

forma uma base em ξ para todo x sobre S .

O movimento da superfície S pode ser definido como uma família uni-paramétrica de superfícies $S(t)$ determinada pela relação

$$H(x,t) = 0 \quad (3)$$

ou pela forma paramétrica

$$x = \hat{x}(\omega^1, \omega^2, t) \quad (4)$$

onde o parâmetro real t é interpretado como tempo.

A representação (4) descreve bem o movimento de S : ela dá a posição x ocupada pelo ponto superfície (ω^1, ω^2) em ξ no instante t . A velocidade u de um ponto superfície (velocidade da superfície S) é definida por

$$u = \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \quad (5)$$

Usando a base (2), o vetor u pode ser escrito na forma:

$$u = d_i \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i} + d_3 n, \quad (\text{soma em } i)$$

onde d_1, d_2 e d_3 são escalares e sempre trabalharemos com $i = 1, 2$. De imediato temos que $d_3 = u \cdot n$, e escrevemos para u :

$$u = d_i \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i} + (u \cdot n)n \quad (6)$$

A equação (6) mostra que em cada ponto de S , para cada parametrização, o vetor velocidade u pode ser decomposto, de modo único, num componente normal $(u \cdot n)n$ (componente de u na direção de n) e noutro tangencial $d_i \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i}$ (componente de u numa direção perpendicular a n). Assim, podemos analisar o movimento de S através de (6) e uma superfície de referência $S(t_0)$ fixada no instante $t = t_0$ como segue: se $u \cdot n = 0$ e $d_i \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i} \neq 0$, um ponto de $S(t_0)$ se move de uma posição sobre $S(t_0)$ para uma outra posição sobre $S(t_0)$, mas a superfície S não se desloca em relação a $S(t_0)$. Nesse sentido, o movimento que realmente provoca o deslocamento da superfície S é aquele na direção do vetor unitário n normal a S . Por esse motivo, a quantidade u_n dada por

$$u_n = u \cdot n \quad (7)$$

é chamada de velocidade de deslocamento da superfície S (que é a medida da velocidade com que a superfície S atravessa o espaço) e condições são estudadas para que o movimento de S seja normal (movimento na direção de n). Se o movimento de S é normal, temos que $u = (u \cdot n)n = u_n n$, e nesse caso u é chamada velocidade normal de S . Como os vetores $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i}$ são linearmente independentes, então, por (6), o movimento de S é normal se, e somente se, $d_i = 0$. Mais adiante daremos significado aos d_i e interpretação para $d_i = 0$.

Diferenciando (3) em relação ao tempo e usando a regra da cadeia em relação a (4), obtemos:

$$\text{grad } H \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

que, através de (1), (5) e (7), produz:

$$u_n = - \frac{\frac{\partial H}{\partial t}}{\|\text{grad } H\|} \quad (8)$$

O resultado (8) mostra que a velocidade de deslocamento u_n não depende da parametrização (4) (já que a parametrização não é única). Por outro lado, como já foi explicado antes, realmente, de (8), a superfície S é estacionária se, e somente se, $u_n = 0$.

2.2 Derivada Deslocamento

Seja ϕ qualquer função definida num sub-conjunto do espaço produto $\xi x(-\infty, \infty)$ com valores escalares, vetoriais, ou tensoriais. A função ϕ com valores escalares será denotada por γ e representaremos por ψ a função ϕ com valores vetoriais, ou tensoriais. Consideremos que ϕ contenha em seu domínio para qualquer tempo t , a superfície S . Um problema de grande importância no estudo de superfícies singulares e ondas é o cálculo da taxa de variação sobre S em relação ao tempo. Se $u_n = 0$ a taxa simplesmente pode ser escrita na forma $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. Quando $u_n \neq 0$ a mesma é dada por $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ e mais uma parte devida ao deslocamento de S . Por isso, surge a necessidade do conceito de derivada deslocamento. De início, estudaremos o caso em que ϕ é um campo espacial (ϕ tem valores $\phi(x,t)$). Observando que $(u_n dt)_n$ representa um deslocamento infinitesimal da posição x sobre S na direção de n , definimos a derivada deslocamento $\frac{\delta}{\delta t}$ do campo espacial ϕ em relação a superfície S por:

$$\frac{\delta \phi}{\delta t}(x,t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \tau u_n, t + \tau) - \phi(x,t)}{\tau} \quad (9)$$

para toda posição x sobre S em cada instante t . Da definição (9) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \gamma}{\delta t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \text{grad } \gamma \cdot u_n \\ \frac{\delta \psi}{\delta t} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\text{grad } \psi) u_n \end{aligned} \quad (10)$$

A derivada deslocamento do campo ϕ é interpretada como a taxa de variação de ϕ sobre S em relação ao tempo vista por um observador movendo-se ao longo de uma curva cuja tangente é n com velocidade $u_n n$ (tal curva é a trajetória normal).

Agora, consideremos o caso de um campo superficial ϕ definido através de (usando (4)):

$$\phi(x,t) = \phi(\hat{x}(\omega^1, \omega^2, t), t) \equiv \hat{\phi}(\omega^1, \omega^2, t) \quad (11)$$

A regra da cadeia em (11) e o uso de (6), (7) e (10) fornecem:

$$\frac{\delta \hat{\phi}}{\delta t} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \omega^i} d_i \quad (\text{soma em } i) \quad (12)$$

que é a derivada deslocamento do campo superficial $\hat{\phi}$ seguindo a superfície S . Fazendo $\hat{\phi} = \omega^i$ em (12), temos que

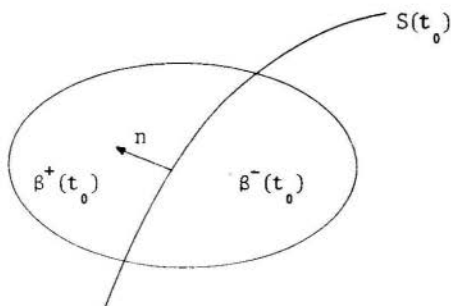
$$d_i = \frac{\delta \omega^i}{\delta t} \quad (13)$$

e o par (d_1, d_2) é interpretado como a taxa de variação em relação ao tempo do ponto superfície (ω^1, ω^2) (velocidade de um ponto superficial movendo-se sobre S). Finalmente, concluímos que o movimento de S é normal ($d_i = 0$) se, e somente se, os parâmetros ω^1 e ω^2 não dependem do tempo (velocidade tangencial da parametrização é nula).

3. SUPERFÍCIES SINGULARES

Consideremos o instante $t = t_0$ fixo. A superfície $S(t_0)$ da família S pode ser pensada com a fronteira comum entre duas regiões $\beta^+(t_0)$ e $\beta^-(t_0)$ de ξ , como mostra a figura a seguir.

Suporemos que a função $\phi(\cdot, t_0)$ é contínua nos interiores de $\beta^+(t_0)$ e $\beta^-(t_0)$ e também que, para toda posição x sobre $S(t_0)$, os limites $\phi^+(x, t_0)$ e $\phi^-(x, t_0)$ de $\phi(y, t_0)$ quando y tende para x ao longo de caminhos contidos em $\beta^+(t_0)$,



e $\beta^-(t_0)$, respectivamente, são definidos. Em cada posição sobre $S(t_0)$ a função $\phi(\cdot, t_0)$ não precisa ser definida. O salto $[\phi](x, t_0)$ de $\phi(\cdot, t_0)$ em x através $S(t_0)$ é definido por

$$[\phi] \equiv \phi^+ - \phi^- \quad (14)$$

Quando $[\phi]$ não se anula para todas posições x em $S(t_0)$, a superfície $S(t_0)$ é dita singular com respeito a $\phi(\cdot, t_0)$. Observe que ϕ^+ , ϕ^- e $[\phi]$ são funções de posição sobre $S(t_0)$, e em particular, se ϕ^+ e ϕ^- são diferenciáveis sobre $S(t_0)$, o salto $[\phi]$ também é diferenciável sobre $S(t_0)$. A superfície em movimento S é singular em relação ao campo ϕ , se cada superfície $S(t)$ é singular com respeito a $\phi(\cdot, t)$ para cada instante t .

Se a superfície S é singular em relação a alguma quantidade e $[\phi] = 0$ através da mesma, então a função ϕ é dita contínua através de S .

Toda a teoria de superfícies singulares repousa no lema de Hadamard [4]. Em relação a parametrização (4), para cada instante t , segue do lema de Hadamard e (14) que:

$$\frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^i} = [\text{grad } \gamma] \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \omega^i} \quad (15)$$

No caso do campo vetorial, ou tensorial ψ , seja Π um vetor ou tensor arbitrário e constante. A substituição de

$$\gamma = \psi \cdot \Pi \quad (16)$$

em (15) fornece o resultado:

$$\frac{\partial [\psi]}{\partial \omega^i} = [\text{grad } \psi] \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i}$$

3.1 Condições de Compatibilidade Geométrica

Seja M uma matriz 2×2 com elementos a_{ij} dados por:

$$a_{ij} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i} \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^j} \quad (17)$$

Para mostrar que M é inversível, seja ϕ o ângulo entre $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1}$ e $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2}$. De (17), podemos escrever:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} (1 - \cos^2 \phi) \quad (18)$$

Como $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1}$ e $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2}$ são linearmente independentes, temos que $\cos \phi \neq 1$ e segue de (18) que $\det M \neq 0$. Logo, M é inversível.

Do conjunto base (2), escrevemos para o salto do gradiente do campo escalar γ

$$[\text{grad } \gamma] = \lambda_1 \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1} + \lambda_2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2} + \lambda_3 n,$$

onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são escalares. Definindo a quantidade \underline{b} por

$$\underline{b} = \hat{b}(\gamma, n) = [\text{grad } \gamma] \cdot n \quad (19)$$

encontramos que $\lambda_3 = \underline{b} e$,

$$[\text{grad } \gamma] = \lambda_1 \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1} + \lambda_2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2} + \underline{bn} \quad (20)$$

O uso da condição (15) em (20) e, tendo em vista (17), vem que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^1} \\ \frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Denotando por a^{ij} os elementos de M^{-1} (inversa de M), obtemos de (21) que

$$\lambda_j = a^{ij} \frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^i}, \quad (\text{soma em } i)$$

e assim (20) pode ser escrita na forma

$$[\text{grad } \gamma] = \underline{bn} + a^{ij} \frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^i} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^j}, \quad (\text{soma em } i \text{ e } j) \quad (22)$$

Para o caso do campo vetorial, ou tensorial ψ , a substituição de (16) em (22) fornece

$$[\text{grad } \psi] = b \otimes n + a^{ij} \frac{\partial [\psi]}{\partial \omega^i} \otimes \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^j}, \quad (\text{soma em } i \text{ e } j) \quad (23)$$

onde

$$b = \hat{b}(\psi, n) = [\text{grad } \psi]n \quad (24)$$

O conjunto (22) e (23) é chamado de condição de compatibilidade geométrica e expressa o fato que a descontinuidade (salto) é estendida (difundida, propalada, aberta) suavemente sobre uma superfície e não isolada em um ponto ou uma linha. Se substituirmos ψ por $\text{grad } \psi$ em (23) e depois usarmos novamente (23), obtemos uma condição geométrica de com

patibilidade iterada que não escrevemos o resultado aqui, mas o mesmo pode ser encontrado em [1,2].

3.2 Condições de Compatibilidade Cinemática

Como já foi visto, a superfície em movimento S é singular se cada superfície $S(t)$ é singular. Lembrando que a derivada deslocamento é definida sobre a superfície S , podemos aplicar o lema de Hadamard para o espaço produto $\xi \times (-\infty, \infty)$ e escrever [4] para os campos γ e ψ respectivamente no lado + da superfície singular

$$\frac{\delta \gamma^+}{\delta t} = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)^+ + (\text{grad } \gamma)^+ \cdot u_n n \quad (25)$$

$$\frac{\delta \psi^+}{\delta t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^+ + (\text{grad } \psi)^+ \cdot u_n n$$

Escrevendo resultado semelhante para o lado - da superfície e subtraindo de (25) com o uso de (14), obtemos:

$$\frac{\delta [\gamma]}{\delta t} = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] + [\text{grad } \gamma] \cdot u_n n \quad (26)$$

$$\frac{\delta [\psi]}{\delta t} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + [\text{grad } \psi] \cdot u_n n$$

O conjunto (26) é chamado de condição de compatibilidade cinemática e expressa a persistência da descontinuidade (salto) num intervalo de tempo. Quando colocamos $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ no lugar de ϕ e $\text{grad } \phi$ no de ψ em (26) e os resultados são agrupados com (22) ou (23) e (26) obtemos condições de compatibilidade de cinemática iteradas que não são dadas nesse trabalho, mas podem ser encontradas em [1,2].

3.3 O Teorema de Maxwell. Condições de Hugoniot

Teorema de Maxwell: Se $[\gamma] = \text{constante}$ através da superfície singular $S(t)$ para cada instante t , então:

$$[\text{grad } \gamma] = \underline{b}n, \quad (27)$$

onde \underline{b} é a amplitude da singularidade.

Para provar o teorema, basta substituir $[\gamma] = \text{constante}$ em (15), usar o fato que $\left\{\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega_i}\right\}$ gera qualquer vetor tangente a superfície singular e observar (19). Por meio de (16), a condição $[\gamma] = \text{constante}$, implica que $[\psi] = 0$, pois Π é arbitrário. Assim sendo, o teorema de Maxwell para o campo ψ é enunciado da seguinte maneira:

Se $[\psi] = 0$ através da superfície singular $S(t)$ para cada instante t , então:

$$[\text{grad } \psi] = b \otimes n, \quad (28)$$

onde b é a amplitude da singularidade.

Observe que o teorema de Maxwell expressa o fato de que o salto do gradiente de um campo contínuo é normal a superfície singular. A prova de (28) é feita substituindo (16) em (27) com a mente em (24). Fazendo $[\gamma] = \text{constante}$ e $[\psi] = 0$ em (26) para a superfície singular em movimento S e usando (27) e (28), o teorema de Maxwell produz as condições de Hugoniot:

$$u_n [\text{grad } \gamma] = - \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] n \quad (29)$$

$$u_n [\text{grad } \psi] = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \otimes n,$$

onde:

$$u_n \underline{b} = - \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \quad (30)$$

$$u_n b = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$$

Dois casos particulares de $(29)_2$, são:

$$u_n [\text{div } \psi] = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \cdot n, \quad \text{se } \psi \text{ é um vetor} \quad (31)$$

$$u_n [\text{div } \psi] = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] n, \quad \text{se } \psi \text{ é um tensor}$$

A prova de (31)₁ é imediata, basta usar o traço em (29)₂. Para provar (31)₂, consideremos a grandeza Π arbitrária tal que $\psi^T \Pi$ é um vetor quando ψ é um tensor. Substituindo ψ por $\psi^T \Pi$ em (31)₁, segue o resultado (31)₂.

Agora, podemos obter facilmente uma condição de compatibilidade cinemática iterada com as restrições do teorema de Maxwell, ou seja: substituindo γ por $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ e ψ por $\text{grad } \gamma$ em (26), temos:

$$\frac{\delta \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right]}{\delta t} = \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right] + \left[\text{grad } \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \cdot u_n n \quad (32)$$

$$\frac{\delta [\text{grad } \gamma]}{\delta t} = \left[\text{grad } \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] + [\text{gradgrad } \gamma] u_n n$$

Eliminando $\left[\text{grad } \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right]$ entre as equações do conjunto (32) e com o uso de (27), (30) e $n \cdot \frac{\delta n}{\delta t} = 0$, vem que:

$$\left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right] = u_n^2 \underline{c} - 2u_n \frac{\delta b}{\delta t} - \underline{b} \frac{\delta u_n}{\delta t} \quad (33)$$

onde

$$\underline{c} = \hat{c}(\gamma, n) = [\text{gradgrad } \gamma] n \cdot n$$

Lembrando que a condição de compatibilidade cinemática (33) é obtida quando $[\gamma] = \text{constante}$, um resultado semelhante pode ser mostrado para o campo ψ no caso de $[\psi] = 0$ usando o mesmo raciocínio. Então,

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = u_n^2 c - 2u_n \frac{\delta b}{\delta t} - b \frac{\delta u_n}{\delta t} \quad (34)$$

onde

$$c = \hat{c}(\psi, n) = ([\text{gradgrad } \psi]n)n$$

e (24) foi usada.

As equações (29) são de grande importância no estudo de ondas, como também (31). Em determinados problemas de crescimento e decaimento de ondas, as condições (33) e (34) são bastante usadas.

Um caso bem interessante de condição de compatibilidade de cinemática é aquele quando a superfície singular S é estacionária ($u_n = 0$). Tal condição, através de (10) e (26), simplesmente é escrita na forma

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = \frac{\partial [\phi]}{\partial t} \quad (35)$$

ou seja: quando $u_n = 0$, por meio de (35), continuidade em ϕ implica também na continuidade de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, e assim por diante.

Bibliografia

- [1] Thomas, T.Y., Extended Compatibility Conditions for the Study of Surfaces of Discontinuity in Continuum Mechanics. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 6, n° 3 (1957).
- [2] Truesdell, C. and Toupin, R., The Classical Field Theories. Handbuch der Physik (Ed. S. Flugge). Springer-Verlag, Berlin (1960).
- [3] Bowen, R.M. and Wang, C.C., On Displacement Derivatives. Quarterly of Applied Mathematics, April (1971).

- [4] Silva, A.S., Superfícies Singulares e Ondas de Aceleração em Misturas. Tese de Mestrado. COPPE/UFRJ, (1979).



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER

N.º D-20

P. P. 291 - 300

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS EM UM TROCADOR DE
CALOR DE CARÇAÇA E TUBOS "U" COM CHICANAS SEGMENTADAS

Benedito Dias Baptista Filho
Pesquisador, IPEN
USP - São Paulo - SP - Brasil

Ahmet Aydin Konuk
Prof. Colaborador - Depto Eng. Química
UNICAMP - Campinas - SP - Brasil

SUMÁRIO

Foi desenvolvido um modelo numérico que fornece as distribuições de temperaturas para os fluidos de carcaça e tubos ao longo de um trocador de calor de carcaça e tubos "U" com chicanas segmentais. O modelo, testado com resultados experimentais de um trocador de calor, reproduziu com alta precisão as temperaturas de saída dos fluidos. O método, implementado de um programa em FORTRAN de baixo custo e fácil utilização, pode ser usado para cálculos de projeto e operação desses trocadores.

SUMMARY

A numerical model has been developed to calculate the temperature distribution for the tube and shell-side fluids in a shell-and-U-tubes heat exchanger with segmental baffles. The model, checked with experimental results from one heat exchanger, predicted with good accuracy outlet temperatures for both fluids. The method, implemented in a computer program of low cost and easy application, can be used in the design and performance evaluation of commercial units.

1. Introdução

Trocadores de calor de carcaça e tubos com chicanas são muito utilizados em diversas áreas industriais. Utilizam-se chicanas de segmentos de placas ou de anéis e discos. O lado dos tubos pode ser feito em uma ou mais passagens de tubos simples ou em tubos "U".

Neste trabalho, apresentamos um modelo térmico de um trocador de carcaça e tubos "U" com chicanas segmentais (Fig. 1).

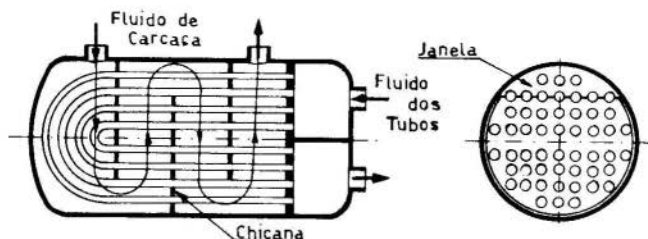


Fig. 1 - Trocador de tubos "U" e chicanas segmentais

Existem diversos métodos para cálculo de projeto e operação desses trocadores [1,2]. O método de análise de correntes, desenvolvido por Palen e Taborek [1] na HTRI ("Heat Transfer Research Inc.", Alhambra, California), que nos parece superior aos demais, foi aplicado a 64 trocadores de tipos comerciais e experimentais fornecendo um desvio médio da ordem de 30% na comparação com resultados experimentais de perda de carga e troca de calor. Esse método reduz o complicado escoamento do fluido de carcaça em uma rede de correntes com resistências hidráulicas associadas a cada uma. Essas correntes consideram o fluxo através da janela de uma chicana, o fluxo perpendicular ao feixe de tubos entre duas chicanas e os fluxos de fuga que ocorrem nas folgas entre a chicana e a carcaça, entre os tubos e os furos das chicanas e o fluxo periférico entre o feixe de tubos e a carcaça. São avaliados números de Reynolds corrigidos na janela da chicana e na região de fluxo cruzado. Para o cálculo do coeficiente de troca de calor h_c , do fluido de carcaça, é utilizada uma média ponderada entre os dois números de Reynolds, que é multiplicada por um fator de correção que considera o efeito dos fluxos de fuga. É

considerada também uma diferença média logarítmica corrigida de temperaturas entre os fluidos. As resistências e as correções mencionadas foram obtidas pela minimização de erros do método com os dados experimentais dos 64 trocadores utilizados.

O objetivo deste trabalho foi a obtenção de um modelo térmico tridimensional em estado estacionário para esse tipo de trocadores, mais preciso e confiável que os demais existentes. A modelação foi baseada em balanços de massa, forças e energia em volumes de controle distribuídos em todo o trocador. Esse equacionamento, denominado de "análise de subcanais", que é a base dos Códigos para análise termo-hidráulica do núcleo de reatores nucleares [3], permite a obtenção das distribuições de velocidades e temperaturas ao longo de todo o trocador.

Nas seções seguintes, os modelos para o escoamento dos fluidos de carcaça e tubos, bem como o cálculo dos coeficientes de troca de calor locais e os métodos de solução são discutidos brevemente, sendo então comparados os resultados com os dados experimentais de um trocador de calor do Circuito Experimental de Hélio do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN) aonde, o Hélio no lado dos tubos é resfriado por água no lado da carcaça. Os detalhes deste trabalho são dados em [4].

2. Modelo e Método de Solução

Uma metade diametral do trocador que divide simetricamente cada chicana é subdividida axialmente em subcanais com pequenos grupos de tubos associados. O trecho entre a primeira e a última chicana é dividido em níveis transversais que, com as divisões axiais, geram os volumes de controle, tanto para o fluido dos tubos como para o da carcaça (Fig. 2). Cada trecho entre duas chicanas é dividido em pelo menos dois níveis, sendo que um deles contém uma chicana.

Para o fluido de carcaça, a pressão p e a componente axial de velocidade u , são definidas como médias na face de cada subcanal, em todos os volumes. As componentes transversais de velocidades v e w em todos os níveis, são definidas como médias superficiais nas faces entre subcanais adjacentes. A temperatura do fluido de carcaça T_c é definida como a média no volume. Para cada grupo de tubos é definida uma velocidade u_t como sendo a média entre as velocidades de cada tubo do grupo. A temperatura do fluido dos tubos T_t também é definida

para cada volume de controle (Fig. 3) .

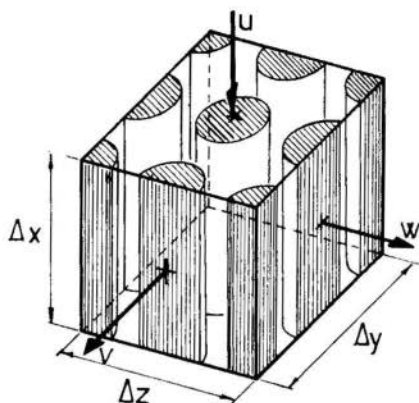


Fig. 2 - Volumes de Controle

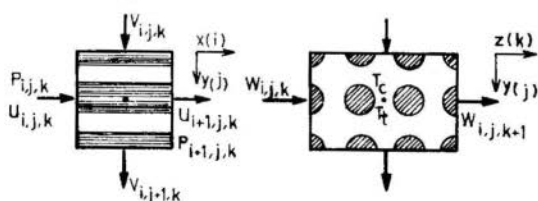


Fig. 3 - Posicionamento de variáveis

As equações de energia para os fluidos de carcaça e tubos, em regime permanente, obtidas por meio de balanço térmico em cada volume são representadas nas equações (1) e (2) respectivamente .

$$\begin{aligned}
 & \rho_c c_{p_c} [A_x^{j,k} (u^{i,j,k} T_c^{i-1,j,k} - u^{i+1,j,k} T_c^{i,j,k}) - \\
 & (A_y^{j,k} v^{i,j,k} T_c^{i,j-1,k} - A_y^{j+1,k} v^{i,j+1,k} T_c^{i,j,k}) + \\
 & (A_z^{j,k} w^{i,j,k} T_c^{i,j,k-1} - A_z^{j,k+1} w^{i,j,k+1} T_c^{i,j,k})] + \\
 & A_{tr}^{i,j,k} U^{i,j,k} (T_t^{i,j,k} - T_c^{i,j,k}) = 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\rho_t C_{p_t} \left[A_t^{j,k} \left(u_t^{i,j,k} T_t^{i-1,j,k} - u_t^{i+1,j,k} T_t^{i,j,k} \right) \right] -$$

$$A_{tr}^{i,j,k} U^{i,j,k} \left(T_c^{i,j,k} - T_t^{i,j,k} \right) = 0 \quad (2)$$

aonde ρ é a densidade do fluido, C_p o calor específico à pressão constante, A_x a área do subcanal, A_y e A_z as áreas mínimas de passagem entre subcanais adjacentes nas direções y e z respectivamente, A_t a soma das áreas internas dos tubos do grupo correspondente ao subcanal, A_{tr} a área de troca de calor do volume, U o coeficiente de troca de calor no volume e os índices c e t referem-se respectivamente aos fluidos de carcaça e tubos.

As componentes de velocidades u , v e w e as pressões p , são inicialmente obtidas para um intervalo entre duas chicanas consecutivas pela solução das equações de conservação de massa e "momentum", escritas para escoamento isotérmico em regime permanente de um fluido incompressível como nas referências [4,5,6]. Esses resultados são entendidos para os demais intervalos pois, o escoamento, se repete igualmente de chicana para chicana como já foi comprovado experimentalmente por Konuk [5]. O balanço de massa nas regiões de entrada e saída do trocador fornece a distribuição de velocidades nesses níveis. Para o fluido dos tubos, são calculadas velocidades para cada comprimento de tubo "U" através da simulação de uma rede de tubos com resistências hidráulicas diferentes e interligados por pressões de entrada e saída, obtendo-se também a perda de carga no lado dos tubos. O coeficiente de troca de calor U , de um dado volume de controle é definido pela eq. (3).

$$\frac{1}{U^{i,j,k}} = \frac{d_e}{d_i h_t^{i,j,k}} + \frac{1}{h_c^{i,j,k}} + \frac{d_e (d_e - d_i)}{k_t (d_e + d_i)} \quad (3)$$

aonde d_e e d_i são respectivamente os diâmetros externo e interno dos tubos, k_t a condutividade térmica do metal dos tubos e h_t e h_c , os coeficientes de troca de calor dos fluidos avaliados nas condições de cada volume de controle. O coeficiente h_t do fluido dos tubos, é baseado na correlação de Colburn com a correção de viscosidade de Mc Adams. Para o fluido de carcaça, são consideradas duas regiões dis

tintas. Nos volumes de chicana é utilizada uma média logarítmica entre a correlação de Colburn avaliada nas condições das folgas entre tubos e chicana e entre chicana e carcaça e a correlação de Weisman nas condições do subcanal. Nos demais volumes é utilizada uma média angular na forma da eq. (4) .

$$h_c^{i,j,k} = \frac{\alpha}{\pi/2} h_{cr}^{i,j,k} + \frac{\pi/2 - \alpha}{\pi/2} h_p^{i,j,k} \quad (4)$$

aonde α é o ângulo formado entre a velocidade resultante no volume e os tubos, h_{cr} o coeficiente de troca de calor para fluxo cruzado através de tubos, baseado na resultante transversal de velocidade e na correlação de Mc Adams e h_p o coeficiente para fluxo paralelo, baseado na correlação de Weisman [7].

O sistema de equações algébricas formado pelas eqs. (1) e (2) , escritas para todos os volumes, foi transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem que, resolvido pelo método de Euler, reduziu os requisitos de memória e de tempo de processamento (CPU) em relação aos métodos diretos e iterativos. Essa transformação foi feita pela introdução de um termo fictício de transiente (dT/dt) nas eqs. (1) e (2). A solução desse transiente conduz a um regime permanente que é a solução do sistema original.

Para a obtenção das distribuições de velocidades e temperaturas no trocador foi feito um programa FORTRAN [4] que requer as condições de operação e os dados geométricos do trocador de uma forma extremamente facilitada ao usuário através de uma alta automatização .

3. Resultados

O trocador apresentado (Fig. 1), foi modelado em 16 subcanais e em um total de 13 níveis (5 níveis por chicana). A Fig. 4 mostra uma típica distribuição de velocidades entre duas chicanas e a porcentagem de vazão por subcanal no nível da chicana, obtidas para uma vazão de aproximadamente 2 litros por segundo, à uma temperatura de 50 °C.

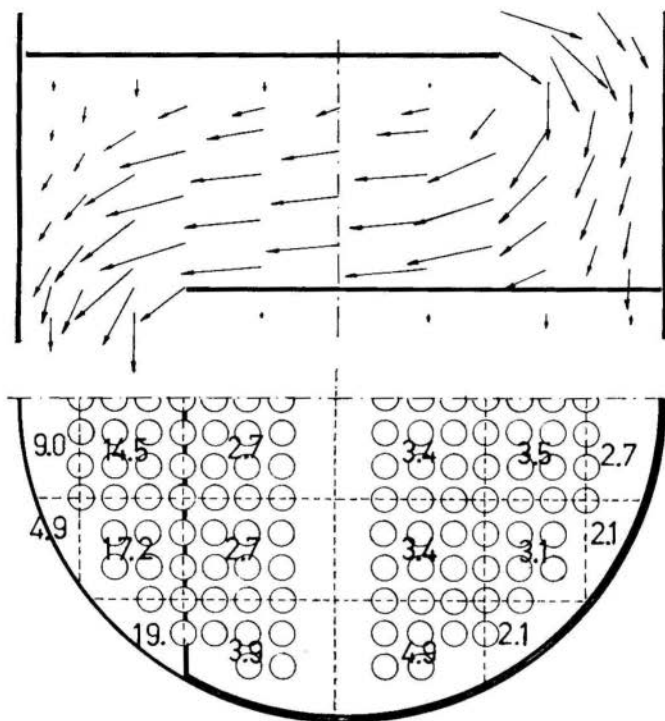


Fig. 4 - Distribuição de velocidades e vazões

As figuras (5) e (6) mostram respectivamente, a variação do coeficiente de troca de calor h_c , do fluido de carcaça, para três subcanais e a variação das temperaturas de ambos os fluidos ao longo de um tubo "U" e dos subcanais correspondentes, para uma vazão de Hélio de 1.57 Kg/s nos tubos, entrando a 221 °C e uma vazão de água de 2.09 Kg/s na carcaça, entrando a 18 °C. O efeito de aumento do coeficiente de troca de calor causado pela chicana pode ser notado com a comparação a um coeficiente calculado para fluxo paralelo sem a existência das chicanas (h_0 , linha horizontal pontilhada na Fig. 5).

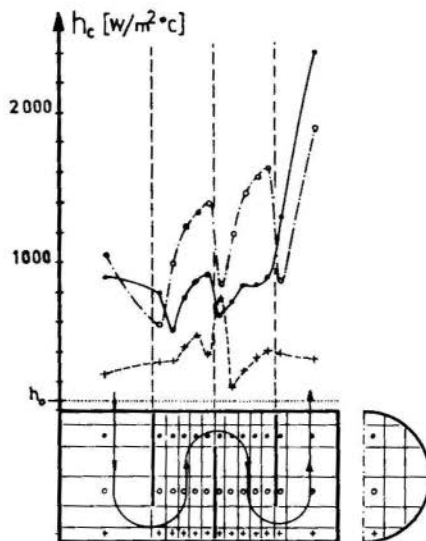


Fig. 5 - Coeficientes de troca de calor, Fluido de carcaça

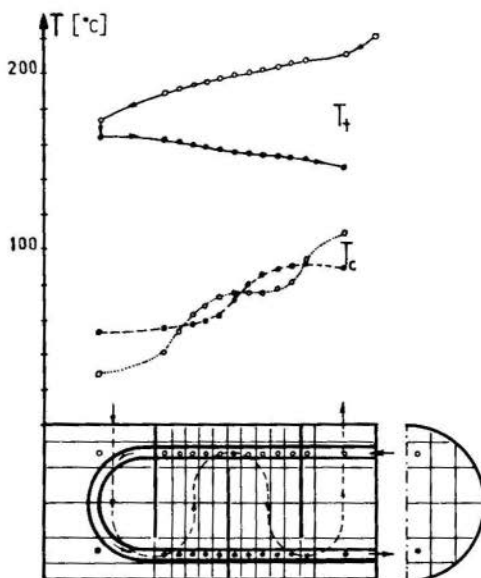


Fig. 6 - Distribuição de Temperaturas

A Tabela 1, apresenta a comparação de dados experimentais dispo-
níveis com os previstos pelo método .

Tabela 1
Resultados obtidos

\dot{m}_t (Kg/s)	\dot{m}_c (Kg/s)	T_{o_t} (°C)	T_{o_c} (°C)	T_{e_t} (°C)	T_{c_t} (°C)	ϵ %	T_{e_c} (°C)	T_{c_c} (°C)	ϵ %
1.26	1.20	170.	20.	120.	121.0	0.8	85.	83.7	-1.5
1.46	2.14	225.	20.	140.	145.7	4.1	90.	87.1	-3.2
1.48	2.33	230.	20.	140.	146.9	4.9	90.	85.4	-5.1
1.53	2.65	240.	20.	145.	150.1	3.5	88.	84.3	-4.2
1.55	2.14	220.	20.	140.	144.5	3.2	90.	87.8	-2.4
1.56	1.94	225.	20.	148.	149.9	1.3	95.	94.9	-0.1
1.57	2.09	221.	18.	143.	146.0	2.1	91.	87.8	-3.5

aonde \dot{m}_t e \dot{m}_c são as vazões em massa dos fluidos, T_{o_t} e T_{o_c} as tempe-
raturas de entrada dos fluidos, T_{e_t} e T_{e_c} as temperaturas de saída
medidas, T_{c_t} e T_{c_c} as temperaturas de saída calculadas e ϵ o desvio
percentual entre os valores experimentais e calculados. Nota-se uma
boa concordância entre os resultados experimentais e os calculados .
Os desvios estão dentro dos erros experimentais de medida.

Para o modelo apresentado (3 chicanas, 5 níveis por chicana) fo-
ram necessários 2.88 min. de processamento e 312 K-bytes de memória
no IBM 370/55 do IPEN. Se o objetivo for unicamente a obtenção das
temperaturas de saída dos fluidos, podem ser feitas somente duas di-
visões por chicana sem alterar sensivelmente o valor das temperatu-
ras calculadas mas, reduzindo o tempo de processamento para .61 min.
e para aproximadamente 200 K-bytes de memória .

4. Conclusões

O modelo desenvolvido permite, através da solução das equa-
ções de conservação escritas para os volumes de controle, tanto do
lado dos tubos como do lado da carcaça, a obtenção das distribuições
de velocidades e temperaturas ao longo de um trocador de calor de
carcaça e tubos "U" com chicanas segmentais o que, não é possível
pelos demais métodos .

O modelo testado com resultados experimentais de um trocador re produziu com alta precisão as temperaturas de saída. Como o modelo só utiliza correlações gerais para fatores de atrito f e de troca de calor h , não contendo nenhum parametro otimizado, ao contrário do método de Palen e Taborek, portanto independente da geometria e condições de operação, pode-se esperar previsões de mesma ordem de precisão de outros trocadores.

Esperamos que este método, de fácil utilização e alta eficiência computacional, combinados com alta precisão e confiabilidade seja utilizado para cálculos de projeto e operação dos trocadores industriais, uma vez que o modelo, com pequenas alterações no programa, pode ser adaptado aos demais tipos de trocadores com chicanas .

Bibliografia

- [1] Palen J.W., e Taborek, J., "Solution of Shell-Side Flow Pressure Drop and Heat Transfer by Stream Analysis Method", Chem. Engng. Progr. Symp. Ser., No 92, Vol. 65 (1971)
- [2] Bell, K.J., "Exchanger Design Based on Delaware Research Program", Petro/Chem. Engng. (1960)
- [3] Rowe, D.S., "COBRA IIIC, A Digital Computer Program for Steady State and Transient Thermal-Hydraulic Analysis of Rod Bundle Nuclear Fuel Element", BNWL-1695 (1973)
- [4] Baptista Fº, B.D., Modelo Numérico para a Solução Térmica e Hidráulica de um Trocador de Calor de Carcaça e Tubos "U" com Chicanas Segmentais, Tese de Mestrado, IPEN (1979)
- [5] Konuk, A.A., "Pressure and Flow Distribution in the Subchannels of Rod Bundles with Segmental Baffles", "Ph.D. Thesis" University of California, Santa Barbara (1975)
- [6] Konuk, A.A., Distribuição de Pressões e Velocidades em Trocadores de Calor de Carcaça e Tubos com Chicanas Segmentais V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (1979)



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-21

P.P. 301 - 310

DINÂMICA E CONTROLE DE UM GERADOR DE VAPOR TIPO "PASSO ÚNICO"

Arivaldo Vicente Gomes
 Pesquisador, IPEN
 USP - São Paulo - SP - Brasil

Ahmet Aydin Konuk
 Prof. Colaborador - Depto Eng. Química
 UNICAMP - Campinas - SP - Brasil

SUMÁRIO

Apresenta-se um modelo, não linear com parâmetros distribuídos, aplicado na dinâmica e controle de um trocador de calor em contra-corrente, projetado como gerador de vapor para uma central nuclear reprodutora. Um método implícito e convergente foi desenvolvido para resolver simultaneamente as equações de conservação de massa, momentum e energia. O modelo aplicável a trocadores de calor em geral, foi utilizado especificamente para estudar o comportamento de um gerador de vapor em contra-corrente, com relação a sua capacidade de seguir cargas e estabilidade de pressão e temperatura.

SUMMARY

This paper presents a non linear distributed parameter model for the dynamics and feedback control of a large countercurrent heat exchanger used as a once-through steam generator for a breeder reactor power plant. A convergent, implicit method has been developed to solve simultaneously the equations of conservation of mass, momentum and energy. The model, applicable to heat exchanger systems in general, has been used specifically to study the performance of a once-through steam generator with respect to its load following ability and stability of throttle steam temperature and pressure.

1. Introdução

Foram desenvolvidos recentemente vários modelos de dinâmica dos geradores de vapor tipo passo único, que são usados em muitas usinas nucleares. Esses modelos resolvem as equações de conservação de massa, momentum e energia unidimensionais para o fluido do circuito primário, onde escoam o refrigerante do reator, e para a água de alimentação do circuito secundário, que vai para a turbina.

As equações de conservação resultam num sistema de equações diferenciais parciais não lineares, com derivadas espaciais e temporais. Para facilitar a solução das equações, foram feitos modelos linearizados, limitados a transientes de baixa amplitude em torno do estado estacionário original. O sistema não linear, que possibilita a análise de transientes normais de operação ou induzidos por eventuais acidentes, é resolvido pelo método das diferenças finitas que resulta num modelo não linear de parâmetros distribuídos.

Na solução, usaram-se os métodos denominados "implícito contínuo Euleriano" (ICE) e "avançado, contínuo, Euleriano" (ACE). No método ICE [1], as equações de massa e de momentum são resolvidas implicitamente, sendo acopladas com uma equação de estado que relaciona a pressão com a densidade, enquanto a equação da energia é resolvida explicitamente. No método ACE [2], as equações de massa e energia são acopladas através de uma equação de estado aproximada e resolvidas implicitamente, enquanto a equação de momentum é resolvida explicitamente. Portanto, o método ICE despreza a expansão térmica do fluido, e o ACE a compressibilidade do fluido. Foi desenvolvido recentemente um método ICE modificado [3] onde a equação de massa e momentum acopladas, e massa e energia acopladas são resolvidas alternadamente, para levar em consideração a compressibilidade e a expansão térmica do fluido.

O objetivo deste trabalho é resolver as equações de massa, momentum e energia implicitamente, acoplando-as através de uma equação de estado que relaciona a densidade com a pressão e entalpia, para levar em consideração a compressibilidade e a expansão térmica do fluido, ambas importantes na simulação de geradores de vapor. A formulação implícita utilizada é incondicionalmente convergente, contrastando com as demais

que são sujeitas à limitações do incremento temporal Δt para convergir.

O método permite a simulação de trocadores de calor em geral, tendo sido aplicado na dinâmica e controle de um gerador de vapor projetado para uma usina reprodutora a sal fundido (MSBR). Ele consiste de uma carcaça cilíndrica de 18" de diâmetro e 68" de comprimento, e 350 tubos de .5" de diâmetro. O calor é transferido ao vapor em estado supercrítico escoando nos tubos do sal fundido fluindo em contra-corrente na carcaça. Esses dados são de [4], onde o gerador é simulado utilizando um modelo linearizado. O trabalho completo se encontra na [5].

2. Modelo Matemático e Método de Solução

Na modelagem desprezam-se os efeitos do fluxo cruzado no secundário e supõem-se distribuições uniformes de propriedades na direção radial. Assim, o gerador de vapor pode ser representado por dois cilindros retos concêntricos, com vapor fluindo no tubo interno e sal fundido no espaço anular, sendo a razão das áreas escoamento igual a do gerador de vapor (Figura 1).

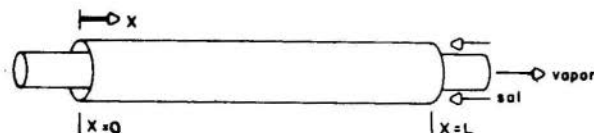


Figura 1 - O modelo físico

O modelo matemático do gerador é constituído pelas equações de conservação de massa, de momentum e de energia para o vapor, pela equação da conservação da energia para o sal, e pelas equações do estado, dados respectivamente por:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_h \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_p \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2f}{D} u |u| = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{K U}{\rho} (\theta - T) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{K_1 U}{\rho_1 c_{p1}} (T - \theta) = 0 \quad (4)$$

$$\rho = \rho(p, h) \quad (5)$$

$$T = T(p, h) \quad (6)$$

Nas equações (1) a (6), t é o tempo, x é a variável espacial, positiva e na direção do fluxo da vapor. As variáveis dependentes p, u, h, T, ρ e θ são respectivamente pressão, velocidade, entalpia específica, temperatura, densidade do vapor e temperatura do sal. Ainda mais, U é o coeficiente global de transferência de calor, baseado na área externa dos tubos, f é o coeficiente de atrito de Fanning, D é o diâmetro externo dos tubos, e K e K_1 são as relações entre o perímetro externo dos tubos e as áreas de passagem respectivas para o vapor e o sal. V, c_{p1} e ρ_1 são respectivamente a velocidade, calor específico e a densidade do sal.

Os dois primeiros termos da equação (1) correspondem ao termo $(\partial p / \partial t)$, e as equações (5) e (6) representam as tabelas de vapor. Para o sal, as variações de densidade e velocidade podem ser desprezadas, considerando-se assim somente a equação da energia.

As condições de contorno utilizadas são:

$$p(0, t) = p^0(t) \quad (7)$$

$$h(0, t) = h^0(t) \quad (8)$$

$$u(L, t) = \frac{u_0 \rho_0}{\rho_0} a_T^2(t) \frac{p(L, t)}{\rho(L, t)} \quad (9)$$

$$\theta(L, t) = \theta^L(t) \quad (10)$$

onde $p^0(t)$, $h^0(t)$ e $\theta^L(t)$ são os valores impostos respectivamente para a pressão da bomba de alimentação do vapor $p(0, t)$, entalpia de entrada do vapor $h(0, t)$, e temperatura de entrada do sal $\theta(L, t)$. A equação (9) relaciona a velocidade de saída do vapor $u(L, t)$ com a pressão $p(L, t)$ e a densidade na saída do gerador $\rho(L, t)$, e a área normalizada válvula $a_T(t)$ [5]. Os valores de saída de u , ρ e p para operação em plena carga são denotados por u_0 , ρ_0 , p_0 .

As equações (1) a (10) descrevem o comportamento dinâmico do gerador funcionando como circuito aberto. Para possibilitar ao gerador seguir variações de demanda de carga $H(t)$ mantendo constantes a temperatura $T(L, t)$ e a pressão $p(L, t)$ do vapor na saída do gerador, manipulou-se respectivamente $a_T(t)$, $\theta(L, t)$ e $p(0, t)$. As equações de contorno (7) e (10) são substituídas pelas equações de controle abaixo:

$$\frac{dP(0, t)}{dt} + \tau_B \frac{d^2 P(0, t)}{dt^2} = K_{cp} \left[- \frac{dP(L, t)}{dt} - \tau_D \frac{d^2 P(L, t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau_I} (P_r - P(L, t)) \right] \quad (11)$$

$$\frac{d\theta(L, t)}{dt} + \tau_T \frac{d^2 \theta(L, t)}{dt^2} = K_{cT} (T_r - T(L, t)) \quad (12)$$

e $a_T(t)$ que aparece na equação (9) é dado por:

$$\frac{da_T(L, t)}{dt} + \tau_a \frac{d^2 a_T(L, t)}{dt^2} = K_{ca} (H_r(t) - H(t)) \quad (13)$$

onde K_{cp} , K_{cT} e K_{ca} são os ganhos dos elementos de controle; τ_B , τ_T e τ_a são as constantes de tempo respectivas, e P_r , T_r e $H_r(t)$ as referências para a pressão e temperatura do vapor na saída do gerador e demanda de carga respectivamente.

Os termos à esquerda das equações (11) a (13) representam as inércias dos elementos de controle e os termos à

direita controladores proporcional integral e derivativo (PID) para a equação (11), e integral para as restantes. As equações (11) a (13) são obtidas as equações de controle em relação ao tempo, para eliminar os termos de integração.

As equações (1) a (10) para o circuito aberto de (1) a (6), (8), (9) e (11) a (13) para o circuito realimentado são resolvidas simultaneamente por diferenças finitas. As derivadas espaciais para o vapor são formuladas progressivamente e para o sal regressivamente. O posicionamento das variáveis é definido na Figura 2.

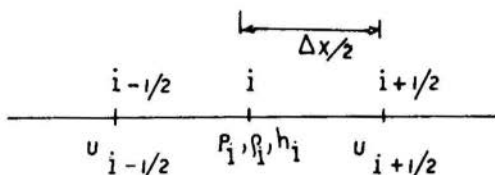


Figura 2 - Posicionamento das variáveis

As equações de conservação são dadas por:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_i \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_i \frac{p_i^{k+1} - p_i^k}{\Delta t} + \frac{\rho_{i+1}^{k+\alpha} u_{i+1/2}^{k+1} - \rho_i^{k+\alpha} u_{i-1/2}^{k+1}}{\Delta x} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{u_{i+1/2}^{k+1} - u_{i+1/2}^k}{\Delta t} + \frac{1}{\rho_i^{k+\alpha}} \frac{p_{i+1}^{k+1} - p_i^{k+1}}{\Delta x} + u_{i+1/2}^{k+\alpha}$$

$$\frac{u_{i+1/2}^{k+1} - u_{i-1/2}^{k+1}}{\Delta x} + \frac{2f^{k+\alpha}}{D_h} u_{i+1/2}^{k+1} |u_{i+1/2}^{k+\alpha}| = 0 \quad (15)$$

$$\frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t} + \frac{u_{i+1/2}^{k+\alpha} + u_{i-1/2}^{k+\alpha}}{2} \frac{h_i^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}}{\Delta x} - \frac{K U^{k+\alpha}}{\rho_i^{k+\alpha}} (\theta_i^{k+1} - T_i^{k+\alpha}) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^k}{\Delta t} + V \frac{\theta_{i+1}^{k+1} - \theta_i^{k+1}}{\Delta x} - \frac{K_1 U^{k+\alpha}}{\rho_1 C_{p1} D_{h1}} (T_i^{k+\alpha} - \theta_i^{k+1}) = 0 \quad (17)$$

Nas equações (14) a (17), Δt e Δx são respectivamente os incrementos temporal e espacial, k é o índice temporal, e i é o índice espacial, variando de 1 a m , onde m é o número de divisões axiais. A constante α tem valor numérico 0 ou 1.

Para $\alpha=0$, as equações (14) a (17), e as equações de condições de controle, formam um sistema de equações algébricas lineares onde as incógnitas são $u_{i-1/2}^{k+1}$, p_i^{k+1} , h_i^{k+1} e θ_i^{k+1} . Esse sistema é resolvido utilizando uma subrotina de eliminação de Gauss, por técnicas de matrizes esparsas.

Para $\alpha=1$, tem-se uma formulação completamente implícita. Neste caso, o sistema a ser resolvido é não linear. A solução do sistema não linear é obtida através de soluções sucessivas do sistema linearizado. As iterações são iniciadas fazendo $\alpha=0$, e são continuadas calculando os termos com o índice $k+\alpha$ utilizando a solução da iteração anterior.

A formulação com $\alpha=1$, que é estável para qualquer valor de Δt , é também usada fazendo $\Delta t=10^6$, para simular o gerador de vapor em estado estacionário. Ainda não terminaram os testes de estabilidade para $\alpha=0$. Essa opção é sem dúvida preferível pois evita a solução do sistema não linear.

3. Resultados

Os resultados são apresentados nas Figuras 3 e 4. Em todos os casos, foram usadas as correlações dadas na referência [4] no cálculo de U .

As variações ao longo do gerador, no estado estacionário e a plena carga, das temperaturas do sal $\theta(x)$ e do vapor $T(x)$, (Figura 3-a), e da velocidade $u(x)$ e da pressão $p(x)$ do vapor (Figura 3-b), são comparadas com resultados gráficos da referência [4].

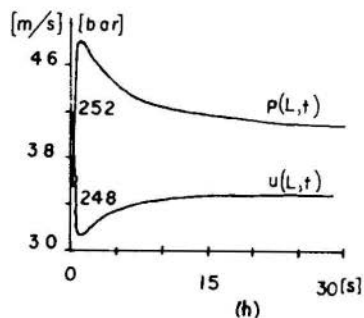
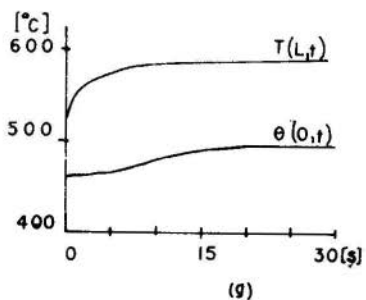
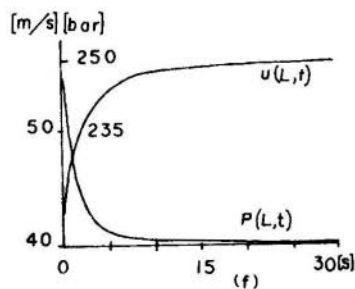
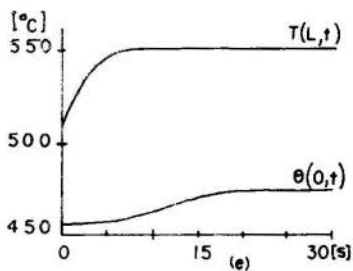
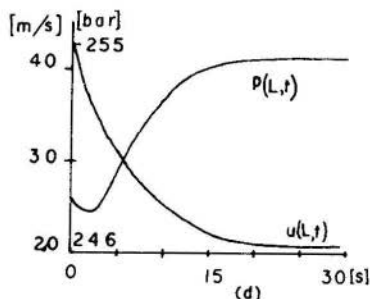
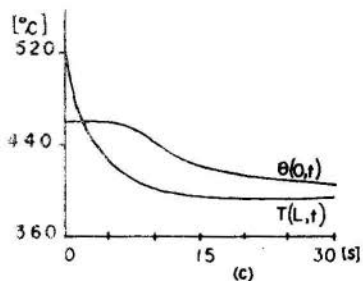
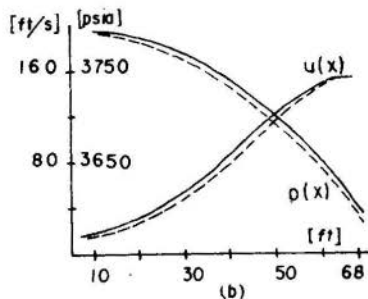
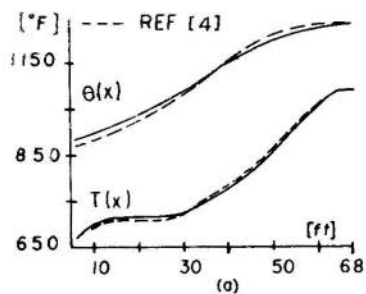


Figura 3 - Resultados sem controle

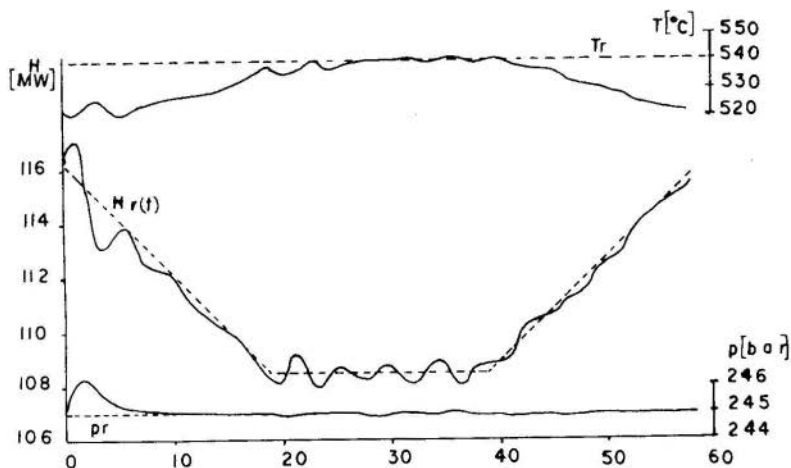


Figura 4 - Resultados com controle

Dez divisões axiais foram suficientes para obter uma boa concordância entre os dois modelos.

Para testar a estabilidade do método completamente implícito ($\alpha=1$), foram simuladas transientes induzidos por excitações do tipo degrau, a partir do estado estacionário em plena carga. As Figuras 3-c e 3-h representam as variações temporais, na saída do gerador, da temperatura do sal $\theta(0,t)$, e da temperatura $T(L,t)$, pressão $p(L,t)$, e velocidade $u(L,t)$ do vapor para as seguintes variações: temperatura de entrada do sal, de 621°C para 500°C (Figuras 3-c e 3-d); pressão da bomba de alimentação, de 262 bar para 230 bar, (Fig.3-d e 3-f) e a área normalizada da válvula, de 1.0 para .8 (Fig.3-g e 3-h). Os resultados foram obtidos usando 20 divisões axiais e um Δt de .5 segundos. Foram necessárias aproximadamente 3 iterações na solução do sistema não linear para uma convergência das incógnitas dentro de $\pm 2\%$.

Todos os transientes resultam em bruscas variações de pressão e de temperatura, e ilustram a estabilidade do método em condições onde a compressibilidade e a expansão térmica do fluido são ambas importantes.

A Figura 4 ilustra a simulação do controle de gerador

de vapor visando o seguimento de demanda da carga $H_p(t)$, mantendo $T(L,t)$ e $p(L,t)$ nas referências respectivas T_r e p_r . $H_r(t)$ cai linearmente de 20%/min. de 0 a 20 segundos, permanece constante de 20 a 40 segundos, e sobe de 20%/min. de 40 a 60 segundos. A simulação, feita com 10 divisões axiais e um Δt de 1 segundo, mostra que o método é estável durante as variações rápidas de $H_r(t)$.

4. Conclusões

Foi desenvolvido um método numérico implícito para resolver as equações de conservação de massa, de momentum e de energia unidimensionais, acopladas através de uma equação de estado que relaciona a densidade com a pressão e a entalpia. O método forneceu soluções estáveis em condições onde a compressibilidade e a expansão térmica do fluido são ambas importantes.

Bibliografia

- [1] Harlow, F.H. e Amsden, A.A., A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow Speeds, J.Comp. Phys., Vol. 8, pp. 197-213 (1971).
- [2] Stewart, C.W. e Rowe, D.S., Advanced Continous Fluid Eulerian Computation Scheme for Flows with Large Density Gradients, Trans.Am.Nucl.Soc., Vol.24, pp.178 (1976).
- [3] Crump, M.W. e Lee, J.C., Nonlinear Transient Modeling of Once-Through Steam Generators, 3rd Power Plant Dynamics, Control & Test. Symp., Knoxville, Tenn. Sept.7-9(1977).
- [4] Kirsch, L.K. e Sanathanan, C.K., Feedback Control of a Large Steam Generator, Nucl.Eng.Des., vol.42, pp. 431-446 (1977).
- [5] Gomes, A.V., Modelo Não Linear para Dinâmica e Controle de um Gerador de Vapor, Tese de Mestrado, IPEN (1979).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-22

P.P. 311 - 320

DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÕES E VELOCIDADES EM TROCADORES
 DE CALOR DE CARÇAÇA E TUBOS COM CHICANAS SEGMENTADAS

Ahmet Aydin Konuk
 Professor Colaborador - Depto Eng. Química
 UNICAMP - Campinas - SP - Brasil

SUMÁRIO

Foi desenvolvido um modelo numérico que fornece as distribuições de pressões e velocidades no lado da carcaça de um trocador de calor de carcaça e tubos com chicanas segmentadas. As equações de conservação de massa e momentum foram escritas utilizando-se o método de análise de sub-canais, desenvolvido para a análise termo-hidráulica do núcleo de reatores nucleares. O método reproduziu com boa precisão os resultados experimentais de dois trocadores de calor e poderia ser utilizado no projeto de unidades comerciais.

SUMMARY

A numerical model has been developed to calculate shell side pressure and velocity distribution in a baffled shell-and-tube heat exchanger. Equations of conservation of mass and momentum have been written making use of the subchannel analysis method, developed for the thermal-hydraulic analysis of nuclear reactor cores. The method has predicted with good accuracy the experimental results from two heat exchangers and could be applied to the design of commercial units.

1. Introdução

Os trocadores de calor de carcaça e tubos, com chicanas segmentadas de placas, são muito utilizados na indústria. As chicanas servem para dirigir o fluxo através dos tubos, da janela de uma chicana para a próxima, de modo a melhorar a transferência de calor no fluido da carcaça.

Os métodos para cálculo de perda de carga do fluido da carcaça podem ser agrupados em métodos de análise de correntes e métodos integrais. O método de Palen e Taborék [1], o mais desenvolvido do primeiro grupo, reduz o escoamento do lado da carcaça entre duas chicanas a uma rede de correntes formada pelo fluxo na janela, fluxo nas folgas, entre tubos e furos da chicana, entre as chicanas e a carcaça, fluxo cruzado e fluxo periférico entre os tubos e a carcaça. Cada corrente é associada a um fator de atrito e a solução do problema da rede resultante fornece a perda de carga e as velocidades das correntes. O método prediz a perda de carga dentro de $\pm 30\%$ sobre os resultados experimentais de 64 unidades testadas. No método de Bell [2], o mais confiável do segundo grupo, a perda de carga é calculada primeiro para um trocador sem folgas, e depois corrigida para considerar os efeitos de corrente de folga, as quais não são calculadas.

O objetivo do presente trabalho é obter a distribuição de pressões e velocidades em um trocador de calor de carcaça e tubos com chicanas segmentadas de placas, através de um modelo mais preciso do que os de análise de correntes. O espaço entre duas chicanas é modelado como uma matriz tridimensional de volumes interligados. As equações de conservação de massa e momentum, com condições de contorno apropriadas, são escritas para esses volumes na forma de diferenças finitas e são resolvidas em um computador digital. Na derivação das equações de conservação, é utilizado o método de análise de subcanais, desenvolvido para a análise termo-hidráulica do núcleo de reatores nucleares [3]. A solução fornece a distribuição de pressões, utilizada para o cálculo da perda de carga no trocador, e também a distribuição de velocidades que é necessária para os cálculos de transferência de calor [4].

2. Modelo

Trabalhos experimentais mostraram que em trocadores de calor de carcaça e tubos com chicanas segmentadas de placas, o escoamento se repete igualmente entre as chicanas [5], portanto, o escoamento é modelado em um trecho que vai de um ponto logo depois de uma chicana até um ponto após a próxima. A seção transversal do trocador, considerando-se somente uma metade devido à simetria, é dividida em subcanais, que depois são divididos transversalmente em volumes de controle. A pressão p e a componente axial (paralela aos tubos) de velocidade u são definidas para cada subcanal como uma média superficial nos planos transversais sucessivos. As componentes transversais de velocidade v e w são definidas como médias superficiais entre subcanais adjacentes e são baseadas na menor área de passagem (Figura 1):

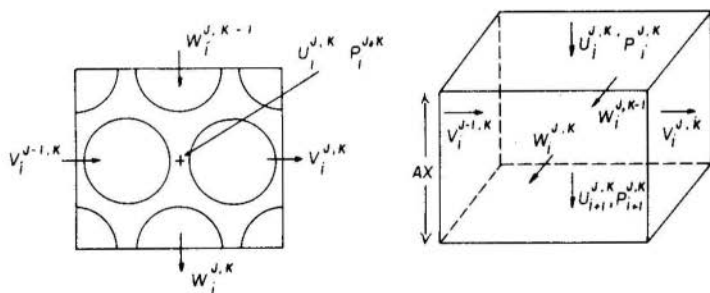


Figura 1 - Posicionamento de variáveis

As equações de conservação de massa e momentum são escritas para regime permanente e fluido incompressível.

Conservação de massa:

$$A^{j,k} u_i^{j,k} + \Delta x_i G_y^{j,k} v_i^{j-1,k} + \Delta x_i G_z^{j,k-1} w_i^{j,k} - (A^{j,k} u_{i+1}^{j,k} + \Delta x_i G_y^{j,k} v_i^{j,k} + \Delta x_i G_z^{j,k} w_i^{j,k}) = 0 \quad (1)$$

onde A é a área transversal do subcanal, Δx a altura do volume

de controle, G_v e G_w são as áreas de menor passagem por unidade de comprimento axial, relativas as velocidades de v e w .

Conservação de momentum x (axial):

$$\begin{aligned}
 p_{i+1}^{j,k} - p_i^{j,k} + \frac{\rho}{g_c} \left[(u_{i+1}^{j,k})^2 - (u_i^{j,k})^2 + \frac{\Delta x_k}{A^{j,k}} \left(G_v^{j-1,k} v_i^{j-1,k} \frac{u_k^{j-1,k} + u_i^{j,k}}{2} \right. \right. \\
 - G_v^{j,k} v_i^{j,k} \frac{u_k^{j,k} + u_k^{j+1,k}}{2} + G_w^{j,k-1} w_i^{j,k-1} \frac{u_k^{j,k-1} + u_k^{j,k}}{2} \\
 \left. \left. - G_w^{j,k} w_i^{j,k} \frac{u_i^{j,k} + u_i^{j,k+1}}{2} \right) + \frac{f_x}{2} \frac{\Delta x_i}{D_H^{j,k}} (u_i^{j,k})^2 \right] = 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

onde g_c é o fator de conversão de unidades, f_x é o fator de atrito para fluxo paralelo em feixe de tubos [6], e D_H o diâmetro hidráulico do subcanal. As equações (1) e (2) são escritas para todos os volumes de controle exceto na chicana, onde a equação (2) é reduzida para:

$$p_{i+1}^{j,k} - p_i^{j,k} + \frac{\rho}{2g_c} f_x (u_i^{j,k})^2 = 0 \quad (3)$$

onde f_x é obtido de dados de perda de carga singular em orifícios anulares [7]. Os termos na Eq. (2) são os termos de pressão, de aceleração e de atrito. Termos de tensões de cisalhamento e peso próprio são desprezados.

A conservação de momentum transversal é obtida nas direções y e z pela adição de termos de aceleração aproximados a correlações de perda de carga ΔP para fluxo cruzado [8], dadas por:

$$\Delta P = f N v^2 / 2 \quad (4)$$

onde f é o fator de atrito, N o número de linhas de tubos em fluxo cruzado e v , a velocidade de fluxo cruzado, baseada na menor área de passagem.

Conservação do momentum y :

$$\begin{aligned}
& p_i^{j+1,k} - p_i^{j,k} + \frac{\rho}{g_c} \left[\left(\frac{v_i^{j+1,k} + v_i^{j,k}}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_i^{j,k} + v_i^{j-1,k}}{2} \right)^2 \right. \\
& + \frac{L_y^{j,k}}{\Delta x_k} \left(\frac{u_{i+1}^{j,k} + u_{i+1}^{j+1,k}}{2} v_i^{j,k} - \frac{u_i^{j,k} + u_i^{j+1,k}}{2} v_{i-1}^{j,k} \right) \\
& \left. + \frac{f_y N_y^{j,k}}{2} (v_i^{j,k})^2 \right] = 0 \tag{5}
\end{aligned}$$

Conservação do momentum z:

$$\begin{aligned}
& p_k^{j,k+1} - p_k^{j,k} + \frac{c}{g_c} \left[\left(\frac{w_i^{j,k+1} + w_i^{j,k}}{2} \right) - \left(\frac{w_i^{j,k} + w_i^{j,k-1}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \frac{L_z^{j,k}}{\Delta x_i} \left(\frac{u_{k+1}^{j,k} + u_{k+1}^{j,k+1}}{2} w_i^{j,k} - \frac{u_i^{j,k} + u_i^{j,k+1}}{2} w_{i-1}^{j,k} \right) \\
& + \frac{f_z N_z^{j,k}}{2} (w_i^{j,k})^2 \Big] = 0 \tag{6}
\end{aligned}$$

Equações de condições de contorno são escritas utilizando a distribuição simétrica das velocidades u e das pressões p em duas chicanas consecutivas. Também são escritas duas equações para fornecer a vazão total e o nível da pressão.

O sistema de equações algébricas não-lineares, formado pelas equações de conservação e de condições de contorno, é resolvido através de soluções sucessivas do sistema linearizado. Utilizou-se a subrotina SIMQ da IBM, que usa a eliminação de Gauss, na solução do sistema linearizado. Aproximadamente 10 iterações foram necessárias para uma convergência dentro de $\pm 1\%$ das velocidades u . A solução fornece as pressões p e as velocidades u , v e w entre duas chicanas.

3. Comparações dos resultados experimentais e calculados

Dados de dois trocadores de calor foram utilizados para comparações.

Primeiro foram obtidos experimentalmente as distribuições de velocidades e pressões em um trocador de calor de "plexiglass", operando com um fluxo turbulento e isotérmico de água à pressão atmosférica e temperatura ambiente [5]. Esse trocador tinha uma seção transversal que representa a metade de um hexágono, com 63,5 tubos acrílicos de .504" de diâmetro externo em arranjo triangular. Ao contrário das unidades comerciais, as chicanas foram ajustadas à carcaça para se impedir o fluxo entre a chicana e a carcaça. Foi utilizado um diâmetro de .540" nos furos das chicanas, com espaçamentos de 4", 6" e 9" entre chicanas que foram construídas de placas soldadas nos grupos de pequenos tubos espaçadores que se estendem por toda a seção transversal do trocador. Devido a essa incomum configuração, os fatores de atrito para a chicana e para os espaçadores na janela, utilizados no modelo numérico, foram obtidos através de medidas de perda de carga e velocidade em equipamentos de teste para simulação dessas condições.

Os dados consistem de perfis axiais de pressões médias superficiais para 50 tubos entre duas chicanas e através da chicana e de linhas de fluxo visuais em todas as faces do trocador para espaçamentos entre chicanas de 4", 6" e 9" e para vazões de 200 e 300 gal/min. Os tubos para as medidas de pressão foram feitos com 12 furos equidistantes de .012" de diâmetro perfurados em toda a circunferência. As linhas de fluxo foram obtidas através de trajetória de bolhas de ar introduzidas na água de escoamento.

O trocador foi modelado em 15 sub-canais e 5 níveis, resultando em 90 volumes de controle. Os valores experimentais e calculados da perda de carga por chicana são comparados na Tabela 1. Nota-se que os desvios estão dentro de erros experimentais.

Tabela 1

Perda de carga por chicana (Δp) Geometria Hexagonal

Espaçamento entre chicanas (polegada)	Vazão (gal/min)	Δp experimental (p.s.i.)	Δp calculada (p.s.i.)	Desvio (%)
4	200	4.05	4.29	+5.9
4	300	8.78	9.37	+6.7
6	200	3.98	4.18	+5.0
6	300	8.62	9.12	+5.8
9	200	4.16	4.20	+1.0
9	300	8.50	9.13	+7.4

Os resultados da Figura 2 são para 6" de espaçamento entre as chicanas e uma vazão de 200 gal/min. A Figura 2-a mostra a comparação de vetores resultantes de velocidade para os sub-canais adjacentes à diagonal com as linhas de fluxo na fase diagonal do trocador. A dimensão dos vetores, proporcional à velocidade, ilustra a aceleração do fluido da chicana para a janela e a desaceleração da janela para a chicana.

Na Figura 2-b são comparadas as porcentagens experimentais de vazão para cada sub-canal através da chicana e de janela com os valores calculados, obtidos de dados de perda de carga na chicana e na janela, combinados com dados de fatores de atrito. Nota-se que as linhas de fluxo visuais e a distribuição de vazões foram corretamente previstas.

A Figura 2-c compara os perfis de pressão normalizados de uma janela para a chicana e a Figura 2-d de uma chicana para uma janela, para sub-canais adjacentes à diagonal. O modelo prediz corretamente o aumento de pressão devido à desaceleração (Figura 2-c) e a queda de pressão devido à aceleração (Figura 2-d).

O outro trocador de calor modelado tinha uma seção transversal retangular (5,38" x 2,6") com 12 tubos, 2 espaçamentos entre as chicanas e 2 tamanhos de janela, e foi também operada com fluxo isotérmico de água nas condições atmosféricas [9]. Ao contrário do primeiro, ele tinha uma grande folga entre a chicana e a carcaça. Os dados utilizados

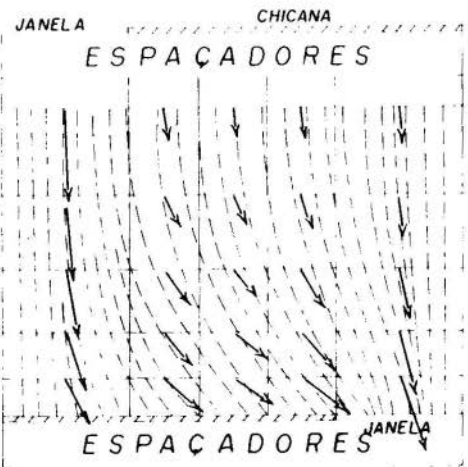


Fig. 2 - 0

		CALCULADO			EXPERIMENTAL
JANELA		CHICANA		JANELA	
20,42	3,9	4,06	4,49	8,30	
19,88	3,66	4,17	4,46	8,16	
13,66	3,92	4,18	4,50	5,55	
12,26	3,72	3,98	4,40	5,34	
7,94	4,95	5,21	5,63	3,17	
7,05	4,05	5,15	5,50	2,08	

Fig. 2 - b

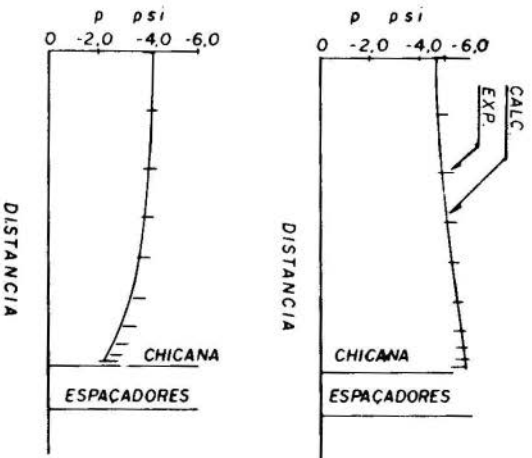


Fig. 2 - c

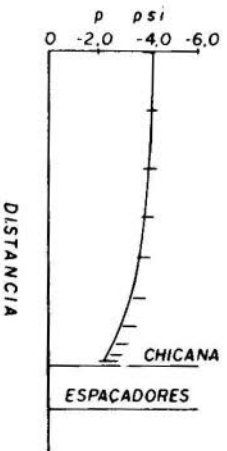


Fig. 2 - d

Figura 2 - Comparação dos resultados

consistiram de medidas de perda de carga por chicana para todas as alternativas geométricas mencionadas. Ele também foi modelado com 15 sub-canaís e 5 níveis. Os resultados de perda de carga por chicana são dados na Tabela 2.

Tabela 2
Perda de carga por chicana (Δp) Geometria retangular

Geometria	Espaçamento entre chicanas (polegada)	Comprimento da janela (polegada)	Δp experimental (polegada de água)	Δp calculada (polegada de água)	Desvio (%)
1	2-5/8	2.27	4.5	3.8	-15.6
2	2-5/8	1.398	4.83	4.98	+ 3.1
3	2	2.279	6.0	4.7	-21.7
4	2	1.395	6.12	5.88	- 3.9

Nota-se uma boa concordância entre os valores de perda de carga experimental e calculada para as geometrias 2 e 4, que por sinal, representam trocadores de calor bem projetados, ou seja, com média abertura de chicanas e média distância entre as chicanas. Os valores calculados de Δp estão abaixo dos valores experimentais para geometrias 1 e 3 onde a abertura grande da janela provoca turbulências e consequentemente uma perda de carga adicional, que o modelo não pode calcular.

4. Conclusões

O modelo desenvolvido permite a obtenção das distribuições de velocidades e pressões em um trocador de calor de carcaça e tubos com chicanas segmentadas. O método aplicado a dois trocadores de calor, reproduziu corretamente os resultados experimentais e poderia ser utilizado para o cálculo da perda de carga no projeto das unidades comerciais. A distribuição de velocidades, fornecidas pelo método, pode ser utilizada na equação de energia do fluido de carcaça para a obtenção da distribuição de temperaturas [4].

Bibliografia

- [1] Palen, J.W., e Taborek, J., Solution of Shell Side Flow Pressure Drop and Heat Transfer by Stream Analysis Method, Chem.Eng.Symp.Ser., n° 92, Vol.75(1971).
- [2] Bell, K.J., Exchanger Design Based on Delaware Research Program. Petro/Chem.Eng. (1960).
- [3] Wheeler et al. Cobra IV-I: An Interim Version of COBRA for Thermal-Hydraulic Analysis of Rod Bundle Nuclear Fuel Elements and Cores. BNWL-1963(1976).
- [4] Benedito, D.B.F., e Konuk, A.A., Distribuição de Temperatura em um Trocador de Calor de Carcaça e Tubos "U" com Chicanas Segmentadas. V COBEM 1979.
- [5] Konuk, A.A., Pressure and Flow Distribution in the Sub-Channels of Rod Bundles with Segmental Baffles. Tese Ph.D., Univ. California, E.U.A., (1975).
- [6] Rehme, K., Pressure Drop Performance of Rod Bundles in Hexagonal Arrangements. Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol. 15, pp.2499-2517 (1972).
- [7] Sullivan, F.W. e Bergelin, O.P., Heat Transfer and Fluid Friction in a Shell-and-Tube Heat Exchanges with a Single Baffle. Chem.Eng. Progress Symposium Series, n° 18, vol. 52, (1956).
- [8] Parker, R.O. e Mol., Y.I., Shell Side Pressure Loss in Baffles Heat Exchanges, British Chemical Eng., Vol. 13, pp.366-368 (1968).
- [9] Goldschmidt, D.H., The Interaction Friction Factors in Cross-Flow Baffled Shell and Tube Heat Exchanges, Tese de Ph.D., Universidade de New York, (1969).



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER

N^o D-25

P.P. 321 - 330

MODELO NUMÉRICO DE ISOLAÇÃO TÉRMICA INTERNA TIPO FIBRA
EM DUTOS DE GÁS QUENTE

Armin Nelson Urban Weiter
Pesquisador, IFEN
USP - São Paulo - SP - Brasil

Ahmet Aydin Konuk
Prof. Colabor.- Dento. de Eng. Química
UNICAMP - Campinas - SP - Brasil

SUMÁRIO

Foi desenvolvido um modelo numérico para o estudo da convecção natural no isolamento térmico interno tipo fibras, para dutos cilíndricos nas posições horizontal e vertical. As distribuições de temperaturas e velocidades obtidas, permitem o cálculo da condutividade térmica efetiva global e ao longo da parede fria, que são necessários para o projeto do isolamento. O número de Nusselt global, foi correlacionado com o número de Rayleigh, para uma rápida avaliação.

SUMMARY

A numerical model has been developed to study natural convection in fibrous internal insulation for cylindrical ducts in horizontal and vertical positions. The computed velocity and temperature distributions yielded local cold wall and overall effective thermal conductivities, both necessary in the design of the insulation. The overall Nusselt number has been correlated with Rayleigh number for an immediate evaluation.

1. Introdução

Isolamento térmico em dutos, é normalmente utilizado para diminuir a perda de calor, sendo colocado externamente ao mesmo. Caso o fluido esteja nas condições de alta pressão e temperatura, além de diminuir a perda de calor, é necessário proteger a parede do duto da alta temperatura. Isto é conseguido, utilizando-se isolamento térmico interno, onde o material isolante é colocado entre o duto principal e um duto interno coaxial, conforme figura 1.

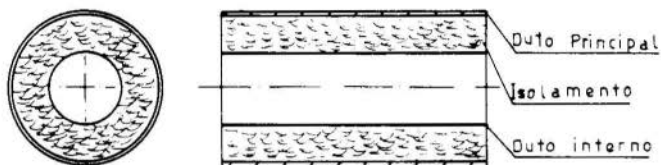


Figura 1 - Duto Isolado internamente

Este tipo de isolamento, está sendo estudado, para dutos de gás quente dos reatores nucleares a gás a alta temperatura (HTGR), onde o fluido se encontra a pressão e temperatura da ordem de 40 atm e 950 °C.

Foram testados em laboratório, vários tipos de materiais para isolamento interno [2], sendo que o isolante composto de fibras de material resistente a alta temperatura (Kaowool), apresentou maior viabilidade de utilização.

No isolamento externo, a pressão no interior do isolamento, é a atmosférica, enquanto que no interno, é a do gás, para que o duto interno, que suporte a alta temperatura, não fique submetido a esforços de pressão.

A combinação de alta pressão e alta diferença de temperatura (≈ 500 °C) entre o lado quente e frio da camada isolante, pode resultar no surgimento de convecção natural do gás, dentro do isolamento. Esta convecção natural, deteriora o efeito isolante do gás, que é ótimo quando este está parado.

Para o estudo da convecção natural no isolamento, foram feitos modelos numéricos, somente para geometrias retangulares de interesse no HTGR [1]. Estes modelos atenderam satisfatoriamente aos resultados

experimentais, mostrando a validade da formulação usada. Não se encontra porém, na literatura, modelos para geometrias circulares.

O objetivo deste trabalho, é elaborar um modelo para o estudo da convecção natural no isolamento térmico em dutos circulares, carregando gás a alta pressão e temperatura, nas posições, horizontal e vertical, seguindo uma formulação similar a da utilização para geometrias retangulares.

Experiências [3] mostram, que o isolamento tipo fibras se comporta como um meio poroso. Para este meio, são escritas as equações de conservação de massa, momentum e energia, que são resolvidas pelo método das diferenças finitas. Obtem-se as distribuições das temperaturas e velocidades no isolamento, sendo então, possível, a avaliação do seu desempenho.

As equações de conservação usadas, bem como os resultados calculados, são apresentados nos itens seguintes. O trabalho com maiores detalhes se encontra em [4].

2. Formulação das Equações, Condições de Contorno e Método de Solução

Para meio poroso, a equação de conservação de momentum, é simplificada para a lei Darcy, i.é, o gradiente de pressão, é função linear de velocidade. Assume-se, que a temperatura local da fibra é a mesma da do gás.

Cilindro Horizontal

É considerado para a formulação, metade da secção transversal do cilindro (conforme Figura 2), devido a simetria existente.

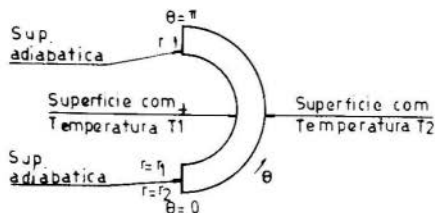


Figura 2 Geometria do cilindro horizontal considerada no modelo

O equacionamento é feito em coordenadas polares r e θ . A direção axial não é considerada, pois as distribuições de temperaturas e velocidades, não se alteram nesta direção.

A equação de conservação de massa é dada por :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) = 0 \quad (1)$$

onde, ρ é a densidade do gás e v a sua velocidade no isolamento.

A equação de conservação de momentum, i.é., a lei Darcy, é dada na direção radial, por :

$$v_r = \frac{K}{\mu} (\rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r}) \quad (2)$$

e na direção angular por :

$$v_\theta = \frac{K}{\mu} (\rho g_\theta - \frac{\partial p}{r\partial \theta}) \quad (3)$$

onde, K é a permeabilidade das fibras do isolamento, μ a viscosidade dinâmica do gás, g a aceleração da gravidade e P a pressão do gás.

É definida uma função de corrente, de modo que satisfaça a equação de massa, ela é dada por :

$$v_r = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (4)$$

$$v_\theta = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5)$$

Combinando as equações 2 e 3, eliminando a pressão e considerando a definição da função corrente (4 e 5), a equação da conservação de momentum resulta em :

$$\frac{1}{rK} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial r} (rv \frac{\partial \psi}{\partial r}) = g(\cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + r \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial r}) \quad (6)$$

onde, ν é a viscosidade cinemática do gás ($\nu = \mu/\rho$)

A equação de conservação de energia, considerando a função corrente, é dada por :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (C_p T) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (C_p T) - \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta}) = 0 \quad (7)$$

onde T é a temperatura, C_p o calor específico a pressão constante do gas e λ o coeficiente de condutividade térmica do gás mais fibras .

No contorno, a função corrente é nula, as temperaturas de parede quente e fria são dadas e para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, não há fluxo de calor, devido a simetria ($\partial T / \partial \theta = 0$)

Cilindro Vertical

As equações de conservação e condições de contorno, são formuladas para isolamento entre dois cilindros coaxiais (Figura 3) .

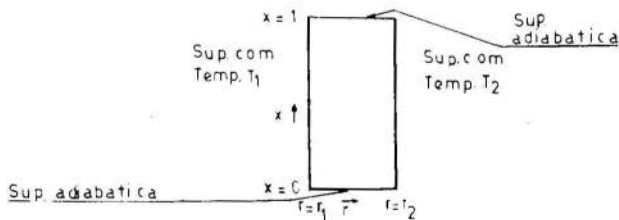


Figura 3 Geometria do cilindro vertical considerada no modelo

O equacionamento é feito em coordenadas cilíndricas r e x . Não é considerada a direção angular, uma vez que as velocidades e temperaturas não se alteram nessa direção .

A equação de conservação de massa é dada por :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = 0 \quad (8)$$

A equação de conservação de momentum, i.é, a Lei de Darcy, é dada, na direção radial e axial por :

$$v_r = \frac{\kappa}{\mu} (\rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r}) \quad (9)$$

$$v_x = \frac{K}{\mu} (\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x}) \quad (10)$$

A função corrente é definida por :

$$v_r = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11)$$

$$v_x = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (12)$$

Procedendo-se analogamente ao cilindro horizontal, a equação de conservação de momentum resulta em :

$$\frac{1}{rK} \frac{\partial}{\partial x} (v \frac{\partial \psi}{\partial x}) + \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial r} (\frac{v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}) = g \frac{\partial p}{\partial r} \quad (13)$$

A equação de conservação de energia, considerando a função corrente, é dada por :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} (c_p T) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} (c_p T) - \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial T}{\partial r}) - r \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) = 0 \quad (14)$$

As condições de contorno, são análogas as do cilindro horizontal, sendo que o fluxo de calor é nulo para $x=0$ e $x=L$ ($\partial T / \partial x = 0$)

Método e Solução Numérica

As equações 6,7,13 e 14 que são equações diferenciais parciais não lineares, são transformadas em dois sistemas de equações algébricas não lineares pelo método das diferenças finitas. Estas, são resolvidas sucessivamente, por programas e Fortran [4], uma vez que é necessário a solução da equação 6 (12), obtendo ψ , para linearizar a equação 7 (13) e a solução da equação 7 (13), obtendo T , para linearizar a equação 6 (12). As soluções sucessivas dos sistemas linearizados é feita, até que as temperaturas convirjam, dentro de um critério de convergência, obtendo-se a distribuição de ψ e T dentro da isolação. É utilizado para a solução dos sistemas linearizados, uma subrotina de eliminação de Gauss, por técnica de matrizes esparsas [5].

3. Resultados

Os programas foram executados, para cilindros na posição horizontal e vertical, considerando a presença de 1, 2 e 3 cilindros internos equidistantes. Os fluidos utilizados no modelo foram, hélio e ar variando as pressões de 1 a 100 atm, temperaturas de 50 a 800  C e permeabilidade de 10^{-5} a 10^{-12} m².

As fun es corrente, bem como a distribui o de temperaturas para casos t picos, são mostrados nas Figuras 4 e 5.

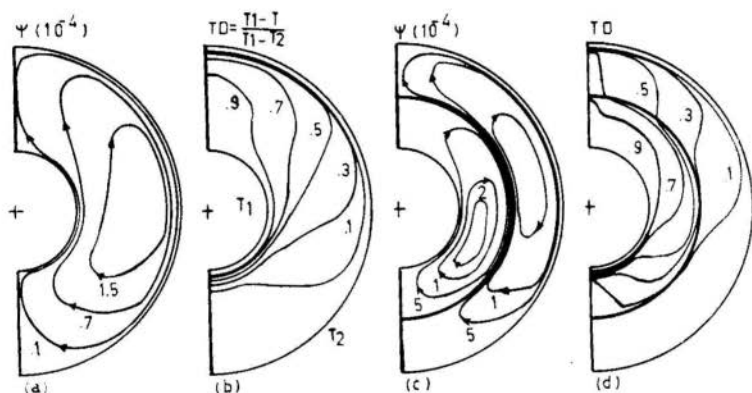


Figura 4 - Cilindro horizontal, linhas de corrente e temperaturas a dimensionais ($Ra = 500$, $Nu = 3$)

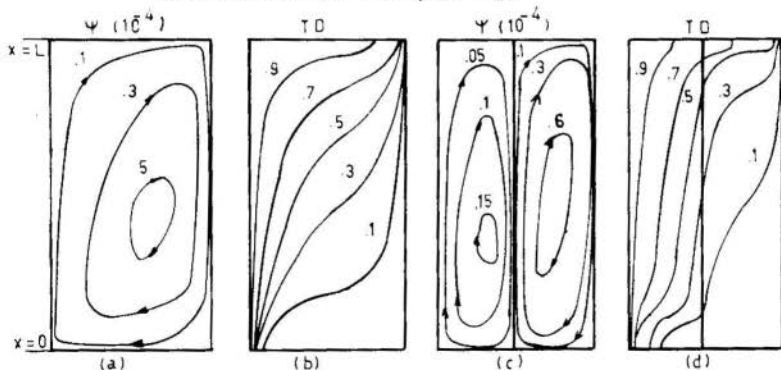


Figura 5 - Cilindro vertical, linhas de corrente e temperaturas a dimensionais ($Ra=498$, $Nu=2.9$). Escala na radial,   7 vezes a da vertical.

O gás dentro do isolamento, flui para cima ao longo da parede quente e para baixo, ao longo da parede fria (Figuras 4-a,c e 5-a,c) conduzindo energia do lado quente para o frio, o que deteriora o efeito isolante. As isoterms (Figuras 4-b e 5-b) são consideravelmente distorcidas em relação a condução (para condução as isoterms são concêntricas) .

Considerando dois cilindros internos (Figuras 4-c e 5-c), a convecção é confinada entre eles, o que contribui para a melhoria do efeito isolante. As isoterms (Figuras 4-d e 5-d) são menos distorcidas, aproximando-se do caso de condução. Aumentando o número de cilindros internos, observou-se que o efeito isolante tende ao ótimo.

A condutividade térmica efetiva λ_{ef} é definida por :

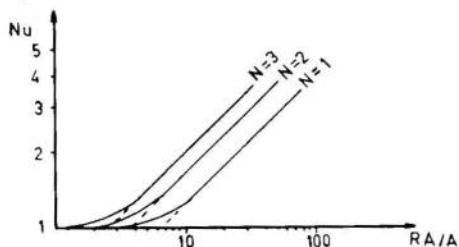
$$\lambda_{ef} = \frac{Q \ln(r_2/r_1)}{(T_1 - T_2) \pi} \quad (15)$$

para cilindro horizontal e para cilindro vertical é :

$$\lambda_{ef} = \frac{Q \ln(r_2/r_1)}{2 (T_1 - T_2) L \pi} \quad (16)$$

onde Q é o fluxo de calor através da isolação .

O número de Nusselt, definido por $Nu = \lambda_{ef}/\lambda$, foi correlacionado com o número de Raleygh/A, onde o número de Rayleigh é definido por : $Ra = g \cdot (T_1 - T_2) \cdot d \cdot K \cdot \rho / \alpha \cdot \rho$, onde, d é a espessura de isolamento entre os cilindros, ρ o coeficiente térmico de expansão volumétrica a pressão constante e α a difusidade térmica. "A" é definido por $L/(r_2 - r_1)$ para cilindro vertical e $\pi (r_2 + r_1)/(r_2 - r_1) \cdot 2$ para o horizontal. A correlação é mostrada na Figura 6 .



.Figura 6 Correlação entre Nu e Ra/A, para N cilindros internos.

Para valores de Ra/A menores que 10,6,4 para 1,2 e 3 cilindros internos respectivamente, não ocorre a convecção. Para valores maiores que estes, a correlação obedece a equações do tipo $Nu=c \cdot (Ra/A)^n$, onde n é .5 e c , .4, .5, .6 para 1,2 e 3 cilindros internos.

Para valores de Ra maiores que 2000, observou-se a divergência nas temperaturas.

A variação local do número de Nusselt (Nu_{loc}), na direção angular para cilindro horizontal e ao longo do comprimento para vertical, é mostrada na figura 7.

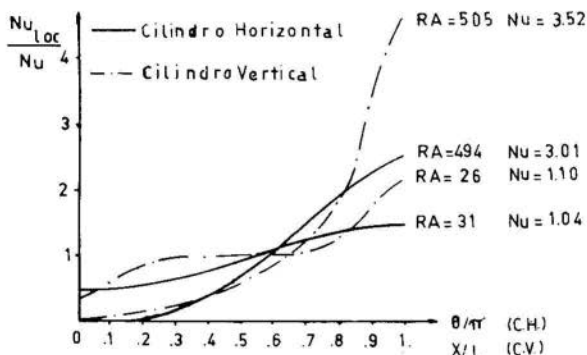


Figura 7 Variação local do número de Nusselt sobre a parede fria.

A relação Nu_{loc}/Nu , é definida por : $Nu_{loc}/Nu = q_{loc}/Q$, onde q_{loc} é obtido pelo produto da condutividade térmica local pelo gradiente local da temperatura na parede fria. Observa-se que a variação da relação aumenta ao longo da parede fria.

4. Conclusão

Foi obtido um modelo numérico, que permite o cálculo das distribuições de temperatura e velocidades, para o estudo da convecção natural em isolamento térmico interno tipo fibra, em dutos cilíndricos conduzindo gás a alta pressão e temperatura, na posição horizontal e vertical.

A correlação entre o número de Nusselt e o de Rayleigh, é parti

cularmente útil, pois permite uma avaliação imediata da eficiência da isolamento, sem utilizar o modelo numérico.

A distribuição de temperaturas e a variação de Nu_{loc} obtidos pelo modelo, fornecem dados para uma avaliação detalhada de isolamento, evitando testes experimentais, que levam muito tempo para fornecer resultados, além de terem um custo muito elevado.

Para tanto, é necessário termos conhecimento da permeabilidade K e da condutividades térmica das fibras, contudo, estes valores podem ser obtidos com experiencias simples para o isolamento de interesse particular [6].

Bibliografia

- [1] Baxi, C.B. et alii., Permeation flow and heat transfer in the HTGR thermal barrier. Philadelphia, Pa. American Society of Mechanical Engineers, (1974). (ASME paper 74-WA/HT-9)
- [2] Broeckerhoff, P., Insulation system for the hot gas duct of high temperature reactor and their behavior at high pressure and temperature, J. of Nonequilibrium thermodynamics , (1978)
- [3] Jannot, M. et alii., Convection en milieux poreus. Int. J. Heat Mass Transfer, Oxfort, 16:395-410, (1973)
- [4] Welter, A., Modelo numérico de isolamento térmica interna tipo fibra, em dutos de gás quente, Tese de Mestrado, IPEN, (1979)
- [5] Rodriguez, F.A., Subrotinas em FORTRAN, para solução de sistemas de equações algébricas lineares, Tese de Mestrado, IPEN, (1979)
- [6] Skoda, S., Estudo experimental da permeabilidade e da condutividades térmica para isolamento térmico interno tipo fibra, Tese de Mestrado, IPEN, (1979)

AN AIS

PROCEEDINGS



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO TECNOLÓGICO
TECHNICAL PAPER

N.º DT-09

P.P. 331 340

CÁLCULO DO FLUXO TÉRMICO ATRAVÉS DE PAREDES DE FORNOS

Meyse Szajnbok

Prof. Assist. Dr. - Deptº Eng. Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de S.P.

Demetrio Elie Baracat

Prof. Instrutor
Esc. de Eng. Mauá - Instituto Mauá de Tecno-
logia.SUMÁRIO

É exposto um método iterativo de cálculo do fluso térmico, com uso do computador, a partir da metodologia proposta por R.H. Heilmann (ASTM) e cuja versão em unidades métricas foi sugerida por O.J. Whittemore Jr., em 1976. São resolvidos alguns exemplos e discutidos os resultados. São apresentadas algumas possíveis linhas de desenvolvimentos futuros.

SUMMARY

An iterative method is shown to estimate heat flow, with computer aid, using the method proposed by R. H. Heilmann (ASTM) and its version for metric units suggested by O.J. Whittemore Jr., in 1976. Some examples are solved and the results discussed. Some possible lines for future development are, also, presented.

1. Introdução

A previsão, controle e redução de perdas em instalações térmicas aumentaram de importância devido à crise de energia. Por exemplo, em muitas atividades industriais a análise do fluxo de calor através das paredes de fornos pode ser relevante na definição de medidas para economia de combustível.

Um dos procedimentos para o cálculo das perdas através das paredes de fornos foi proposto em 1932 por R.H.Heilmann, e vem sendo republicado pela ASTM(1). A adaptação desse procedimento para unidades do Sistema Internacional, bem como sua extensão para paredes cilíndricas foi apresentada em 1976, por O.J.Whittmore Jr. (2). Essa adaptação será apresentada na secção 2 deste artigo.

O método, além dos cálculos fastidiosos que requer, é reiterativo: por isto, torna-se interessante implantá-lo na forma de um programa de computador. Esse programa oferecerá ainda mais duas vantagens adicionais: a primeira é fornecer uma sub-rotina para programas mais complexos (o de otimização de custos, por exemplo), e a segunda, é possibilitar o exame rápido de muitas alternativas para um dado problema. Esse programa é tratado na secção 3. A listagem do programa pode ser vista na referência (3).

Na secção 4 são apresentados alguns exemplos e uma análise dos resultados obtidos. Finalmente, na secção 5 são apresentadas as conclusões e indicadas algumas possíveis linhas para futuros desenvolvimentos.

2. O método de R.H.Heilmann

Admite-se no método de R.H.Heilmann que o fluxo de calor pelas paredes do forno se dá em regime estacionário e unicamente por condução, sendo desconsiderados efeitos devidos a infiltração, pressão interna no forno, portas, juntas abertas, etc. As paredes do forno podem ser constituídas por tijolos refratários, refratários isolantes e isolantes térmicos. Supõe-se conhecida a lei de variação da condutibilidade térmica dos materiais com sua temperatura média, como mostrado na figura 1.

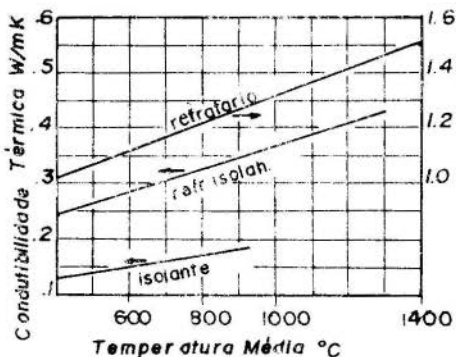


Fig. 1 - Condutibilidade térmica

A transmissão de calor da superfície externa do forno para o meio ambiente é feita por convecção e por radiação. Influem nesse processo as temperaturas e natureza das superfícies do forno e dos objetos no ambiente; as condições de circulação do ar sobre a parede, etc.

São apresentadas a seguir as fórmulas para o cálculo das diversas parcelas envolvidas.

No que segue serão designados por:

T_1 = temperatura da superfície externa (K).

T_{ar} = temperatura do meio ambiente (K).

As perdas por radiação para o meio ambiente são calculadas pela fórmula de Stefan-Boltzmann:

$$q_r = 5,77 \times 10^{-8} \epsilon (T_1^4 - T_{ar}^4) \quad (1)$$

onde:

q_r = fluxo de calor por radiação (W/m^2)

ϵ = emissividade da superfície externa, dependente do material.

As perdas por convecção natural serão calculadas pela fórmula:

$$q_n = 3,17C \left(\frac{2}{T_1 + T_{ar}} \right)^{0,18} (T_1 - T_{ar})^{1,27} \quad (2)$$

onde:

q_n = fluxo de calor por convecção natural (W/m^2)

C = fator que depende da forma da superfície; 1,39 para paredes verticais e 1,79 para cobertura do forno.

Dada a emissividade da parede externa do forno e a temperatura do ambiente, as fórmulas (1) e (2) podem ser combinadas. O resultado é apresentado na figura 2 ($\epsilon = 0,95$).

No caso de convecção forçada, as perdas por convecção serão calculadas pela fórmula:

$$q_f = (5,68 + 4,19V)(T_1 - T_{ar}) \quad (3)$$

onde:

q_f = fluxo de calor por convecção forçada (W/m^2)

V = velocidade do ar (m/s)

Fixada a temperatura do ar e a emissividade, pode-se combinar as fórmulas (1) e (3). O resultado é apresentado na figura 3 ($\epsilon = 0,95$; $T_{ar} = 293,15$ K).

Para valores diferentes da emissividade ou da temperatura do ar, novos gráficos devem ser construídos.

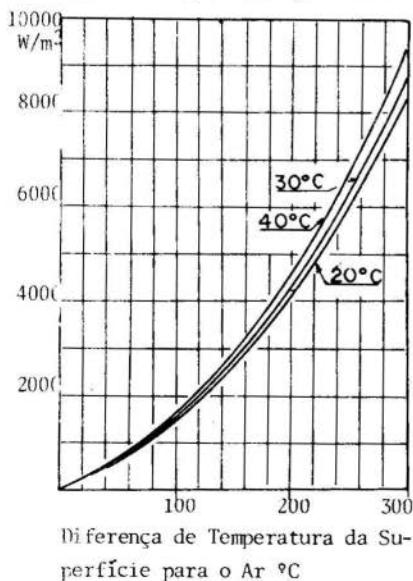


FIG. 2 - Fluxo Térmico em Paredes Verticais

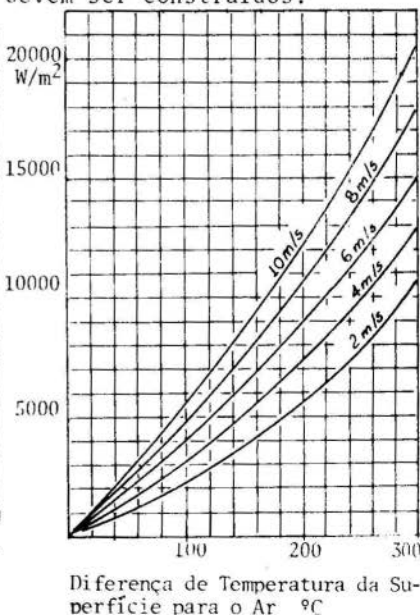


FIG. 3 - Fluxo Térmico em Função da Velocidade do Ar

- condutibilidade térmica correspondente.
- c) calcular o fluxo por condução através das paredes - fórmulas (4) ou (5);
 - d) comparar o fluxo acima com a perda por radiação e convecção (figura 2 ou 3) que ocorreria quando a temperatura da superfície externa fosse a admitida em a);
 - e) se as duas perdas são iguais e se as temperaturas médias das diversas camadas e as correspondentes condutibilidades térmicas forem compatíveis com os fluxos térmicos, o processo está completo; caso contrário, reitera-se o procedimento.

3 - Programa para o cálculo do fluxo térmico

Como se pode imaginar, são bastante enfadonhos os cálculos que devem ser feitos com as fórmulas de (1) a (5). Mesmo se dispendo de gráficos do tipo da figura 2 ou 3 - construídos para várias emissividades e temperaturas do ar - reiteração das estimativas de temperaturas e das condutibilidades térmicas, e o recálculo do fluxo térmico é pelo menos desagradável. Quando se necessita mudar um dos dados do problema, todo o procedimento deve ser repetido. O programa desenvolvido poupa ao projetista tão tedioso labor.

O programa foi escrito em Fortran IV. Num computador Burroughs 6 700, o tempo de IO é de 1,441 segundos e o tempo de CPU para processar um problema é de cerca de 1,02 segundos.

O programa incorpora leis de variação linear da condutibilidade térmica com a temperatura média (e facilmente podem ser incorporadas outras), além de uma sub-rotina para resolver por dicotomia a equação:

$$q_{\text{rad}} + q_{\text{conv}} - q_{\text{cond}} = 0 \quad (6)$$

O procedimento adotado está esquematizado na página seguinte.

Para paredes compostas de n camadas planas, a fórmula para o cálculo do fluxo por condução é:

$$q_c = \frac{T_n - T_1}{\frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2} + \dots + \frac{L_n}{K_n}} \quad (4)$$

onde:

q_c = fluxo de calor por condução (W/m^2)

T_n = temperatura da face interna do forno (K)

L_i = espessura da camada i (m)

K_i = condutibilidade térmica do material i ($W/m \cdot K$)

Para paredes cilíndricas concêntricas vale:

$$q_c = \frac{T_n - T_1}{\sum_{i=1}^n \frac{r_o}{K_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}} \quad (5)$$

onde:

r_o = raio do cilindro externo (m)

r_n = raio do cilindro interno (m)

r_i = raio interno da i^{a} camada (m)

Cada parcela do denominador das fórmulas (4) e (5) é chamada resistência térmica da i -ésima camada.

No procedimento em exame consideram-se conhecidos: a temperatura da superfície interna do forno; a temperatura do ar ambiente; a emissividade da superfície externa do forno; a condutibilidade térmica e a espessura dos materiais que formam as camadas da parede do forno; e no caso da convecção forçada, a velocidade do ar.

O esquema do método de Heilmann é o seguinte:

- adotar temperaturas para as interfaces das camadas e para a face externa do forno;
- calcular as temperaturas médias de cada camada e a

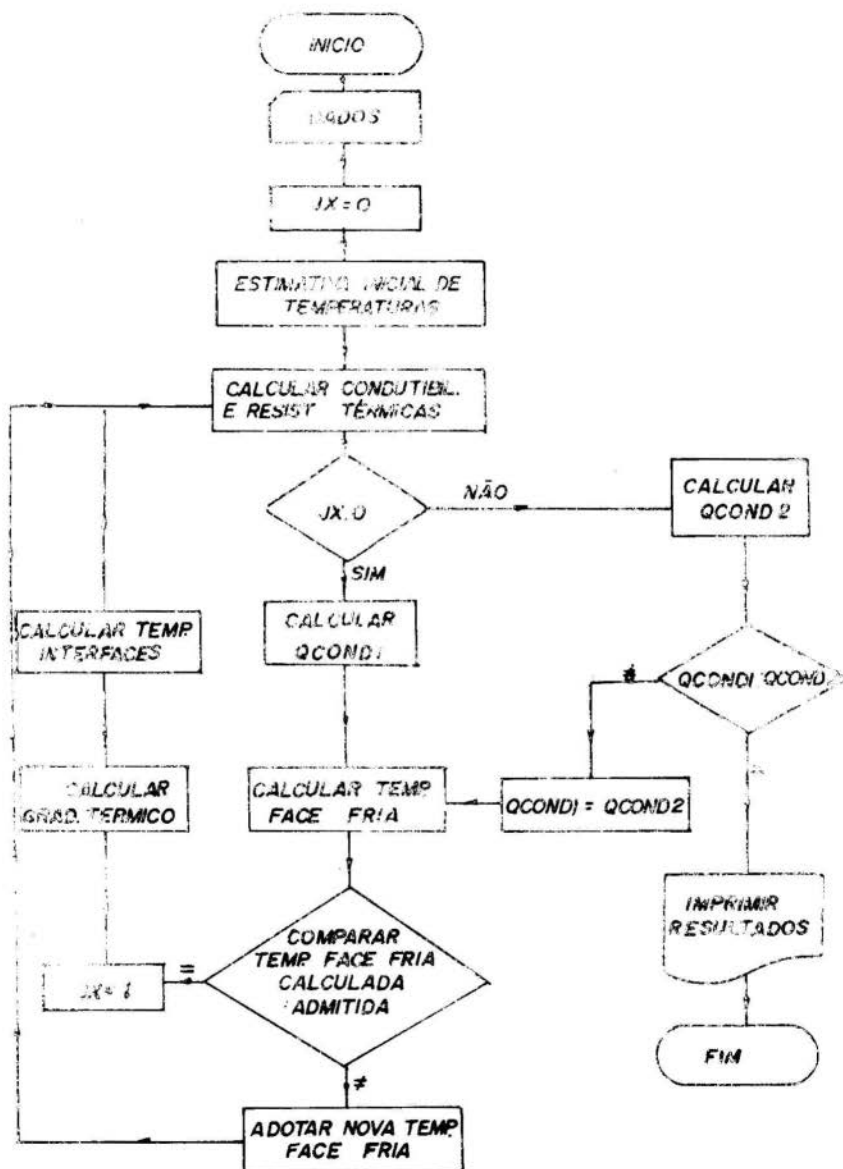


Figura 4. Esquema do Programa

Para a estimativa inicial das temperaturas adota-se para a face externa a temperatura do ar; para as interfaces de cada camada, a partir da externa, adota-se a média entre a temperatura da sua face externa e a temperatura da face interna do forno.

4. Exemplos e Resultados

Para testar o programa e comparar resultados resolveram-se três exemplos constantes de (2) apresentados a seguir:

1º exemplo

Dados: Forno de faces planas, uma camada de tijolo refratário de 229mm, uma camada de tijolo isolante de 114mm, uma camada de isolante de 51mm; temperatura da face quente 1773 K, face externa de emissividade $\epsilon = 0,95$ na temperatura de 293 K e exposta a ar que flui a 4m/s; $C = 1,39$ (parede vertical)

<u>Resultados</u>	<u>do programa</u>	<u>da ref. (2)</u>
face interna do tijolo isolante	1523,8 K	1522 K
face interna isolante	1013,3 K	998 K
face externa	346,7 K	354 K
fluxo térmico	1646 W/m ²	1652 W/m ²

2º exemplo

Dados: Forno de paredes cilíndricas, com diâmetro interno 1000mm e com as espessuras: tijolo refratário: 120mm; tijolo isolante: 120mm; face interna a 1773 K, temperatura do ar 293 K; convecção natural ($C = 1,39$).

<u>Resultados</u>	<u>do programa</u>	<u>da ref. (2)</u>
face interna do tijolo isolante	1506,7 K	1508 K
face externa	438,2 K	439 K
fluxo térmico	2503 W/m ²	2485 W/m ²

3º exemplo:

Dados: Forno de paredes planas, tijolo refratário de 90mm ($K = 0,6$ W/mK, constante), temperatura da face interna 973 K, tijolo isolante de 120mm ($K = 1,0$ W/mK, constante), temperatura do ar 331K, velocidade do ar 4 m/s, $C = 1,39$.

<u>Resultados</u>	<u>do programa</u>	<u>da ref.(2)</u>
temperatura interna tijolo isolante	643,8 K	644,6 K
temperatura externa	380,4 K	381,9 K
fluxo térmico	2195,0 W/m ²	2195,2 W/m ²

Apresenta-se a seguir uma tabela com as maiores diferenças entre os resultados obtidos com o programa e os da referência (2), tanto de temperaturas como de fluxo térmico, bem como as suas correspondentes variações relativas.

	ΔTemp K	$\frac{\Delta \text{Temp}}{\text{Temp}} \cdot 100$ (%)	ΔFluxo W/m ²	$\frac{\Delta \text{Fluxo}}{\text{Fluxo}} \cdot 100$ (%)
Exemplo 1	-15,3	1,54	6	0,36
Exemplo 2	1,3	0,86	-18	0,72
Exemplo 3	1,5	0,39	0,2	-0,01

Pelo exame da tabela acima verifica-se que o programa é satisfatório, já que a maior discrepância entre temperaturas foi de 1,54% e do fluxo térmico foi de 0,72%.

5 - Conclusões

O programa satisfaz o objetivo a que se propõe, isto é, calcular o fluxo térmico através das paredes de um forno e determinar as temperaturas nas interfaces das camadas que o compõem, segundo o método do "Proposed Procedure for Calculating Heat Losses Through Furnace Walls" da ASTM. Como é inerente ao método, admitiram-se as hipóteses descritas no item 2 deste trabalho.

O procedimento pode ser aperfeiçoado levando-se em conta as dimensões do forno, existência de aberturas, etc. A análise do procedimento também sugere a elaboração de um método para cálculo do fluxo de calor a partir da temperatura dos gases e não do suposto conhecimento da temperatura da superfície interna do forno.

Bibliografia

- (1) Heilmann, R.M., Proposed Procedure for Calculating Heat Losses Through Furnace Walls. Annual Book of Standards, Part 13, pp. 798-804, (1972).
- (2) Whittmore Jr, O.J., Método para calcular as perdas através das paredes dos fornos. Revista Brasileira de Tecnologia, Vol. 7, pp. 119-125, (1976).
- (3) Baracat, D.E., Fluxo Térmico Através das Paredes de um Forno, Seminário DEM-EPUSP-1977.

ANALIS

PROCEEDINGS



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO TECNOLÓGICO
 TECHNICAL PAPER

N.^o DT-10 P.P. 341 - 350

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO TÉRMICO
DE UM FORNO

Bart Guido Arseen Gascon Laton
 Engenheiro Mecânico
 PROMEC SC Ltda.

SUMÁRIO

O trabalho mostra um método para simular matematicamente o comportamento térmico de um forno a alta temperatura e a sua carga regime transitório. O método é aplicado no caso de um forno com geometria determinada e dá como resultados a variação no tempo e no espaço da temperatura das paredes do forno e da carga.

SUMMARY

This paper exposes a method to simulate mathematically the thermal behaviour of a high temperature furnace, resulting in a temperature-field in time and space of the furnace walls and the load.

1. Introdução

O método estabelece um modelo matemático do comportamento térmico do forno e de sua carga. O modelo matemático consiste na simulação da transferência de calor por radiação dentro da câmara e da condução de calor nas paredes do forno e na carga.

A simulação da radiação na câmara do forno é feita pela teoria de intercâmbio de radiação térmica entre superfícies cinzentas, separadas por um meio não absorvente [1]. Isto é uma aproximação, porque o meio entre as superfícies, mesmo sendo ar, tem uma certa absorção da radiação, e porque nenhuma superfície é realmente cinzenta. Mesmo assim, o método é adequado para fornos a aquecimento elétrico.

A simulação da condução de calor nas paredes é feita pelo método de Schmidt [2], desprezando-se os efeitos da convecção no problema, pois se a temperatura do forno for superior a 1000°C , este erro será inferior a 1%.

Estas duas simulações são combinadas num ciclo iterativo que obtém as temperaturas das superfícies da carga e das paredes, e também as temperaturas nas paredes e na carga.

O resultado do método consiste em um campo de temperaturas no tempo e no espaço para qualquer forno de alta temperatura e para qualquer lei de variação da potência gerada no forno.

2. Descrição teórica do método utilizado

A teoria da transmissão por radiação de calor entre superfícies cinzentas tem como hipóteses iniciais:

a. Cada superfície é considerada isotérmica

Esta hipótese acarreta a divisão da câmara em N diferentes superfícies. Superfícies não isotérmicas são sub-divididas em partes consideradas isotérmicas.

b. As superfícies são cinzentas, i.é., a emissividade é igual à absorvidade e não dependem da temperatura.

c. Todas as superfícies refletem a radiação térmica

difusamente.

d. A radiosidade (i.é. a soma da energia emitida e refletida) de uma superfície é constante ao longo desta superfície.

A teoria considera dois tipos de superfícies :

- as superfícies identificadas pelos subscritos $1 \dots N_1$ nas quais a temperatura é prescrita.
- as superfícies identificadas pelos subscritos $N_1+1 \dots N$, nas quais o fluxo de calor é prescrito.

Para as superfícies $1 \dots N_1$, pode-se escrever :

$$B_i = \epsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \epsilon_i) \sum_{j=1}^N B_j \phi_{ij} \quad 1 \leq i \leq N_1 \quad (2.1)$$

com B_i : a radiosidade da superfície i (W/m^2)
 ϵ_i : a emissividade do material da superfície i
 σ : a constante de Stefan Boltzmann ($W/^\circ K^4 m^2$)
 T_i : a temperatura da superfície i ($^\circ K$)
 ϕ_{ij} : o fator de forma da superfície i até a superfície j

Os fluxos de calor nestas superfícies são dados por :

$$\frac{\dot{Q}_i}{F_i} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_i - 1} (\sigma T_i^4 - B_i) \quad 1 \leq i \leq N_1 \quad (2.2)$$

com \dot{Q}_i : a potência do calor dissipado por radiação (W)

F_i : a área da superfície i

Para as superfícies $N_1+1 \dots N$ pode-se escrever :

$$B_i = \frac{\dot{Q}_i}{F_i} + \sum_{j=1}^N B_j \phi_{ij} \quad N_1 + 1 \leq i \leq N \quad (2.3)$$

As temperaturas dessas superfícies serão dadas por :

$$\sigma T_i^4 = \frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i} \frac{\dot{Q}_i}{F_i} + B_i \quad N_1 + 1 \leq i \leq N \quad (2.4)$$

As fórmulas (2.1) e (2.3) constituem um sistema de equações algébricas, com B_i como incógnitas. Para resolver o sistema, precisar-se-á das temperaturas prescritas para as superfícies $1 \dots N_1$ e dos fluxos de calor prescritos

para as superfícies $N_1 + 1 \dots N$. A solução do sistema pode ser escrita da seguinte maneira :

$$B_i = \sum_{j=1}^{N_1} \psi_{ij} \sigma T_j^4 + \sum_{j=N_1+1}^N \psi_{ij} \frac{\dot{Q}_j}{F_j} \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.5)$$

com ψ_{ij} : um elemento da matriz Ψ , que é a inversa da matriz χ , que por sua vez é constituída por elementos tirados dos fatores ϕ_{ij} . Utilizando (2.2) e (2.4) obter-se-ã N_1 equações para calcular os fluxos de calor nas superfícies $1 \dots N_1$ e $N - N_1$ equações para calcular as temperaturas nas superfícies $N_1 + 1 \dots N$.

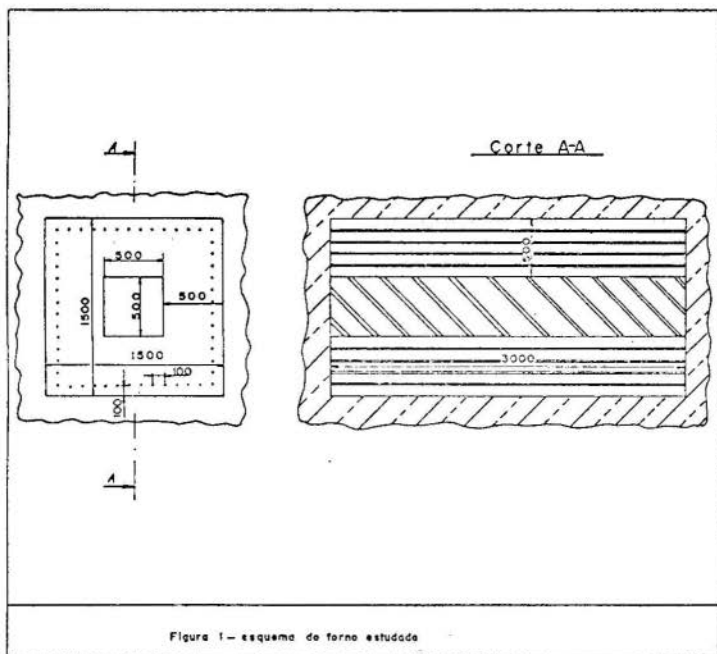
A condução do calor nas paredes e na carga é descrita pelo método de Schmidt. Este método descreve com boa precisão o regime transitório da condução nas paredes e na carga. Sabe-se que os corpos investigados pelo método deverão ser divididos em partes, e que cada parte será caracterizada pela temperatura do seu centro (temperatura do nó). Sobre cada parte da malha divisora serão aplicadas as leis de Fourier e da conservação de energia.

Todo o problema será reduzido agora em achar uma solução que satisfaça ao modelo da radiação e ao da condução. Na teoria da radiação, serão consideradas como superfícies com fluxos de calor prescritos todas as paredes do forno e da carga. A superfície da resistência elétrica será considerada como tendo uma temperatura prescrita. (Esta escolha não é obrigatória, pode-se tentar outras). As temperaturas e os fluxos iniciais deverão ser dados. Adotar-se-ã um passo de tempo (período) e estimar-se-ã a temperatura da resistência e os fluxos de calor através das superfícies das paredes e da carga. Com esta estimativa, pode-se calcular, com o método explicado acima, o fluxo de calor da resistência e as temperaturas das paredes e da carga. Com estas temperaturas como base, pode-se aplicar o método de Schmidt, e um dos resultados deste método será o fluxo de calor através da superfície

das paredes do forno e da carga. Com estes fluxos e a temperatura da resistência ainda prescrita, faz-se um novo cálculo da radiação. O procedimento explicado se torna um ciclo iterativo, o qual convergirá até os valores de temperaturas e fluxos desejados

3. Aplicação do método.

Definição do problema : considera-se um forno a aquecimento elétrico, conforme figura 1.



O forno mostrado é um forno teórico, visando apenas mostrar a validade do método. O regime transitório investigado é a chamada "resposta ao ressalto". A temperatura inicial das paredes, da carga e da resistência equivale 25°C . No instante $t = 0$ a temperatura da resistência se torna 1800°C . O método obtém a variação das temperaturas em todas as paredes e na carga.

Cálculo da radiação : A primeira fase do cálculo consiste em dividir a câmara do forno em superfícies isotérmicas. Resolveu-se utilizar uma divisão como indicada na figura 1. A superfície da resistência constitui uma superfície isotérmica, e será anotada com índice 1; as paredes do forno serão divididas como mostrado na figura 1 em superfícies consideradas isotérmicas 2, 3, 4; a parede da carga também será considerada isotérmica e será anotada 5. A próxima fase no cálculo da radiação será determinar os fatores de forma. Utilizando [3], chega-se a:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= 0.15 & \phi_{12} &= 0.11 & \phi_{13} &= 0.56 & \phi_{14} &= 0.12 & \phi_{15} &= 0.06 \\ \phi_{21} &= 0.32 & \phi_{22} &= 0.11 & \phi_{23} &= 0.24 & \phi_{24} &= 0.21 & \phi_{25} &= 0.11 \\ \phi_{31} &= 0.41 & \phi_{32} &= 0.06 & \phi_{33} &= 0.23 & \phi_{34} &= 0.20 & \phi_{35} &= 0.10 \\ \phi_{41} &= 0.21 & \phi_{42} &= 0.13 & \phi_{43} &= 0.47 & \phi_{44} &= 0.00 & \phi_{45} &= 0.19 \\ \phi_{51} &= 0.16 & \phi_{52} &= 0.09 & \phi_{53} &= 0.37 & \phi_{54} &= 0.29 & \phi_{55} &= 0.08 \end{aligned}$$

A solução do sistema algébrico mencionado no parágrafo acima se reduz a :

$$\frac{\dot{Q}_1}{F_1} = -0.341 \dot{q}_2 - 1.364 \dot{q}_3 - 0.379 \dot{q}_4 - 0.568 \dot{q}_5 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma T_2^4 &= \sigma T_1^4 + 1.676 \dot{q}_2 + 1.0603 \dot{q}_3 + 0.4127 \dot{q}_4 \\ &+ 0.691 \dot{q}_5 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma T_3^4 &= \sigma T_1^4 + 0.2651 \dot{q}_2 + 2.293 \dot{q}_3 + 0.3716 \dot{q}_4 \\ &+ 0.5574 \dot{q}_5 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma T_4^4 &= \sigma T_1^4 + 0.3715 \dot{q}_2 + 1.3376 \dot{q}_3 + 1.7800 \dot{q}_4 \\ &+ 0.7640 \dot{q}_5 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma T_5^4 &= \sigma T_1^4 + 0.3715 \dot{q}_2 + 1.3377 \dot{q}_3 + 0.5093 \dot{q}_4 \\ &+ 1.6780 \dot{q}_5 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{com } q_i = \frac{\dot{Q}_i}{F_i}$$

Sempre utilizando como coeficientes de emissividade ([3])

os seguintes valores : $\epsilon_1 = 0.93$
 $\epsilon_2 = 0.75$

$$\epsilon_3 = 0.75$$

$$\epsilon_4 = 0.75$$

$$\epsilon_5 = 0.84$$

Método de Schmidt : A divisão em partes adotada pode ser justificada pelo seguinte raciocínio, as paredes com as superfícies 2, 3 e 4 consistem de tijolos de caolin, tendo as seguintes características :

coeficiente de condutividade : $\lambda = 0.9 \text{ W/m}^\circ\text{C}$

calor específico : $c = 0.854 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$

densidade : $\rho = 1.27$

Destes valores, pode-se calcular a difusividade térmica

$$a = 1.27 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

A carga é constituída por uma viga maciça de aço e tem as seguintes características :

coeficiente de condutividade : $\lambda = 44.5 \text{ W/m}^\circ\text{C}$

calor específico : $c = 0.775 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$

densidade : $\rho = 7.776$

A difusividade térmica torna-se :

$$a = 7.401 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}. \text{ Como a teoria de Schmidt mostra :}$$

$$Fo = a \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (3.6)$$

com Fo : o número de Fourier (adimensional)

Δt : o período (s)

Δx : a distância da divisão da malha (m)

Adotando um intervalo de tempo de 10 segundos e uma divisão no espaço de 55 mm nas paredes, acha-se :

$$Fo = 2.7431 \cdot 10^{-3} \quad (3.7)$$

Para manter o mesmo intervalo de tempo no estudo da condução na carga, a divisão da carga seria :

$$\Delta x = 164 \text{ mm} \quad (3.8)$$

A malha divisória nas paredes e na carga é mostrada na figura 2.

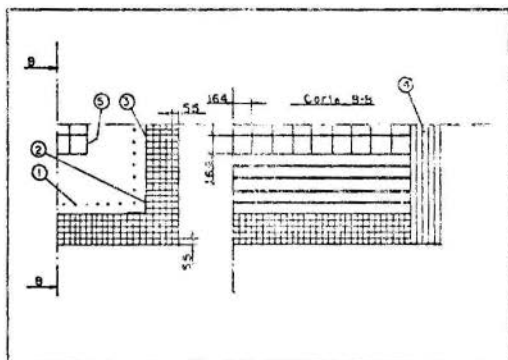


Figura 2: Mofo dividida

Combinação dos dois modelos : Para o primeiro ciclo da iteração descrita acima, foi assumido que a temperatura da resistência estava de 2073 °K (o que estava imposto) que os fluxos de calor nas paredes equivalia 35500 W/m^2 , e que o fluxo de calor nas superfície da carga era de 210000 W/m^2 .

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 2073 \text{ }^\circ\text{K} \\
 \dot{q}_2 &= 35500 \text{ W/m}^2 \\
 \dot{q}_3 &= 35500 \text{ W/m}^2 \\
 \dot{q}_4 &= 35500 \text{ W/m}^2 \\
 \dot{q}_5 &= 210000 \text{ W/m}^2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Com estes valores, calculou-se as temperaturas da parede e da carga :

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= 193600 \text{ W/m}^2 \\
 T_2 &= 1941 \text{ }^\circ\text{K} \\
 T_3 &= 1953 \text{ }^\circ\text{K} \\
 T_4 &= 1915 \text{ }^\circ\text{K} \\
 T_5 &= 1813 \text{ }^\circ\text{K}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Com estas temperaturas, começou-se o ciclo (cujo cálculo estava programado), e chegou-se após vários ciclos iterativos aos seguintes valores finais :

$$\begin{array}{ll}
 T_1 = 2073 \text{ }^\circ\text{K} & \dot{q}_1 = 281800 \text{ W/m}^2 \\
 T_2 = 1883 \text{ }^\circ\text{K} & \dot{q}_2 = -31700 \text{ W/m}^2 \\
 T_3 = 1902 \text{ }^\circ\text{K} & \dot{q}_3 = -32080 \text{ W/m}^2 \\
 T_4 = 1838 \text{ }^\circ\text{K} & \dot{q}_4 = -30800 \text{ W/m}^2 \\
 T_5 = 1561 \text{ }^\circ\text{K} & \dot{q}_5 = 378000 \text{ W/m}^2
 \end{array} \quad (3.11)$$

Estes valores são válidos para a situação do forno após o primeiro período. É claro que é possível repetir o procedimento para os demais intervalos.

4. Resultados

Na figura 3 são mostradas as variações das temperaturas em vários pontos do forno :

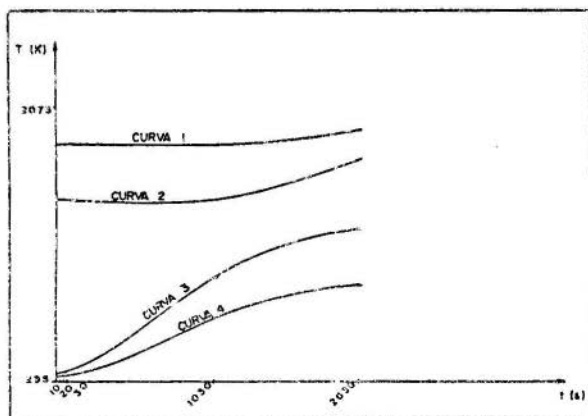


Figura 3 : Variações das temperaturas

- Legenda : Curva 1 : parede do forno (superfície isotérmica número 3)
 Curva 2 : Um ponto a 110 mm de profundidade na mesma parede.
 Curva 3 : Superfície da carga (superfície isotérmica número 5)
 Curva 4 : Um ponto a 164 mm de profundidade na carga.

5. Conclusões.

O método , que é perfeitamente adequado para ser programado em computador , obtém resultados com boa precisão para um forno de alta temperatura , sem ventilação forçada e sem gas absorvente de radiação térmica. Este é o caso de um forno a aquecimento elétrico a alta temperatura.

Bibliografia

- [1] Sparrow , E.M. , e Cess , R.D. , Radiation Heat Transfer. Brooks/Cole Publishing Company , p 86 - 92 (1966).
- [2] Arpaci , V.S. , Conduction Heat Transfer. Addison Wesley Publishing Company , p 515 - 518 (1966)
- [3] Kazantsev , E.I. , Industrial Furnaces. Mir Publishers Moscow , p 282- 305 (1977).

ANAIS

PROCEEDINGS



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-24

P.P. 351 - 360

TROCADORES DE CALOR DE TUBOS ALETADOS.
CONCEITOS DE DIMENSIONAMENTO

László Halász

Prof. Titular - Fac. de Eng. de Alimentos e
 Agrícola

UNICAMP - Campinas - SP - Brasil

SUMÁRIO

O dimensionamento dos trocadores de calor de tubos aletados é bastante complexo, devido ao grande número de parâmetros. Com base na literatura, foram verificados alguns conceitos de dimensionamento e sugeridos métodos de cálculo no ramo da refrigeração, para o dimensionamento do condensador resfriado a ar e do resfriador de ar.

SUMMARY

The dimensioning of finned tube heat exchangers is quite complex because of the great number of parameters. Based on literature, after examining some concepts of dimensioning, the paper suggests calculation methods for the field of refrigeration, to dimension air-cooled condensers and air coolers.

Introdução

O trabalho restringe-se ao ramo da refrigeração e condicionamento de ar, onde estes trocadores de calor são aplicados, em primeiro lugar, como condensador resfriado a ar e resfriador de ar. Eles serão tratados separadamente devido à diferença nas condições de transferência de calor. No condensador resfriado a ar todo calor transfere-se como calor sensível, entretanto no caso do resfriador de ar ocorre condensação do vapor d'água do ar na superfície fria, isto é, transferência de massa também ou, com outras palavras, transferência de calor sensível mais latente. No último caso deve-se classificá-lo segundo a temperatura de superfície; acima de 0 °C ela é coberta por uma camada fina de água, mas abaixo de 0 °C por gelo, cuja espessura aumenta em função do tempo.

Com base na literatura serão mostrados alguns diferentes conceitos de dimensionamento e sugestões para o método a selecionar.

Condensador Resfriado a Ar

O dimensionamento basea-se na equação geral

$$Q = A U \Delta t_m = A U (t_R - \bar{t}_a) \quad \text{kcal/h} \quad (1)$$

onde

Q	fluxo de calor transmitido	kcal/h
A	área de superfície externa	m ²
U	coeficiente global de transmissão de calor	kcal/m ² h°C
Δt_m	diferença média de temperatura	°C
t_R	temperatura (de condensação) do refrigerante	°C
\bar{t}_a	temperatura média do ar	°C

Para o cálculo de U temos

$$1/U = 1 / ((h_{21}(1 - (A_{21}/A))(1 - \eta)) + (A/A_1)(1/\alpha_1)) \quad (2)$$

onde

h_a	coeficiente de transferência de calor no lado do ar	$\text{kcal/m}^2 \text{h}^\circ\text{C}$
A_{al}	área de superfície da aleta	m^2
A_i	área de superfície no interior do tubo	m^2
η_i	eficiência da aleta	-
h_i	coeficiente de transferência de calor no lado do refrigerante	$\text{kcal/m}^2 \text{h}^\circ\text{C}$

A eficiência de aleta η é definida pela seguinte equação

$$\eta = (\bar{t}_{al} - \bar{t}_a) / (\bar{t}_t - \bar{t}_a) \quad (3)$$

onde

\bar{t}_{al}	temperatura média da superfície da aleta	$^\circ\text{C}$
\bar{t}_t	temperatura média do tubo	$^\circ\text{C}$

η determina-se graficamente [2] em função dos parâmetros

$$(m l) = ((2 h_a / (\bar{\sigma} k))^{0,5} l) \quad e \quad (R/r) \quad (4)$$

onde

$\bar{\sigma}$	espessura da aleta	m
k	condutividade térmica da aleta	$\text{kcal/mh}^\circ\text{C}$
l	(= R - r) altura da aleta	m
(R/r)	relação do raio da aleta circular ao raio externo do tubo. (Caso da aleta não circular pode-se considerar a aleta circular de igual área de superfície)	-

η pode ser calculada analiticamente [5] da seguinte equação

$$\eta = \tanh(X)/X = (1/X)(\exp X - \exp(-X)) / (\exp X + \exp(-X)) \quad (5)$$

onde

$$X = m (R - r) (1 + 0,35 \ln(R/r)) \quad (6)$$

Como podemos ver, a determinação de η supõe o conhecimento da geometria do trocador de calor.

Quanto ao coeficiente h_i trata-se de condensação do refrigerante e refere-se à literatura correspondente (por exemplo [1]).

O coeficiente de transferência de calor no lado do ar (h_e) afeta o valor de U diretamente e ainda indiretamente, através da η . Entre os diferentes métodos para determinar h_e , parece que o mais utilizado no EUA é o método de Kays e London [6]. Segundo seu conceito, h_e não pode ser calculado diretamente, mas deve se basear nos dados experimentais de uma geometria semelhante. A referência [6] fornece muitos gráficos, de onde, em função do número de Reynolds de comprimento característico especial, pode-se determinar o número adimensional de Stanton (St) para diferentes geometrias. Finalmente h_e calcula-se da seguinte equação

$$St = h_e / (3600 c_p \rho) \quad - \quad (7)$$

onde

c	velocidade do ar na área de seção mais estreita	m/s
ρ	densidade do ar	kg/m ³
c_p	calor específico do ar	kcal/kg°C

Schmidt elaborou um método para calcular h_e que é publicado na literatura brasileira [3]. Segundo este método, h_e determina-se com base no coeficiente de transferência de calor entre ar e tubos lisos. Parece que o fato deste método ser ultrapassado é pouco conhecido entre os engenheiros brasileiros. O próprio autor o modificou mais tarde, quando foram publicados maior número de resultados experimentais sobre o assunto [4]. Infelizmente, ASHRAE [1] não menciona este trabalho que dá uma solução bastante simples. Segundo [4] o número de Nusselt será

$$Nu_F = C_F (Re_F)^{0,625} (Pr)^{1/3} \quad - \quad (8)$$

onde

C_F	= 0,3 para arranjo de tubos em linha	-
C_F	= 0,45 para arranjo de tubos em quincôncio	-
Re_F	= $3600 c \rho d_F / \mu$	-
d_F	= $d_e (A/A_o)$ comprimento característico	m
d_e	diâmetro externo do tubo	m
A_o	= $A - A_{al}$ área de superfície externa do tubo em contacto com o ar	m ²
Pr	($\approx 0,7$) número de Prandtl do ar	-

Finalmente h_e calcula-se da seguinte equação

$$Nu_{aP} = h_e d_P / k_a \quad - \quad (9)$$

onde

k_a condutividade térmica do ar kcal/mh°C

A Fig. 1 mostra alguns resultados de cálculo feitos por este método, com diferentes geometrias de trocador de calor da ref. [6], comparando-os com resultados experimentais dados pela mesma referência. (A velocidade frontal (c_p) no eixo horizontal dos gráficos é a velocidade do ar imediatamente antes ou após o resfriador de ar ($c > c_p$).)

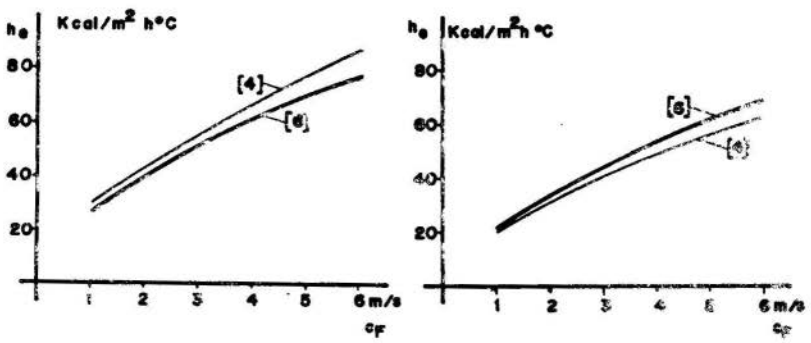


Fig. 1.

- O desvio é aceitável se considerarmos que
- nos cálculos de transferência de calor, em geral, deve-se aceitar uma certa tolerância. Segundo [4], mesmo nos dados experimentais a tolerância é de 5 a 10 %.
 - Existem ainda muitas incertezas a respeito do cálculo de h_e que devem ser esclarecidas por pesquisas de futuro. Pode-se mencionar o efeito da turbulência do ar antes do trocador de calor, que não entra nos cálculos, porém pode ser significativo [5]; o coeficiente h_e é um valor médio, mas seu valor local varia em grande medida na aleta, como revelaram alguns trabalhos

nos [2], o número de colunas de tubos em direção ao escoamento de ar fornece também algum efeito [4, 6].

Resfriador de Ar Para Condicionamento de Ar (Temperatura de Superfície Acima de 0 °C)

Verificamos dois conceitos diferentes para o dimensionamento. Segundo o primeiro [1] o calor total (sensível mais latente) calcula-se da seguinte relação

$$\dot{Q}_{\text{tot}} = A U_h (\bar{h}_a - h_{sR}) \quad \text{kcal/h} \quad (10)$$

onde

h_a	entalpia média do ar	kcal/kg
h_{sR}	entalpia do ar saturado na temperatura (de evaporação) do refrigerante	kcal/kg
U_h	coeficiente global (especial) de transmissão de calor	kcal/m ² h kcal/kg

O coeficiente U_h é calculado com base nos dados recebidos do diagrama psicrométrico, em função da temperatura média de superfície (\bar{T}_s).

No segundo método usado geralmente na Europa [7] o cálculo é feito de acordo com a seguinte linha de raciocínio: Com base na Fig. 2 pode-se escrever

$$\dot{Q}_{\text{tot}} = \dot{m} (h_1 - h_2) \quad \text{kcal/h} \quad (11)$$

onde

\dot{m}	fluxo de massa do ar	kg/h
h_1, h_2	entalpia do ar antes e após o resfriador de ar, respectivamente	kcal/kg

O calor sensível transferido é

$$\dot{Q}_s = A h_e (\bar{t}_a - \bar{t}_s) = \dot{m} c_p (t_1 - t_2) \quad \text{kcal/h} \quad (12)$$

onde

t_1, t_2	temperatura do ar antes e após o resfriador	°C
------------	---	----

$$\dot{Q}_{\text{tot}} = A_i h_i (\bar{T}_t - t_R) = A (A_i/A) h_i (\bar{T}_t - t_R) \quad (16)$$

Quanto ao coeficiente h_i (evaporação do refrigerante), este refere-se à literatura correspondente (por exemplo [1]).

Das eqs.(15), (16), (3) e (1) (aqui naturalmente com $(\bar{T}_a - t_R)$) pode-se derivar a relação procurada entre \bar{T}_s e t_R que é

$$t_R = ((\bar{T}_s (A/A_{a1}) - \bar{T}_a (1 - \eta)) / (1 - (A_{a1}/A)(1 - \eta)) - (U/h_i)(A/A_i) \bar{T}_a) / (1 - (U/h_i)(A/A_i)) \quad 90 \quad (17)$$

Se, por exemplo, a tarefa é o dimensionamento de um resfriador de ar com geometria conhecida, \dot{Q}_{tot} , t_1 , h_1 e t_R são dados, e deve-se determinar a área de superfície (A), o seguinte processo de cálculos iterativos pode ser seguido:

Calculamos h_2 (segundo o capítulo anterior), calculamos h_2 da eq.(11), admitimos um valor para \bar{T}_s , determinamos t_2 (do diagrama psicrométrico ou cálculo), calculamos $\bar{T}_a \approx (t_1 + t_2)/2$, calculamos h_{etot} da eq.(14), calculamos η das eqs.(6) e (5), calculamos U da eq.(2) e finalmente, da eq.(17) calculamos t_R . Repetimos o cálculo com novo valor admitido da \bar{T}_s , até que t_R calculada será igual à t_R dada, e depois calculamos A da eq.(1).

Resfriador de Ar Para Refrigeração

(Temperatura de Superfície Abaixo de 0 °C)

Neste caso forma-se gelo na superfície do resfriador de ar, cuja resistência térmica aumenta com a sua espessura. Mas, ao mesmo tempo, há outro efeito também: os finos cristais de gelo aumentam a superfície de troca de calor com o ar e a maior rugosidade da superfície provoca maior turbulência, aumentando o coeficiente de transferência de calor. Estes efeitos favoráveis podem ser expressos por um fator de multiplicação $B = 1...2$ aplicado para h_{etot} e assim, o coeficiente de transferência de calor entre ar e superfície de metal será

$$1/h_{\text{etot}}^* = 1/(h_{\text{etot}} B) + \delta_g/k_g = 1/(C h_e B) + \delta_g/k_g \quad (18)$$

onde

δ_g espessura do gelo

m

k_e condutividade térmica do gelo kcal/mh°C

De acordo com os experimentos [7] eq.(10) diz-se que para uma pequena espessura de gelo $h_{etot}^* > h_e$, mas com maior espessura de gelo $h_{etot}^* < h_e$. Onde se tem descongelamento automático, não permitindo uma espessura de gelo maior que o crítico (quando $h_{etot}^* = h_e$), basta considerar, até com uma certa segurança, o coeficiente h_e e o calor transmitido pode ser determinado com base na eq.(1). A mudança do estado de ar segue, naturalmente, a Fig. 2. A norma norteamericana [3] prescreve mesmo para o teste destes trocadores de calor a operação seca. A sequência dos cálculos pode ser a mesma como no capítulo anterior.

Conclusões

Os cálculos para dimensionar os trocadores de calor de tubos aletados são bastante complexos, necessitam de um computador ou pelo menos um calculador programável. O uso dos gráficos [8] não é adequado e, por isso, sugere-se, para o condensador resfriado a ar, a determinação do coeficiente de transferência de calor no lado do ar (h_e) através das equações (3) e (5), e para calcular a eficiência de aleta as equações (5) e (6).

No caso do resfriador de ar ($\bar{T}_g > 0$ °C), o método segundo as equações (11)...(14) é, claro, programável e não necessita da introdução de conceitos sem significação física que dificultam a visão clara do fenômeno.

Para o resfriador de ar ($\bar{T}_g < 0$ °C) pode-se calcular com o coeficiente de transferência de calor "seco" (h_e), supondo que haja um sistema de descongelamento permitindo somente uma pequena espessura de gelo durante a operação.

Algumas falhas dos conhecimentos atuais devem ser esclarecidas por pesquisas de futuro.

Bibliografia

- [1] ASHRAE Handbook Fundamentals 1977
- [2] ASHRAE Handbook Equipment 1979
- [3] Silva, R. B.: Manual de Termodinâmica e Transmissão de Calor. EPUSP. (1972)

- [4] Schmidt, Th. E.: Transferência de Calor em Tubos Aletados e Dimensionamento de Trocadores de Calor de Feixe de Tubos. (Em alemão). Kältetechnik, Vol. 15, Nº 4, pp. 98-102 e Nº 12, pp. 370-378, (1963).
- [5] Schmidt, Th. E.: Métodos Melhorados Para Determinar a Troca de Calor Sobre Superfícies Aletadas. (Em alemão). Kältetechnik, Vol. 18, Nº 4, pp. 135-138, (1966).
- [6] Kays, W. M. e London, A. L.: Compact Heat Exchangers. 2ª ed., McGraw-Hill, Inc. (1964).
- [7] Plank, R.: Manual da Técnica de Refrigeração. (Em alemão). Vol. 3, Springer Verlag, (1963).
- [8] ASHRAE Standard 25-68. Forced Convection and Natural Convection Air Coolers for Refrigeration. Methods of Testing for Rating. (1968).

ANALIS

PROCEEDINGS



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 17-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
 RESEARCH PAPER

N.º D-25

P.P. 361-368

UMA TÉCNICA PARA A INTERPOLAÇÃO POR POLINÔMIOS

Washington Braga Filho

Prof. Auxiliar - Deptº de Eng. Mecânica
 PUC/RJ - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

SUMÁRIO

No trabalho discute-se a interpolação da função $y = \sum_{i=1}^N C_i x^{P_i}$ a dados experimentais. As potências P_i - inteiras ou não - são determinadas por uma técnica iterativa e os coeficientes C_i são determinados por meio do critério dos mínimos quadrados. São analisados dados exatos, perturbados, e experimentais. Os resultados obtidos são considerados satisfatórios.

SUMMARY

This paper describes the fitting of the function $y = \sum_{i=1}^N C_i x^{P_i}$. The powers P_i - integers or not integers - are estimated by means of an iterative technique and the coefficients C_i are estimated by the least square method. Exact numbers as well as perturbed and experimental ones are analysed. The results of this method are considered satisfactory.

1. Introdução

Na análise de diversos problemas de Engenharia, o pesquisador por vezes se depara com a necessidade de interpolar funções polinomiais a seus resultados experimentais. Seu objetivo é, portanto, descobrir uma função da forma:

$$f(x) = C_1 x^{P_1} + C_2 x^{P_2} + \dots + C_n x^{P_n} \quad (1)$$

com n conhecido, que melhor se adapte aos dados. As técnicas normalmente utilizadas requerem o conhecimento das potências P_i . O objetivo deste trabalho é apresentar uma técnica iterativa para a determinação destas potências sem o conhecimento prévio das constantes C_i . Uma vez que P_i tenham sido determinados, as técnicas usuais podem ser utilizadas para a determinação de C_i . O método aqui descrito é baseado em um trabalho anterior de M. Lal e E. Moore [1] sobre a interpolação de funções exponenciais:

2. Formulação

A função $f(x)$ definida em (1) é solução da equação (cf., por exemplo, [1]):

$$f(x)x - f(x_0)x_0 = \left(\frac{C_1}{P_1+1} x^{P_1+1} + \dots + \frac{C_{n-1}}{P_{n-1}+1} x^{P_{n-1}+1} \right) \Bigg|_{x_0}^x + (P_n+1) \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (2)$$

Desta equação, observa-se que ela envolve n incógnitas C_1, C_2, \dots, C_{n-1} e P_n e para sua determinação n equações independentes deverão ser geradas. Isto pode ser feito dividindo-se o intervalo de observação $[x_0, x]$ em n sub-intervalos e obtendo-se n equações como indicado em (5). A solução destas n equações independentes assim formadas, determina P_n . A seguir a técnica é desenvolvida para $n=2$, como utilizada em G. Pereira [2]. Para este caso alguns exemplos são discutidos e a influência de erros experimentais é analisada.

Para $n=1$, a equação (2) se reduz a:

$$f(x)x - f(x_0)x_0 = (P_1+1) \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (3)$$

e com isto P_1 pode ser determinada diretamente. No caso em estudo, $n=2$, o valor de P_1 assim obtido pode ser utilizado como aproximação inicial para a determinação de P_2 . Se $n=2$, a equação (2) se escreve:

$$f(x_2)x_2 - f(x_0)x_0 = \frac{C_1 x^{P_1+1}}{P_1+1} \Big|_{x_0}^{x_2} + (P_2+1) \int_{x_0}^{x_2} f(t)dt \quad (4)$$

Sendo P_1 conhecido, a equação (4) apresenta duas incógnitas: C_1 e (P_2+1) . Dividindo o intervalo $[x_0, x_2]$ em duas partes arbitrárias, obtem-se os sub-intervalos $[x_0, x_1]$ e $[x_1, x_2]$, por exemplo. Desta forma, duas equações são geradas:

$$f(x_1)x_1 - f(x_0)x_0 = \frac{C_1 x^{P_1+1}}{P_1+1} \Big|_{x_0}^{x_1} + (P_2+1) \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt \quad (5)$$

$$f(x_2)x_2 - f(x_1)x_1 = \frac{C_1 x^{P_1+1}}{P_1+1} \Big|_{x_1}^{x_2} + (P_2+1) \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

Resolvendo o sistema assim formado, obtem-se um valor para P_2 baseado no valor aproximado P_1 . Estas primeiras estimativas serão $P_1^{(1)}$ e $P_2^{(1)}$. Substituindo-se em (5) P_1 por P_2 e vice-versa, obtem-se outras equações que, utilizando o valor de $P_2^{(1)}$, irão determinar $P_1^{(2)}$. O processo iterativo se repete até que o critério de convergência seja alcançado (neste trabalho, optou-se por $\Delta P_1 = 2 \times 10^{-3}$).

3. Simulação

Com o objetivo de mostrar a validade do método, alguns exemplos são discutidos a seguir. Simulando-se os dados experimentais, determina-se os valores de $f(x) = C_1 x^{P_1} + C_2 x^{P_2}$ para diversos valores de x , dentro de um certo intervalo. Entraindo-se com pares do tipo $\{x_i, f(x_i)\}$ em um programa de computador, as potências são determinadas pelo método proposto.

Em seguida, aplica-se a técnica dos mínimos quadrados para a determinação das constantes (a).

Exemplo 1:

$$\begin{aligned} \text{f. original: } f(x) &= 1,530 x^{4,00} + 2,100 x^{-2,10} \\ \text{f. obtida : } f(x) &= 1,528 x^{4,00} + 2,348 x^{-2,05} \end{aligned}$$

Exemplo 2:

$$\begin{aligned} \text{f. original: } f(x) &= 1,530 x^{1,80} + 0,856 x^{3,30} \\ \text{f. obtida : } f(x) &= 1,544 x^{1,81} + 0,865 x^{3,31} \end{aligned}$$

Exemplo 3:

$$\begin{aligned} \text{f. original: } f(x) &= 8,300 x^{-0,50} + 2,100 x^{-2,10} \\ \text{f. obtida : } f(x) &= 7,574 x^{-0,48} + 2,601 x^{-2,01} \end{aligned}$$

Exemplo 4:

$$\begin{aligned} \text{f. original: } f(x) &= 2,450 x^{3,00} - 0,258 x^{3,20} \\ \text{f. obtida : } f(x) &= 2,639 x^{3,01} - 0,069 x^{3,36} \end{aligned}$$

Os valores de x e das funções destes exemplos aparecem nas tabelas seguintes:

x	f(x)		f(x)	
	REAL	OBTIDA	REAL	OBTIDA
0.50	9.099	9.821	0.533	0.532
1.00	3.630	3.876	2.386	2.389
1.50	8.642	8.761	6.307	6.313
2.00	24.970	25.030	13.194	13.201
2.50	60.072	60.094	24.026	24.031
3.00	124.139	124.132	39.845	39.846
3.50	229.747	229.719	61.740	61.736
4.00	391.794	391.760	90.840	90.833
4.50	627.485	627.468	128.313	128.309
5.00	956.322	956.361	175.354	175.363

TABELA 1 - EXEMPLO 1 e EXEMPLO 2

x	f(x)		f(x)	
	REAL	OBTIDA	REAL	OBTIDA
0.50	20.741	21.042	-0.334	-0.334
1.00	10.400	10.175	-2.708	-2.708
1.50	7.673	7.389	-9.213	-9.214
2.00	6.359	6.081	-21.971	-21.972
2.50	5.556	5.297	-43.123	-43.124
3.00	5.001	4.762	-74.828	-74.828
3.50	4.588	4.368	-119.255	-119.255
4.00	4.264	4.061	-178.588	-178.587
4.50	4.002	3.813	-255.018	-255.017
5.00	3.783	3.608	-350.746	-350.748

TABELA 2 - EXEMPLO 3 e EXEMPLO 4

nestes casos, a técnica é bastante satisfatória, uma vez que os valores originais são reproduzidos com razoável precisão. Como é visto a seguir, esta precisão é função das potências e dos coeficientes desconhecidos.

Para a simulação de erros experimentais, vai-se aplicar o algoritmo: $f(x) = f(x) (1 + \epsilon(2\pi - 1))$ onde π é um número gerado aleatoriamente no intervalo $[0,1]$ e ϵ é o erro de espalhamento, escolhido aqui em 2%. Os exemplos 1 e 2 são re-examinados. Para estes testes, obteve-se uma melhor precisão ao se trabalhar com um número maior de equações do que as necessárias. Em particular, sugere-se que três equações sejam obtidas a partir dos intervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$. O critério dos mínimos quadrados é aplicado a cada iteração para resolver o sistema de 3 equações e 2 incógnitas. Este processo é recomendável para reduzir influências de erros experimentais na interpolação (tabela 3).

Exemplo 5:

$$\begin{aligned} \text{f. original: } f(x) &= 1,530 x^{4,00} + 2,100 x^{-2,10} \\ \text{f. obtida : } f(x) &= 1,720 x^{3,92} + 1,890 x^{-2,14} \end{aligned}$$

Exemplo 6:

$$\begin{aligned} \text{f. original: } f(x) &= 1,530 x^{1,80} + 0,856 x^{3,20} \\ \text{f. obtida : } f(x) &= 0,926 x^{1,20} + 1,356 x^{2,99} \end{aligned}$$

x	f(x)		f(x)	
	C/ESPALHAMENTO	OBTIDA	C/ESPALHAMENTO	OBTIDA
0.50	9.264	8.450	0.523	0.574
1.00	3.586	3.611	2.373	2.292
1.50	8.789	9.221	6.243	6.072
2.00	24.619	26.448	12.997	12.930
2.50	59.159	62.648	23.993	23.850
3.00	124.642	127.633	39.479	39.828
3.50	228.248	233.310	62.793	61.860
4.00	398.930	393.596	89.217	90.942
4.50	518.681	624.377	128.794	128.068
5.00	948.980	943.476	172.859	174.235

TABELA 3 - EXEMPLO 5 • EXEMPLO 6

4. Coeficientes de Sensibilidade

Como a determinação precisa dos coeficientes C_i depende do conhecimento anterior e preciso das potências P_i , nesta seção são discutidos alguns fatores que afetam a eficiência na estimativa das potências. Para tanto, considere-se a expansão em série de Taylor da função $f(P_1, P_2)$:

$$f(P_1, P_2) \cong f(P_1^O, P_2^O) + f_{P_1} (P_1 - P_1^O) + f_{P_2} (P_2 - P_2^O) \quad (6)$$

onde

$$f_{P_1} = \left. \frac{\partial f}{\partial P_1} \right|_{P_1^O, P_2^O} \quad \text{e} \quad f_{P_2} = \left. \frac{\partial f}{\partial P_2} \right|_{P_1^O, P_2^O}$$

Nesta expansão, os termos de 2^a ordem são desprezados. Se, por acaso, a função f for linear em termos das potências P_1 e P_2 , a equação (6) será exata. Verifica-se diretamente que quanto maiores forem f_{P_1} e f_{P_2} , denominados de coeficientes de sensibilidade, mais rápido e preciso será o processo para a determinação de P_1 e P_2 . Pode-se mostrar que esses coeficientes são da forma:

$$\frac{\partial f}{\partial P_i} = C_i P_i x^{P_i - 1} \quad (7)$$

Pela expressão (7), vê-se que a precisão na determinação é função crescente com x , desde que $P_i > 1$. Isto se observa pelos exemplos 1, 2 e 4. Quando $P_i < 1$, a precisão é função de x crescente com x (exemplo 3).

A determinação simultânea das potências P_i exige que os coeficientes de sensibilidade sejam linearmente independentes, como é analisado em Beck e Arnold [3]. Em alguns casos isto não ocorre e então a estimativa para P_i não é boa, embora os valores da função obtida sejam bastante semelhantes aos originais.

Considere-se o caso em que uma das potências seja maior que a unidade e a outra menor. Mais particularmente, vai-se supor que uma das potências seja tal que $|P_i - 1| < \beta$, onde β é um número pequeno. De acordo com a equação (7), um dos

coeficientes de sensibilidade é função crescente com x enquanto o outro é função decrescente. Dependendo ainda do sinal correspondente às constantes C_i , pode-se ter dificuldades para a obtenção da função exata, mesmo com um erro razoavelmente pequeno para a interpolação como mostrado no Exemplo 7:

Exemplo 7:

$$\begin{aligned} \text{f. original: } f(x) &= 1,22 x^{-0,50} - 5,35 x^{1,20} \\ \text{f. obtida : } f(x) &= 366,8 x^{2,37} - 369,7 x^{2,36} \end{aligned}$$

Verifica-se que as duas funções acima têm aproximadamente mesmo valores no intervalo considerado $[0,5]$. Nos casos semelhantes analisados, verificou-se que as potências obtidas eram geralmente bastante próximas, como deve ser observado. Este fato pode servir como orientação para os casos de solução não-única. Para comprovar a influência dos coeficientes C_i , alterou-se a função original do exemplo 7 para $f(x) = 1,22 x^{-0,50} + 5,35 x^{1,20}$. Neste caso, a convergência foi bastante satisfatória.

5. Aplicação

Em alguns trabalhos experimentais, como em [2], os pontos obtidos são em pequeno número, contém erros inerentes à própria experimentação e, ainda, não são igualmente espaçados. Desta forma, um dos pontos críticos a ser superado é a integração numérica de $f(x)$ no intervalo da experiência (ver equação 4).

Naquele trabalho, optou-se inicialmente pela integração pela técnica de Gauss-Legendre, mas nenhum resultado confiável foi obtido, devido ao espalhamento encontrado na experiência. Assim, resolveu-se interpolar graficamente uma função aos pontos experimentais e utilizar pontos da curva obtida para a integração, feita pelo método de Simpson. Uma vez determinadas as potências P_i , os pontos experimentais foram usados para a estimativa dos coeficientes C_i . Após duas iterações neste processo, conseguiu-se um erro médio de 7,3% entre os valores interpolados e os experimentais. Como é

citado em [2], tal erro é compatível com os outros trabalhos experimentais do mesmo tipo.

6. Conclusão

A técnica descrita pode ser útil na interpolação de resultados experimentais por meio de polinômios. Como as potências são determinadas, por método iterativo, pode-se obter razoável precisão para casos onde as derivadas da função se façam necessárias. A técnica foi aplicada experimentalmente e os resultados obtidos foram aceitos como satisfatórios se comparados com outras técnicas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Lal e E. Moore, "An Iterative technique for fitting exponentials" - Int. J. Num. Meth. Engne, 10, 979-990 (1976).
- [2] G. Pereira, E.A., "Coeficientes de Transporte para Trocadores de Calor de Dutos de Seção Não-Regular", Tese de Mestrado - PUC/RJ, Deptº. Eng. Mecânica, - (1979).
- [3] Beck, J.V. e Arnold, K., "Parameter Estimation in Engineering and Science" - Wiley - Interscience (1977).



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECÂNICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO TÉCNICO
TECHNICAL PAPER

N.º DT-11

P.P. 369-381

TENSÕES DE MEMBRANA EM VASOS ESFÉRICOS
APOIADOS EM COLUNAS

Arthur Müller

Estudante de Graduação

Depto de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

Luiz Bevilacqua

Professor Orientador

PUC/RJ - Brasil

SUMÁRIO

Neste trabalho aplica-se a técnica desenvolvida por Vlasov para a solução do problema de membrana de um vaso esférico sustentado por quatro apoios pontuais. Admite-se que o vaso esteja completamente cheio com um fluido homogêneo. O problema é resolvido em dois passos, e as soluções são superpostas. Com exceção de uma região limitada à vizinhança dos apoios a solução obtida representa satisfatoriamente a solicitação do vaso com espessura pequena com relação ao seu raio.

SUMMARY

This paper presents the membrane solution for a thin, spherical vessel supported by four columns. The vessel is filled up to the top with a homogeneous fluid. The problem is solved in two steps. Except for a limited region in the neighborhood of the concentrated loads the solution gives satisfactory results for the membrane stresses.

Introdução

Objetiva este trabalho a uma determinação analítica do campo de esforços internos de membrana a que fica submetido um vaso de pressão esférico sustentado por quatro apoios verticais concentrados.

Para este fim, optou-se pelo mapeamento da esfera de forma que a solução procurada pudesse ser escrita sob a forma de uma função analítica de uma variável complexa, mediante a introdução de polos de 3ª ordem nos pontos de aplicação das cargas $| 1 |$.

Por sua generalidade, o método permite a determinação destes esforços quando o carregamento externo é composto de momentos e/ou esforços horizontais concentrados. Isto possibilita um acoplamento da solução obtida com um estudo pormenorizado de deformações, de forma a obter-se um resultado inserido no contexto da teoria geral de momentos em cascas.

2. Método de solução

2.1 - Análise infinitesimal e equações de equilíbrio.

Introduzindo-se os esforços N_1 , N_2 , S_1 e S_2 na geometria indicada na figura (I) e, escrevendo-se as equações de equilíbrio para o elemento assinalado, chega-se a

$$\frac{\partial}{\partial z} (rN_1) - r'N_2 + (1+r'^2)^{1/2} \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad (1.a)$$

$$(1+r'^2)^{1/2} \frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial z} (rS) + r'S = 0 \quad (1.b)$$

$$- \frac{rr''}{1+r'^2} N_1 + N_2 = 0 \quad (1.c)$$

$$S_1 = S_2 = S. \quad (1.d)$$

onde, em (1.a, b, c) já foi introduzido o resultado (1.d) e, para a esfera

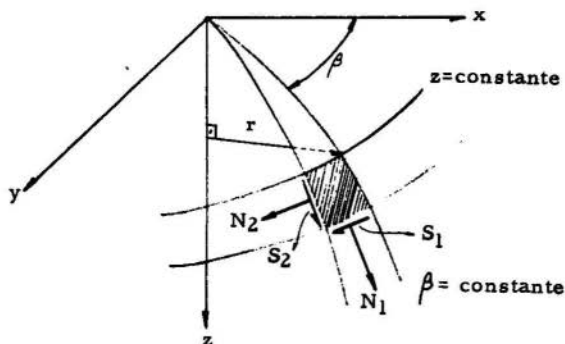


Figura (I)

$$r(z) = \sqrt{2az - z^2} \quad ; \quad a = \text{raio da esfera.} \quad (2)$$

Introduziu-se também a convenção

$$r' = \frac{dr}{dz} \quad \text{e} \quad r'' = \frac{d^2r}{dz^2}$$

Substituindo-se (2) em (1.c), vem:

$$N_1 + N_2 = 0 \quad \text{==} \quad N_1 = -N_2.$$

Convém aqui definirmos as funções potencial U e V da forma

$$N_1 = \frac{a}{r^2} V \quad ; \quad S = \frac{U}{r^2} \quad ; \quad N_2 = -\frac{a}{r^2} \quad (3)$$

Fazendo-se as substituições de (2), (3) em (1.a,b), fica-se com:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{r^2}{a^2} \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Introduzindo-se $\alpha = \alpha(z)$, $\lambda = \frac{1}{a}$ e substituindo-se em (4), vem:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda U) + \lambda r^2 \frac{d\alpha}{dz} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} - \lambda r^2 \frac{d\alpha}{dz} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda U) = 0$$

A chave do método é a escolha conveniente da função $\alpha(z)$. Fazendo-se

$$\lambda r^2 \frac{d\alpha}{dz} = 1, \quad (6)$$

as equações (5) se reduzem a

$$\frac{\partial (\lambda U)}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{\partial (\lambda U)}{\partial \alpha} = 0$$

Mas as equações (7) são justamente as condições de Cauchy-Riemann da teoria de variáveis complexas. Isto é, fazendo-se

$$\gamma = \alpha + i\beta, \quad \text{temos que} \quad (8)$$

$$F(\gamma) = \lambda U(\alpha, \beta) + iV(\alpha, \beta) \quad (9)$$

Assim, U e V podem ser oriundos de qualquer função analítica $F(\gamma)$. Além disto, pode-se integrar (6). Chega-se a

$$\alpha = lu \sqrt{\frac{z}{a-z}} \quad (10)$$

A expressão (8) para γ juntamente com a expressão (10) acima sugere a mudança de variáveis

$$c = e^{\alpha}$$

$$R = e^{\nu} + e^{\mu} \cdot e^{i\theta} + \rho e^{i\theta}$$

A interpretação é óbvia: a esfera é transformada no plano complexo M , de forma que os paralelos ($\lambda = cte$) se transformam em círculos concêntricos ($\rho = cte$), enquanto que os meridianos ($\beta = cte$) continuam ortogonais aos paralelos.

2.2 - Equilíbrio de partes finitas da esfera

Consideremos uma porção finita da esfera, definida por $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1$ e β_2 , de acordo com a figura (II).

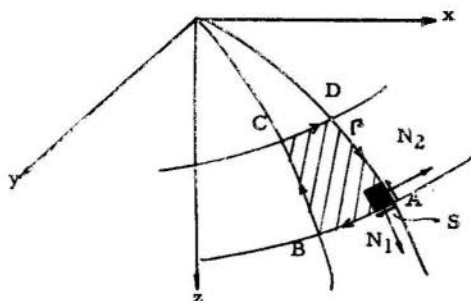


Figura (II)

Admitindo-se que nesta porção da esfera encontra-se um esforço concentrado, consistirá o problema agora em determinar-se a resultante das forças que agem sobre esta porção, partindo-se, para isto, da observação do pequeno elemento assinalado na figura (II). Tem-se:

$$R_x = \int_{\Gamma} V r' \cos \beta d\beta - \frac{1}{\lambda r} (\lambda U) \operatorname{sen} \beta d\beta - \frac{1}{\lambda r} V \operatorname{sen} \beta d\alpha - r' (\lambda U) \cos \beta d\alpha$$

$$R_y = \int_{\Gamma} V r' \operatorname{sen} \beta d\beta + \frac{1}{\lambda r} (\lambda U) \cos \beta d\beta + \frac{1}{\lambda r'} V \cos \beta d\alpha - \\ - r' (\lambda U) \operatorname{sen} \beta d\alpha$$

$$R_z = \int_{\Gamma} V d\beta - (\lambda U) d\alpha$$

$$M_x = \int_{\Gamma} (r - z r') V \operatorname{sen} \beta d\beta - \frac{z}{\lambda r} (\lambda U) \cos \beta d\beta - (r - z r') (\lambda U) \\ \operatorname{sen} \beta d\alpha - \frac{z}{\lambda r} V \cos \beta d\alpha$$

$$M_y = \int_{\Gamma} -(r - z r') V \cos \beta d\beta - \frac{z}{\lambda r} (\lambda U) \operatorname{sen} \beta d\beta + (r - z r') (\lambda U) \\ \cos \beta d\alpha - \frac{z}{\lambda r} V \operatorname{sen} \beta d\alpha$$

$$M_z = \int_{\Gamma} \left(\frac{\lambda U}{\lambda} \right) d\beta + \frac{1}{\lambda} V d\alpha$$

Grupando-se

$$P_z - i \lambda M_z = - \int_{\Gamma} [(\lambda U) d\alpha - V d\beta + i(V d\alpha + (\lambda U) d\beta)] = - \\ - \int_{\Gamma} F(\gamma) d\gamma = \int_{\Gamma} \frac{F(N)}{N} dN$$

Procedendo-se de maneira análoga com os outros termos, vem:

$$\operatorname{Re} \left[\int_{\Gamma} \frac{F(N) dN}{N} \right] - P_z = 0$$

$$\operatorname{Re} \left[\int_{\Gamma} F(N) dN - \overline{\left(\int_{\Gamma} \frac{F(N) dN}{N^2} \right)} \right] + P_x = 0$$

$$\operatorname{Re} \left| \int_{\Gamma} F(N) dN \right| + \frac{M_y}{a} = 0$$

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} F(N) dN - \int_{\Gamma} \left(\frac{F(N) dN}{N^2} \right) + 2 P_y = 0 \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} \frac{F(N) dN}{N} + \frac{M_z}{a} = 0$$

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} F(N) dN - \frac{M_x}{a} = 0$$

É importante ressaltar que as cargas concentradas também dão momentos em relação aos eixos x, y e z . Assim, admitindo-se a carga aplicada em $\beta = 0$, vem:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - P_y z_1 \\ M_y &= M_y^0 + P_x z_1 - P_z r_1 \\ M_z &= M_z^0 + P_y r_1 \end{aligned} \quad (12)$$

onde o índice "1" se refere à posição da aplicação da carga e o índice "0" significa momentos concentrados aplicados.

Como $F(N)$ é uma função analítica exceto nos pontos de aplicação das cargas concentradas, pode-se admitir a mesma a forma:

$$F(N) = \frac{1}{(N-N_1)^3} (A_2 N^2 + A_3 N^3 + A_4 N^4) \quad (13)$$

Em (13), M_1 se refere, mais uma vez, ao ponto de aplicação da carga concentrada.

Fazendo-se:

$$\begin{aligned} A_2 &= a_2 + ib_2 \\ A_3 &= a_3 + ib_3 \\ A_4 &= a_4 + ib_4 \end{aligned} \quad (14)$$

e integrando-se as expressões (11) por métodos de variáveis complexas, pode-se chegar a dois sistemas independentes de

3 equações e 3 incógnitas, cuja solução é

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{1}{2\pi a} \left\{ [z_1 + 3N_1^2(2a - z_1) - 3N_1 r_1] P_y - (1 - 3N_1^2) M_x - 3N_1 M_z \right\} \\
 a_3 &= -\frac{1}{2\pi a} \left\{ [r_1 - 3N_1(2a - z_1)] P_y - 3N_1 M_x + M_z \right\} \\
 a_4 &= -\frac{1}{2\pi a} \left\{ [P_y(2a - z_1)] + M_x \right\} \quad (15) \\
 b_2 &= -\frac{1}{2\pi a} \left\{ P_x [z_1 - 3N_1^2(2a - z_1)] + P_z [3N_1 a - r_1(1 + 3N_1^2)] - \right. \\
 &\quad \left. - (1 + 3N_1^2) M_y \right\} \\
 b_3 &= -\frac{1}{2\pi a} \left\{ [P_z(a - 3N_1 r_1) - 3N_1 P_x(2a - z_1) + 3N_1 M_y] \right\} \\
 b_4 &= -\frac{1}{2\pi a} [P_x(2a - z_1) + P_z r_1 - M_y]
 \end{aligned}$$

Substituindo-se (15) em (13), separando-se a parte real da imaginária e lembrando-se das definições (3), vem:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{a}{r^2} \times \frac{\rho^2}{|\rho^2 - 2\rho_1 \rho \cos \beta + \rho_1^2|^3} \times \left\{ [-b_2 \sin 2\beta - \rho b_3 \sin 3\beta - \right. \\
 &\quad \left. - \rho^2 b_4 \sin 4\beta] \times \right. \\
 &\quad \left. \times [\rho^3 \sin^3 \beta - 3(\rho \cos \beta - \right. \\
 &\quad \left. - \rho_1)^2 (\rho \sin \beta)] + \right. \\
 &\quad \left. + [b_2 \cos 2\beta + \rho b_3 \cos 3\beta + \right. \\
 &\quad \left. + \rho^2 b_4 \cos 4\beta] \times [(\rho \cos \beta - \right. \\
 &\quad \left. - \rho_1)^3 - 3(\rho \cos \beta - \rho_1) \right. \\
 &\quad \left. (\rho \sin \beta)] \right\} \\
 N_2 &= -N_1 \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$S = \frac{a}{r^2} \frac{\rho^2}{|\rho^2 - 2\rho_1 \cos\beta + \rho_1^2|} \times \left\{ \begin{aligned} & \left[-b_2 \sin 2\beta - \rho b_3 \sin 3\beta - \rho^2 b_4 \sin 4\beta \times \right. \\ & \left. \times |(\rho \cos\beta - \rho_1)^3 - 3(\rho \cos\beta - \rho_1)(\rho \sin\beta)| \right. \\ & \left. - |b_2 \cos 2\beta + \rho b_3 \cos 3\beta + \rho^2 b_4 \cos 4\beta| \times \right. \\ & \left. \times \rho^3 \sin^3 \beta - 3(\rho \cos\beta - \rho_1)^2 (\rho \sin\beta) \right] \end{aligned} \right\}$$

3 - Aplicação para vasos esféricos com 4 apoios

Tendo-se determinado os esforços para o caso de um apoio, a generalização é imediata. Basta fazer-se

$$N_{\text{RESULTANTE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N(\rho, \beta - i \cdot \frac{2\pi}{n})$$

Na expressão acima, o fator $\frac{1}{n}$ deve-se ao fato de ter-se uma resultante de forças igual à que tínhamos na teoria desenvolvida acima.

É importante observar-se aqui que a expressão para $F(N)$ nos fornece um valor infinitamente grande para $\rho \rightarrow \infty$, o que equivale à existência de um esforço equilibrante concentrado "R" no polo inferior $z = 2a$ (Figura III)

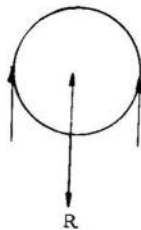


Figura III

Como dispomos da solução de uma esfera cheia de fluido equilibrada por uma força concentrada no polo inferior $|2|$, a solução por nós procurada pode ser obtida por meio da superposição de efeitos. Isto é:

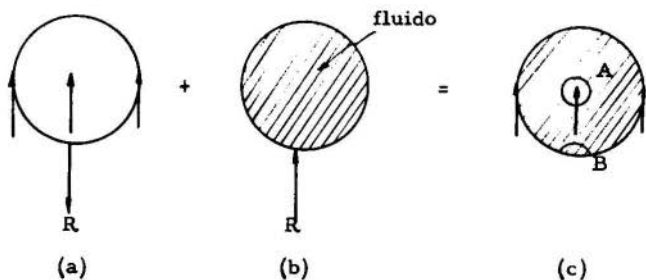
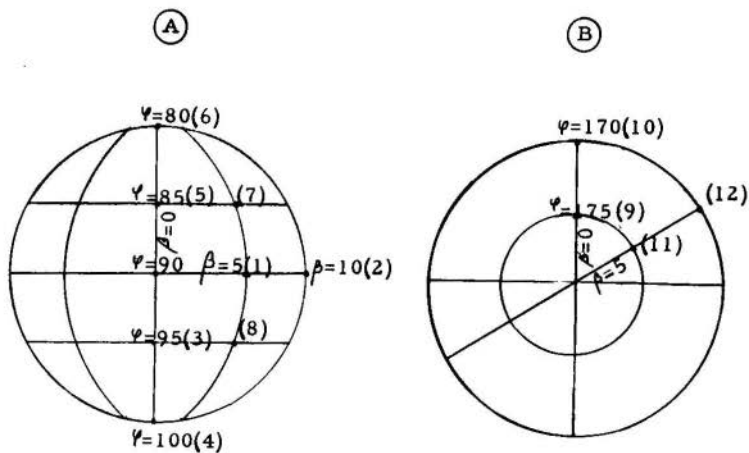


Figura IV

Devido às dimensões das expressões, os esforços N_1, N_2 e S foram avaliados de forma adimensional por meio de um computador, variando-se β e ϕ de 5 em 5°. De particular interesse são as regiões A e B assinaladas na figura IV-C. Para estas, tem-se:



Ponto	$\frac{N_1^a}{P}$	$\frac{N_2^a}{P}$	$\frac{S_a}{P}$	(P= Peso total do fluido)
(1)	0,1194	0,1194	0,4513	
(2)	0,1194	0,1194	0,2186	
(3)	0,5828	-0,3233	$0,2264 \times 10^{-7}$	
(4)	0,3623	$-0,8213 \times 10^{-1}$	$0,3522 \times 10^{-7}$	
(5)	-0,3441	0,5620	$0,4851 \times 10^{-8}$	QUADRO I
(6)	-0,1236	0,3209	-0,1456	
(7)	-0,1150	0,3329	0,2248	
(8)	0,3537	$-0,9418 \times 10^{-1}$	0,2248	
(9)	0,2385	0,2381	$0,3035 \times 10^{-3}$	
(10)	0,2381	0,2357	$0,3793 \times 10^{-4}$	
(11)	0,2385	0,2380	$0,1643 \times 10^{-3}$	
(12)	0,2381	0,2357	$0,1230 \times 10^{-3}$	

Segue ainda com este trabalho as isostáticas referentes à tração no vaso. Encontra-se com o autor a solução analítica para esforços horizontais e/ou momentos e/ou esforços verticais concentrados, localizados em um paralelo arbitrário da esfera.

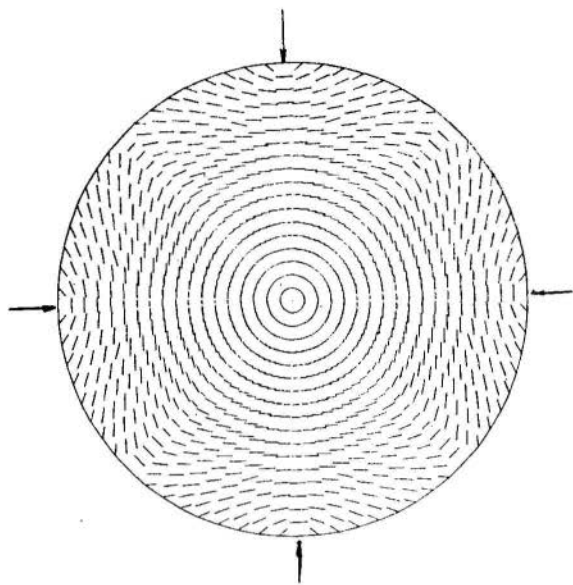
Denominando-se de K os valores numéricos do quadro I, as tensões médias na esfera podem ser determinadas por meio da expressão

$$\sigma = K \cdot \left(\frac{P}{at} \right), \text{ onde } t \text{ é a espessura da esfera}$$

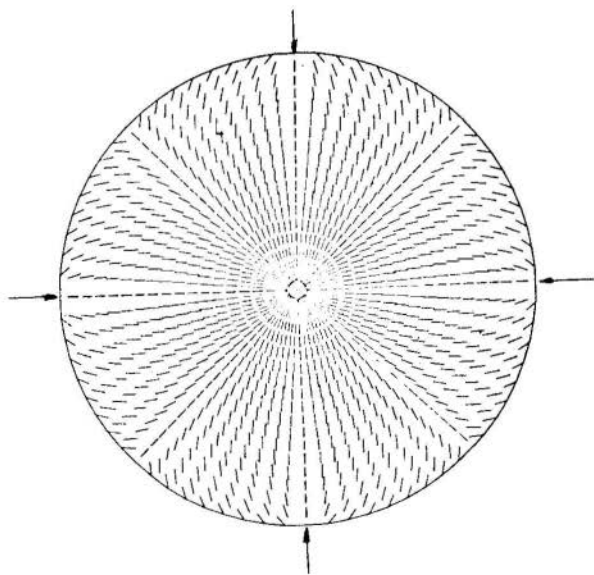
4 - Conclusões

Devido à sua exatidão analítica, o método permite avaliar, conforme proposto, os esforços de membrana num vaso de pressão que, no caso, foi particularizado de forma esférica. A aplicação para vasos elípticos ou hiperbólicos pode ser realizada mediante a avaliação das expressões para U e V, quando $r = r(z)$ gera as superfícies mencionadas.

Isostáticas referentes ao hemisfério superior:



Isostáticas referentes ao hemisfério inferior:



Conforme acima citado, o método permite a avaliação dos esforços de membrana quando o carregamento externo se compõe de momentos e/ou forças horizontais concentrados. Isto possibilita, através de um estudo detalhado de deformações, o acoplamento desta solução com a solução geral de vasos de pressão. Este já se encontra em andamento pelo autor, que agradece quaisquer críticas ou sugestões que possam tornar este trabalho de grande aplicação prática.

5 - Referências

- | 1 | VLASSOV, V.Z. General Theory of Shells and its Applications in Engineering
- | 2 | FLUGGE, W. Stresses in Shells - Spinger Verlag, Berlin, 1960



COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979



TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER

N.º D-26

P. P. 382-391

CATASTROPHE AND STABILITY THEORY IN APPLIED SCIENCE

-M.S. El Naschie

Prof. Dr. - Faculty of Engineering
University of Rayadh
Rayadh - Saudi - ARABIA

ABSTRACT

The following paper represents an abstract of a General Lecture presented at the Conference.

SUMÁRIO

O trabalho anexo representa o sumário de Conferência apresentada no Congresso.

1. Economics and catastrophe

To work in applied mechanics and mathematics in probably one of the worst things one can do to come to money. The author admits, and on the risk of appearing facetious, that this is probably the key to his fascination with the applications of Thom's catastrophe theory. This theory can provide the tools for the poor scholar in a world of entrepreneurs to have the rewarding feeling, false or not, that he understands better than anybody else the mechanics of finance and indirectly his fiscal misery.

In fact, some of the economical instability which we are experiencing in the nonsocialistic world right now could, in the authors opinion, be partly visualised as a conflict between two opposed fundamental schools of so called economical wisdom, namely the Keynesian inflation¹ and what we may term here as the bitter medicine of the classical conservative Ricardonian recession. In its simplest form this conflict could be modelled by one of Thom's singularities, the so called Riemann-Hugoniot catastrophe² where the jumps on the catastrophe surface directly or indirectly resembles a gold fever or a Wall Street crash.

The most striking feature of the model is definitely that gradual and continuous changes cannot prevent abrupt and discontinuous behaviour. This is new. In evolutionary terms, the Darwinism and sudden mutation are no longer mutually exclusive.

2. Elementary catastrophe and singularity theorems

Thom's most important contribution which forms the basic stone of catastrophe theory is the proof of the following remarkable theorem².

Theorem

In a system of potential parameterised by a manifold C on a manifold x and represented by a smooth map.

$$\pi : C \times X \rightarrow R$$

there arises only seven topologically different singular-

ities for a co-dimension $K \leq 4$.

An important corollary of the preceding theorem for $K = 2$ utilized by the author^{3,4} and which was given elsewhere is the following.

Corollary

For a two dimensional ($K = 2$) smooth manifold C (termed control space by Zeeman) of a system represented in R^n (termed behaviour or state space) and a given potential functional (π) represented by a smooth map

$$\pi : R^{n+(K=2)} \rightarrow R$$

the manifold of equilibrium states given by the vector field (\vec{A})

$$\vec{A} = - \text{Grad } \pi = 0$$

is a surface in R^{n+2} and the only possible types of singularities of the projection of this surface on the controlling space are folds and cusps.

This corollary has proven to be of considerable usefulness in studying some of the classical oscillators such as that of Duffing, Van der Pol and the associated Hopf bifurcation as well as the study of several buckling and chemical reactor problems^{5,6}.

3. Scope - Agenda

Thom's catastrophe theory classifies jump effects of structurally stable gradient systems and was intended by him to model process occurring in nature especially in developmental biology. Meanwhile, much of the enthusiasm towards catastrophe theory comes from its application to a variety of the so called inexact and social sciences pioneered by Zeeman⁸. On the other hand, the real hard core testing of the theory was provided by its application in structural and mechanical engineering³⁻⁶. In the present lecture the application of catastrophe theory in economics, cosmology⁷, controlled systems, thermodynamics, buckling,

dynamical systems, bistability of perception and many other diverting fields of soft and hard core sciences is demonstrated. The bulk of the lecture will deal, however, with mechanics. Due to space limitation the author found himself to be in a dilemma since it is impossible to write down all the subject which will be covered in the lecture. In nevertheless seems essential for a deep understanding to consider some of the mechanical problems in detail such as Duffing's oscillation which is treated at the end of this abstract.

The rest of the examples will be given in the course of the lecture.

4. Duffing's equation

As is well known, the simplest oscillator is the linear harmonic one

$$\ddot{x} + x = 0$$

This is, of course, structurally unstable. If this is perturbed in a structurally stable manner another famous oscillator can be obtained, namely the Van der Pol oscillator

$$\ddot{x} + b(x^2+1)\dot{x} + x = 0, \quad b > 0$$

If the Van der Pol oscillator is parameterised in the manner that

$$\ddot{x} + b(x^2-\lambda)\dot{x} + \dot{x} = 0$$

the famous non-elementary bifurcation, the Hopf Verzweigung, is obtained (Fig. 1). Another structurally stable perturbation of the harmonic oscillation leads to

$$\ddot{x} + b\dot{x} + x + \alpha x^3 = f \cos \omega t$$

This is the simplest nonlinear forced oscillation and is known as the Duffing's oscillator.

To show how catastrophe theory can be used to proceed,

as Poincaré suggested, to a qualitative conclusion direct using the qualitative method, the Duffing oscillator will be treated in some detail in two versions.

5. The analytical method for the classical Duffing pendulum

We first start by giving a so called direct variation solution. Thus the problem will be formulated as follows

$$\pi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \alpha^2 \cos x + x f \sin t \right) dt \rightarrow \text{Min}$$

Assuming, as is commonly done, a quasi harmonic solution

$$x = A \sin t$$

and inserting in π and minimising, one obtains after some algebra

$$A - 2\alpha^2 J_1(A) + f = 0$$

where $J_1(A)$ is the integral representation of the Bessel function. Now we use a very simple trick of solving the equation graphically and reducing it to the intersection of a curve

$$Y = 2J_1(A)$$

with a straight line

$$Y = \frac{1}{\alpha^2} A + \frac{f}{\alpha^2}$$

As is easily verified graphically (Fig. 2), depending on the inclination of the straight line and the value f/α^2 unique or a multiplicity of solutions will exist. For

* $\ddot{x} + \alpha^2 \sin x = f \sin t$ which is an excited pendulum in gravity field.

$\alpha > 1$ and small value of f/α^2 three solutions are possible. This explains the experimental observations of the oscillator.

6. The global topological method for Duffing oscillator*

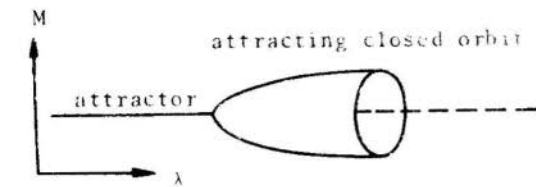
Now we show the use of catastrophe models. Taking the spring stiffness and the driving frequency as controlling parameters, catastrophe theory tells us that the cusp is the type of singularity to be expected following the preceding corollary of Thom's theorem. Extending the parameter range of the spring stiffness to include hard and soft springs, a two cusps surface joined at a smooth part with a peak resembling linear resonance is then our final catastrophe model (Fig. 3). Omitting the details it can be shown analytically that this is the right conclusion⁸. Now the physical strange observation of Duffing's oscillator becomes intuitive and obvious. It is clear now that a smooth change in the forcing frequency can cause both smooth and catastrophic changes in the amplitude of the oscillator. This is, of course, a much more powerful conclusion than that obtained from the laborious traditional analytical solution of the quantitative method.

References

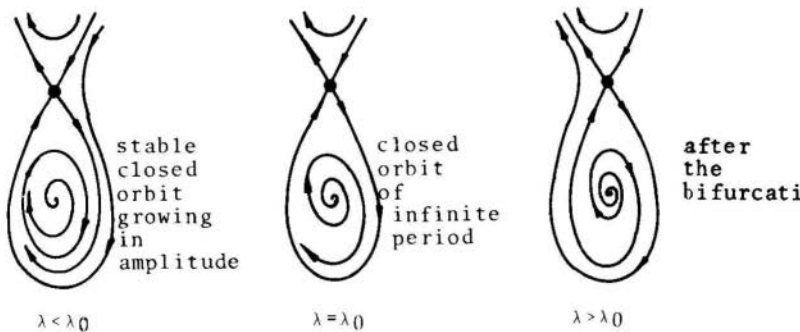
- [1] Keynes, J.M. - The general theory of employment, interest and money. Harcourt, Brace & Co., New York (1936)
- [2] Thom, R. - Structural stability and morphogenesis Addison Wesley, New York (1975).

* For instance $m\ddot{x} + b\dot{x} + k(x+\alpha x^3) = f \cos \omega t$ where m is the mass, b is the damping, K is the stiffness, α is the nonlinearity of spring, f is amplitude of excitation and ω is the frequency of excitation.

- [3] El Naschie, M.S. - A mechanical model for multi-modal operations and runaway phenomena of chemical reactors. ZAMM (Journal of Applied Mathematics and Mechanics), Vol.59, T 124- T 125 (1979)
- [4] El Naschie, M.S. and Al Athel, S. On the morphology of controlled systems. To appear in the proceedings of IUTAM Symposium on Structural Control held in Waterloo, Canada (1979).
- [5] El Naschie, M.S. - Snap-through like stability behaviour of frame structures. (In German) Der Stahlbau 11, p. 338-340 (1977).
- [6] El Naschie, M.S. - Catastrophe theory and runaway phenomena of chemical reactors. 28th Canadian Chem. Eng. Conf., Halifax, Nova Scotia. 22-25 October, paper No. 13-4, p. 13 (1978).
- [7] El Naschie, M.S. - On the singularities of space time in the general theory of relativity. GAMM Communications, N1 March, p. 121 (1979).
- [8] Zeeman, E.C. - Catastrophe theory in brain modelling. Int. Journal Neurosci, Vol. 6, p. 39-41 (1973).
- [9] Thompson, J.M.T. - Experiments in catastrophe Nature, London, 254, p. 392-395 (1975).



A - HOPF BIFURCATION $\lambda = 1$



BIFURCATION POINT

B - BIFURCATION FOR $\lambda = 2$

Fig. 1 - A - Hopf bifurcation $\lambda = 1$

B - Takens bifurcation $\lambda = 2$

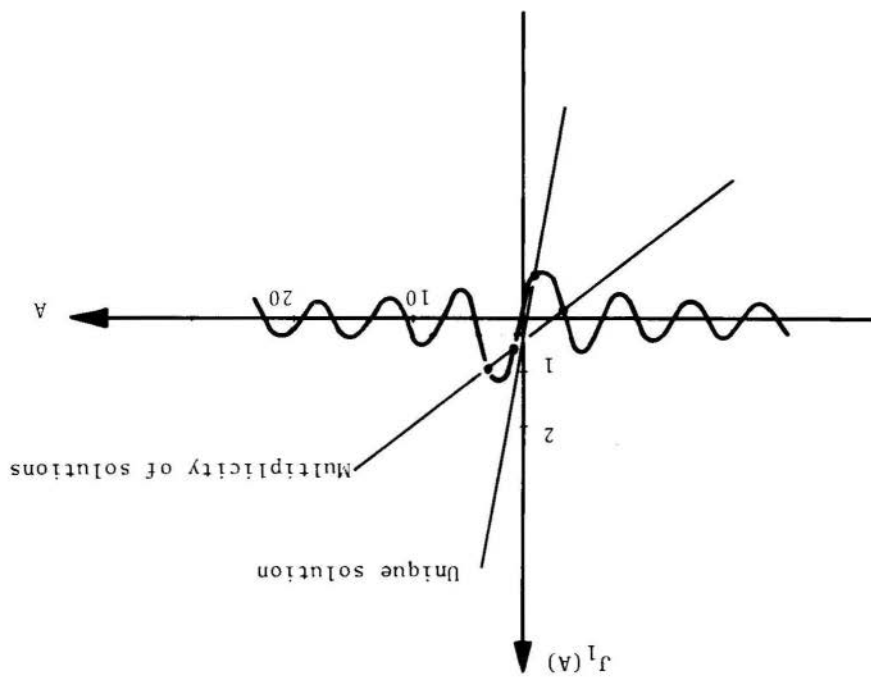


Fig. 2 - Graphical solution of the Duffing Pendulum

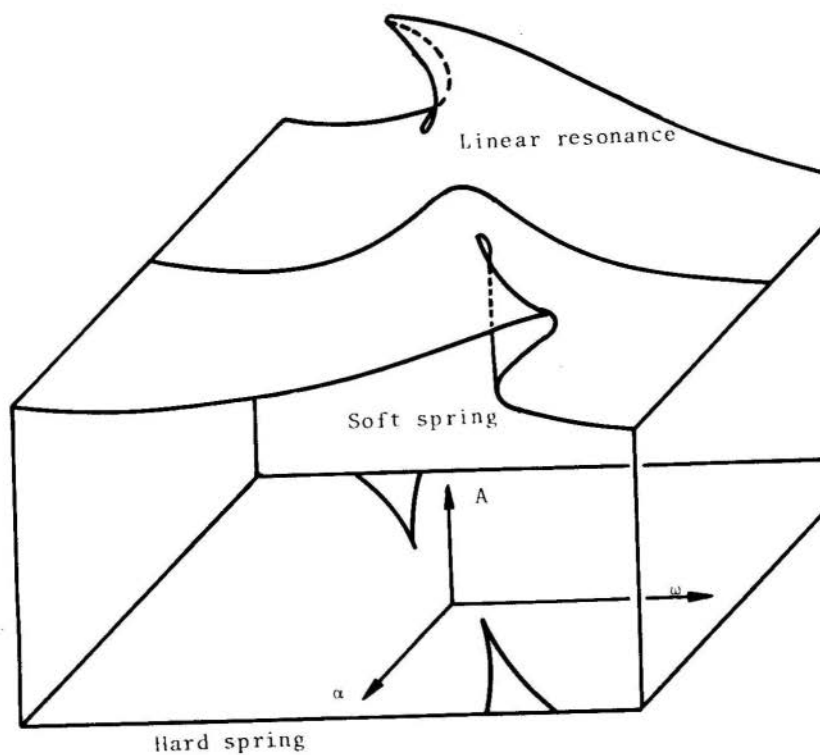


Fig. 3 - Catastrophe surface of the Duffing oscillator consisting of two cusps (Riemann-Hugoniot) singularities

PROGRAMA ANALISADOR DINÂMICO DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

Domingos Roechat Alves

Prof. Titular - Depto. Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - BrasilSumário

Neste trabalho é apresentada uma descrição sucinta do processo utilizado pelo Programa Analisador Dinâmico de Sistemas Estruturais (PROASE-DINÂMICO) na determinação das frequências e modos de vibração de estruturas espaciais. O programa utiliza configurações de deslocamento admissíveis da estrutura como um todo e determina as cargas estaticamente equivalentes às forças de inércia, com as quais, através do PROASE-ESTÁTICO [1], novas aproximações das funções modais são obtidas.

Summary

This work presents a description of the computational method used by Structural System Dynamic Analysis Program (PROASE-DINÂMICO) to obtain the frequencies and vibration modes of space structures. A set of admissible displacement configurations of the whole structure are, initially, used to determine statically equivalent inertia loads with which the PROASE-ESTÁTICO [1] constructs a set of new better approximations of the frequency and mode shapes.

1. Introdução

Esta publicação descreve o processo usado pelo Programa Analisador Dinâmico de Estruturas espaciais (PROASE-DINÂMICO), um programa digital para a determinação de frequência e funções modais de estruturas constituídas por sub-estruturas modeláveis por um conjunto de pontos (nós) interconectados por elementos finitos ou matrizes de rigidez diretamente especificadas.

Na sua implementação procurou-se facilitar a modelagem de tipos não convencionais de estruturas usadas em pesquisa, utilizando um número reduzido de dados de entrada.

2. O método utilizado

O método usado pelo PROASE-DINÂMICO para a determinação da resposta dinâmica de estruturas lineares espaciais consiste, essencialmente, em:

a) modelar a estrutura por um conjunto de subestruturas interligadas, podendo ser cada uma delas relativamente complexa, modeladas pelo método do elemento finito.

b) representar o estado da estrutura por um número relativamente pequeno de coordenadas generalizadas que deverão incluir as componentes dos deslocamentos dos pontos da curva ou superfície de interligação das subestruturas e os coeficientes das funções deslocamentos que representam a configuração das subestruturas individuais, tais como, formas modais de vibrações livres compatíveis com as condições de contorno.

c) obter as energias cinética e potencial em formas quadráticas das coordenadas generalizadas.

d) resolver o problema de autovalores correspondente obtendo, assim, a contribuição aproximada de cada função coordenada generalizada das subestruturas componentes.

e) usar essas configurações deslocamento da estrutura, como um todo, para calcular a configuração de forças equivalente às forças inerciais.

f) aplicar esta configuração de forças estáticas equivalentes

tes na estrutura e determinar uma nova configuração deslocamento. Repetir os passos e) e f) até que a diferença entre duas configurações deslocamento sucessivas estejam dentro da precisão desejada.

Assim, o método iterativo sintetizado acima é usado para a obtenção de uma sequência de conjunto de funções deslocamentos aperfeiçoadas, conduzindo a uma redução apreciável na magnitude dos erros.

Um programa geral foi desenvolvido para executar a formulação acima no qual as subestruturas podem ser modeladas por meio de elementos finitos (placas ou cascas quadrangulares, vigas etc.), cujos nodos (extremos dos elementos) poderão ser interconectados aos nós através de ligaduras rígidas desprovidas de massa, por meio de matrizes de rigidez diretamente especificadas ou de massas concentradas com inércias rotacionais ligadas aos nós por ligaduras rígidas.

Como condições de contorno poderá ser especificado um conjunto arbitrário de componentes dos deslocamentos e/ou uma simulação de apoio elástico em direções especificadas pelo analista.

As características mencionadas acima foram implementadas no programa com a finalidade de facilitar a modelagem matemática de tipos não convencionais de estruturas usadas em pesquisa.

Se são desejados os N primeiros modos e frequências de uma estrutura, o programa resolve problemas de autovalores de ordem um a N . Assim, se somente os modos de baixa frequência são desejados, o programa executa somente problemas de autovalores de baixa ordem e bem condicionados.

O processo implementado pelo programa para, automaticamente, obter uma sucessão de conjuntos de funções deslocamentos aperfeiçoadas é essencialmente uma generalização do processo de Vianello-Stodola para vigas. Cada configuração modal é usada para a determinação de uma configuração de cargas estáticas equivalentes às forças inerciais para a estrutura total e, através dessas cargas, uma nova configuração modal é calculada e usada na aproximação sucessiva. A chave da eficiência computacional reside na possibilidade

de uma análise estática precisa para a determinação eficiente e econômica dessas funções. Para tal é utilizado o PROASE-ESTÁTICO cuja precisão, eficiência e versatilidade tem sido comprovadas em vários tipos de estruturas.

3. Funções deslocamento dos elementos

Para facilidade de notação e explanação restringir-se-á a elementos binodais os quais são considerados como membros cujos extremos (origem, término), aqui denominados nodos, se unem aos nós através de ligaduras rígidas desprovidas de massa. Na figura 1 é mostrado tal elemento em sua configuração deformada e indeformada.

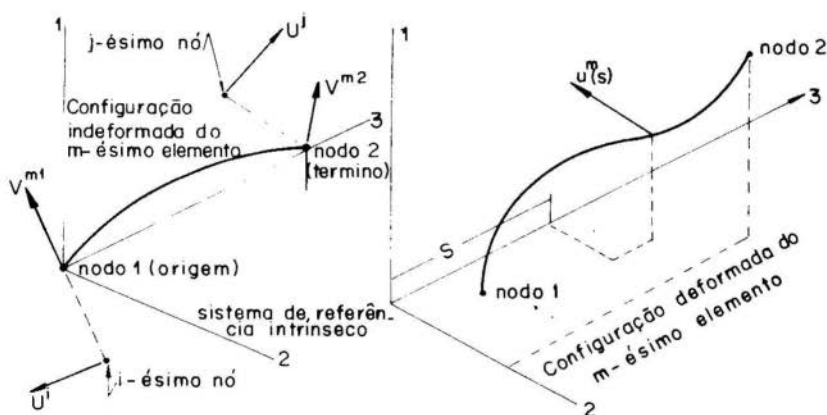


Figura 1 - Elemento binodal

As relações entre os vetores deslocamento dos nodos do m -ésimo elemento e o vetor deslocamento dos nós correspondentes são representadas por

$$V^{m1} = L^{m1} U^i \text{ e } V^{m2} = L^{m2} U^j \quad (1)$$

onde L^{mk} é a matriz de transição de vetores relativos ao sistema global e aplicados nos nós, para vetores aplicados aos nodos com componentes relativos ao sistema intrínseco do elemento.

As energias cinética e potencial do m -ésimo elemento, em função dos vetores deslocamento dos nós por ele interconectados, podem, então, ser expressas por

$$T^m = \frac{1}{2} [\dot{U}^i \quad \dot{U}^j] \begin{bmatrix} \bar{M}_{11}^m & \bar{M}_{12}^m \\ & \bar{M}_{22}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}^i \\ \dot{U}^j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$V^m = \frac{1}{2} [U^i \quad U^j] \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^m & \bar{K}_{12}^m \\ & \bar{K}_{22}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^i \\ U^j \end{Bmatrix} \quad (3)$$

No processo de solução descrito mais adiante, a configuração de toda a estrutura é representada por uma combinação linear de N funções deslocamento linearmente independentes. Assim, o vetor deslocamento em um ponto de coordenada s ao longo do eixo z do sistema intrínseco do m -ésimo elemento $u^m(s)$ tem para componentes

$$u_i^m(s) = \sum_{j=1}^6 c_j^m v_{ij}^m(s) \quad i = 1, 6 \quad (4)$$

onde os coeficientes c_j^m são relacionados com as coordenadas generalizadas como se verá subsequentemente. A energia cinética do m -ésimo elemento em termos do vetor de componentes (4) é

$$T^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \int_0^L \mu_i^m(s) \left(\sum_{j=1}^6 c_j^m v_{ij}^m(s) \right)^2 ds \quad (5)$$

Rearranjando a relação (5) e definindo a integral

$$\bar{M}_{j\ell}^m = \int_0^L \sum_{i=1}^6 \mu_i^m(s) v_{ij}^m v_{i\ell}^m ds \quad (6)$$

resulta

$$T^m = \frac{1}{2} (\dot{C}^m)^t \bar{M}^m \dot{C}^m \quad (7)$$

onde $\mu_k^m(s)$, $k \leq 3$ é a massa por unidade de comprimento no ponto de coordenada s do m -ésimo elemento.

$v_k^m(s)$, $k > 3$ é o momento de massa da secção transversal no ponto de coordenada s em relação ao eixo $k-3$ do sistema intrínseco.

C^m é o vetor coluna de ordem N

\bar{M}^m é a matriz cujos elementos são as submatrizes \bar{M}_{ij}^m .

Para a energia potencial, seguindo um raciocínio análogo, se obterá

$$V^m = \frac{1}{2} (C^m)^t \bar{K}^m C^m \quad (8)$$

onde $\bar{K}^m = [\bar{K}_{ij}^m]$; entretanto, é mais expedito e natural tirar vantagem do conhecimento da distribuição de cargas estáticas correspondentes à configuração deslocamento da estrutura como um todo. As forças e momentos distribuídos, que agindo sobre o elemento formam a carga estática equivalente que produzirá a função deslocamento para a estrutura total, associada com a coordenada generalizada q_j são denominadas por $f_{ij}^m(s)$, na qual $i \leq 3$ representa forças na direção i e $i > 3$ denota momentos em relação ao eixo $i-3$.

Considerações acerca do trabalho externo dessas cargas fornecem

$$\bar{K}_{j\ell}^m = \sum_{i=1}^6 \int_0^L f_{ij}^m(s) v_{ij}(s) v_{i\ell}(s) ds \quad (9)$$

A matriz massa, $M = [M_{ij}]$ e a matriz de rigidez, $K = [K_{ij}]$, para toda a estrutura é construída em arquivo de armazenamento secundário através do fluxograma da figura 2.

Obtidas as matrizes M e K tem-se o seguinte problema de autovalores

$$\omega^2 MX - KX = 0 \quad (10)$$

onde $U = X \sin \omega t$ sendo U o vetor deslocamento

$$U = (U^1, U^2, U^3, \dots, U^N) \quad (11)$$

O programa resolve o problema de autovalores (10) pelo processo das rotações pivotais de Jacobi. Entretanto, es

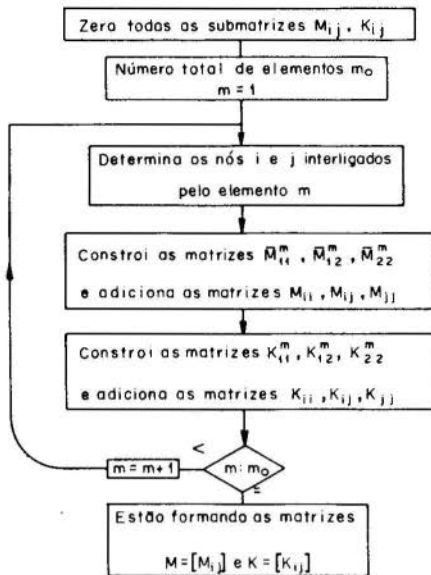


Figura 2 - Construção das matrizes M e K

te processo, embora expedito e de boa precisão para problemas de baixa ordem, apresenta a peculiaridade de perder precisão rapidamente à medida que a ordem das matrizes se eleva.

Usando os autovetores pelo processo de Jacobi com a primeira aproximação das funções modais, o seguinte processo iterativo foi implementado no programa.

Considere-se determinadas, com a aproximação desejada, as $k-1$ primeiras formas modais e respectivas frequências que se conheça uma aproximação inicial da k -ésima forma modal. Para determinar uma melhor aproximação do k -ésimo modo é resolvido uma sequência de problemas de autovalores do tipo discutido anteriormente. As $k-1$ funções deslocamento (configuração deslocamento da estrutura como um todo) usadas em cada uma dessas soluções são as $k-1$ formas modais previamente determinadas, e a k -ésima função é a mais recente aproximação do k -ésimo modo. Se se representar por $x_i^{(k)}$, $i = 1, N$ as componentes do autovetor associado com a k -ésima

ma aproximação do k-ésimo modo, a ela corresponderá, para o m-ésimo elemento, o vetor deslocamento no ponto de coordenada s cujas componentes são dadas por

$$\bar{v}_{ik}^{m(p)} = \sum_{j=1}^N \chi_{jk}^{(p)} v_{ij}^{m(p)} \quad i = 1, 6$$

e a configuração cargas estáticas equivalentes correspondente à configuração deslocamento acima será

$$\bar{f}_{ik}^{m(p)} = \mu_i^m \bar{v}_{ik}^{m(\ell)} \quad i = 1, 6$$

Com estas cargas equivalentes o PROASE-ESTÁTICO determina a configuração deslocamento $v_{ik}^{m(p+1)}$ que será a (p+1)-ésima aproximação da k-ésima função modal.

Note-se que as k-1 configurações deslocamento da estrutura são aproximações com precisão desejada dos k-1 primeiros modos e, portanto, os termos fora da diagonal principal das matrizes M e K, exceto a última linha e coluna, podem ser desprezados em comparação com os termos da diagonal principal.

Através do processo iterativo sintetizado acima o PROASE-DINÂMICO determina as N funções modais.

4. Sequência de subprogramas do PROASE-DINÂMICO

A figura 3 apresenta a sequência de subprogramas utilizados pelo PROASE-DINÂMICO na obtenção das frequências e formas modais de vibrações livres. A função de cada um desses subprogramas é sumarizada a seguir.

A configuração geométrica e mecânica da estrutura é determinada pelo PROASE-ESTÁTICO [1], o qual utiliza geradores multidimensionais e dados [2] de entrada minimizando, deste modo, a possibilidade de erros acidentais. Este subprograma fornece as matrizes de rigidez e massa da estrutura e um conjunto de configurações deslocamento, resultante de configurações de forças especificadas pelo usuário, o qual será usado mais tarde.

O subprograma LOCARM efetua armazenamento dos dados necessários à análise dinâmica e as propriedades associadas

com massas concentradas diretamente especificadas são processadas em MAISAD. A seguir AUTVAL determina, pelo processo das rotações pivotais de Jacobi, um conjunto de funções modais as quais, com as configurações de deslocamento obtidas acima, constituirão as coordenadas generalizadas do problema.

O subprograma NEOFNC seleciona um conjunto linearmente independente dessas funções que fornecem, através do subprograma FALAMB, um conjunto de cargas estáticas equivalentes às forças inerciais, as quais são novamente aplicadas a estrutura em SOLEST, fornecendo novas configurações de deslocamento. Estas funções de deslocamento são normalizadas em NORMA e a seguir são calculadas as novas energias cinética e potencial do sistema. O processo indicado em VIBRA se repete até a obtenção da precisão desejada.

Bibliografia

- [1] Alves, D.B. Programa Analisador de Sistemas Estruturais, Anais do III COBEM, Dez. 1975, pp. 1067-1077.
- [2] Alves, D.B. PROASE/V75, Manual do usuário. Fundação do Ensino da Engenharia em Santa Catarina, 1975.



COBEM 79

V CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

CAMPINAS, 12-13-14 e 15

DEZEMBRO 1979

TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER

N.º D-27

P. P. 402-419

STRESSES NEAR AN INTERIOR CRACK TIP
A NEW SCATTERED LIGHT APPROACH

L.S. Srinath

Dept^o of Mech. Eng. Indian Institute of
Science.

ABSTRACT

A method is proposed which taking in account the variation in the direction of the secondary principal stress provides a fast method to determine the complete photoelastic parameters at any interior point of a three-dimensional model.

SUMÁRIO

Propõe-se um método que, levando em conta a variação na direção das tensões principais secundárias, sendo suficientemente rápido, determina completamente os parâmetros fotoelétricos em qualquer ponto interior de um modelo tridimensional.

1. Introduction

The importance of determining the stress-distribution around crack tips in critical components like reactor pressure vessels, does not need much emphasis. While two dimensional photoelasticity offers an excellent method to determine the stress intensity factors and stress distributions near crack tips in plane-stress models, the existing experimental methods to determine stresses near interior crack tips in three-dimensional models are very limited. Analytical methods, however powerful they may be, need experimental verifications particularly in the field of fracture mechanics. Three dimensional photoelasticity offers a way out, but the present freezing and slicing processes have certain limitations. For example, at the critical temperature, the Poisson's ratio of the model material becomes very nearly equal to 0.5 and as a consequence, translating the results from model to prototype is always open to criticisms. Though excellent results have been obtained using the conventional freezing and slicing process, still it is the desire of photoelasticians to determine the interior stress distributions under live loads. Scattered light photoelasticity can conveniently be utilised for this purpose provided three essential problems are taken care of. The first problem deals with the intensity of scattered light. Since, the intensity of scattered light is generally weak, a powerful light source is necessary. This problem is easily taken care of because of the availability of lasers. The second problem deals with the model material. The material used should have all the desirable properties of a three dimensional photoelastic model material, i.e. have a good figure of merit, and at the same time be a good scatterer. This problem has been satisfactorily solved using Araldite CY-230 with hardener HT-901. The third problem, which is more serious, deals with the existing techniques to determine the interior stress distributions. In general, along a given light path, not only do the secondary principal stresses vary but also their orientations vary. The effect of the variation in the directions of the secondary

principal stresses is commonly termed as the rotational effect. The existing scattered light techniques (1), do not adequately take into account these rotational effects. The method proposed in this paper not only takes fully into account the rotational aspects but also provides a fast method to determine the complete photoelastic parameters at any interior point of a three-dimensional model.

2. Principle of the Method

A general three-dimensional photoelastic model can be considered as made up of a large number of linear retarders placed one after the other with their axes differently oriented. The retardation given by any retarder is proportional to the secondary principal stress difference at that point and the axes of the retarder are along the directions of the secondary principal stresses at that point. Using Jone's calculus (2) or Aben's equations (3), it can be shown that the assembly of retarders can be replaced by a single linear retarder followed by a pure rotator. In other words, a general three dimensional photoelastic model is equivalent to a linear retarder followed by a pure rotator (or an active plate). This is the principle of optical equivalence (4). The linear retarder is characterised by the retardation 2Δ it adds, and the orientation ϕ of its axes with respect to a reference frame. The pure rotator or the active plate is characterised by γ , the angle through which a light ellipse incident on the active plate is rotated. These three quantities, 2Δ , ϕ and γ , are called the characteristic parameters. For an incident plane polarized light, the outcoming vibratory components U and V are given by

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\Delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \\ &= \begin{bmatrix} J+iK & -L+iN \\ L+iN & J-iK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} J &= \cos\Delta \cos\gamma & K &= \sin\Delta \cos(2\phi+\gamma) \\ L &= \cos\Delta \sin\gamma & N &= \sin\Delta \sin(2\phi+\gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

Consider a continuous three-dimensional photoelastic model with characteristic parameters $2\Delta, \phi$ and γ . Let this model be considered as made up of n individual slices arranged in series with retardations and axes orientations as: $(\delta_1; \theta_1; \delta_2; \theta_2; \dots \delta_n; \theta_n)$. Now, out of these n elements, consider the first m elements. These m elements can be replaced by an optically equivalent model having the characteristic parameters $2\Delta_m, \phi_m$ & γ_m . The $(m+1)$ th element will add a retardation δ_{m+1} at azimuth θ_{m+1} . The characteristic parameters of all these $m+1$ elements are $2\Delta_{m+1}, \phi_{m+1}, \gamma_{m+1}$. All these characteristic parameters are related such that

$$\left[\begin{array}{c} \text{optically equivalent} \\ \text{model for } (m+1) \text{ elements} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} (m+1) \text{th} \\ \text{element} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{optically equivalent} \\ \text{model for } m \text{ elements} \end{array} \right]$$

Using Eq. (1) the above relationship can be written as

$$\left[\begin{array}{cc} J_{m+1} + iK_{m+1} & -L_{m+1} + iN_{m+1} \\ L_{m+1} + iN_{m+1} & J_{m+1} - iK_{m+1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \cos \frac{\delta_{m+1}}{2} + i \sin \frac{\delta_{m+1}}{2} \cos 2\theta_{m+1} & i \sin \frac{\delta_{m+1}}{2} \sin 2\theta_{m+1} \\ i \sin \frac{\delta_{m+1}}{2} \sin 2\theta_{m+1} & \cos \frac{\delta_{m+1}}{2} - i \sin \frac{\delta_{m+1}}{2} \cos 2\theta_{m+1} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{cc} J_m + iK_m & -L_m + iN_m \\ L_m + iN_m & J_m - iK_m \end{array} \right] \quad (3)$$

where J, K, L and M are as defined by Eqs. (2). Simplifying and equating the terms, the following results are obtained:

$$\cos \frac{\delta_{m+1}}{2} = \cos \Delta_m \cos \Delta_{m+1} \cos (\gamma_{m+1} - \gamma_m) + \sin \Delta_m \sin \Delta_{m+1} \cos \left[2(\phi_{m+1} - \phi_m) + (\gamma_{m+1} - \gamma_m) \right] \quad (4)$$

$$\tan 2\theta_{m+1} = E_1/E_2 \quad (5)$$

where

$$E_1 = \cos \Delta_m \sin \Delta_{m+1} \sin(2\phi_{m+1} + \gamma_{m+1} + \gamma_m) - \cos \Delta_{m+1} \sin \Delta_m \sin(2\phi_m + \gamma_m + \gamma_{m+1})$$

$$E_2 = \cos \Delta_m \sin \Delta_{m+1} \cos(2\phi_{m+1} + \gamma_{m+1} + \gamma_m) - \cos \Delta_{m+1} \sin \Delta_m \cos(2\phi_m + \gamma_m + \gamma_{m+1})$$

Hence, knowing the characteristic parameters for m slices and $(m+1)$ slices, the photoelastic parameters of the $(m+1)$ th slice can be determined from Eqs. (4) and (5).

The principles of the method consists in determining the characteristic parameters as a function of the light path and then determining the photoelastic parameters using Eqs. (4) and (5). The next section deals with a fast iterative procedure to determine the characteristic parameters for any length of the light path.

3. Determination of Characteristic Parameters

The method proposed in this paper to determine the characteristic parameters can best be explained with respect to a transmitted polariscope. The same procedure can be adopted for scattered light method with some minor modifications. The fact that a general three-dimensional model can be replaced by an optically equivalent model indicates that there exist two directions at entrance such that if a plane polarized light is sent along either of these directions the emerging light is also plane polarized. These directions

at entrance are called the primary characteristic directions and these coincide with the axes of the linear retarder of the optically equivalent model. The directions of the emerging plane polarized light directions are known as the secondary characteristic directions. The primary characteristic directions will therefore make angles ϕ & $\phi + \pi/2$ with respect to a reference frame and the secondary characteristic directions will be at $\phi + \gamma$ & $\phi + \gamma + \pi/2$ to the same reference frame.

Consider a plane polariscope with a three dimensional photoelastic model interposed between the polarizer and the analyser. The polarizer and analyser are in an uncoupled position. Let the characteristic parameters of the model be 2Δ , ϕ & γ . To start with, let the polarizer be along the reference axis making an angle ϕ with the primary characteristic direction. The analyser is at an arbitrary direction $(\phi + \pi/2 + \eta)$ to the reference axis, Fig. 1. The intensity I if light coming out of the analyser is then given by (ignoring the constant of proportionality)

$$I = \cos^2 \Delta \sin(\phi + \eta - \gamma) + \sin^2(\phi + \gamma - \eta) \quad (6)$$

If now, the polarizer is rotated for minimum intensity, the angle ϕ_1 made by the polarizer with retarder axis is obtained by differentiating Eq. (6) with respect to ϕ and setting it equal to zero. ϕ_1 is then given by

$$-\tan \phi_1 = \tan 2(\eta - \gamma) \cos 2\Delta \quad (7)$$

Equation (6) can also be written as

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi \cos 2(\eta - \gamma) \left[1 - \tan 2\phi \tan 2(\eta - \gamma) \cos 2\Delta \right] \quad (8)$$

with ϕ fixed at ϕ_1 , the intensity I_1 for the position η of the analyser is

$$I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi_1 \cos 2(\eta - \gamma) \left[1 - \tan 2\phi_1 \tan 2(\eta - \gamma) \cos 2\Delta \right] \quad (9)$$

If the analyser is now rotated for a minimum intensity it will occupy a position η_1 which can be obtained from the equation

$$\partial I_1 / \partial \eta = 0 \quad \eta_1 \text{ is hence given by}$$

$$\tan 2(\eta_1 - \gamma) = -\tan 2\phi_1 \cos 2\Delta \quad (10)$$

Substituting the value of ϕ_1 from Eq (7), we get

$$\tan 2(\eta_1 - \gamma) = \tan 2(\eta - \gamma) \cos^2 2\Delta \quad (11)$$

The above equation shows that the new value $(\eta_1 - \gamma)$ is less than the initial value $(\eta - \gamma)$.

If the polarizer is now rotated for a further minimum intensity, its new position ϕ_2 is given by

$$\begin{aligned} \tan 2\phi_2 &= -\tan 2(\eta_1 - \gamma) \cos 2\Delta \\ &= -\tan 2(\eta - \gamma) \cos^3 2\Delta \\ &= -\tan 2\phi_1 \cos^2 2\Delta \end{aligned} \quad (12)$$

The new value ϕ_2 is therefore less than the previous value ϕ_1 . This alternative rotation of the polarizer and analyser is continued until the intensity observed is the least minimum. It is observed that at each step the values of ϕ and $(\eta - \gamma)$ get reduced by the factor $\cos^2 2\Delta$ and hence the convergence is very fast. Thus, by alternate rotations of polarizer and analyser, the final values of ϕ and γ can be determined.

To determine the characteristic retardation 2Δ we proceed as follows.

A quarter wave plate is placed before the model such that its axes are at 45 deg. to the primary characteristic direction of the model. The characteristic parameters for the model plus quarter wave plate combination is such that

$$\left[\begin{array}{l} \text{optically equivalent} \\ \text{model for } (\lambda/4 \text{ plate} + \text{model}) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{optically equivalent} \\ \text{model for model alone} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \lambda/4 \text{ plate} \end{array} \right]$$

Substituting quantities similar to Eqs. (1) and (3), and simplifying, the following important relation is obtained.

$$\Delta \text{ of model} = \gamma_{\text{model}} - \gamma'_{\text{model} + \lambda/4 \text{ plate}} \quad (13)$$

Thus, to determine the characteristic parameters ϕ & γ of any model, we use a plane polariscope with the polarizer and analyser uncoupled. The polarizer and analyser are rotated alternatively until the intensity of light emerging from the analyser is the least minimum (which is theoretically equal to zero). The final position of the polarizer gives ϕ and that of the analyser gives $\phi + \gamma + \pi/2$. To determine the characteristic retardation 2Δ of the model, a $\lambda/4$ plate is placed before the model with its axes at 45° to the primary characteristic directions of the model. For this combination we determine γ' by the above iterative procedure. Then, $2\Delta = 2(\gamma - \gamma')$.

The above procedure described for transmitted light model can be easily extended to scattered light model with some obvious operational modifications. The method for transmitted light consists of alternate rotations of polarizer and analyser. In the scattered light method the same effect is achieved by alternate rotations of the polarizer and the polarizer and the model coupled. The procedure to determine the characteristic parameters is as follows.

Consider Fig. 2. BC represents a light ray passing through the model and DE is direction of observation. If we consider portion BD of the light path then the step-wise procedure to determine the characteristic parameters for the model length corresponding to BD is as follows.

1. Plane polarized beam of light is sent along BC.
2. The direction of observation is fixed along DE. Let DF, which is initially along the line of observation and which is fixed with respect to the model, serve the purpose of reference axis.
3. Polarizer alone is rotated so that the intensity along DE is observed to be minimum.
4. Polarizer is coupled to the model and the combi-

nation is rotated about the light beam BC so that the intensity observed is a further minimum.

5. Polarizer is decoupled from the model and is separately rotated so as to observe a still further minimum.

6. Alternate rotations of polarizer and polarizer coupled to the model are carried out until the intensity of the scattered light along the DE is seen to be the lowest minimum. At this stage the situation will be as shown in Fig. 2 (d).

DE represents the direction of observation. DF represents the reference axis and BY_1 represents the final position occupied by the polarizer. From this it is clearly seen that

$$\text{Angle } \gamma_1 \text{ } BY_2 = \gamma_{BD} \quad ; \quad \text{Angle } FD\gamma_1 = \phi_{BD}$$

After determining the primary characteristic direction ϕ and the rotary power γ of the equivalent model, the character retardation is obtained in the following manner:

1. Bring back the model to the position where DF coincides with DE.

2. Introduce a quarter-wave plate between the model and the polarizer such that the quarter-wave plate axes make an angle of 45 deg. with respect to the primary characteristic directions already determined.

3. Rotate the polarizer alone, so that, the intensity of the scattered light is seen to be a minimum.

4. Rotate the polarizer, quarter-wave plate and the model in unison till a further minimum is observed.

5. Steps 3 and 4 are repeated until lowest minimum is observed. At this stage we will have.

$$\text{Angle } \gamma_1 \text{ } BY_2 = \gamma'_{BD} \quad ; \quad \text{Angle } FD\gamma_1 = \phi'_{BD}$$

Then,
$$\Delta_{BD} = \gamma_{BD} - \gamma'_{BD}$$

In this manner, the characteristic parameters for any

length of light path can be determined. Once the characteristic parameters are determined, the photoelastic parameters are obtained by using Eqs. (5) and (6).

4. Scattered Light Polariscopes:

In order to carry out the experimental procedure described above, a suitable scattered light polariscopes was designed and fabricated. Figure 3, shows the photograph of the polariscopes. During investigations, the model is immersed in a tank containing oil having the same refractive index as the model material. Any point of interest inside the model can be brought under observation by x-y-z traversing mechanisms clearly seen in the photograph. A 5 mw He-Ne laser was used as the source of light (This is not seen in the photograph).

5. Applications

(a) Frozen Stress Model: First a model with stresses locked was investigated. A laser light (with no beam expander or a collimating unit) was used and the scattered light image was focussed on a photometer screen for intensity determination. The model was a circular cylinder loaded on one flat face with a point loading and uniformly supported on the other flat face. The stress pattern obtained is shown in Fig. 4. The results of these investigations agree very well with results obtained from other methods.

(b) Model Under Live-Load: A model whose geometry is shown in Fig. 5, was loaded at room temperature and investigated for stress distribution. Figures 6 and 7 show the scattered light stress pattern using a thin laser beam with no beam expander. The laser light was passed very close to the hole tip as shown in Fig. 8. Figure 9 shows the stress pattern observed with $\frac{1}{2}$ " sheet of light. The details of stress intensities and distributions have been carried out using the procedure described in this paper. The clarity of the fringe patterns reveal the ease with which investigations can be carried out on complicated models with initial cracks or discontinuities. Further, the fact that investigations

under live-load conditions can be carried out is extremely significant, particularly in the area of fracture mechanics.

References

- [1] Srinath L.S., 1969, Analysis of Scattered Light Methods in Photoelasticity, Experimental Mechanics, Vol. 9, No.9, pp. 463.
- [2] Jones C., and Hurtwitz H.Jr., 1941, A New Calculus for the treatment of Optical Systems, Journal of Optical Society of America, Vol. 31, pp. 493.
- [3] Aben H.K., 1966, Optical Phenomena in Photoelastic Models by the Rotation of Principal Axes, Experimental Mechanics, Vol. 6, N^o.1, pp. 13-22.
- [4] Srinath L.S. and Sarma A.V.S.S.R., 1974, Determination of Optically Equivalent Model in Three-dimensional Photoelasticity, Experimental Mechanics, Vol. 14, No.3, pp.113-122.

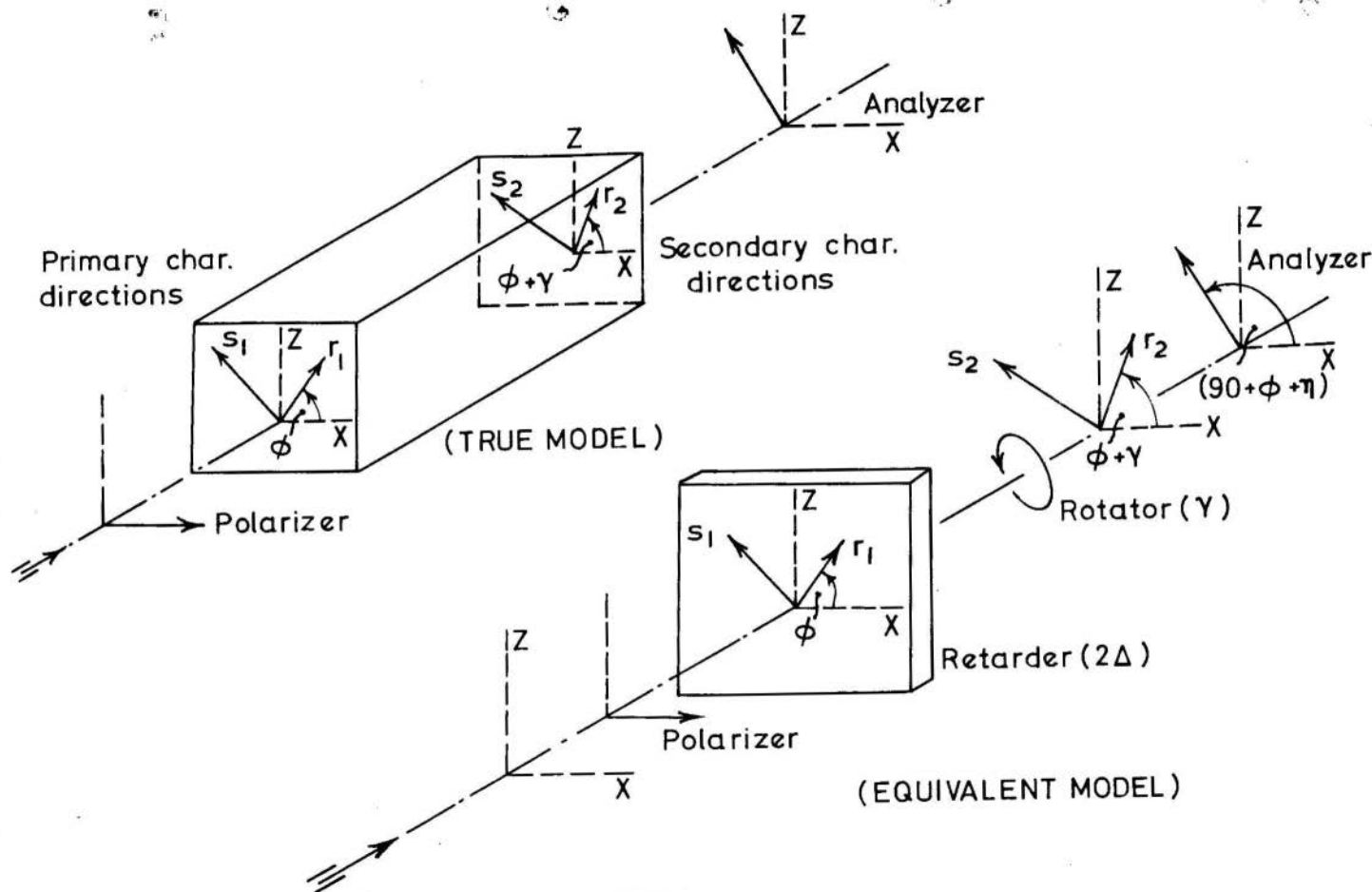
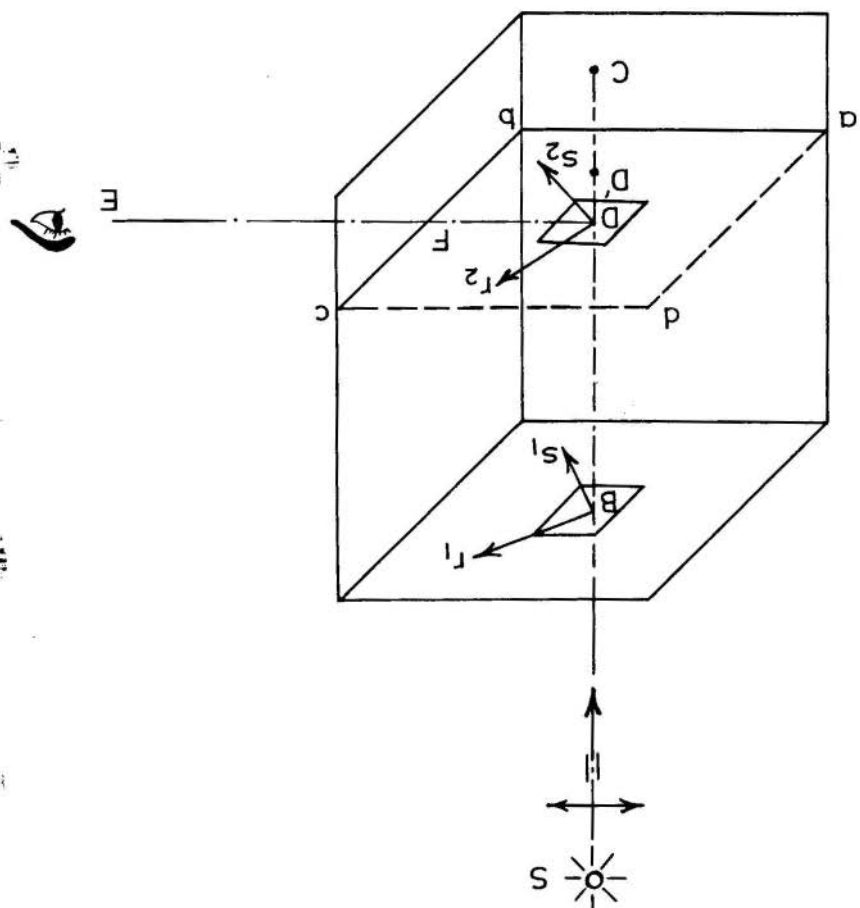


FIG.1.

FIG. 2.

(d)



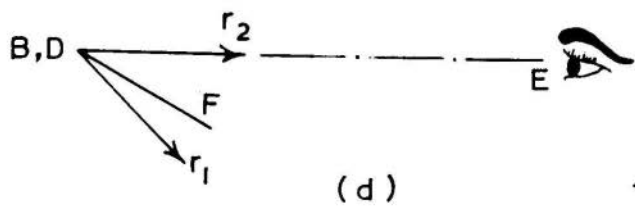
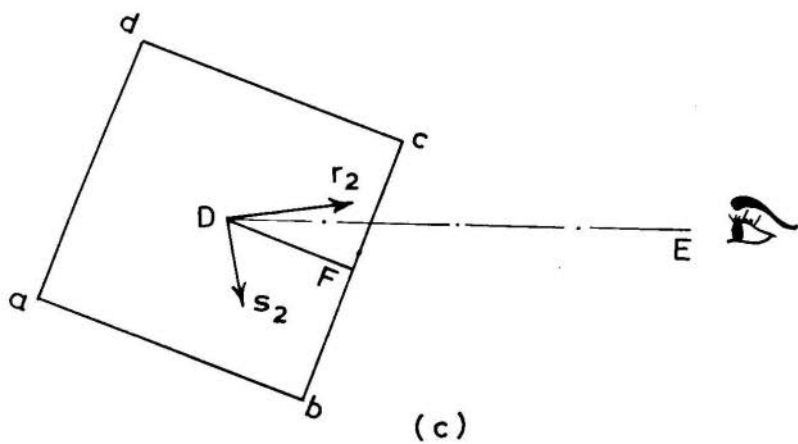
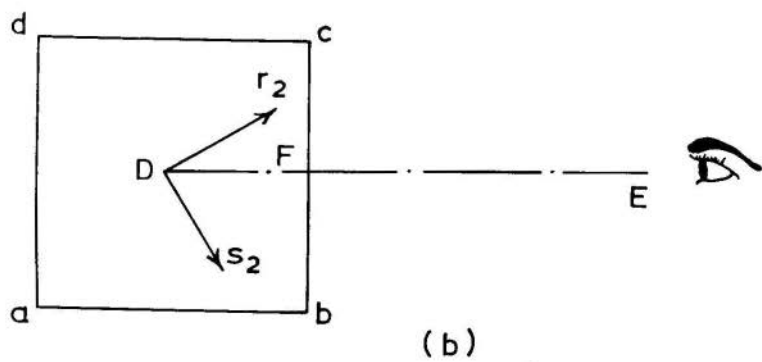


FIG.2.

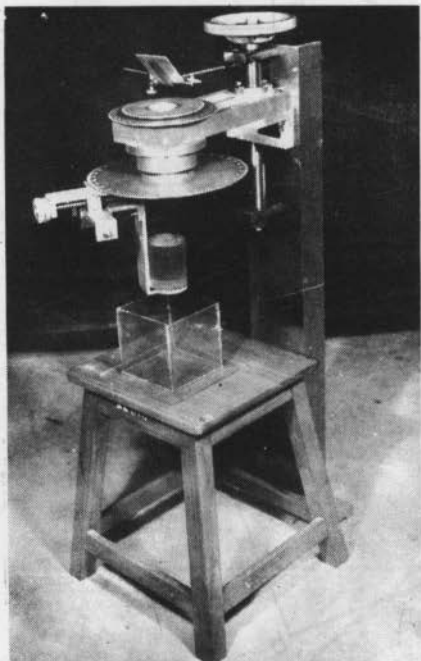


Fig. 3 - Photograph of Scattered Light
Polariscope

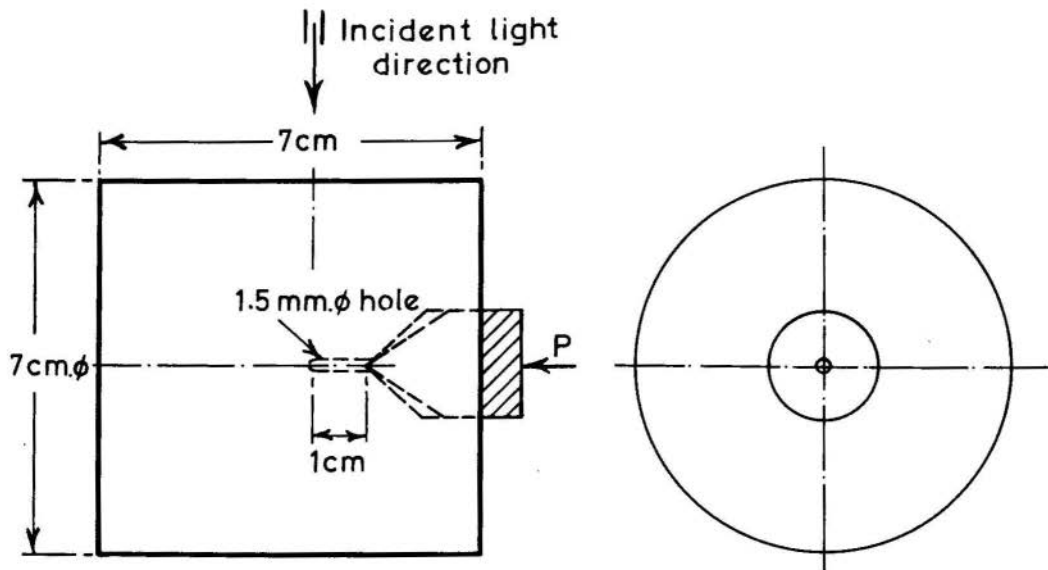


Fig. 4 - Geometry of the Model with Hole

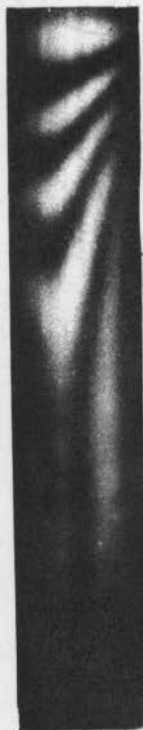


Fig. 5

Fig. 5 - Scattered Light Pattern

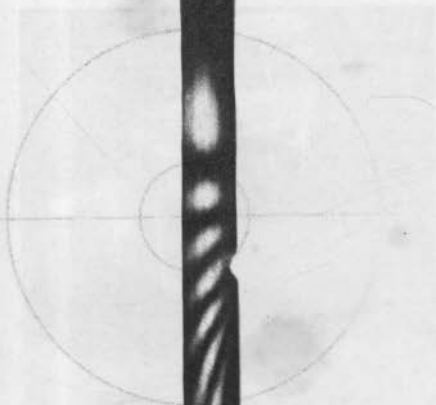


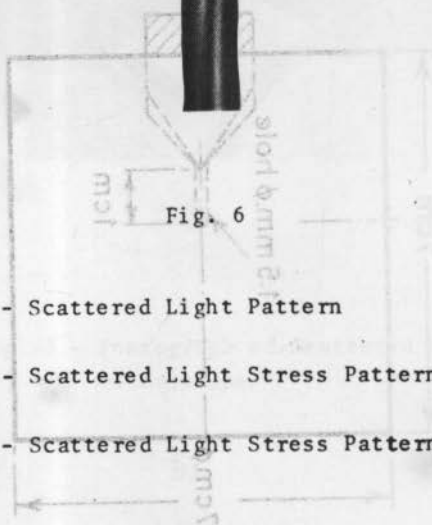
Fig. 6

Fig. 6 - Scattered Light Stress Pattern



Fig. 7

Fig. 7 - Scattered Light Stress Pattern



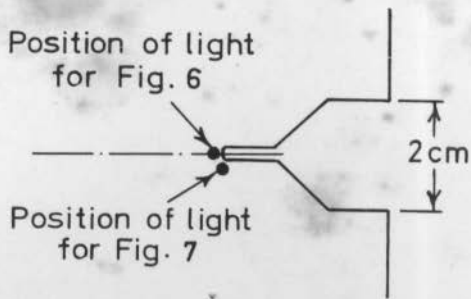


Fig. 8 - Location of Incident Light Beam for Pattern shown in Figs. 6 and 7.



Fig. 9 - Scattered Light Stress Pattern with a Sheet of Light.