



ABCM · CNPq · UFSC

ANAIS · PROCEEDINGS

**IV CONGRESSO  
BRASILEIRO DE  
ENGENHARIA  
MECÂNICA**

Florianópolis  
12·13·14 Dezembro 1977

## COMISSÃO ORGANIZADORA

### **Presidente:**

Dr. Nelson Back – CT/UFSC

### **Vice-Presidente:**

Dr. Luiz Bevilacqua – COPPE/UFRJ

### **Secretário:**

Dr. Sergio Colle – CT/UFSC

### **Tesoureiro:**

Dr. Domingos Boechat Alves – CT/UFSC

### **Editor-Chefe:**

Dr. José João de Espíndola – CT/UFSC

### **Conselho Editorial**

Dr. Alcir de Faro Orlando – CENTRO DE TECNOLOGIA PROMON

Dr. Agustin Juan Ferrante – COPPE/UFRJ

Dr. Arlindo de Almeida Rocha – RDEP

Dr. Arno Blass – CT/UFSC

Dr. Atair Rios Neto – E.P./USP

Dr. Celso Pascoli Bottura – FEC/UNICAMP

Dr. Cirus Macedo Hackenberg – COPPE/UFRJ

Dr. Clovis Sperb de Barcellos – CT/UFSC

Dr. Dieter Pfau – CT/UFSC

Dr. Dino Ferraresi – CENTRO DE TECNOLOGIA/UNICAMP

Dr. Duraid Mahrus – METAL LEVE SA.

Dr. Edison Castro Prates de Lima – COPPE/UFRJ

Dr. Eitaro Yamane – E.P./USP

Continua na contracapa



Jaime Tupiassu Pinheiro  
Castro

DUC/RJ

tel: 2475626

## VOLUME D

PROJETO DE MÁQUINAS

MACHINE DESIGN

OTIMIZAÇÃO

OPTIMIZATION

AUTOMAÇÃO E CONTROLE

AUTOMATION AND CONTROL

ELEMENTOS FINITOS

FINITE ELEMENTS

MÉTODOS NUMÉRICOS

NUMERICAL METHODS

# ÍNDICE - VOLUME D

## PROJETO DE MÁQUINAS

### MACHINE DESIGN

Paper D - 1, p. 1149 - 1160

Zoratto, D.L.

COPPE/UFRJ (Brasil)

"Investigação experimental de mancais esféricos ranhurados"

Paper D - 2, p. 1161 - 1175

Nakamura, P.K.; Pinto, A.R. de O.

UNICAMP (Brasil)

"Estudo da conexão entre um eixo de plástico reforçado e uma flange metálica para transmissão de momento de torção"

Paper D - 3, p. 1177 - 1184

Göz, R.D.S.; EFEI (Brasil)

Back, N.; UFSC (Brasil)

"Dissipação de energia em juntas: resultados teóricos e experimentais"

Paper D - 4, p. 1185 - 1198

Back, N.; UFSC (Brasil)

Burdekin, M.; Cowley, A.; UMIST (England)

"An elastic mechanism for the micro-sliding characteristics between contacting machined surfaces"

Paper D - 5, p. 1199 - 1211

Hussein, M.F.; Abu Dabhi (U.A.E.)

Hamed, A.A.; Cincinnati (U.S.A.)

"On the dynamic behavior of compressible journal bearings"

Paper D - 6, p. 1213 - 1221

Kuniyoshi, S.; Mahrus, D.

METAL LEVE (Brasil)

"Levantamento de condições de lubrificação hidrodinâmica em motores diesel modernos"

Paper D - 7, p. 1223 - 1233

Barwell, F.T.

Swansea (U.K.)

"The scope and limitation of the adhesion theory of wear as applied to engineering practice"

Paper D - 8, p. 1235 - 1245

Barwell, F.T.

Swansea (U.K.)

"Tribological problems on railways with particular reference to adhesion between wheel and rail"

Paper D - 9, p. 1247 - 1255

Barwell, F.T.

Swansea (U.K.)

"The study of particles as an aid to monitoring the condition of machine systems"

Paper D - 10, p. 1257 - 1270

Hellbrügge, R.T.; Lourenço, A.P.

Mahrus, D.; METAL LEVE (Brasil)

"Avaliação das solicitações em um motor a álcool"

Paper D - 11, p. 1271 - 1280

Hirata, M.H.; Mansour, W.M.

COPPE/UFRJ (Brasil)

"Rotores Darrieus"

Paper D - 12, p. 1281 - 1292

Moreira, L.A.; Ferraresi, D.

UNICAMP (Brasil)

"Uma contribuição ao dimensionamento de máquinas extrusoras para produtos cerâmicos"

TD - 1, p. 1543 - 1546

Gambarini, J.R.; Purquério, B. de M.

Ruffino, R.T.; EESC/USP (Brasil)

"Projeto de um protótipo de mesa com guias hidrostáticas"

TD - 2, p. 1547 - 1550

Purquério, B. de M.; Gambarini, J.R.

Ruffino, R.T.; EESC/USP (Brasil)

"Projeto de um protótipo de cabeçote de retificadora equipado com mancal aerostático"

## OTIMIZAÇÃO

## OPTIMIZATION

Paper D - 13, p. 1293 - 1302

Ramaswami, R.

FURG (Brasil)

"Geometric programming - An efficient and fast algorithm for optimizing machining parameters"

Paper D - 14, p. 1303 - 1312

Santos, W.N. dos; Cintra, W.H.

IEA (Brasil)

"Maximização da potência de um reator"

Paper D - 15, p. 1313 - 1325

Zouaïn, N.; Segenreich, S.A.

Herskovits, J.; COPPE/UFRJ (Brasil)

"Otimização estrutural em presença de flambagem global"

Paper D - 16, p. 1327 - 1341

Rios Neto, A.; Fleury, A. de T.

EP/USP (Brasil)

"Otimização da frequência fundamental e da distribuição de massa de uma viga em balanço"

Paper D - 17, p. 1343 - 1353

Barcellos, C.S. de; UFSC (Brasil)

Warner, W.H.; Minnesota (U.S.A.)

"Otimização de estruturas através de técnicas da teoria de controles e análise de elementos finitos"

TD - 3, p. 1551 - 1557

Moura, V.F.; Int. de Engenharia S/A (Brasil)

Segenreich, S.A.; COPPE/UFRJ (Brasil)

"Otimização geométrica de entreliçados"

## AUTOMAÇÃO E CONTROLE

## AUTOMATION AND CONTROL

Paper D - 18, p. 1355 - 1366

Lambert, T.; London (U.K.)

Elias, N.R.; Khartoum (Sudan)

"The application of a discontinuous control strategy to an electromechanical servomechanism"

Paper D - 19, p. 1367 - 1377

Nigro, F.E.B.; IPT (Brasil)

Strong, A.B.; Alpay, S.A.; Waterloo (Canada)

"Ótimo "over-lap" para máxima sensibilidade de pressão em servo-válvulas hidráulicas do tipo carretel"

Paper D - 20, p. 1379 - 1388

Bottura, C.P.; Burian Junior, Y.

Palhares, A.G.B.; UNICAMP (Brasil)

"Controle por realimentação de estado e modulação em largura de pulso de servomecanismo eletrohidráulico"

Paper D - 21, p. 1389 - 1398

Rios Neto, A.; Maizza Neto, O.; Moro, J.

EP/USP (Brasil)

"Análise de manobra de navio em linha reta"

Paper D - 22, p. 1399 - 1411

Brinati, H.L.; Rios Neto, A.

EP/USP (Brasil)

"Emprego de filtro adaptativo para identificação dos coeficientes do movimento do navio"

Paper D - 23, p. 1413 - 1422

Bottura, C.P.

UNICAMP (Brasil)

"Controle ótimo de turbina hidráulica"

Paper D - 24, p. 1423 - 1435

Quintana, V.H.; Waterloo (Canada)

Zörn, H.H.; UFSC (Brasil)

"Minimal-order observers for linear feed-back control systems"

Paper D - 25, p. 1437 - 1448  
 Barwell, F.T.  
 Swansea (U.K.)  
 "The governing parameters and engineering  
 alternatives for guided transport"

## ELEMENTOS FINITOS

### FINITE ELEMENTS

Paper D - 26, p. 1449 - 1458  
 Feijoo, R.A.; Taroco, E.  
 CBPF (Brasil)  
 "Formulacion de un elemento finito curvo para  
 la solucion de problemas en la teoria de  
 cascaras de revolucion"

Paper D - 27, p. 1459 - 1477  
 Blass, A.; UFSC (Brasil)  
 Lengyel, B.; London (U.K.)  
 "Laminação periférica de discos: I - Abordagem  
 teórica por elementos finitos"

Paper D - 28, p. 1479 - 1590  
 Groehs, A.G.; Creus, G.J.  
 UFRGS (Brasil)  
 "Análise elastoplástica de estado plano de  
 tensões utilizando elementos finitos"

Paper D - 29, p. 1491 - 1503  
 Gesteira, C.S.  
 UFB (Brasil)  
 "O método dos elementos finitos na resolução  
 da inequação variacional associada ao problema  
 da filtração"

TD - 4, p. 1559 - 1565  
 Pires Jr., F.C.M.; Hirata, M.H.  
 COPPE/UFRJ (Brasil)  
 "O método dos elementos finitos utilizado no  
 estudo do movimento de um fôlio perto da  
 superfície livre"



## MÉTODOS NUMÉRICOS

### NUMERICAL METHODS

Paper D - 30, p. 1505 - 1517

Bevilacqua, L.

COPPE/UFRJ (Brasil)

"Geração de uma família de operadores incrementais de integração numérica"

Paper D - 31, p. 1519 - 1531

Rosa, E. da; Alves, D.B.

UFSC (Brasil)

"Generalização no cálculo da probabilidade de interferência"

Paper D - 32, p. 1533 - 1542

Rosa, E. da

UFSC (Brasil)

"Aplicação da teoria da interferência de duas populações na previsão da confiabilidade"

# A N A I S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 1

PP. 1149 - 1160



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

### INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DE MANCAIS

#### ESFÉRICOS RANHURADOS

Dante L. ZORATTO, pesquisador  
Programa de Engenharia Mecânica  
COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro-RJ

#### 1. Introdução

Vários tipos de mancais hidrodinâmicos têm sido pesquisados no sentido de reduzir-se o consumo de potência e proporcionar sistemas mais estáveis.

O mancal esférico ranhurado foi proposto pela primeira vez por E.A. Muijderman [1] em 1964 e a partir desta data, extensivamente desenvolvido no PHILIPS INSTITUTE, por J. Bootsma [2], J.P. Reinhoudt [3] e outros. Além de baixo consumo e boa estabilidade os autores defendem a característica de alta vida do mancal em operação contínua. O presente trabalho objetiva desenvolver métodos de obtenção e teste de mancais ranhurados, tendo sido produzido um protótipo

de mancal com ranhuras executadas em fresadora controlada numéricamente e um banco para teste de operação à rotações e carregamentos variáveis.

### 1. Descrição do mancal

O mancal é constituído por uma semi-esfera de raio  $R$  associada ao elemento girante que atua em uma cavidade de raio  $R + \Delta R$ . (Fig.1.1).

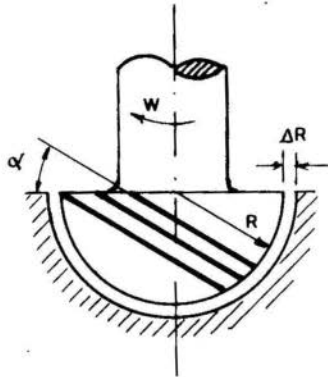


Fig.1.1. Mancal esférico ranhurado

Um dos dois elementos é ranhurado de forma a provocar um efeito de bombeamento do fluido lubrificante e a formação de um filme entre as duas partes. O mancal testado no presente trabalho tem as ranhuras praticadas sobre a parte girante, com inclinação tal que, a rotação no sentido horário determine o bombeamento de fora para dentro.

A capacidade de suporte é predominantemente axial e segundo [1], [2] é dada por:

$$P_z = 4\pi\eta WR^4 \frac{1}{H_r^2} g_1$$

onde:  $\eta$  = viscosidade do fluido

$W$  = rotação da parte móvel

$R$  = raio da semi-esfera

$H_r$  = distância entre as duas partes (=  $\Delta R$  para o caso de operação concêntrica).

$$g_1 = f(\alpha, \gamma, H_0)$$

onde:  $\alpha$  = inclinação da ranhura

$\gamma = \frac{B_r}{B_0}$ ,  $B_r$  = largura da parte ranhurada.  
 $B_0$  = largura da parte ranhurada

$H_0$  = profundidade da ranhura

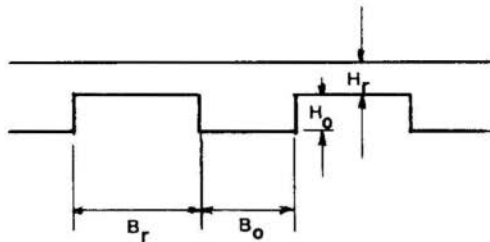


Fig.1.2 - Parâmetros físicos do mancal

A rigidez axial é dada por:

$$\frac{\partial P_z}{\partial e_z} = \frac{3}{2} \pi \eta W R^4 \frac{1}{H_r^3} g_{11}$$

onde:  $e_z$  = excentricidade axial (=0 para funcionamento concêntrico; =  $\Delta R$  quando as duas partes se tocam inferiormente).

$$g_{11} = f(\alpha, \gamma, H_0)$$

A potência dissipada é dada por:

$$\phi = \frac{4}{3} \pi \eta W^2 R^4 \frac{1}{H_r} g_2$$

onde  $g_2 = f(\alpha, \gamma, H_0)$

A combinação desejada de  $P_z$ ,  $\frac{\partial P_z}{\partial e_z}$ , e  $\phi$  é obtida pela variação dos parâmetros ( $\alpha, \gamma, H_0$ ).

O mancal apresenta uma certa capacidade de suporte radial que é função linear da excentricidade radial ( $e_r=0$  para funcionamento concêntrico; = $\Delta R$  na máxima excentricidade permitível sem haver contato entre as duas partes).

## 2. Execução do mancal

### 2.1. Parâmetros físicos

Utilizou-se os seguintes valores para os parâmetros físicos do mancal:

$$R = 9,5 \text{ mm}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$H_0 = .200 \text{ mm}$$

$$\Delta R = 50 \mu$$

As ranhuras em número de 6, foram executadas com fresa de tampo com terminação esférica sendo circular o perfil resultante,

O lubrificante utilizado foi, graxa semifluida (EPRO-00) da Shell.

### 2.2- Parte móvel

A parte móvel do mancal (semi-esfera ranhurada) foi obtida a partir de esfera de aço recozida de  $\phi=19 \text{ mm}$ , que apresenta diferenças da ordem de  $5 \mu$  no diâmetro. A usinagem necessária para permitir a fixação do elemento na pinça do motor foi feita como indica a figura 2.1.

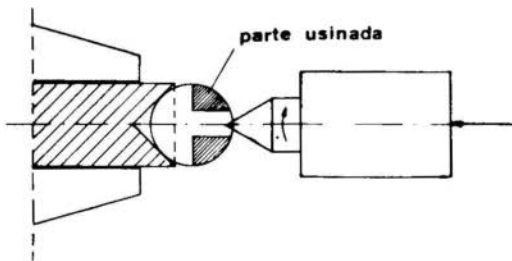


Fig. 2.1 - Usinagem da parte móvel

A peça resultante uma vez fixa na pinça do motor apresentou uma excentricidade de aprox.  $40 \mu$ , no diâmetro.

As ranhuras foram usinadas em fresadora controlada numericamente por um sistema da ICON COPORATION [3]. Este sistema, permite movimentar a mesa da fresadora nos sentidos  $xx$  e  $yy$  e a árvore da mesma no sentido  $zz$  com deslocamentos discretos a partir de informações lidas em fita

de papel. A perfuração da fita é feita através de programa de computador, seguindo-se a curva representativa da ranhura que se deseja praticar.

No caso, as ranhuras seguem uma espiral esférica que corta os meridianos com um mesmo ângulo ( $\beta = 30^\circ$ ), indicada na fig. 2.2.

A profundidade média das ranhuras é de 2,08 mm, com uma variação de 30% (+).

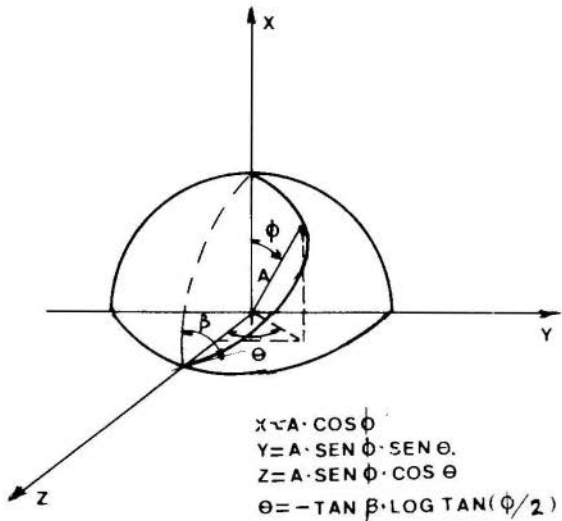


Fig. 2.2 - Curva representativa das ranhuras

Esta variação é devida aos seguintes fatores: a) A usinagem é feita com deslocamentos discretos e retilíneos; b) O ângulo de incidência da fresa sobre a peça é variável determinando flexão da fresa na parte final da ranhura; c) A existência de folga nos eixos de comando.

### 2.3. Execução da cavidade

A cavidade onde atua a semi-esfera foi obtida por conformação de uma peça de chumbo, com a esfera que deu origem à parte móvel. A diferença de raio necessária à formação do filme de lubrificante é obtida por remoção de mate



rial da cavidade durante as primeiras horas de funcionamento do mancal.

As próprias ranhuras praticadas na semi-esfera contribuem para este trabalho que é feito a baixa rotação.

### 3. Banco de teste

Para teste do mancal foi concebido o banco ilustrado na fig. 3.1.

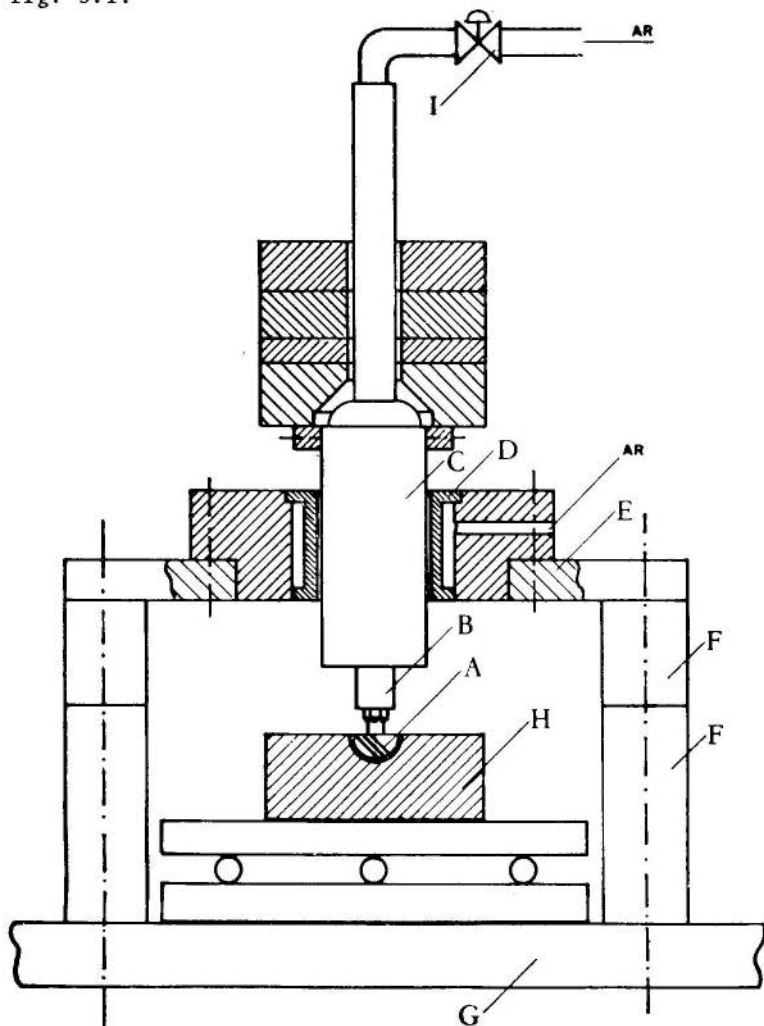


Fig. 3.1 - Banco de teste do mancal

A parte móvel do mancal (semi-esfera ranhurada) (A), é fixa por meio de uma pinça em um motor pneumático de alta rotação (B).

A carcaça do motor é solidamente centrada em um cilindro (C) que está livre de se mover verticalmente em uma bucha (D). Entre o cilindro e a bucha existe uma película de ar formada por injeção radial à pressão de  $5-7 \text{ kg/cm}^2$ . O prolongamento do motor é utilizado como receptor de pesos que permitem a variação da carga axial sobre o mancal.

A bucha (D) está fixa em uma placa (E) apoiada em colunas de altura variável pela adição ou subtração de espaçadores de dimensões padronizadas (F) fixas na mesa (G).

A parte estacionária do mancal (H) está fixa a duas placas retificadas e separadas por esferas de aço que permitem deslocamento radial com mínimo atrito; este dispositivo permite a centragem automática do mancal.

A rotação do motor é variável através da válvula reguladora de pressão (I), e é medida utilizando-se o sistema da fig. 3.2.

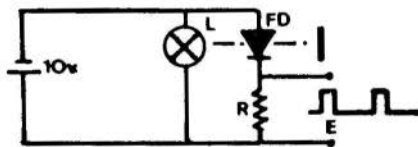


Fig.3.2 - Medida de rotação

A luz emitida em (L) é refletida no eixo do motor e recebida pelo foto-diodo (FD). Recobrimdo o eixo parcialmente por uma superfície refletora obtém-se uma tensão de saída pulsada (E) em que cada pulso corresponde à uma rotação do eixo.

O teste de funcionamento do mancal é feito medindo-se a existencia ou não de contato entre as partes móvel e estacionária.

Utilizou-se para esta medida o dispositivo indicado na fig. 3.3 onde o contato com o eixo é feito com uma mo-

la plana.

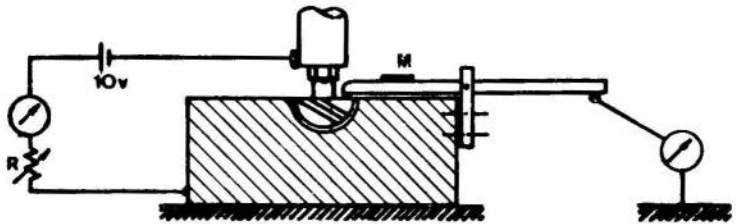


Fig.3.3- Teste de contato e medida de desl. axial

Qualquer contato permanente existente entre as duas partes do mancal, é indicado pela deflexão total no amperímetro. A deflexão parcial fornece uma indicação do percentual de tempo em que existe contato entre as duas partes.

O deslocamento axial da parte móvel do mancal em relação à parte estacionária é medido como mostra a fig.3.3. O braço de alavanca é mantido em contato com a superfície plana da parte móvel do mancal, por meio de uma mola plana (M). O deslocamento é medido na outra extremidade da alavanca.

#### 4. Procedimento experimental

##### 4.1 Ajuste da cavidade

O ajuste da cavidade do mancal foi feito por remoção de material durante operação à baixa rotação, medindo-se periodicamente a penetração da esfera na cavidade, utilizando-se para isto, o dispositivo de medida de deslocamento axial Fig.3.3.

Este procedimento foi acompanhado por verificação do nível de contato entre as duas partes, pelo aquecimento produzido e pela variação de coloração da graxa, originalmente clara.

Ao final desta fase a penetração atingiu  $60\ \mu$ , não se podendo garantir que a remoção de material tenha sido uniforme ao longo da cavidade, uma vez que não foi medida; o mancal não apresentou contato quando operado abaixo de 3000RPM: Acima deste limiar apresentou um percentual de tempo de contato crescente e vibração de amplitude também crescente.

##### 4.2 Estudo do deslocamento radial das partes móvel e

estacionária.

A hipótese formulada para a existência de contato acima de um certo limiar foi a de que, existindo excentricidade na parte móvel do mancal, este funcionaria sem contato se a parte estacionária acompanhasse o movimento excêntrico. Esta hipótese foi testada medindo-se o deslocamento das duas partes conforme mostrado na Fig. 4.1.

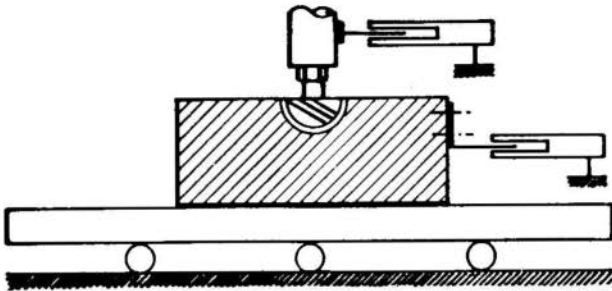


Fig.4.1 - Medida de deslocamento radial das partes móvel e estacionária.

As lâminas que estão associadas às partes móvel e estacionária do mancal, se deslocam entre um feixe luminoso (L) e um foto-diodo (FD), obtendo-se desta forma uma tensão de saída (E) representativa dos deslocamentos que se deseja medir (Fig. 4.2).

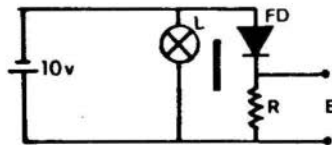


Fig. 4.2 - Transdutor de medição de deslocamento

Os deslocamentos das duas partes se mantêm em fase até 3000 RPM notando-se a partir daí um defasamento crescente o que pode explicar a existência de contato acima desta rotação.

### 4.3 - Medida do deslocamento axial em função da rotação e da carga axial.

Utilizando pesos padrões, variou-se a carga axial sobre o mancal e mediu-se o deslocamento axial em função da rotação sendo os resultados apresentados no gráfico da Fig.4.3, onde a posição de repouso do mancal corresponde a deslocamento zero.

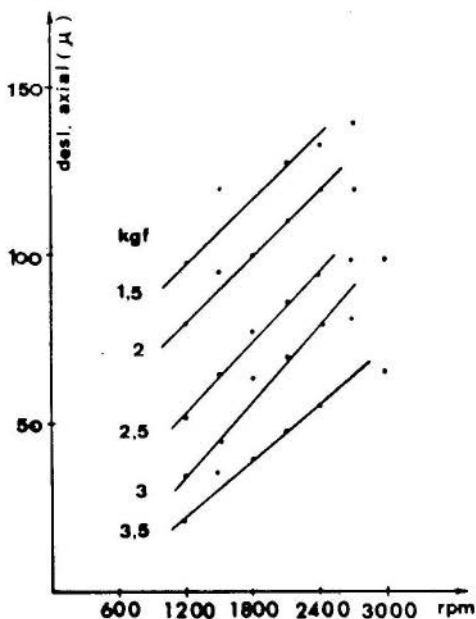


Fig. 4.3 - Deslocamento axial em função da rotação

No início da experiência verifica-se que, a uma dada rotação e com uma carga axial constante, a elevação da parte móvel do mancal decresce com o tempo, até atingir um valor estável, o que se verifica, após decorridos aproximadamente 60 minutos. Isto é explicável pela variação de viscosidade da graxa com a temperatura que, por sua vez, é crescente até ser atingido o equilíbrio entre a geração de calor no mancal e a convecção ao meio.

Por este motivo, foram realizadas séries isoladas de medidas para cada valor de carga axial, iniciando-as somen-

te após atingido a estabilidade referida.

### 5. Conclusões

Os resultados obtidos até 3000 RPM, são compatíveis com o modelo teórico apresentado por Bootsma [2] podendo-se identificar por exemplo linearidade da capacidade axial com a rotação (para um mesmo deslocamento axial) e o crescimento da capacidade de carga com a diminuição do deslocamento axial (diminuição de HR) para uma mesma rotação (Fig.4.3). Podemos concluir que os métodos utilizados na obtenção do mancal são viáveis para operação, até 3000 RPM.

O funcionamento apropriado do mancal acima deste valor está ligado a estudos mais detalhados do seu sistema dinâmico.

### Agradecimento

O autor agradece a orientação do Prof. Jan Leon Scieszko da COPPE/UFRJ.

### Bibliografia

- (1) MUIJDERMAN, E.A. - "Spiral groove bearings Thesis", Technological University Delft, March 1964.
- (2) BOOTSMA, J. - "Liquid-Lubricated Spiral-groove Bearings" Thesis Technological University Delft, 19 November 1975, Philips Res.Repts. Suppl. 1975 n° 7.
- (3) REINHOUDT, J.P. - "On the Stability of rotor-and-bearing systems and on the calculation of sliding bearings" Philips Res.Repts.Suppl. 1972 n° 1.
- (4) Operator's Instruction Manual for TEAM NUMERICAL CONTROL SYSTEMS (Icon Corporation) May, 1971.



ZORATTO D.L.

INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DE MANCAISESFÉRICOS RANHURADOSSumário

Foram desenvolvidos métodos de obtenção e teste de mancais esféricos ranhurados. Um protótipo de mancal em que as ranhuras foram obtidas em fresadora controlada numericamente, foi testado, medindo-se a existência ou não de contato entre as partes móvel e estacionária do mancal e o deslocamento axial em função da carga aplicada e da rotação.

---

EXPERIMENTAL STUDIES ON SPHERICALGROOVED BEARINGSSummary

Method for the constructing and testing of spherical spiral-grooved bearings have been developed. A prototype bearing, whose grooves were obtained by a numerical control machine, has been tested with a view to verifying whether contact occurred between the bearing rotor and stator. The axial displacement has been measured as a function of applied load and rotational speed.

# A N A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 2

PP. 1161 - 1175



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

ESTUDO DA CONEXÃO ENTRE UM EIXO DE PLÁSTICO RE-

FORÇADO E UMA FLANGE METÁLICA PARA TRANSMISSÃO

DE MOMENTO DE TORÇÃO

Paulo Koji NAKAMURA

Augusto Ruy de OLIVEIRA PINTO

Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Engenharia de Campinas

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Campinas, SP - Brasil

### 1. Introdução

As propriedades extraordinárias dos polímeros reforçados com fibras de vidro, tem motivado seu crescente emprego em quase todos os ramos da atividade humana. Estes materiais apresentam alta resistência mecânica, baixo peso espe

cífico, resistência a agentes químicos além da possibilidade de conformação em peças de geometria complexa, tornando-os preferíveis em muitos casos aos materiais tradicionais.

Demonstrou-se [1] a viabilidade da construção de eixos de transmissão em poliéster reforçado com fibra de vidro. Porém, para que estes eixos preencham os requisitos necessários para utilização prática, tornou-se indispensável um estudo sobre a maneira de conectá-lo com outros elementos de máquinas (motores, redutores, etc). Escolheu-se para a função o sistema de flanges metálicas colocadas em suas extremidades. Os primeiros estudos mostraram que a região de conexão plástica metal é crítica sob o ponto de vista de concentrações de tensão. Dentre vários formatos imaginados, um deles resultou globalmente mais vantajoso encarando-se aspectos tais como: facilidade de construção, simplicidade de forma e menor grau de concentração de tensões.

O objetivo do presente trabalho consiste na otimização das proporções geométricas deste formato particular através de análise experimental de tensões por fotoelasticidade visando, primordialmente, redução no índice de concentração de tensões.

## 2. Problema Estudado e Procedimento de Estudo

O corpo de prova básico e o sistema de conexão escolhidos aparecem na Fig. 1. Em 1 tem-se o corpo cilíndrico em poliéster (resina PolyLite 8000 - Resana) reforçado com fibras de vidro; em 2 aparece uma das flanges executada em aço ABNT 1045. As regiões de conexão são indicadas pelos números 3 e 4; o reforço principal, 5, com disposição em malha helicoidal a  $45^\circ$  é complementado nos extremos pelo reforço secundário 6, ambos em fibra tipo "yarn" da OWENS-CORNING FIBERGLASS.

A conexão comporta-se com um clássico perfil ranhurado, com ranhuras de perfil circular, cujos parâmetros aparecem na Fig. 2. Diâmetros  $D$  e  $d_i$ , externo e interno respectivamente mantidos constantes em todos os corpos de prova, bem como a parede resistente ( $e - h$ ). O raio  $r$  da ranhura é a dimensão variável, sendo a relação  $r/D$  o parâmetro ca-

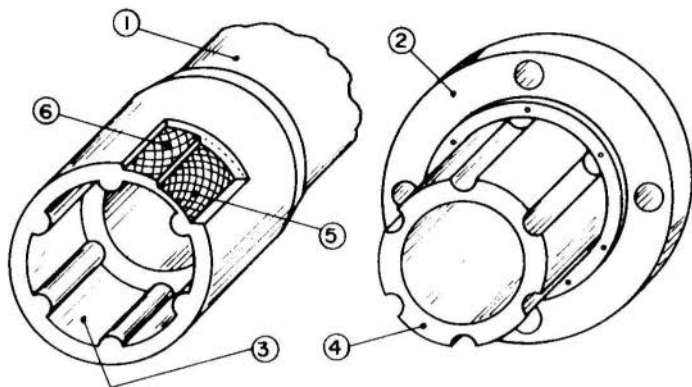


Figura 1 - Corpo de Prova

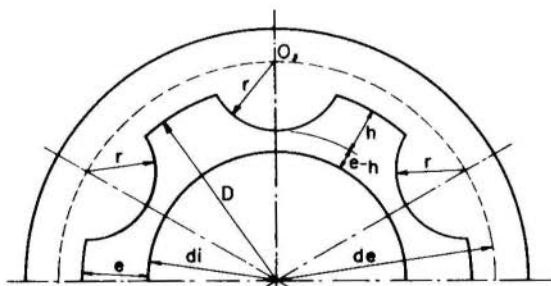


Figura 2 - Parâmetros característicos da conexão

racterístico em função do qual estudou-se o índice de concentração de tensões, que ocorre no material plástico.

O momento torçor  $M_t$  aplicado à flange, Fig. 3, se converte em pressões entre a ranhura metálicas e uma das faces do ressalto plástico e cuja distribuição ao longo do arco a'b é desconhecida. Tendo a ranhura comprimento suficiente

mente longo, as pressões podem ser consideradas uniformes no sentido de suas geratrizes. O ressalto atua como uma viga engastada segundo a secção de engaste aa'.

A inviabilidade da determinação por via analítica das tensões e deformações no material plástico obrigou o emprego de uma técnica de análise experimental, sendo a por fotoelasticidade a que melhor se ajustava às condições.

Os ensaios de ruptura mostraram que o ressalto cisa - lhava segundo a secção de engaste aa' fato explicável devido aos seguintes fatores: baixa resistência devido à inexistência de reforço, tensões normais de flexão desprezíveis em face das de cisalhamento em virtude da altura  $h$  ser sempre inferior ao arco aa'/2. [2]

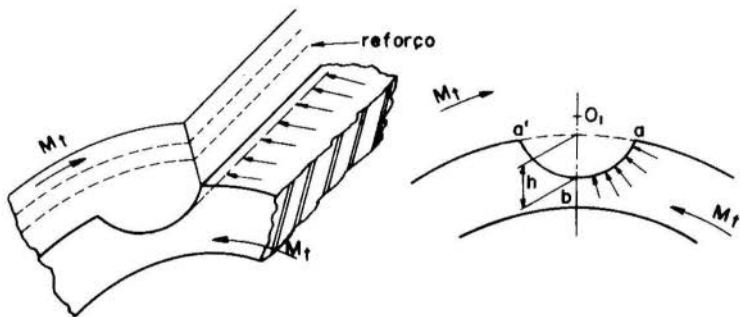


Figura 3 - Esforços atuantes na região do ressalto

### 3. Modelo Fotoelástico

Como o corpo de poliéster é moldado diretamente sobre a flange metálica inexistem folgas entre ranhura-ressalto assegurando que os efeitos do torque se distribuem uniformemente entre os  $n$  ressaltos. Desta maneira o estudo de apenas um par de ranhura ressalto permite a extensão das conclusões ao conjunto. Demoradas pesquisas conduziram ao modelo fotoelástico bidimensional ideal, Fig. 4, que reproduzia em es-

cala ampliada apenas um ressalto. Este é o plano usinado a partir de placas com 1/4 pol. de espessura, sendo o material fotoelástico resina epoxy PSM-1 da Photolastic, Inc. Foram executados 8 modelos diferentes em que se efetuava um tratamento térmico especial em estufa programada para eliminação das tensões residuais de usinagem.

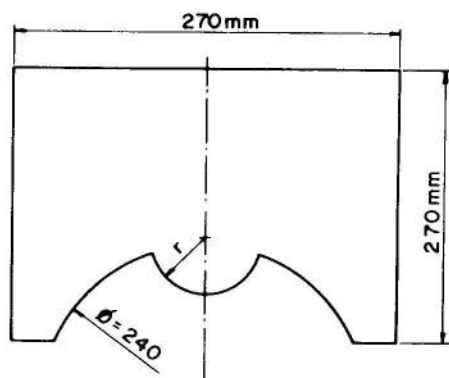


Figura 4 - Modelo Fotoelástico Bidimensional

A Fig. 5 ilustra o dispositivo de fixação do modelo e

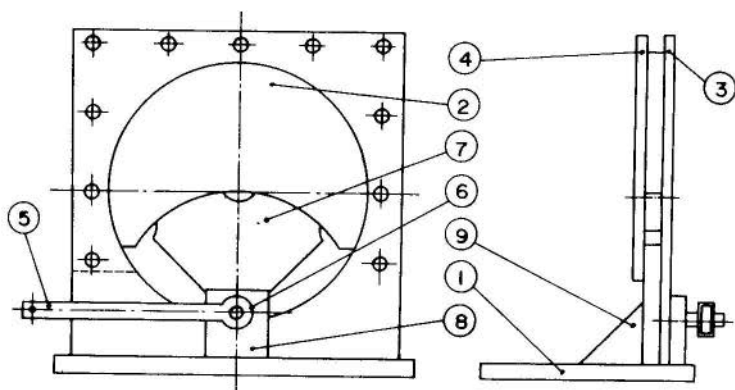


Figura 5 - Dispositivo de fixação e aplicação de cargas no modelo fotoelástico



aplicação de cargas que vai instalado no polariscópio e cujos componentes são: 1. Base do conjunto. 2. Modelo fotoelástico. 3 e 4. Chapas de posicionamento e fixação do modelo. 5. Alavanca à qual são aplicadas cargas aferidas transmitindo torque ao eixo 6 que por sua vez transmite-o à peça 7, de aço, que simula uma ranhura da flange. 8 e 9 mancal e seu suporte.

#### 4. Experimentação

De conformidade com os ensaios de ruptura realizados previamente, conclui-se ser a secção em arco de círculo  $\widehat{aa'}$  Fig. 6, a mais crítica sob o ponto de vista de resistência.

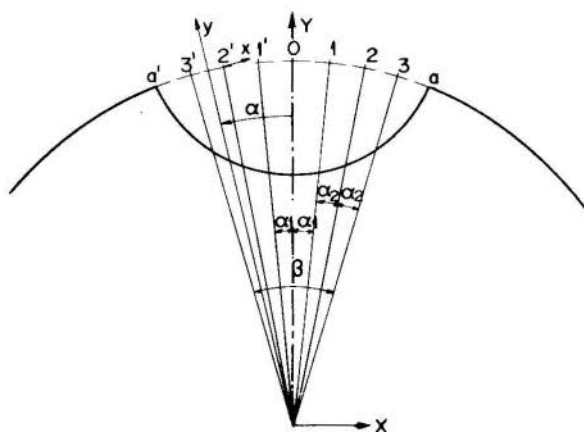


Figura 6 - Secção crítica do ressalto  $aa'$

Desta forma, o estudo fotoelástico foi orientado no sentido de investigar as tensões ali atuantes, levantando o diagrama de sua distribuição e detectando os pontos de concentração. Com o fito de sistematizar a pesquisa, foram definidos nos vários perfis estudados ponto bem definidos: 1, 2, 3, etc. 1', 2', 3', etc. Como se suspeitava serem os extremos  $a$  e  $a'$ , re

giões de concentração situaram-se nas suas proximidades pontos menos espaçados. Todos os pontos foram referidos pelo ângulo  $\alpha$  formado entre o raio que por eles passava e a bissetriz Y de  $\widehat{aa'}$ , um dos eixos do referencial principal x, y, z, com origem em 0.

##### 5. Tensão de cisalhamento em um ponto da secção aa'

Considere-se um ponto genérico P de  $\widehat{aa'}$ , fig. 6, Associe-se a P um sistema de referência triortogonal x, y, z, sendo x coincidente com a tangente por P e z normal ao plano do perfil. As tensões atuantes nos planos passando por P e normais a x, y, z definem o estado de tensão neste ponto [2]. Sendo  $\sigma_{xx}$  a tensão normal na direção x e aplicada no plano ortogonal ao eixo x e  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$  a demais tensões normais, estabeleceu-se a hipótese, comprovada experimentalmente "a posteriori", que:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} = 0 \quad \text{em pontos ao longo de z} \quad (1)$$

Isto permite restringir o estudo ao estado bidimensional de tensões, segundo os elementos de superfície, coincidente com o plano do modelo e sobre o qual atuam as tensões indicadas na Fig. 7. Conhecidas as tensões em dois planos ortogonais passando pelo ponto P, por exemplo, os planos normais a x e y, se pode determinar as tensões em quaisquer

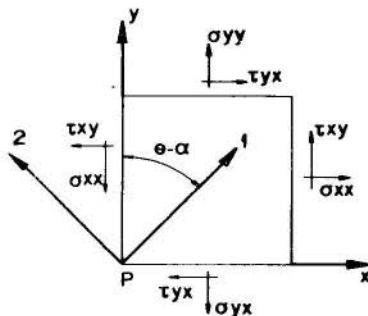


Figura 7

outros planos que contenham P, conhecidas as direções dos mesmos em relação a x e y. [2]. Condição expressa pela equação:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = [N]^t [T_{\sigma}]_P [N] \quad (2)$$

onde no primeiro membro consta a matriz das incógnitas a determinar, sendo:

$[T_{\sigma}]_P$  o tensor das tensões conhecidas em P e

[N] a matriz dos cossenos diretores dos ângulos formados pelos planos em consideração.

No caso particular em estudo

$$[T_{\sigma}]_P = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões principais em P determináveis pela análise fotoelástica e portanto conhecidas, atuantes nos planos definidos pelas direções 1 e 2. A solução final da equação fornece a tensão de cisalhamento atuante em P segundo  $\widehat{aa'}$ :

$$\tau_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \operatorname{sen} 2(\theta - \alpha) \quad (4)$$

com  $\alpha$  ângulo de referência entre y e Y e  $\theta$  ângulo formado entre a direção 1 da tensão principal  $\sigma_1$  e o referencial principal Y.

## 6. Técnica de ensaios

O ângulo  $\alpha$  pode ser determinada graficamente com suficiente precisão. A determinação de  $\theta$  e da diferença  $\sigma_1 - \sigma_2$  se faz pela técnica fotoelástica de medida empregando o polarizador e a expressão [4]:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N f\sigma/h \quad (5)$$

sendo  $N$  o número de ordem de franja passando por  $P$ ,  $f\sigma$  o coeficiente ótico de tensão, característica própria do material fotoelástico, previamente, conhecida e  $h$  a espessura do modelo.

Para locação dos pontos de medida executava-se um desenho do modelo em papel transparente, idêntico à figura 6, traçando-se por cada um dois eixos paralelos ao referencial  $xy$ . Este papel era colado sobre o modelo de forma a não interferir com o sinal fotoelástico. Quando a um determinado ponto  $P$  não correspondia uma das posições de ordens inteiras de franjas  $N$ , aplicou-se o método de compensação de Tardy para determinação das franjas fracionárias correspondentes. Verificou-se ser difícil captar a olho nu o instante em que as franjas isóclinas ou isocromáticas coincidiam com os pontos em estudo. O problema foi contornado construindo um dispositivo fotoresistivo que se focalizava sobre o ponto de medida. O sinal emitido por este instrumento indicava o instante preciso da coincidência.

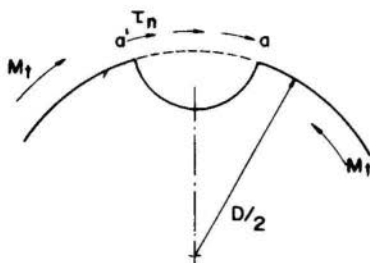
O equipamento básico empregado foi o fotoelasticímetro de transmissão da Photoelastic Inc. série 261, com todos os acessórios: fonte luminosa, telemicroscópio e câmera fotográfica.

### 7. Avaliação do Índice de concentrações de tensão nos perfis

A Teoria da Elasticidade [2] conceitua o coeficiente estático de forma  $\alpha_k$  como o parâmetro de avaliação quantitativa do Índice de concentração de tensões que ocorre em uma peça por efeito de um entalhe - furos, rasgos, etc. - ou a uma particularidade de forma - variação de diâmetros, mudança de direção de uma secção, etc. Este é definido como a relação entre o valor máximo,  $S_{max}$ , alcançando pela tensão real na região entalhada e o valor nominal,  $S_n$ , calculado a través da teoria da elasticidade. Os fatores de influência sobre o valor de  $\alpha_k$  são somente: tipo de entalhe, suas proporções geométricas e a modalidade de sollicitação.

Foram ensaiados 5 diferentes ressaltos obedecendo ao exposto no capítulo 2 e cujas relações  $r/D$  foram de 0,0625 - 0,10 - 0,15 - 0,20 e 0,25. Para cada um deles procedeu-se a uma série de carregamentos, variando o momento torçor aplicado e verificando-se os pontos de concentração de tensão ao longo de  $\widehat{aa'}$  e computando os valores alcançados pela tensão de cisalhamento máxima  $\tau_{xy}$ .

A tensão de cisalhamento  $\tau_n$  foi calculada pela expressão (6), fig. 8 e  $\alpha_k$  pela (7).



$$\tau_n = \frac{M_t}{aa' \cdot h \cdot D/2} \quad (6)$$

$$\alpha_k = \tau_{xy \text{ max}} / \tau_n \quad (7)$$

Figura 8 - Tensão de cisalhamento nominal

O coeficiente de entalhe estático, no caso em estudo, será função do sistema: material do ressaltado - material da ranhura e da relação  $r/D$  para o tipo de esforço para o qual foi previsto: momento de torção. Desde que todos os modelos foram feitos dos mesmos materiais, portanto,  $\alpha_k$  dependerá unicamente da variável  $r/D$ .

### 8. Resultados

Na foto da figura 9 pode ser apreciado o espectro de franjas isocromáticas do modelo com relação  $r/D = 0,20$ . O momento aplicado à ranhura metálica - zona escura da foto - tem sentido antihorário.

A região de concentração de tensões situa-se no entorno do ponto a da secção  $\widehat{aa'}$ , fato que se repetiu nos demais perfis.

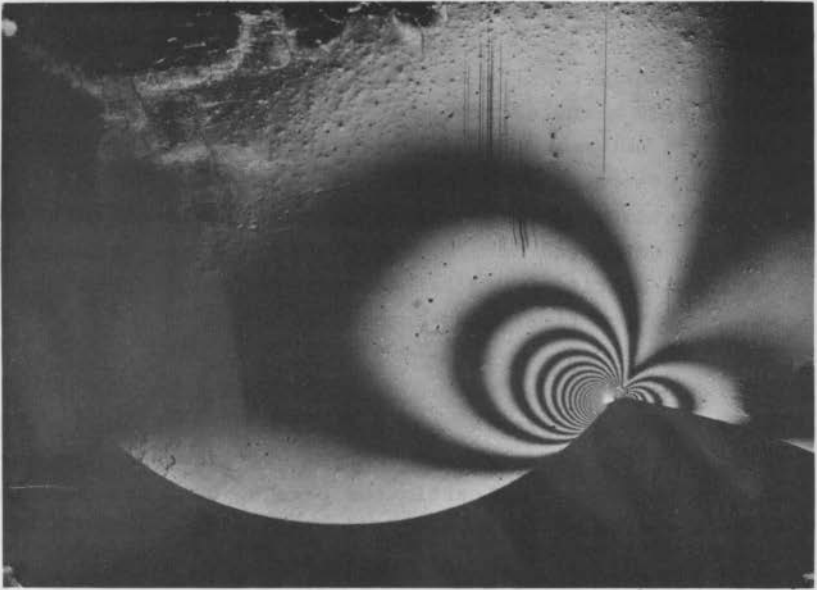


Figura 9 - Franjas isocromáticas no modelo com relação  
 $r/D = 0,20$

A figura 10, apresenta o diagrama polar dos valores de

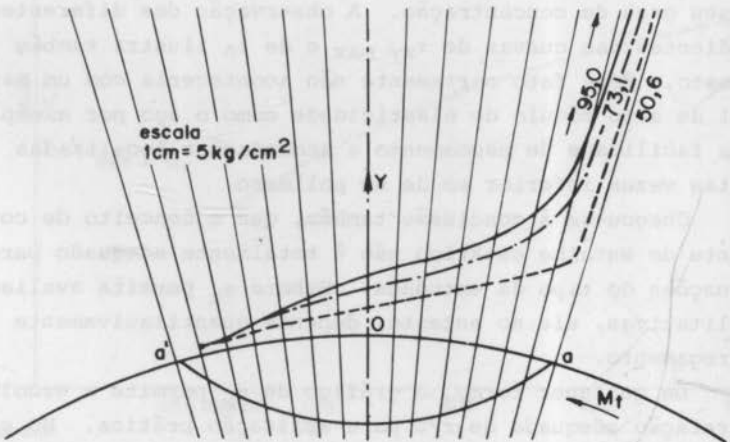


Figura 10 - Diagrama polar  $\tau_{xy}$ , relação  $r/D = 0,25$

$\tau_{xy}$  determinados para três diferentes carregamentos: carregamento A com  $M_t = 220$  kg.cm; carregamento B,  $M_t = 320$  kg.cm; carregamento C,  $M_t = 420$  kg.cm. Nos perfis com  $r/D$  inferior a 0,20 e nos carregamentos B e C a região entorno de  $a'$ , o outro extremo do arco, apresentava também um pequeno índice de concentração de tensões.

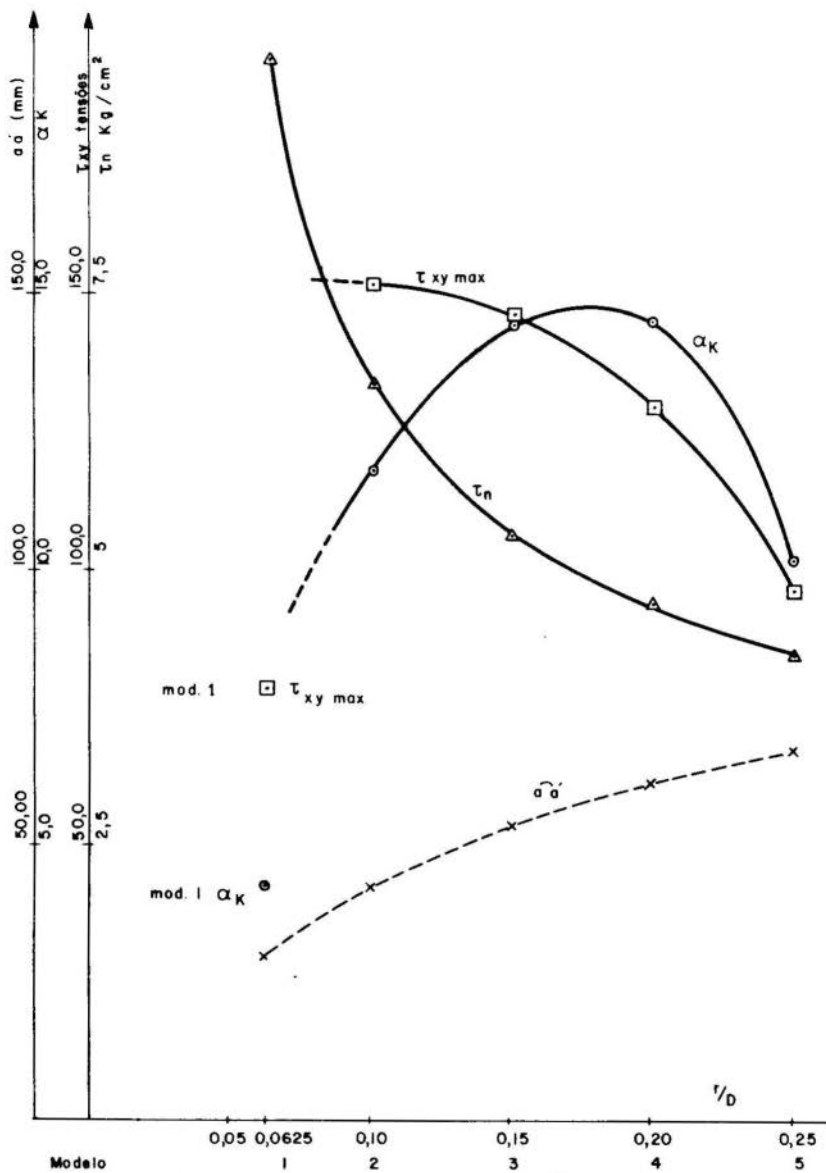
O resultado final do trabalho está consubstanciado no gráfico  $\alpha_k$  em função de  $r/D$ , figura 11. Como elementos auxiliares de análise foram lançados também os valores de  $\tau_n$ ,  $\tau_{xy}$  max e do comprimento do arco  $\widehat{aa'}$ .

### 9. Conclusão

Tinha-se a impressão nos primeiros ensaios que  $\alpha_k$  fosse crescente com o decrescimento de  $r/D$ . Verificou-se, no entanto, um comportamento particular para  $\alpha_k$  que alcança um máximo para o valor 0,175 de  $r/D$  decrescendo para valores inferiores, contrariando as expectativas. O fenômeno pode ser explicado devido às deformações importantes que ocorrem na resina nos modelos com  $r/D = 0,0625$  e 0,15, causadas pelo baixo módulo de elasticidade deste material aliado a um alto índice de fluência e também à decrescente rigidez dos perfis. Estas deformações vêm concorrer para uma redistribuição mais uniforme das tensões reduzindo consideravelmente seu grau de concentração. A observação dos diferentes gradientes das curvas de  $\tau_{xy}$  max e de  $\tau_n$  ilustra também o exposto. Este fato certamente não aconteceria com um material de alto módulo de elasticidade como o aço por exemplo, cuja facilidade de escoamento e acomodações localizadas é muitas vezes inferior ao de um polímero.

Chegou-se à conclusão também, que o conceito de coeficiente de entalhe estático não é totalmente adequado para situações do tipo da estudada. Embora  $\alpha_k$  permita avaliações qualitativas, ele no entanto, depende quantitativamente do carregamento.

De qualquer forma, o gráfico de  $\alpha_k$  permite a escolha da relação adequada de  $r/D$  para aplicação prática. No caso de perfis com relação superior a 0,175 tem-se uma possibilidade vantajosa. O volume da ranhura aumentando com  $r$  torna

Fig. II - Gráficos de  $\tau_{xy \text{ max}}$ ,  $\alpha K$ ,  $\tau_n$  e do arco  $\alpha' \alpha'$



viável a inclusão de fibras de reforço nesta região, melhorando consideravelmente o comportamento resistente desta região crítica.

Finalmente este estudo criou condições para que se procedessem modificações nos perfis visando melhoria de sua eficiência [5]. Assim procedeu-se a um rasgo com pequeno raio, no ressalto, exatamente nos pontos  $a$  e  $a'$ , arestas do perfil, conseguindo-se reduções de 50% no valor de  $\alpha_k$ .

#### Bibliografia

- [1] Oliveira Pinto, A.R., Torção em Barras Cilíndricas de Poliester Reforçado - E.E.S.C. - USP (1972).
- [2] Timoshenko, S.P. - Goodier, J.N., Theory of Elasticity Mc Graw Hill (1973).
- [3] Instructions for Molding and Contouring Photoelastic Sheets, Bulletin I BP-310, Photoelastic Inc.
- [4] Frocht, M.M., Photoelasticity, Vol. I e II, J. Wiley & Sons, N.Y. (1970).
- [5] Fernandes, O.C., Uma contribuição ao Estudo das Tensões na Raiz de Dentes de Engrenagens - Determinação da Influência do Raio do Filete Utilizando a Técnica Fotoelástica, E.E.S.C. - USP (1972).

NAKAMURA, P.K., e OLIVEIRA PINTO, A.R.

ESTUDO DA CONEXÃO ENTRE UM EIXO DE PLÁSTICO REFORÇADO E UMA  
FLANGE METÁLICA PARA TRANSMISSÃO DE MOMENTO DE TORÇÃO

Sumário

Em trabalho anterior de um dos autores, foi demonstrada a viabilidade da construção de eixos para transmissão de potência, construídos em poliéster reforçado com fibras de vidro. O emprego deste material apresenta grandes vantagens em aplicações que requeiram: alta resistência mecânica associada a baixo peso e também inércia em face a agentes químicos agressivos. O presente estudo é uma seqüência do primeiro, em que se aborda o problema de conexão entre o eixo de plástico reforçado e as flanges irão em suas extremidades, sendo estas, necessárias para união com outros elementos de máquinas. Na região de conexão ocorrerão inevitáveis concentrações de tensões que se procurou minimizar, pesquisando vários formatos através da análise experimental de tensões por fotoelasticidade.

---

STUDY OF A CONNECTION BETWEEN A REINFORCED PLASTIC SHAFT  
AND A METALLIC FLANGE FOR THE TRANSMISSION OF TORQUE

Summary

It was demonstrated, in a former work of the authors, the feasibility of the construction of shafts for power transmission, built of polyester reinforced with glass fibers. The utilization of this material presents great advantages in applications that require: high mechanical strength associated with low weight, as well as good resistance to active chemical agents. The present study is a continuation of the first one, where we dealt with the problem of the connection between the reinforced plastic shaft and the flange in its extremity, the flanges being necessary for the joining of the shaft with other machine elements. In the connecting region there will occur stress concentrations that we are trying to minimize investigating many shapes with the aid of experimental stress analysis by means of photoelasticity.

**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 3**

PP. 1177 - 1184



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

DISSIPACÃO DE ENERGIA EM JUNTAS: RESULTADOSTEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

Ricardo Damião Sales GÖZ, M.Sc.  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Escola Federal de Engenharia de Itajubá  
Itajubá, Minas Gerais, Brasil

Nelson BACK, Ph.D.  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Florianópolis, Brasil.

1. Introdução

Devido à importância já consagrada do amortecimento disponível nas juntas de estrutura de máquinas ferramentas [1] [2], várias pesquisas foram publicadas apresentando

tentativas de quantificar a energia dissipada em uma junta quando submetida a esforço vibratório. Os métodos então apresentados careciam de precisão, pois não se podia determinar satisfatoriamente a distribuição de pressão normal nas superfícies de contato da junta, fator de primordial no cálculo da dissipação de energia.

Com o desenvolvimento da técnica de elementos finitos foi possível criar métodos eficazes para determinação da deformação das peças formadoras da junta sem qualquer restrição de forma [3] [6]. Com este recurso pode-se determinar as forças normais atuantes em pontos discretos do contato e também simular a rigidez do contato pelo método da mola, [3] [4] [5], através de barras de comprimento nulo com rigidez, determinada ( $K_x$ ,  $K_y$  e  $K_z$ ), fig. 1 b, em três direções. Foi construído então um modelo de junta e efetuada uma verificação experimental da acuidade do método de cálculo da energia dissipada apresentado nas referências [4] [5].

## 2. Modelos Matemáticos

Tendo a forma definida do modelo da junta a ser testado, fez-se uma divisão de elementos finitos quadrinodais em uma quarta parte do modelo, devido aos dois eixos de simetria conforme mostra a figura 1 a.

Com a aplicação das forças normal e tangencial, foi calculada a distribuição da pressão normal pelo método da mola a fim de ajustar os valores da rigidez das molas simuladoras do contato, fig. 1b. Com isto pode-se calcular o deslocamento tangencial relativo das superfícies da junta através de pares de pontos em contato e facilmente com o coeficiente de atrito  $f$ , experimentalmente medido e igual a 0,27, determina-se a quantidade de energia dissipada pela fórmula:

$$W = \sum_{i=1}^n f a_i P_n i \lambda s_i \quad (1)$$

onde  $a_i$  é a área de influência de cada par de nós  $i$ ,  $P_n i$  é a pressão normal no ponto  $i$ ,  $\lambda s_i$  é o deslocamento tangencial relativo de 2 nós adjacentes da junta e  $n$  é o número de

pontos de contato.

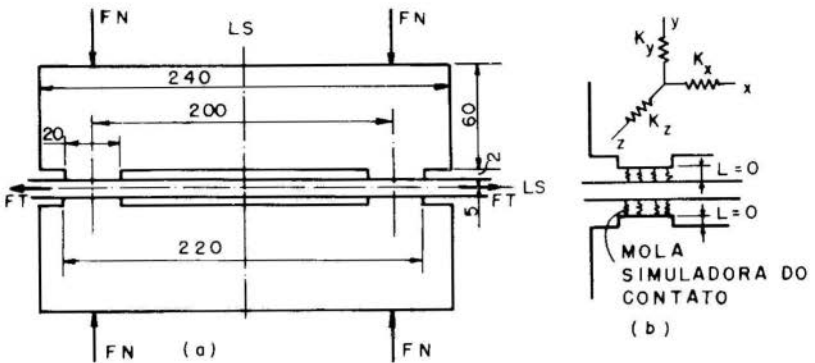


Fig.1 - (a) Modelo da junta e divisão em elementos finitos  
(b) Mola simuladora do contato com comprimento nulo

Os testes foram feitos para juntas secas com diversos valores de força normal e tangencial. Para cada condição de carregamento, o método da mola exigia 4 ou 5 iterações para fornecer os valores da rigidez das molas simuladoras do contato. Ajustados estes valores o programa de computador [6] é rodado mais uma vez e então obtidos os valores de  $pn_i$  e  $\lambda s_i$  ( $i = 1, n$ ).

No modelo foram instalados na tira central transdutores de força e deslocamento e suas saídas elétricas, depois de tratadas, traçaram em um registrador X-Y os laços de histerese para cada ciclo de carga tangencial. Conforme a fig. 1a, a tira central foi tracionada e seu alongamento implica em escorregamento relativo entre as superfícies usinadas dos blocos formadores da junta.

### 3. Comparação entre resultados teóricos e experimentais

Foram efetuadas duas séries de testes e foi constatado um aumento do coeficiente de atrito devido à formação de junções nas asperezas das superfícies de contato, sob elevadas pressões normais. Este fato implica em valores reais da

energia dissipada, menores do que os esperados, pois a junta se tornou tangencialmente mais rígida. Foi feita mais uma série de testes desta feita aplicando uma fina película de lubrificante à base de bissulfato de Molibideneo. A quantidade de lubrificante aplicada foi considerada mínima necessária para evitar a formação de junções e não alterar significativamente as características de rigidez e amortecimento da junta seca.

A tabela abaixo mostra os valores medidos e calculados do deslocamento relativo e energia dissipada para alguns pares de carga das 2 séries de testes.

Pressão Normal [Kgf/cm <sup>2</sup> ]	Força Tangencial [Kgf]	Energia Dissipada [Kgf μm]		
		Sem lubrificação	Com lubrificação	Calculado
15	100	123,7	50,5	144,3
	200	560,2	204,5	864,9
	300	1288,0	376,5	1500,1
20	200	141,2	411,0	836,8
	300	618,4	771,4	1575,8
40	300	1220,7	328,0	1739,9
	350	890,1	1003,0	3127,3

Pressão Normal [Kgf/cm <sup>2</sup> ]	Força Tangencial [Kgf]	Deslocamento Relativo [μm]		
		Sem lubrificação	Com lubrificação	Calculado
15	100	4,74	5,06	2,97
	200	8,45	10,03	9,22
	300	14,30	16,80	15,50
20	200	5,46	10,05	8,92
	300	4,60	16,45	15,23
40	300	4,90	12,05	10,75
	350	7,50	14,85	12,88

Nota-se que os resultados foram sempre maiores do que os experimentais sendo que a lubrificação diminuiu estas di

ferenças para os valores do deslocamento relativo, e as aumentou no tocante à energia dissipada. Estas discrepâncias foram atribuídas ao pequeno conhecimento dos fatores que afetam o valor do coeficiente de atrito, inclusive sua variação durante o ciclo de carregamento tangencial.

Para cada par de cargas foram feitos vários ciclos de carga e os laços de histerese gradativamente se reduziam indicando um progressivo crescimento do coeficiente de atrito durante os ciclos.

Foi verificado também que os testes não apresentavam boa repetibilidade. Este fato foi atribuído à dificuldade em se obter acabamento superficial de mesmas características para todos os testes e à variação na pré-carga de tração aplicada na tira central do modelo antes de cada série de teste.

#### 4. Conclusões

Grande parcela das diferenças entre os resultados, foi atribuída à variação do coeficiente de atrito. Para verificar a acuidade do método de cálculo, construiu-se pelo computador [6] curvas da energia dissipada e do deslocamento relativo em função do coeficiente de atrito. Para tal, escolheu-se dois pares de carregamento (pressão normal x força tangencial) fig. 2a e 2b:

- a)  $40 \text{ Kgf/cm}^2 \times 350 \text{ Kgf}$
- b)  $20 \text{ Kgf/cm}^2 \times 250 \text{ Kgf}$

No caso (a) foi medida uma dissipação de energia de  $890,1 \text{ Kgf } \mu\text{m}$ , pelo gráfico este valor corresponde a  $f = 0,380$ . Com este coeficiente de atrito na fig. 2b, tem-se  $\lambda_{Si} = 6,80 \mu\text{m}$ ,  $9,33\%$  menor do que o deslocamento medido ( $7,50 \mu\text{m}$ ). Para o caso (b) o deslocamento relativo calculado foi  $4,5\%$  maior que o medido.

Estas pequenas diferenças sugerem que o método de cálculo usado neste trabalho é de boa acuidade. Estas comparações evidenciam também a necessidade de um maior conhecimento do coeficiente de atrito.

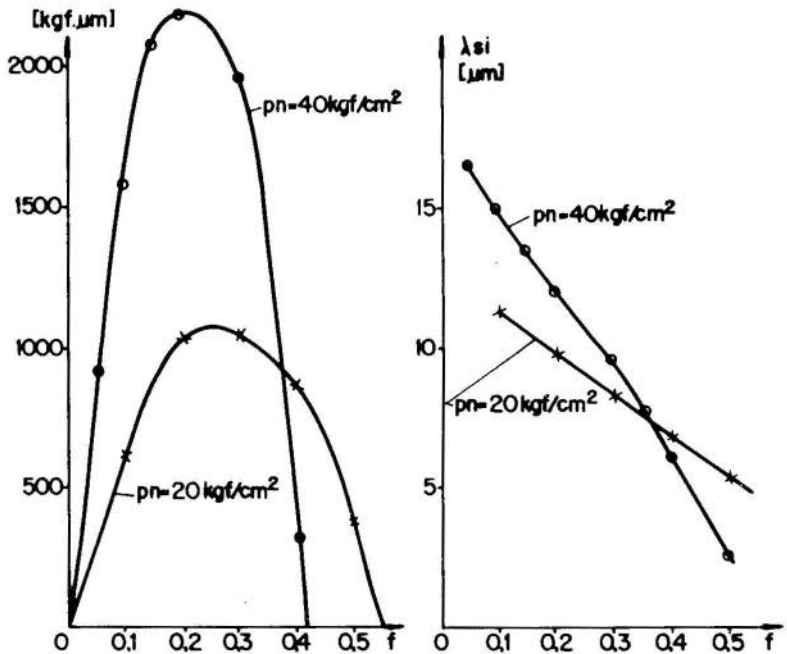


Fig. 2 - Variação: a) da energia dissipada e b) do deslocamento tangencial relativo em função do coeficiente de atrito.

### Bibliografia

- [1] Andrew, C., Damping in Fixed Joints. Conf. on Damping in Machine Tool Structures. Paper 3, MTIRA, (1969).
- [2] Earles, W. E., Theoretical Estimation of the Frictional Energy Dissipation in Simple Lap Joint, Journal of Mechanical Science, Vol. 8 nº 2, (1966).
- [3] Back, N., Deformations in Machine Tool Joints. Ph.D. Thesis, UMIST (1972).



- [4] Back, N., Góz, R.D.S., Método de Cálculo da Dissipação de Energia em Juntas Secas, III COBEM Paper D-15 (1975).
- [5] Góz, R.D.S., Dissipação de Energia em Juntas, Te se de Mestrado. CT-UFSC (1976).
- [6] Boechat Alves, D., Um programa geral de Elementos Finitos - PROASE, Centro Tecnológico - UFSC . ( 1975).

DISSIPACÃO DE ENERGIA EM JUNTAS: RESULTADOSTEÓRICOS E EXPERIMENTAISSumário

Este artigo apresenta uma comparação entre os resultados dos teóricos e experimentais da dissipação de energia em um modelo de junta de máquina ferramenta.

As distribuições de pressão a deformação nas superfícies sob contato e a simulação da rigidez de contato foram conseguidos pelo método dos elementos finitos.

As diferenças nos resultados são analisados e as possíveis causas comentadas.

---

ENERGY DISSIPATION IN JOINTS: THEORETICAL ANDEXPERIMENTAL RESULTSSummary

This article presents a comparison between the theoretical and experimental results of energy dissipation in a model of machine tool joint.

The deformation and pressure distributions in surfaces under contact and the simulation of contact stiffness, was performed by an computational program of finite elements method.

The differences in results are analysed and the possible causes are commented.

# A N A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 4

PP. 1185 - 1198



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

AN ELASTIC MECHANISM FOR THE MICRO-SLIDING

CHARACTERISTICS BETWEEN CONTACTING MACHINED SURFACES

Nelson BACK, MSc, PhD.

Depto. de Engenharia Mecânica, UFSC

Melvin BURDEKIN, MSc, PhD, CEng, MIMechE

Alan COWLEY, MSc(Tech), PhD.

UMIST, Manchester.

### 1. Introduction

When normally loaded surfaces are subjected to tangential loads which are less than that required to cause gross sliding, then micro displacements can be observed. These micro displacements are important from the aspects of the stiffness of the connection, damping and fretting characteristics. The deflection characteristics of surfaces which

are loaded only normally; normally and then with shear or tangential loading; and finally where the normal and tangential loadings are applied simultaneously are shown in Figs. 1a, 1b and 1c. These measurements have been carried out by

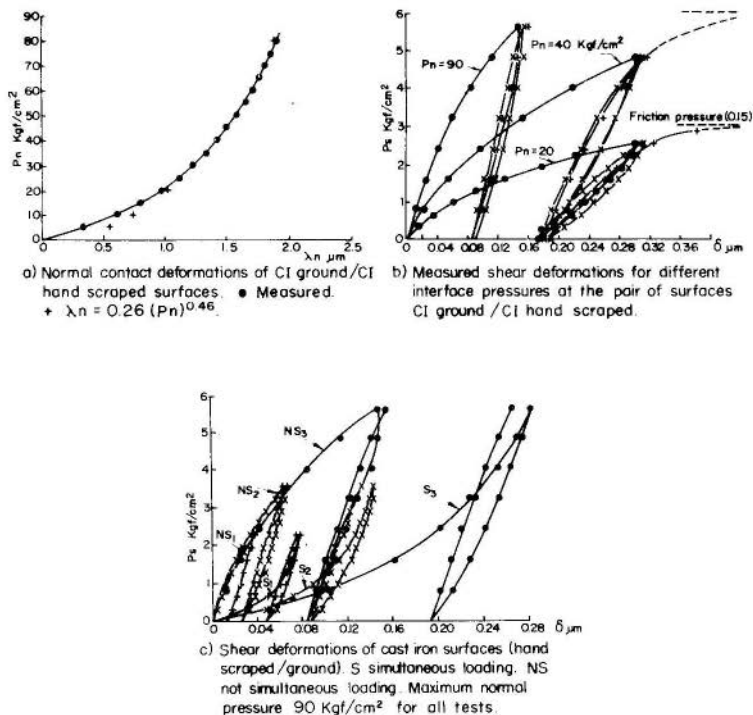


Fig. 1

the author [1] on surfaces having typical machined finishes, i.e. ground, scraped, etc. However, fundamental studies carried out by Courtney-Pratt and Eisener [2] for the case of tangential loading showed remarkably similar characteristics. The observations of Courtney-Pratt and Eisener were explained in terms of the elastic and plastic deformation and seems to be a very acceptable explanation of such characteristics. However, the purpose of this paper is to show that for the case of machined surfaces in con-

tact, a very simple surface model subjected only to deformations in the elastic regime can explain the observed characteristics.

## 2. The surface model

Several authors have proposed models for the purpose of explaining the pressure-deflection characteristics for surfaces which are loaded normally. These models exhibit qualitative agreement over certain ranges of pressures and surface finishes [3, 4, 5] but none of these authors attempted to extend the analysis to include the tangentially loaded case. If the surface model is authentic then it should be applicable when the surfaces are loaded under both normal and tangential conditions.

The surface model chosen as the basis for this analysis is simple in that the contact of the asperities of the surfaces are represented by a number of prismatic rods of equal stiffness. The height distribution is such that the number of these contacting rods increases linearly with the approach of the two surfaces. Fig. 2a shows schematically the proposed model and for clarity one surface is shown plane and the contacting surface with the distribution of the prismatic rods. Since the height distribution of the rods

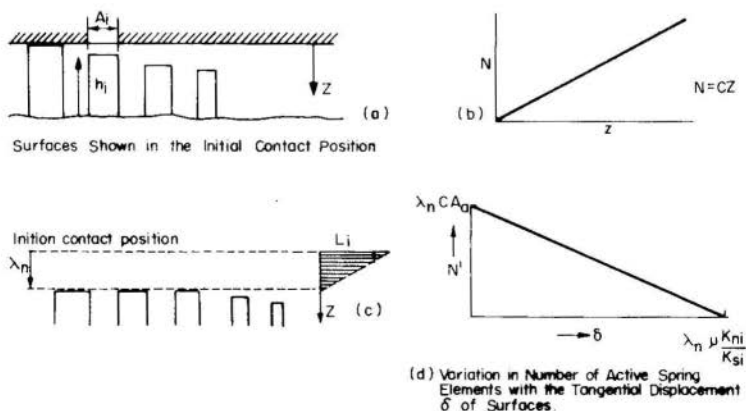


Fig. 2

is assumed to be linear then at a distance  $Z$  below the initial contact position the possible number of contacts  $N$  per unit area increases linearly with  $Z$  as shown in Fig. 2b.

If the normal and shear stiffness of each of the individual rods is  $K_{ni}$  and  $K_{si}$  respectively, then

$$K_{ni} = EA_i/h_i \quad (1)$$

$$K_{si} = GA_i/h_i \quad (2)$$

where  $E$  and  $G$  are the moduli of Elasticity and Rigidity respectively. All rods are assumed to have the same stiffness and therefore  $A_i/h_i$  must be constant for each rod.

### 3. Analysis of model

#### 3.1. Normal loading

If a load  $L$  is applied normally to the surfaces such that they approach each other by a displacement  $Z = \lambda_n$ , then the normal stiffness at this point will be proportional to the number of rods in contact. Thus,

$$K_n = dL/d\lambda_n = K_{ni} N_a = K_{ni} A_a C \lambda_n \quad (3)$$

Hence

$$L = \int K_{ni} C \lambda_n A_a d\lambda_n = K_{ni} A_a C \lambda_n^2/2 \quad (4)$$

or

$$K_n = A_a \sqrt{2 K_{ni} C} P_n^{0.5} \quad (5)$$

where  $P_n$  is the normal pressure,  $A_a$  the apparent area of contact and  $N_a$  the total number of contacting points.

Published data by Levina [6, 7], Dolbey [4] and Ostrovskii [8] have shown that for a range of surface finishes and pressures of up to 50 kgf/cm<sup>2</sup> the normal deflection characteristics are elastic and proportional to  $P_n^{0.5}$ . It would appear, therefore, that the model under consideration predicts the general form of the normal loading characteristics as shown in Fig. 1a.

### 3.2. Tangential loading at constant normal pressure

Consider the condition where a normal load  $L$  has been applied to the surface of nominal area  $A_a$ , resulting in a normal approach of the surfaces  $\lambda_n$ . The normal load  $L_i$  carried by an individual asperity will be related to the approach  $\lambda_n$  of the surfaces and the height distribution  $Z$  of the asperity below the initial contact position.

For an asperity at an initial depth  $Z_i$ , Fig. 2c, the load carried will be:

$$L_i = K_{ni}(\lambda_n - Z_i) \quad (6)$$

If a tangential force  $F$  is now applied then an individual asperity in contact will behave as a linear elastic spring until the tangential force acting on the asperity is equal to the limiting friction force for that individual asperity. The limiting friction force for asperities at a depth  $Z_i$  below the original contact will be given by

$$F_{Li} = \mu L_i = \mu K_{ni}(\lambda_n - Z_i) \quad (7)$$

where  $\mu$  is the coefficient of static friction.

The corresponding limiting tangential deflection for an individual asperity after which it will not behave as a spring is

$$\delta_{Li} = F_{Li}/K_{si} = [\mu K_{ni}(\lambda_n - Z_i)]/K_{si} = (\mu K_{ni}/K_{si})\lambda_{ni} \quad (8)$$

where  $\lambda_{ni}$  is the normal deflection of the asperity.

The tangential deflection of the surface, after which all asperities will not behave as springs is given by

$$\delta_L = \mu K_{ni} \lambda_n / K_{si} \quad (9)$$

From these considerations, the number of active tangential springs in contact is  $N' = C A_a \lambda_n$  for  $\delta = 0$  and  $N' = 0$  for  $\delta = \delta_L$ . As it is shown in Fig. 2d,  $N'$  varies linearly with  $\delta$  as follows

$$N' = C A_a [\lambda_n - (K_{si} \delta / \mu K_{ni})] \quad (10)$$

The tangential stiffness for loading will depend upon the number of asperities which have not reached their limiting deflection  $\delta_{Li}$

Hence

$$K_s = dF/d\delta = K_{Si} N' \quad (11)$$

Thus

$$F = K_{Si} \int N' d\delta \quad (12)$$

Substituting the value of  $N'$  from equation (10)

$$F = A_a K_{Si} C \lambda_n \delta - A_a (K_{Si}^2 C \delta^2 / 2\mu K_{ni}) \quad (13)$$

and is valid over the range

$$\delta = 0 \text{ to } \delta = (\lambda_n \mu K_{ni} / K_{Si})$$

The maximum value of the tangential force  $F_{max}$  will be

$$F_{max} = (C A_a \lambda_n^2 \mu K_{ni} / 2) = \mu L \quad (14)$$

The shape of the tangential loading characteristics as given by equation (13) contains a linear and parabolic component as shown in Fig. 3a with the maximum force given by equation (14).

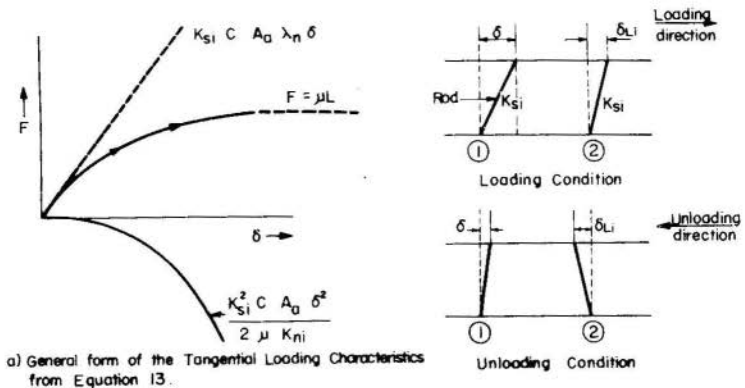


Fig. 3



### 3.3. Tangential unloading at constant normal pressure

Consider the condition where the surfaces have been initially loaded tangentially with a resulting deflection  $\delta$ . At this point there will be asperities which have reached their limiting tangential deflection and others which are still acting as linear springs. This condition is shown schematically in Fig. 3b. Rod 2 is representative of asperities which have reached their limiting deflection condition  $\delta_{Li}$  as given by equation (8), and rod 1 represents all asperities which have not exceeded their limiting deflection.

When the applied tangential force is reduced such that the deflection  $\delta$  commences to decrease, then the relative direction of the motion will have reversed for all asperities which have exceeded their limiting deflection. Consequently, these asperities will now resist the reduction of  $\delta$  as linear active springs, together with all the asperities which remained active during loading. As the unloading process continues with the consequent reduction in  $\delta$ , some asperities will exceed their limiting deflection  $\delta_{Li}$  but for the case of unloading this will be at the reverse side of the initial normal position as shown in Figure 3c. It is important to note, therefore, that from the point of unloading the rods which exceeded their limiting deflection  $\delta_{Li}$  for loading will now continue to behave as linear springs for a reduction in  $\delta$  equal to  $2\delta_{Li}$ .

From an initial tangentially loaded position, the unloading can be considered by applying a tangential force in the reverse direction and observing the deflection in the direction of this applied force. This is analogous to the loading condition except that  $\delta_{Li}$  for unloading is twice that for loading. Thus equation (8) becomes

$$\delta'_{Li} = 2\mu K_{ni}(\lambda_n - z_i)/K_{si} \quad (15)$$

and the corresponding equation (13)

$$F' = K_{si} C A_a \lambda_n \delta' - (K_{si}^2 C A_a \delta'^2 / 4\mu K_{ni}) \quad (16)$$

where  $\delta'$  is the reduction in the initial loaded deflection  $\delta$ , and  $F'$  is the reduction in the initially applied force  $F$ .

The variation in the form of the initial loading, unloading and then reloading as predicted by the model is shown in Figure 4a. The reloading curve d'M shown in Fig. 4a follows the general loading case but using equation (16). There will be apparent hysteresis between the curves Md'M which represents the dissipation in energy at the interface.

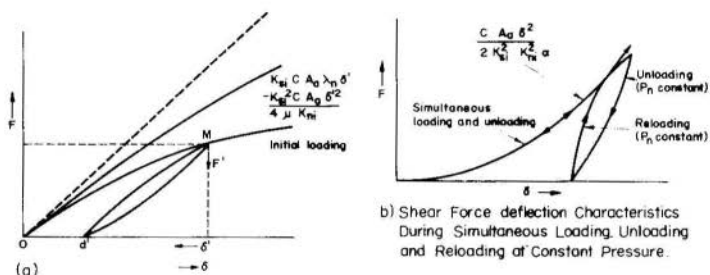


Fig. 4

### 3.4. Simultaneous normal and tangential loading

Consider the condition where the surfaces are initially in contact with zero normal load and then a normal load  $L$  and shear force  $F$  are applied simultaneously in the ratio

$$F = \alpha L \quad (17)$$

where  $\alpha$  is less than  $\mu$ , otherwise sliding would occur.

When the normal load changes by  $dL$  then there will be a corresponding change  $d\lambda_n$  in the normal approach of the surfaces. The change in the tangential stiffness corresponding to  $d\lambda_n$  will be

$$dK_s = C A_a K_{si} d\lambda_n \quad (18)$$

Thus

$$K_s = C A_a K_{si} \lambda_n \quad (19)$$

Substituting for  $\lambda_n$  from equation (4) and making  $K_s = dF/d\delta$  gives

$$dF/d\delta = K_{Si} \sqrt{2 C A_a F/K_{ni} \alpha} \quad (20)$$

Thus

$$F = K_{Si}^2 C A_a \delta^2 / K_{ni} \alpha \quad (21)$$

Because  $\alpha$  is less than  $u$  the surfaces do not slip and consequently the characteristics for simultaneous unloading will be identical to the case of loading. This result, therefore, infers that no energy will be dissipated at the interface during a cycle of simultaneous loading and unloading.

### 3.5. Unloading at constant normal pressure after simultaneous loading

The conditions at the interface after simultaneous loading will differ from those after loading at constant pressure in the respect that none of the asperities will have slipped and, therefore, the deflection of an individual asperity will not have reached its limiting tangential deflection. When unloading begins all the rods will initially act as springs as in the case of unloading at constant normal pressure. However, the tangential deflection over which they will behave as springs when unloading will be less than  $2\delta_{Li}$ . Before this range can be established however, it is necessary to determine the deflection of an individual asperity during simultaneous loading. The relationship between the normal deflection and the shear force  $F$  can be obtained from equations (4) and (17). Thus

$$F = \lambda_n^2 K_{ni} A_a C \alpha / 2 \quad (22)$$

The corresponding value of the shear deflection when the surfaces have approached normally by  $Z$  is given by equations (21) and (22). Thus

$$\delta = \lambda_n K_{ni} \alpha / K_{Si} \quad (23)$$

If the surfaces are initially loaded such that the normal approach is  $\lambda_n$  then the corresponding tangential de-

flection of individual asperities which contact at a distance  $Z$  below the initial point of contact is given by

$$\delta_i = K_{ni} \alpha (\lambda_n - Z_i) / K_{si} \quad (24)$$

Upon tangential unloading from a tangential force level corresponding to a normal approach  $\lambda_n$ , then the asperities at a distance  $Z_i$  will behave as a linear spring until the tangential unloading deflection exceeds  $\delta_i + \delta_{Li}$  where  $\delta_i$  is given by equation (24) and  $\delta_{Li}$  by equation (8).

Thus

$$\delta_i + \delta_{Li} = (\lambda_n - Z_i) (\alpha K_{ni} / K_{si} + \mu K_{ni} / K_{si}) \quad (25)$$

The unloading can now be considered to be analogous to unloading at constant normal pressure except that equation (25) now replaces equation (15). Thus,

$$N' = C A_a [\lambda_n - \delta' K_{si} / (\alpha + \mu) K_{ni}] \quad (26)$$

$$F' = K_{si} C A_a \lambda_n \delta' - [K_{si}^2 C A_a \delta'^2 / 2 K_{ni} (\alpha + \mu)] \quad (27)$$

If equation (27) is compared with equation (16), then it can be concluded, that the unloading after simultaneous loading will in general be less stiff than the corresponding condition after non-simultaneous loading.

Finally, if when  $F'$  of equation (27) reaches zero, re-loading is commenced at the same constant normal pressure then the rods will have an elastic range equivalent to  $2\delta_{Li}$  such that equation (16), but using the loading notation, is applicable. Thus,

$$F = K_{si} C A_a \lambda_n \delta - K_{si}^2 C A_a \delta^2 / 4 \mu K_{ni} \quad (28)$$

The mean re-loading deflection as given by equation (28) will be less than the previous unloading deflection given by equation (27) and consequently the tangential position of the surfaces will not be restored to their former loaded positions. This is shown in Figure 4b.

#### 4. Conclusions

The analysis of the proposed surface model shows excellent qualitative agreement with the experimental observations. The difficulty with all models of this type, is however, in quantifying certain terms in the equations. In this report the data given in Fig. 1 can be used to assess the accuracy of the assumptions used for the surface model. Consider in the first instance when the surfaces are loaded in the normal direction. From equation (5) it can be seen that the normal stiffness  $K_n$  is a function of the normal pressure  $P_n$  raised to the 0.5 power. This exponent results from the assumption that the effective distribution of the asperity heights is linear and this result correlates well with empirical data for this exponent for a range of machined surface [3]. The influence of the type of machined surface is seen in the multiplying coefficient of the normal pressure  $P_n$ . Thus, from equation (5) for unit area of contact, the empirically obtained multiplying coefficient is 8.4 and 4.5 respectively for the ground/scraped and ground/ground surfaces. This assumes that  $\lambda_n$  is in  $\mu\text{m}$  and  $P_n$  in  $\text{Kgf cm}^{-2}$ .

In the case of tangential loading as given by equation (13), this suggests that  $P_s/\delta$  against the tangential deflection  $\delta$  should give a linear relationship where the intercept at  $\delta = 0$  gives the corresponding tangential or shear stiffness. The data given in Fig. 1b for ground and hand scraped surfaces is re-plotted in Fig. 5a. Similar data from reference [1] for ground/ground cast iron surfaces is shown in Fig. 5b.

The slope of the data shown in Figs. 5a and 5b represents the coefficient of the  $\delta^2$  term of equation (13). If the assumption used in the analysis that the limiting friction coefficient is the same as that which is observed when gross sliding occurs then the slope of  $P_s/\delta$  should be independent of  $\delta$ . In Fig. 5 the slope of the curves change with  $\delta$  such that there is an apparent increase in  $\mu$  with increase in the shear deflection  $\delta$ .

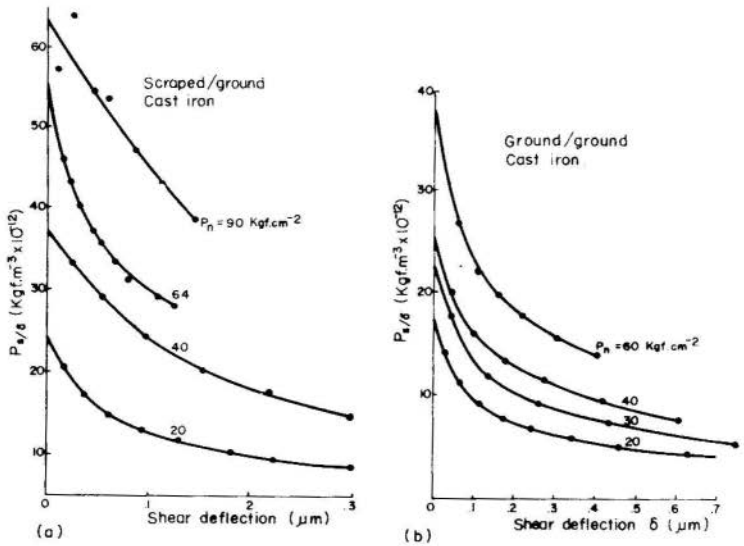


Fig. 5

The simple elastic surface model analysed can be used to explain the observed normal and tangential deflection characteristics when machined surfaces are loaded in contact.

The surface roughness greatly influences the deformation characteristics and this effect can be interpreted in terms of the distribution and stiffness of the equivalent prismatic rods.

A limited quantitative assessment of the model revealed that minor changes and modifications to the assumptions are necessary to give more precise results. A wider range of experimental data is required in order to determine the practical limitations of this model.

#### References

- [1] Back, N., "Deformations in machine tool joints". PhD Thesis, UMIST, 1972.

- [2] Courtney-Pratt & Eisener, Proc. Roy. Soc. A238, 529.
- [3] Back, N., Burdekin, M. & Cowley, A., Review of research on fixed and sliding joints. Proc. 13th Int. MTDR Conference, 1972.
- [4] Dolbey, M.P. & Bell, R., The contact stiffness of joints at low apparent interface pressures. Annals of CIRP, 1970.
- [5] Schofield, R.E. & Thornley, R.H., Calculating the elastic and plastic components of deflection of plain joints formed from machine surfaces. Proc. 12th MTDR Conference, 1971.
- [6] Levina, Z.M. Research on the static stiffness of joints in machine tools. 8th Int. MTDR Conference, 1967.
- [7] Levina, Z.M. & Reshetov, D.N., Machine design for contact stiffness. Machines & Tooling, Vol. 36, No. 12, 1965.
- [8] Ostrovskii, V.I., The influence of machining methods on slideway contact stiffness. Machines & Tooling, Vol. 26 No. 1, 17, 1965.

BACK, N., BURDEKIN, M. e COWLEY, A.

AN ELASTIC MECHANISM FOR THE MICRO-SLIDING  
CHARACTERISTICS BETWEEN CONTACTING MACHINED SURFACES

Summary

In order to explain the deflection characteristics when two contacting machined surfaces are subjected to normal and shear forces, a simple surface model is proposed. This model assumes that contact is in the elastic regime and it is analysed for various loading sequences of the normal and applied shear forces. The results show excellent qualitative agreement with the experimentally observed characteristics. An attempt to compare the results on a quantitative basis is also made.

---

UM MODELO ELÁSTICO PARA AS CARACTERÍSTICAS DE  
MICRO-ESCORREGAMENTO DE SUPERFÍCIES USINADAS EM CONTATO

Sumário

Para explicar as características de deformações, quando duas superfícies usinadas são submetidas a forças normais e tangenciais, foi proposto um modelo simples. Este modelo assume um regime elástico no contato e é analisado para várias sequências de carregamentos normais e tangenciais. Os resultados apresentam boa correlação qualitativa com os dados experimentais. O trabalho também apresenta uma comparação quantitativa entre os resultados teóricos e experimentais.



**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 5**

PP. 1199 - 1211



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

ON THE DYNAMIC BEHAVIOR OF  
COMPRESSIBLE JOURNAL BEARINGS

M. Fathy Hussein  
Abu Dhabi Fund for Economic Development  
Abu Dhabi, U.A.E.

Awatef A. Hamed  
University of Cincinnati  
Cincinnati, Ohio U.S.A.

1. Introduction

The dynamic response of journal bearings can play a major role in rotor design. A simple and general method to determine the response of a journal bearing to dynamic excitations is to use the impedance vector representation. The impedance vectors provide a dynamic nonlinear definition of the bearing reaction force components in terms of the rotor motion, and are therefore directly applicable to rotor

dynamics analysis. Furthermore, the stiffness and damping coefficients for small perturbations from equilibrium conditions can be determined directly from the impedance vectors. The inverse problem of mobility vector representation, defines the velocity vector of a journal bearing as a function of its load and position vectors. The mobility method provides suitable representation in the cases where the load applied to the bearing is a known function of time and is dominant when compared to the rotor inertia, such as in the bearings of reciprocating engines. In many other cases of rotating machinery, the stiffness and inertia of the rotor cannot be neglected and the impedance representation provides the logical choice.

While numerous publications can be found on the mobility method [1], very few references deal with impedance vector representation. Although neither Sternlicht [2] nor Warner [3] used the impedance vectors in their analyses, they both calculated fluid film forces due to small disturbances from equilibrium conditions. In both cases, the stiffness and damping characteristics were also determined in the direction of the line of centers and perpendicular to it. The two authors differed in the methods of their solution of Reynold's equation for the film pressure distribution. Sternlicht [2] used a finite difference method to obtain the pressure distribution numerically for arbitrary squeeze film velocities, while Warner's series solution [3] is based on the principal of separation of variables. In their most recent paper, which was published during the preparation of this text, Childs, Moes and Leeuwen [4], calculated cavitating finite length bearing impedances from a combination of short and long bearing solutions. They have used this solution to provide analytical expressions for the stiffness and damping coefficients in the vertical and horizontal directions. The versatility of the impedance vector formulation was demonstrated in the same reference by numerical examples of rotor dynamic simulation and stability analysis. The work in reference [4] is inherently limited to incompressible fluid film. It will be shown however that the impedance

vectors as well as the stiffness and damping coefficients can be greatly influenced by compressibility, particularly at high excitation frequencies.

In the present analysis, numerical solution of the Reynolds equations are used to determine the impedance vectors, and the stiffness and damping coefficients at different excitation frequencies for compressible fluid. The analysis is very general, in that it can be applied either to hydrodynamic or hydrostatic journal bearings to determine their response to dynamic excitations in any arbitrary direction.

## 2. Analysis

The performance characteristics of the journal bearing, shown schematically in Fig. 1, are determined by the pressure distribution in the fluid film. This in turn is governed by the unsteady equations of conservation of mass and momentum, which when combined under the usual assumptions of thin film result in Reynolds equation:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho h^3 \frac{\partial P}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h^3 \frac{\partial P}{\partial z}) = 6\mu\Omega \frac{\partial (\rho h)}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} \quad (1)$$

where  $R$  is the bearing radius, and  $\Omega$  is the rotor speed.

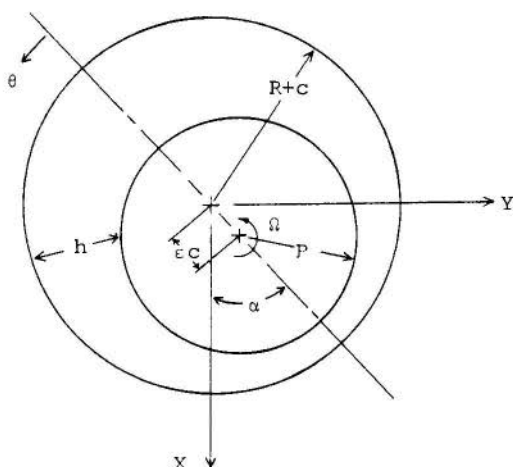


Fig. 1. Bearing Schematic

The pressure distribution  $p(\theta, z, t)$  in the fluid film is taken to satisfy the following boundary conditions:

$$p(\theta, z, t) = p(\theta + 2\pi, z, t) \quad (2a)$$

$$p(\theta, 0, t) = p_0 \quad (2b)$$

Equation (2a) represents the periodicity condition, while equation (2b) specifies the pressure at the bearing edges. In the case of compressible fluid, the density is dependent upon the pressure of the fluid. The density variation with the pressure can be expressed by the following relation:

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{\beta} (p - p_0) \quad (3)$$

where  $\beta$  is the bulk modulus of the fluid, and  $p_0$  and  $\rho_0$  are the pressure and density reference values.

In the following sections, the equations governing the change in film pressure force due to small disturbances from given steady state operating conditions will be derived. This will then be used to determine the impedance vectors and the corresponding stiffness and damping coefficients.

#### Steady State Conditions:

Under steady state operating conditions, the last term on the right hand side of equation (1) will be equal to zero and the pressure distribution  $p^*(\theta, z)$  is governed by the equation:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho^* h^{*3} \frac{\partial p^*}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho^* h^{*3} \frac{\partial p^*}{\partial z}) = 6\mu\Omega \frac{\partial (\rho^* h^*)}{\partial \theta} \quad (4)$$

where the film thickness,  $h^*(\theta)$ , can be expressed in terms of the eccentricity ratio,  $\epsilon^*$ , and the radial clearance,  $c$ , as follows:

$$h^* = c(1 + \epsilon^* \cos\theta) \quad (5)$$

where  $\theta$  is measured from the line of centers (Fig. 1). Equations (3) and (4) are solved for the steady state pressure distribution,  $p^*$ , under the boundary conditions given by equations (2a) and (2b) using the finite element method [5, 6]. The attitude angle,  $\alpha$ , can then be determined for the given eccentricity ratio, from the following relation:

$$\alpha = \tan^{-1} \left\{ \left[ \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} p \sin \theta \, d\theta dz \right] / \left[ \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} p \cos \theta \, d\theta dz \right] \right\} \quad (6)$$

where the sign notation used is as shown in Fig. 1.

#### Dynamic Conditions:

Let the pressure change be  $p'$  and the density change be  $\rho'$ , due to an arbitrary displacement of the journal center from the steady state conditions, and the corresponding change in fluid film thickness distribution be  $h'$ , i.e.,

$$p = p^* + p', \quad \rho = \rho^* + \rho', \quad h = h^* + h' \quad (7)$$

Substituting equation (7) into equation (1), neglecting higher order terms, and using equation (4), we obtain the following equation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho^* h^{*3} \frac{\partial p'}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho^* h^{*3} \frac{\partial p'}{\partial z}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\rho' h^{*3} \\ & + 3\rho^* h^{*2} h') \frac{\partial p^*}{\partial \theta}] + \frac{\partial}{\partial z} [(\rho' h^{*3} + 3\rho^* h^{*2} h') \frac{\partial p^*}{\partial z}] \\ & = 6\mu\Omega \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho^* h' + \rho' h^*) + 12\mu \frac{\partial}{\partial t} (\rho^* h' + \rho' h^*) \end{aligned} \quad (8)$$

The corresponding changes in the vertical and horizontal components of the pressure forces can be expressed as:

$$F'_x = R \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} p' \cos(\theta+\alpha) \, d\theta dz; \quad F'_y = R \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} p' \sin(\theta+\alpha) \, d\theta dz \quad (9)$$

#### The Impedance Vector and Bearing Coefficients:

Any general disturbance can be expressed as a combination of vertical and horizontal displacements  $x'$  and  $y'$ . The corresponding change in the fluid film thickness  $h'$  is given by:

$$h' = x' \cos(\theta+\alpha) + y' \sin(\theta+\alpha) \quad (10)$$

A vertical excitation  $x'$ , is used to determine the two components of the impedance vector  $E_{xx}$  and  $E_{yx}$  and the relevant stiffness and damping coefficients  $K_{xx}$ ,  $K_{yx}$ ,  $C_{xx}$  and  $C_{yx}$ . The other components of the impedance vector,  $E_{xy}$  and  $E_{yy}$ , and the coefficients  $K_{xy}$ ,  $K_{yy}$ ,  $C_{xy}$  and  $C_{yy}$  are determined from a horizontal excitation,  $y'$ . The derivation for the first four coefficients as well as the frequency

response will be given for the vertical excitation case. Similar derivation can be used in the case of horizontal excitation.

$$\text{Let } y' = 0 \quad \text{and} \quad x' = x_0 e^{i\omega t} \quad (11)$$

The corresponding change in the film pressure distribution will be  $p'$ . In this case, equation (8) reduces to the following form:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho^* h^* \frac{\partial^3 p'}{\partial \theta^3}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho^* h^* \frac{\partial^3 p'}{\partial z^3}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ [\rho^* h^* \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\ & + 3\rho^* h^* x' \cos(\theta + \alpha)] \frac{\partial p'}{\partial \theta} \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ [\rho^* h^* \frac{\partial^3}{\partial z^3} + 3\rho^* h^* x' \cos(\theta + \alpha)] \frac{\partial p'}{\partial z} \} \\ & = 6\mu\Omega \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho^* x' \cos(\theta + \alpha) + \rho^* h^*] + 12\mu [h^* \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + i\omega \rho^* x' \cos(\theta + \alpha)] \end{aligned} \quad (12)$$

Equation (12) is solved numerically, using the finite difference method for different values of excitation frequencies  $\omega$ , to give the corresponding pressure change distribution  $p'$  due to vertical disturbances. The resulting solution can be written in the following form:

$$p'(\theta, z, t)/x'(t) = (g_1 + i g_2) \quad (13)$$

where  $g_1$  and  $g_2$  are the argument of the complex solution. The impedance vector  $\bar{E}_x$  due to vertical excitation can be expressed in terms of its two components as follows:

$$\bar{E}_x = E_{xx} \bar{u}_x + E_{yx} \bar{u}_y \quad (14)$$

where  $\bar{u}_x$  and  $\bar{u}_y$  are the unit vectors in the vertical and horizontal directions respectively.

The corresponding components of the impedance vector  $\bar{E}_x$ , are given by:

$$E_{xx} = F'_x/x', \quad E_{yx} = F'_y/x' \quad (15)$$

The changes in the vertical and horizontal components of the fluid film force,  $F'_x$  and  $F'_y$  can be determined by evaluating numerically the integrals on the right hand side of equation (9).

The impedance vector components, which are also complex numbers, can be written in polar form involving their amplitudes and phase angles, or alternatively in their

complex form to give the stiffness and damping coefficients

$$E_{xx} = A_{xx} e^{-i\phi_{xx}} \quad , \quad E_{yx} = A_{yx} e^{-i\phi_{yx}} \quad (16)$$

or

$$E_{xx} = -K_{xx} - i\omega C_{xx} \quad , \quad E_{yx} = -K_{yx} - i\omega C_{yx} \quad (17)$$

Equations (16) and (17) are used to compute these coefficients presented in Figs. 2 through 8.

### 3. Results and Discussion

The results of the present analysis are presented as plots of the amplitude and phase angle of the impedance vectors versus the frequency of excitation. The impedance vector's amplitude and the bearing stiffness and damping coefficients were nondimensionalized with respect to radial clearance  $c$ , the total bearing load  $W$ , and the bearing rotational speed  $\Omega$  where applicable, as shown in Figs. 2 through 8.

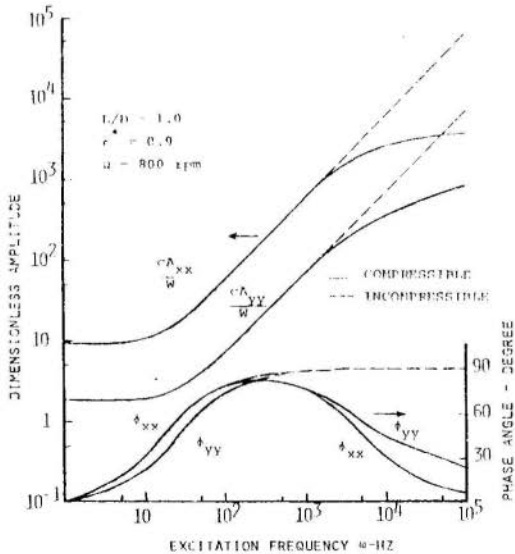


Fig. 2. Amplitude and Phase Angle of Impedance Vector Component In the Direction of Excitation.

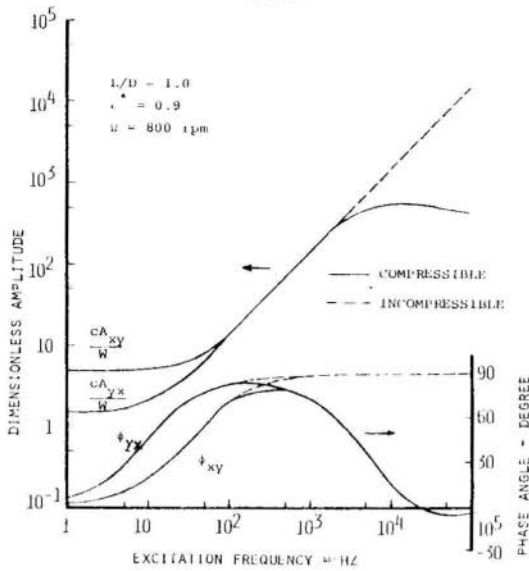


Fig. 3. Amplitude and Phase Angle of Impedance Vector Component Perpendicular to the Direction of Excitation.

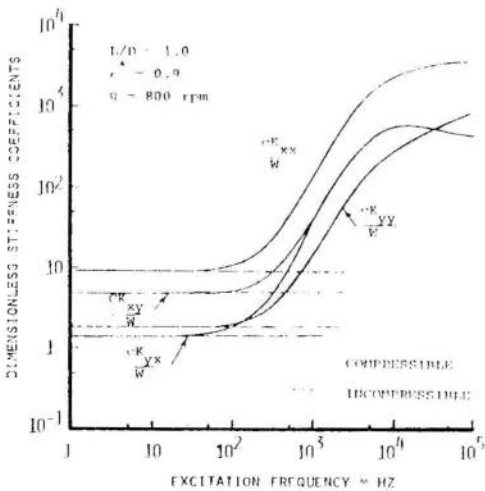


Fig. 4. Variation of Bearing Stiffness Coefficients With the Excitation Frequency.



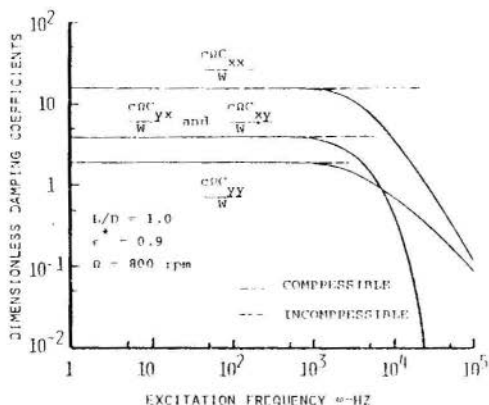


Fig. 5. Variation of Bearing Damping Coefficients With the Excitation Frequency.

The variation in the amplitude and phase angle of the impedance vector components due to vertical and horizontal excitations are shown in Figs. 2 and 3, and the corresponding stiffness and damping coefficients in Figs. 4 and 5. It can be seen from these figures that the dynamic behavior of the journal bearing changes considerably with the excitation frequency. The effect of fluid compressibility is pronounced at higher values of excitation frequencies. The effect of the fluid compressibility on the bearing stiffness and damping coefficients is particularly important, since the incompressible solution does not show any variation in these coefficients with  $\omega$ . The values of the different stiffness and damping coefficients at very small excitation frequencies were compared with those in references [4] and [7] and found in agreement.

The computations were carried out for both vertical and horizontal excitations to determine the influence of the eccentricity ratio  $\epsilon^*$ , the rotor speed  $\Omega$ , and the length to diameter ratio of the bearing  $L/D$  on the impedance vectors. The effect of the eccentricity ratio on the amplitude and phase angle of the impedance vector component  $E_{xx}$  is shown in Fig. 6. Increasing the eccentricity was found to increase the dimensionless amplitude at

low frequencies but to decrease it at high frequencies. Wider range of linear amplitude-frequency relation on the logarithmic plot was observed at lower  $\epsilon^*$  values for which the phase angle  $\phi_{xx}$  has a flat maximum. While the effect of rotor speed on the impedance vector's amplitude is negligible at low  $\omega$ , the increased rotor speeds result in lower amplitudes at all higher excitation frequencies as shown in Fig. 7. The effect of the rotor speed on the phase angles is limited to the intermediate frequencies where lower phase angles are associated with the higher rotor speeds. For the same values of rotor speed and eccentricities, the lower values of length to diameter ratios were found to result in higher amplitudes and larger phase angles as can be seen from Fig. 8. Other impedance vector components were found to be well behaved with  $\omega$ , however, space does not permit the presentation of all the results.

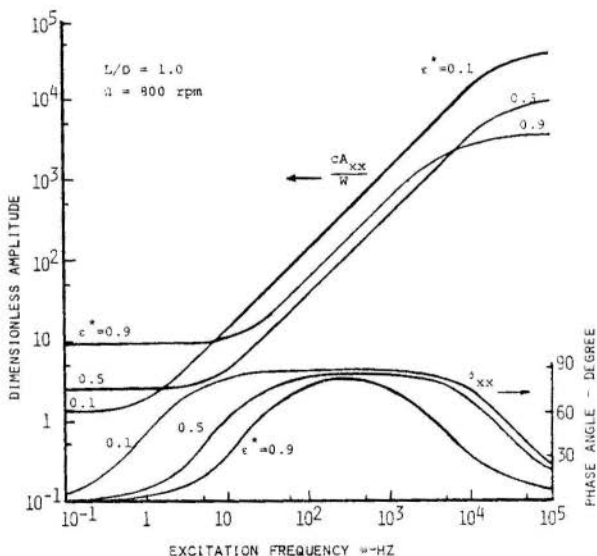


Fig. 6. Effect of Eccentricity Ratio on Impedance Vector Components.

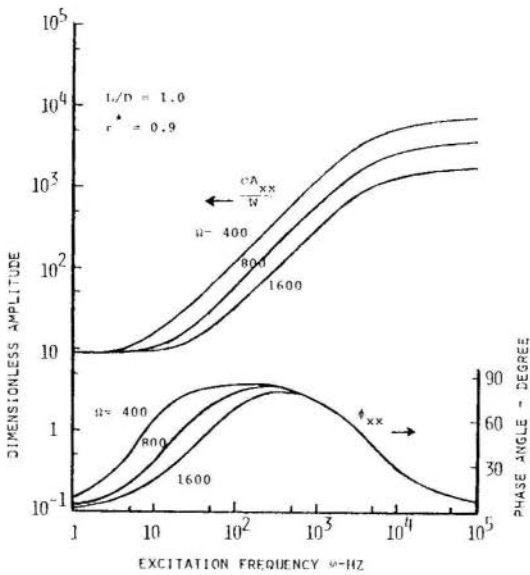


Fig. 7. Effect of Rotor Speed on the Impedance Vector Components.

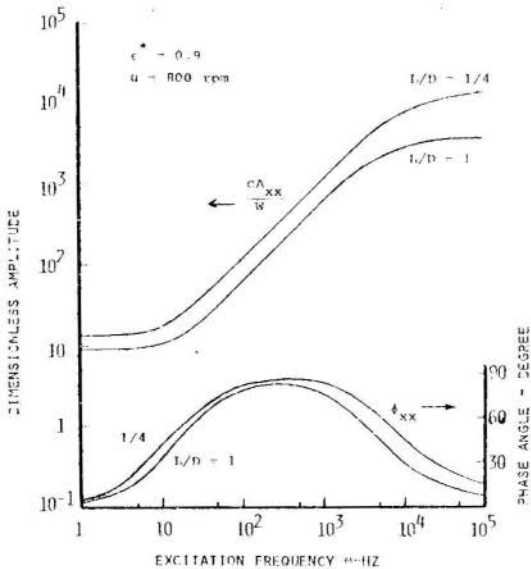


Fig. 8. Effect of Length Diameter Ratio on Impedance Vector Components.

References

- [1] Campbell, J., Love, P.P., Martin, F.A. and Rafique, S.O., "Bearings for Rotating Machinery: A Review of the Present State of Theoretical, Experimental and Service Knowledge," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 182, Part 3A., pp. 51-74.
- [2] Sternlicht, B., "Elastic and Damping Properties of Cylindrical Journal Bearings," Journal of Basic Engineering, June 1959, pp. 101-108.
- [3] Warner, P.C., "Static and Dynamic Properties of Partial Journal Bearing," Journal of Basic Engineering, June 1963, pp. 247-255.
- [4] Childs, D., Moes, H. and Van Leeuwen, H., "Journal Bearing Impedance Descriptions for Rotordynamic Applications," Journal of Lubrication Technology, April 1977, pp. 198-210.
- [5] Allan, T., "The Application of the Finite Element Analysis to Hydrodynamic and Externally Pressurized Pocket Bearings," Wear, Vol. 19, 1972, pp. 169-206.
- [6] Reddi, M.M. and Chu, T.Y., "Finite Element Solution of Steady State Compressible Lubrication Problem," Journal of Lubrication Technology, July 1970, pp. 495-503.
- [7] Orcutt, F.K. and Arwas, E.B., "The Steady-State and Dynamic Characteristics of a Full Circular Bearing and a Partial Arc Bearing in the Laminar and Turbulent Flow Regimes," Journal of Lubrication Technology, April 1967, pp. 143-153.

ON THE DYNAMIC BEHAVIOR OF  
COMPRESSIBLE JOURNAL BEARINGS

Summary

A simple, general method to determine the response of hydrodynamic or hydrostatic journal bearings to dynamic excitation is presented. A finite element solution of the Reynolds equation is used as an initial steady state estimate of the pressure field. Small perturbation of the oil film thickness from the initial equilibrium condition, and consequently of the fluid density and pressure are employed to linearize the two dimensional unsteady equations of motion of the flow field. A wave front solution of the resulting set of complex equations yields the bearing impedance vector, for the vibration frequency range. The bearing dynamic stiffness and damping coefficients are directly computed at any frequency. The effect of eccentricity ratio, bearing geometry and rotational speed on its dynamic characteristics is investigated.

---

COMPORTAMENTO DINÂMICO DOS MANCAIS RADIAIS

DE LUBRIFICANTE COMPRESSIVO

Sumário

Um método simples e geral para determinar a resposta dos mancais radiais, hidrodinâmicos ou hidrostáticos à excitação dinâmica é apresentado. A solução da equação de Reynolds através da técnica dos elementos finitos é usada como uma estimativa inicial do valor do campo de pressão do regime permanente. Uma perturbação pequena na espessura do filme lubrificante a partir da condição inicial de equilíbrio, é por conseguinte, na densidade e na pressão do fluido, é empregada para linearizar as equações de movimento do escoamento no regime bidimensional e transiente. O resultante sistema de equações em variáveis complexas é resolvido a fim de obter o vetor impedância do mancal, na faixa da frequência de vibração. Os coeficientes de rigidez e de amortecimento do mancal são directamente calculados para qualquer frequência. Os efeitos de variações da razão de excentricidade, da geometria do mancal e da sua velocidade de revolução nas características dinâmicas do mancal são investigados.

**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 6**

PP. 1213 - 1221



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

LEVANTAMENTO DE CONDIÇÕES DE LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICA

EM MOTORES DIESEL MODERNOS

Susumo Kuniyoshi

Duraid Mahrus

METAL LEVE - Gerência Desenvolvimento de Produtos

Rua Brasília Luz, 535 - Santo Amaro

São Paulo, Brasil

1. Introdução

O projeto de mancais de motores de combustão interna baseia-se no controle de alguns parâmetros específicos de operação, tais como: e equilíbrio térmico, espessuras mínimas do filme de óleo entre o eixo e mancal e ainda picos de pressão hidrodinâmica gerada no filme de óleo.

Neste trabalho apresentamos uma compilação de valores teóricos destes parâmetros para motores Diesel em regime de operação, obtidas a partir de um método computacional de análise orbital do colo de eixo

dentro de um mancal [1], objetiva-se desta forma, correlacionar estes valores teóricos com os limites de fadiga verificados experimentalmente para vários materiais utilizados em mancais.

## 2. Resultados e discussão

Partindo-se de dados técnicos de um motor, calcula-se as forças que atuam em cada um dos mancais. Associando-se estes parâmetros ao

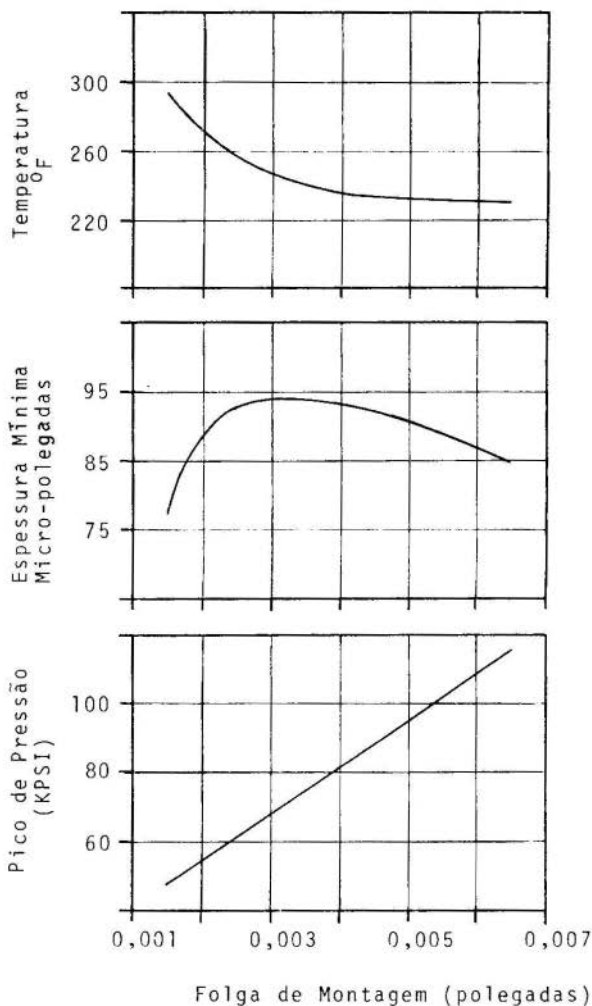


Fig. 1 - Comportamento típico da Temperatura, Espessura Mínima do Filme de Óleo e Pico de Pressão de um mancal de biela.

sistema de lubrificação e geometria dos mancais, podemos determinar alguns elementos que descrevem o comportamento dos eixos, tais como: temperatura de equilíbrio, viscosidade do óleo, perdas de potência, espessuras do filme de óleo e pressão hidrodinâmica em função das folgas de montagem.

Comportamento típico de temperatura de equilíbrio, espessura mínima e picos de pressão em função da folga de montagem [2], podem ser vistos na figura 1.

Valores de espessuras mínimas e picos de pressão hidrodinâmica do filme para uma série de motores Diesel estacionários e veiculares, podem ser vistos nas figuras 2 a 5.

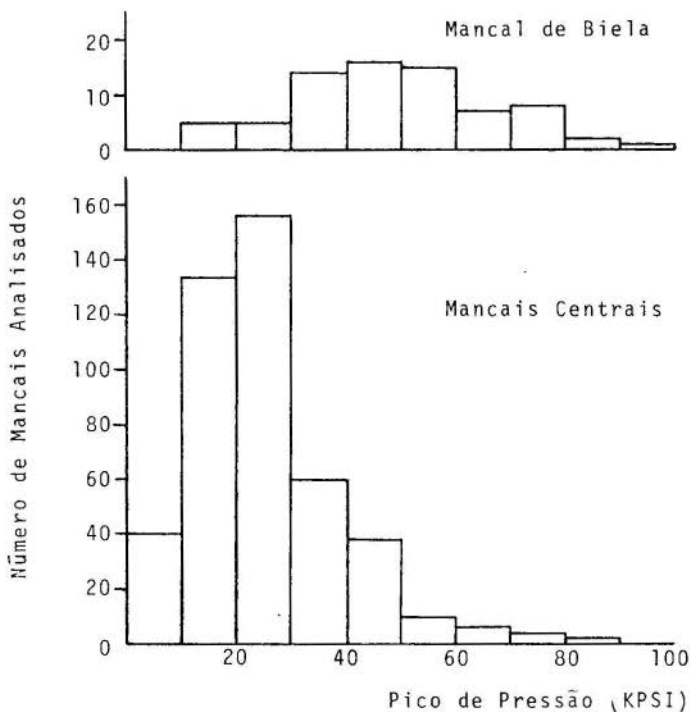


Fig. 2 - Picos de Pressão Hidrodinâmica - DIESEL VEICULAR



Pode-se notar que a maioria dos motores apresentam picos de pressão entre 10000 e 40000 PSI para os mancais centrais. No caso dos mancais de biela, os picos de pressão situam-se na faixa de 10000 a 70000 PSI. As espessuras mínimas do filme de óleo encontram-se na faixa de 50 a 200 micro-polegadas.

Associando-se os valores das pressões hidrodinâmicas e espessuras de filmes mínimos aos valores de capacidade de carga dos materiais de mancais (Tabela I), determinados experimentalmente, poder-se-ia orientar um novo projeto a assimilar o comportamento de um motor conhecido e seguro.

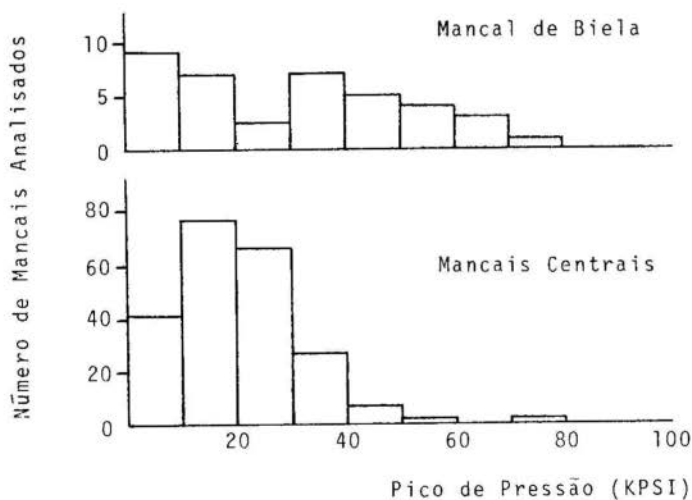


Fig. 3 - Picos de Pressão Hidrodinâmica - Diesel Estacionário

É necessário para tanto modificar a geometria, particularmente a folga de montagem de acordo com a figura 1, de tal forma a obter valores de picos de pressão e espessuras mínimas do filme de óleo dentro do intervalo de valores usuais para motores em operação.

Caso estas modificações geométricas não sejam suficientes para assegurar uma aproximação dos parâmetros aos valores do intervalo seguro, seria necessário considerar a aplicação de um material com maior capacidade de carga.

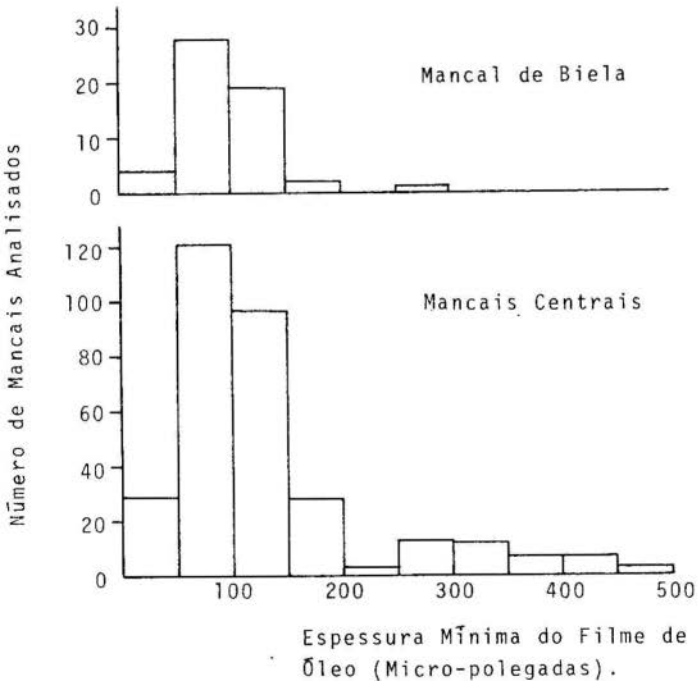


Fig. 4 - Espessura Mínima do Filme de Óleo-Diesel Veiculares

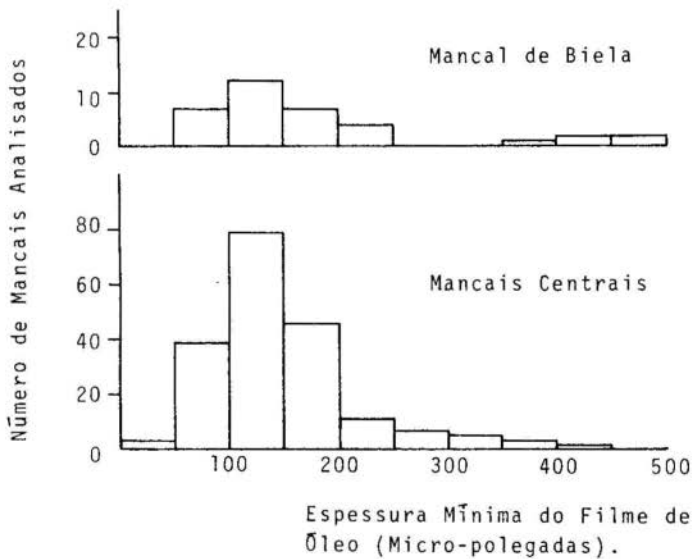


Fig. 5 - Espessura Mínima do Filme de Óleo - Diesel Estacionário

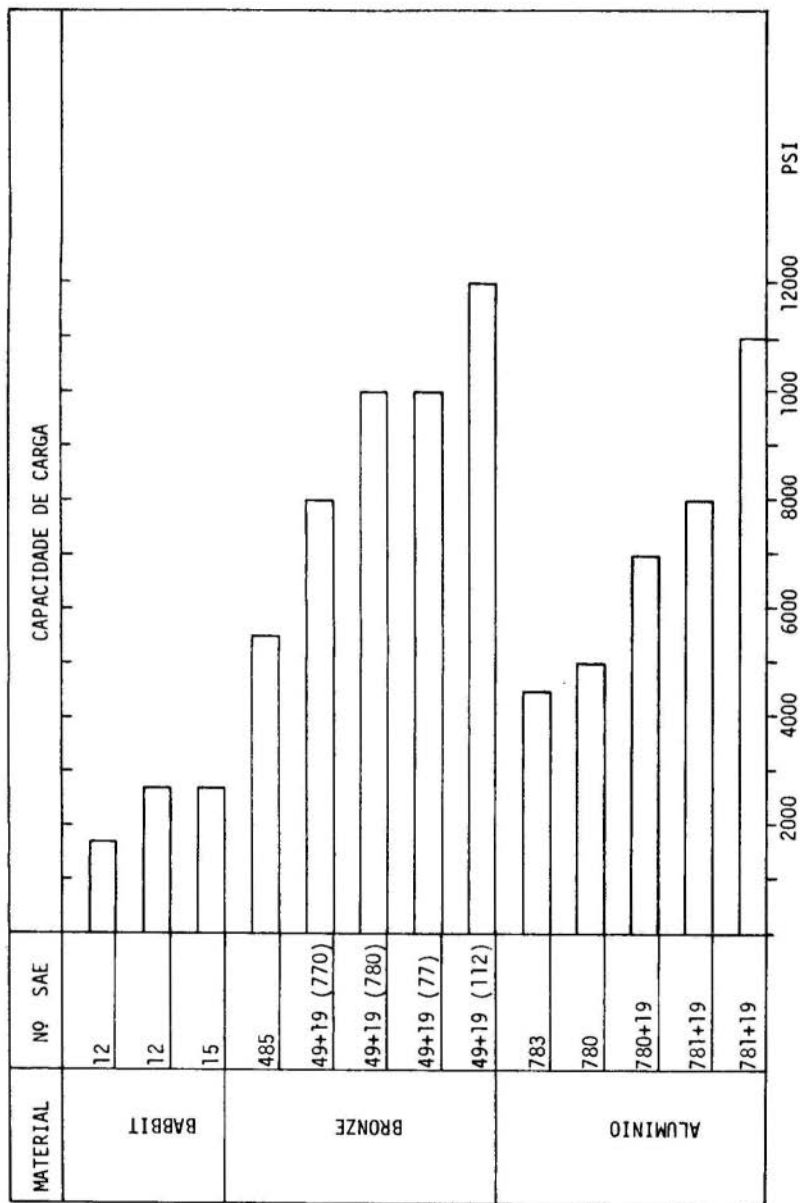


Tabela I - Capacidade de carga unitária máxima

### 3. Conclusão

São apresentados valores de pressão hidrodinâmica máxima e espessuras mínimas de filme de óleo em mancais para uma seleção representativa de motores Diesel em operação. Estes parâmetros são considerados como os critérios básicos de operação de mancais.

Os valores levantados refletem condições reais de operação. É sugerido o uso destes valores como orientação no projeto de novos mancais de motores Diesel.

### Bibliografia

- [1] Ross, J.M. e Slaymaker, R.R., Journal Center Orbits in Piston Engine Bearings. International Automotive Engineering Congress, Detroit, Mich. January 13-17, (1969).
- [2] Yahraus, W.A., Influence of Lubrication System Variables on Sleeve Bearing Performance.  
SAE 740517 Reprinted May (1975).

KUNIYOSHI S. e MAIRUS D.

LEVANTAMENTO DE CONDIÇÕES DE LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICAEM MOTORES DIESEL MODERNOSSumário

A partir da classificação de Motores Diesel, quanto às condições de lubrificação hidrodinâmica, este artigo apresenta um critério para avaliar as condições adequadas de operação para as bronzinas em estágio inicial de projeto.

É utilizado um método computacional para analisar as forças nas bronzinas de biela e centrais, temperaturas de operação, pressões hidrodinâmicas e espessuras mínimas de filme de óleo.

---

A SURVEY OF HYDRODYNAMIC LUBRICATIONCONDITIONS IN DIESEL ENGINESSummary

This paper presents a compilation of minimum oil film thicknesses and peak oil film pressures calculated for actually running Diesel engines. Criteria to estimate good operating conditions during the initial stage of bearing design were obtained from these data.

Theoretical values of loads, bearing-back temperatures, oil film thicknesses, oil film pressures and other parameters have been obtained using a journal orbit analysis technique.

# ANAIS

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 7

PP. 1223 - 1233



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

THE SCOPE AND LIMITATION OF THE ADHESION THEORY  
OF WEAR AS APPLIED TO ENGINEERING PRACTICE.

BARWELL, F.T., Professor and Head of Department of  
Mechanical Engineering, University College of Swansea,  
South Wales, United Kingdom.

1. Introduction.

Mechanical wear is caused by disintegration of interacting machine components as the result of over-stressing of the material in the immediate vicinity of the surface. Environmental conditions may result in a combination of chemical attack with mechanical over-stressing and the subject is intimately related with that of corrosion. The combined effects of wear and corrosion account for a very large proportion of the degradation of mechanical equipment generally and are the main agencies for limiting the life of capital goods. The manner in which force is applied to interacting surfaces, the environment and the nature of the relative movement varies widely between different machines as

does the material of construction. The subject of wear is therefore a complex one embracing many disciplines. Unambiguous relationships between the magnitude of wear and applied factors can only be obtained as the result of careful analyses of the system because, as will be shown, wear may take many forms depending on applied conditions and nature of materials involved.

## 2. Early Theories.

Rennie<sup>[1]</sup> explained friction by the normal motion necessary for the irregularities of the interacting surfaces to pass from one interlocking position to another. Hence wear was attributed to the bending and fracture of these irregularities.

A number of investigators have attempted to invoke the atomic or molecular structure of matter as directly determining the friction and wear phenomena. Thus Sir Alfred Ewing<sup>[2]</sup> considered that, when one surface was caused to slide relative to another, the polar forces interacted across the interface to produce a quasi-electric turning of the molecules and that, when a certain very limited range of movement had been exceeded, energy was dissipated by breaking of bonds and the establishment of new bonds with oscillation of particles. Tomlinson<sup>[3]</sup>, taking advantage of recently enunciated ideas of wave mechanics, was able to expand this view. Deryagin<sup>[4]</sup> has also put forward a molecular theory of static friction and has developed an electrostatic theory of adhesion of non-metallic bodies.

The possibility that friction might be related to the shear strength of the material was first considered by Holm et al<sup>[5]</sup> who also introduced the concept of atomic wear in relation to carbon contacts. There is no evidence however of atomic wear occurring in machines.

## 3. The Adhesion Theory.

Although adhesion undoubtedly occurs between metals and can contribute to surface damage, the concept of friction and wear which is widely accepted and which assigns primary importance to adhesion between metals contains certain logical inconsistencies. The arguments for and against the adhesion theory have been well presented by Rabinowitz<sup>[6]</sup>. It will be recalled that the adhesion theory of friction arose from the early work of Bowden and Tabor<sup>[7]</sup>, who attributed the force of friction to two principal mechanisms which they



denoted as "ploughing" and "junction growth". Basically the adhesion theory holds that the true area of contact is proportional to the load forcing the surfaces together divided by a quantity based on the mechanical strength and known as the mean yield pressure of the asperities  $p_m$ . It is assumed that the metals weld together over the area of contact and that the tangential force required to cause relative motion is equal to the shearing strength of the material multiplied by the true area of contact. Thus the coefficient of friction  $\mu$  is given by:

$$A = W/p_m \quad (1)a$$

$$F = S \cdot A \quad (1)b$$

$$\mu = \frac{F}{W} = \frac{S}{p_m} = \frac{\text{shear strength of junctions}}{\text{yield pressure of softer metals}} \quad (1)c$$

Because  $S$  and  $p_m$  for any given metal may be expected to be related,  $\mu$  would not differ much between different metals and friction coefficient should not vary with load (Amonton's Law).

This theory represented a considerable advance on its predecessors because it focused attention on the microscopic as opposed to the molecular scale of interaction. However flow stress usually assumes a value of about three times the yield stress in compression (due to support of the asperities by surrounding material) and shear stress is about one-half of the direct stress so that  $S/p = 1/6$  or 0.17. Experimental values of friction between clean dry metals lie between 0.6 and 1.2.

The explanation of the discrepancy arises from the assumptions regarding flow stress. The factor of 3 relating flow stress to compressive yield stress assumes that behaviour of the asperities during the frictional process is identical with that which occurs when the interacting bodies are forced together by normal forces and indeed with the action of the indenter of a hardness test. When the force has a tangential component this no longer applies and Tabor <sup>18</sup> describes how the junction grows under the action of tangential force until the area is about three times that predicted by "flow stress" thus reintroducing realistic prediction.

It is the writer's view that it is not necessary to invoke the concept of "adhesion" or "welding" to explain friction and wear processes in general although there is abundant evidence of its occurrence in particular cases. All that is required is to pre-suppose

that some mechanism which will enable tangential force to be transmitted between the interacting bodies. It is well-known that failure in a simple compression test is by shear at  $45^{\circ}$  to the direction of principal stress. For shear to take place along the interfacial plane the plane of the principal stress must be inclined at an angle of  $45^{\circ}$  thereto. Where R is the resultant of the applied normal and tangential forces,  $W = R \sin 45^{\circ}$  and  $F = R \cos 45^{\circ}$  but  $\cos 45^{\circ} = \sin 45^{\circ}$  therefore

$$\mu = \frac{F}{W} = \frac{\text{tangential force}}{\text{normal force}} = 1 \quad \text{Eq. (2)}$$

This simple picture of course requires modification in any practical case but, because it embodies an absolute minimum of assumptions about the rubbing system and the properties of the interacting materials, produces the most convenient starting point for the evolution of wear theory.

#### 4. Interbody Forces.

When clean metal surfaces are brought into contact a strong chemical bond is formed between the two surfaces. When the surfaces approach closely without actually touching they are attracted by van der Waal's forces. The transition has been studied by Ferrante and Smith<sup>[9]</sup> and shown to occur at a separation of  $1/5$  nm.

Direct measurement of the adhesive forces between solid bodies is difficult because asperities and particles are large in comparison with the value of the separation of the bodies which gives rise to significant forces. This difficulty was overcome by Johnson, Kendall and Roberts<sup>[10]</sup> by the use of rubber and gelatine surfaces which possessed moduli of elasticity which were sufficiently low for the force required to flatten an asperity to be less than the surface attractive forces. An experimental value for the surface energy of gelatine on perspex was  $0.105 \text{ Jm}^{-2}$  showing that under very light loads the magnitude of the surface active forces could be comparable to the forces pressing such forces together. These forces were small however in comparison with those which have to be taken into account in practice. Kohno and Hyodo<sup>[11]</sup> have brought styli with tips of small radius made of tungsten or fused quartz into contact with optically flat steel surfaces. A micro-balance was used to apply loads as light as  $10^{-8} \text{ N}$  and the forces required to separate the contact were found to be proportional to the tip radius. These forces were sometimes two to

three orders of magnitude higher than those applied initially in forcing the surfaces together.

Buckley<sup>[12]</sup> has measured the force to rupture junctions made within a vacuum system evaporated to  $10^{-11}$  Torr. Crystals of copper, gold, silver, nickel, platinum, lead, tantalum, aluminium and cobalt were cleaned by argon ion bombardment before being forced against a clean iron (011) surface by a force of 20 dynes. When iron was pressed against iron, a force greater than the 400 dynes was required to separate these surfaces. In the case of the other metals this force varied from 50 to 250 dynes. Thus in every case the strength of the junction was greater than the amount of force used to promote it. Even in the case of lead (which is insoluble in iron) the Auger analysis indicated transfer of lead to the iron surface. Thus the adhesive bonds of lead to iron were stronger than the cohesive bonds within the lead. In general it was found that the cohesively weaker metals adhered and transferred to the cohesively stronger.

Guidance regarding relative importance of adhesion and plastic flow is provided by the work of Andarelli, Maugis and Courtel<sup>[13]</sup> who observed the occurrence of dislocations by means of transmission electron-microscopy. Glass fibres were slid against aluminium specimens  $10^{-5}$  m thick and normal and tangential forces were determined from the shape assumed by the loaded fibre. Further tests by Maugis, Desolos-Andarelli, Heutel and Courtel<sup>[14]</sup> were carried out also within an electron-microscope. Here the stylus was a cold-rolled tungsten wire with a hemispherical tip of radius  $2.5 \cdot 10^{-6}$  metres. The load ranged from 1 to 100  $\mu$ N and the force required to break the elastic contact was 1 to 2  $\mu$ N as compared with values of 1.2 to 2.4 calculated on the basis of an interfacial energy of 100 to 200 mJ/m<sup>2</sup>. This indicates that van der Waal's forces between metals shielded by absorbed gases were responsible for the adhesion. Load had to exceed a critical value before the stylus suddenly penetrated the surface. Measurements of friction were consistent with this, nearly zero values being recorded at low loads, i.e. as long as deformation remained elastic.

These results emphasise that plastic deformation rather than the action of forces of adhesion was the important agency affecting friction and wear. An estimate of the proportion of the energy expended in friction which was stored within the material and that dissipated in frictional heat based on comparison of the dislocation density based

on tensile tests showed that 99% of the frictional energy was dissipated as heat.

Although the basic mechanism of adhesive wear is the transfer of materials from one surface to another, actual wear only occurs when particles are formed. Sasada, T. & Kando, H.<sup>[15]</sup> studied the composition and distribution of particle size. They found a log-normal distribution ranging over  $2\frac{1}{2}$  orders of magnitude. The measurements of particle volume covered the range from  $10^{-14}$  cubic millimetres to  $10^{-3}$  cubic millimetres. When an atmosphere of nitrogen was substituted for air under laboratory conditions, the mean size of the particles was increased over 100-fold indicating the powerful effect of oxygen in preventing surface adhesion and subsequent particle growth. These particles tend to be transferred repeatedly from one surface to another (Sasada, Norose & Shimura<sup>[16]</sup>), so that their final composition embodies material from both surfaces. Because the successive entrapment of particles on one surface or another must be a matter of chance, the wide distribution of particle size reported is to be expected.

#### 5. Severe and Mild Wear - The Delamination Theory.

Certain wear tests reveal transitions which are so marked as to give rise to the designations of two forms of wear. These are referred to by Hirst<sup>[17]</sup> as 'severe' and 'mild' wear respectively and by Kragelskii<sup>[18]</sup> as 'internal' and 'superficial' friction. Lancaster<sup>[19]</sup> expressed the view that the transition from mild to severe wear was the result of a competition between two opposing dynamic processes; one being the rate of formation of fresh metal surfaces as the result of the wearing process and the other the rate of formation of surface film by reaction with the surrounding atmosphere. In normal atmospheres the oxide film is rapidly renewed. However, when conditions are such that this is not the case, surfaces in contact will tend to seize with extremely high friction and consequent surface damage. The formation of the oxide prevents or reduces the seizing action as long as the film remains bonded to the surface. Usually a hard oxide film will provide a basis on which the opposing surface will slide. Alternatively a soft oxide may be effective in preventing seizure by limiting overall continuous wear to the mild mode. There is some evidence that continuous oxidation may be useful when high temperatures are encountered.

An alternative view has been put forward by Kragelskii<sup>[18]</sup>. When

the interface between the rubbing surface is weak, sliding will take place thereon with relatively little damage but when the bond between the surfaces (whether produced by penetration of asperities or by adhesion) is stronger than the underlying layers, failure will occur within the bulk of the material causing considerable roughening and superficial damage.

Koba and Cook<sup>[20]</sup> studied the wear of leaded bronze running against steel and demonstrated by scanning electron probe-micrographs that the metal flowed freely at the surface smoothing out hills and valleys. Some metal transfer was observed but this did not appear to be an essential part of the wear process. Suh<sup>[21]</sup> and Jahanmir, Suh and Abrahamson<sup>[22]</sup> observed plate-like particles of wear debris which they attributed to the growth of sub-surface cracks.

Suh and his co-workers have investigated a number of wearing systems and have put forward what they designate as the 'Delamination Theory of Wear' which can be summarised as follows:

- 1) When two sliding surfaces come into contact asperities on the softer surface are deformed by repeated loading so generating a relatively smooth surface. Eventually asperity-to-asperity contact is replaced by asperity-plane contacts. Therefore each point along the softer surface experiences cyclic loading as the asperities of the harder surface plough through it.
- 2) The surface traction exerted by the harder asperities on the softer surface induces plastic shear deformation which accumulates with repeated loading.
- 3) As the subsurface deformation continues, cracks are nucleated below the surface. Crack nucleation very near to the surface is inhibited by the triaxial compressive stress existing just below the contact region.
- 4) Further loading causes the cracks to propagate parallel to the surface.
- 5) When these cracks finally intercept the surface long thin wear sheets 'delaminate' giving rise to plate-like particles.

Although the presence of the voids must be construed as a weakening of the surface their main significance is as initiating agencies for cracks. Experimental observation indicates that the number of sub-surface voids is far larger than the number of cracks and it is the rate of crack propagation which determines the mode of failure.

The preponderance of plate-like particles all under conditions of lubricated mild wear provide very powerful evidence that a mechanism such as that involved in the delamination theory of wear operates in these cases.

A particularly comprehensive test programme was carried out by Tsuya<sup>[23]</sup> using a variety of test arrangements and ambient conditions. Plastic working of the substrate of materials in contact led to 'micronised crystals' and cracks originated in the vicinity of the boundary between micronised crystals and those near the surface which had been simply distorted. The cracks tended to develop in the direction of material flow until a particle was released.

The effect of operating parameters such as speed and temperature of operation, as well as such factors as hardness of the interacting materials may be predicted on the basis of the adhesion theory of wear as of the delamination theory of wear. A great deal of evidence is accumulating which indicates that the delamination theory corresponds more closely with practical conditions and provides a sounder basis for design decisions.

#### 6. Conclusions

Abrasive wear is attributable primarily to local overstress of the surface material but the main agency of surface deterioration appears to be fatigue which can operate at different levels very near to the surface as determined by the size of asperities so as to give rise to delamination wear or, in the case of counterformal contact, at the depth of the maximum Hertzian stress, so as to give rise to pitting. Thermal effects may lead directly to softening or melting of the surface but more generally they may transform the mechanical properties of the material by changes in micro-structure.

- [1] Rennie, G., Phil.Trans.Roy.Soc.Vol.134, pp.143 (1829).
- [2] Ewing, Sir Alfred, Notices, Proc.Royal Inst., Vol.13, p.387 (1892).
- [3] Tomlinson, G.A., "A Molecular Theory of Friction", Phil.Mag. Vol.7, pp.905-939 (1929).
- [4] Deryagin, B.V. In discussion, Proc.Conf. on Friction and Wear, Institution of Mechanical Engineers, pp.767-768 (1957).
- [5] Holm, R., Frith, H.P. & Guldenpfennig, F. "Beitrag zur Kenntnis der Reibung" Viss Veroff Siemens-Werh 20/1 P.68 (1941).
- [6] Rabinowicz, E., "Friction and Wear of Materials" Wiley, New York, (1965).
- [7] Bowden, F.P. and Tabor, D., "The Friction and Lubrication of Solids" Oxford University Press, London (1950).
- [8] Tabor, D., "Junction Growth in Metallic Friction, the Role of Combined Stress and Surface Contaminants" Proc.Roy.Soc. A. Vol.25, pp.378-392 (1959).
- [9] Ferrante, J., and Smith, J.R. "Metal Interfaces, Adhesive Energies and Electronic Barriers" Solid-State communication, Pergamon, Vol.20 pp.393-396 (1976).
- [10] Johnson, K.L., Kendall, K and Roberts, A.D., "Surface Energy and the Contact of Elastic Solids" Proc.Roy.Soc.A. Vol.324, pp 301-13 (1971).
- [11] Kohno, A. and Hyodo, S. "The Effect of Surface Energy on the Microadhesion Between Hard Solids". J.Phys.D. Appl.Phys. Vol.7, pp.1243-46 (1974).
- [12] Buckley, D.H., "Metal-to-Metal Interface and its Effect on Adhesion and Friction" Journal of Colloid and Interface Sciences, Vol. 58, pp.36-53 (1977).
- [13] Andarelli, G. Maugis, D. and Courtel, R. "Observation of Dislocation Created by Friction on Aluminium Thin Foils,"Wear, Vol. 25, pp.21-31 (1973).
- [14] Maugis, D., Desalos-Andarelli, G., Heutel, A. and Courtel, R. "Adhesion and Friction on Al Thin Foils Related to Observed Dislocation Density."ASLE Paper No.76LC-2B-2 Boston. Oct.1976.
- [15] Sasada, T. and Kando, H. "Formation of Wear Particles by the Mutual Transfer and Wear Process" Proc. Sixteenth Japan Congress on Materials Research, Society of Materials Science,p32-35 (1973).
- [16] Sasada, T.,Norose, S. and Shimura Y. "Composition of Wear Particles Produced Under Rotary Friction of Different Metal Combinations" Proc.Eighteenth Japan Congress on Materials Research ibid pp.77-81, (1975).
- [17] Hirst, W., "Wear of Unlubricated Metals" Proc.Conf. on Lubrication and Wear" Institution of Mechanical Engrs.pp.674-81 (1957).
- [18] Kragelskii, I.V. "Friction and Wear" Butterworths, London.(1965).
- [19] Lancaster, J.K. "Severe Metallic Wear", Proc.Conf. on Lubrication and Wear, Institution of Mechanical Engineers, pp.694-700 (1957).
- [20] Koba, H. and Cook, N.H. "Wear Particle Formation Mechanics",

Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass. (1974).

- [21] Suh, N.P. "The Delamination Theory of Wear", *Wear*, Vol.25, pp.111-24, (1973).
- [22] Jahannuir, S., Suh, N.P. and Abrahamson, E.P. "Microscopic Observation of the Wear Sheet Formation by Delamination" *Wear*, Vol. 28, pp.230-49 (1974).
- [23] Tsuya, Y. "Microstructure of Wear, Friction and Solid Lubrication" Tech.Report Mechanical Engineering Laboratory, No.81, Tokyo, Japan.



BARWELL, F.T.

THE SCOPE AND LIMITATIONS OF THE ADHESION  
THEORY OF WEAR AS APPLIED TO ENGINEERING PRACTICE

Summary

The various agencies which cause mechanical wear are discussed and the 'adhesion theory' is contrasted with the 'delamination theory'. The evidence for the direct adhesion of metals is reviewed and it is shown that a measure of plastic enters into most frictional processes. The disintegration of the interacting surfaces by fatigue as the direct result of repeated plastic deformation is regarded as being of predominant importance in determining the rate of wear.

OBJETIVO E LIMITAÇÕES DA TEORIA DO DESGASTE

POR ADESÃO SOB O PONTO DE VISTA DA PRÁTICA DE ENGENHARIA

Sumário

Os vários agentes que causam desgaste mecânico são discutidos e a teoria da adesão é contrastada com a teoria da delaminação. A evidência para a adesão direta é revista e se mostra que uma medida de deformação plástica aparece na maioria dos processos de atrito. A desintegração por fadiga das superfícies interagentes, como resultado direto de deformação plástica repetida é considerada como de importância predominante na determinação da taxa de desgaste.

**A N A I S**DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 8**

PP. 1235 - 1245



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERINGTRIBOLOGICAL PROBLEMS ON RAILWAYS WITH PARTICULAR REFERENCETO ADHESION BETWEEN WHEEL AND RAIL.

BARWELL, F.T., Professor & Head of Department  
of Mechanical Engineering, University College of Swansea,  
South Wales, United Kingdom.

### 1. Introduction.

Railways have always depended on Tribology, for example the trials by Trevithick in 1804 demonstrated that the friction between relatively smooth surfaces can adequately provide force for the vital functions of driving and braking.

Much pioneer work was concerned with the development of plain bearings and the science of hydrodynamic lubrication was based on the explanation by Osborne Reynolds<sup>[1]</sup> of the results obtained by Beauchamp Tower when investigating the bearings used on London's Metropolitan Railway<sup>[2]</sup>.

A good deal of development of lubrication practice was concerned with the moving parts of steam locomotives but the power plant of modern locomotives relies on similar practices as are employed on stationary and marine plant. However two tribological systems remain which are specific to railways, namely the interface between wheel and rail and, in the case of electric railways, that concerned with current collection.

## 2. Current Collection.

The material used in the strips which rub against the contact wire varies between different administrations. Factors which have to be balanced are the electrical conductivity as a function of the applied force which, in certain circumstances can be sufficiently low to cause overheating, the wear resistance of the strip itself and its tendency to wear the contact wire. Under British conditions a graphite based material into which metal has been forced under pressure when molten has provided the best results.

It is frequently necessary to electrically isolate certain areas of the power system from others, whilst still providing a continuous mechanical path for the pantograph. This function was traditionally provided by section insulators in which the main contact wire was interrupted and attached to brackets connected by a porcelain insulator mounted eccentrically to the contact wire, so as to be clear of the path of the pantograph. Mechanical skids were provided to guide the pantograph head past the obstruction. This represented a massive and clumsy discontinuity in the overhead system and could only be negotiated at slow speeds. It was therefore desirable to devise an insulator which could be inserted into the contact wire itself, providing electrical insulation but an adequate mechanical path for the pantograph.

Fig. 1 shows the heavy design embodying porcelain insulators in the background in comparison with an improved design which appears in the foreground.

The solution was found by using glass fibre reinforced rod secured by compression into bronze end fittings attached to the contact wire. This was surrounded by collars made of the same ceramic material as is used to manufacture automobile sparking plugs. P.t.f.e. washers were situated between each of the ceramic collars and the intermediate space between the collars and the bonded glass fibre rod was filled with silicone rubber. The selection of the ceramic collars solved the

tribological problem associated with the passage of pantograph strip and the resulting light and compact design enabled section insulators to be inserted much more cheaply into the line because it was no longer necessary to provide additional structures to support them.

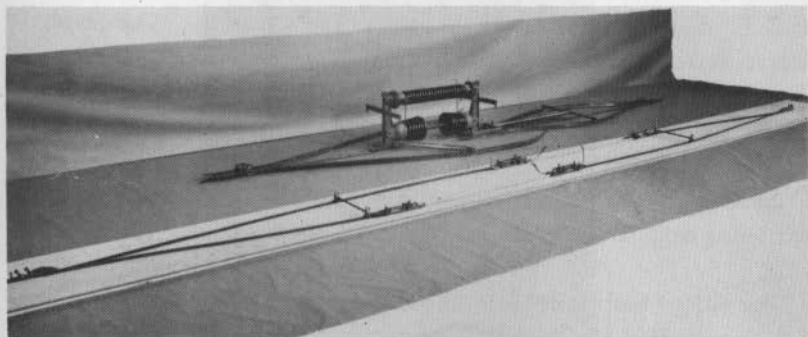


Fig. 1 Comparison of Section Insulators based on Porcelain with Improved Design using PTFE and Glass Fibres.

### 3. Interaction Between Wheel and Rail.

#### 3.1 Hertzian Stress.

Tyres are rolled from high quality steel having a tensile strength of  $8.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ . They are usually about 76mm in thickness and are shrunk on to forged-steel wheel centres. The diameter of the wheel is normally slightly over a metre. Rails have a tensile strength of  $7.1 \times 10^8 \text{ N/m}^2$  and a minimum elongation of 10%. The head of the rail is finished as a segment of a cylinder of radius 0.3m. The contact can be approximated to two crossed cylinders of 0.5 and 0.3m radius respectively. Given a journal load of ten tons, this gives rise to a Hertzian ellipse  $11 \times 14.6\text{mm}$  and a maximum compressive stress of  $1.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ . Since the indentation hardness of a metal is approximately three times the yield strength in compression, it will be seen that the material of the rail is stressed very highly in relation to its strength and in practice a good deal of work hardening must take place both in the surface of the rail and of the tyre. Fig.2 shows a taper-section of a tyre taken from a train of London Underground which shows micro hardness impressions. Whereas the bulk hardness of the metal was 260,

that in the vicinity of the surface was 798.

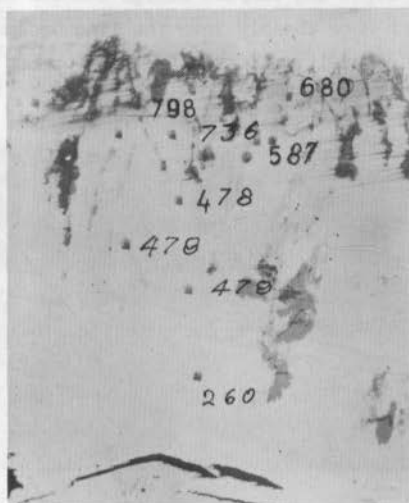


Fig.2 Micro-Hardness of Railway Tyre.

The tread of the tyre is inclined to the axis at an angle of 1 in 20 so that in fact the contact is between a cone and a cylinder and not between two cylinders as usually assumed. A correction has been calculated (3) and shown to represent an error of about 4%.

### 3.2 Contact Resonance.

Calculation of the mutual approach of wheel and rail under load shows this to be non-linear, deflection being proportional to the 2/3rds. power of the normal load applied. If the mass of the wheel-set and other directly coupled masses such as axle boxes is denoted by  $M$  then the system can resonate as determined by Eq.(1) as follows:

$$M\ddot{y} + ky = 0 \quad \text{where } k \text{ is the stiffness}$$

For small variations the system can be considered as being linear so that the frequency of vibration is given by

$$\sqrt{K/M} \text{ rad/sec or } \frac{1}{2\pi} \sqrt{K/M} \text{ Hertz} \quad (1)$$

Johnson and Gray<sup>[4]</sup> have shown that surfaces may suffer damage known as 'corrugation' resulting from such vibrations. The random characteristic of the surface profile can excite oscillations at

preferred frequencies<sup>[5]</sup>. Although every axle is capable of vibrating, rail corrugation is not a frequent occurrence. Some evidence exists that the composition of the steel is important<sup>[6]</sup> and moreover, Eq. (1) does not take damping into account. It is possible that under normal circumstances the degree of damping provided by journal bearings, sleepers and ballast may be sufficient to attenuate contact vibrations.

The Hertzian stress system involves maximum compressive stress on the surface at the centre of the contact zone. Compressive stress falls off rapidly with distance from the surface. This is not the case with shearing stress which increases to a maximum at some point within the bulk of the contacting material and in the case considered reaches the value of  $3.7 \times 10^8 \text{ N/m}^2$  at a distance of 3.2mm below the surface.

The onset of plastic yielding will be determined by the von Mises-Hencky criterion but the maximum shear stress criterion is more convenient and gives practically the same answer. Thus the elastic limit is reached when  $p_0 = 1.7 p_y$  where  $p_y$  equals yield stress in compression<sup>[7]</sup>. The maximum shear stress changes sign within the contact so that, from the fatigue point of view, the loading cycle may be compared with a direct stress test in which the cycle consists of compressive and tensile tests symmetrically above and below zero stress. There is therefore a strong tendency for cracks to form within the surface layers so that fatigue failure leads to the formation of pits in the tyre and rail surfaces.

### 3.3 Creep.

The above stress system relates that of a stationary locomotive. When traction or braking take place, additional stresses are occasioned by the shearing action at the surface of the two elements. If the case of traction is considered, the rail material will tend to be sheared in a backward direction and that of the wheel in a forward direction. Because of the inevitable elastic deformation associated with the stresses, the rotational speed of the wheel based on its unstrained dimension will be slightly faster than the values corresponding to the progress of the vehicle along the track. The amount of apparent sliding known as 'creep' is naturally dependent upon the tractive effort. Carter<sup>[8]</sup> produced an expression on the assumption that the bodies in contact, when worn, could be represented by a

cylinder running on a plane. His result can be stated as follows:

$$\xi = \mu \sqrt{8P/ER(1 - \sigma^2)} \times (1 - \sqrt{1 - F/F_{\max}}) \quad (2)$$

Where  $\xi$  = creep,  $R$  = effective radius,  $\mu$  = limiting coefficient of friction (assumed constant),  $P$  = load per unit breadth,  $E$  = Young's modulus,  $\sigma$  = Poisson's ration,  $F$  = tangential force per unit width,  $F_{\max}$  = limiting value of tangential force.

Fig. 3a which represents the form taken by the last term in Carter's expression for creep can however be accepted as a qualitative description of what happens when torque is applied to a locomotive wheel until it begins to slide.

There has been a considerable amount of research into the conditions between the tyre and the wheel in recent years and in particular the Office of Research and Experiments of the International Union of Railways has carried out a major programme of investigations using a former Great Western Railway gas turbine locomotive, No. 18000 originally built in Switzerland and returned there for conversion into a test vehicle. The locomotive was arranged so that a single test axle could be driven by a high powered traction motor usually used in France to drive two axles. The significant feature of the results was to confirm what had been found by previous workers, notably that the values of the creep obtained on the track tend to be higher than those predicted by Carter's theory in its original form or as refined by subsequent workers. Fig.3b shows some experimental results for limiting adhesion against creep. The solid line represents Carter's prediction. Measurements of the absolute speed of relative sliding appear to be more consistent than percentage creep and tend to lie in the region of one km/h irrespective of the train speed. Assuming a coefficient of adhesion of 0.4, this indicates that 10kW of energy is continuously applied to the Hertzian Contact. This heat may be necessary to remove lubricating contaminant from the rail surface.<sup>19]</sup>

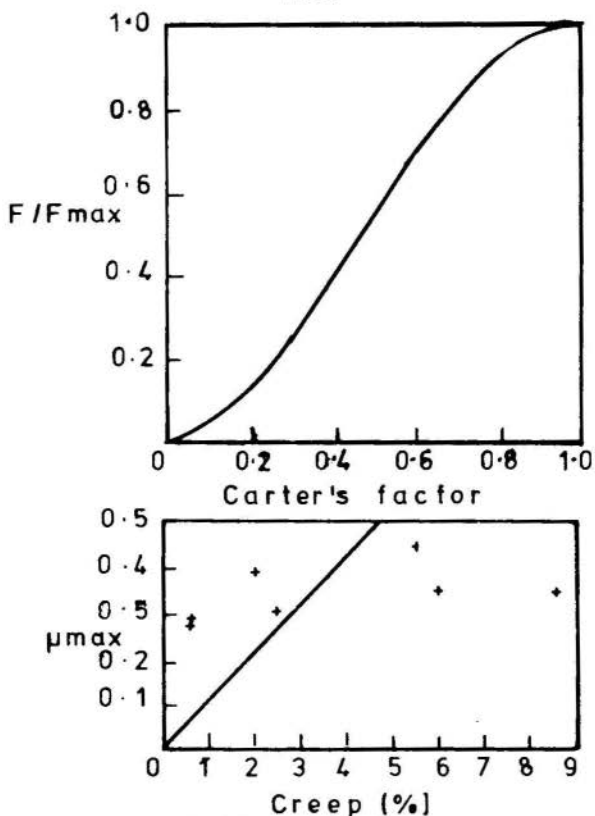


Fig. 3(a) Form of Tractive Effort/Creep Curve; (b) Limiting Coefficient Against Limiting Creep: wheel load 105 kN (10.5 tonf)

The most effective way of utilizing to the maximum adhesion between wheel and rail is to design locomotives to have good inherent characteristics. Various anti-slip controls can enable a locomotive to operate more nearly at the peak of friction than would otherwise be the case. An interesting observation during the trials carried out by the O.R.E. between Pontarlier and Frasné was that when locomotive driving wheels were just on the point of slipping, a ringing noise was heard. During trials on a transducer-controlled locomotive this ringing noise could be heard for considerable periods of time before reduction in tractive effort, due to slipping, occurred.



Clean though the bright strips on tyre and rail surfaces may appear, detailed examination shows that even the bright band on a rail is far from clean and far from smooth. The surface has been shown to be covered by finely ground particles of iron oxide, silica and other contaminants, which must be taken into account in order to explain the wide variation in coefficient of friction which occurs under different weather conditions<sup>[10]</sup>.

If it is accepted that loss of adhesion is attributable to foreign matter between wheel and rail, the obvious solution would be either the removal of the adventitious matter or its conversion to an innocuous form. Two main lines of attack have been followed, one being chemical and the other electrical. Chemical changes are essentially rate processes and the speed of reaction depends on such factors as temperature and concentration. Electrical methods are inherently more powerful than chemical methods because large amounts of energy can be applied rapidly. Certain objections to sparking may be overcome by the plasma process in which the arc itself is struck internally within the apparatus but the resulting ionized gas is caused to impinge on the rail or tyre. Satisfactory as low speed trials have been, it still remains to be shown that sufficiently rapid action can be achieved to provide adequate enhancement of adhesion at high speeds.

Chemical processes carried out at ambient temperature cannot be expected to operate rapidly. However, there may be critical areas where low adhesion conditions are frequent, due to industrial contamination or unfavourable microclimate and where the periodic application of chemicals which can be carried along the rails by the passage of successive trains may raise the general value of adhesion to a satisfactory level<sup>[11]</sup>. Fig.4 shows apparatus mounted onto a rail whereby the flanges of passing vehicles operate a system of pump and accumulator to supply a quantity of fluid to the treads of the wheels for subsequent transfer to the rail heads.

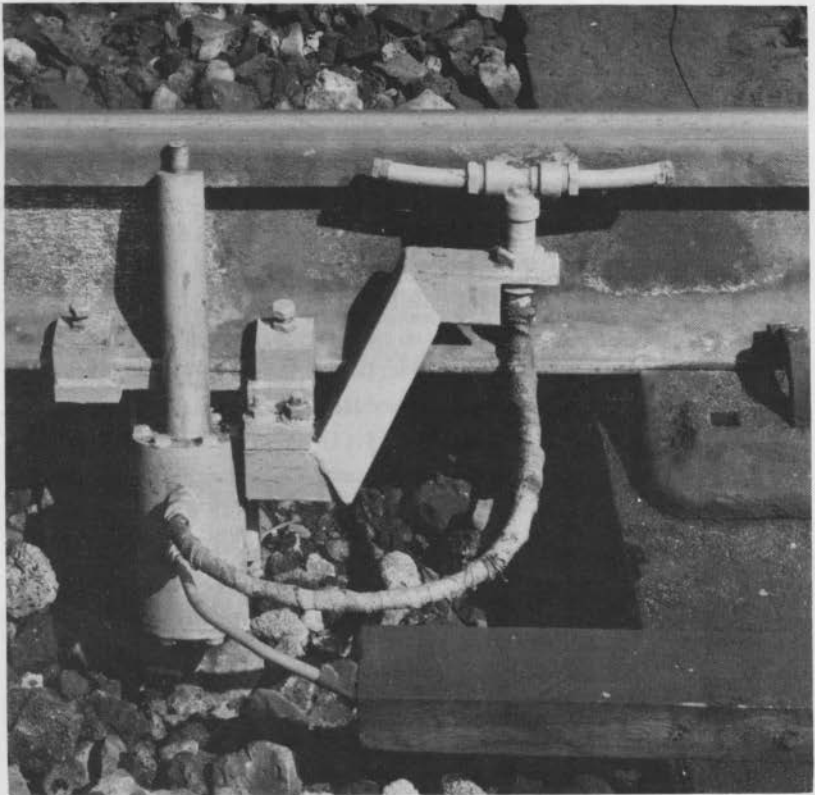


Fig. 4 Rail Mounted Applicator for Rail Conditioning Fluids.

#### References

- [1] Reynolds, O. (1886) "On the Theory of Lubrication and its application to the Beauchamp Towers' Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil." *Phil.Trans. Roy.Soc.* Vol.177, pp.157-234.
- [2] Towers, B. (1885) *Proc. Inst.Mechanical Engineers*, Vol.34 p.58.
- [3] Barwell, F.T. "Bearing Systems, Principles and Practice", Clarendon Press, Oxford. (1977).
- [4] Johnson, K.L. and Gray, G.G. "Development of Corrugation on Surfaces in Rolling Contact." *Proc. Inst.Mechanical Engineers*, Vol.189 pp.45-58, (1975).

- [5] Nayak, P.R. "Contact Vibration of Rolling Discs." Journ.Sound & Vibration. Vol.22, p.297 (1972).
- [6] Fink, M. "Wie entstehen die geheimnisvollen riefeln auf eisenbahnen." Sonderheft zur 6 (Internationalem) Schienen fahrzeug Arbeitstagung, Aachen. (1956).
- [7] Beeching, R. and Nicholls, N. "A Theoretical Discussion of Pitting Failure in Gears." Proc.I.Mech.E., Vol.158(a) pp.317-23.
- [8] Carter, F.W. "On the Action of a Locomotive Driving Wheel." Proc. Royal Soc.A. Vol.112 p.151 (1926).
- [9] Barwell, F.T. "The Contribution of Tribology to the Development and Operation of Railways." Proc.I.Mech.E.Vol.187 pp 1-15 (1973).
- [10] Zobel, F.G.R. "Development of Remedies for Poor Adhesion." Railway Engineering Journal, Vol.4 (4) pp.14-21 (1975).
- [11] Collins, A.H. and Prichard, C. "Recent Research on Adhesion." Railway Engineering Journal. Vol.1(5) p.19. (1972).

BARWELL, F.T.

TRIBOLOGICAL PROBLEMS ON RAILWAYS WITH PARTICULAR  
REFERENCE TO ADHESION BETWEEN WHEEL AND RAIL

Summary

The following subjects are dealt with:  
Nature of the Hertzian contact when subjected to shearing forces; creep, laboratory studies under controlled conditions - effect of oxygen, water and organic contaminants; full scale measurements using specially equipped locomotives; long term measurements on track; design of locomotives and their controls to make maximum use of available adhesion; methods for increasing the value of adhesion.

---

PROBLEMAS DE TRIBOLOGIA EM ESTRADAS DE FERRO COM PARTICULAR  
REFERÊNCIA À ADESÃO ENTRE RODA E TRILHO

Sumário

Neste artigo são apresentados os seguintes tópicos: natureza do contato Hertziano quando sujeito a forças de cisalhamento; relaxação, experimentos sob condições controladas, efeito do oxigênio, água e contaminantes orgânicos; medidas em locomotivas especialmente equipadas; projeto de locomotivas e seus controles visando a máxima utilização da adesão disponível; métodos para aumentar o valor da adesão.

**A N A S**DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 9**

PP. 1247 - 1255



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERINGTHE STUDY OF PARTICLES AS AN AID TO MONITORING  
THE CONDITION OF MACHINE SYSTEMS.Barwell, F.T., Jones, M.H., and Roylance, B.J.  
Department of Mechanical Engineering, University  
College of Swansea, South Wales, United Kingdom.1. INTRODUCTION

The cost of preventive maintenance, which involves stopping and stripping down of machines at periodic intervals, having become prohibitive, means have been developed to determine the condition of plant while it is in operation<sup>[1, 2 & 3]</sup>. Only when there is indication of damage or malfunctioning due to excessive wear will the plant be stopped for inspection or unscheduled maintenance. It is clear that whereas fatal consequences can ensue from a failure to shut down a plant there are also serious consequences arising from unnecessary shut-down of plant. It follows therefore that it is essential to obtain a high level of confidence, not only in the reliability of the monitoring equipment, but also in the subsequent analysis and inter-

pretation of the data it produces.

An aspect of prediction monitoring which currently has reached an interesting stage in its development is contaminant analysis. Wear and corrosion debris are transported by coolants and lubricating oil. Careful examination and quantitative assessment of the volume or number of particles collected in a sampling process can provide early indication of imminent failure. The techniques used are spectrometric oil analysis procedures, (SOAP), magnetic plug inspection and microscopic examination, X-ray fluorescence, thin layer chromatography and blotter spot tests<sup>[4,5]</sup>.

A more recent development is ferrography<sup>[6]</sup>. The purpose of this paper is to describe how this technique is being used in the analysis of debris produced in highly loaded contacts such as rolling element bearings, gears and cams.

Because most manifestations of wear consist of the disintegration of surface material to form particles these represent the recorded history of the wear process. Particles present in oil systems range in size from 20nm to several  $\mu\text{m}$ . Most of the smaller particles form stable colloids and others are absorbed from the atmosphere rather than resulting from a wear process. It has been estimated that a typical sample would contain  $10^{12}$  particles per cubic centimetre. Particles of 20nm diameter or above can be observed in an optical microscope.

One method of preparing particles for examination consists of pumping a sample of oil at a slow, steady rate ( $\frac{1}{4}$  cc per minute) between the poles of a magnet designed to have an extremely high gradient near the poles. The fluid runs down an inclined microscope-slide which has been treated so that the oil is confined to a centrally situated strip and so that the particles will adhere to the slide's surface on removal of the oil. The slide is mounted so that its axis is aligned with the gap between the pole pieces of the magnet. Because the disturbance of the slide from the pole forces is slightly less at the top than at the exit end, the magnetic field gradient increases as the particles pass downwards. The net effect of the viscous and magnetic forces acting on particles is to sort them by size, the larger particles being deposited first, whereas the smaller particles are carried some way along the slide before being deposited. The oil

sample is diluted by a special solvent to increase the mobility of particles and the volume which is usually pumped through the system is approximately 5cc. A washing and a fixing process is used to remove the surplus oil and hold the particles in position. The total deposit weighs about 10 $\mu$ g and the time of preparation is less than 30 minutes. At this stage the slide becomes a permanent record of the condition of the lubricant and is known as a 'Ferrogram'. The small particles tended to be single domains and are therefore permanent magnets whereas the the larger particles are multi-domained. The entry deposit therefore embraces the large particles <5 $\mu$ m and the oxides of iron (magnetite and haematite) are deposited lower down.

In addition to information about the number and size of particles a great wealth of information is available from microscopic observation of the nature and shape of the particles. An arrangement of an optical microscope which employs coloured transmitted and reflected light simultaneously is used to distinguish metallic particles from those composed of oxide or polymeric material. The latter are deposited because of transfer of metal in which small quantities of magnetic substance are dispersed throughout the particle. For routine testing or automatic monitoring of lubricated systems another form of apparatus is employed wherein the solution containing the particles is passed through a tube so that the particle density can be monitored optically.

## 2. PARTICLE CHARACTERISTICS.

The shape of particles can be shown to relate to the circumstances surrounding their generation and shape changes have been shown to relate to the running-in process<sup>[7,8]</sup>.

Mild wear is characterised by the formation of plate-like particles as would be expected from the delamination theory of wear<sup>[9]</sup>. This is a form of surface fatigue in which the continued plastic working of the material causes cracks to be nucleated immediately below the surface and to propagate parallel to the surface. Hertzian contact however causes the maximum shearing stress to occur well within the surface so that fatigue action gives rise to pitting failure. Great interest therefore attaches to the formation of spherical particles of the type shown in Fig.1 which appear to be associated with the incidence of pitting-type failure of rolling elements<sup>[10]</sup>. If present

findings can be substantiated, the appearance of such particles will form a valuable early warning of the imminence of fatigue failure.

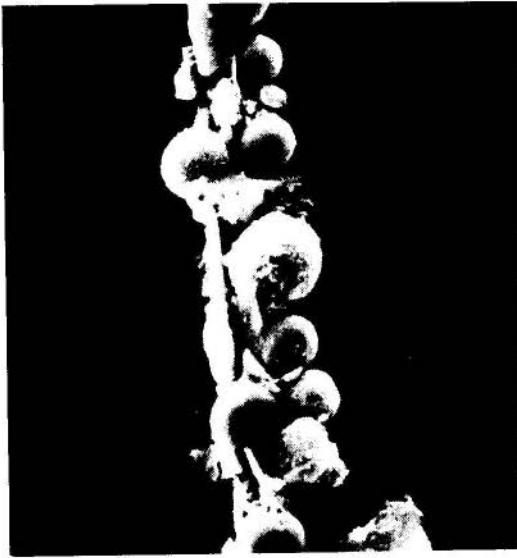


FIG. 1.

SPHERICAL PARTICLES FORMED DURING FATIGUE IN  
ROLLING ELEMENT BEARING.

The coiled particles of Fig.2 provide evidence of cutting-type wear. They are often present when plant is being commissioned and can sometimes originate from the manufacturing process.

If running-in proceeds satisfactorily cutting wear particles will cease to be formed. Their appearance late in the life of a machine are an indication that conditions have deteriorated and serious wear is occurring.

Tests have been carried out in the authors' laboratory on steel discs, in which one of the discs was held stationary and the other rotated over a range of peripheral speed 0.25 to 4 m/s. Performance data was obtained for traction, temperature, film thickness and film 'quality', (contact resistance), when the surfaces were lubricated with high viscosity index mineral oil. Full details of the results are published elsewhere<sup>[11]</sup> but some of the more significant conclusions are summarised in Table 1.



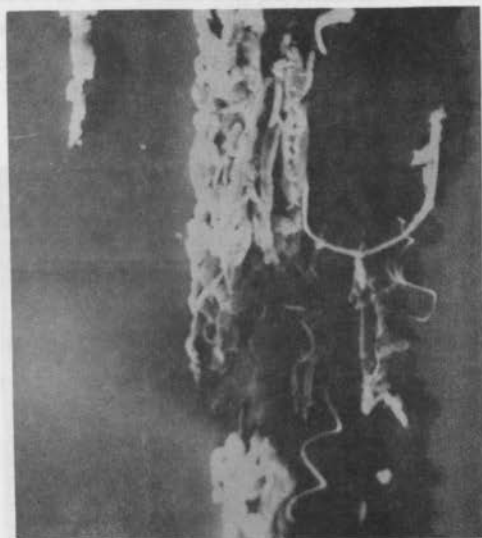


FIG. 2

CUTTING WEAR PARTICLES FORMED DURING RUNNING-IN PERIOD OF OPERATION

TABLE 1

FORM OF WEAR DEBRIS FROM DISC MACHINE TESTS UNDER  
DIFFERENT CONDITIONS

Discs: 300mm dia. 9.4mm wide.

LOAD (N)	SPEED M/S		1.9	3.2
	0.6	1.27	1.9	3.2
445	Mainly rubbing wear platelets.	Rubbing wear platelets with a few cutting and spheres.	Rubbing wear platelets.	Cutting wear particles and oxide.
890	Rubbing wear platelets few spherical particles.	Larger size platelets + spherical particles.	Rubbing wear platelets + cutting wear & some oxide.	Rubbing wear but more oxide.
1780	Rubbing wear and cutting particles.	Large platelets also oxide.	Rubbing wear + oxide and few spherical wear particles.	Mainly rubbing wear platelets and oxides.

A quantitative assessment of the number and distribution of particles was achieved by using a Quantimet 720 image analysing unit, Fig. 3. By relating wear behaviour to the performance characteristics a clearly defined pattern of behaviour was established

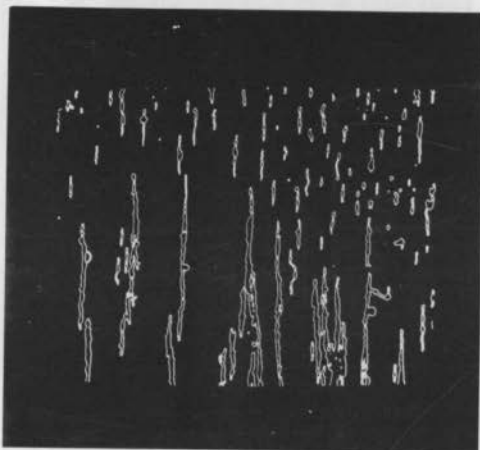


FIG. 3  
QUANTIMET IMAGE DERIVED FROM FERROGRAPH

### 3. IDENTIFICATION OF MATERIAL ON FERROGRAM.

Whilst a great deal can be learned about the condition of a machine from the size distribution and the shape of particles, it is also possible to identify the source of a particle from within a machine by means of its chemical composition.

In some cases the temper colours resulting from heating can be used to distinguish between particles of different origin<sup>[12]</sup>. Ferrograph slides were heated for 90 seconds at increments of temperatures and it was shown to be possible to divide metals and alloys into four groups characterised by 52100 steel, cast-iron, nickel and Austinitic stainless steel respectively. Table II.

TABLE II  
EFFECT OF HEATING PARTICLES.

Material	COLOUR			
	Test 1 330 <sup>o</sup> C.	Test 2 400 <sup>o</sup> C	Test 3 480 <sup>o</sup> C	Test 4 540 <sup>o</sup> C
AlSi 52100	Blue	Light grey	Unchanged	
3½% carbon cast iron.	Straw to Bronze.	Deep bronze and some mottled blueing.	Unchanged	
Type 'A' nickel.	No change.	No change.	Bronze with significant blueing on most particles.	All particles blue or blue-grey.
AWI 304 Stainless Steel.	No change.	No change.	Straw to Bronze with slight blue- ing on some particles.	Most particles still straw to bronze. Some particles showed mottled blueing.

## 6. CONCLUSIONS.

The presence of wear debris, uniquely defined by the wear mechanism, may be easily and quickly evaluated by Ferrography. This new technique is therefore a power diagnostic tool for machine health monitoring. Numerous examples have already been recorded of successful machinery monitoring of Diesel engines, aero-engines and hydraulic systems by Ferrographic techniques.

References

- 1 Collacott, R.A. "Mechanical Failure - Diagnosis & Monitoring". CME 63 pp.63-69 (1976).
- 2 Hunter, R.C. "Engine Failure Prediction Techniques." Aircraft Engineering. pp.4-14, March (1975).
- 3 Downham, E. "Vibration Monitoring and Wear Prediction," Proc. I.Mech.E. Conf. Pre-print 188, pp.29-34, (1975).
- 4 Collacott, R.A. "Mechanical Fault Diagnosis by Contaminant Monitoring," I.Mech.E. Conf. Durham, (1975).
- 5 Collacott, R.A. "Identification of Contaminants in Fluid Power Systems," I.Mech.E. Conf. Bath, (1976).
- 6 Seifert, W.W. and Westcott, V.C. "A Method for the Study of Wear Particles in Lubricating Oil," Wear, Vol.21, pp.27 (1972).
- 7 Jones, M.H., Sastry, V.R.K., and Youdan, G.H. "A Study of the Running-In Wear of a Diesel Engine by Ferrographic and Spectrographic Techniques," Proc. of 4th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Institution of Mechanical Engineers, London (1977).
- 8 Scofield, G.L., "Diesel Engines and their Particle Signatures". Institution of Mechanical Engineers, Automobile Division, (1977).
- 9 Barwell, F.T. "The Scope and Limitations of the Adhesion Theory of Wear as Applied to Engineering Practice." This conference.
- 10 Middleton, J.L., Westcott, V.C. and Wright, R.W. "The Number of Spherical Particles Emitted by Propagating Cracks in Rolling Bearings". Wear, Vol.30 p.275, (1974).
- 11 Odi-Owei, S., Price, A.L. and Roylance, B.J. "An Assessment of Quantimet as an Aid in the Analysis of Wear Debris in Ferrography". American Society of Lubrication Engineers Transactions, Vol.20, No.2, pp.177-182, (1977).
- 12 Barwell, F.T., Bowen, E.R., Bowen, J.P. and Westcott, V.C. "The Use of Temper Colours in Ferrography," Wear, Vol.44, p.163 (1977).

BARWELL, F.T., JONES, M.H. and ROYLANCE, B.J.

THE STUDY OF PARTICLES AS AN AIND TO MONITORING THE  
CONDITION OF MACHINE SYSTEMS

Summary

Economic pressure has made machine healt monitoring an essential feature of maintainence programmes. A new diagnostic tool is described which analyses the wear particles suspended in a lubricant. Examination of the wear debris for composition and morphology enables a reliable assessment to be made of machinery health conditions.

---

ESTUDO DE PARTÍCULAS COMO UM MEIO AUXILIAR  
PARA A SUPERVISÃO DAS CONDIÇÕES DE FUNCIONAMENTO  
DE SISTEMAS DE MÁQUINAS

Sumário

Pressões econômicas tem tornado a supervisão das condições de operação das máquinas uma característica essencial para os programas de manutenção. Descreve-se uma nova ferramenta para diagnóstico a qual analisa as partículas de desgaste em suspensão num lubrificante. O exame da composição e morfologia das partículas resultantes do desgaste permite uma avaliação confiável das condições de operação do maquinário.

**A N A I S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D- 10**

PP. 1257 - 1270

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

AVALIAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES EM UM MOTOR A ALCOOL

Ricardo Tomaz Hellbrügge

Antonio Pedro Lourenço

Duraid Mahrus

METAL LEVE - Gerência Desenvolvimento de Produtos

Rua Brasília Luz, 535 - Santo Amaro

São Paulo, Brasil

1. Introdução

A viabilidade técnica de se empregar o álcool como combustível nos motores de combustão interna é aceita há muito tempo - já em 1925 foram relatadas experiências práticas neste sentido em uma conferência realizada na Escola Politécnica do Rio de Janeiro [1] .

A viabilidade econômica, por outro lado, vinha favorecendo a queima de derivados do petróleo, de preço relativamente baixo e com poder calorífico mais elevado. Recentemente, no entanto, a alta do petróleo fez com que o álcool etílico fosse encarado no Brasil como uma fon

te alternativa de energia de grande potencial e uma série de medidas e estudos vem sendo realizadas neste campo.

Esta é uma contribuição para um melhor conhecimento dos efeitos colaterais do uso do álcool - com uma elevação simultânea da taxa de compressão de forma a otimizar o consumo específico de combustível - sobre certos componentes dos motores. Neste trabalho foram investigadas em particular as solicitações nas bronzinas e nos pistões decorrentes do emprego do álcool como combustível em motores projetados para o uso de gasolina.

## 2. Investigações

Foi considerado um motor a gasolina para o qual foi medido, em banco de provas, uma potência de 46 CV a 4000 rpm, uma pressão máxima de combustão de  $50 \text{ kg/cm}^2$  e uma temperatura na vela de  $900^\circ\text{C}$ . Este motor sofreu então uma elevação da taxa de compressão de  $\xi = 7,2:1$  para  $\xi = 12:1$  e, com álcool etílico como combustível, constatou-se uma elevação da potência e da pressão máxima para 56 CV a 4000 rpm e  $80 \text{ kg/cm}^2$  respectivamente, enquanto que a temperatura permanecia praticamente inalterada.

Para o exame comparativo, realizado na rotação de potência nominal, foram considerados os mesmos mancais para as duas versões gasolina e álcool e foi utilizado um método computacional para análise das condições de carga e lubrificação [2,3,4]. O método aplicado determina para valores dados de carga, velocidade, características do lubrificante e geometria eixo-mancal os parâmetros importantes para avaliar o bom funcionamento do mancal: espessura do filme de óleo, pressões hidrodinâmicas, velocidades tangenciais e radiais do eixo e a temperatura atingida. O dimensionamento do mancal deve garantir um equilíbrio mecânico (entre carga aplicada e pressão hidrodinâmica gerada ao se estabelecer um filme de óleo entre as superfícies com movimento relativo) e um equilíbrio térmico (entre atrito gerado e calor retirado) dentro de uma faixa de funcionamento seguro.

A necessidade de uma maior taxa de compressão implica, na prática, em uma forma geométrica diferente do pistão. Uma simples elevação da altura de compressão do pistão, no entanto, não era aconselhável, visto que amostras assim modificadas haviam falhado (fig. 1).

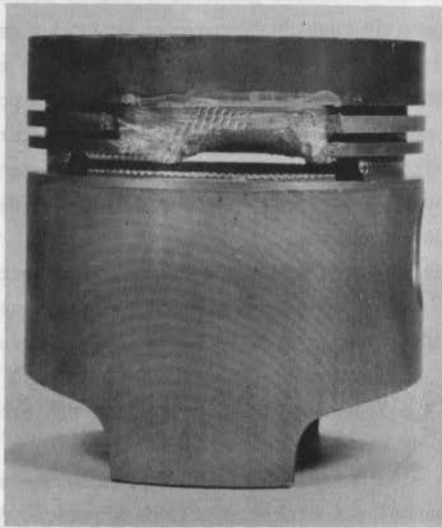


FIG. 1 - FALHA EM PISTÃO ADAPTADO PARA ÁLCOOL

Desta forma foi projetado um novo pistão que, além de possibilitar a taxa de compressão almejada, devia possuir maior resistência estrutural, melhor dissipação de calor e apresentar um nível de solicitações próximo ao nível constatado no pistão da versão gasolina.

Na investigação destes esforços atuantes foi utilizado o método computacional de Elementos Finitos [5] para um modelo com simetria axial. Com auxílio deste método é possível calcular, para valores dados de pressões e temperaturas no contorno, coeficientes de transmissão de calor e propriedades físico-mecânicas do material, as deformações devido às cargas mecânicas e térmicas e as tensões assim induzidas. Também a distribuição de temperaturas pode ser avaliada.

### 3. Resultados

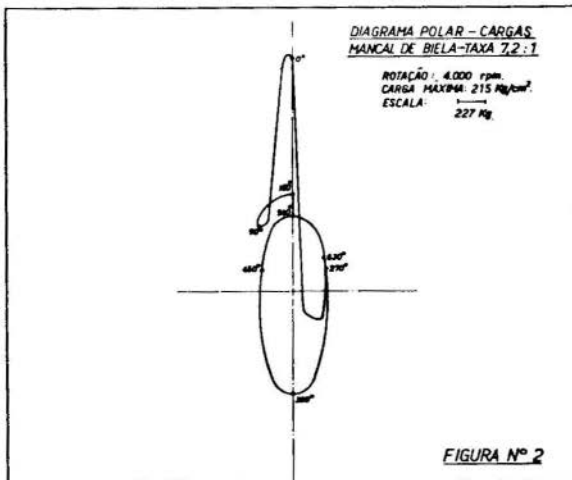
A resultante dos esforços dinâmicos, composta por forças devido a pressão do gás e forças devido a inércia das massas em movimento do sistema biela-manivela, está plotada em diagramas polares nas figuras

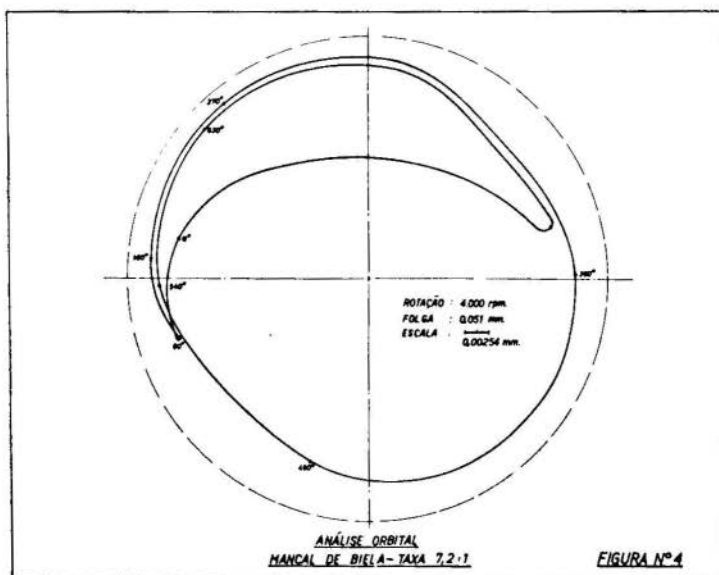
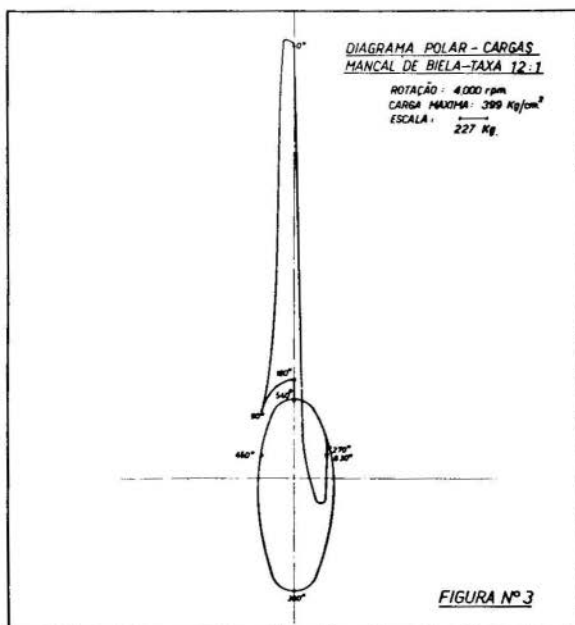


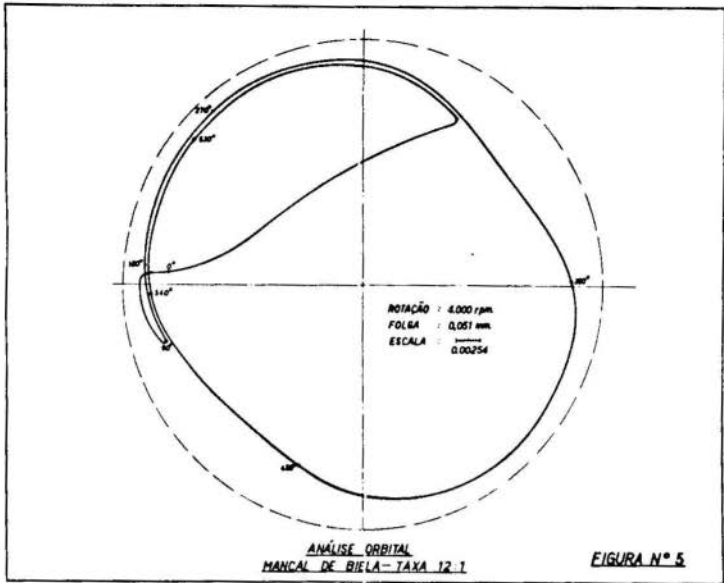
2 e 3 para os mancais de biela, gasolina e álcool respectivamente. É notado que o aumento da taxa de compressão se traduz em uma elevação da carga unitária máxima de 215 para 399  $\text{kg}/\text{cm}^2$  e que o pico de carga atua somente durante aproximadamente  $40^\circ$  a partir do ponto morto superior no ciclo de combustão. No restante do ciclo as cargas para as versões gasolina e álcool são praticamente iguais e as pequenas diferenças são consequência da variação da massa do pistão, decorrente da alteração da taxa de compressão.

A capacidade de carga do material, utilizado nestes mancais, vale  $422 \text{ kg}/\text{cm}^2$  e é assim superior aos esforços existentes na versão álcool; a temperatura atingida de  $157^\circ\text{C}$  está abaixo do valor limite de  $177^\circ\text{C}$ .

As figuras 4 e 5 representam os diagramas das órbitas do eixo, devido à variação da carga em intensidade e direção, e indicam as espessuras do filme de óleo durante o ciclo. A posição que o eixo adota dentro da folga do mancal foi determinada para a rotação de potência nominal e para um valor médio de folga de montagem. A comparação entre as versões gasolina e álcool mostra que apenas nos instantes próximos à combustão ocorreu uma variação na espessura do filme de óleo e que a pressão hidrodinâmica aumenta de 980 para  $1600 \text{ kg}/\text{cm}^2$ , alcançando desta forma o limite admitido para este material.





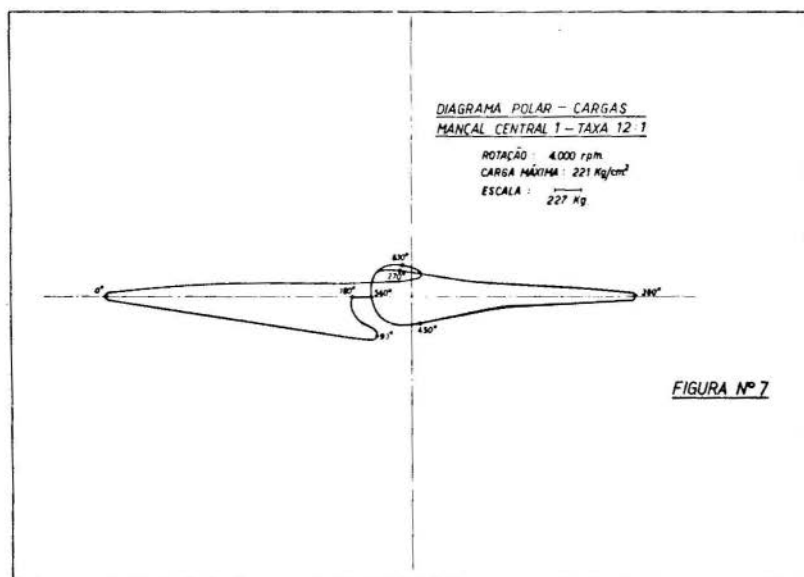
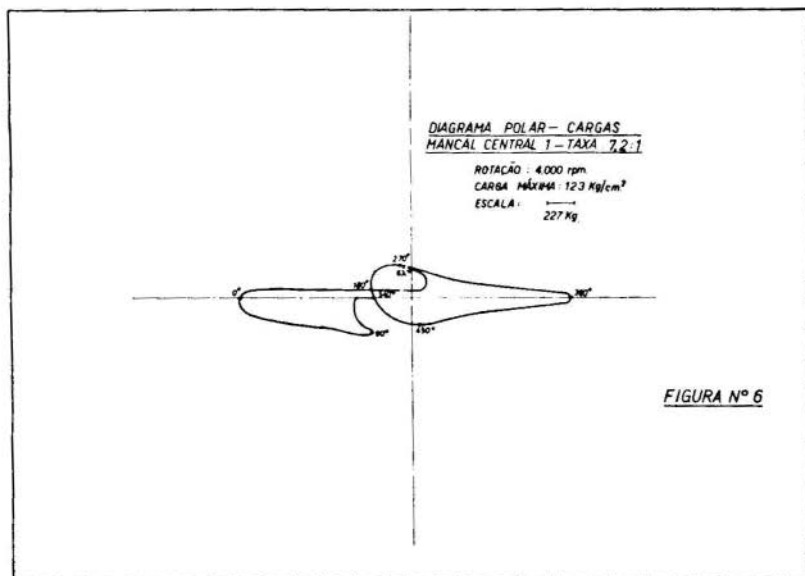


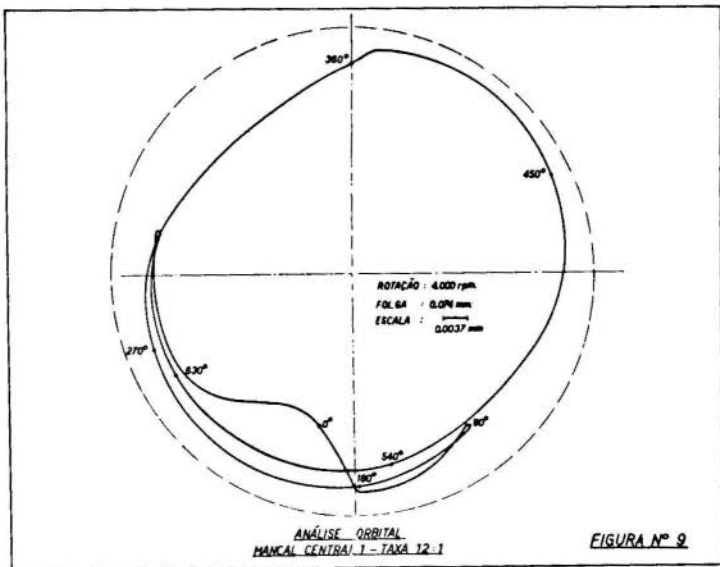
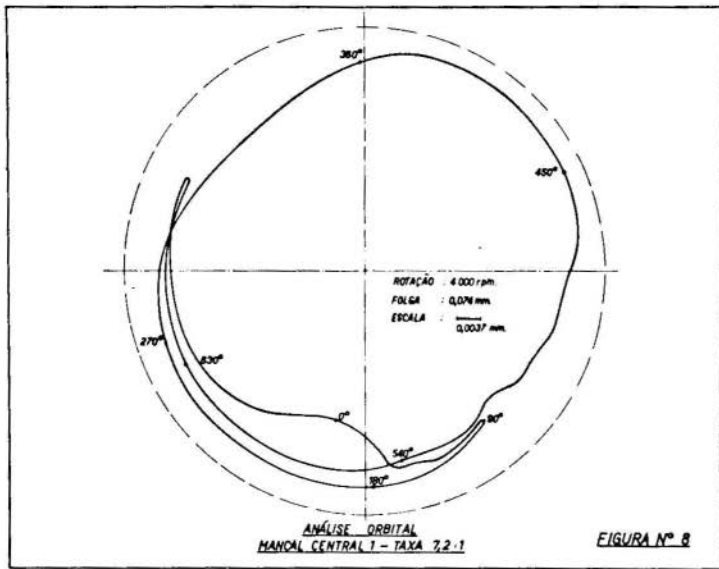
Constata-se, ainda, um maior período de permanência do eixo durante a combustão (até  $180^{\circ}$ ) em determinada região do mancal e velocidades radiais elevadas no início da combustão. A mínima espessura do filme de óleo vale, para ambas as versões, 0,0017 mm.

Para os mancais centrais foram levantados os mesmos diagramas e nas figuras 6 e 7 são mostradas as cargas do mancal central 1, gasolina e álcool. Ocorreu um acréscimo de 123 para 221  $\text{kg}/\text{cm}^2$  e assim a capacidade de carga do material deste mancal, 197  $\text{kg}/\text{cm}^2$ , é superada um pouco. A temperatura calculada em  $143^{\circ}\text{C}$  está abaixo do valor tolerado de  $205^{\circ}\text{C}$ .

A órbita do eixo - figuras 8 e 9 - é bastante semelhante para as duas versões e houve um aumento da pressão hidrodinâmica de 580 para 1330  $\text{kg}/\text{cm}^2$ , valor acima da capacidade do material que é de 790  $\text{kg}/\text{cm}^2$ .

Não há velocidades radiais elevadas neste mancal e a mínima espessura do filme de óleo é de 0,0029 mm.

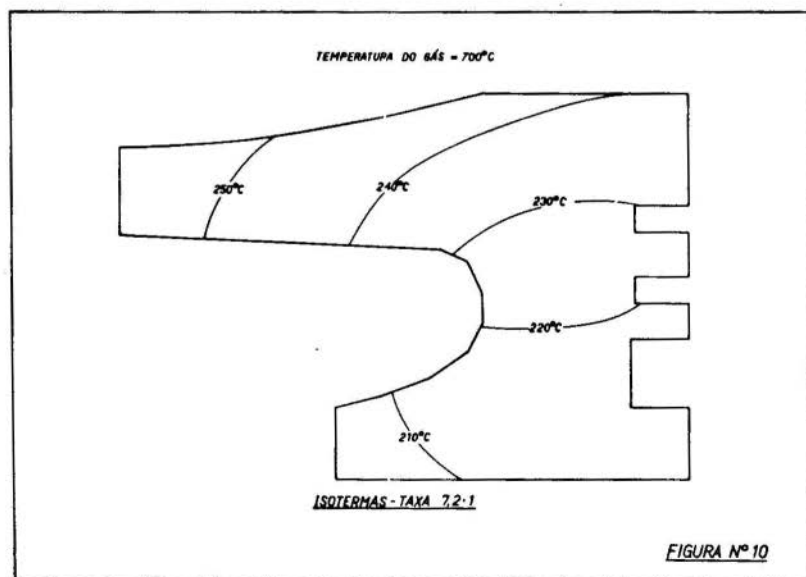


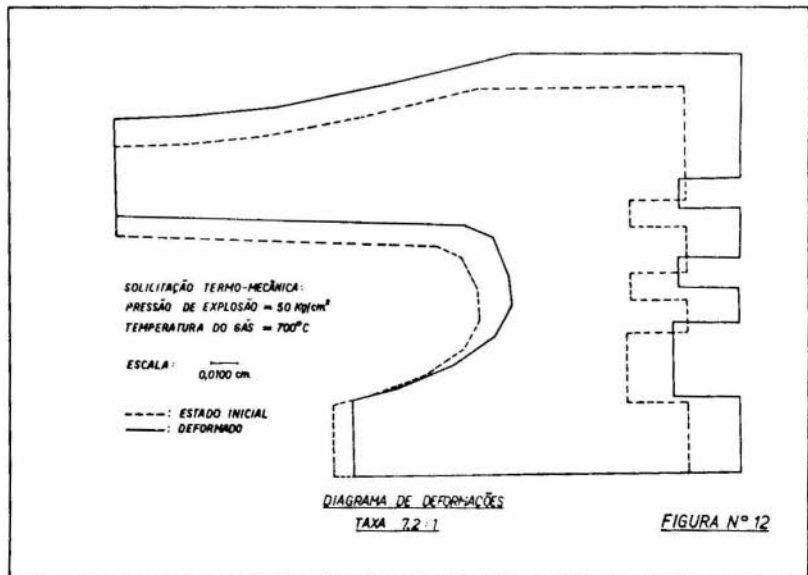
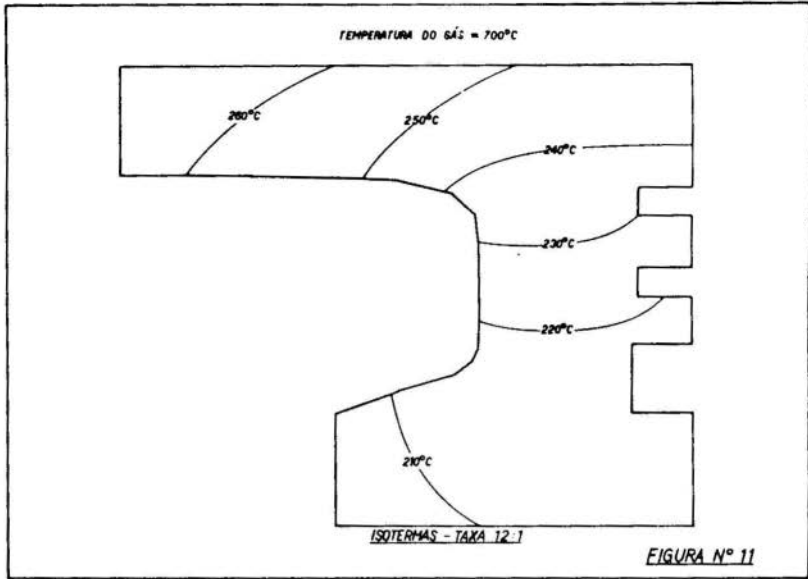


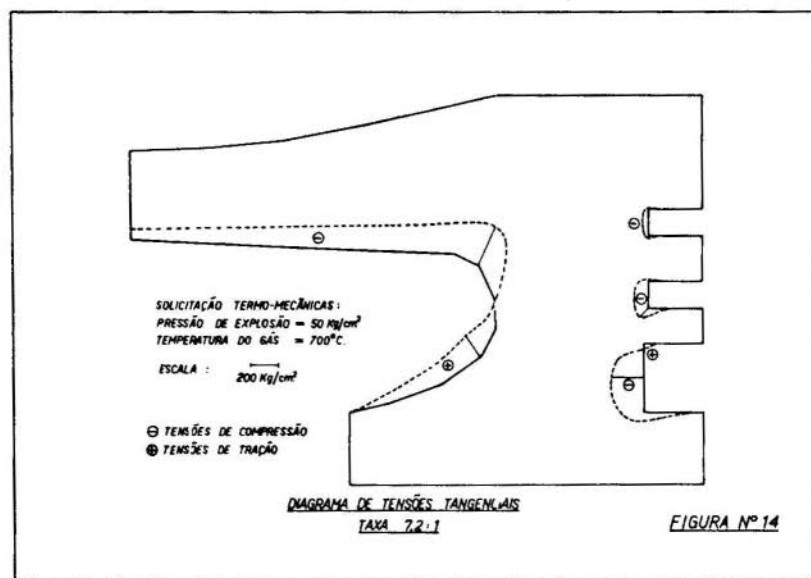
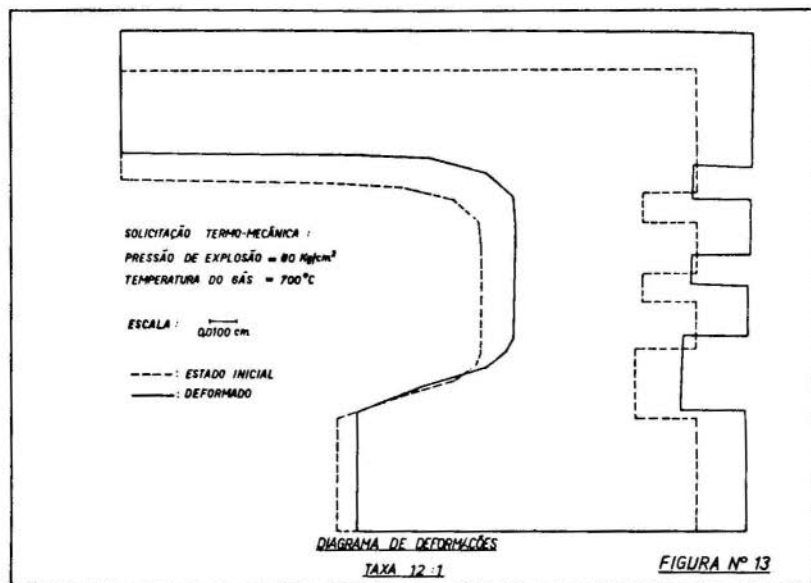
Para a investigação das solicitações termomecânicas dos pistões foi admitido uma temperatura média de combustão de  $700^{\circ}\text{C}$  e fixados os valores de temperatura e coeficientes de transmissão no contorno. Os diagramas 9 e 10 evidenciam que a distribuição de temperaturas para as duas versões é praticamente igual e a pequena diferença acusada é função principalmente do aumento do coeficiente de transmissão na cabeça do pistão com o aumento da pressão e, em segundo plano, decorrente da forma geométrica diferente.

A figura 12 mostra as deformações calculadas para o pistão da versão gasolina e a figura 13 indica as curvas correspondentes da versão álcool; os valores absolutos das deformações diferem muito pouco e como máximo foi registrado 0,20 mm.

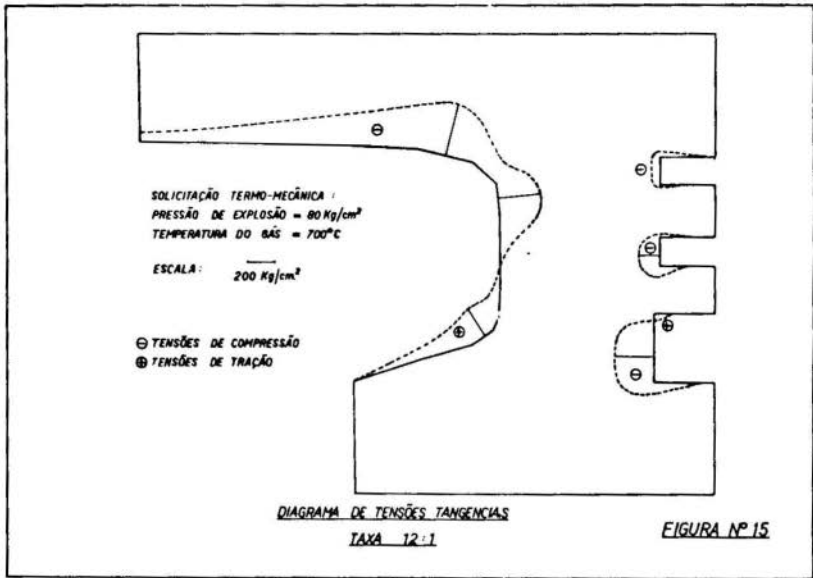
As figuras 14 e 15 trazem as tensões tangenciais calculadas para a versão gasolina e álcool, respectivamente. A máxima tensão induzida para a versão original é de  $533 \text{ kg/cm}^2$  enquanto que para o álcool foi calculado um valor de  $633 \text{ kg/cm}^2$  - o valor das máximas tensões, portanto, está bastante próximo.











#### 4. Conclusões

Foram calculados os esforços atuantes nos mancais e nos pistões de um motor a gasolina adaptado para álcool.

A elevação da taxa de compressão se traduz em cargas mais altas para os componentes diretamente envolvidos. Particularmente no mancal central visto, a elevada carga unitária e pressão hidrodinâmica podem eventualmente dar origem a um processo de falha prematura por fadiga. No caso dos pistões foi mostrado que era insuficiente elevar simplesmente a altura de compressão e, com um novo pistão projetado para cargas mais altas, foi possível obter níveis de solicitações similares aos encontrados na versão gasolina.

A adaptação de um motor a gasolina para o uso do álcool etílico requer, portanto, um exame dos esforços atuantes em certos componentes para garantia de um funcionamento seguro.

Bibliografia

- [1] Fonseca Costa, E.L., O Álcool como Combustível Industrial no Brasil. Conferência realizada na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, (1925).
- [2] Slaymaker, R.R., Bearing Lubrication Analysis. The Cleveland Graphite Bronze Company, pp. 6 - 56.
- [3] Slaymaker, R.R., Journal Center Orbits in Piston Engine Bearings. SAE 690114, (1969).
- [4] Bussien, R., Automobiltechnisches Handbuch Pp. 192 - 222 (1965).
- [5] Mahrus, D., e Kuniyoshi, S., Projeto de componentes de Motores Usando Método dos Elementos Finitos. Anais do III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Vol. B, pp. 465 - 474 (1975).

HELLBRUGGE R.T., LOURENÇO A.P. e MAHRUS D.

AVALIAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES EM UM MOTOR A ALCOOL

Sumário

Na adaptação de motores a gasolina para o uso do álcool como combustível é desejada uma elevação de taxa de compressão. Foram investigados os esforços atuantes nos mancais e nos pistões decorrentes desta alteração. Os métodos computacionais utilizados permitem avaliar os parâmetros importantes para o funcionamento seguro destes componentes.

---

EVALUATION OF THE LOADS OF AN ENGINE USING

ALCOHOL AS AN ALTERNATIVE FUEL

Summary

At the adaptation of engines to the use of alcohol as an alternative fuel a raise in the compression ratio is desirable. The loads acting on the bearings and on the pistons due to that change were investigated. The computational methods applied enable the prediction of those parameters important for a reliable performance.

**A A A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 11**

**PP. 1271 - 1280**



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

ROTORES DARRIEUS

Miguel Hiroo HIRATA  
Programa de Engenharia Mecânica  
COPPE/UFRJ  
Rio de Janeiro, Brasil.

William Mittias MANSOUR  
Programa de Engenharia Mecânica  
COPPE/UFRJ  
Rio de Janeiro, Brasil

1. Introdução

As potencialidades e limitações do aproveitamento da energia eólica tem recebido, recentemente, muita atenção, e como resultado farta informação, a este respeito, pode ser encontrada na literatura especializada. Hirata e Mansour [1] apresentam um apanhado geral a este respeito .

Da mesma maneira pode-se encontrar vários trabalhos que dizem respeito ao desempenho de moinhos de vento (rotores) sob determinada condição. No entanto, são bastante escassas as informações sobre a influência da variação dos vários parâmetros aerodinâmicos, na performance dos rotores. Sendo evidente a grande importância destes dados, não só na escolha das formas e dimensões dos rotores, como também no seu dimensionamento estrutural, os autores desenvolveram um modelo simplificado, para rotores do tipo Darrieus. O modelo desenvolvido assume que as pás possam ser simuladas por asas de razão de aspecto altas e que o escoamento numa pá não sofre influência das demais pás.

## 2. Desenvolvimento do Modelo Matemático

Considere-se inicialmente a Fig. (1) que mostra esquematicamente um rotor do tipo Darrieus de tres pás.

Se se supuser que as pás do rotor possam ser simula-

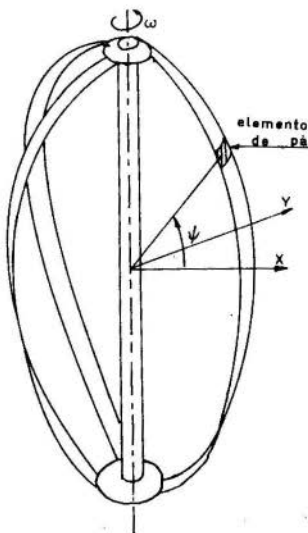


Fig.1: Rotor Darrieus

das por asas de razão de aspecto altas e que o escoamento numa pá não é modificado pela presença das demais pás então, pode-se elaborar um modelo simples baseado no escoamento bidimensional ao redor de um elemento de pá.

Para a determinação do campo de velocidade e das cargas aerodinâmicas atuantes num elemento de pá, considere-se inicialmente o plano meridiano. A Fig. (2) mostra a velocidade relativa do ar com respeito a um elemento de uma pá em diferentes posições, o que é caracteriza-

do pelo ângulo  $\theta$ . O raio do rotor, no plano meridiano é representado por  $R$  e sua velocidade angular por  $\omega$ .

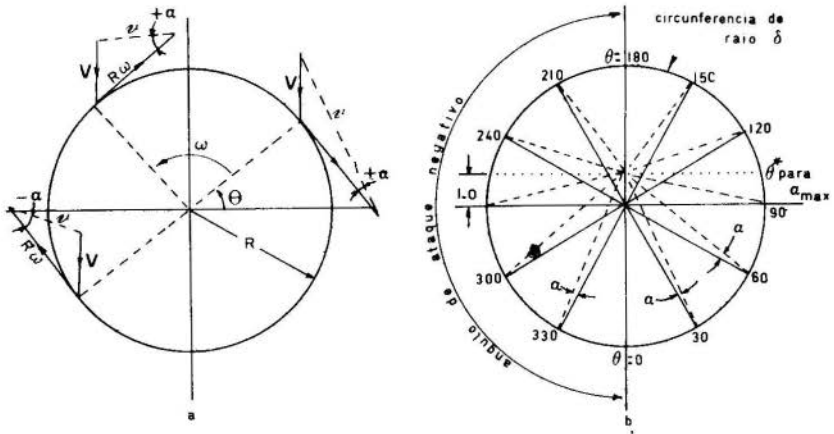


Fig. 2: Secção no plano meridiano

Se a velocidade do vento é indicada por  $V$  e a velocidade do ar, relativa a pá, por  $v$ , então o diagrama de velocidade da Figura (2a) fornece as relações:

$$v = V \left[ 1 + \delta^2 + 2\delta \cos \theta \right]^{1/2} \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \theta}{\left[ 1 + \delta^2 + 2\delta \cos \theta \right]^{1/2}} \quad (2)$$

onde  $\delta$  representa a razão de velocidades definida por  $\delta = R\omega/V$ . O ângulo de ataque  $\alpha$  varia com a posição da pá e é considerado positivo para  $0 < \theta < \pi$  e negativo para  $\pi < \theta < 2\pi$ . Um simples processo de maximização mostra, a partir da expressão (2), que o ângulo de ataque máximo é obtido quando  $\theta = \theta^*$  dado por

$$\theta^* = \cos^{-1} \left( \frac{-1}{\delta} \right)$$

o que é ilustrado na Figura (2b). O ângulo de ataque máximo é dado por

$$\alpha_{\max} = \sin^{-1} \frac{1}{\delta}$$

As expressões (1) e (2) mostram ainda que  $\delta$  deve ser maior que a unidade, o que explica a dificuldade encontrada para colocar este tipo de rotor em movimento.

A seguir considere-se um elemento de pá fora do plano meridiano. Com o intuito de se simplificar a análise as pás são aproximadas, no plano vertical, por arcos circulares de raio  $R$  como mostra a Figura (3a). O elemento de pá.

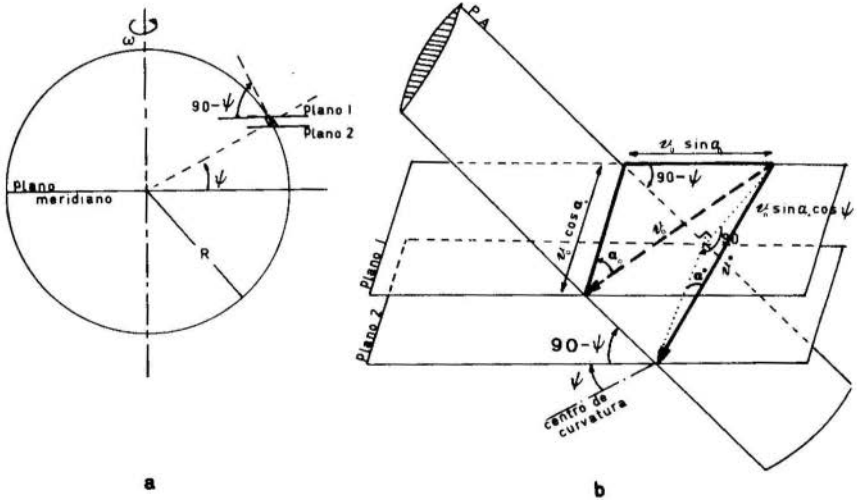


Fig.3 : Elemento de pá

considerado, nesta figura, é limitado por dois planos paralelos ao plano meridiano. A velocidade relativa do ar com relação ao elemento de pá,  $v_0$ , e o ângulo de ataque  $\alpha_0$  que

aparecem no plano (1) podem ser estimados utilizando-se as relações (1) e (2) após modificar convenientemente  $\delta$ .

Obtem-se as relações:

$$v_0 = V [1 + \delta^2 \cos^2 \psi + 2\delta \cos \psi \cos \theta]^{1/2} \quad (3)$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{\sin \theta}{[1 + \delta^2 \cos^2 \psi + 2\delta \cos \psi \cos \theta]^{1/2}} \quad (4)$$

A figura (3b) sugere que  $v_0$  deve ser decomposta convenientemente em duas componentes: uma ao longo da corda da pá e que é indicada por  $v^*$  e a outra componente no plano longitudinal. A componente  $v^*$  é a responsável pela produção de trabalho útil e é denominada de "velocidade relativa efetiva". Analogamente o ângulo  $\alpha_0$  é denominado de "ângulo de ataque efetivo". As expressões para  $v^*$  e  $\alpha^*$  são obtidas como:

$$v^* = v_0 [\cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \psi]^{1/2} \quad (5)$$

$$\sin \alpha^* = \tan \alpha_0 \cos \psi \quad (6)$$

Uma análise da expressão (6) mostra que o ângulo de ataque efetivo deve ser sempre menor que  $\alpha_{\max}$  em qualquer ponto da pá, fora do plano meridiano.

Da Teoria de Asa pode-se inferir que, sobre um elemento de pá, atua um dos dois sistemas de forças mostradas na Figura (4), onde  $dF_L$  indica a força de sustentação (de acordo com a lei de Kutta e Yukowsky) e  $dF_D$  indica o arraste. Em ambos os casos, a componente útil da força  $dF$ , na direção do movimento é

$$dF = dF_L |\sin \alpha^*| - dF_D \cos \alpha^* \quad (7)$$

onde 
$$dF_L = \frac{C_L \rho v^{*2}}{2} \cdot R.B. \cdot d\psi$$



$$dF_D = \frac{C_D \rho v^{*2}}{2} \cdot R.B. \, d\psi$$

Nas expressões acima B indica o comprimento do elemento (largura local da pã) e  $C_D$  e  $C_L$  os coeficientes de arraste e sustentação, respectivamente do elemento.

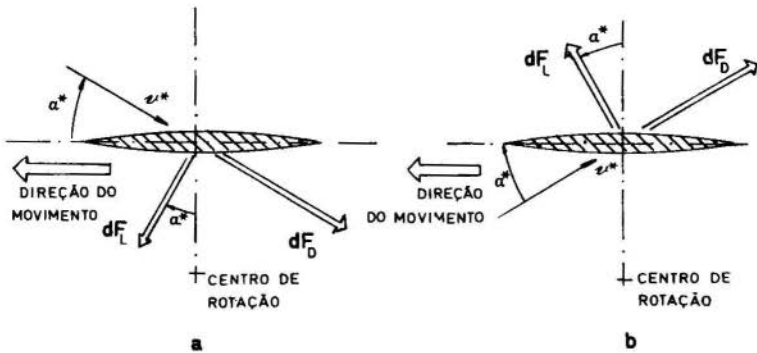


Fig. 4: Força atuante num elemento de pã

Para se estimar as potencialidades do modelo desenvolvido utilizou-se os coeficientes de sustentação e arraste para uma placa plana. Assumi-se então as relações [2]

$$C_L = 2\pi |\sin \alpha^*| \quad \text{para } 0 < |\alpha^*| < 12^\circ \quad (8)$$

$$= 0 \quad \text{para } |\alpha^*| > 12^\circ$$

e

$$C_D = 0.075 C_L \quad \text{para } 0 < |\alpha^*| < 12^\circ \quad (9)$$

$$= 1.2 |\sin \alpha^*| \quad \text{para } |\alpha^*| > 12^\circ$$

O torque médio  $T_B$  produzido por pã é obtido pela relação

$$T_B = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\psi_0}^{\psi_0} R \cos \psi d\psi \quad (10)$$

onde  $\psi_0$  é tomado arbitrariamente como  $80^\circ$  para omitir a contribuição desprezível das partes superiores e inferiores das pás.

As relações (3) a (7) são introduzidas em (10) e obtém-se:

$$T_B = \frac{\rho R^2 V^2 B}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \left[ C_L |\sin\theta \cos\psi| - C_D (\cos\theta + \delta \cos\psi) \right] \times \\ - \left[ \sqrt{(\cos\theta + \delta \cos\psi)^2 + \sin^2\theta \cos^2\psi} \right] \cdot \cos\psi d\psi. \quad (11)$$

que é a forma utilizada nos cálculos numéricos.

Para o cálculo do torque médio e potência gerada pelos rotores foi utilizada uma quadratura de Chebychev com onze pontos.

### 3. Resultados.

Os resultados numéricos obtidos em um dos estudos realizados, utilizando o modelo desenvolvido, são apresentados a seguir. Para este estudo foram assumidos os seguintes dados

Nº de pás do rotor .....	2
Rádio do rotor .....	2.25 m
Largura da pá .....	0.15 m
Velocidade do vento .....	15.00 km/h
Razão de veloc. máxima .....	6.00
Densidade do ar .....	0.1200 Kg.sec <sup>2</sup> /m <sup>4</sup>

A Tabela 1 fornece resultados típicos de duas configurações, definidas pelo ângulo  $\alpha_0^*$ . Para este exemplo o torque médio foi de 2.752 Kgm e a potência média foi de 0.4076 HP.

$\psi$ \ $\theta$	CONFIGURAÇÃO 1		CONFIGURAÇÃO 2	
	1ª PĀ 4.70°	2ª PĀ 184.70°	1ª PĀ 302.29°	2ª PĀ 482.29°
	$\alpha^*$	$\alpha^*$	$\alpha^*$	$\alpha^*$
- 75.33	0.47	2.27	5.95	12.26
- 66.91	0.55	1.36	6.55	10.33
- 52.55	0.61	1.08	7.01	9.37
- 33.52	0.65	0.98	7.25	8.96
- 11.52	0.67	0.94	7.36	8.81
- 11.52	0.67	0.94	7.36	8.81
- 33.52	0.65	0.98	7.25	8.96
- 52.55	0.61	1.08	7.01	9.37
- 66.91	0.55	1.36	6.55	10.33
- 75.33	0.47	2.27	5.95	12.26
TORQUE POR PĀ	-0.2471	-0.1520	1.949	2.460
TORQUE TOTAL	-0.3991		4.409	

Tabela 1 : Resultados típicos

Os gráficos apresentados na Figura (5) resume os resultados obtidos para o exemplo em questão

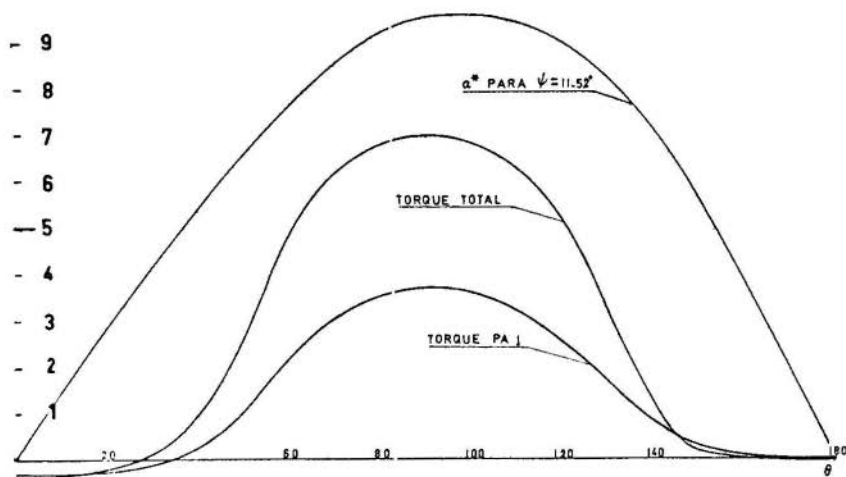


Fig.5: Torque e ângulo de ataque

#### 4. Conclusões

Os resultados preliminares obtidos com a utilização do modelo desenvolvido são bastante encorajadores e estão no momento sendo objetos de comparação com dados experimentais obtidos com modelos reduzidos.

É importante salientar que o modelo matemático permite estimar o desempenho das mais variadas configurações resultantes da variação dos parâmetros geométricos aerodinâmicos. Entre estas configurações aparece como bastante promissora a a que permite uma otimização do ângulo de ataque efetivo para qualquer posição da pá.

#### Bibliografia

- [1] Hirata, M.H. e Mansour, W.M., "Potentials and Limitations of Wind Energy". Parte da publicação "Energia", COPPE/UFRJ 1977.
- [2] Glavert, "Airfoil and Airscrew Theory". Cambridge University 1959.

HIRATA M.H., e MANSOUR W.M.

ROTORES DARRIEUSSumário

Foi desenvolvido um modelo matemático para o estudo dinâmico de rotores Darrieus de diferentes configurações. O modelo leva em consideração o ângulo de ataque que é função da geometria e da velocidade relativa do vento. O modelo foi testado com um exemplo simples.

---

ON DARRIEUS ROTORSSummary

A mathematical model is developed in this paper to predict the dynamic performance of Darrieus rotors of different configurations. The model takes account of the angle of attack with respect to the geometry of the blade and the relative wind velocity. The model was tested and a sample example is reported.

**A N A I S**DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 12**

PP. 1281 - 1292



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERINGUMA CONTRIBUIÇÃO AO DIMENSIONAMENTO DE MÁQUINAS EXTRUSORAS  
PARA PRODUTOS CERÂMICOS

Loir Afonso MOREIRA, Professor Assistente  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Faculdade de Engenharia de Campinas  
Universidade Estadual de Campinas

Dino FERRARESI, Professor Doutor  
Centro de Tecnologia  
Universidade Estadual de Campinas  
Campinas, São Paulo, Brasil.

1. Introdução

O projeto de máquinas extrusoras, utilizadas no processo de fabricação de produtos cerâmicos e comumente denominadas *MAROMBAS*, tem sido realizado em bases empíricas, praticamente sem nenhum conhecimento dos fatores envolvidos. A partir de modelos tradicionais que mostraram alguma eficiência e durabilidade, constroem-se atualmente extrusoras de vários ta

manhos, geralmente com alguns de seus componentes superdimensionados e outros subdimensionados, acarretando, respectivamente, maior custo aquisitivo e maiores despesas de manutenção.

A finalidade deste trabalho é contribuir na otimização do projeto destas máquinas, através do fornecimento de uma técnica experimental e do procedimento analítico a ser adotado em sua análise e dimensionamento.

Pretende, ainda, contribuir no dimensionamento de máquinas que apresentem problemas mecânicos semelhantes, isto é, máquinas onde se torna problemática a obtenção de dados de projeto sem uma análise experimental.

## 2. Descrição da máquina

A finalidade de uma MAROMBA é a produção, principalmente, de tijolos furados, tijolos maciços e lajotas de vários tipos e tamanhos. Basicamente uma MAROMBA é constituída pelos seguintes componentes (figura 2.1):

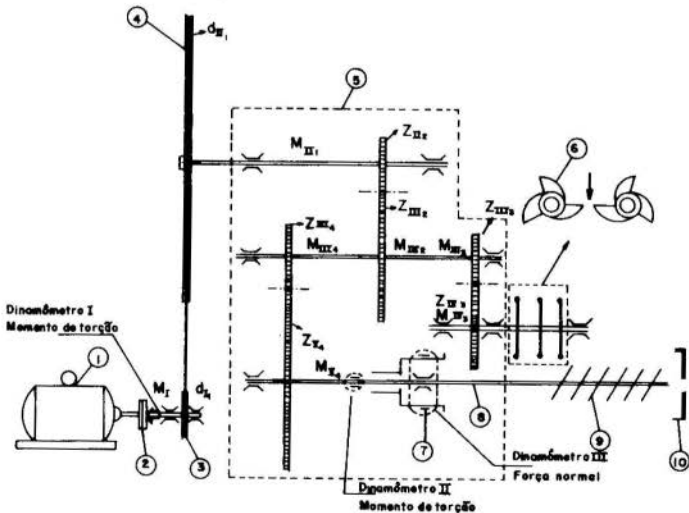


Figura 2.1 - Esquema da Maromba

- |                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1- Motor elétrico         | 6- Calçadores-alimentadores |
| 2- Acoplamento            | 7- Bujão                    |
| 3- Polia motora           | 8- Eixo principal           |
| 4- Volante                | 9- Caracol                  |
| 5- Redutor de engrenagens | 10- Matriz do caracol       |

Os momentos torçores nos eixos da máquina (figura 2.1) são dados pelas seguintes expressões:

$$M_I = \text{momento no eixo de acionamento} \quad (1)$$

$$M_{III1} = M_I \cdot i_1 \cdot \eta_1 \cdot \eta_{II} \quad (2)$$

$$M_{III2} = M_{III1} \cdot i_2 \cdot \eta_2 \cdot \eta_{III} \quad (3)$$

$$M_{III2} = M_{III3} + M_{III4} \quad (4)$$

$$M_{V4} = M_{III4} \cdot i_4 \cdot \eta_4 \cdot \eta_V \quad (5)$$

onde:

$i_1, i_2, i_4$  = relações de transmissão,

$\eta_1, \eta_2, \eta_4$  = rendimentos das transmissões,

$\eta_I, \eta_{II}, \eta_{III}, \eta_V$  = rendimentos dos mancais.

A divisão do momento torçor  $M_{III2}$ , para acionar dois diferentes órgãos da máquina, leva a uma *indeterminação* na avaliação dos momentos  $M_{III3}$  e  $M_{III4}$ , responsáveis pelo acionamento dos eixos dos calçadores-alimentadores e do eixo principal, respectivamente. Substituindo-se o valor  $M_{III4}$ , obtido a partir das equações (2), (3) e (4), na equação (5), resulta:

$$M_{III3} = M_I \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_I \cdot \eta_{II} \cdot \eta_{III} \cdot M_{V4} \cdot \frac{1}{i_4 \cdot \eta_4 \cdot \eta_V} \quad (6)$$

Nota-se nesta equação que o momento  $M_{III3}$  pode ser determinado, uma vez que sejam conhecidos:

- 1) Os valores reais (experimentais) dos momentos  $M_I$  (no eixo do motor de acionamento) e  $M_{V4}$  (no eixo principal da máquina).
- 2) Os valores dos parâmetros  $i$  (relações de transmissão) e  $\eta$  (rendimentos mecânicos). Estas grandezas foram avaliadas de acordo com os tipos de engrenagens, mancais e correia.



### 3. Construção e aferição dos dinamômetros

No presente trabalho foram desenvolvidos três *DINAMÔMETROS*, especialmente projetados e construídos com as seguintes funções específicas (figura 2.1):

*DINAMÔMETRO I* : medida do momento torçor  $M_I$ , no eixo do motor de acionamento. Este dinamômetro permite a previsão da potência necessária ao motor de acionamento da máquina.

*DINAMÔMETRO II* : medida do momento torçor  $M_{V4}$ , no eixo principal. Este dinamômetro permite levantar a indeterminação na avaliação dos momentos torçores no eixo III, bem como a otimização do eixo principal da máquina.

*DINAMÔMETRO III* : medida da força axial  $P$ , no eixo principal da máquina. Este dinamômetro permite a escolha racional do rolamento do eixo principal.

#### 3.1 *Dinamômetro I*

É constituído por um eixo oco que se deforma sob a ação do momento torçor aplicado pelo motor de acionamento (figura 3.1).

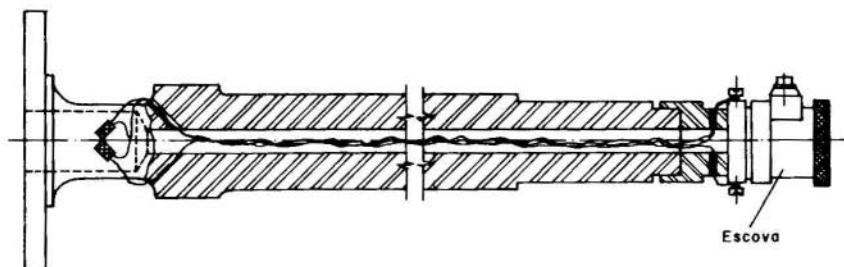


Figura 3.1 - Dinamômetro I

Empregaram-se extensômetros elétricos convenientemente colocados a  $45^\circ$  e ligados em circuito de *ponte de Wheatstone completa* [1 e 2]. Para a sua aferição, foi construído um dispositivo que permitiu a aplicação de momentos torçores conhecidos. Utilizando-se o procedimento estatístico de *Fieller*, foram obtidas as seguintes expressões que dão o momento torçor  $M_I$  e seu erro  $\Delta M_I$  (com 95% de confiança) em

função da tensão de saída da ponte,  $\Delta V_I$ , | 3 |:

$$M_I = 27209,5 + 11509,9 (\Delta V_I - 2,43) \quad \text{Ncm} \quad (7)$$

$$\Delta M_I = 410,43 \cdot \frac{0,766 + (\Delta V_I - 2,43)^2}{227,063} \quad \text{Ncm} \quad (8)$$

### 3.2 Dinamômetro II

Na construção deste dinamômetro aproveitou-se o próprio eixo principal da máquina (figura 3.2)

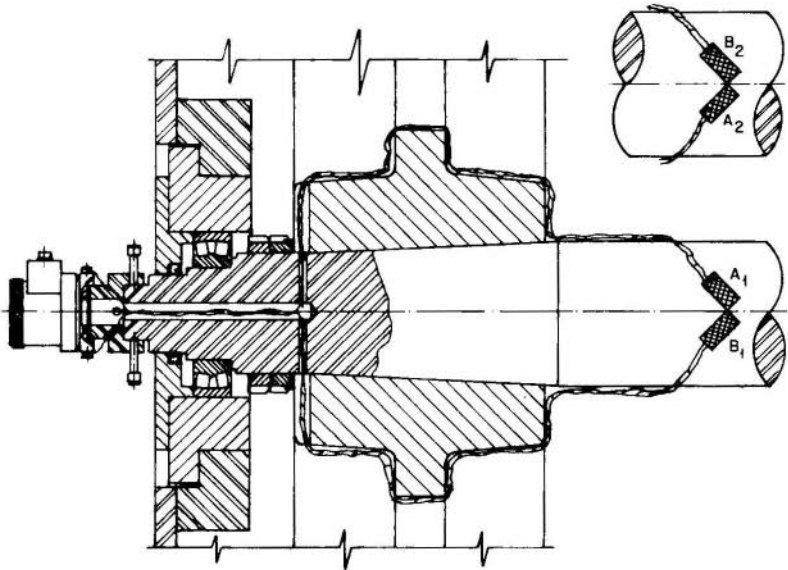


Figura 3.2 - Dinamômetro II

Foram utilizados dois circuitos de extensômetros elétricos ligados em *pontes de Wheatstone simples*, que possibilitaram o fornecimento das tensões de saída  $\Delta V_{AII}$  e  $\Delta V_{BII}$ . O momento torçor  $M_{V4}$  atuante no eixo principal da máquina é dado pela equação | 2 |:

$$M_{V4} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot E}{16 \cdot V \cdot k \cdot (1 + \nu)} \cdot (\Delta V_{AII} - \Delta V_{BII}) \quad (9)$$

onde:

$d$  = diâmetro do eixo na região de medida,

$E$  = módulo de elasticidade do material,

$V$  = tensão de alimentação da ponte,  
 $k$  = coeficiente de sensibilidade dos extensômetros,  
 $\mu$  = coeficiente de Poisson.

### 3.3 *Dinamômetro III*

Este dinamômetro foi construído através de uma modificação do bujão da máquina, que é a peça responsável pela absorção do esforço axial no eixo principal (figura 3.3).

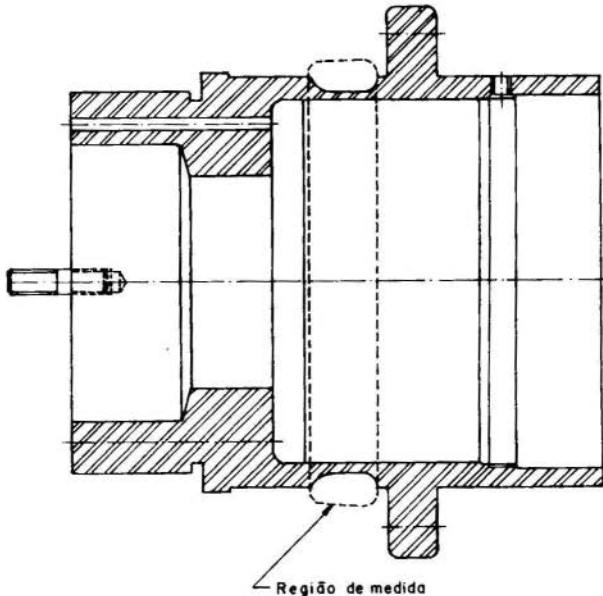


Figura 3.3 - Dinamômetro III

Utilizaram-se também extensômetros elétricos de medida e através de aferição e procedimento estatístico | 3 |, foram obtidas as seguintes expressões que dão a força axial e seu erro para 95% de confiança:

$$P = 2,10^5 + 1,111.10^5 (\Delta V_{III} - 1,81), \quad N \quad (10)$$

$$\Delta P = 3,46. \quad 0,785 + \frac{(\Delta V_{III} - 1,81)^2}{61,600} \quad N \quad (11)$$

### 4. Ensaios

A maromba foi construída pela *Mecânica Bonfanti S/A.* Leme - S.P., os dinamômetros executados e aferidos pelo

Centro de Tecnologia da UNICAMP e os ensaios foram realizados na Cerâmica Santa Inês - Vinhedo - S.P. A figura 4.1 apresenta a disposição dos equipamentos utilizados nos ensaios.

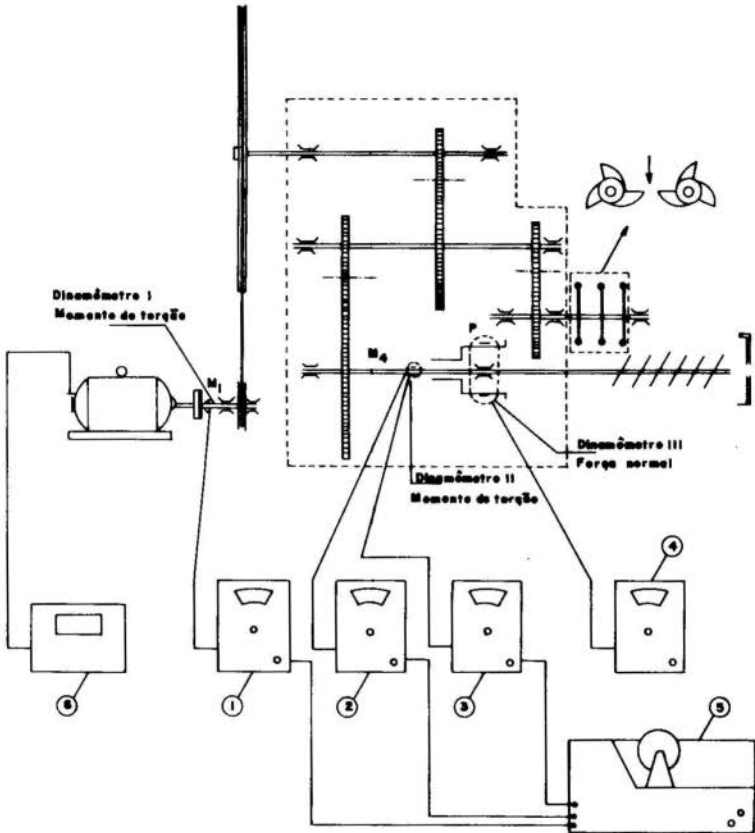


Figura 4.1 - Disposição dos equipamentos utilizados nos ensaios.

- 1- Ponte amplificadora - Din. I
- 2 e 3- Pontes amplificadoras - Din. II
- 4- Ponte amplificadora - Din. III
- 5- Registrador
- 6- Estroboscópio

Foram efetuados 28 ensaios, sendo que em cada um deles de terminaram-se 20 momentos torçores no eixo de acionamen-

to, 20 momentos torçores no eixo principal e 20 forças axiais, totalizando 560 valores de cada uma dessas grandezas. Com base nestes resultados e através das equações fornecidas no item 2, determinaram-se as solicitações em cada componente mecânico da máquina. Foi determinada, também, a rotação do eixo do motor de acionamento por meio de um estroboscópio.

### 5. Análise dos resultados

A análise dos resultados foi realizada com o auxílio da computação e utilizando-se um procedimento estatístico, onde se procurou estabelecer a interdependência das grandezas envolvidas [ 4 e 5 ]. A partir dos resultados experimentais construíram-se gráficos que permitiram o dimensionamento racional dos componentes mecânicos da máquina (figuras 5.1 e 5.2)

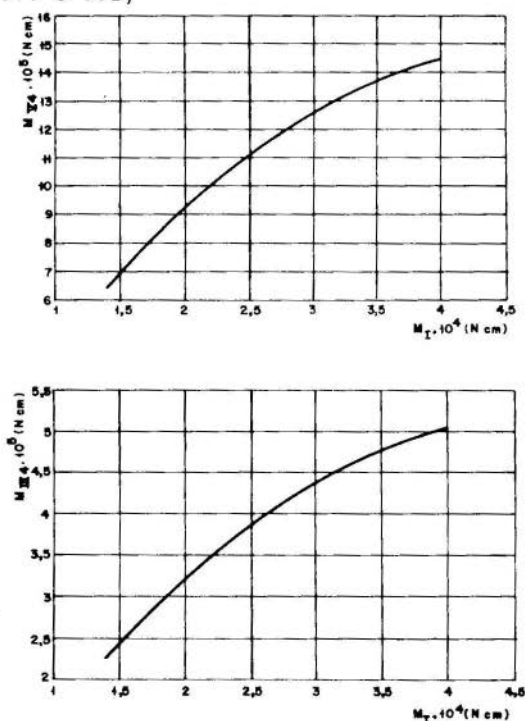


Figura 5.1 - Gráficos fornecendo as variações dos momentos torçores  $M_{IV}$  e  $M_{III4}$  com o momento torçor  $M_I$ .

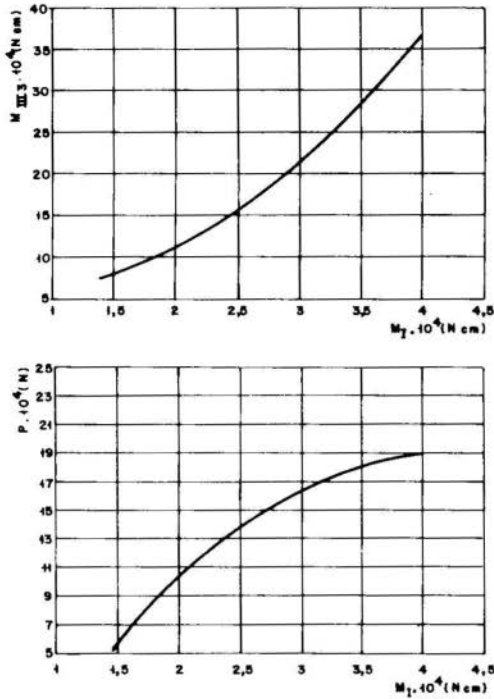


Figura 5.2 - Gráficos fornecendo as variações do momento torçor  $M_{III3}$  e da força axial  $P$  com o momento torçor  $M_I$  no eixo de acionamento.

Os ensaios foram realizados com a máquina operando nas mais diversas condições de carregamento, a fim de reproduzir o funcionamento real na sua vida útil. A figura 5.3 apresenta os momentos torçores fornecidos pelo motor nos respectivos tempos de atuação, durante todo o ensaio.

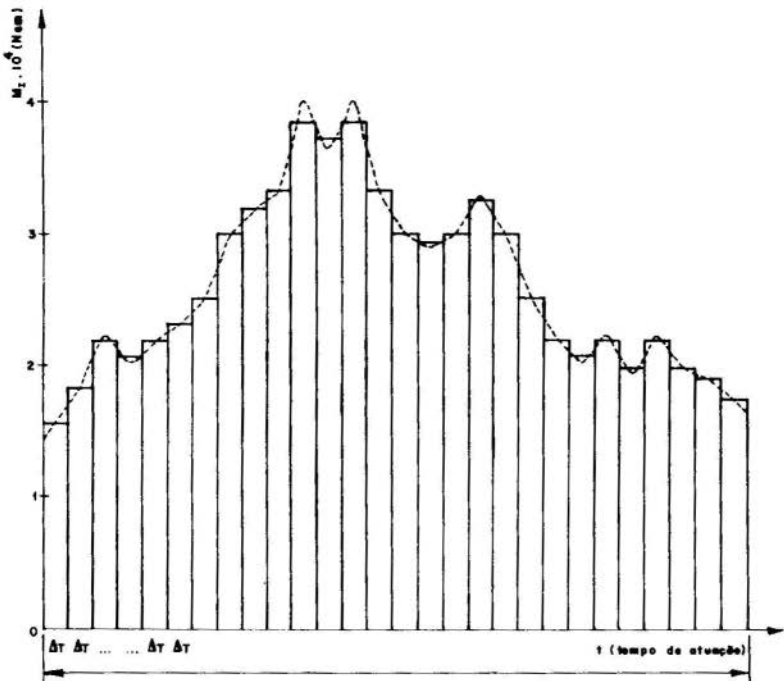


Figura 5.3 - Diagrama de carga do motor

A partir destes resultados, determinou-se o *diagrama de carga do motor* em função da frequência de utilização.

## 6. Conclusões

Tendo em vista a variação da carga durante o trabalho da máquina, pôde-se através de métodos experimentais, levantar o *diagrama de carga do motor* e também com o auxílio da computação e de um procedimento estatístico, estabelecer as relações entre as cargas nos diversos componentes mecânicos (*gráficos* das figuras 5.1 e 5.2). Com base no diagrama de carga do motor e nos gráficos desenvolvidos, determinou-se o *diagrama de distribuição de carga*, para cada componente mecânico. Desta forma, pôde-se proceder a otimização da máquina por meio do dimensionamento racional de seus elementos. Dimensionamento baseado não somente no valor instantâneo da carga como também no seu tempo de atua

ção | 6, 7 e 8 |. Constatou-se que, enquanto alguns elementos estavam superdimensionados, outros apresentavam-se deficientes, não sô do ponto de vista dimensional como tam bém da especificação do material e seu tratamento t $\bar{e}$ rmico. Tais alteraç $\tilde{o}$ es foram efetuadas pela firma interessada. Este trabalho permitir $\bar{a}$ , ainda, com o aux $\tilde{i}$ lio dos *gr $\bar{a}$ ficos* e o procedimento anal $\tilde{i}$ tico desenvolvidos, dimensionar outras marombas semelhantes a estudada, por $\bar{e}$ m de capacidades diferentes, uma vez que se determinem os diagramas de carga de seus motores.

#### BIBLIOGRAFIA

- | 1 | Perry, C.C., The Strain Gage Primer. New York, Mc Graw-Hill Co., 1962.
- | 2 | Dally, J.W. & Rilley, W. F., Experimental Stress Analysis, New York, McGraw-Hill Co., 1965.
- | 3 | Lindner, A., Statistische Methoden. Berlin, Birkh $\ddot{a}$ user Verlag Basel, 1964.
- | 4 | Bonini, E.E. & Bonini, S.E., Estat $\tilde{i}$ stica. S $\bar{a}$ o Paulo, 1972.
- | 5 | IBM-1130, Scientific Subroutine Package-(1130-CM-02X) Programmer's manual - H20-0252-3.
- | 6 | Ferraresi, D., Equipamento el $\bar{e}$ trico de acionamento nas m $\bar{a}$ quinas operatrizes. Centro de Tecnologia da UNICAMP, 1976.
- | 7 | H $\ddot{a}$ nchen, R., Neue Festigkeitsberechnung f $\ddot{u}$ r Maschinenbau. M $\ddot{u}$ nchen, Carl Hansen Verlag, 1960.
- | 8 | Niemann, G., Maschinenelemente. Berlin, Springer Verlag, 1962.



# A N A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 13

PP. 1293 - 1302



ABCM/CNPq

# PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

GEOMETRIC PROGRAMMING - AN EFFICIENT AND FAST ALGORITHM  
FOR OPTIMIZING MACHINING PARAMETERS

R. Ramaswami  
Professor Titular  
Departamento de Materiais e Construção  
Fundação Universidade do Rio Grande  
Rio Grande, RS., Brasil.

1. Introduction

The main scope of the problem is to optimize machining parameters namely speed, feed and depth of cut by Geometric Programming. The optimization of machining parameters started with the contribution of Taylor. Subsequently enormous work both on the 'criteria' and on the 'techniques' has been carried out. The attempts are numerous and well known. They include conventional method, adaptive search techniques, gradient search methods, centre of gravity method, - Lagrangian method and Barrier function method. Only a few

references closely connected with this work are quoted here. The conventional method of optimization has been explained in references [1,2,3,4]. Details of other techniques can be found in [6,7,8,9].

## 2. Formulation of general cost function

In this analysis the objective is defined as minimization of cost of production. A simple case of plain turning is considered. For a plain turning the total cost per unit may be written as:

$$\begin{aligned}
 C &= \text{Set-up cost}(C_s) + \text{Machining cost}(C_m) + \text{Tool changing cost and grinding cost}(C_g) + \text{Tool depreciation cost}(C_d) \\
 C &= t_s \cdot c_1 + t_m \cdot c_1 + t_g \cdot c_2 + C_d \\
 &= t_s \cdot c_1 + \frac{\pi DN_c L c_1}{1000 V \cdot f} + \frac{\pi DN_c L c_2 V^{(1-n)/n} \cdot f^{(n_1-n)/n} \cdot d^{n_2/n}}{1000 C_L^{1/n}} \\
 &\quad + \frac{C_T \pi DL N_c V^{(1-n)/n} \cdot f^{(n_1-n)/n} \cdot d^{n_2/n}}{R \cdot 1000 C_L^{1/n}} \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

Where C=total cost/unit;  $C_s$ =set-up cost/unit;  $C_m$ =machining cost/unit;  $C_g$ =tool changing and grinding cost/unit;  $C_d$ =tool depreciation cost/unit;  $t_s$ =set-up time in minutes;  $t_g$ =grinding time;  $t_m$ =machining time;  $c_1$ =machining cost/unit time;  $c_2$ =grinding cost/unit time;  $C_L$ =tool life in minutes; D=diameter of work in mm; d=depth of cut in mm;  $N_c$ =number of passes; L=length of work in mm; V=cutting speed in meters/minute; f=feed in mm/revolution;  $n_1, n_2$ =exponents in tool life equation.

In the conventional method the variables were chosen from the values available on the machines. In most of the recent techniques the cost function is treated as containing continuous variables. This permits the use of different mathematical treatments. The operating conditions are chosen most appropriate to the optimum values thus obtained. The cost function (Eqn.1) can be mathematically written as:

$$Z = a + b/x \cdot y + c \cdot x^{\alpha 1} \cdot y^{\alpha 2} \dots \dots \dots (2)$$

Where the first term gives set-up cost, the second term gives machining cost and the third term combines tool changing and grinding and tool depreciation.  $x$  and  $y$  represent independent variables namely speed and feed. It was always found that the multiple pass was uneconomical so the depth of cut was assumed as a fixed value.

$Z$ =total cost in new equation;  $a$ = set-up cost;  $b$ =lumped constant in machining cost term;  $x$ =cutting speed;  $y$ =feed;  $c$ =lumped constant term in the combined cost of grinding and depreciation;  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ = exponents.

By substituting suitable values used by Ramaswami (1,2) the cost function (equation 2) can be written as

$$Z = 9.12 + 236.025/x.y + 135 \times 10^{-7.7} .x^{6.7} .y^{4.7} \dots (3)$$

Similarly the values adopted by Hati and Rao (5) give the cost function as

$$Z = 14 + 9441/x.y + 12.69 \times 10^{-8} .x^4 .y^{0.75} \dots (4)$$

The above two functions are used subsequently for evaluation. From the objective functions it can be seen that they are essentially nonlinear. Suitable constraints can be imposed to include the effects of temperature, force, surface finish, vibration etc. There are varieties of strategies for such optimum seeking problems. Adaptive search techniques, gradient projection methods and centre of gravity method are some of the techniques.

### 3. Geometric Programming

Of late considerable interest is evinced in Geometric Programming. In 1961 Zener [10] observed that a sum of component costs sometimes may be minimized almost by inspection when each cost depends on products of design variables, each raised to arbitrary but known powers. Duffin [11] and Duffin and Petersen [12] extended Zener's work and Passy and Wilde [13] further generalised the method to include negative coefficients and reversed inequalities. The modified cost equations 3 and 4 are solved by this technique as constrained as well as unconstrained problems.

4. I Case: Unconstrained problem:

A posynomial containing  $N$  variables and a total of  $T$  terms may be written as

$$Z = \sum_{t=1}^T C_t \prod_{n=1}^N x_n^{a_{tn}} \dots\dots\dots (5)$$

As in the classical method, one sets the partial derivatives to zero.

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial x_K} \right) = \frac{1}{x_K} \sum_{t=1}^T a_{tK} C_t \prod_{n=1}^N (x_n^*)^{a_{tn}} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$K=1 \dots N$$

Instead of solving these nonlinear equations directly for the optimal values  $x_K^*$  Zener and Duffin made a substitution of variables based on duality theorem. Define the optimal weights:

$$w_t \equiv \frac{C_t \prod_{n=1}^N (x_n^*)^{a_{tn}}}{Z^*} ; t=1..T \dots\dots\dots (7)$$

These weights must sum to unity

$$\sum_{t=1}^T w_t = 1$$

In addition (assuming  $Z^*$  and all of the  $x_K^*$  are non zero) we get

$$\sum_{t=1}^T a_{tK} w_t = 0 ; k=1 \dots N$$

These weights are linear and do not depend on cost coefficient  $C_t$ . Since the weights must sum to infinity,

$$Z^* = \prod_{t=1}^T (C_t/w_t)^{w_t} \dots\dots\dots (8)$$

It means that the minimal cost can be found still without the knowledge of optimal values of decision variables. The cost function (Eqn. 3) is rewritten here:

$$Z = 9.12 + 236.025/x.y + 135.05X10^{-7.7}x^{6.7}y^{4.7}$$

For simple demonstration of the theorem,  $y$  is assumed as 1 and the constant term is neglected. The terms in the cost function are reduced to two. So the optimum weight linear equations are:

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$-w_1 + 6.7w_2 = 0$$

Solving the two  $w_1 = 0.8702$  ;  $w_2 = 0.1298$

$$\begin{aligned} \text{Optimum } F(x)^* &= \left( \frac{236.025}{0.8702} \right)^{0.8702} \times \left( \frac{135.05}{0.1298 \times 10^{7.7}} \right)^{0.1298} \\ &= 32.33 \end{aligned}$$

To solve for  $x$ :  $32.33 \times 0.8702 = 236.025/x$

$$x = 8.29 \text{ Meters/minute.}$$

$$y = 1 \text{ mm (assumed)}$$

Actual cost = 41.45 Paise/unit

Proceeding in the same way but treating it as a function of two variables, the unconstrained optimum values obtained were :  $x = 8.45 \text{ M/min.}$   $y = 1.05 \text{ mm/rev.}$

Cost = 41.17 Paise/unit.

(Paise is Indian monetary system. 1 Rupee = 100 paise

1 US\$ = Approx. Rs. 9)

These values are well comparable with the results obtained under the centre of gravity method [9,14]

#### 5. Case II: Constrained problem with two variables:

Define the generalised posynomial:

$Z_m(x)$  as

$$Z_m \equiv \sum_{t=0}^T \sigma_{mt} C_{mt} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{nt}} \quad m=0,1,2.. M \dots \dots \dots (9)$$

where  $\sigma_{mt} = \pm 1$

It is a signum function and the coefficients  $C_{mt}$  are all positive. The principal problem is to minimize  $Z = Z^0$  subject to the constraints.

$$Z_m \leq \sigma_m (\equiv \pm 1) ; m=1 \dots M \text{ and } x_n > 0 ; n= 1 \dots N$$

For the associated problem consider a set of T variables w satisfying a normality condition

$$\sum_{t=1}^T \sigma_{0t} \cdot w_{0t} = \sigma (\equiv \pm 1) \dots\dots\dots (10)$$

and N orthogonality conditions

$$\sum_{n=0}^M \sum_{t=1}^{T_m} \sigma_{mt} a_m^t w_{mt} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

From the above relationships and other conditions, optimum value is given by

$$Z^0 = \sigma \left[ \prod_{n=0}^M \prod_{t=1}^{T_m} \left( \frac{C_{mt} w_{mo}}{w_{mt}} \right)^{\sigma_{mt} w_{mt}} \right] \sigma \dots\dots (12)$$

The corresponding values of the primal variables x are found from the following relations:

$$C_{0t} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{0t}^n} = w_{0t} \sigma Z^0 \dots\dots \dots (13)$$

$t = 1 \dots T_0$

$$C_{mt} = \prod_{n=1}^N x_n^{a_{mt}^n} = \left( w_{mt} / w_{mo} \right) ; t=1 \dots T_m \dots\dots (14)$$

$m=1 \dots M$

Following the generalised case the cost function equation 4 is written after omitting the constant term

$$Z = \frac{9441}{x \cdot y} + 12.69 \times 10^{-8} \cdot x^4 \cdot y^{0.75} \dots\dots\dots (15)$$

$y \leq 0.75$  This is a constraint imposed on feed y:

After converting the constraint into standard form as explained above

$y/0.75 \leq +1$  the following equations are formed.

$$w_{01} + w_{02} = \sigma = +1 ; -w_{01} + 4 w_{02} = 0$$

$$-w_{01} + 0.75w_{02} + w_{11} = 0. \text{ Solving these equations}$$

$$\sigma = +1 ; w_{01} = 0.8 ; w_{02} = 0.2 ; w_{00} = 1 \text{ (assumed)}$$

$$w_{11} = 0.65 ; w_{10} = \sigma (w_{11} - w_{12}) = 1(0.65 - 0) = 0.65$$

The optimal value is given by equation 12.

$$Z^0 = +1 \left[ \left( \frac{9441X1}{0.8} \right)^{0.8} \times \left( \frac{12.69X1}{10^8 \times 0.2} \right)^{0.2} \times \left( \frac{1 \times 0.65}{0.75 \times 0.65} \right)^{0.65} \right]^1$$

$$Z^0 = 125.58$$

y can be determined as follows

$$y/0.75 = w_{11}/w_{10} = 1 ; y = 0.75$$

To find x the first term in the function is used

$$\frac{9441}{x \cdot y} = w_{01} \sigma Z^0$$

From the above:  $x = 125.08$  Meters/minute; feed  $y = 0.75$  mm/rev. The actual minimum cost is determined by adding the constant term to the optimum already obtained  $Z^0$ . The omission of constant term will not affect optimum parameters. The actual minimum cost = 139.58 paise/unit. For the same problem unconstrained optimum were  $x = 112.5$ ,  $y = 1.0142$ ; cost = 117.4. This was not possible in the above case as y was limited to 0.75. The same problem was solved by Hati and Rao [5] imposing certain restrictions and by adopting SUMT algorithm. They arrived at the following values:  $x = 140.97$  M/min.  $f = y = 0.4967$  mm/rev.  $Z = 178.4$  paise/unit: Now as a check the feed was limited to 0.4967. Optimum  $Z^0$  was found to be 164.15; x was calculated to be 144.74; actual optimum cost by adding the constant term was found to be 178.15 ;  $y = 0.4967$ . These values were obtained by adopting the above procedure. They are very nearly the same values

obtained by Hati and Rao. In this case the difference is negligible and the difference may be due to limitations imposed by Hati and Rao for stopping 'search'.

### 8. Conclusions

Geometric Programming yields exact values. In one case Geometric programming yielded  $x=V=8.45\text{M/min}$ ;  $y=f=1.05\text{ mm/rev}$ . Cost= $41.17\text{ paise/unit}$ . For the same case the Centre of gravity method gave  $x=V=8.25\text{M/min}$ ,  $y=f=1.07\text{mm/rev}$ . Cost= $40.38\text{ paise/unit}$ . Similarly in another case Geometric Programming gave;  $x=V=144.74\text{ M/min}$ .  $f=y=0.4967\text{ mm/rev}$ . Cost= $178.15\text{ paise/unit}$ . For this case the 'SUMT' algorithm yielded  $x=V=140.97\text{M/min}$ ;  $y=f=0.4967\text{ mm/rev}$ . Cost= $178.4\text{ paise/unit}$ .. Search techniques can yield very accurate results by adopting suitable steps, gradient and number of iterations. However it is a question of trade off between time and risk. The examples point-up the power of geometric programming. No other algorithm could solve such a nonlinear problem as this so easily. Geometric Programming has great potential in engineering design and system analysis. It is a technique which can be applied to a variety of practical situations.

### References

- [1] Ramaswami, R., Optimization of machining parameters using a digital computer, MSc Thesis, Univ. of Madras, (1967)
- [2] Ramaswami, R., Application of Lagrange's multiplier to optimize machining parameters, 3rd All India MTDR conf. (1969)
- [3] Roland Weill, The use of electronic computers for determination optimum conditions, Proc. 3rd Int. MTDR Conf. p. 270 (1962)



- [ 4 ] Brewer, R.C., Parameters selection problem in machining, CIRP Vol. n<sup>o</sup> 1, p. 11(1969)
- [ 5 ] Hati, S.S. and Rao, S.S. , Determination of optimum machining conditions-Deterministic and probabilistic approaches, J. of Engg. for Ind. Paper n<sup>o</sup> 75 Prod. K. (1975)
- [ 6 ] Harvey M. Wagner, "Principles of Operations Reserach", Prentice Hall (1975)
- [ 7 ] Don T.Philips, Ravindran,A, and James J. Stolberg", Operations Research; Principles and Practice", John Weiley (1976)
- [ 8 ] Charles R. Mishke, "An introduction to computer aided design" , Prentice Hall (1968)
- [ 9 ] Groover, M.P. et al, Determination of machining conditions by a self adaptive procedure, IV North American Metal Working Research Conf. USA (1976)
- [10] Zener, C., A mathematical aid in optimizing engineering designs", Proc. of National Academy of Sc. 47 (1961)
- [11] Duffin, R.J., Dual programs and minimum cost, J.Of Soc. of Ind. and appl. Maths. 10,(1962)
- [12] Duffin, R.J., and E.L. Peterson, Constrained minima by geometric means, Westinghouse Scientific paper 64-158-1299-P3 (1974)
- [13] Passy, U., and Wilde, D.J., Generalised polynomial optimization, Siam Journal of applied mathematics,15(5) (1967)
- [14] Ramaswami, R., An evaluation of optimization techniques in machining process, To be published.

Ramaswami, R.

GEOMETRIC PROGRAMMING - AN EFFICIENT AND FAST  
ALGORITHM FOR OPTIMIZING MACHINING PARAMETERS

Summary

In this study one of the recent techniques known as Geometric Programming has been attempted for optimizing machining parameters. This technique does not require the use of computer to search the optimum values. The algorithm is fast and it yields exact values. Constrained and unconstrained problems are solved by this technique. The results are compared with the findings obtained under SUMT algorithm and Centre of Gravity method. They are in good agreement. The examples show the power of Geometric Programming to solve nonlinear functions very easily. It has a great potential for application in engineering practical problems.

PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA - UM EFICIENTE E RÁPIDO  
ALGORITMO PARA OTIMIZAÇÃO DE PARAMETROS DE USINAGEM

Sumário

Neste estudo, uma das recentes técnicas conhecidas como Programação Geométrica foi tentada na otimização de parâmetros de usinagem. Esta técnica não requer o uso do computador na pesquisa dos valores ótimos. O algoritmo é rápido e resulta em valores exatos. Problemas com e sem restrições são resolvidos por este método. Os resultados são comparados com os obtidos com o algoritmo "SUMT" e o método do Centro de Gravidade. Eles concordam bastante bem. Os exemplos mostram o poder da Programação Geométrica em resolver funções não lineares muito facilmente. Há nele um grande potencial para aplicação em problemas práticos de engenharia.

# A N A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 14

PP. 1303 - 1312



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

### MAXIMIZAÇÃO DA POTÊNCIA DE UM REATOR

Wilson N.dos SANTOS, Pesquisador Júnior  
Coordenadoria de Engenharia Nuclear  
Instituto de Energia Atômica  
São Paulo, Brasil

Wilma H.CINTRA, Pesquisadora Titular  
Coordenadoria de Engenharia Nuclear  
Instituto de Energia Atômica  
São Paulo, Brasil

#### 1. Introdução

A aplicação da teoria de controle ótimo em problemas de engenharia nuclear é recente.

A pesquisa da massa crítica mínima é, provavelmente, o primeiro problema de otimização encontrado na teoria de reatores, e vários estu

dos têm sido feito para a obtenção de suas soluções [1,2]. Alguns trabalhos, também recentes, visam o estudo das oscilações do Xenônio, que alteram o comportamento de um reator [3].

Muito importante, é a obtenção de soluções para problemas nos quais o índice de performance é a potência. Esta depende sempre da distribuição da concentração de combustível no reator.

O objetivo deste trabalho é calcular a distribuição espacial ótima de combustível que maximiza a potência sujeita a vínculos de desigualdade na densidade de potência e na concentração permissível de combustível.

## 2. Formulação do Problema

Para geometria plana, modelo de multigrupo e teoria de difusão, a equação diferencial básica de segunda ordem, que descreve o comportamento de neutrons num reator em estado estacionário é dada por [4]:

$$\frac{d}{dx} \left[ D_g(x) \frac{d}{dx} \phi_g(x) \right] - \left[ \Sigma_{a,g}(x) + \Sigma_{Rg}(x) \right] \phi_g(x) + S_g(x) = 0 \quad (1)$$

$$g = 1, 2, \dots, G$$

onde

$\phi(x) \equiv$  fluxo de neutrons

$D_g(x) \equiv$  coeficiente de difusão do grupo  $g$

$S_g(x) \equiv \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{(h \rightarrow g)} \phi_h(x) + \chi_g \sum_{h=1}^G (\nu \Sigma_f)_h \phi_h(x) \equiv$  termo de fonte devido

do a espalhamento e fissão

$\chi_g \equiv$  fração de neutrons de fissão que nascem no grupo  $g$

$\nu \equiv$  número médio de neutrons emitidos por fissão.

Os símbolos  $\sigma$  e  $\Sigma$  referem-se às seções de choque microscópica e macroscópica respectivamente. Os índices  $a$ ,  $f$ ,  $R$  indicam absorção, fissão e remoção;  $\Sigma_{(h \rightarrow g)}$  é a matriz de transferência do grupo  $h$  para o grupo  $g$ . Sabe-se que  $\Sigma_f(x) = N(x)\sigma_f$ , onde  $N(x)$  é a concentração do combustível.

No sistema acima, o espalhamento de neutrons de grupos de energia mais baixa para grupos de energia mais alta foi considerado nulo.

A corrente líquida de neutrons é dada por:

$$J_g(x) = -D_g(x) \frac{d}{dx} \phi_g(x)$$

O sistema (1), de equações diferenciais de segunda ordem, é equivalente ao seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d}{dx} \phi_g(x) = \frac{-1}{D_g(x)} J_g(x) \quad g = 1, 2, \dots, G \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} J_g = S_g(x) - \left[ \Sigma_{a,g}(x) + \Sigma_{R,g}(x) \right] \phi_g(x) \quad g = 1, 2, \dots, G$$

No sistema acima, o fluxo  $\phi_g(x)$  e a corrente líquida  $J_g(x)$ , para cada grupo, são as variáveis de estado que caracterizam o estado neu-trônico do sistema. Há portanto  $2G$  variáveis de estado que podem ser indicadas por

$$Y_j(x) = \phi_g(x) \text{ quando } j = 2g - 1 \quad (g = 1, 2, \dots, G)$$

$$Y_j(x) = J_g(x) \text{ quando } j = 2g \quad (g = 1, 2, \dots, G)$$

Neste trabalho considerou-se dois grupos de energia de neutrons. Convencionou-se  $g = 1$  para o grupo rápido e  $g = 2$  para o grupo térmico. As seguintes simplificações podem ser feitas:

- as fissões só ocorrem no grupo térmico,  $g = 2$
- todos os neutrons nascem no grupo rápido,  $g = 1$ , e portanto  $\chi_1 = 1$  e  $\chi_2 = 0$
- neutrons só podem ser espalhados do grupo  $g = 1$  para o grupo  $g = 2$
- secções de choque de remoção dependem somente do moderador
- coeficientes de difusão são considerados constantes
- secção de choque de absorção do grupo  $g = 1$  pode ser desprezada
- secção de choque de absorção do grupo  $g = 2$  pode ser escrita na forma:

$\Sigma_a(x) = \Sigma_a^M + N(x)\sigma_a^F$ , onde os índices  $M$  e  $F$  referem-se a moderador e combustível respectivamente.

Com essas considerações, o sistema de equações diferenciais (1) pode ser escrito:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_1(x) &= -\frac{1}{D_1} Y_2(x) \\ \dot{Y}_2(x) &= -\Sigma_R Y_1(x) + v\sigma_f N(x) Y_3(x) \quad (3) \\ \dot{Y}_3(x) &= -\frac{1}{D_2} Y_4(x) \\ \dot{Y}_4(x) &= \Sigma_R Y_1(x) - \left[ \Sigma_a^M + N(x) \sigma_a^F \right] Y_3(x)\end{aligned}$$

As condições de contorno para este problema são:

$$\begin{aligned}Y_1(a) = Y_3(a) = 0; & \text{ o fluxo se anula na fronteira do reator} \\ Y_2(0) = Y_4(0) = 0; & \text{ o fluxo é simétrico em relação ao centro} \\ & \text{do reator}\end{aligned} \quad (4)$$

A potência é dada por

$$P = 2 \int_0^a q(x) dx \text{ watts/cm}^2 \quad (5)$$

$$\text{e } q(x) = K\sigma_f N(x) Y_3(x) \text{ watts/cm}^3, \text{ onde}$$

$q(x) \equiv$  densidade de potência

$K \equiv$  fator de conversão, fissão/cm<sup>3</sup>seg em watts/cm<sup>3</sup>

A distribuição de combustível  $N(x)$  é a variável de controle. Esta no intervalo fechado  $0 \leq x \leq a$ , está sujeita aos seguintes vínculos de desigualdade:

- As variáveis de estado  $Y_j(x)$  devem satisfazer (3)
- A densidade de potência  $q(x)$  é menor ou igual ao seu valor máximo permissível  $Q_{\max}$ ;  $C_1(Y_3, N) = q(x) - Q_{\max} \leq 0$  (6)
- A distribuição de combustível  $N(x)$  é menor ou igual ao seu valor máximo permissível  $N_{\max}$ ;  $C_2(N) = N(x) - N_{\max} \leq 0$  (7)

### 3. Condições para a Otimização

O Princípio de Máximo de Pontryagin [5] fornece as condições necessárias para se obter a otimização. A Hamiltoniana para este problema é dada por:

$$H(x, Y, N, \lambda) = \sum_{i=1}^{2G} \lambda_i f_i(Y, N, x) + f_0(Y, N, x) + \sum_{j=1}^r \mu_j C_j \quad (8)$$

onde  $f_i$  são as equações (3) e  $f_0$  é a função integrando da equação (5).

São necessárias as seguintes condições:

$$\dot{Y}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} ; \dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial Y_i} ; \frac{\partial H}{\partial N} = 0 \quad (9)$$

$$\left[ - H(x)dx + \sum_i \lambda_i(x) dY_i(x) \right]_0^a = 0 \quad (10)$$

$$H \left[ x, Y_i^*(x), N(x), \lambda_i^*(x) \right] \leq H \left[ x, Y_i^*(x), N^*(x), \lambda_i^*(x) \right] \quad (11)$$

o asterístico se refere a solução ótima.

Os multiplicadores  $\mu_j$  são tais que

$$\mu_j = 0 \text{ se } C_j < 0 \quad (12)$$

$$\mu_j \neq 0 \text{ se } C_j = 0$$

A solução ótima está compreendida por duas fronteiras de acordo com:

$$C_1 = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \quad (13)$$

$$C_2 = 0 \text{ para } x_1 \leq x \leq a$$

ou

$$C_2 = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \quad (14)$$

$$C_1 = 0 \text{ para } x_1 \leq x \leq a$$

ou ainda

$$C_1 < 0 \quad (15)$$

$$C_2 < 0$$

Mostra-se, usando o critério de Robbins [6], que a zona singular dada por (15) não existe. A sequência ótima das duas trajetórias é dada por (13), uma vez que  $Y_1(a) = 0$  e  $Y_3(a) = 0$  requereria um valor infinito para  $N(x)$ , em  $x = a$ , para satisfazer (14), o que não é permitido num reator. Fisicamente, então, determina-se que há uma zona de densidade de potência constante seguida por uma zona de distribuição uniforme de combustível.

Tomando-se a Hamiltoniana para as duas zonas e usando-se a equação de controle  $\frac{\partial H}{\partial N} = 0$ , tem-se:

$$\text{Para } 0 \leq x \leq x_1 \quad \mu_1(x) = \frac{\sigma_f}{K\sigma_f} \lambda_{4c}(x) - \frac{v}{K} \lambda_{2c}(x) - 1 \quad (16)$$

$$N_e(x) = \frac{Q_{\max}}{K\sigma_f Y_{3c}(x)} \quad (17)$$

Para  $x_1 \leq x \leq a$

$$\mu_2(x) = Y_{3e}(x) \left[ \sigma_a^F \lambda_{4e}(x) - v\sigma_f \lambda_{2e}(x) - K\sigma_f \right] \quad (18)$$

$$N_e(x) = N_{\max} \quad (19)$$

sendo que os índices  $c$  e  $e$  referem-se às zonas central e externa respectivamente.

A condição de criticalidade do reator é dada pela continuidade de  $N(x)$  na interface  $x = x_1$ , ou seja,  $N_c(x_1) = N_e(x_1)$ .

#### 4. Solução do Problema

Determinada a distribuição de combustível  $N(x)$ , que é função de  $Y_{3c}(x)$ , as variáveis de estado para cada uma das duas zonas do reator podem ser escritas na forma:

Para  $0 \leq x \leq x_1$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{1c}(x) &= -\frac{1}{D_1} Y_{2c}(x) \\ \dot{Y}_{2c}(x) &= \frac{v}{K} Q_{\max} - \Sigma_R Y_{1c}(x) \\ \dot{Y}_{3c}(x) &= -\frac{1}{D_2} Y_{4c}(x) \\ \dot{Y}_{4c}(x) &= \Sigma_R Y_{1c}(x) - \Sigma_a^M Y_{3c}(x) - \frac{Q_{\max} \sigma_a^F}{K\sigma_f} \end{aligned} \quad (20)$$

Para  $x_1 \leq x \leq a$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{1e}(x) &= -\frac{1}{D_1} Y_{2e}(x) \\ \dot{Y}_{2e}(x) &= v\sigma_f N_{\max} Y_{3e}(x) - \Sigma_R Y_{1e}(x) \\ \dot{Y}_{3e}(x) &= -\frac{1}{D_2} Y_{4e}(x) \\ \dot{Y}_{4e}(x) &= \Sigma_R Y_{1e}(x) - \left[ \Sigma_a^M + N_{\max} \sigma_a^F \right] Y_{3e}(x) \end{aligned} \quad (21)$$

As soluções analíticas desses sistemas são:

Para  $0 \leq x \leq x_1$



$$\begin{aligned}
 Y_{1c}(x) &= B_1 \cosh(W_1 x) + A_1 \\
 Y_{2c}(x) &= -A_2 B_1 \sinh(W_1 x) \\
 Y_{3c}(x) &= A_3 B_1 \cosh(W_1 x) - A_4 B_2 \cosh(W_2 x) + A_5 \\
 Y_{4c}(x) &= A_6 B_1 \sinh(W_1 x) + B_2 \sinh(W_2 x)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Para  $x_1 \leq x \leq a$

$$\begin{aligned}
 Y_{1e}(x) &= B_3 \sin[W_3(a-x)] + B_4 \sinh[W_4(a-x)] \\
 Y_{2e}(x) &= M_1 B_3 \cos[W_3(a-x)] + M_2 B_4 \cosh[W_4(a-x)] \\
 Y_{3e}(x) &= M_3 B_3 \sin[W_3(a-x)] + M_4 B_4 \sinh[W_4(a-x)] \\
 Y_{4e}(x) &= M_5 B_3 \cos[W_3(a-x)] + M_6 B_4 \cosh[W_4(a-x)]
 \end{aligned} \tag{23}$$

As variáveis de estado são contínuas em  $x = x_1$ . As constantes  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  são constantes a serem determinadas, enquanto que as demais são conhecidas e resultam de agrupamentos das seções de choque e constantes do reator.

### 5. Condição de Criticalidade

A Hamiltoniana  $H$  e os multiplicadores  $\lambda$  devem ser contínuos ao longo da trajetória ótima. Conclui-se, portanto, que para ser assegurada a continuidade de  $H$ , a distribuição de combustível  $N(x)$  deve ser contínua em  $x = x_1$ , ou seja, é necessário que  $N_c(x_1) = N_e(x_1)$  (24)

A equação (24) é a condição de criticalidade do reator.

Combinando as equações (17), (19) e (24) obtém-se

$$N_{\max} = \frac{Q_{\max}}{K\sigma_f Y_{3c}(x_1)} \tag{25}$$

Através de um processo iterativo que combine as equações dos sistemas (22), (23) e a equação (25) são determinados os valores das constantes  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  e a posição da interface  $x_1$ .

As equações adjuntas são dadas por:

$$\dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial Y_i} \tag{26}$$

Determina-se então, dois sistemas de equações diferenciais, um para a região central e outro para a região externa,  $\lambda_{1c}(x)$  e  $\lambda_{1e}(x)$ . A condição de transversalidade (10) fornece as seguintes condições de contorno:

$$\lambda_{1c}(0) = \lambda_{3c}(0) = \lambda_{2e}(a) = \lambda_{4e}(a) = 0 \quad (27)$$

As soluções analíticas das equações adjuntas não são incluídas neste trabalho, porque é desnecessária a sua obtenção para se encontrar a solução do problema proposto.

Uma vez determinada  $Y_{3c}(x)$ , dado pela expressão (22.3), fica perfeitamente determinada a potência do reator. Um dado muito importante que se pode obter conhecendo-se a distribuição de combustível, é a massa crítica. Esta é dada por:

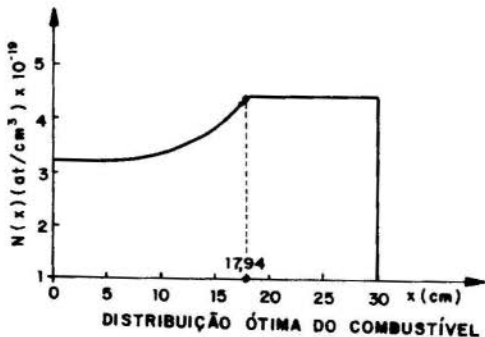
$$M = 2 \int_0^a N(x) dx \quad (28)$$

O valor que se obtém é a massa crítica mínima para as condições impostas

## 6. Aplicação Numérica e Conclusões

Para ilustrar a técnica discutida, considerou-se um reator térmico moderado a água leve de meia espessura igual a 30 cm. Como valores máximos permissíveis para densidade de potência e concentração de combustível foram fixados respectivamente,  $Q_{\max} = 60$  watts/cm<sup>3</sup> e  $N_{\max} = 4,449 \times 10^{19}$  at/cm<sup>3</sup>.

O Princípio de Máximo de Pontryagin permitiu o cálculo da distribuição ótima de combustível, sujeita aos vínculos impostos. Tal distribuição ótima é mostrada na figura abaixo:



Outros resultados são:  $x_1 = 17,94\text{cm}$ ,  $Y_1(0) = 0,9334074 \times 10^{14} \text{ n/cm}^2\text{seg}$ ,  $Y_3(0) = 0,1329602 \times 10^{15} \text{ n/cm}^2\text{seg}$ ,  $P = 2,947 \text{ Kw/cm}^2$  e  $M = 0,86 \text{ g/cm}^2$ .

Embora a solução analítica tenha sido obtida usou-se um método numérico para comparação de resultados. Isso porque, para um número maior de grupos de energia a obtenção da solução analítica é impraticável. O método numérico mostrou ser bastante satisfatório como pode ser visto pelos resultados:  $x_1 = 18,00\text{cm}$ ,  $Y_1(0) = 0,9334085 \times 10^{14} \text{ n/cm}^2\text{seg}$ ,  $Y_3(0) = 0,1329612 \times 10^{15} \text{ n/cm}^2\text{seg}$ ,  $P = 2,947 \text{ Kw/cm}^2$  e  $M = 0,90 \text{ g/cm}^2$ .

O método numérico escolhido foi o Método da Perturbação [7]. Um programa FORTRAN foi elaborado para obtenção dos resultados.

### Bibliografia

- [1] Goldschmidt, P., Minimum Critical Mass in Intermediate Reactors Subject to Constraints on Power Density and Fuel Enrichment. Nucl.Sci.Eng., 49, 263 (1972).
- [2] Goldschmidt, P., and Quenon, J., Minimum Critical Mass in Fast Reactors with Bounded Power Density. Nucl.Sci.Eng. 39, 311 (1970).
- [3] Roberts, J.J., and Smith, H.P.Jr., Time Optimal Solution to the Reactivity-Xenon Shutdown Problem. Nucl.Sci.Eng., 22, 470 (1965).
- [4] Lamarsh, J.R., Nuclear Reactor Theory. Addison-Wesley Pub. Company, Inc. (1960).
- [5] Pontryagin, L.S., et al., The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley and Sons, Inc., New York (1962).
- [6] Robbins, H.M., A Generalized Legendre-Clebsch Condition for the Singular Cases of Optimal Control. IBM Journal, 361, (July, 1967).
- [7] Bryson, A.E.Jr., and Ho, Y.C., Applied Optimal Control, John Wiley and Sons, Inc., New York (1975).

MAXIMIZAÇÃO DA POTÊNCIA DE UM REATORSumário

A distribuição ótima da concentração de combustível que maximiza a retirada de potência de um reator é determinada por vínculos de desigualdade no limite superior da densidade de potência e no limite superior da concentração de combustível permitida.

O reator é descrito pelo modelo da teoria da difusão em dois grupos de energia de neutrons e geometria plana.

Usando-se o Princípio de Máximo de Pontryagin, a sequência ótima das zonas de controle é encontrada a priori. Mostra-se que o reator consiste de uma zona central com densidade de potência constante seguida por uma zona com concentração uniforme de combustível.

---

MAXIMUM POWER RATING OF A REACTORSummary

Optimal fuel concentration distribution, which maximizes the power rating of a reactor assembly is determined for the inequality constraints on the upper limit of a power density and the upper limit of the allowable fuel concentration.

The reactor is described by two groups diffusion model in slab geometry.

Making use of Pontryagin's Maximum Principle, the optimal sequence of control zones is found a priori. It is shown that the reactor consists of a central constant power density zone followed by a zone with uniform fuel concentration.

**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 15**

PP. 1313 - 1325



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EM PRESENÇA DE  
FLAMBAGEM GLOBAL

Néstor ZOUAIN, Pesquisador Assistente  
Programa de Engenharia Mecânica  
COPPE/UFRJ

Solly A. SEGENREICH, Professor Associado  
Programa de Engenharia Mecânica  
COPPE/UFRJ

José HERSKOVITS, Professor Assistente  
Programa de Engenharia Mecânica  
COPPE/UFRJ

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) sob contrato n° 2222.0750/76.

## 1. Introdução

A busca de estruturas cada vez mais leves e econômicas levanta, por outro lado, a necessidade de uma preocupação cada vez maior com a estabilidade da estrutura, já que a perda de peso geralmente é acompanhada por uma perda de rigidez. Basicamente, há dois tipos de flambagem bem distintos. O primeiro, envolve a perda de estabilidade de um membro isolado da estrutura. Esta é a chamada flambagem local. O segundo tipo, considera a perda de estabilidade da estrutura como um todo e é chamada de estabilidade global.

A estabilidade local tem sido tratada em vários trabalhos e sua inclusão é relativamente simples mediante a definição da tensão admissível em compressão de cada membro incluindo este efeito. Já a estabilidade global não mereceu uma exploração tão intensa e há relativamente poucos trabalhos de otimização em que este efeito, que pode vir a ser limitante, é considerado.

Dentre os trabalhos de otimização estrutural com efeitos de flambagem citamos o trabalho pioneiro de Keller [1], Tadjbakhsh e Keller [2] e no campo da aplicação numérica as referências [3,4,5].

O presente trabalho, visa a aplicação de um método baseado no critério de otimalidade na minimização do peso de treliças sujeitas a flambagem global. O método de otimização a ser utilizado neste trabalho está baseado no algoritmo desenvolvido por Segenreich, Zouain, Herskovits e McIntosh [6,7,8,9].

## 2. Formulação do Problema da Flambagem Global

Quando o chamado "método dos deslocamentos" ou "método da rigidez" é aplicado na resolução de um problema de análise estática de uma estrutura, sabe-se que em última análise a solução do problema constitui-se na solução do seguinte sistema linear de equações [9]

$$[K]\{x\} = \{F\} \quad (2.1)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\underline{x}$  é o vetor de deslocamentos generalizados e  $\{F\}$  é o vetor de forças gene-

realizadas associadas ao carregamento.

No caso mais geral, quando efeitos de ordem superior são desprezados nas deformações, a matriz  $[K]$  é constante. Se estes efeitos forem incluídos, a matriz  $[K]$  passa a depender das próprias deformações resultando numa análise não linear.

Pode-se mostrar que numa primeira aproximação que procure levar em consideração tais efeitos, a matriz  $K$  pode ser escrita como [11]

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (2.2)$$

onde  $[K_E]$  é a matriz constante, baseada apenas em efeitos de primeira ordem, e  $[K_G]$ , chamada de matriz geométrica, depende linearmente das forças internas calculadas com base na solução do problema

$$[K_E]\{x\} = \{F\} \quad (2.3)$$

A matriz de rigidez  $[K]$  é obtida somando as matrizes de rigidez individuais dos elementos que compõem a estrutura. Assim, para uma estrutura com  $m$  elementos

$$[K] = \sum_{i=1}^m [k_E]_i + \sum_{i=1}^m [k_G]_i \quad (2.4)$$

onde

$[k_E]_i$  - é a matriz elástica do  $i$ -ésimo elemento

$[k_G]_i$  - é a matriz geométrica do  $i$ -ésimo elemento

Para estruturas entrelaçadas, a matriz geométrica, em coordenadas locais, assume a forma

$$[k_G] = \frac{P}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde  $P$  é a força axial no membro,  $l$  é o comprimento do membro. Note que para estruturas hiperestáticas, a matriz  $[K_G]$  depende das áreas das seções transversais pois estas influenciam o valor de  $P$ .

Um fato importante a ser notado é que se o vetor de carregamento  $\{F\}$  for multiplicado por um fator  $\lambda$ , as forças internas também serão multiplicadas por  $\lambda$ , o que finalmente resultará numa nova matriz geométrica

$$[K_G]' = \lambda [K_G] \quad (2.6)$$

Tomando um carregamento  $\{F\}$  de referência, a solução do problema estático para qualquer carregamento  $\lambda\{F\}$ , reduz-se na solução do sistema

$$([K_E] + \lambda [K_G])\{x\} = \lambda\{F\} \quad (2.7)$$

onde  $[K_G]$  é construída tomando por base os esforços internos obtidos a partir da solução do problema

$$[K_E]\{x\} = \{F\} \quad (2.8)$$

Observando o sistema (2.7), nota-se que se  $\lambda$  for autovalor do problema

$$[K_E]\{x\} = -\lambda [K_G]\{x\} \quad (2.9)$$

então o sistema é singular, e o carregamento  $\lambda\{F\}$  é definido como o carregamento crítico.

Por conveniência, reescrevemos o sistema (2.9) na forma

$$-[K_G]\{x\} = \lambda' [K_E]\{x\} \quad (2.10)$$

onde

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

Na prática, estaremos interessados no menor valor em



módulo de  $\lambda$  ou o maior valor de  $\lambda'$ , pois este corresponde ao carregamento crítico de menor intensidade.

### 3. Formulação do Problema de Otimização e sua Solução Iterativa

De modo geral, os problemas de otimização estrutural podem ser genericamente formulados como [7,10]:

$$\text{Minimizar } \mu(\underline{A}) \quad (3.1)$$

de tal forma que

$$g_j(\underline{A}) \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,\ell) \quad (3.2)$$

onde

$\mu(\underline{A})$  - é uma função objetivo

$\underline{A}$  - é o vetor das variáveis de projeto

$g_j(\underline{A})$  - é a  $j$ -ésima função restrição a ser satisfeita

No presente trabalho  $\mu$  representará o peso da estrutura e as restrições  $g_j$  compreenderão as tensões admissíveis nos elementos e a condição de carga crítica de flambagem global.

A principal dificuldade na obtenção do projeto ótimo reside no fato das restrições serem não lineares e de não existir, em geral, uma fórmula analítica para sua avaliação devendo ser calculadas numericamente para cada novo vetor  $\underline{A}$ .

Um método iterativo desenvolvido anteriormente pelos autores [7,8,9] será empregado como ferramenta para a otimização a ser empreendida. O método, que baseia-se no critério de otimalidade, é formulado a partir da fórmula de reprojeção

$$\underline{A}_i^{v+1} = \left[ \alpha^v + (\alpha^v - 1) \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j^v}{P_i^v} \left( \frac{\partial g_j}{\partial A_i} \right) \right] A_i \quad (3.3)$$

onde

$$P_i^v = \left( \frac{\partial \mu}{\partial A_i} \right)_v$$

$\alpha^v$  - é um parâmetro variável com a iteração

$\lambda_j^v$  - são multiplicadores de Kuhn-Tucker

Os multiplicadores  $\lambda_j^v$  são obtidos em cada iteração resolvendo o sistema linear

$$\sum_{k=1}^{\ell} \beta_{jk}^v \lambda_k^v = \beta_j^v \quad (j=1,2,\dots,\ell) \quad (3.4)$$

onde

$$\beta_{jk}^v = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial g_j}{\partial A_i} \right)_v \left( \frac{\partial g_k}{\partial A_i} \right)_v \frac{A_i^v}{P_i^v} - 2\bar{\alpha} g_j \delta_{kj}$$

$$\beta_j^v = - \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial g_j}{\partial A_i} \right)_v A_i^v$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

$\bar{\alpha}$  é um parâmetro.

Mostra-se [7,8,9] que desta forma obtem-se sucessivos projetos de peso decrescente que tendem a satisfazer as  $\ell$  condições de restrição.

O tratamento das restrições do tipo tensão admissível, é fato já bastante divulgado e aqui não será repetido. Consideremos, pois, a restrição de flambagem global.

Recordando a eq. (2.9), foi visto que dado um carregamento aplicado  $\{F\}$ , ele será crítico se o menor autovalor de (2.9) for igual a unidade. Em termos de (2.10),  $\{F\}$  é maior do que o carregamento crítico se

$$(\lambda')_{\max} \geq 1$$

Assim,

$$g_{\text{flamb}} = (\lambda')_{\max}^{-1} \leq 0 \quad (3.5)$$

É usual introduzir-se um fator de segurança FS definido como maior que a unidade. Isto nos conduz à restrição de

flambagem na forma a ser tratada no presente trabalho

$$g_{\text{flamb}} = \text{FS} \cdot (\lambda')_{\text{max}}^{-1} \quad (3.6)$$

#### 4.1. Derivadas da Restrição de Flambagem

A otimização da estrutura pelo método descrito em [7,8,9,10] requer o cômputo da derivada  $\partial g_{\text{flamb}} / \partial A_i$ .

Calculemos esta derivada reescrevendo (3.6). Assim,

$$\frac{\partial g_{\text{flamb}}}{\partial A_i} = \text{FS} \cdot \frac{\partial (\lambda')_{\text{max}}}{\partial A_i} \quad (4.1)$$

Por outro lado, tem-se da eq. (2.10)

$$- [K_G] \{\bar{x}\} = (\lambda')_{\text{max}} [K_E] \{\bar{x}\} \quad (4.2)$$

onde  $\{\bar{x}\}$  é o autovetor associado a  $(\lambda')_{\text{max}}$ .

Derivando ambos os lados de (4.2)

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial A_i} [K_G] \{\bar{x}\} - [K_G] \left\{ \frac{\partial \bar{x}}{\partial A_i} \right\} &= \frac{\partial (\lambda')_{\text{max}}}{\partial A_i} [K_E] \{\bar{x}\} + \\ + (\lambda')_{\text{max}} \frac{\partial}{\partial A_i} [K_E] \{\bar{x}\} + (\lambda')_{\text{max}} [K_E] \left\{ \frac{\partial \bar{x}}{\partial A_i} \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ou

$$\begin{aligned} (- [K_G] - (\lambda')_{\text{max}} [K_E]) \left\{ \frac{\partial \bar{x}}{\partial A_i} \right\} &= \left( - \frac{\partial (\lambda')_{\text{max}}}{\partial A_i} [K_E] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial A_i} [K_G] + (\lambda')_{\text{max}} \frac{\partial}{\partial A_i} [K_E] \right) \{\bar{x}\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pré-multiplicando (4.4) por  $\{\bar{x}\}^T$  e tendo em conta a simetria de  $[K_E]$  e  $[K_G]$ , observa-se que o lado esquerdo de (4.4) se anula em virtude de (4.2). Consequentemente, a expressão da derivada da restrição de flambagem em relação às variáveis de projeto é:

$$\frac{\partial (\lambda')_{\max}}{\partial A_i} = \frac{-\{\bar{x}\}^T \left[ \frac{\partial [K_G]}{\partial A_i} + (\lambda')_{\max} \frac{\partial [K_E]}{\partial A_i} \right] \{\bar{x}\}}{\{\bar{x}\}^T [K_E] \{\bar{x}\}} \quad (4.5)$$

Note que  $\{\bar{x}\}$  deve ser o autovetor correspondente a  $(\lambda')_{\max}$ .

As derivadas de  $[K_G]$  podem ser encontradas a partir das derivadas das tensões calculadas em [10]. Por exemplo, para treliças, segundo (2.4) e (2.5) é:

$$[K_G] = \sum_{j=1}^m A_j \sigma_j [k_G^*]_j \quad (4.6)$$

onde  $\sigma_j$  é a tensão na barra  $j$ . A matriz  $[k_G^*]_j$  é a matriz geométrica da barra  $j$  quando existe esforço unitário na mesma, que só depende das coordenadas dos nós da barra  $j$ . Em consequência:

$$\frac{\partial [K_G]}{\partial A_i} = \sigma_i [k_G^*]_i + \sum_{j=1}^m A_j \frac{\partial \sigma_j}{\partial A_i} [k_G^*]_j \quad (4.7)$$

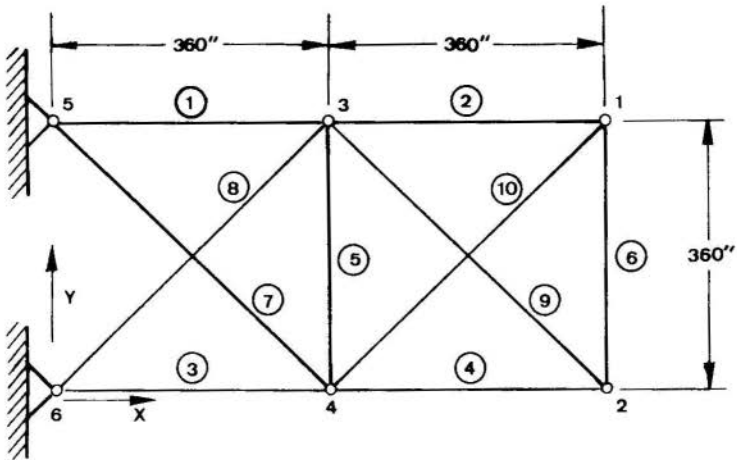
As matrizes  $[k_G^*]_j$  são geradas no início do processo de otimização e conservadas durante o mesmo a efeito de recalcular a matriz geométrica e suas derivadas mediante (4.6) e (4.7).

Aqui foi suposto que todas as áreas variam independentemente. Quando as áreas estão vinculadas a (4.7) deve ser modificada. O primeiro termo do membro à direita se transforma num somatório sobre todos os elementos vinculados a uma mesma variável de projeto.

As derivadas da matriz de rigidez são frequentemente constantes [10].

### 5. Exemplos de Aplicação

A estrutura da figura 1 foi projetada utilizando o sistema automático de síntese de estruturas ótimas descritas nas referências [7,10] ao qual se incluiu a capacidade de controlar o comportamento dos sucessivos projetos quanto a flambagem global, de acordo com a função restrição definida em 3



O carregamento ao qual está submetido a estrutura é:

$$(F_x)_2 = -1000. \text{lb} \quad \text{e} \quad (F_x)_1 = -5000. \text{lb}$$

onde  $(F_x)_i$  é uma força sobre o nó  $i$  na direção  $x$ .

As constantes do material considerado são:

$$E = 30. \times 10^6 \text{psi} \quad \text{e} \quad \rho = 0.283 \text{lb/in}^3$$

Só é considerada uma restrição de flambagem global, correspondente à carga crítica e com um coeficiente de segurança  $FS = 10$ .

As 10 variáveis de projeto utilizadas são as áreas de seção transversal das barras e seu valor inicial é  $1. \text{in}^2$  para todas, correspondendo a um peso inicial de  $419.6 \text{lb}$ .

Três casos foram considerados:

- A única restrição é a flambagem global.
- São restritos a flambagem global e todas as tensões são conservadas menores que  $90000. \text{psi}$ .
- É acrescentada às restrições do caso (b) a limitação dos deslocamentos dos nós 1 e 2 pelo valor  $3.5 \text{in}$ .

Os resultados se encontram na Tabela 1.

Nº de Elementos	a	b	c
1	1.166	1.038	1.162
2	0.498	0.690	1.151
3	1.102	1.105	2.00
4	0.590	1.054	2.00
5	1.166	0.262	0.397
6	0.198	0.204	0.292
7	0.301	0.341	0.349
8	0.367	0.351	0.348
9	0.625	0.580	0.369
10	0.559	0.491	0.362
Peso Final	228.2lb	246.5	325.4
Nº de Iterações	8	7	9

Tabela 1 - Configurações Finais

Na configuração obtida para o caso (a) a carga real é 10,04% da crítica, sendo que para o valor utilizado para FS é considerado aceitável quando a carga é 10.00% da crítica. A redução de peso no caso (a) é 45%.

Para a configuração final do caso (b) a restrição de flambagem global está também em torno do máximo aceitável (9.950% da crítica), assim como a tensão nos elementos 3 e 4. A redução de peso é 42%.

No caso (c) são ativas as restrições de flambagem global e o deslocamento do nó 2 na direção  $x$ .

Nos exemplos se observam mudanças nos modos de flambagem correspondentes à menor carga crítica. É possível que no ótimo existam dois modos diferentes associados à menor carga crítica; isto é pouco provável quando existem outros tipos de restrição, no entanto, podia ser interessante na flambagem global, considerar como restrições as duas menores cargas críticas.

## 6. Conclusões

O método proposto permite o projeto automático de estruturas, incluindo a imposição de estabilidade global das mesmas, simultaneamente, em outras restrições já desenvolvidas. Este método mostrou ser efetivo nos exemplos tratados em termos de custo computacional.

## Bibliografia

- [1] Keller, J.B., "The Shape of the Strongest Column", Arch.Ration.Mech.Analysis, 5, 1960.
- [2] Tadjbakhsh, I. and Keller, J.B., "Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues", J. Appl.Mech., vol. 29, 1962.
- [3] Venkayya, V.B.; Khot, N.S.; Berke, L., "Application of Optimality Criteria Approaches to Automated Design of Large Practical Structures", 2nd. Symp. on Struct.Optimization, AGARD-CP-123, Mylan, 1973.
- [4] Kiusalaas, J., "Optimal design of structures with buckling constraints", Int.J.Solids Struct., vol. 9, 1973.
- [5] Khot, N.S.; Venkayya, V.B. and Berke, L., "Optimum Structural design with stability constraints", Int. J.Num.Methods Eng., vol.10, 1097, 1976
- [6] Segenreich, S.A. and McIntosh, S.C., "Weight Optimization under multiple equality constraints using an optimality criterion", AIAA/ASME/SAE, 17th SDM Conf., Pennsylvania, May 1976.
- [7] Herskovits, J., Zouain, N. e Segenreich, S.A., "Un Sistema computacional para la optimización de estructuras en las que se consideran restricciones de paudeo", XVIII Jornadas Sul-Americanas de Enge

nharia Estrutural, dezembro 1976.

- [ 8] Segenreich, S.A.; Zouain, N.A.; Herskovits, J.H.  
"Optimality Criteria method based on slack  
Variable concept for large scale structural  
optimization, Symposium on Application of Computer  
Methods in Engineering, USC, Los Angeles, August  
1977.
  
- [ 9] Zouain, N., "Um algoritmo de otimização para pro-  
jeto de estruturas de grande porte", COPPE/UFRJ,  
novembro 1976.
  
- [10] Herskovits, J., "Um sistema automático de projeto  
de estruturas ótimas", COPPE/UFRJ, dezembro 1976.
  
- [11] Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural  
Analysis", McGraw-Hill, 1968.



ZOUAIN, N.; SEGENREICH, S.A.; HERSKOVITS, J.

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EM PRESENÇADE FLAMBAGEM GLOBALSumário

Apresenta-se um método de projeto de estruturas ótimas nas quais se condiciona a estabilidade global, mediante a limitação da carga crítica de flambagem. Se descrevem os métodos utilizados para o cálculo da dita carga crítica e suas derivadas com respeito às variáveis de projeto. As estruturas são projetadas para mínimo peso, por um sistema de síntese estrutural que utiliza um algoritmo iterativo do tipo "Critério de otimalidade". Para isto, inclui-se também restrições sobre os deslocamentos nodais e tensões nos elementos. Alguns exemplos de aplicação em treliças são mostradas.

---

STRUCTURAL OPTIMIZATION INCLUDINGGLOBAL BUCKLINGSummary

This paper presents a design approach for optimum structures in which global stability is conditioned by limiting critical buckling loads. The strategy of calculating the critical loads and their derivatives is described. An "Optimality Criteria" algorithm is applied to minimum-weight-design, admitting constraints on nodal displacements and element stresses also. Some examples are treated, involving a pin-jointed truss.

# A N A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 16

PP. 1327 - 1341



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

OTIMIZAÇÃO DA FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL E DA

DISTRIBUIÇÃO DE MASSA DE UMA VIGA EM BALANÇO

Atair RIOS NETO, Prof. Assistente Doutor.  
Agenor de Toledo FLEURY, Auxiliar de Ensino.  
Depto. de Engenharia Mecânica  
Escola Politécnica da USP  
São Paulo, Brasil.

### 1. Introdução

Considerável esforço tem sido despendido na procura de soluções para estruturas que respeitem determinadas restrições geométricas e de resistência, satisfazendo simultaneamente variados critérios de otimização. No campo particu-

lar de projeto com restrições ou critérios dinâmicos tem-se tentado a abordagem sob o aspecto da resposta dinâmica, notadamente do ponto de vista de se melhorar os níveis de frequências de vibração [1]. Estes enfoques têm sido tratados de duas maneiras. De um lado, através de modelos discretizados, principalmente em estruturas muito complexas, procura-se um conjunto discreto de variáveis de projeto que extremiza uma função objetivo. De outro lado, colocam-se formulações em que se buscam funções contínuas com a mesma intenção, num processo conhecido como de modelos contínuos.

Este trabalho se coloca sob o prisma da formulação por modelos contínuos. É tratado o caso de uma viga em balanço para a qual a área e o raio de giração são, de forma indireta, as variáveis de projeto usadas para otimizar uma função objetivo que envolve a distribuição de massa e a frequência fundamental. O problema referente à melhor distribuição de massa para se obter a máxima frequência natural do 1º modo, para uma viga, foi também desenvolvido por Niordson [2]. O caso tratado foi o de uma viga biapoia - da em que, mantendo-se o volume inicial, impõe-se a condição de variação do momento de inércia com relação à área na forma  $I(x) = cA^2(x)$ , onde  $c$  é uma constante que depende da geometria. O tratamento numérico, em [2], é feito por método variacional baseado num quociente de Rayleigh. Este trabalho foi estendido por Brach [3], para o caso de variação linear do momento de inércia com a área e considerando outras condições de contorno. Posteriormente, Karihaloo e Niordson [4] trataram o caso de viga em balanço pelo mesmo método, para o caso de relação momento de inércia-área na forma  $I(x) = cA^n(x)$ ,  $n=1,2,3$ . Nestes três trabalhos se nota que a imposição da relação momento de inércia-área se, por um lado, permite simplificação considerável por reduzir o problema a uma única variável de controle, por outro representa séria limitação aos objetivos pretendidos. Kamat [5] estudou para os trabalhos citados, através de modelo discretizado por Elementos Finitos, o efeito da inércia de rotação e do cisalhamento no caso da distribuição ótima da massa, su-

pondo ainda válida a relação  $I(x) = cA^n(x)$ ,  $n=1,2,3$ . Sua conclusão foi a de que estes efeitos aumentam em cerca de 8% em relação à viga de secção constante de mesmo volume, o que leva a supor que tais efeitos podem, com certos cuidados, ser negligenciados para se chegar a um modelo mais simples. Finalmente, McCart et al, [6], desenvolveram método de gradiente, que é uma modificação do proposto por Bryson e Denham, [7], para solução de problemas de Controle Ótimo, com vistas à aplicação a problemas estruturais. O algoritmo foi aplicado à solução de um pórtico plano, supondo válida a relação  $I(x) = cA^2(x)$ , em que se pretendia mínimo peso para uma frequência fundamental especificada.

Pode ser notado em todos os casos citados uma tendência à simplificação do modelo matemático. Pretende-se neste trabalho formular o modelo da viga de uma maneira mais geral colocando duas variáveis de controle, as funções área e raio de giração, e definindo a frequência como variável de estado. Isto leva à colocação do modelo diretamente sob a forma de um problema de Controle Ótimo. Com esta colocação, o problema é então tratado numericamente por um algoritmo do tipo gradiente de primeira ordem, baseado no algoritmo de Bryson e Denham, [7], onde o ajuste das condições iniciais é também usado como fator de otimização.

Os resultados obtidos permitem afirmar que resultados como os de Karihaloo e Niordson [4] para a frequência fundamental da viga em balanço podem ser alcançados mesmo com considerável redução da massa. Uma vez obtida a solução através desse procedimento, uma viga destinada a condições reais de uso pode ser projetada por algum método de ajuste às funções ótimas desenvolvidas, permitindo, dessa forma, maior flexibilidade quanto a opções de uso em projetos.

## 2. Equacionamento do Problema

Considera-se o caso de uma viga em balanço que realiza pequenas vibrações transversais (flexão) e admite-se que a viga é constituída por material homogêneo e isotrópico. No caso mais geral, o movimento da viga é descrito por um sistema de duas equações diferenciais a derivadas parciais em re

lação ao tempo e à coordenada definida ao longo do eixo. Supondo que não existam cargas externas, que a solução possa ser separada em espaço e tempo e que as dimensões das secções transversais são pequenas, comparadas ao comprimento (o que permite desprezar efeitos de inércia de rotação e de formação por cisalhamento), recai-se, então, na conhecida Equação de Euler para vibrações livres de uma viga :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 m(x) y(x) = 0 \quad (2.1)$$

onde  $x$  é a coordenada ao longo do eixo;  $y(x)$  é o deslocamento ao longo de  $x$ ;  $E$  é o módulo de elasticidade do material;  $I(x)$  é o momento de inércia de área da secção transversal;  $m(x)$  é a distribuição linear de massa ao longo de  $x$ ;  $\omega$ , constante, é o autovalor que descreve as frequências naturais.

Para o caso de uma viga em balanço, as condições de contorno associadas à equação diferencial de quarta ordem (2.1) são :

$$y(0) = 0 \quad (2.2.a)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.2.b)$$

$$EI(x) \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0 \quad (2.3.a)$$

$$\left. \frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] \right|_{x=l} = 0 \quad (2.3.b)$$

sendo  $x=0$  e  $x=l$  correspondentes às extremidades engastada e livre, respectivamente.

O que se pretende, obedecidas a equação diferencial (2.1) e as condições de contorno (2.2) e (2.3), é obter a distribuição de massa que, para um determinado comprimento, leve à viga de menor massa e maior frequência fundamental. Para isso, pode-se atuar apenas sobre duas das variáveis envolvidas na equação (2.1), a saber, a massa distribuída ao longo do comprimento,  $m(x)$ , e o momento de inércia associado à área,  $I(x)$ .

### 3. Otimização : Condições Necessárias

Admitindo que a viga seja constituída de um único material, a massa por unidade de comprimento  $m(x)$  e momento de inércia de área,  $I(x)$ , são ligadas à área  $A(x)$  pelas relações :

$$m(x) = \rho A(x) \quad (3.1)$$

$$I(x) = r^2(x) A(x) \quad (3.2),$$

onde  $r^2(x)$  indica o quadrado do raio de giração da secção transversal.

Desta forma, os parâmetros a serem controlados são a área  $A(x)$  e o quadrado do raio de giração  $r^2(x)$ . No entanto, ao se considerar (2.1) na forma de um sistema de equações de primeira ordem, para o estabelecimento das condições necessárias à otimização, tem-se o aparecimento das derivadas, com relação à coordenada independente  $x$ , das variáveis área e raio de giração tanto nas equações como nas condições de contorno (2.3). Para evitar tal problema tomam-se como variáveis de controle as derivadas segundas de  $A(x)$  e  $r^2(x)$ .

Define-se, então, a área e o quadrado do raio de giração, bem como suas derivadas primeiras, como variáveis de estado e suas derivadas segundas, como variáveis de controle:

$$y_5(x) = A(x) \quad (3.3)$$

$$y_6(x) = r^2(x) \quad (3.4)$$

$$\dot{y}_5(x) = y_7(x) = f_5 \quad (3.5)$$

$$\dot{y}_6(x) = y_8(x) = f_6 \quad (3.6)$$

$$\dot{y}_7(x) = u_1(x) = f_7 \quad (3.7)$$

$$\dot{y}_8(x) = u_2(x) = f_8 \quad (3.8)$$

onde  $(\dot{\phantom{x}})$  representa derivada em relação à coordenada  $x$ .

Pretende-se também usar a frequência natural como parâmetro a ser ajustado dentro do processo de otimização. A frequência passa a ser variável de estado definida pelas relações :

$$\begin{aligned} y_9 &= \omega \\ \dot{y}_9 &= 0 = f_9 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Transformando agora a equação de Euler em equações diferenciais de 1a. ordem, tem-se :

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y \\ \dot{y}_1(x) &= y_2(x) = f_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\dot{y}_2(x) = y_3(x) = f_2 \quad (3.11)$$

$$\dot{y}_3(x) = y_4(x) = f_3 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_4(x) &= \frac{1}{y_5 y_6} \left[ \frac{\rho}{E} y_9^2 y_5 y_1 - 2(y_7 y_6 + y_5 y_8) y_4 - (u_1 y_6 + 2y_7 y_8 + \right. \\ &\quad \left. u_2 y_5) y_3 \right] = f_4 \end{aligned} \quad (3.13)$$

A função objetivo escolhida, a ser minimizada, é uma combinação da distribuição de massa e da frequência natural, expressa por :

$$J = \int_0^{x_f} \left[ \rho y_5^2 + \frac{K_s}{y_9^2} \right] dx \quad (3.14)$$

onde  $K_s$  é um peso, estimado de forma a tornar compatível as duas parcelas do integrando.

Outras restrições devem ser ainda adicionadas ao problema. Assim, para se garantir a existência apenas do modo fundamental de vibração, define-se :

$$C_1(y, x) = -y_2(x) \leq 0 \quad (3.15)$$

(3.15), se respeitada, representa a inexistência de nós na configuração do modo.

A segunda e terceira condições estão relacionadas tanto com a positividade das funções massa e raio de giração, como com a resistência da viga, traduzindo-se matematicamente por:

$$C_2(y, x) = C - y_5(x) \leq 0 \quad (3.16)$$

$$C_3(y, x) = D - y_6(x) \leq 0 \quad (3.17)$$

onde C e D são constantes positivas.

Finalmente, a quarta restrição se refere à menor frequência natural aceitável para o primeiro modo, descrita por:

$$C_4(y, x) = \omega_0 - y_9 \leq 0 \quad (3.18)$$

Uma última observação deve ser feita com relação às condições de contorno. As relações (2.3) dependem das funções  $y_5(x)$  e  $y_6(x)$  que, por sua vez, estão restritas, através de (3.16) e (3.17), a assumirem valores estritamente positivos. Então, as condições (2.3), escritas na forma de variáveis de estado, podem ser colocadas da seguinte maneira :

$$\psi_1(x_f, y_f) = y_3 \Big|_{x=l} = 0 \quad (3.19)$$

$$\psi_2(x_f, y_f) = y_4 \Big|_{x=l} = 0$$

Para as condições de contorno (2.2), escritas na forma de variáveis de estado, tem-se :

$$\psi_3(x_0, y_0) = y_1 \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.20)$$

$$\psi_4(x_0, y_0) = y_2 \Big|_{x=0} = 0$$

Para se obter solução única, condições de contorno não homogêneas devem ser adicionadas. Especificam-se duas condições a serem obedecidas : a deflexão  $y_1$  no extremo livre da viga e o valor da função  $y_3$  no extremo engastado.

$$\psi_5(x_f, y_f) = y_1 \Big|_{x=l} = \epsilon_1 \quad (3.21)$$

$$\psi_6(x_0, y_0) = y_3 \Big|_{x=0} = \epsilon_2$$



onde  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são constantes, também arbitradas, que determinam a magnitude das oscilações da viga.

Fica assim determinado totalmente o problema : minimizar a função objetivo (3.14), sujeita aos vínculos dinâmicos (3.5) a (3.13), às condições de contorno (3.19) a (3.21) e aos vínculos de desigualdade (3.15) a (3.18).

As condições necessárias para que a solução seja ótima podem ser expressas em termos da Hamiltoniana, que, no caso da existência de 4 vínculos de desigualdade e 9 vínculos dinâmicos, é da forma :

$$H = \lambda_0 f + \sum_{i=1}^9 \lambda_i f_i + \sum_{k=1}^4 \mu_k C_k \quad (3.22)$$

onde  $f$  é a função do integrando da função objetivo; os  $\lambda$  são multiplicadores de Lagrange e os  $\mu$  são também multiplicadores de Lagrange, porém com a restrição :

$$\mu_k = 0 \quad \text{se } C_k < 0 ; \mu_k \neq 0 \quad \text{se } C_k = 0 \quad (3.23)$$

O chamado Princípio de Máximo de Pontryaguin estabelece que a função objetivo é mínima quando a Hamiltoniana é máxima em relação às variáveis de controle. Isto implica que devem ser satisfeitas as condições :

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2 \quad (3.24)$$

As equações (3.23) são as equações de controle associadas ao problema. Outras condições necessárias são as chamadas equações adjuntas ou de Euler-Lagrange :

$$\dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad i = 1, \dots, 9 \quad (3.25)$$

Ao mesmo tempo devem ser verificados os vínculos de desigualdade :

$$C_k(y, x) \leq 0 \quad , \quad k = 1, \dots, 4 \quad (3.26)$$

Uma nova função deve ser estabelecida para se definir as relações de contorno. Esta função é escrita como :

$$G = \sum_{\ell=1}^6 v_{\ell} \psi_{\ell} \quad (3.27)$$

onde os  $v$  são também multiplicadores de Lagrange.

Com essa definição, as condições de transversalidade, necessárias nos contornos, são expressas por :

$$\frac{\partial G}{\partial x_0} + [H]_{x=x_0} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_f} - [H]_{x=x_f} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_i(x_0)} - [\lambda_i]_{x=x_0} = 0 \quad i=1, \dots, 9 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_i(x_f)} + [\lambda_i]_{x=x_f} = 0 \quad i=1, \dots, 9 \quad (3.31)$$

#### 4. Tratamento Numérico

Para solução do problema proposto, usou-se um método de gradiente de primeira ordem. Este método de busca direta é baseado naquele desenvolvido por Bryson e Denham, [7], e ampliado para se poder obter as condições iniciais não de finidas. Isto se faz necessário devido ao fato da frequência natural ser tratada como uma variável de estado não especificada.

O tratamento direto dos vínculos de desigualdade através de métodos de gradiente é extremamente complicado quando estão envolvidos vários vínculos. Em vista disso, optou-se pelo tratamento desses vínculos através de funções de penalidade, conforme o procedimento de Sage, [8]. Para isso, as restrições  $C_i(y, x) \leq 0$ , expressas por (3.15) a (3.18), são convertidas em uma única restrição de igualdade, através da definição de uma nova variável de estado  $y_{10}$  tal que :

$$\dot{y}_{10} = \sum_{i=1}^4 |C_i(x, y)|^2 \quad K(C_i) = f_{10} \quad (4.1)$$

onde

$$K [C_i(x,y)] = \begin{cases} 0 & \text{se } C_i(x,y) \leq 0 \\ K_i & \text{se } C_i(x,y) > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

com  $K_i > 0$ , para  $i=1,2,3,4$  e  $y_{10}(0) = 0$ .

Note-se que  $y_{10}(x)$  representa uma medida direta da penetração do vínculo na fronteira. A condição a ser então exigida é que, idealmente,  $y_{10}(x_f)=0$ . Como esta última condição não pode ser exigida, é colocada como uma função de penalidade na função objetivo, transformando esta última em :

$$\bar{J} = P_p [y_{10}(x_f)]^2 + J = P_p [y_{10}(x_f)]^2 + \int_0^{x_f} \left[ \rho y_5^2 + \frac{K_s}{y_9^2} \right] dx \quad (4.3)$$

## 5. Resultados.

O modelo proposto nos ítems anteriores foi processado em computador sob diversas condições, chegando-se a resultados bastante satisfatórios. Admite-se em todas as condições uma viga de aço com comprimento conhecido e fixo.

A estimativa inicial é sempre feita tomando-se uma viga de secção transversal constante. Esta imposição tem duas intenções : a primeira é se poder estabelecer uma melhor comparação da viga otimizada com a original e a segunda se deve a necessidades numéricas de não violação dos vínculos de desigualdade na primeira iteração. O algoritmo é razoavelmente rápido, convergindo em cerca de 25 iterações para cada uma das condições impostas. A fim de ilustrar o método, descreve-se a seguir dois dos casos analisados. Em ambos, o comprimento arbitrado é de 1,2m e as propriedades do material -aço- necessárias para simulação são o módulo de elasticidade  $E=2,1 \times 10^{10}$  kgf/m<sup>2</sup> e a densidade volumétrica = 7800kgf/m<sup>3</sup>.

No primeiro caso, as restrições referentes à área e ao

raio de giração, C e D nas equações (3.16) e (3.17), são admitidas muito pequenas de tal maneira que estes vínculos de desigualdade trabalham apenas no sentido de evitar que as funções acima se tornem negativas. Os resultados obtidos podem ser comparados com os da viga de secção transversal constante, inicial, através dos dados da Tabela I abaixo.

No segundo caso, restrições mais fortes são colocadas sobre as funções de área e raio de giração. Assim, procura-se a viga que tenha área maior que um valor  $C=0,004m^2$  e raio de giração menor que  $D = 0,25m^2$ , em qualquer secção transversal. Esta condição para o raio de giração significa inverter a desigualdade expressa anteriormente em (3.17), transformando-a em :

$$C_3(y,x) = y_6(x) - D \leq 0 \quad (5.1)$$

Resultados para este caso estão na Tabela II abaixo. Os dois casos acima foram otimizados para valores de frequência fundamental de 3000 rd/s.

Nota-se, nos resultados tabelados, que, para os dois casos, a frequência natural do primeiro modo cresce cerca de 330% em relação à frequência da viga de secção constante usada para iniciar o processamento, enquanto a massa é reduzida em cerca de 83% para o primeiro caso, sem restrições, e em cerca de 77% para o segundo caso, com restrições maiores.

Deve-se observar também que a restrição de raio de giração menor que  $D=0,25m^2$  não é totalmente obedecida na simulação do 2º caso. O fato de permanecer numa faixa próxima à fronteira, dentro da região proibida, é inerente à função de penalização.

Diversos outros casos foram também simulados, com outras restrições e outras condições iniciais, sendo que os resultados obtidos foram julgados satisfatórios [9] .

## 6. Conclusões

Para o método descrito neste trabalho parece oportuno

Conds. contorno especificadas: $\epsilon_1=0,01m$ ; $\epsilon_2=0,0244m^{-1}$					
Peso da Viga de Sec. Const., Inicial: $\underline{P}=2246,4$ kgf					
Frequência Fund. da Viga de Sec. Const., Inicial : $\omega_{n_1} = 692,0$ rd/s					
Valor da Função Objetivo p/ Viga de Sec. Const.Inic.: $J=671,44$					
1º CASO			2º CASO		
x(m)	A(x), (m <sup>2</sup> )	r <sup>2</sup> (x), (m <sup>2</sup> )	x(m)	A(x), (m <sup>2</sup> )	r <sup>2</sup> (x), (m <sup>2</sup> )
0,00	0,0765	0,1483	0,00	0,1055	0,1408
0,24	0,0620	0,1640	0,24	0,0852	0,1584
0,48	0,0475	0,2006	0,48	0,0649	0,1860
0,72	0,0329	0,2575	0,72	0,0446	0,2217
0,96	0,0184	0,3292	0,96	0,0243	0,2654
1,20	0,0039	0,4066	1,20	0,0040	0,3137
Frequência Fundamental : $\omega_{n_1} = 3012,5$ rd/s			Frequência Fundamental : $\omega_{n_1} = 3007,0$ rd/s		
Peso da Viga Otimizada : $\underline{P}=376,3$ kgf			Peso da Viga Otimizada : $\underline{P}=512,5$ kgf		
Valor Final da Fção.Objet. $J=151,39$			Valor Final da Fção.Objet. $J=168,78$		
TABELA I - Viga otimizada p/ $\omega=3000$ rd/s, sem restr.			TABELA II - Viga otimizada p/ $\omega=3000$ rd/s, com restr.		

destacar os aspectos a seguir. Em primeiro lugar, a formulação por Controle Ótimo permite uma abordagem mais direta e geral se comparada com a de outras publicações na área [2,4], embora a programação, em si, seja bastante trabalhosa. Outro aspecto é a facilidade de se modificar os vínculos de desigualdade permitindo que se imponham restrições para diversas necessidades de projeto. Deve ser também levado em conta que, se necessário, é possível definir outras condições de contorno sem grande dificuldade, como, por exemplo, especificar a área na extremidade engastada. Também o fato de não se impor a geometria final da viga permite obter, através de ajustes posteriores, a forma conveniente que mais se aproxime da viga otimizada.

Finalmente, uma observação referente aos algoritmos de gradiente. McCart et al, [6], colocam restrições a esses métodos na forma desenvolvida por Bryson e Denham, [7], por acharem que as modificações, necessárias para transformar o problema estrutural de contorno num problema de valores iniciais, e que as estimativas iniciais ruins são sérias ameaças à estabilidade do método, podendo, portanto, causar divergências no tratamento numérico e retardar a convergência. No método tratado neste trabalho, a convergência nos vínculos terminais mostrou ser problema de solução relativamente simples se se dispuser de algum mecanismo de controle do passo a cada iteração. Quanto à convergência, não se confirmou sua lentidão o que pode ser atestado pelo número razoavelmente pequeno de iterações necessário para os casos apresentados.

#### Bibliografia

- [1] Pierson, B.L., A Survey of Optimal Structural Design under Dynamic Constraints. Int.J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.4, pp.491-499 (1972).
- [2] Niordson, F.I., On the Optimal Design of a Vibrating Beam. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 23, pp. 47-53 (1965).

- [3] Brach, R.M., On the Extremal Fundamental Frequencies of Vibrating Beams. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 4, pp. 667-674 (1968).
- [4] Karihaloo, B.L., e Niordson, F.I., Optimum Design of Vibrating Cantilevers. *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 11, pp. 638-654 (1973).
- [5] Kamat, M.P., Effect of Shear Deformations and Rotary Inertia on Optimum Beam Frequencies. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 51-62 (1975).
- [6] McCart, B.R., Haug, E.J., e Streeter, T.O., Optimal Design of Structures with Constraints on Natural Frequencies. *AIAA Journal*, Vol.8, pp.923-927 (1970).
- [7] Bryson, A.E., e Denham, W.F., A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems. *J. Applied Mechanics*, ASME, pp. 247-257 (1962).
- [8] Sage, A.P., *Optimum Systems Control*. Prentice - Hall Co. (1968).
- [9] Fleury, A.T., *Dissertação de Mestrado a ser apresentada à Escola Politécnica da USP (em fase final de elaboração)* (1977).

OTIMIZAÇÃO DA FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL E DA  
DISTRIBUIÇÃO DE MASSA EM UMA VIGA EM BALANÇO.

Sumário

Este trabalho apresenta um procedimento de otimização para uma viga em balanço que realiza vibrações transversais. Define-se uma função objetivo mista que envolve a frequência fundamental e a distribuição de massa ao longo da viga. A minimização desta função é vinculada à obediência da Equação de Euler para a viga e a condições de contorno adequadas. Para tanto, as variáveis de controle utilizadas são as funções área e raio de giração da secção transversal, resultando num problema de Controle Ótimo. Este problema, por sua vez, é tratado numericamente de modo a se obter, segundo o critério adotado, a distribuição de massa que, para um dado comprimento e vínculos de resistência estabelecidos, leve a viga de menor massa e maior frequência fundamental. Resultados obtidos são então comparados a resultados anteriores existentes na literatura.

---

FIRST MODE FREQUENCY AND MASS DISTRIBUTION

OPTIMIZATION FOR A CANTILEVER BEAM

Summary

This work presents a optimization procedure to treat the problem of a cantilever beam, subjected to transverse vibrations. A performance index which includes the first mode frequency and the mass distribution, is defined. The minimization of this index is subjected to Euler's equation for the beam and to adequate boundary conditions. The optimal control problem is then formulated such as to give the minimum weight and the maximum frequency for a cantilever beam of fixed length and subjected to given strength constraints. The problem is numerically solved and the results compared to other existing results in the literature.



**A N A S**DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 17****PP. 1343 - 1353**

ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERINGOTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE TÉCNICASDA TEORIA DE CONTROLES E ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS

Clovis Sperb de BARCELLOS, Prof. Titular  
 Depto. de Engenharia Mecânica  
 Univ. Federal de Santa Catarina  
 Florianópolis - Brasil

William H. WARNER, Professor, Chairman  
 Dept. of Aerospace Eng. & Mechanics  
 University of Minnesota  
 Minneapolis, M.N. USA.

1. Introdução

O presente trabalho apresenta um novo procedimento para otimização estrutural recentemente desenvolvido [1]. Esse método se baseia em técnicas de controles [2, 3, 4], e de

análise de elementos finitos [5], através da diferenciação de elementos finitos físicos e matemáticos. Ele se destina a resolver uma classe de problemas de otimização em que os elementos estruturais são constituídos por um número de pedaços desses elementos (aqui denominados elementos finitos físicos) que tem contornos e tipos de variação de espessura pré-especificados pelo projetista. Por isso, a formulação proposta é geral no que se refere a tipos, tamanhos e distribuição da espessura de tais elementos finitos físicos, a lém de permitir o uso do método de elementos finitos facilmente. Para exemplificar seu emprego, é apresentado um exemplo de minimização da massa de uma viga sanduíche engastada em vibração livre sob a condição de que tenha uma dada frequência fundamental. O método é apresentado para elementos uni-dimensionais, embora tenha sido originalmente para elementos estruturais planos.

## 2. Elemento finito físico

Considere um fenômeno que possa ser descrito por uma equação diferencial linear  $Lw = 0$  em um domínio  $D$  contido no espaço,  $R_1$ , dos números reais, juntamente com condições de contorno apropriadas nos extremos  $\partial D$ . Os coeficientes do operador  $L$  dependem de um conjunto de funções  $u_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $x \in D$  e de parâmetros constantes. As funções  $u_i$  podem ser consideradas como controles do fenômeno e pertencem a um conjunto pré-especificado  $U$  sobre  $D$ . Para exemplificação, suponha que exista apenas uma variável de controle restrita à forma  $u = p(x, \underline{d})$ , onde  $\underline{d}$  é algum conjunto de parâmetros reais a serem determinados.

A equação original pode ser reescrita na forma de  $n$  equações de 1ª. ordem

$$\underline{z}_{,x} = \underline{f}(x, \underline{z}, u)$$

onde  $\underline{z}$  e  $\underline{f}$  são funções vetoriais pertencentes a um espaço  $n$  dimensional, reais e contínuas em  $D$ ;  $u$  é mensurável em  $D$ . As variáveis  $z_i$  são denominadas de variáveis de estado e são supostas a pertencer ao espaço de Sobolev  $W_p^1$ .

Particione-se, a seguir, o domínio  $D$  em domínios  $D_i$ ,

$i = 1, \dots, N$ , de modo que:  $D_i \cap D_j \equiv \phi$  para  $i \neq j$ ,

$$D = \bigcup_{i=1}^N D_i$$

e que  $U$  seja um conjunto de funções seccionalmente contínuas em  $D$ , contínuas em todo  $D_i$  além de terem a estrutura matemática especificada pelo projetista. Seja  $\partial D_{ii+1}$  o contorno entre os domínios  $D_i$  e  $D_{i+1}$ . Assim, associa-se a cada elemento finito físico, isto é, a cada pedaço de elemento estrutural, um subdomínio  $D_i$ .

Por conveniência, seja  $p_i(x, r_{ij}) = p(x, \underline{d})$  para  $x \in D_i$  e  $p_i = 0$  para  $x \notin D_i$ . Denominando por  $\theta$  o número total de parâmetros "j" para um dado "i", seleciona-se um conjunto  $r_{ij}$  que tenha o menor  $\theta$ . Convém observar que  $p_i$  não necessita ter a mesma estrutura matemática para todos os elementos. Definição: Elemento Finito Físico é a parte de um elemento estrutural associada a um sub-domínio  $D_i$ .

### 3. Método de otimização

Inicialmente, define-se o índice de desempenho,  $J_0$ , e a função,  $J$ , a ser minimizada como

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^N \int_{D_i} \{ \lambda \cdot (f - z, x) + \gamma(u - p_i) \} dx$$

onde  $\lambda$  e  $\gamma$  são funções multiplicadoras de Lagrange. As funções  $\lambda_i$  são denominadas variáveis de co-estado e também supostas a pertencerem a  $W_p^1$ . O operador "." indica produto interno no seguinte sentido:

$$\lambda \cdot f = \sum_{i=1}^N \lambda_i f_i$$

Definindo-se o Hamiltoniano por

$$H(x, \underline{z}, \underline{\lambda}, u, \gamma, \underline{d}) = \underline{\lambda} \cdot \underline{f} + \gamma(u + p)$$

e realizando integração por partes, pode-se reescrever  $J$  como sendo:

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^N \left\{ \lambda \cdot z \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\lambda, x, z + H) dx \right\}$$

Para que  $J$  seja mínimo é necessário que a primeira variação de  $J$  seja nula para toda e qualquer possível escolha de variações admissíveis de  $u$ ,  $\lambda$ ,  $z$  e  $d$ . Pode-se satisfazer este requisito através das condições necessárias de Pontryagin.

$$\begin{aligned} \text{i- } J_{,\lambda} &= 0; & \text{ii- } J_{,\gamma} &= 0 & \text{iii- } J_{,u} &= 0 \\ \text{iv- } J_{,d_{ij}} &= 0 \quad \forall \text{ par } (i,j) \text{ definido}; & \text{v- } J_{,z} &= 0. \end{aligned}$$

As condições "i" e "ii" indicam que as restrições devem ser satisfeitas enquanto que as "iii" e "iv" conduzem às condições de ótimo de  $u$  e  $d_{ij}$ . Finalmente, "v" conduz a um sistema de equações Hamilton-Jacobi e suas respectivas condições de contorno:

$$\lambda_{i,x} = -H_{,z_i} \quad x \in D_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\lambda_i z_i \Big|_{\partial D_{i,i+1}^-} = \lambda_i z_i \Big|_{\partial D_{i,i+1}^+}$$

O conjunto de equações que expressam as condições de ótimo, obtidas de "iii", "iv" e "v", devem ser resolvidas simultaneamente com a dada equação diferencial.

Esse sistema de equações diferenciais e integrais não lineares podem ser resolvidas por qualquer método matemático. Um destes é o método de elementos finitos que aqui será usado.

#### 4. Aplicação do Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos [5] faz uso da partição do domínio juntamente com funções de interpolação apropriadas. Assim, o domínio  $D$  é subdividido em sub-domínios  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  tais que

$$\bigcup_{i=1}^M \Omega_i = D \quad \text{e} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \phi \quad \text{para } i \neq j$$

Seja  $\partial\Omega_{ii+1}$  o contorno entre os elementos  $\Omega_i$  e  $\Omega_{i+1}$ . Sobre cada elemento é definido um conjunto de pontos nodais e de funções interpoladoras.

Definição: Elemento finito matemático é a parte de um elemento estrutural associada a um subdomínio  $\Omega_i$ .

Obviamente, tais elementos finitos matemáticos devem ser definidos consistentemente com os elementos finitos físicos já definidos. A seguir, transforma-se a equação diferencial e as condições necessárias dadas para a forma de equações algébricas. A primeira pode ser transformada por qualquer um dos métodos convencionais e as equações resultantes são lineares nos parâmetros da variável dependente, mas, como os parâmetros  $d_{ij}$  são também incógnitas, tais equações são não-lineares no presente contexto. As condições necessárias são transformadas na forma requerida pela substituição da variável dependente e, em alguns casos, da variável de controle pelas suas expansões seccionalmente polinomiais seguidas das integrações indicadas. Essas equações são quadráticas na variável dependente e podem incluir parâmetros da variável de controle.

A solução do sistema de equações algébricas não lineares consistirá sempre de dois conjuntos de parâmetros. Um deles define a variável de controle ótima,  $u_0$ , e o outro especifica as variáveis de estado que evoluem sob o controle  $u_0$ .

### 5. Exemplo

Como exemplo de utilização do método proposto, é apresentado a seguir o problema da minimização da massa de uma viga sanduíche posicionada no intervalo  $[0, L]$ , engastada em  $x = 0$  e em vibração livre, sendo dadas a frequência fundamental e a massa do núcleo.

Um elemento finito físico "i" é definido como sendo um pedaço da viga sanduíche com largura unitária, comprimento  $c_i$ , espessura do núcleo  $A_c$  e posicionado no intervalo  $|x_i, x_{i+1}|$ . As duas folhas estruturais iguais tem a espessura  $t = A_i^2 + (B_i^2 - A_i^2)(x - x_i)/c_i$ , onde  $A_i^2$  e  $B_i^2$  são, respectivamente, a espessura de cada folha deste elemento em  $x_i$  e  $x_{i+1}$ . A viga será então constituída de N elementos finitos físicos unidos de tal modo que haja continuidade de deslocamentos lineares e angulares, esforço cortante e momento fle

tor.

A equação do movimento será

$$(E I w_{,xx})_{,xx} = (\rho_c A_c + 2\rho_s t(x))\Omega^2 w \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \\ i = 1, \dots, N$$

onde:  $E$ ,  $\rho_s$ ,  $I(x)$  são o módulo de elasticidade, densidade, segundo momento de área das folhas;  $\rho_c$  e  $A_c$  são a densidade e a espessura do núcleo e  $\Omega$  é a frequência fundamental. As condições de contorno são

$$w(0) = w_{,x}(0) = Q(L) = M(L) = 0$$

Neste problema se define como variável de controle a espessura,  $t(x)$ , das folhas estruturais e como variáveis de estado os deslocamentos linear e angular, momento fletor e esforço cortante associados ao modo fundamental. Então temos as equações

$$\begin{aligned} z_1 &= w \\ z_{1,x} &= z_2 \\ z_{2,x} &= z_3/E I \\ z_{3,x} &= z_4 \\ z_{4,x} &= (\rho_c A_c + 2\rho_s t)\Omega^2 z_1 \quad x \in D_i \\ & \quad i=1, \dots, N \end{aligned}$$

e as condições de contorno

$$z_1(0) = z_2(0) = z_3(L) = z_4(L) = 0$$

Definindo o índice de desempenho como sendo a massa estrutural e o Hamiltoniano por

$$H = t + \underline{\lambda} \cdot \underline{f} + \gamma \{ t - [A_i^2 + (B_i^2 - A_i^2)(x - x_i)/c_i] \},$$

obtém-se a funcional  $J$  a ser otimizada como sendo

$$J = \sum_{i=1}^N \{ \underline{\lambda} \cdot \underline{z} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [H + \underline{\lambda}_{,x} \cdot \underline{z}] dx \}$$

Seguindo o procedimento proposto, determina-se as equações de Hamilton-Jacobi

$$\lambda_{1,x} = -(\rho_c A_c + 2\rho_s t)\Omega^2 \lambda_4$$

$$\lambda_{2,x} = -\lambda_1$$

$$\lambda_{3,x} = -\lambda_2/E I$$

$$\lambda_{4,x} = -\lambda_3 \quad x \in D_i, \quad i = 1, \dots, N$$

que podem ser reduzidas a

$$(E I \lambda_{4,xx}),_{xx} = (\rho_c A_c + 2\rho_s t)\Omega^2 \lambda_4$$

Conclui-se também que as variáveis de co-estado  $\lambda_i$  são contínuas em D e que

$$\lambda_1(L) = \lambda_2(L) = \lambda_3(0) = \lambda_4(0) = 0$$

Portanto  $\lambda_4$  e  $z_1$  satisfazem a mesma equação diferencial e com as mesmas condições de contorno. Logo, a unicidade de soluções dessa classe de problemas requer que  $\lambda_4 = C z_1$ .

Levando isso em consideração, conclui-se que as condições necessárias restantes requerem que a espessura,  $t$ , e os parâmetros de controle,  $A_i$  e  $B_i$ , sejam tais que

$$1 + C[-E A_c^2 z_{1,xx}^2/2 + 2\rho_s \Omega^2 z_1^2] + \gamma(x) = 0$$

$$-A_i \int_{x_i}^{x_i+1} \gamma(x) [1 - (x - x_i)/c_i] dx = 0$$

$$-B_i \int_{x_i}^{x_i+1} \gamma(x) [(x - x_i)/c_i] dx = 0$$

Estes requisitos indicam que os elementos com  $A_i$  e  $B_i$  não nulos e não necessariamente iguais devem ter as seguintes propriedades:

a- devem ter a mesma energia Lagrangeana média, como pode ser observado pela satisfação simultânea dos dois últimos requisitos já que  $-(\gamma(x) - 1)$  é a distribuição de energia Lagrangeana;

b - o baricentro da distribuição da densidade de energia La grangeana deve se localizar na secção média de cada elemento.

Caso  $A_i$  e  $B_i$  sejam necessariamente iguais, somente a propriedade "a" ocorre.

Supondo que

$$D_i = \sum_{j=p}^q \Omega_j$$

para algum "i" e que todos os elementos finitos matemáticos "j" tem o mesmo comprimento " $c_j$ ", podemos escrever as condições necessárias como sendo

$$A_i \left\{ 1/C + \sum_{j=p}^q \underline{W}^{(j)T} \left[ (1 - (j - p)c_j) (E A_C^2 \underline{o}_K^{(j)} - 4\rho_s \Omega^2 \underline{o}_M^{(j)}) - E A_C^2 \underline{1}_K^{(j)} - 4\rho_s \Omega^2 \underline{1}_M^{(j)} \right] \underline{W}^{(j)} \right\} = 0$$

$$B_i \left\{ 1/C + \sum_{j=p}^q \underline{W}^{(j)} \left[ (j - p)c_j (E A_C^2 \underline{o}_K^{(j)} - 4\rho_s \Omega^2 \underline{o}_M^{(j)}) + (E A_C^2 \underline{1}_K^{(j)} - 4\rho_s \Omega^2 \underline{1}_M^{(j)}) \right] \underline{W}^{(j)} \right\} = 0$$

$$i = 1, \dots, N$$

onde

$$\underline{j}_M(i) = \int_{x_i}^{x_i+1} \underline{a} \underline{a}^T \left[ (x - x_i)/c_i \right]^j dx$$

$$\underline{j}_K(i) = \int_{x_i}^{x_i+1} \underline{a}_{,xx} \underline{a}_{,xx}^T \left[ (x - x_i)/c_i \right]^j dx$$

$\underline{a}$  - vetor das funções de interpolação

$\underline{W}^{(j)}$  - deslocamentos lineares e angulares nodais.

Como exemplo numérico, considere-se a seguinte viga:

Comprimento	100 cm
Espessura do núcleo	10 cm
Densidade: núcleo	0,0104 kg/cm <sup>3</sup>
folhas	0,0078 kg/cm <sup>3</sup>
Frequência	434 Hz
Módulo de Elasticidade	2,06.10 <sup>6</sup> N/cm <sup>2</sup>



A redução da massa total da estrutura, em percentagem em relação à viga uniforme de mesma frequência, é indicada na Tabela 1. Esses resultados indicam que elementos com distribuição de espessura linear acarretam redução da massa estrutural sensivelmente melhor que as uniformes, e, além disso, tais reduções são muito próximas das obtidas por Weisshaar [6] através de otimização contínua. As soluções para elementos finitos físicos uniformes comparam qualitativamente com os resultados encontrados por Venkayya [7] e os lineares com os resultados de Sippel e Warner [8]. Convém lembrar que a economia da massa estrutural depende da frequência adotada.

Elementos finitos físicos

Número usado	Tipo	
	Uniforme	Linear
1	0,00	6,67
2	4,78	7,74
3	6,58	7,95
4	7,22	8,02
6	7,68	8,05
8	7,84	8,05

Tabela 1.

### 6. Conclusões

Em síntese, o método utiliza-se de duas expressões seccionalmente polinomiais independentes, uma para a variável de controle e outra para a variável dependente, gerando assim os elementos finitos físicos e matemáticos, respectivamente. A diferença básica entre tais expansões, é que a primeira define a geometria (espessura) dos elementos físicos, enquanto que a segunda aproxima a solução da equação diferencial dada.

As vantagens do método proposto, em relação aos demais, que usam condições necessárias para a ocorrência de um ótimo, se baseiam na generalidade com que a distribuição de espessura dentro de cada elementos finito físico pode

ser especificada, dos contornos arbitrários desses elementos, bem como do método numérico utilizado para resolver a equação do movimento juntamente com as condições necessárias. Os resultados obtidos através dessa formulação são bastante significativos e comparam-se muito bem com os resultados obtidos por outros métodos.

### Bibliografia

- [1] Barcellos, C.S., "A structural optimization method combining finite element and control theory techniques", Ph.D. Thesis at University of Minnesota - USA, 1977.
- [2] Cesari, L., Optimization with partial differential equations in Dieudonné-Rashevsky form and conjugate problems., Arch. Rat. Mech. and Analysis, 33, 5, 1969.
- [3] Egorov, A.I., Necessary optimality conditions for distributed parameter system. SIAM Journal of Control, 5, 3, 1967.
- [4] Lur'e, K.A., The Mayer-Bolza problem for multiple integrals and the optimizations of the performance of systems with distributed parameter, P.M.M., 27, 1963.
- [5] Aziz, A.K., The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations", Academic Press, 1972
- [6] Weisshaar, T.A., An application of control theory methods to the optimization of structures having dynamic or aerolastic constraints. Ph.D. Thesis at Stanford University, USA, 1970.
- [7] Venkayya, V.B., Khot, N.S. e Berke, L., Application of optimality criteria approaches to automated design of large practical structures. AGARD-CP-123.
- [8] Sippel, D.L. e Warner, W.H., Minimum mass design of multi-element structures under a frequency constraint., AIAA Journal, 11, 4, 1973.

BARCELLOS, C.S. e WARNER, W.H.

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE TÉCNICAS  
DA TEORIA DE CONTROLES E ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS

Sumário

O presente artigo sugere uma formulação baseada em técnicas da teoria de controles e análise de elementos finitos para a obtenção das condições necessárias para projeto ótimo de estruturas. As condições necessárias são obtidas através dos conceitos de elementos finitos físicos e matemáticos. Como ilustração, o método é usado para otimizar uma viga engastada em vibração livre.

---

OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURES BY CONTROL THEORY AND  
FINITE ELEMENT ANALYSIS TECHNIQUES

Summary

A formulation based on control theory and finite element analysis techniques is suggested for obtaining optimality conditions for optimal design of practical structures. The necessary conditions for optimality are derived using the concepts of physical and mathematical finite elements. By way of illustration, the method is used for optimization of a vibrating cantilever beam.

# A N A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 18

PP. 1355 - 1366



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

THE APPLICATION OF A DISCONTINUOUS CONTROL  
STRATEGY TO AN ELECTROMECHANICAL SERVOMECHANISM

Thomas LAMBERT, Professor,  
Department of Mechanical Engineering,  
University College London,  
University of London, London, U.K.

Nabeel Radi ELIAS, Associate Professor  
Department of Mechanical Engineering,  
University of Khartoum, Khartoum, Sudan.

Introduction

With the increasing demand for more exacting performance greater emphasis is being placed on the nonlinear aspects of control systems.

Nonlinear systems employing the maximum available driving force at all times ("Bang-bang") have been analysed in many publications. A

switching function is used to decide the instant at which switching of the motive force should occur. It has been shown that 'bang-bang' systems are capable of producing a fast response, but in their simplest form are difficult to stabilise for all type of input.

Flugge-Lotz, in 1953 [1], studied the motion of mechanical systems employing elements of 'bang-bang' control. This was done by varying the coefficients of the differential equation describing the system before the nonlinear elements are added. This variation of the coefficients was done in a discontinuous way. The differential equations describing motions controlled in such a manner are nonlinear, although they are linear between switching points.

Flugge-Lotz [2,3] showed that a second order non-linear system, in which the coefficients of the differential equation describing the system were varied discontinuously in a specific manner, performed better than a linear system having a natural frequency 15 times greater. This method of discontinuous variation of parameters was later extended to higher order systems [4] and also applied to an electrohydraulic servomechanism [5] showing a superior performance to its linear counterpart (having the same differential equation excluding the nonlinear elements).

The basis of comparison used in references [3] [4] [5] to evaluate the performance of the nonlinear system is open to criticism on the grounds that the performance of the nonlinear system was compared with just one linear system, and that not the best. A fairer basis for comparison is therefore developed.

#### The discontinuous Control Strategy

No real system can satisfy the ideal requirement

$$\theta_0(t) = \theta_i(t) \quad (1)$$

for all values of time  $t$ . The purpose of most servomechanisms is to effect the reproduction of some control signal with power gain, and it is never physically realisable to have power gain without time delay effects [6]. Thus real feedback systems will in general display some error between input and output. A more realistic criterion of near-ideal performance is that

$$\begin{aligned}
 \theta_o(t) &\approx \theta_i(t) \\
 \dot{\theta}_o(t) &\approx \dot{\theta}_i(t) \\
 &\vdots \\
 \theta_i^{(n)}(t) &\approx \theta_o^{(n)}(t)
 \end{aligned} \tag{2}$$

with  $n > 1$

In practice fixed parameter systems cannot approach this condition except in a steady state; but clearly if a system could vary its parameters in a controlled fashion, it should be possible to change the system response at various times to approach this condition [2].

Consider the general fixed parameter linear system

$$(a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0) \theta_o = (b_m D^m + \dots + b_0) \theta_i \tag{3}$$

For different sets of parameters  $a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ , the output response to various inputs is completely different. In particular, it should be possible to shape the system dynamic equation in such a way that the output acceleration is greater or less than the input acceleration, as desired. Such a system could control with a very small error if the changes in system response were made at suitable points. The second order system which was suggested by Flugge-Lotz and Wunch [2] had an equation of the form

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) \theta_o = \theta_i \tag{4}$$

with

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_{01} - a_{02} \operatorname{sgn}(\theta_o \cdot \dot{\theta}_o) - a_{03} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_o \cdot \ddot{\theta}_o) \\
 a_1 &= a_{11} - a_{12} \operatorname{sgn}(\theta_o \cdot \dot{\theta}_o) - a_{13} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_o \cdot \ddot{\theta}_o)
 \end{aligned} \tag{5}$$

which was intended to satisfy equation (2). The parameters terms  $a_0$  in the right hand side of equation (5) were constants so that the parameters  $a_0$  and  $a_1$  could take on a number of discrete values. An analogue study of the system [3] confirmed that certain combination of parameters produced a system satisfying

$$\begin{aligned}\theta_o(t) &\approx \theta_i(t) \\ \dot{\theta}_o(t) &\approx \dot{\theta}_i(t)\end{aligned}\quad (6)$$

for a range of inputs. The principle of the system was basically varying the output acceleration discontinuously so that it was alternately larger or smaller than the input acceleration. Large errors occurred when this alternating pattern could not be maintained. The principle of the discontinuous control strategy is fully discussed in reference [7].

#### Criterion of Comparison

In order to evaluate the improvements in the performance of a control system that are gained when applying the discontinuous control strategy, a criterion of comparison has to be set to compare the performance of the discontinuous controlled system with its linear counterpart.

For a fair comparison, the same amount of information used with the discontinuous control strategy must be used with the linear system. In the discontinuous system, correcting signals proportional to the output and to the output velocity are used. For the linear counterpart these signals can be used to produce a compensating signal if it results in improving the performance of the systems. The use of velocity feedback as a means of improving the performance of control systems is a well known technique, but the optimum amount of velocity feedback to be used is not well defined.

The term "optimum" signifies the problem of setting the adjustable parameters of a control system so that the control action resulting after applying an input will produce the best possible response. The word "best" has several connotations regarding rise time and overshoot for step inputs, peak magnification and bandwidth for sinusoidal inputs and steady state error for ramp inputs. Although these quantities are interdependent, their interrelationships are not always easy to determine and such abbreviated descriptions of one response do not adequately define the others. Thus no such optimum adjustment will be universally applicable because it will be based upon the criterion used to define optimum control action, which depends upon the special

requirement of each system.

Various performance criteria have been suggested which take account of the complete response to a step function input. In many instances, however, other criteria are of equal importance. The frequency bandwidth will determine the system's ability to cope with randomly varying inputs and the steady state following error with a ramp function input can be critical.

For the servo-system under investigation the adjustable parameters are the forward path gain and the output velocity feedback coefficient. Transient response criteria are applied to the system together with a bandwidth criterion, which takes an account of the steady state error as well as the frequency response [8]. These criteria applied to the system together with certain practical constraints lead to the definition of the best possible adjusted system [8].

#### System Description

The experimental system consisted of a size 18 D.C. motor driven by a transistor power amplifier. A laboratory type electromechanical servomechanism was chosen for convenience, but the electrical and mechanical time constants were modified to give more realistic figures for larger power systems and thereby extend the relevance of the investigations.

The closed loop transfer function of the system is given by

$$\frac{\theta_o}{\theta_1} = \frac{K_v}{K_v + (0.46 + K_1 K_v)s + 2.84 \times 10^{-2} s^2 + 1.86 \times 10^{-4} s^3} \quad (7)$$

where  $K_v$  is the voltage gain in the forward path of the loop and  $K_1$  is the output velocity feedback coefficient.

Certain practical constraints are considered when applying performance criteria to the system. Practical limit to the voltage gain was considered and a limit to the ratio of the steady state following error to input velocity of 0.025 sec was used. Application of various performance criteria together with the practical constraints defines the best possible system as having the following gains (8)



$$K_V = 40$$

$$K_1 = 13.5 \times 10^{-3} \text{ sec} \quad (8)$$

A system adjusted to the above values has a maximum bandwidth based on a -9db limit. Bandwidth is defined as the frequency range over which the closed loop amplitude ratio is not less than a defined value providing that the peak magnification does not exceed an equal corresponding value.

The Thyristor Controlled system is similar to the conventional linearly controlled system except that the amplifier is replaced by the thyristor controller. A reversible drive single-phase full-wave controlled rectifier circuit is used. Full details of the rectifier circuit and the thyristor firing logic are given in reference [7].

A specially built electronic block was devised for use as the basic discontinuous control switching circuit. This circuit is shown in Fig.1 and incorporates OR and AND diode logic, Schmitt triggers and six diode gates. Suitably amplified electrical signals  $X(t)$  and  $Y(t)$  fed to the circuit result in an output signal  $Z(t)$

$$Z(t) = \beta X(t) \text{ Sgn}(X.Y.)$$

Full details of the circuits used are given in reference [7].

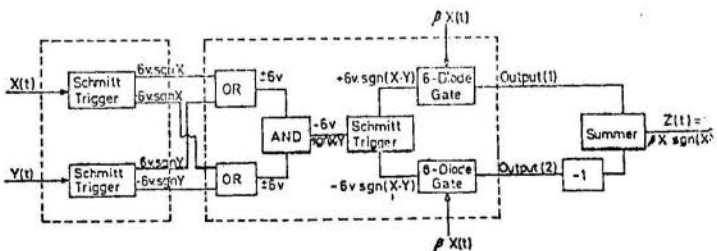


Fig.1 Building block circuits

The equation representing the discontinuous control system is given by

$$\begin{aligned} & \frac{1.86 \times 10^{-4}}{K_V} \overset{\dots}{\theta}_o + \frac{2.84 \times 10^{-2}}{K_V} \overset{\dots}{\theta}_o + \frac{1}{K_V} (0.46 + K_1 K_V) \overset{\cdot}{\theta}_o + \theta_o \\ & = \theta_i + a_{02} \operatorname{sgn}(\theta_o \theta) + a_{03} \operatorname{sgn}(\theta_o \overset{\cdot}{\theta}) \theta_o \\ & \quad + a_{12} \operatorname{sgn}(\overset{\cdot}{\theta}_o \theta) + a_{13} \operatorname{sgn}(\overset{\cdot}{\theta}_o \overset{\cdot}{\theta}) \overset{\cdot}{\theta}_o \end{aligned} \quad (9)$$

#### Experimental Procedure

The system was set up having the optimum values of the forward path gain and output velocity feedback coefficient. The variable parameters ( $a_{02}$ ,  $a_{03}$ ,  $a_{12}$  and  $a_{13}$ ) were set to zero and low frequency harmonic input was applied. The parameter terms were then adjusted sequentially until a minimum size error was obtained. It was found that a large number of different combinations of parameter values produced nearly the same minimum error. This has been observed also by other authors who carried out previous investigations [4];[5]. A step input was applied and the system response monitored. It was found that when the variable parameter values were chosen for best harmonic response a poor transient response was obtained, and that this was frequently the case when

$$\begin{aligned} & a_{03} > a_{02} \\ \text{and} \\ & a_{13} > a_{12} \end{aligned} \quad (10)$$

The transient response could be improved if the above conditions were not satisfied, or if at least one of them was not satisfied. As a compromise, the parameter values were chosen to satisfy one condition of equation (10), thus giving a good harmonic as well as transient response.

#### Performance Criteria Measurement

Three transient response criteria, the integral of square

error (ISE); the integral of time squared error (ITSE) and the integral of time absolute value of error (ITAE), are used to assess the performance of the basic system (i.e. without discontinuous control) and to compare it with that of the discontinuous controlled system. The bandwidth criterion was measured for the harmonic response of both systems.

### Experimental Results and Discussion

Figure 2 shows the closed loop harmonic response curve for the conventional electromechanical system without and with discontinuous control. The discontinuous control system shows that the phase lag is considerably reduced and the amplitude ratio is closer to unity for frequencies below 5 Hz. The basic thyristor controlled electromechanical system shows a similar but not identical performance to that of the conventional electromechanical system as a result of the finite time delay introduced by the thyristor controller.

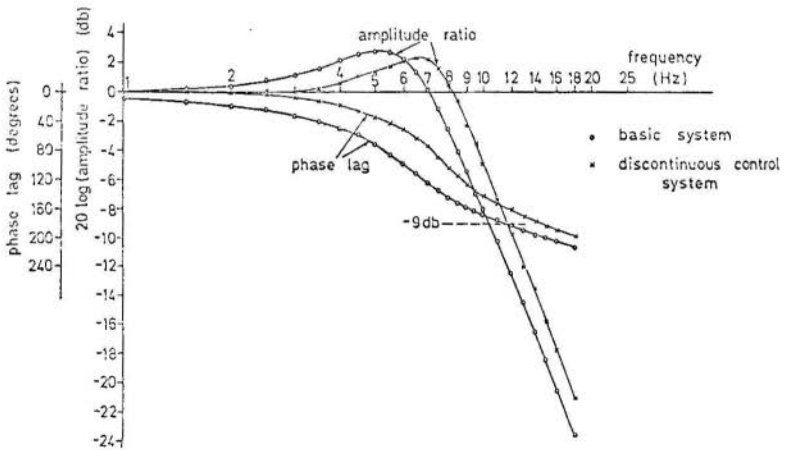


Fig. 2 Closed loop frequency response for the electromechanical servomechanism.

Figures 3 and 4 shows the results obtained when applying a triangular signal to the three systems. Twice the steady state error is

shown as a function of the frequency of the input signal. As shown in the figures, the steady state error is greatly reduced using discontinuous control.

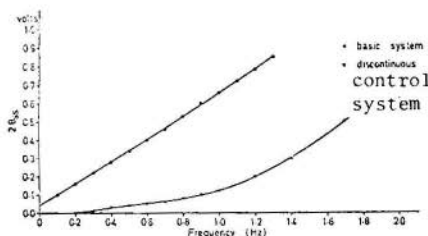


Fig. 3. Electromechanical servomechanism ramp test—  
Plot of  $2\theta_s$  against  $1-2\omega$  input

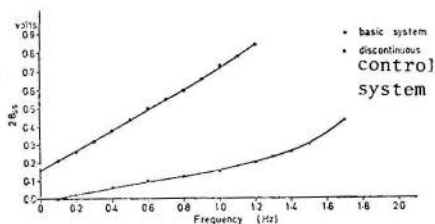
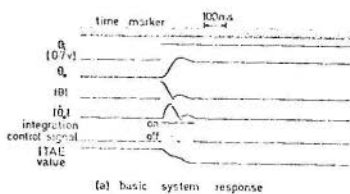
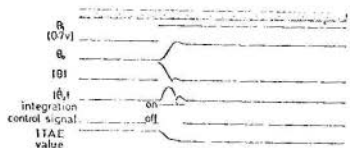


Fig. 4. Thyristor controlled electromechanical servomechanism ramp test—  
Plot of  $2\theta_s$  against  $1-2\omega$  input

A typical step response for a system without and with discontinuous control is shown in Figure 5. Figure 6 shows a summary of the improvements in the three step response criteria that can be obtained with discontinuous control.



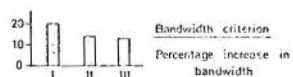
(a) basic system response



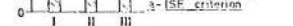
(b) discontinuous control system response

(same scales used for both records)

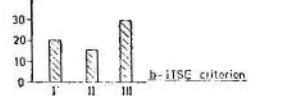
Fig. 5. Electromechanical servomechanism step response—  
Criterion ITAE measurement



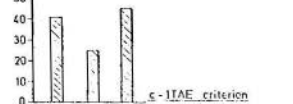
Step response criteria  
Percentage decrease in  
criteria values



a-ISE criterion



b-ITAE criterion



c-ITAE criterion

- I - Analogue simulated system  
II - Conventional linearly controlled electromechanical servomechanism  
III - Thyristor controlled electromechanical servomechanism

Fig. 6. Results chart showing improvements in systems  
performance using the discontinuous control strategy

For the discontinuous control systems it was generally found that the output velocity feedback coefficient could be varied considerably without upsetting the system. In contrast the basic system performance varied considerably with the output velocity coefficient. This demonstrates a further advantage of discontinuous control.

### Conclusion

Results have been obtained which enable the advantages of discontinuous control to be assessed for both types of system.

The improvements obtained in bandwidth and three transient response criteria are clearly shown in Figure 6. What is not shown in the figure is the dramatic improvement that can be obtained in the steady state following error with a ramp function input. It would not be proper to attempt to demonstrate this in a similar way because, unlike the linear system, the discontinuous control system no longer gives a steady state error which is directly proportional to ramp velocity. Another important result obtained with discontinuous control is that the output velocity feedback coefficient can be varied considerably without upsetting the system.

Investigations of the system response with discontinuous control showed that if the variable parameters are chosen for excellent harmonic response a poor transient response results and a different set of the variable parameters has to be used for the best step response. It is possible to find the most suitable set of parameters for each type of input applied. To obtain the maximum benefit from the discontinuous control strategy, input prediction could be used to decide which set of parameters is to be employed. Thus an adaptive, discontinuous control strategy could be developed.

Perhaps the most obvious application of discontinuous control would be in situations, such as machine tool drives, where it is difficult to achieve the required performance from conventional electromechanical servosystems and yet the much higher performance associated with hydraulic systems is not necessary. The use of the discontinuous strategy in such cases will enable the performance 'gap' to be bridged with the less expensive and more easily serviceable electromechanical system.

References

- [1] Flugge-Lotz, I., Discontinuous Automatic Control. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.
- [2] Flugge-Lotz, I., and Wunch, W.S., On a Nonlinear Transfer System. Journal App. Physics, Vol. 26, No. 4, 1955. pp 484-488.
- [3] Flugge-Lotz, I., Taylor, C.F. and Lindbergh, H.E., Investigation of a Nonlinear Control System. NACA Report No. 1391, Stanford University, 1958.
- [4] Lambert, T.H., Davies, R.M. and Joby, M.J., Experimental Study of Control Systems with Discontinuous Parameter Variation. Proc. I.E.E., Vol. 116, No. 10, 1969, pp 1759-1763.
- [5] Davies, R.M., Lambert, T.H., and Joby, M.J., The Reduction of Dynamic Error by means of Discontinuous Parameter Variation. 4th Congress of International Fedr of Automatic Control, Warsaw, June, Technical Session No. 11.
- [6] West, J.C., Analytical Techniques for Nonlinear Control Systems. English Universities Press, 1960.
- [7] Elias, N.R., Discontinuous Control of Electromechanical Servomechanisms. Ph.D. Thesis, University of London, 1972.
- [8] Lambert, T.H. Elias, N.R., The relationship between transient and steady state performance criteria for control systems. Journal of Inst. of Measurement & Control, 10 (1977) 223-28.

LAMBERT, T.H. e ELIAS, N.R.

THE APPLICATION OF A DISCONTINUOUS CONTROL  
STRATEGY TO AN ELECTROMECHANICAL SERVOMECHANISM

Resume

Cet article décrit l'application d'un système de contrôle discontinu a un servomécanisme électromécanique. On compare les caractéristiques d'un système de ce type a celles d'un système a contrôle linéaire utilisant le même nombre de paramètres d'information. On montre que des améliorations notables des caractéristiques de fonctionnement obtenues sont possibles tant en régime transitoire qu'en régime continue et qu'un système de contrôle discontinu peut être utilise pour franchir la barrière séparant les performances des systèmes de contrôle électromécaniques et hydrauliques.

---

Summary

The application of a discontinuous control strategy to an electromechanical servomechanism is described. The performance of such a system is compared with that which can be obtained from a linearly controlled system using the same amount of parameter information. It is shown that significant improvements can be obtained in both transient and steady state performance criteria, and that a discontinuous control strategy may be used to bridge the performance gap between electromechanical and hydraulic control systems.

---

**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 19**

PP. 1367 - 1377



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

ÓTIMO "OVER-LAP" PARA MÁXIMA SENSIBILIDADE DE PRESSÃO EM  
SERVO-VÁLVULAS HIDRÁULICAS DO TIPO CARRETEL

Francisco Emílio Baccaro NIGRO,  
Divisão de Engenharia Mecânica,  
Instituto de Pesquisas Tecnológicas,  
São Paulo, São Paulo, Brasil.

Al B. STRONG,  
Department of Mechanical Engineering,  
University of Waterloo,  
Waterloo, Ontario, Canada.

Saip A. ALPAY,  
Department of Mechanical Engineering,  
University of Waterloo,  
Waterloo, Ontario, Canada.



## 1. Introdução

O uso de válvulas hidráulicas em sistemas de controle, requer o conhecimento das curvas pressão-vazão para as mesmas.

A Figura 1 mostra uma vista esquemática de uma válvula de quatro vias, tipo carretel, controlando uma carga genérica e alimentada por uma fonte de pressão constante.

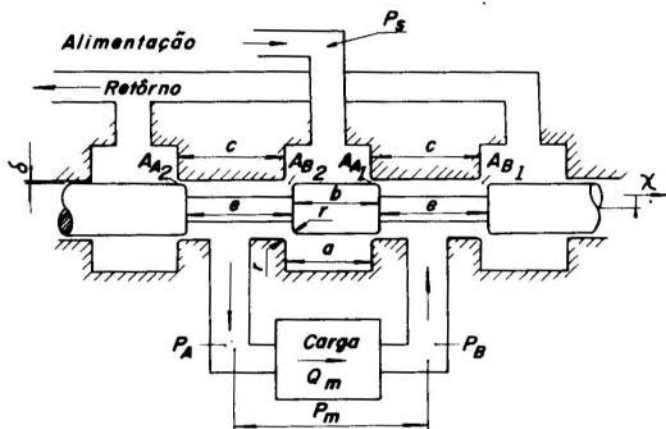


FIG. 1 - Vista Esquemática de Válvula Hidráulica

Uma relação envolvendo a perda de pressão na carga ( $P_m$ ), a vazão através da mesma ( $Q_m$ ), o deslocamento do carretel ( $x$ ), e as demais quantidades assumidas conhecidas, caracteriza uma válvula completamente. A equação (1) representa uma relação desse tipo.

$$f(P_m, Q_m, x) = 0 \quad (1)$$

Essas realizações são de um modo geral não lineares e uma linearização leva às quantidades [1]:

$$\text{Sensibilidade de pressão} \quad K_p \equiv \left. \frac{\partial P_m}{\partial x} \right|_{Q_m = \text{const.}} \quad (2)$$

$$\text{ganho de vazão} \quad K_q \equiv \frac{\partial Q_m}{\partial \chi} \Big|_{P_m = \text{const.}} \quad (3)$$

$$\text{e coeficiente vazão-pressão} \quad K_c \equiv - \frac{\partial Q_m}{\partial P_m} \Big|_{\chi = \text{const.}} \quad (4)$$

As quantidades  $K_p$ ,  $K_q$  e  $K_c$  são denominados coeficientes diferenciais da válvula hidráulica e variam com o ponto de operação. Uma vez que o ponto de funcionamento mais importante é a origem das curvas pressão-vazão, isto é,  $P_m = Q_m = \chi = 0$ , a análise dos coeficientes diferenciais será feita em torno desse ponto.

As características dinâmicas de sistemas hidráulicos controlados por servo-válvulas depende muito dos coeficientes diferenciais. O ganho de vazão está diretamente ligado ao ganho da malha aberta, enquanto que o coeficiente de vazão-pressão está relacionado à razão de amortecimento do sistema de controle. O valor da sensibilidade de pressão, por sua vez, é uma medida da habilidade de combinações válvula-motor de posicionar precisamente cargas com grande inércia e atrito elevado, e esse valor depende muito da precisão de ajuste da servo-válvula. Quanto maior o valor de  $K_p$  melhor a qualidade da válvula.

Durante a fabricação de servo-válvulas, a folga radial  $\delta$  é mantida, usualmente, a menor possível e os cantos dos estrangulamentos os mais vivos possíveis. No caso ideal de  $\delta = 0$  e  $r = 0$ , o valor máximo da sensibilidade de pressão é obtido quando  $a = b$  e  $c = e$  (Fig. 1). Neste caso, o valor teórico de  $K_p$  é infinito [2]. Na prática é possível obter-se valores de  $K_p$  da ordem de  $10^5 \text{ kgf/cm}^3$  para pressões de  $200 \text{ kgf/cm}^2$ , em válvulas novas e fabricadas cuidadosamente para terem cantos vivos. No entanto, o desgaste das arestas dos estrangulamentos provoca um decréscimo da sensibilidade de pressão, o que pode prejudicar o desempenho do sistema [3]. Não é difícil de se notar que a condição  $a=b$  e  $c=e$  (Fig. 1) não leva, de modo geral, à máxima sensibilidade de pressão quando  $\delta$  e  $r$  são diferentes de zero. Neste estudo, analisa-se os coeficientes diferenciais para servo-válvulas de quatro vias, levando-se em conta o

arredondamento das arestas e a folga radial entre o carretel e sua sede, e determina-se a condição de recobrimento ótimo para máxima sensibilidade de pressão.

## 2. Cálculo dos coeficientes diferenciais para servo-válvulas

Considere-se o esquema da Figura 1 e sejam:

A = Área de passagem dos estrangulamentos

$\bar{A}$  = Abertura dos estrangulamentos  $\bar{A} = \frac{A}{w}$

a, b, c, e = Dimensões mostradas na Figura 1

$C_q$  = Coeficiente de vazão para os orifícios  $C_q = \frac{Q}{A\sqrt{2 \cdot P/\rho}}$

$K_c$  = Coeficiente de vazão-pressão

$K_p$  = Sensibilidade de pressão

$K_q$  = Ganho de vazão

P = Pressão

Q = Vazão

$R_e$  = Número de Reynolds do escoamento  $R_e = \frac{2 \cdot Q}{w \cdot \nu}$

r = Raio das arestas dos estrangulamentos

w = Comprimento circunferencial das portas

$\delta$  = Folga radial entre o carretel e sua sede

$\nu$  = Viscosidade cinemática do fluido

$\rho$  = Densidade do fluido

x = Deslocamento do carretel, tomado como zero para o carretel posicionado simetricamente na sua sede

$x_0$  = "Under-lap" inicial

### Índices

A, A1, A2 - Relativo ao lado A da carga

B, B1, B2 - Relativo ao lado B da carga

m - Relativo à carga (motor)

S - Relativo à alimentação

o - Relativo à origem das curvas pressão-vazão.

A análise dos coeficientes diferenciais apresentada neste estudo baseia-se nas seguintes hipóteses:

- i) O fluido é incompressível e viscoso
- ii) A pressão de alimentação é mantida constante
- iii) A geometria da válvula é a mostrada na Figura 1, onde o desgaste das arestas é levado em conta pelo raio  $r$

e a quantidade de "under-lap" ( $\chi_0$ ) é a mesma para todas as portas

iv) O sistema está em regime permanente.

A discussão da validade destas hipóteses é apresentada em [4]. Neste caso, o "under-lap" inicial é:

$$\chi_0 = (a-b)/2 = (e-c)/2 \quad (5)$$

Aplicando a equação da continuidade às duas câmaras da válvula, usando as condições de simetria e lembrando as hipóteses (i) e (iv) obtêm-se:

$$Q_{A1} = Q_{A2} = Q_A = C_{qA} \cdot A_A \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot P_A}{\rho}} \quad (6)$$

$$Q_{B1} = Q_{B2} = Q_B = C_{qB} \cdot A_B \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot P_B}{\rho}} \quad (7)$$

$$Q_m = Q_B - Q_A \quad (8)$$

$$P_S = P_A + P_B \quad (9)$$

$$P_m = P_A - P_B \quad (10)$$

onde os coeficientes de vazão são dados por:

$$C_{qA} = f\left(\frac{\chi_0 - \chi}{\delta}, \frac{r}{\delta}, \frac{A_A}{v} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot P_A}{\rho}}\right) \quad (11)$$

$$C_{qB} = f\left(\frac{\chi_0 + \chi}{\delta}, \frac{r}{\delta}, \frac{A_B}{v} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot P_B}{\rho}}\right) \quad (12)$$

O conjunto das equações (6) a (12) caracteriza a operação de uma servo-válvula com cantos arredondados. Estas equações são utilizadas para determinar os coeficientes diferenciais para a válvula em torno da origem das curvas vazão-pressão. Neste caso, após várias transformações algébricas e algumas derivações [4] chega-se a:

$$K_{po} = \frac{2 \cdot P_S}{\delta} \cdot \left[ \frac{1}{A/\delta} \cdot \frac{\partial(\bar{A}/\delta)}{\partial(\chi/\delta)} + \frac{1}{C_q} \cdot \frac{\partial C_q}{\partial(\chi/\delta)} \right]_{R_e = \text{const.}} \quad (13)$$

$$K_{co} = \frac{\delta \cdot w}{\sqrt{P_S \cdot \rho}} \cdot \left(\frac{\bar{A}}{\delta}\right) \cdot \left( \frac{C_q}{1 - \frac{R_e}{C_q} \frac{\partial C_q}{\partial R_e}} \right)_{\chi=0} \quad (14)$$

$$K_{qo} = 2 \cdot \sqrt{\frac{P_S}{\rho}} \cdot w \cdot \left(\frac{\bar{A}}{\delta}\right) \cdot \left[ \frac{1}{(A/\delta)} \cdot \frac{\partial(\bar{A}/\delta)}{\partial(\chi/\delta)} + \frac{1}{C_q} \cdot \frac{\partial C_q}{\partial(\chi/\delta)} \right]_{R_e = \text{const.}} \cdot \left( \frac{C_q}{1 - \frac{R_e}{C_q} \frac{\partial C_q}{\partial R_e}} \right)_{\chi=0} \quad (15)$$

onde o índice  $\underline{o}$  representa a origem das curvas pressão-vazão,  $w$  é o perímetro de passagem das portas das válvulas,  $\bar{A}$  é a abertura de passagem com o carretel centrado na sua sede, e  $C_q$  é o coeficiente de vazão para qualquer dos estrangulamentos individuais em torno da origem.

As equações (13) a (15) permitem, respectivamente, o cálculo da sensibilidade de pressão, coeficiente de vazão-pressão e ganho de vazão desde que se conheçam: a variação de  $C_q$  com  $(\chi/\delta)$  a Reynolds constante; variação de  $C_q$  com o número de Reynolds para abertura fixa; além da geometria da válvula, o valor do coeficiente de vazão, a pressão de alimentação e a massa específica do fluido.

A abertura de passagem para a geometria mostrada na Figura 1 pode ser escrita como:

$$\frac{\bar{A}}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{\chi_o}{\delta} + \frac{\chi}{\delta} + \frac{2r}{\delta}\right)^2 + \left(1 + \frac{2r}{\delta}\right)^2} - \frac{2 \cdot r}{\delta} \text{ para } \chi_o + \chi + 2r \geq 0 \text{ e} \quad (16)$$

$$\frac{\bar{A}}{\delta} = 1 \text{ para } \chi_o + \chi + 2r < 0$$

de onde calcula-se os termos correspondentes das equações.

Os termos envolvendo o coeficiente de vazão foram calculados por um dos autores [4], que obteve soluções, tanto para o escoamento ideal, quanto para o viscoso através dos estrangulamentos com cantos arredondados. O escoamento do fluido

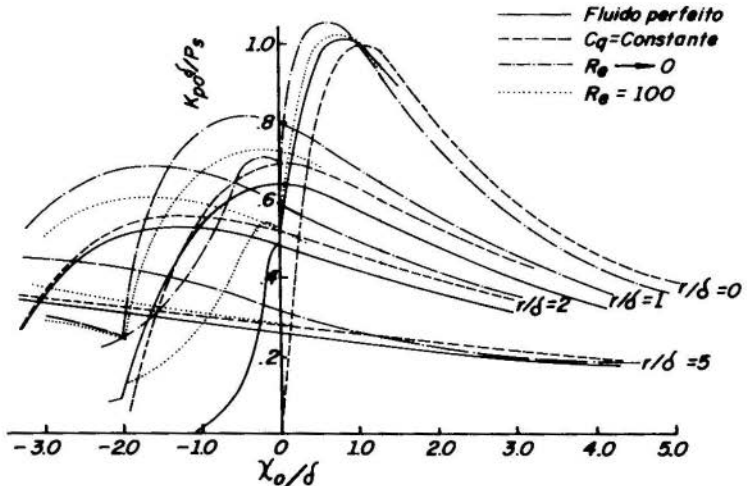


FIG.2 - Sensibilidade de Pressão para Servo-Válvulas com Arestas Arredondadas

perfeito foi resolvido por meio de transformações conformes, enquanto que para o escoamento viscoso obteve-se uma solução numérica usando-se diferenças finitas.

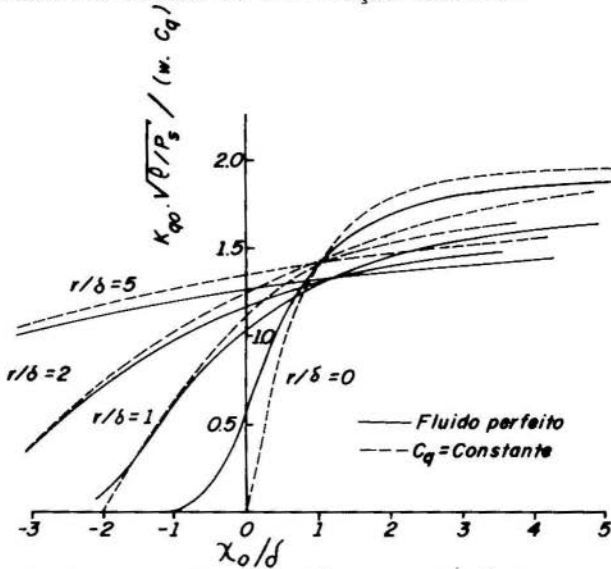


FIG. 3 - Ganho de Vazão para Válvulas Hidráulicas

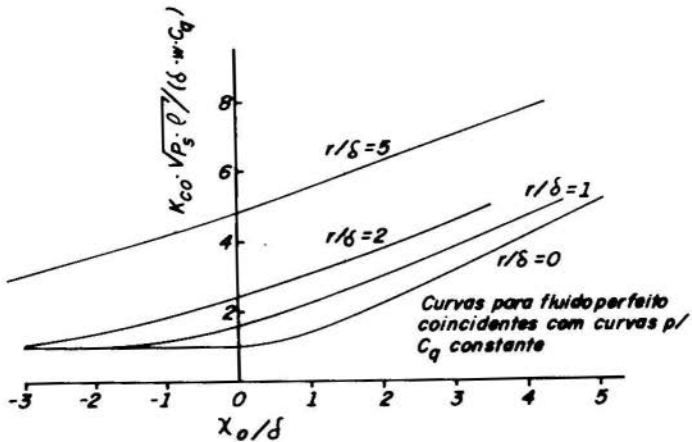


FIG. 4 - Coeficiente Vazão-Pressão para Válvulas Hidráulicas

As Figuras 2 a 4 mostram a variação dos coeficientes diferenciais da válvula, (calculados conforme as equações (13) a (15)), com a quantidade de "under-lap" para diferentes valores de arredondamento das arestas. Vale a pena notar a variação da sensibilidade de pressão com o raio das arestas, o que ilustra uma possível deterioração do desempenho da válvula com o tempo de utilização. Além disso, deve-se notar que válvulas com um ligeiro recobrimento tem seu desempenho menos afetado pelo desgaste das arestas.

### 3. "Over" ou "Under-lap" ótimo para máxima sensibilidade de pressão

Pode-se notar na Figura 2 que a sensibilidade de pressão, para um dado raio de arredondamento, passa por um valor máximo para uma certa quantidade de recobrimento. Do ponto de vista da fabricação de servo-válvulas, essa condição de recobrimento leva à máxima sensibilidade de pressão, desde que se conheça esse raio. O arredondamento das arestas em válvulas novas depende de uma série de fatores relacionados à fabricação e deve ser determinado experimentalmente. O desgaste das arestas, após um certo tempo de uso, depende da aplicação específica, podendo também ser determinado experimentalmente. Um dos autores [4], determinou o arredondamento das arestas em várias válvulas

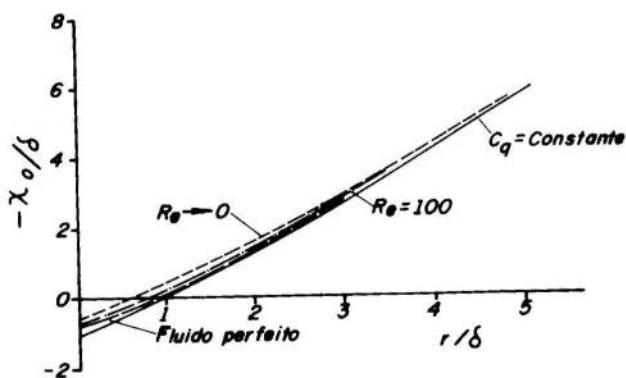


FIG. 5 - Recobrimento Ótimo para Máxima Sensibilidade de Pressão em Servo-Válvulas, com Arestas Arredondadas

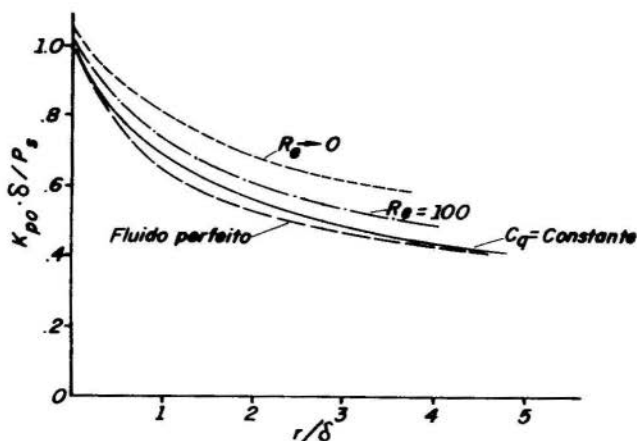


FIG. 6 - Máxima Sensibilidade de Pressão para Servo-Válvulas de Quatro Vias Tipo Carretel

novas e usadas, por meio de impressões obtidas em folhas de chumbo [5], e os valores de  $r$  variaram desde  $3\mu\text{m}$  em válvulas novas até  $30\mu\text{m}$  em válvulas de copiadores hidráulicos com vários anos de uso. As Figuras 5 e 6 mostram, respectivamente, a quantidade ótima de recobrimento e o valor máximo da sensibilidade de pressão em torno da origem, como função do raio normalizado das arestas, para várias condições de escoamento. As curvas de ambas as figuras foram obtidas graficamente a partir das curvas de sensibilidade de pressão.

#### 4. Conclusões

A análise dos coeficientes diferenciais para válvulas hidráulicas permite as seguintes conclusões:

- Servo-válvulas do tipo carretel com um ligeiro grau de recobrimento são menos sujeitas à redução da sensibilidade de pressão, causada pelo desgaste das arestas, do que válvulas com recobrimento zero ou negativo.
- Quando se considera o uso de servo-válvulas por um período suficientemente longo, pode-se afirmar que: válvulas com arestas ligeiramente arredondadas, e um reco



brimento adequado, podem apresentar, à longo prazo, sensibilidade de pressão maior que válvulas que inicialmente possuíam cantos vivos.

- c) Os resultados da análise dos coeficientes diferenciais, combinados com o conhecimento da razão de desgaste das arestas em aplicações particulares, pode levar ao desenvolvimento de válvulas hidráulicas com desempenho melhorado, e que são muito menos afetados pelo desgaste das arestas.

#### 5. Agradecimentos

Um dos autores, F. E. B. Nigro, agradece o suporte do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, à Escola Politécnica da USP e à FAPESP-Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

#### Bibliografia

- [1] Blackburn, J. F., Reethof, G. and Shearer, J.L.; "Fluid Power Control", M.I.T. Press (1960).
- [2] Merrit, H.E., "Hydraulic Control Systems", John Wiley & Sons, Inc.- (1968).
- [3] Viersma, T.J., "Designing Load-Compensated Fast Response Hydraulic Servos", Control Eng., May 1962.
- [4] Nigro, F.E.B. "Flow Through Round-Edged-Spool-Valve Constrictions and Orifice Plates:- Numerical Solution of the Viscous Flow in "Natural" Coordinates and Conformal Mapping Solution of the Inviscid Flow". Tese de Doutorado apresentada à University of Waterloo, (1977).
- [5] Crockett, K.A., and Upp, E.L., "The Measurement and Effects of Edge Sharpness on Flow Coefficients of Standard Orifices", Journal of Fluids Engineering, ASME, June 1973, pp.271-274.

NIGRO, F.E.B., STRONG, A.B., ALPAY, S.A.

ÓTIMO "OVER-LAP" PARA MÁXIMA SENSIBILIDADE DE PRESSÃO EM SERVO-VÁLVULAS HIDRÁULICAS DO TIPO CARRETEL

Sumário

Os coeficientes diferenciais para válvulas hidráulicas a saber, sensibilidade de pressão, ganho de vazão e coeficiente de vazão-pressão, são analisados para servoválvulas de quatro vias, levando em conta o arredondamento das arestas dos estrangulamentos e a folga radial entre o carretel e sua sede. Baseando-se nos resultados dessa análise, mostra-se que a máxima sensibilidade de pressão não é obtida por válvulas de centro crítico, mas sim por válvulas com uma quantidade ótima de recobrimento.

---

OPTIMUM OVER-LAP FOR MAXIMUM PRESSURE SENSITIVITY

IN HYDRAULIC SPOOL VALVES

The valve differential coefficients, namely, pressure sensitivity, flow-pressure coefficient and flow gain, are analysed around the null operating condition of four-way spool valves, taking into account the possible edge-rounding and the radial clearance between spool and sleeve. Based on the results of this analysis, it is shown that maximum pressure sensitivity is usually not attainable by zero-lapped valves but by valves with an optimum amount of overlap.

**A N A I S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 20**

PP. 1379 - 1388



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADO E MODULAÇÃO EM LARGURA

DE PULSO DE SERVOMECANISMO ELETROHIDRÁULICO

Celso Pascoli **BOTTURA**, Professor Adjunto

Yaro **BURIAN JUNIOR**, Professor Titular

Álvaro Geraldo Badan **PALHARES**, Professor Assistente

FEC - UNICAMP

1. Introdução

O controle por modulação em largura de pulso, particularmente quando grandes potências estão envolvidas tem sido muito utilizado dada a sua grande eficiência e redução de efeitos de não-linearidades [3,4,5,6].

Nêste trabalho propõe-se uma solução para controle de servomecanismo eletrohidráulico utilizando modulação em largura de pulso com amostragem natural e realimentação de estado; faz-se a análise do sistema proposto com o objetivo principal de estudar sua estabilidade e mos

tra-se, dêste ponto de vista, a superioridade da solução proposta quando comparada com a solução usando realimentação de saída [1].

Para a análise dêste sistema pulsado não linear utiliza-se o método das transformações pontuais [2] e se obtém como modelo uma equação de estado recorrente não linear e implícita.

## 2. Controle por Realimentação de Estado

O sistema de controle de posição eletrohidráulico com modulação em largura de pulso, amostragem natural e realimentação de estado pode ser representado pelo diagrama da Fig. 1.

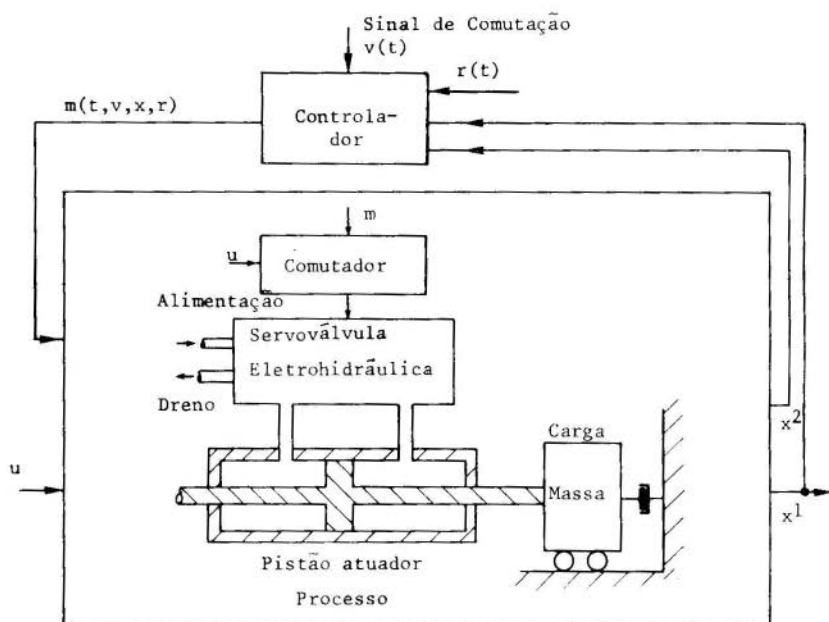


Fig. 1 - Sistema de Controle.

Supomos que o processo contituído por uma servoválvula, atuador e carga tem o seguinte modelo simplificado normalizado:

$$\ddot{y}(t) + \lambda \dot{y}(t) = \lambda^2 u(t)$$

onde  $u$  é o sinal de entrada no processo,  $y$  é a posição da carga e  $\lambda$  é um parâmetro constante por hipótese.

Tomando como variáveis de estado:

$$\begin{aligned}x^1(t) &= y(t) \\ \lambda x^2(t) &= \dot{y}(t)\end{aligned}$$

obtém-se a equação de estado

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t) \quad (1)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor de estado de processo.}$$

O sinal de comutação é um dente de serra de período unitário constante

$$v(t) = a(1-2t), \quad n < t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O sinal de controle  $m$  é dado por

$$m(t, v, r, X) = v(t) + r(t) - K^T X(t)$$

onde  $r(t)$  é o sinal de entrada de referência de posição e  $K$  é um vetor de constantes  $K = [K_1, K_2]^T$  de realimentação de estado.

O sinal de entrada no processo é

$$u(t) = f(m) = \begin{cases} 1 & \text{para } m > 0 \\ -1 & \text{para } m < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = f(m) = f[v(t) + r(t) - K^T X(t)] \quad (2)$$

De (1) e (2) tem-se a equação diferencial não linear para o sistema

$$\dot{X} = AX(t) + bf[v(t) + r(t) - K^T X(t)]$$

A matriz de transição e a equação de transição de estado do processo são respectivamente

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\exp(-\lambda t) \\ 0 & \exp(-\lambda t) \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \phi(t-t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-z) bu(z) dz$$

onde  $X(t_0)$  é o vetor de estado do processo no instante inicial  $t_0$ .

Para o tempo normalizado  $t \in [n, n+1]$  e  $\theta_n$ , a largura normalizada do  $n$ -ésimo pulso positivo, tal que

$$u(t) = 1 \quad \text{se } t \in [n, n + \theta_n)$$

$$u(t) = -1 \quad \text{se } t \in [n + \theta_n, n + 1)$$

determinamos, através de uma transformação pontual, a recorrência associada ao processo; para o sistema de controle com realimentação de estado e modulação em largura de pulso, usando a condição de que a comutação ocorre em  $t = n + \theta_n$ , quando  $m = 0$ , e os fatos de  $\lambda$  ser finito e de  $X(t)$  ser contínuo na região de comutação, obtém-se a seguinte equação recorrente não linear implícita de estado:

$$X_{n+1} = \phi(1) X_n + H(\theta_n) \quad (3.a)$$

$$r_{n+\theta_n} - K^T [\phi(\theta_n) X_n + C(\theta_n)] + a(1-2\theta_n) = 0 \quad (3.b)$$

onde

$$\phi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix} \quad (3.c)$$

$$H(\theta_n) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda + 2\lambda\theta_n - \exp(-\lambda) - 2 \exp[-\lambda(1-\theta_n)] \\ -1 - \exp(-\lambda) + 2 \exp[-\lambda(1-\theta_n)] \end{bmatrix} \quad (3.d)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \quad (3.e)$$

$$\phi(\theta_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda\theta_n) \\ 0 & \exp(-\lambda\theta_n) \end{bmatrix} \quad (3.f)$$

$$C(\theta_n) = \begin{bmatrix} \lambda\theta_n - 1 + \exp(-\lambda\theta_n) \\ 1 - \exp(-\lambda\theta_n) \end{bmatrix} \quad (3.g)$$

$$0 < \theta_n < 1 \quad (3.h)$$

com  $r_{n+\theta_n} = r(n+\theta_n)$

### 3. Ponto de Equilíbrio

Para determinar um ponto de equilíbrio basta impor a condição de ponto duplo à recorrência (3):

$$X_p = \begin{bmatrix} x_p^1 \\ x_p^2 \end{bmatrix}^T = X_{n+1} = X_n ;$$

com isto obtém-se

$$[I - \phi(1)]X_n = H(\theta_n)$$

Como  $[I - \theta(1)]$  é singular, conclue-se que para a solução de equilíbrio o sinal  $u(t)$  será uma onda quadrada de amplitude uniforme, com a largura de pulso normalizada em regime permanente dada por:

$$\theta_p = \frac{1}{2}$$

identicamente ao resultado obtido em [1], para o caso de realimentação de saída.

Restringindo a análise para o caso de entrada de referência cons

tante, obtêm-se para o ponto duplo o vetor:

$$X_p = \begin{bmatrix} r - \frac{\lambda}{2} + (2 - \lambda \frac{K_2}{K_1}) \operatorname{tgh}(\frac{\lambda}{4}) \\ -\operatorname{tgh}(\frac{\lambda}{4}) \end{bmatrix}$$

#### 4. Estabilidade Local

De (3) tem-se que

$$\theta_n = g(X_n)$$

para pequenas perturbações

$$\delta_n = \theta_n - \frac{1}{2}$$

$$\delta X_n = X_n - X_p$$

em torno da condição de equilíbrio  $(X_p, \theta_p)$  ter-se-a

$$\theta_n = g(X_p) + \langle \nabla g(X_p), \delta X_n \rangle$$

Pela Linearização de  $H(\theta_n)$  obtêm-se

$$H(\theta_n) = H(\frac{1}{2}) + h\delta_n$$

e então tem-se o modelo linearizado

$$\delta X_{n+1} = \phi(1)\delta X_n + h\delta_n$$

que pode ser escrito como

$$\delta X_{n+1} = \phi(1)\delta X_n + h\langle \nabla g(X_p), \delta X_n \rangle$$

donde tem-se a equação recorrente de estado explícita

$$\delta X_{n+1} = A_r \delta X_n$$



onde a matriz quadrada  $A_r = [a_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2$  tem como elementos

$$a_{11} = 1 + \frac{2\lambda K_1}{M} [1 - \exp(-\frac{\lambda}{2})] ,$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) + \frac{2\lambda}{M} [1 - \exp(-\frac{\lambda}{2})] \left\{ K_1 [1 - \exp(-\frac{\lambda}{2})] + K_2 \exp(-\frac{\lambda}{2}) \right\} ,$$

$$a_{21} = \frac{2\lambda K_1}{M} \exp(-\frac{\lambda}{2}) ,$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) + \frac{2\lambda}{M} \exp(-\frac{\lambda}{2}) \left\{ K_1 [1 - \exp(-\frac{\lambda}{2})] + K_2 \exp(-\frac{\lambda}{2}) \right\}$$

onde

$$M = -2a - \lambda K_1 \operatorname{tgh}(\frac{\lambda}{4}) - \frac{2\lambda K_2 \exp(-\frac{\lambda}{2})}{1 + \exp(-\frac{\lambda}{2})}$$

Para que o ponto de equilíbrio seja localmente estável, tôdas as raízes da equação característica de (4) :

$$\det[A - \mu I] = \mu^2 + P_1 \mu + P_2 = 0$$

onde

$$P_1 = -\operatorname{tr}A$$

$$P_2 = \operatorname{det}A$$

devem ficar no interior do círculo unitário do plano  $\mu$  centrado em sua origem. As fronteiras da região de estabilidade são dadas por:

$$P_2 = 1$$

$$P_2 = -P_1 - 1$$

$$P_2 = P_1$$

e por um procedimento similar ao utilizado em [1], obtêm-se a frontei-

ra de estabilidade no plano  $(\bar{K}_1, \lambda)$ :

$$\bar{K}_1 = \frac{2}{\lambda \left[ \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right]} \left[ 1 + \frac{\lambda \bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{1 + \exp(-\lambda)} \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right] \quad (5)$$

onde  $\bar{K}_1 = \frac{K_1}{a}$  e  $\bar{K}_2 = \frac{K_2}{a}$ . Na Fig.2 plota-se (5) para diferentes valores de  $\bar{K}_2$ .

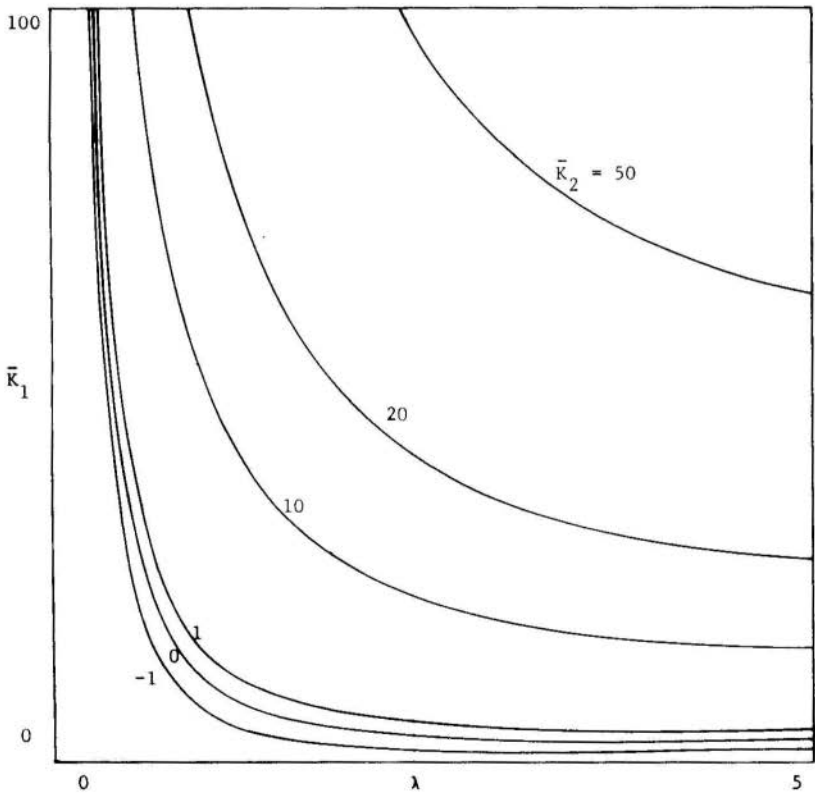


Fig.2 - Fronteiras de Estabilidade

### 5. Conclusão

Nêste trabalho analisamos o controle por modulação em largura de pulsos com amostragem natural e realimentação de estado de um servomecanismo eletrohidráulico e concluímos analiticamente que do ponto de vista de estabilidade local do ponto de equilíbrio, a utilização de realimentação de estado leva a uma solução melhor do que a solução utilizando realimentação de saída e controlador proporcional [1].

Contudo deve ser ressaltado que dada a ordem do sistema, solução equivalente à proposta poderia ser obtida pela utilização de realimentação de saída e controlador proporcional mais derivativo.

Sugere-se a comparação dos desempenhos dos sistemas citados em termos dos seus erros.

### Bibliografia

- [1] Burian, Jr., Y., Bottura, C.P. e Palhares, A.G.B., Controle Pulsado com Modulação em Largura de Pulso de Sistema Eletrohidráulico, Anais do II Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, vol. C, pp. 667-680, Rio de Janeiro, Brasil (1973).
- [2] Andronov, A.A., Vitt, A.A. and Khaikin, S.E., Theory of Oscillators, Pergamon Press (1966).
- [3] Tsai, S.C. and Ukrainetz, P.R., Response Characteristics of Pulsewidth Modulated Electrohydraulic Servo, Journal of Basic Engineering, pp. 204-213 (1970).
- [4] Sawamura, T. Hanafusa, H. and Inui, T., Analyses of an Electrohydraulic Servomechanism, Proceedings of the First Congress of the International Federation of Automatic Control, Moscou (1960).
- [5] Bottura, C.P. and Burian Jr., Y., Stability of Periodic Oscillations in Proportional Control of a Series Motor, Proceedings of the 1977 Joint Automatic Control Conference, pp. 964-969, 22-24 June, San Francisco, California, USA.

BOTTURA, C.P., BURIAN JR., Y. e PALHARES, A.G.B.

CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADO E MODULAÇÃO EM LARGURA

DE PULSO DE SERVOMECANISMO ELETROHIDRÁULICO

Sumário

Nêste trabalho analisa-se um servomecanismo eletrohidráulico utilizando realimentação de estado e modulação em largura de pulso com amostragem natural pelo emprego do método das transformações pontuais. Obtêm-se uma equação de estado recorrente não linear e implícita, bem como estuda-se a estabilidade local.

---

STATE FEEDBACK AND PULSEWIDTH MODULATED CONTROL OF

ELETROHIDRAULIC SERVOMECHANISM

Summary

In this work an electrohydraulic servomechanism using state feedback and pulsewidth modulation with natural sampling is analysed via the method of point transformation. A nonlinear implicit recurrent state equation is obtained, as well as local stability is studied.

# A U A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 21

PP. 1389 - 1398



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

ANÁLISE DE MANOBRA DE NAVIO EM LINHA RETA.

RIOS NETO, A. Prof.Assist.Doutor  
Depto. de Engenharia Mecânica  
Escola Politécnica da Univ. de S.Paulo

MAIZZA NETO, O. Prof.Assist.Doutor  
Depto. de Engenharia Mecânica  
Escola Politécnica da Univ. de S.Paulo

MORO, J. Engenheiro da FDTE.  
Depto. de Engenharia Naval  
Escola Politécnica da Univ. de S.Paulo

1. Introdução

O trabalho analisa o comportamento de um navio em manobras em linha reta com alteração de velocidade em tempo mínimo. Como variáveis de controle são consideradas a injeção de combustível e a razão passo sobre diâmetro do hélice

Utiliza-se um modelo matemático do navio com iteração casco-motor-hélice [1,2] e as conclusões obtidas fundamentam-se na teoria de controle ótimo [3] e considerações do desempenho real do navio. O modelo desenvolvido é aplicado a um navio SD-14 com o motor diesel e hélice de passo variável [1]. Os resultados apresentados neste trabalho são os correspondentes à fase de análise do comportamento dinâmico do navio para o tipo de manobra descrito e têm como objetivo definir procedimentos futuros de síntese com vista ao estabelecimento de controles automáticos para o navio.

## 2. Modelo Matemático do Navio

O modelo matemático do navio é aquele desenvolvido na referência [1,2]. É um modelo generalizado no sentido que o conhecimento das principais características do navio define seu comportamento dinâmico, através de procedimento que não depende do tipo de navio considerado. Assim, para o movimento do navio em linha reta tem-se

$$m \dot{v} = T(1 - \tau) - R_T \quad (2.1)$$

$$I \dot{n} = Q_m - Q_H \quad (2.2)$$

onde  $T$  é a força de empuxo desenvolvida pelo propulsor;  $\tau$  o coeficiente de correção da força propulsora;  $R_T$  a força de resistência a propulsão, resultante de todas as forças que se opõem ao movimento do casco;  $Q_m$  o conjugado motor;  $Q_H$  o conjugado resistente absorvido pelo propulsor;  $m$  e  $I$  a massa e o momento de inércia totais do sistema;  $n$  a rotação do eixo propulsor e  $v$  a velocidade do navio.

Os valores de  $T$  e  $Q_H$  relacionam-se com a rotação e a velocidade através das seguintes relações [1,2],

$$T = K_T \rho n^2 D^4 \quad (2.3)$$

$$Q_H = K_Q \rho n^2 D^5 \quad (2.4)$$

onde  $\rho$  é a densidade da água;  $D$  o diâmetro do hélice;  $K_T$  e

$K_Q$  são obtidos das curvas características do propulsor como função da razão passo-diâmetro ( $P/D$ ) e do coeficiente de avanço,  $J$  ( $J = v(1-\omega)/(nD)$ , onde  $\omega$  é o coeficiente de esteira).

O valor da resistência à propulsão,  $R_T$ , é função da velocidade,  $v$ . Esta dependência é levantada, por exemplo, por ensaio em tanque de provas, obtendo-se os valores de  $R_T$  para diferentes velocidades e provendo-se ao ajuste de uma curva de modo a se ter  $R_T = R_T(v)$ .

O conjugado motor no eixo de saída,  $Q_m$ , é função da quantidade de combustível injetada em cada ciclo,  $W_F$ , e da rotação,  $n$ . Com a informação do tipo de motor e de resultados de ensaios pode-se levantar  $Q_m = Q_m(W_F, n)$ .

Os valores de  $m$  e  $I$  são tomados levando em conta os efeitos de massa hidrodinâmica. A massa é tomada como 110% do deslocamento do navio e para o cálculo do momento de inércia adiciona-se 25% do momento de inércia do propulsor, incluindo-se também o efeito da razão passo sobre diâmetro [1,2].

O modelo previamente discutido foi aplicado a um navio do tipo SD-14, com motor M.A.N. de 8400 BHB a 140 RPM, no qual foi instalado um hélice de passo controlável de 4 pás com razão de área expandida 0,70. Após se ajustar por polinômios aqueles valores em (2.1) e (2.2) fornecidos na forma de tabelas e curvas, resultou um modelo analítico, aproximado, para o movimento do navio em questão, na forma [1],

$$\dot{v} = f_1(v, n, P/D) \quad (2.5)$$

$$\dot{n} = f(v, n, P/D) + g(W_F) \quad (2.6)$$

ou, na forma de um problema de controle, tomando-se

$$x_1 = v, \quad x_2 = n, \quad u_1 = W_F, \quad u_2 = P/D,$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_2) \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \quad (2.8)$$

### 3. Problema de Controle Ótimo

Para o objetivo de manobra em linha reta com alteração de velocidade em tempo mínimo, o controle ótimo do navio resulta como solução do problema colocado a seguir.

$$\text{Minimizar: } IP = t_f \quad (3.1)$$

Sujeito : a) vínculos dinâmicos

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_2) \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2)$$

$$u_{1m} \leq u_1 \leq u_{1M} \quad u_{2m} \leq u_2 \leq u_{2M} \quad (3.3)$$

$$x_{2m} \leq x_2 \leq x_{2M} \quad (3.4)$$

b) vínculos de contorno

$$t_0 = 0, \quad x_1(0) - v_i = 0, \quad x_2(0) - n_i = 0 \quad (3.5)$$

$$x_1(t_f) - v_f = 0 \quad (3.6)$$

Atingida a velocidade  $v_f$  em tempo mínimo  $t_f$ , deve-se regular os controles de modo a manter o movimento em situação de regime correspondente à velocidade  $v_f$ .

A intenção da colocação do problema de controle ótimo não é a de se estabelecer um procedimento de síntese mas sim de se dispor de um elemento a mais de análise. Isto porque para as aplicações em tempo real o tratamento do problema acima se mostra inviável dada a inexistência de soluções analíticas e dada a dependência, numa solução numérica, das particulares condições de contorno.

### 4. Análise do Modelo

A primeira conclusão que resulta da análise do proble



ma de controle para manobra em linha reta em tempo mínimo é que existem duas fases distintas. Na primeira, correspondente as equações (3.1) a (3.6), atinge-se a velocidade final desejada,  $v_f$ . Nesta fase, dada a impossibilidade de vincular os controles nos contornos, a velocidade final é atingida com aceleração não nula. Daí a necessidade de, numa segunda fase, regular os controles de modo a atingir a situação de regime.

No caso em que a razão passo sobre diâmetro ( $P/D=u_2$ ) é pré-fixada ( $u_2=\bar{u}_2$ ) o problema se reduz ao controle da injeção de combustível ( $u_1 = W_F$ ). Neste caso a Hamiltoniana correspondente ao problema das equações (3.1) a (3.6) é de finida como a seguir.

$$H = \lambda_1 f_1(x_1, x_2, \bar{u}_2) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, u_1, \bar{u}_2) \quad (4.1)$$

É condição necessária a otimização que [3] a Hamiltoniana seja maximizada em relação ao controle e fora da fronteira tem-se

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \quad (4.2)$$

No entanto, do fato de  $f_2(x_1, x_2, u_1, \bar{u}_2)$  ter a forma particular dada na equação (2.6), resulta que

$$\lambda_2 \frac{\partial g}{\partial u_1} = 0 \quad (4.3)$$

sendo  $g = g(u_1)$ , a equação (4.3) define completamente a lei de controle para a primeira fase e respeitado o vínculo de desigualdade em  $u_1$  (eq. (3.3)) resulta  $u_1 = u_{1M}$ . Atingida a velocidade final  $v_f$ , a regulação da condução de regime, na segunda fase, é dada pela solução do sistema de equações (2.7) e (2.8), tomando-se as acelerações nulas. A equação (2.7) fornece a rotação de regime e (2.8) o combustível de regime.

No caso em que tanto o passo sobre diâmetro e o com-

bustível são tomados como controles, tem-se que

$$H = \lambda_1 f_1(x_1, x_2, u_2) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \quad (4.4)$$

e, além da equação (4.2), é necessário que, fora da fronteira,

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \quad (4.5)$$

Pelas mesmas considerações que no caso de passo fixo, percebe-se que (4.3) define a lei de controle para o combustível, na primeira fase. Tem-se novamente, como procedimento ótimo, a injeção máxima de combustível.

A impossibilidade de solução analítica não permite extrair de (4.5) qual a lei ótima para  $u_2$ . No entanto sua análise, combinada com a do modelo dinâmico das equações (2.1) a (2.4), permite o estabelecimento de um procedimento bastante razoável para a determinação de  $u_2$  na fase de aceleração. Notando que

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0 \quad (4.6)$$

onde  $f(x_1, x_2, u_2) = -Q_H/I$  (eq. (2.2)) é a contribuição do conjugado resistente;  $f_1(x_1, x_2, u_2) = (T(1-\tau) - R_T)/m$  (eq. (2.1)), sendo que apenas o empuxo  $T$  depende de  $u_2$ . Vê-se, portanto, que a situação ideal seria maximizar separadamente  $f$  e  $f_1$ . No entanto, isto não é possível, pois tanto  $T$  como  $Q_H$  são crescentes com  $u_2$  [1]. Notando porém que o fornecimento de energia ao sistema está maximizado, pois  $u_1 = W_F$  é máximo, o critério que deve prevalecer é o de minimização das resistências passivas, isto é, a minimização de  $Q_H/I$ .

A análise feita leva a seguinte lei de controle para o passo com vista a manobra em tempo mínimo, na fase de aceleração: (i) inicie com  $u_2$  mínimo ( $u_2 = u_{2m}$ ) até que se atinja rotação máxima ( $x_2 = x_{2M}$ ); (ii) atingida a rotação máxima escolha  $u_2$  tal que o conjugado líquido se anule, isto

é,  $Q_L = Q_m - Q_H = 0$ , mantendo este procedimento até  $t_f$  em que  $x_2(t_f) = v_f$ .

Atingida a velocidade final, as condições de regime podem ser reguladas pela solução do seguinte problema:

$$\text{Minimizar: } Q_H(v_f, x_2, u_2) \cdot x_2 \quad (4.7)$$

$$u_2, x_2$$

$$\text{Sujeito : } T(v_f, x_2, u_2) \cdot (1 - \tau) - R_T(v_f) = 0 \quad (4.8)$$

Obtidos os valores correspondentes a solução do problema acima,  $x_2^*$  e  $u_2^*$ , o valor de  $u_1$  resulta de

$$Q_m(u_1, x_2^*) = Q_H(v_f, x_2^*, u_2^*).$$

### 5. Resultados

O modelo matemático corresponde às equações (2.7) e (2.8) foi simulado num computador digital para o navio com as características especificados na secção 2 e segundo os procedimentos da secção 4. Para ilustrar o comportamento do sistema na fase de aceleração, na Tabela 1 mostram-se os valores obtidos para o caso em que:  $x_1(0) = 0,5$  m/s,  $x_2(0) = 0,2637$  r.p.s.;  $x_1(t_f) = 8,0$  m/s;  $0,4 \leq u_2 \leq 1,6$  ;  $0,026 \leq u_1 \leq 0,174$  kg/ciclo;  $0,2637 \leq x_2 \leq 2,4$  r.p.s.

A análise dos resultados da Tabela 1 mostra a clara vantagem de se dispor da possibilidade de controlar, além do combustível, também o passo do hélice.

Nesta fase da pesquisa não se dispõe ainda, no caso de passo controlável, dos resultados para a fase de regulação da condição de regime, pela aplicação do procedimento ótimo apresentada na secção anterior. No entanto no caso de passo fixo, todas as simulações realizadas, para vários valores de  $v_f$ , mostraram que: (i) o tempo necessário para a regulação da rotação de regime é sempre muito pequeno (da ordem de 10% de  $t_f$  para  $v_f = 5,5$  m/s); (ii) o valor da velocidade durante a regulação não chega a exceder o valor de  $v_f$  de uma porcentagem significativa em relação à precisão

Passo Fixo ( $\bar{u}_2=0,8$ )

Passo Variável

Tempo (s)	Veloc. (m/s)	Rot. (r.p.s.)	Tempo (s)	Veloc. (m/s)	Rot. (r.p.s.)	Passo
0,00	0,500	0,2637	0,00	0,500	0,2637	0,40
3,00	0,513	1,763	0,60	0,502	1,741	0,40
6,00	0,611	1,991	0,90	0,507	2,281	0,40
18,00	1,014	2,011	1,20	0,513	2,400	0,40
66,00	1,986	2,064	14,10	1,001	2,400	0,66
135,00	4,016	2,193	41,10	1,977	2,400	0,68
174,00	5,007	2,265	104,10	3,994	2,400	0,72
219,00	5,978	2,339	141,60	5,003	2,400	0,75
262,00	6,703	2,400	227,10	6,710	2,400	0,80
282,00	6,992	2,400	248,10	7,004	2,400	0,81
501,00	8,001	2,400	375,60	8,005	2,400	0,84

TABELA 1: Evolução da Manobra na Fase Aceleração ( $u_1=0,174$ ).

de observação existente (menos de 0,5% no caso de  $v_f = 5,5$  m/s).

## 6. Conclusões

A análise do modelo matemático do navio especificado na secção 2, resultou, no caso de passo fixo, em procedimento ótimo para a manobra de mudança de velocidade em linha reta. No caso de passo variável, para a mesma manobra, esta análise permitiu o estabelecimento de um procedimento empírico de resultados bastante satisfatórios, como mostrado na secção 5.

## Agradecimentos

Queremos agradecer à Marinha do Brasil e ao Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico (BNDE) que, pelo seu apoio, tornaram este trabalho possível.

Referências

- [1] Bianco, F.A.; Maizza Neto, O.; Brinatti, H.L.; "Aplicação de Sistemas de Controle Automático em Navios", Relatório final NDPN - EPUSP, Depto.Eng. Naval da EPUSP, 1976.
- [2] Bianco, F.A.; Maizza Neto, O.; "Um modelo linearizado para o estudo do comportamento dinâmico e controle do navio", Congresso Pan-Americano de Engenharia Naval, Caracas, Venezuela, setembro de 1977.
- [3] Bryson, A.E., Jr. e Ho, Y.C.; "Applied Optimal Control", Blaisdell Pub. Co., Waltham, Massachusetts, 1969.

ANÁLISE DE MANOBRA DE NAVIO EM LINHA RETASumário

O trabalho analisa o comportamento de um navio em manobras em linha reta com alteração de velocidade em tempo mínimo. Como variáveis de controle são consideradas a injeção de combustível e a razão passo sobre diâmetro do hélice. Utiliza-se um modelo matemático do navio com interação casco-motor-hélice e as conclusões obtidas fundamentam-se na teoria de controle ótimo e considerações do desempenho real do navio.

---

MINIMUM TIME STRAIGHT LINE SHIP MANEUVER ANALYSISSummary

This paper is concerned with the minimum time problem for ship velocity change in straight line maneuvers. In this study the propulsion system is composed by a slow speed diesel engine and a controllable pitch propeller. The propeller pitch and the fuel rate are the control variables. The conclusions are based on optimum control theory and on considerations about actual system performance.

**A N A I S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 22**

PP. 1399 - 1411



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

EMPREGO DE FILTRO ADAPTATIVO PARA

IDENTIFICAÇÃO DOS COEFICIENTES DO MOVIMENTO DO NAVIO

HERNANI LUIZ BRINATI, Professor Assistente  
Depto. de Engenharia Naval,  
Escola Politécnica da U.S.P.,  
São Paulo, Brasil

ATAIR RIOS NETO, Professor Assistente  
Depto. de Engenharia Mecânica,  
Escola Politécnica da U.S.P.,  
São Paulo, Brasil

1. INTRODUÇÃO

O emprego de técnicas de identificação de sistemas para determinação das características de manobrabilidade

do navio tem sido recentemente objeto de diversas pesquisas [1, ---- 7]. Em particular, o filtro estendido de Kalman foi utilizado com resultados satisfatórios [1,2,3]. O acoplamento de um estimador de ruído dinâmico ao filtro de Kalman foi usado pelos autores com bons resultados [6,7,8].

Este trabalho apresenta um resumo da pesquisa efetuada sobre identificação da manobrabilidade do navio. Os aspectos básicos de aplicação do procedimento são analisados, isto é, escolha da técnica de identificação, seleção do modelo matemático e definição de um esquema para identificação do modelo.

A pesquisa foi efetuada com base na simulação de manobras do navio através de computador digital. A qualidade da técnica é avaliada pela precisão com que, pelo processamento das observações, o método identifica os valores dos parâmetros.

## 2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE IDENTIFICAÇÃO DA MANOBRABILIDADE DO NAVIO

A determinação das características de manobrabilidade do navio por meio da teoria de identificação de sistemas exige que se tomem algumas decisões. Em primeiro lugar é necessário escolher o modelo matemático para representação do movimento do navio. Em segundo lugar, é preciso definir o método de identificação a ser empregado. Depois, é necessário definir um esquema para aplicação da técnica. Como o modelo matemático apresenta um grande número de coeficientes, e como a eficiência da técnica se reduz na medida que se aumenta o número de parâmetros, é conveniente decompor o sistema em subsistemas desacoplados. Neste caso, podem ser selecionadas as excitações que mais influência têm sobre cada particular subsistema.

A pesquisa realizada pelos autores procurou determinar as condições que resultassem em uma melhor identificação da manobrabilidade do navio. Assim foram investigados diferentes modelos, diferentes técnicas de identificação e diferentes esquemas de implementação da técnica.



O ponto de partida da pesquisa é aquele exposto por Brinati [1]. O modelo matemático adotado é o proposto por Abkowitz [9]; a técnica empregada é o filtro estendido de Kalman; o problema de identificação é dividido em duas partes: primeiro são determinados os coeficientes do modelo linear e em uma segunda etapa são identificados os parâmetros não lineares.

Com a experiência adquirida ao longo da pesquisa uma série de modificações foram adotadas. O Quadro 1 ilustra a evolução obtida durante a investigação. Pode-se perceber que foram introduzidas alterações nos três itens básicos do problema de identificação: modelo, procedimento e esquema. Nas secções seguintes cada um destes aspectos é abordado em seus detalhes.

QUADRO 1

EVOLUÇÃO DA PESQUISA	INÍCIO	MODIFICAÇÃO	FINAL
MODELO ADOTADO	CLÁSSICO	COMPACTO	COMPACTO
PROCEDIMENTO UTILIZADO	FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN	FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN + ESTIMADOR ADAPTATIVO DE RUÍDO	FILTRO + ESTIMADOR DE RUÍDO (dependendo do estudo de observação, restrição à matriz Q).
ESQUEMA DE IDENTIFICAÇÃO	2 ETAPAS - coefic. lineares de $\hat{v}$ e $\hat{i}$ - outros coeficientes.	3 ETAPAS - coefic. lineares de $\hat{v}$ e $\hat{i}$ - coefic. não lineares de $\hat{v}$ e $\hat{i}$ - coeficientes de $\hat{u}$	4 ETAPAS - coefic. lineares de $\hat{v}$ e $\hat{i}$ - coefic. não lineares de $\hat{v}$ e $\hat{i}$ - coefic. em $\Delta u$ - outros coefic.

### 3. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático empregado inicialmente no estudo de identificação corresponde à formulação clássica proposta por Abkowitz [8]. Este modelo clássico é resultado do

desenvolvimento das estruturas de corpo rígido e hidrodinâmica para o movimento do navio [1]. Os parâmetros do modelo correspondem às derivadas hidrodinâmicas [9] ou combinações destes termos com propriedades físicas do navio.

É apresentada a seguir a versão linear do modelo clássico que foi objeto inicial do estudo de identificação.

$$\dot{v} = \frac{A(11) \cdot f_{2\ell}(v, r, \delta) - A(5) \cdot f_{3\ell}(v, r, \delta)}{A(4) \cdot A(11) - A(5) \cdot A(10)} \quad (1)$$

$$\dot{r} = \frac{A(4) f_{3\ell}(v, r, \delta) - A(10) f_{2\ell}(v, r, \delta)}{A(4) \cdot A(11) - A(5) \cdot A(10)} \quad (2)$$

$$f_{2\ell} = A(9) + A(6)v + A(7)r + A(8)\delta \quad (3)$$

$$f_{3\ell} = A(15) + A(12)v + A(13)r + A(14)\delta \quad (4)$$

onde:  $v$  é a velocidade do navio na direção transversal;  
 $r$  é a velocidade angular em torno do eixo vertical;  
 $\delta$  é o ângulo de deflexão do leme;  
 $\dot{v}$  e  $\dot{r}$  indicam as derivadas em relação ao tempo de  $v$  e  $r$ , respectivamente.

os coeficientes das equações  $A(i)$  são derivadas hidrodinâmicas.

A identificação do modelo linear clássico exige a determinação de 12 coeficientes. Os resultados do estudo conduzido com este modelo mostraram que certos parâmetros eram de difícil identificação. A explicação para este fato foi atribuída inicialmente à magnitude relativamente pequena de alguns coeficientes do modelo. Uma investigação mais profunda, no entanto, mostrou que a razão fundamental da dificuldade de identificação é a não observabilidade do modelo [8].

A análise dos resultados obtidos com a investigação do modelo clássico conduziu à formulação de um novo modelo para representação do movimento do navio. Este modelo possui a mesma estrutura do modelo clássico mas tem um número

menor de parâmetros, razão pela qual é denominado como compacto. Isto implica em melhor característica de observabilidade.

É apresentada abaixo a versão linear do modelo compacto.

$$\dot{v} = B(1)v + B(2)r + B(3)\delta + B(4) \quad (5)$$

$$\dot{r} = B(5)v + B(6)r + B(7)\delta + B(8) \quad (6)$$

A investigação conduzida com o modelo linear compacto mostrou que este modelo possui boa identificabilidade. Todos os coeficientes podem ser estimados com suficiente precisão dentro de condições apropriadas (veja secção 5). Em consequência, para identificação da parte não linear da dinâmica do navio só se recorre à formulação compacta.

#### 4. TÉCNICA DE IDENTIFICAÇÃO

O método inicialmente aplicado foi o filtro estendido de Kalman. Este método havia sido empregado com resultados razoáveis em trabalhos anteriores [1,2,3,]. A formulação do problema e as equações de aplicação do filtro são apresentadas abaixo.

Considere-se o sistema não linear, definido pela equação de estado e pela função de observações (7) e (8) respectivamente.

$$\dot{x} = f(x(t), t) + G(t) w(t); t \geq t_0 \quad (7)$$

$$y_k = h(x(t_k), t_k) + v_k \quad (8)$$

onde:  $f$  e  $h$  são vetores de funções reais diferenciáveis em todos os seus argumentos;  $x(t_0)$ ,  $w(t)$ ,  $v_k$  são variáveis aleatórias não correlacionadas, com distribuição Gaussiana.

$$x(t_0) \sim N(\hat{x}(t_0), P(t_0)); w(t) \sim N(0, Q(t)); v_k \sim N(0, R(k))$$

$\hat{x}$  é o estimador do vetor de estado  $x$  e  $P$  é a matriz de covariância do erro de estimação.

A solução do problema de estimação, definido por (7) e (8), dada pela aplicação do filtro estendido de Kalman, consiste das seguintes equações:

$$\hat{x}(t_{k+1}/t_k) = \hat{x}(t_k/t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\hat{x}(t/t_k), t) dt \quad (9)$$

$$P(t_{k+1}/t_k) = \phi(t_{k+1}, t_k) P(t_k/t_k) \phi^T(t_{k+1}, t_k) + Q(t_{k+1}) \quad (10)$$

$$\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1}/t_k) + K(t_{k+1}) [y_{k+1} - h(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})] \quad (11)$$

$$P(t_{k+1}/t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] P(t_{k+1}/t_k) \quad (12)$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}/t_k) H^T(t_{k+1}) [H(t_{k+1}) P(t_{k+1}/t_k) H^T(t_{k+1}) + R(k+1)]^{-1} \quad (13)$$

As matrizes  $\phi$  e  $H$  usadas nas equações acima são as matrizes de transição e de observação, respectivamente, para o sistema linearizado. A matriz  $K$  representa o ganho do filtro.

É conveniente esclarecer que  $x$  é o vetor de estado do modelo fornecido ao filtro incluindo, portanto, as variáveis de estado do sistema ( $v, r$ ) mais os coeficientes que se deseja identificar.

Uma primeira modificação no procedimento de identificação já havia sido introduzida pelos autores [6,7]. Consiste na utilização conjunta do filtro estendido de Kalman com um estimador adaptativo de ruído dinâmico. O emprego do estimador de ruído, conforme explicado naquelas referências, tem como objetivo dar mais consistência ao procedimento de identificação. Sabe-se que, em determinadas aplicações, a adição de ruído dinâmico (fictício) procura especificamente evitar o problema de divergência do filtro [10], que ocorre quando a matriz de covariância do erro de estimação torna-se muito pequena.

Em determinados casos, no entanto, existe realmente uma excitação estocástica sobre o sistema. Nestas condições, pre

cisa-se estimar as propriedades deste ruído já que o desempenho do filtro depende de uma especificação razoável do ruído. Pode-se afirmar [10,1] que se a informação sobre a estatística do ruído for perfeita obtém-se o melhor desempenho do filtro. Se o ruído (matriz de covariância) usado pelo filtro for maior que o real o desempenho do filtro pode ser pobre (oscilação na estimação do estado), mas não ocorre divergência. Se o ruído fornecido ao filtro for menor que o real ocorre a divergência (o estado estimado é diferente do estado real).

Assim, é conveniente o emprego de um algoritmo que permita estimar consistentemente o ruído dinâmico, já que em casos práticos nem sempre se dispõe de uma informação perfeita sobre a estatística do ruído. O método empregado nesta pesquisa baseia-se em algoritmo proposto por Jazwinski [10] e produziu resultados satisfatórios [6,7] no estudo com o modelo clássico. Por essa razão o estimador de ruído foi incorporado ao procedimento de identificação. O cálculo do ruído baseia-se na consistência entre os resíduos previstos e sua estatística.

O ruído previsto é definido por:

$$r(k+1/k) = y_{k+1} - E(y_{k+1}/Y_k) \quad (14)$$

em que  $E$  é o operador expectância, e  $Y_k = \{y_j, j=1, 2, \dots, k\}$

O valor de  $Q$  na equação (10) que produz o mais provável resíduo satisfaz a condição [10]:

$$r^2(k+1/k) = E\{r^2(k+/k)\} ; k = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

A equação (15) permite calcular a matriz de covariância do ruído dinâmico  $Q$ . Este algoritmo foi formulado para sistemas lineares e para o caso em que há uma só variável de observação. Para sistemas não lineares e para casos em que há mais de uma variável de observação o método constitui uma aproximação do mesmo nível de precisão do filtro estendido de Kalman. Para emprego do algoritmo nesta pesquisa foi elaborado um esquema de recorrência [8].

Uma outra modificação foi introduzida no procedimento como consequência da investigação realizada com o modelo compacto. Chegou-se, desta forma, a formulação de um filtro adaptativo especialmente ajustado ao problema em estudo. A alteração proposta bem como sua razão são descritas a seguir.

Verificou-se, no estudo com o modelo compacto linear, que alguns coeficientes (B(4) e B(8)) eram de difícil identificação. Este resultado se mostrou surpreendentemente uma vez que um estudo de observabilidade indicou que o modelo é completamente observável. Uma análise cuidadosa do problema levou à conclusão que a dificuldade de identificação dos coeficientes se devia a certas características do procedimento. Com efeito, alguns termos da matriz de covariância de ruído dinâmico, calculada pelo método de estimação apresentavam valores muito grandes. Para contornar esta dificuldade resolveu-se estabelecer uma restrição aos valores da matriz de covariância do ruído dinâmico. Adotou-se um critério que a informação perdida durante a propagação do filtro, equação (10), pela adição de ruído dinâmico, fosse no máximo igual à informação obtida com o processamento da observação anterior, equação (12).

A aplicação desta restrição aos resultados fornecidos pelo estimador de ruído teve o efeito esperado. Os resultados de identificação obtidos com o novo método no estudo com o modelo compacto linear são muito bons. Em decorrência este filtro adaptativo passou a ser o procedimento básico de estimação. É evidente, no entanto, que o emprego deste procedimento deve se basear em estudo de observabilidade realizado com o modelo. Para estudo de observabilidade usa-se o conceito de matriz de informação,  $\mathcal{P}(\cdot)$ , definida [10] por:

$$\mathcal{P}(k,1) = \sum_{i=1}^k \theta^T(i,k) H^T(i) R^{-1}(i) H(i) \theta(i,k) \quad (16)$$

O sistema linearizado correspondente a (7) e (8) é completamente observável se e somente se,  $\mathcal{P}(k,0)$  for definida positiva para algum  $k > 0$ . Se o sistema não é completamente

observável não é possível estimar todos os estados (parâmetros) do modelo.

### 5. ESQUEMA DE IDENTIFICAÇÃO

Em princípio, a aplicação da técnica de identificação permite a determinação de todos os coeficientes do modelo. Entretanto, se o número de variáveis observadas é pequeno, é de se esperar uma considerável dificuldade ao se tentar identificar (estimar) todos os coeficientes de uma só vez. Algumas simplificações que não prejudiquem a qualidade da solução, devem ser feitas para reduzir a complexidade do problema.

A primeira simplificação adotada foi a de trabalhar inicialmente com um modelo linear definido pelas equações: (1) a (4) - formulação clássica - ou equações (5) a (6) - modelo compacto. Em realidade o modelo matemático (compacto) que representa o movimento do navio é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & C(1)\Delta u + C(2) (\Delta u)^2 + C(3) (\Delta u)^3 + C(4) v^2 + C(5)r^2 + \\ & + C(6)\delta^2 + C(7) rv + C(8)\delta v \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} = & C(9) v + (10) r + C(11)\delta + C(12)\delta^3 + C(13) rv^2 + \\ & + C(14) \delta v^2 + C(15) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = & C(16) v + C(17) r + C(18)\delta + C(19)\delta^3 + C(20) rv^2 + \\ & + C(21) \delta v^2 + C(22) \end{aligned} \quad (19)$$

onde:  $u$  é a velocidade do navio na direção longitudinal;  
 $\Delta u = u - u_0$ , em que  $u_0$  é o valor nominal de  $u$ .

O emprego do modelo linear equações (5) e (6) se baseia no fato de que para pequenas deflexões do leme (pequeno valor de  $\delta$ ) a manobra executada pelo navio pode ser re-

presentada apenas pelos termos lineares das equações (7) a (9). Neste caso, há um desacoplamento entre as equações em  $\hat{v}$  e  $\hat{r}$  e a equação em  $\hat{u}$ . Assim, em um primeiro estágio são identificados os coeficientes lineares das equações (18) e (19), ou seja os parâmetros de (5) e (6). A utilização de manobras em zigue-zague, com valor máximo de  $\delta$  igual a  $4^\circ$ , produz uma boa identificação dos coeficientes. Este resultado, além de constituir uma prova de eficiência do método de identificação, caracteriza a validade do modelo linear para esta faixa de ângulo do leme.

De acordo com a formulação inicial, após a identificação dos coeficientes do modelo linear, utilizar-se-ia o modelo completo - equações (17) e (19) - para estimação dos demais coeficientes. A investigação com este modelo mostrou uma grande dificuldade de identificação dos parâmetros face ao número de observações feitas. Verificou-se, adicionalmente, que as manobras que permitiam uma boa estimação de determinados parâmetros não eram as mais adequadas para identificação de outros parâmetros.

Em vista destes resultados, efetuou-se uma modificação no esquema de identificação. Considerando que as equações (18) e (19) independem de  $u$  resolveu-se estimar, em um segundo estágio, os coeficientes não lineares dessas equações. O uso de manobras em zigue-zague, que produzam uma variação simétrica de  $v$  e  $r$  em relação ao zero, garante uma boa identificação dos referidos parâmetros [8].

A última etapa prevista consistia na identificação dos coeficientes da equação (7) trabalhando com o modelo completo. Os resultados obtidos não foram satisfatórios, motivo pelo qual se adotou uma simplificação. Foram admitidos constantes os coeficientes  $C(1)$ ,  $C(2)$  e  $C(3)$ . Esta hipótese baseia-se no fato que esses coeficientes podem ser determinados através de um ensaio de aceleração em linha reta. Existe ainda outro meio [8] para determinar esses parâmetros.

Com a simplificação adotada, verificou-se que é possível obter uma identificação satisfatória dos demais coeficientes da equação (17). Convém mencionar, entretanto, que a qualidade de identificação destes parâmetros não é tão boa



como a que se verifica para os demais coeficientes do modelo completo.

## 6. CONCLUSÕES

O exame de cada um dos aspectos referentes à aplicação de técnicas de identificação permitiu que se chegasse a importantes conclusões. O emprego do modelo compacto assegura uma melhor identificação das características de manobrabilidade do navio. O uso do filtro estendido de Kalman com estimador de ruído, apoiado em estudo de observabilidade, constitui uma técnica eficiente de identificação. A subdivisão do problema de estimação dos parâmetros, através do tratamento de subsistemas desacoplados, produz resultados bastante satisfatórios.

Todas as conclusões resultaram da simulação de manobras do navio através do computador. Isto é, o método de identificação processa observações geradas de acordo com certas hipóteses. A implementação do procedimento em sua parte experimental requer a especificação de instrumentos que permitam efetuar a medida das variáveis desejadas. Se a instrumentação selecionada possibilitar a geração de observações, em conformidade com as hipóteses usadas no estudo de simulação, então, os resultados serão da mesma qualidade.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Brinati, H.L., System Identification Applied to Maneuvering Trials. M.I.T., Engineer Thesis, Department of Ocean Engineering, (1973).
- [2] Hayes, M.N. Parametric Identification of NonLinear Stochastic Systems Applied to Ocean Vehicle Dynamics. M.I.T., Sc.D. Thesis, Department of Ocean Engineering, (1971).
- [3] Lundblad, J.E., Application of the Extended Kalman Filtering Technique to Ship Maneuvering Analysis.

M.I.T. M.Sc. Thesis, Department of Ocean Engineering (1974).

- [4] Kaplan, P. & Outros The Application of System Identification to Dynamics of Naval Craft. 9<sup>th</sup> Symposium on Naval Hydrodynamics, (1972).
- [5] Koyama, I. & Outros. An Application of the Least Square Method to the Ship Maneuverability Identification. Society of Naval Architects of Japan, pp. 173-181. (nov.1973).
- [6] Brinati, H.L., & Rios Neto, A., Emprego da Técnica do Filtro de Kalman para Identificação dos Coeficientes Hidrodinâmicos do Navio. Anais do III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. vol.C, pp 791-804, (1975).
- [7] Brinati, H.L., e Rios Neto, A., Application of the Extended Kalman Filtering Technique to Ship Maneuverability Identification. IV Congresso Pan Americano de Engenharia Naval, (1975).
- [8] Brinati, H.L., Investigação sobre Emprego do Filtro Estendido de Kalman para Identificação da Manobrabilidade do navio. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da U.S.P., (1976).
- [9] Abkowitz, M.A., Stability and Motion Control of Ocean Vehicles, M.I.T. Press (1969).
- [10] Jazwinski, A.H., Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, (1970).

BRINATI, H.L., e RIOS NETO, A.

EMPREGO DE FILTRO ADAPTATIVO PARA  
IDENTIFICAÇÃO DOS COEFICIENTES DO MOVIMENTO DO NAVIO

Sumário

O trabalho trata de investigação sobre o emprego de técnicas de estimação ótima para determinação dos coeficientes do movimento do navio. Os principais aspectos do problema de identificação são discutidos. Consta-se que a escolha de um modelo matemático apropriado tem influência direta sobre a qualidade de identificação. Mostra-se que o emprego de um filtro adaptativo, ajustado a cada caso específico, produz resultados bastante satisfatórios. Verifica-se que para se obter uma boa identificação dos parâmetros é conveniente fracionar o sistema no maior número possível de subsistemas desacoplados.

---

APPLICATION OF AN ADAPTIVE FILTER  
FOR SHIP MANEUVERABILITY IDENTIFICATION

Summary

This paper shows the results of an investigation with the use of system identification techniques to determine the ship maneuvering characteristics. The main aspects of the identification problem are discussed. It is shown that the choice of an appropriate mathematical model has a significant effect on the identification quality. It is found out that the use of an adaptive filter, specially tailored for each specific problem, works fairly well. It is also found out that in order to get a good parameter identification it is convenient to break down the system into the greatest possible number of uncoupled subsystems.

# A N A I S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 23

PP. 1413 - 1422



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

### CONTROLE ÓTIMO DE TURBINA HIDRÁULICA

Celso P. Bottura, Professor Adjunto  
FEC - UNICAMP

#### 1. Introdução

Neste trabalho retomamos alguns resultados de uma pesquisa sobre controle de velocidade de turbina hidráulica - que desenvolvemos, com os detalhes aqui omitidos sendo encontráveis em [1], tendo como objetivo a aplicação de métodos desenvolvidos mais recentemente.

Dado que para uma certa vazão, a velocidade da turbina hélice é função da posição das aletas diretrizes e da carga aplicada, faz-se o controle de velocidade pela manipulação e controle da posição angular das aletas diretrizes, com a variação da carga tratada como perturbação.

Inicialmente identifica-se a dinâmica da turbina hélice obtendo-se a partir dos resultados experimentais as funções de transferência de comando e de perturbação para o

problema considerado, empregando-se para tanto um computador analógico. Em seguida escolhe-se a configuração para o sistema de controle e projeta-se para um ponto de operação adequado.

Em uma segunda fase os polos do sistema são alocados para que se tenha um desempenho determinado, primeiramente com a utilização de realimentação de saída e posteriormente com o emprêgo de realimentação de estado.

Finalmente, projeta-se um controlador ótimo para este processo pelo emprêgo da teoria do regulador linear quadrático para o posicionamento dos polos do sistema.

## 2. Identificação da Dinâmica da Turbina

Para obter a função de transferência de comando entre a entrada de deslocamento das aletas diretrizes da turbina e a velocidade de rotação do seu eixo aplicou-se um degrau de velocidade para a turbina em uma condição de operação de referência em torno de 1200 RPM; para obtenção da função de transferência de perturbação um degrau de torque de carga foi aplicado no eixo da turbina.

De posse das curvas de resposta obteve-se o modelo matemático da turbina através do seguinte procedimento: partindo-se de um modelo hipotético de primeira ordem, sofisticá-lo pelo aumento da ordem até determinar o modelo correto com a ordem correta para o referido processo através de iterações sobre uma simulação analógica. Detalhes sobre o método empregado bem como os resultados experimentais são dados em [1].

Como a resposta à perturbação satisfaz a um modelo de primeira ordem, se obteve para a sensibilidade estática  $K_1$  e para a constante de tempo  $\tau$  os seguintes valores:

$$K_1 = \left( \frac{\Delta N}{\Delta T} \right)_0 = 426 \text{ RPM/Kgf.m} , \quad \tau_1 = 0,5 \text{ seg.}$$

Uma vez conhecida a função de transferência de perturbação tentou-se, dado o tipo da resposta, um modelo linear de segunda ordem super amortecido para a transferência de comando, incluindo o conhecimento obtido acima e utilizando

uma simulação analógica que reproduzisse a resposta experimental pela adaptação da outra constante de tempo. Este modelo mostrou-se inadequado e então tentou-se um modelo linear de terceira ordem; por tentativas feitas com a adaptação dos parâmetros da simulação analógica se obteve um modelo linear para a turbina hélice; este é dado na Fig. 1, onde  $u$  é o sinal de controle,  $T$ , Kgf.m, é a perturbação de torque da carga e  $N_1$ , RPM, é a perturbação de velocidade. Na Fig. 2 são apresentadas a curva experimental e os resultados de duas tentativas sobre a simulação analógica.

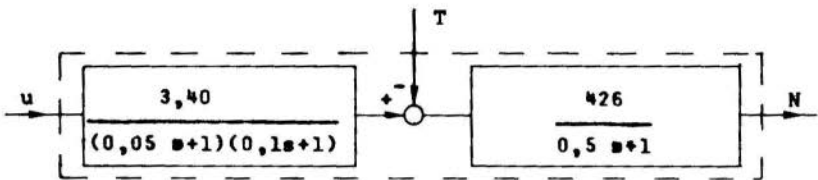


Fig. 1 - Modelo da Turbina

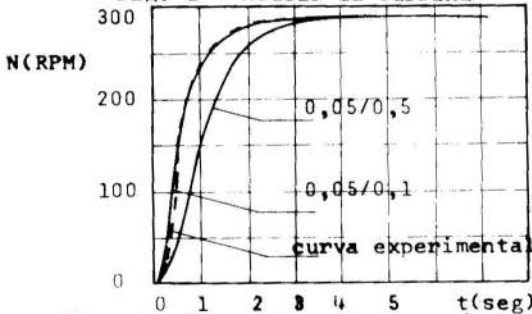


Fig. 2 - Identificação de parâmetros

### 3. Controle Automático de Velocidade

Para controlar a velocidade projeta-se um sistema onde a medição de velocidade e a detecção de erro são feitas através de um regulador de Watt, que por sua vez posiciona o carretel do distribuidor de uma válvula de três vias; esta age como um controlador que em resposta ao erro de deslocamento gerado pelo regulador de Watt envia um sinal de pressão a um pistão atuador de dupla ação que age como ele-

mento final de controle dando como saída um sinal de deslocamento  $u$  que posiciona as aletas diretrizes da turbina hélice. Na fig. 3 apresenta-se um diagrama de blocos desta solução cujos detalhes encontram-se em [1], e cuja notação é a seguinte :

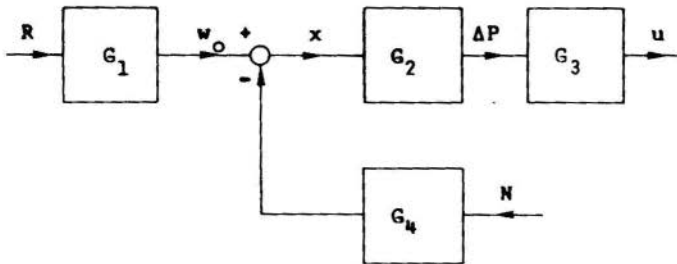


Fig. 3 - Controlador de Velocidade

$R$  é a referência,  $w_0$  é a referência de velocidade,  $G_1$  e  $G_4$  são constantes e  $x$  é o erro de velocidade, em RPM, medido pelo regulador de Watt,  $G_2$  é a função de transferência do distribuidor da válvula, que é um sistema de segunda ordem,  $\Delta P$  é a variação de pressão em psi, na saída do distribuidor da válvula,  $G_3$  é a função de transferência do pistão atuador de dupla ação, que é um sistema de terceira ordem com um polo na origem,  $u$  é a variação na posição das aletas,  $N$  é a perturbação na velocidade do eixo da turbina.

É interessante pesquisar alternativas para a solução deste problema clássico. Uma solução cogitável, ainda usando realimentação de saída, poderia, por exemplo, empregar um tacômetro, um amplificador operacional, um amplificador de potência e uma servoválvula eletrohidráulica em lugar do regulador de Watt; uma outra solução poderia usar realimentação do estado visando um controle por alocação de polos, ótimo ou não.

Impondo que, os polos de  $G_2$  e  $G_3$  fora da origem do plano complexo  $s$  estejam no semiplano esquerdo e bastante distantes do eixo imaginário do referido plano, podemos representar a solução de controle de velocidade da turbina pelo diagrama de blocos da Fig. 4.

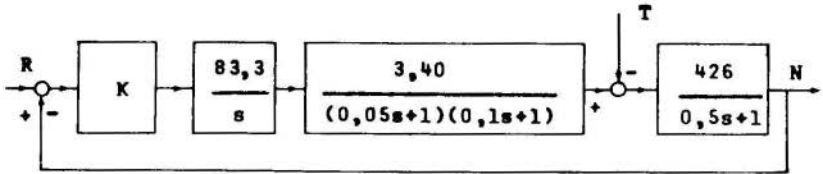


Fig. 4 - Sistema de Controle

Empregando, o lugar das raízes e o diagrama de Bode obtém-se para o sistema com realimentação unitária de saída da Fig. 4, que sendo de tipo 1 responderá a um degrau na velocidade com um erro de regime nulo, a solução seguinte [1] :

fator de amortecimento  $\zeta = 0,4$ ,  
 polos dominantes  $\tilde{\epsilon} = -0,6 \pm j 1,5$ ,  
 pico no tempo normalizado  $M_{pt} = 1,3$ ,  
 margem de fase  $MF = 45^\circ$ ,  
 tempo de estabilização  $t_e = 4,7$  seg,  
 faixa de passagem  $(0; 2,24$  rad/seg)  
 $K = 2,23 \times 10^{-5}$ ,

função de transferência de comando para a malha fechada :

$$F_C(s) = \frac{N}{R} = \frac{2,7}{0,025s^4 + 0,0575s^3 + 0,65s^2 + s + 2,7}$$

função de transferência de perturbação para a malha fechada:

$$F_D(s) = \frac{N}{R} = \frac{426s(0,05s+1)(0,1s+1)}{0,025s^4 + 0,0575s^3 + 0,65s^2 + s + 2,7}$$

que servira de referência para as soluções a serem obtidas a seguir.

#### 4. Alocação de Polos por Realimentação de Saída

Mantendo-se o projeto empregando realimentação de saída faz-se uma síntese para a solução do problema de regulação de velocidade da turbina usando um método de alocação de polos.



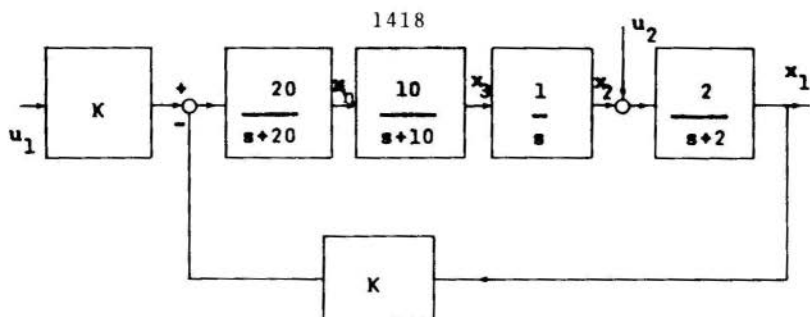


Fig. 5 - Sistema Completo

Não levando em conta a perturbação  $T$ , depois do integrador, pode-se escrever apenas para a parte de comando (entre  $u$  e  $x_1$ ), a equação de estado:  $\dot{X} = A_f X + B u_1$ , onde

$$A_f = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ -20K & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20K \end{bmatrix}, \quad X = |x_1, x_2, x_3, x_4|^T,$$

e pela manipulação do constante escalar  $K$  pode-se alocar os polos do sistema de malha fechada. Desprezando as constantes de tempo menores, associadas aos polos  $s=-10$  e  $s=-20$ , obtem-se um modelo reduzido de segunda ordem, que representa de forma razoável e bastante simples a dinâmica do sistema de controle:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -K & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u_1, \quad X = |x_1, x_2|^T$$

Para  $K = 1,5$  obtem-se os resultados da Tab. 1, onde  $Y$  representa o conjunto de autovalores obtido em cada solução.

Tabela 1 - Realimentação de Saída

Completo	Reduzido
$A_f = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ -30 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$	$A_f = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1,5 & 0 \end{bmatrix},$
$Y = \{-19,03; -10,69; -0,74 \pm j1,51\},$	$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$
$t_e \cong 6 \text{ seg}, \quad M_{p_t} \cong 1,2$	$Y = \{-1 \pm j\sqrt{2}\}$

### 5. Realimentação de Estado

Como a turbina admite um modelo linearizado em torno da condição de operação que pode ser escrito como

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X(0) = X_0, \quad X : n \times 1; \quad c = x_1, \quad (1)$$

onde  $n = 4$  para o sistema completo e  $n = 2$  para o sistema reduzido, e onde  $c$  é a saída, considerando a lei de controle com realimentação de estado

$$u(t) = R + K X \quad (2)$$

onde  $K$  é um vetor constante,  $1 \times n$ , ter-se-á para o sistema de malha fechada

$$\dot{X} = A_f X + BR, \quad c = x_1, \quad \text{onde } A_f = A + BK.$$

Como o processo é controlável, pode-se posicionar arbitrariamente os polos do sistema de malha fechada através da escolha de  $K$ .

Na Tab. 2 são apresentados alguns resultados para os sistemas completo e reduzido, onde  $V$  é o conjunto de autovalores desejados para cada solução.

Tabela 2 - Realimentação de Estado

	Completo	Reduzido
Malha Aberta	$A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{vmatrix}$	$A = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1,5 \end{vmatrix}$
Malha fechada	$V = \{-20; -10; -0,75 \pm j1,5\}$ $K = [-0,92 \quad -0,02 \quad 0,02 \quad 0,02]$	$V = \{-0,75 \pm j 1,5\}$ $K = [-1,27 \quad 0,33]$
	$A_f = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ -27,45 & -0,67 & 0,62 & -19,50 \end{vmatrix}$	$A_f = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1,91 & 0,50 \end{vmatrix}$
Malha fechada	$V = \{-20; -10; -0,6 \pm j1,5\}$ $V = [-1,01 \quad 0,14 \quad 0,04 \quad 0,03]$	$V = \{-0,6 \pm j1,5\}$ $K = [-1,40 \quad 0,53]$
	$A_f = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ -30,31 & 4,21 & 1,18 & -19,20 \end{vmatrix}$	$A_f = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2,11 & 0,80 \end{vmatrix}$



### 7. Conclusão

Neste trabalho objetivou-se utilizar alguns métodos clássicos e modernos para síntese de um sistema de controle de turbina hidráulica tipo hélice que foi identificada com o emprego de um método iterativo sobre um computador analógico. As diferentes soluções produziram resultados intencionalmente semelhantes. É discutível a necessidade e a vantagem da maioria das técnicas de síntese linear utilizadas, mas é inegável seu interesse acadêmico e didático.

Um ponto interessante a ressaltar é que mesmo para um processo de terceira ordem, que levou a um sistema de controle de quarta ordem, após serem desprezados, através do projeto, alguns polos do controlador, o modelo reduzido de segunda ordem mostrou-se qualitativa e quantitativamente aceitável, deixando claro que a solução empírica, sem métodos mais sofisticados de análise levaria a soluções muito simples e aceitáveis.

### Agradecimentos

Sou muito grato a Sergio Viana Domingues, Sergio Grinberg e Stanoje P. Bingulac, pelo que fizeram direta ou indiretamente neste trabalho.

### Bibliografia

- |1| Grinberg, S. e Domingues, S.V., Controle de Velocidade de Turbina Hélice, ITA (1968).
- |2| Athans, M e Falb, P.L., Optimal Control, McGraw-Hill (1966).
- |3| Bottura, C.P., Sistemas de Controle, Almeida Neves Editores, Rio de Janeiro (no prelo).
- |4| Bingulac, S. e Farias, M.C., Modern Control Theory Education via L-A-S Language, IFAC Barcelona (1977).

BOTTURA, C.P.

CONTROLE ÓTIMO DE TURBINA HIDRÁULICASumário

Neste trabalho, pelo emprego de diferentes métodos: alocação de polos por realimentação de saída, alocação de polos por realimentação de estado, controle ótimo linear quadrático com realimentação de estado, explorou-se o projeto de um sistema de controle de um tipo particular de turbina hidráulica previamente identificada. Pela comparação com um projeto clássico e pelo uso de um modelo de ordem reduzida, algumas conclusões são obtidas.

---

OPTIMAL CONTROL OF HYDRAULIC TURBINESummary

In this work, the design of a speed control system for a particular type of hydraulic turbine, previously identified, is explored with the utilization of different methods: output feedback pole assignement, state feedback pole assignement, linear quadratic optimal state feedback control. Through the comparison with a classical type of design and with the use of a reduced order model, some conclusions are obtained.

**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 24**

PP. 1423 - 1435



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

MINIMAL-ORDER OBSERVERS FOR LINEAR

FEEDBACK CONTROL SYSTEMS

Victor Hugo QUINTANA, Associate Professor,  
Dept. of Electrical Engineering,  
University of Waterloo,  
Waterloo, Ontario, Canada.

Hans Helmut ZÜRN  
Dept. of Electrical Engineering,  
Univ. Federal de Santa Catarina,  
Florianopolis, S.C., Brazil.

### 1. Introduction

An important problem in the control of linear multivariable systems is that of designing an observer for a given set of linear state functionals. Luenberger [1] found that, for an  $n^{\text{th}}$ -order system with  $m$

outputs, an observer of order  $n-m$  can asymptotically estimate (observe) the system's states. The  $n-m$  poles of this observer may arbitrarily be placed as long as they do not coincide with any poles of the original given system. Later Luenberger [2] proves that a single linear functional of the system's states can always be estimated with an observer of dimension  $\gamma-1$ , where  $\gamma$  is the observability index of the system [3]. The design is such that the observer outputs asymptotically approach a linear transformation of the states of the system.

Pearson and Ding [4] approached the problem using a cascade compensator of integrators at the input to the open-loop system. Chen [5], and Quintana and Devries [6] designed compensators by solving sets of linear algebraic equations obtained from the coefficients of the transfer functions of the system.

Wolovich [7], [8] used frequency domain methods to design an observer of order  $(\gamma-1)r$  and arbitrary dynamics, where  $r$  is the number of inputs to the system. In 1972 Fortmann and Williamson [9] essentially solved the problem of designing a minimal-order observer for single-output systems using a state-space approach. This was followed in 1973 by a minimization algorithm by Wang and Davison which uses transfer functions [10].

In 1973 and 1974 Roman et al [11], [12] presented techniques that led to the design of a minimal-order observer. Their techniques use realization theory. Murdoch [13] designed a succession of observers, one for each linear function, in which each observer is driven by all the preceding observers as well as the system's inputs and outputs.

This paper presents an easy method to design observers of the Luenberger and minimal-order types, for single-output and multi-output systems. Where possible, proofs have been omitted and appropriate references indicated in order to simplify the paper presentation. Several observers are designed for the high-gain excitation control of a synchronous machine connected to an infinite bus through double transmission lines; single- and double-output systems are considered in the illustrative examples. Performance tests have been simulated for the various observers and two dynamic speed controllers of fixed structure [14].

## 2. Statement of the Problem

Consider a linearized time-invariant system of the following form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) ; & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (1)$$

where  $x$ ,  $y$  and  $u$  are vectors of order  $n$ ,  $m$  and  $r$ , representing the system's state, measurable outputs and control signals, respectively. Let a feedback control strategy for (1) be specified in the form

$$u(t) = K x(t) + u_e(t) \quad (2)$$

where  $u_e(t)$  represents an external disturbance input.  $K x(t)$  denotes a control strategy obtained as a result of solving a linear regulator problem [3], selecting a particular pole placement for the closed-loop system [6], designing for a decoupled system, or other procedures.

Assume without loss of generality that the system (1) is controllable and observable [3],  $\text{rank } [B] = r$ , and  $\text{rank } [C] = m$ . Also, let  $K$  have  $\text{rank } \hat{r} < r$ .

Since the state  $x(t)$  of the system (1) is not directly available to implement the control strategy (2), it is desired to design an observer for  $K x(t)$  of the following form:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= F z(t) + G y(t) + H u(t) ; & z(0) &= z_0 \\ w(t) &= D y(t) + E z(t) \end{aligned} \quad (3)$$

where  $z$  is a  $p$ -dimensional observer state vector, and  $w$  is an  $r$ -vector representing an approximation to  $K x(t)$ . The resulting closed-loop system is shown in Fig. 1; its poles are the eigenvalues of  $(A + BK)$  and those of  $F$  [1], [3].

The observer output  $w(t)$  of Eq. (3) is said to estimate  $K x(t)$  if the following condition holds:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^j}{dt^j} [w(t) - K x(t)] = 0 ; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

independently of  $u$ ,  $x_0$  and  $z_0$ .

If  $w$  estimates  $K x$ , then one can suspect that  $z$  estimates a linear combination of the states  $x$ , say  $T x$ . In fact,  $z$  is an estimate of  $T x$  if the following conditions hold [3]:



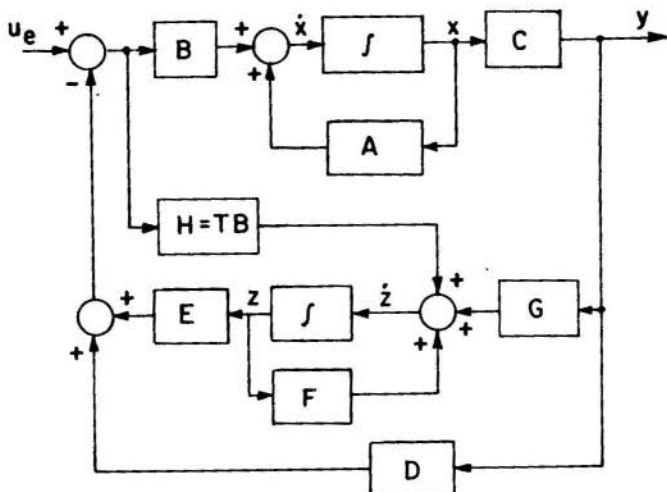


Fig. 1 System and observer structures

$$\text{Condition I:} \quad H = TB \quad (5)$$

$$\text{Condition II:} \quad TA - FT = GC \quad (6)$$

$$\text{Condition III:} \quad ET + DC = K \quad (7)$$

Condition IV: All eigenvalues of  $F$  must have negative real parts.

The problem is to find a minimal observer-state dimension  $p$ , and matrices  $T$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $D$  and  $E$  such that Conditions I to IV are satisfied. Actually the observer conditions reduce to II through IV since once  $T$  is found, Condition I is readily satisfied. If  $p = n - m$ , the design procedure is straightforward [1], [3], [14]; the resulting observer is known as Luenberger's observer. In this case the observer poles can be placed anywhere in the left-hand side of the  $s$ -plane, and there is no restriction that the observer and system must have no poles in common.

### 3. Observer Design

The major aim is to design an observer with the smallest possible order, i.e.  $p \leq n - m$ .

The design technique presented for minimal-order observers are based on the dual phase-variable canonical representation [3], [15] of the multi-variable system of Eqs. (1), i.e. A and C have the form

$$A = \text{diag} [A_1, A_2, \dots, A_m] ; \quad C = \text{diag} [C_1, C_2, \dots, C_m] \quad (8)$$

where, for  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{\gamma_i}^i \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{\gamma_i-1}^i \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1^i \end{bmatrix} ; \quad C_i = \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 1]}_{\gamma_i}$$

and the  $\gamma_i$ 's are the observability indices of the system [3].

If some eigenvalues of A are in complex conjugate pairs, it turns out that A cannot be represented as in (8) for  $m \geq 2$ ; in this case, some non-zero off-diagonal matrices exist. A suitable modification of the design procedure presented below is described in Appendix I to deal with such cases; another procedure is reported in [9].

The characteristic polynomial of A can be denoted as

$$q(s) = q_1(s) q_2(s) \dots q_m(s) \quad (9)$$

where

$$q_i(s) = s^{\gamma_i} + a_1^i s^{\gamma_i-1} + \dots + a_{\gamma_i}^i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Without any loss in generality, as F is unknown, assume that

$$F = \text{diag} [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p] \quad (10)$$

where  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , is the  $i^{\text{th}}$  eigenvalue of F.

Denoting the  $i^{\text{th}}$  row of T and G as  $t_i$  and  $g_i$ , respectively, the observer Condition II may be written as

$$t_i = -g_i C [\delta_i I - A]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (11)$$

Assume that  $g_i$  takes the value

$$g_i = -[q_1(\delta_i), q_2(\delta_i), \dots, q_m(\delta_i)] \quad (12)$$

Substituting Eq. (12) into (11), it is found that the general form of T is [14]

$$T = [S(\delta_1) \ S(\delta_2) \ \dots \ S(\delta_p)]^t : p \times n \quad (13)$$

where, for  $i = 1, 2, \dots, p$ ,

$$S(\delta_i) = [1 \ \delta_i \ \delta_i^2 \ \dots \ \delta_i^{\gamma_i-1} \ 1 \ \delta_i^2 \ \dots \ \delta_i^{\gamma_i-1} \ \dots \ \delta_i^{\gamma_m-1}] : 1 \times n$$

The observer Condition III may now be written as

$$[D \ E] L = K \quad (14)$$

where L is defined as

$$L = [C^t \ T^t]^t : (p+m) \times n \quad (15)$$

For a Luenberger observer,  $p = n - m$ . As in this case the observer poles  $\delta_i$  are arbitrarily chosen, T can readily be obtained from Eq.(13) and matrices D and E computed from Eq. (14).

For the sake of simplicity in the development, only the design of minimal-order observers for single-output systems ( $m=1$ ) is presented in this section; the extension to the multi-output case ( $m \geq 2$ ) may be found in [14].

Let the characteristic polynomial of the observer matrix F be

$$\phi(s) = s^p + \alpha_1 s^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1} s + \alpha_p \quad (16)$$

Since every square matrix satisfies its own characteristic equation (Cayley-Hamilton theorem [3]), post-multiplying Eq. (14) by the matrix  $Q_p$  defined below yields

$$K Q_p = 0 \quad (17)$$

where for  $p = 0$  and  $p = n - 1$ ,

$$Q_0 = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ and } Q_{n-1} = 0 ;$$

and for  $p = 1, 2, \dots, n-2$ ,

$$Q_p = \begin{bmatrix} \alpha_p & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{p-1} & \alpha_p & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{p-1} \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{p-3} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} : n \times (n-p-1) \quad (18)$$

It can easily be shown that Eq. (17) is equivalent to

$$\Gamma \alpha = -\beta \quad (19)$$

where

$$\alpha = [\alpha_p, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1]^t : p \times 1 \quad (20)$$

$$\beta = [K_{p+1}^1, K_{p+2}^1, \dots, K_{n-1}^1, K_{p+1}^2, \dots, K_{n-1}^2, \dots, K_{n-1}^r]^t : (n-p-1)r \times 1 \quad (21)$$

and

$$\Gamma = \begin{bmatrix} K_1^1 & K_2^1 & \dots & K_p^1 \\ K_2^1 & K_3^1 & \dots & K_{p+1}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ K_{n-p-1}^1 & K_{n-p}^1 & \dots & K_{n-2}^1 \\ K_1^2 & K_2^2 & \dots & K_p^2 \\ K_2^2 & K_3^2 & \dots & K_{p+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ K_{n-p-1}^2 & K_{n-p}^2 & \dots & K_{n-2}^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ K_{n-p-1}^r & K_{n-p}^r & \dots & K_{n-2}^r \end{bmatrix} : (n-p-1)r \times p \quad (22)$$

The design of an observer of minimal-order, therefore, reduces to finding a solution to the linear algebraic Eq. (17) for the vector  $\alpha$

under the constraint that  $p$  must be the smallest possible order and the resulting eigenvalues of  $F$  have negative real parts.

A simple procedure for determining a minimal-order observer is to try successively increasing values of  $p$  until a solution to Eq. (17) is found with  $\text{real}\{\delta(F)\} < 0$ . It is enough to start the procedure with  $p = \hat{r} - 1$ , where  $\hat{r} = \text{rank}[K]$ , [14].

#### 4. Illustrative Examples

A synchronous machine connected to an infinite bus may be described by the following linear model in dual phase-variable representation [14]

$$\dot{x} = A x + B u ; \quad y = C x \quad (23)$$

where  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^t$  and  $u = \Delta V_{\text{ref}} = -K x$ . Matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $K$  are given in Appendix II. Matrix  $K$  is such that the eigenvalues of  $(A + BK)$  are

$$\lambda_{1,2} = -30.47 \pm j35.56 ; \quad \lambda_{3,4} = -6.31 \pm j3.47$$

Observer designs for two distinct output matrices are considered next.

(1) Single-output case,  $y = [x_4]$ . It is easy to verify that Eq. (19) has no solution for  $p = 0$  and  $p = 1$ . For  $p = 2$ , Eq. (19) yields

$$[0.030 \quad -0.710] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = [18.46] \quad (24)$$

which has multiple solutions for  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ . Obtaining  $\alpha_2$  from Eq. (24) and substituting for it in the equation characteristic of a second-order observer yields

$$\phi(s) = (s^2 + 539.61) + \alpha_1 (s + 20.65) = 0 \quad (25)$$

from which it is obtained that the eigenvalues of  $F$  are over a well defined root-locus for  $\alpha_1 \geq 0$ . Table 1 presents the observer eigenvalues and matrices  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $D$  and  $E$  for several designs.

(2) Double-output case,  $y = [x_1, x_4]^t$ . It can be verified that the corresponding Eq. (19) has no solution for  $p = 0$ . For  $p = 1$ , it gives

$$[-0.334, -0.00169, 0.34887, 0.09103] \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

from which the observer pole is

$$\delta_1 = -\alpha_1 = \frac{0.034887}{-0.00169} = -20.666 \quad (27)$$

Table 2 presents the results of the design of this first-order observer.

TABLE 1 Second-Order Observer for Single-Output System

OBSERVER	EIGENVALUES $\delta(F)$	F	G	H	D	E		
OBS-1	-47.88	-47.89	0	-41.04	35.49	-3.44	14.75	-11.33
	-56.11	0	-56.11	-77.81	41.59			
OBS-2	-51.72±	-51.72	.514	-109.86	76.34	-3.40	-3.40	-103.45
	j0.514	-.514	-51.72	-4.43	0.76			
OBS-3	-51.50±	-51.5	3.77	-106.19	76.34	-3.41	-3.41	-14.00
	j3.77	-3.77	-51.5	-32.26	5.58			

TABLE 2 First-Order Observer for Double-Output System

OBSERVER	EIGENVALUES $\delta(F)$	F	$\hat{G}$	H	D	D		
OBS-4	-20.67	-20.67	.644	9.257	-31.041	-.332	1.631	-1.688

## 5. Conclusion

A simple procedure for the design of minimal-order observers has been presented, and applied to a single-synchronous-machine power system. Single and double output systems has been considered for the observer designs. The results of simulations of small- and large-disturbance tests indicate that the minimal-order (first- and second-order in the examples considered) observers perform quite satisfactorily and, in general, better than first- and second-order speed stabilizers.

Computationally, the design of minimal-order observers is much less time-consuming as compared to dynamic stabilizers of fixed structure. Also, the observer structures are not more complex than the

dynamic stabilizers considered so far in the technical literature.

#### Acknowledgement

The authors want to acknowledge the National Research Council of Canada for financial support under grant Number A8835.

#### References

- [1] Luenberger, D.G., Observing the State of a Linear System. IEEE Transactions on Military Electronics, vol. MIL-8, pp. 74-80 (April 1964).
- [2] Luenberger, D.G., Observers for Multivariable Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-11, pp. 190-197 (April 1966).
- [3] Kwakernaak, H. and Sivan, R., Linear Optimal Control Systems. John Wiley & Sons, New York (1972).
- [4] Pearson, J.B., and Ding, C.Y., Compensator Design for Multivariable Linear Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-14, Transactions on Automatic Control, Vol. AC-14, pp. 130-134 (April 1969).
- [5] Chen, C.T., Design of Pole-Placement Compensators for Multivariable Systems. Joint Automatic Control Conference, pp. 497-503 (June 1970).
- [6] Quintana, V.H., and Devries, S., On Direct Stabilization of Multivariable Control Systems. International Conference on Cybernetics and Society, Washington, D.C. (September 1977).
- [7] Wolovich, W.A., A Frequency Domain Approach to State Feedback and Estimation. IEEE Decision and Control Conference, Miami Beach, Florida (1971).
- [8] Wolovich, W.A., On the Synthesis of Multivariable Systems. Joint Automatic Control Conference, pp. 158-165 (August 1972).
- [9] Fortmann, T.E. and Williamson, D., Design of Low-Order Observers for Linear Feedback Control Laws. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-17, pp. 301-307 (June 1972).

- [10] Wang, S.H., and Davison, E.J., A Minimization Algorithm for the Design of Linear Multivariable Systems. Joint Automatic Control Conference, pp. 269-277 (June 1973).
- [11] Roman, J.R., Jones, L.E., and Bullock, T.E., Observing a Function of the State. IEEE Decision and Control Conference, pp. 125-130, San Diego, California (December 1973).
- [12] Roman, J.R., and Bullock, T.E., Design of Minimal Order Stable Observers for Several Linear Functionals of the State via Realization Theory. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-20 (1975).
- [13] Murdoch, P., Design of Degenerate Observers. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-19, pp. 441-442 (August 1974).
- [14] Quintana, V.H. and Moharram, O.E., Minimal-order Observers and Their Application to Synchronous Machine Control. (Internal Report), Department of Electrical Engineering, University of Waterloo (1977).
- [15] Luenberger, D.G., Canonical Forms for Linear Multivariable Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-12, pp. 290-293 (June 1976).

### Appendix I

#### Canonical Representation for $m > 2$

Given a multi-output system ( $m \geq 2$ ), it is not always possible to find a transformation matrix, say  $W$ , which transforms matrices  $\tilde{A}$  and  $\tilde{C}$  into the desired dual phase-variable canonical form of Eqs. (8).

Consider the following multi-input, multi-output system:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{C} \tilde{x} ; \quad u = \tilde{K} \tilde{x} \end{aligned} \quad (I-1)$$

It is possible to find a transformation matrix  $W$  [3], [5], such that  $x(t) = W^{-1} \tilde{x}(t)$  and

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A} x + B u \triangleq A x + B u + A^* x \\ y &= C x ; \quad u = K x \end{aligned} \quad (I-2)$$

where

$$\hat{A} = W^{-1} \tilde{A} W \triangleq A + A^*$$



$$A^* \triangleq \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & 0 & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} [0 \ 0 \ \dots \ X], & i, j = 1, 2, \dots, m; \\ & i \neq j \end{cases}$$

$$B = W^{-1} \tilde{B}; \quad K = \tilde{K} W$$

and matrices  $A$  and  $C$  have the structure of Eqs. (8), and  $X$  denotes a non-zero column vector. It is important to note that the observer for system (I-1) is the same as that of system (I-2).

Assume  $A^* = 0$  in Eqs. (I-2), and denote the observer for the resulting system as

$$\dot{z} = F z + G y + H u; \quad w = D y + E z \quad (\text{I-3})$$

Assume now that  $A^* \neq 0$ . In order to keep the balance in the observer Condition II of Eq. (6) when  $A$  is changed to  $\hat{A} = A + A^*$ , matrix  $G$  must be replaced by

$$\hat{G} = G + T A^* C^T (C C^T)^{-1} \quad (\text{I-4})$$

### Appendix II

#### Dual Phase-Variable Representation [14]

Single-output case:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3200.0 \\ 1 & 0 & 0 & -1634.0 \\ 0 & 1 & 0 & -534.0 \\ 0 & 0 & 1 & -21.25 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -74115.2 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]; \quad K = [3E-5, -71E-5, -0.0185, 0.3751]$$

Double-output case:

$$A = \begin{bmatrix} -0.296 & 0 & 0 & -49.344 \\ 643.56 & 0 & 0 & -1478.14 \\ 0 & 1 & 0 & -527.75 \\ 0 & 0 & 1 & -20.95 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1.5E-4 \\ -4.59E-3 \\ 1502 \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad K = [-0.334, -1.688E-3, 0.0349, 0.9104]$$

QUINTANA, V.H., and ZÜRN, H.H.

MINIMAL-ORDER OBSERVERS FOR LINEAR  
FEEDBACK CONTROL SYSTEMS

Summary

Over the last few years there has been an increasing interest on the design of minimal-order observers for a given set of linear state functionals.

This paper, to start with, reviews the necessary conditions for the existence of a general observer, and then presents a method for the design reduced-order observers (order  $p = n - m$ , where  $n$  is system's order and  $m$  is number of outputs). Next, a method is presented for the design of minimal-order observers (order  $p \leq n - m$ ) for single output systems.

An illustrative example is also presented. It is based on the design of reduced- and minimal-order observers for a synchronous machine with single output, and double outputs.

OBSERVADORES DE ORDEM MÍNIMA PARA  
SISTEMAS DE CONTROLE REALIMENTADOS LINEARES

Sumário

Durante os últimos anos surgiu um crescente interesse no projeto de observadores de ordem mínima para um dado conjunto de funcionais lineares de estado.

Neste trabalho são revistas inicialmente as condições necessárias para a existência de um observador geral, e depois apresenta um método para o projeto de observadores de ordem reduzida (ordem  $p = n - m$ , onde  $n$  é a ordem do sistema e  $m$  é o número de saídas). Em seguida, apresenta-se um método para o projeto de observadores de ordem mínima (ordem  $p \leq n - m$ ) para sistemas com uma só saída.

Também é apresentado um exemplo ilustrativo, baseado no projeto de observadores de ordem reduzida e mínima para uma máquina síncrona com saída única e duas saídas.

# A N A I S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 25

PP. 1437 - 1448



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

THE GOVERNING PARAMETERS AND ENGINEERING  
ALTERNATIVES FOR GUIDED TRANSPORT.

BARWELL, F.T., Professor and Head of Department of Mechanical  
Engineering, University College of Swansea,  
South Wales, United Kingdom.

1. Introduction.

In contrast to the unrestrained movement of the motor car and aeroplane, railways represent guided transport in its traditional form and the growing congestion on the roads has caused a number of countries, notably Japan, to reconsider the role of the railways as passenger carriers between and within cities. One possible competitive advantage which a railway has over a road is the potentiality for higher speeds and Table I shows the state of development of so-called high speed trains in Britain, Japan and Russia.

Table 1

PARTICULARS OF HIGH SPEED TRAINS

	Speed (Km/hr)	Length (m) <sup>1</sup>	Power, (H.P.)
Shinkansen, Japan.	210	400	Electric A.C. 16,000
High Speed Train, U.K.	200	184	Diesel 4,500
Advanced Passenger Train UK.	200 up to 250 later.	252	Electric A.C. 8,000
High Speed D.C. Electric Train. U.S.S.R.	200	364	Electric D.C. 13,800

The Shinkansen service has operated for 12 years with an enviable safety record. The death rate per million passenger kilometres was zero as compared with 166 for aircraft and 611 for automobiles. As regards energy the Shinkansen's consumption was 100 kilo calories per passenger kilometre compared with 780 for aircraft, 700 for automobiles and 120 for buses.

Exciting as the developments on the railway are, their impact on the total transport pattern is likely to be limited and the main growth of traffic is likely to continue to be by road and air. However there is a severe limitation of the capacity of a route provided by a given investment and it can be shown that disciplined movement under the control of signals, together with the coupling of vehicles into trains enable much greater capacity and higher speeds to be obtained than when vehicles are controlled individually by drivers, each of whom may adopt his own following and guiding strategy<sup>1</sup>.

In densely populated areas, for example the north-east corridor of the United States between Boston and Washington, congestion of road and air facilities has already become serious although the full capacity of the railway is not exploited and substantially greater numbers of inter-city passengers could be carried. It is therefore proposed<sup>2</sup> during the next 20 years to invest about \$1500,000,000 in providing exclusive track, eliminating level crossings and introducing improved

trains. The state of the art would not be greatly extended and speeds of about 120mph are considered to be adequate.

Whilst it can be accepted that guided transport provides capacity more cheaply than motorways on a route basis, justification for its use must depend on its ability to attract sufficient traffic to warrant investment in the track. All other things being equal increased demand follows reduced journey time as was indicated in the study of Evans<sup>13</sup>. There appears to be no physical reason why the speed of a conventional railway based on steel wheels and steel rails should not be extended, even to double the present values of 200km per hour. Whilst electric railways provide high quality, high capacity service, expensive construction (if not in tunnels then in screened alignments) with costly attention to amenity preservation is necessary to comply with the environmental standards now insisted on. The only cheap alternative available to most cities is the bus which is noisy, causes pollution and when operated on the public highway has a very limited capacity. An objection to steel wheels running on steel rails is noise<sup>14</sup>; particularly in urban situations. This led to the consideration of the pneumatic tyre which has been used with great success on the Paris underground railway and in Montreal. This suffers from two disadvantages however; friction losses are increased which leads to difficulties regarding the heat dissipation in tunnels and the negotiation of curves is accompanied by objectionable noise. Whilst most large cities are provided with underground railways, these are very expensive to construct and a novel mode is required which is intermediate between the railway and the private car so as to enable a closer network of routes to be provided more cheaply.

The last decade has been characterised by extensive studies in many countries, notably by the United States Department of Transportation which has spent large sums in support of research and development in transport including the Transportation Test Centre at Pueblo, Colorado. Table 2 shows the results of tests which have been carried out there, together with the results of a Tracked Hovercraft tested at Erith, near Cambridge, England.

TABLE 2

	Speed (km/hr) projected/on test.	Means of Suspension and guidance.	Length of Tracks (km) Projected/Actual
LIMRV	402/410	Wheel on rail.	9.6/9.6
TLRV	482/151	Air cushion	35/8
PTACV	241/164	Air cushion	9.6/9.6
RTV 31	482/172	Air cushion	11/1.9

Noteworthy results were obtained with the LIMRV which uses conventional wheels on rails. A speed of 410 km/hr was achieved in a comparatively short length of track, acceleration being assisted by jet. The ride was very smooth<sup>15</sup>. The track for the Tracked Levitation Research Vehicle (LVRV) was not provided with power supply and reaction rail during the main test series. Nevertheless a speed of 151 km/hr was attained by using the reaction of the exhaust of the gas-turbines which supplied power to the air-cushions. The ride was very good even in the presence of artificial track irregularities. The PTAVC, which was intended for use as an airport link and was the only vehicle to be finished in a form suitable for passengers, operated at 164 km/hr on air cushions and was assessed as being extremely comfortable.

As regards the British contribution, represented by the Tracked Hovercraft (RTV 31), the required length of track was never provided. Nevertheless it was shown to be possible to accelerate and brake within the distance of 1.9km to and from a speed of 107 mph using the linear motor alone.

In addition to inter-city developments, much thought has been given to urban systems. Fig. 1 shows an installation in Morgantown of personalised rapid transit wherein comparatively small vehicles are routed by computer according to demand.

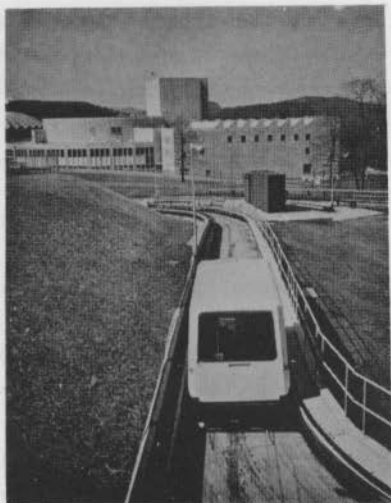


FIG. 1

PERSONAL RAPID TRANSIT EXPERIMENT AT MORGANTOWN.

A requirement for systems, operating at close headway is 'static switching' or 'route selection' whereby a following vehicle can select a different route from a leading vehicle without time being occupied in switching points on the track and proving them correct before a vehicle can proceed. Fig. 2 shows the sensor fitted to one of the Morgantown vehicles whereby the vehicle can steer itself either to the right or to the left. The direction to be followed is selected by biasing the sensing system in the required direction by an external inductive link.

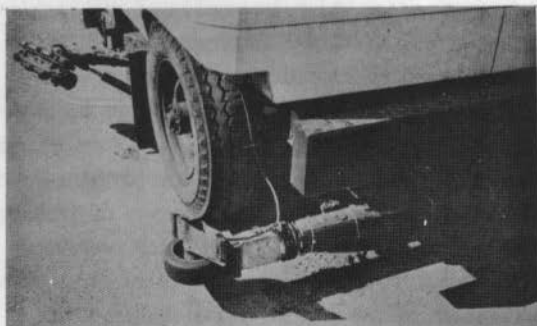


FIG. 2

STEERING SENSING DEVICE - MORGANTOWN.

The depressed economic situation has led to a loss of impetus on the development of novel systems. Nevertheless a difficult choice has to be made in many countries as to whether to persevere with the development of conventional technology or to engage in research and development of systems which may be more attractive from the economic and environmental viewpoints.

## 2. COMFORT FACTORS.

For any given speed the configuration of the route must be determined by the reaction of passengers to accelerating forces. Civil Engineers<sup>[6]</sup> usually consider that the centrifugal forces of passengers can be balanced by canting the track and that passengers can tolerate a limited amount of 'cant deficiency'. Thus in British practice a cant of 6" was provided (which with a standard gauge is equivalent to 6° tilt) and a further 3½" is permissible making a total tilt of about 9°. The provision of a track complying with these limits but which would be suitable for a speed of 100m/s (224mph) would necessitate a minimum curvature of 6,020 metres which would be expensive in difficult terrain. By allowing the vehicle to tilt, passenger comfort can be secured on sharper curves. Thus British Rail's APT (Table 1) can tilt through 9° which is in equilibrium on a curvature of 4090m at 100 m/s. This however represents a greatly increased cant deficiency as measured by the reaction of the vehicle on the track. Thus whilst easing the position for the passengers the tilting bodies do nothing to enable the track to withstand the lateral forces arising from cant deficiency. This therefore becomes a limiting factor and a system of construction which is capable of withstanding indefinite lateral force would of course have advantages.

Another important consideration from the comfort point of view is the rate of change of acceleration. Loach and Maycock<sup>[6]</sup> recommend a figure of .372 m/s<sup>3</sup> and the Office of High Speed Transportation gives a limiting figure for rate of change for sustained acceleration (lateral jerk) of about 3 m/s<sup>3</sup>. Another way of looking at this problem is to consider the rate of rotation of the equivalent gravitational vector. Loach and Maycock's figure would appear to be equivalent to a rate of rotation of .38 radians per second.

Regarding rate of change of acceleration in the direction of motion, a traditionally accepted limit derived from tramcar practice is 1.37 m/s<sup>3</sup>. This is known as ROCOC.



As far as linear acceleration is concerned the figures for Morgantown are  $0.61\text{m/s}^2$  service braking rate and  $2.94\text{ m/s}^2$  emergency braking rate which is probably the highest value appropriate to a guided system. Of course much higher rates of braking are experienced in road vehicles.

Probably the most difficult thing to determine however is the quality of ride which would be tolerable. Over the years many tests have been carried out to determine human reaction to vibration over all or part of the relevant frequency range. However the published results reveal what can only be described as remarkable inconsistency. Accordingly a series of investigations was set up in the author's department in co-operation with British Rail and supported by the Science Research Council in order to ascertain what would be a reasonable basis for design of a novel system. Investigations were carried out on operational vehicles as well as within the laboratory<sup>[7]</sup>. As far as the tests in the field were concerned these were based on a questionnaire but at the same time compact vibration recording equipment was devised so as to provide an objective measure of vibration to which the passenger was being subjected whilst replying to the questionnaire. Six piezo resistive devices were used to provide signals for vertical, lateral and fore and aft directions. These were mounted on the floor of the vehicle in several positions to give a reasonable indication of the overall vehicle movements. A recording was obtained by multiplexing 6 channels of acceleration information onto a battery tape recorder via a specially built encoding package. (Fig.3).

Considerable semantic difficulty was experienced in providing passengers with expressions whereby they could describe the vibration situation<sup>[8]</sup>. There is no word in the English language relating to vibration which is analagous to 'loudness' for noise or 'brightness' for lighting. After a period of laboratory studies it was finally decided to use the line-rating method as shown in the Fig.4.

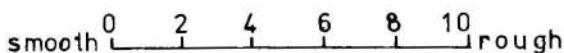


FIG.4  
METHOD OF LINE RATING.



FIG. 3

COMPACT MULTI CHANNEL RECORD FOR VIBRATION STUDIES

A diagram was printed in the questionnaire which consisted of a line 10cm long. At each end descriptions were given relative to the phenomenon being studied and the subject was required to make a mark on the line to indicate the severity of what he was experiencing at the time. Attempts were made to quantify the end points by such descriptions as 'smooth' being equated as a complete rest and 'rough' corresponding to travelling in an old automobile on an unmade road.

In order to validate the techniques used for obtaining ratings in the field surveys, the laboratory experiments were carried out within the university<sup>[8]</sup>. A series of tests was made in which human beings were subjected to vertical vibrations over the frequency range of 1-70 hz and over a range of vibration amplitudes corresponding roughly to those recorded in public service vehicles. One important finding was that in contrast to the situation with noise, the response to variation in amplitude of vibration was practically linear<sup>[9]</sup>. Thus is the expression

$$\psi = K\phi^n \quad (1)$$

n approximates to unity over the frequency range 0 to 10Hz

where  $\phi$  = objective magnitude

$\psi$  = subjective magnitude

$k = \text{a constant}$

As was expected tolerance to various amplitudes of vibration varied with frequency and it was possible to plot curves of equal comfort whereby the amplitude necessary for providing a given sensation was plotted against its frequency. Typical results are given in Fig. 6<sup>10-11</sup>

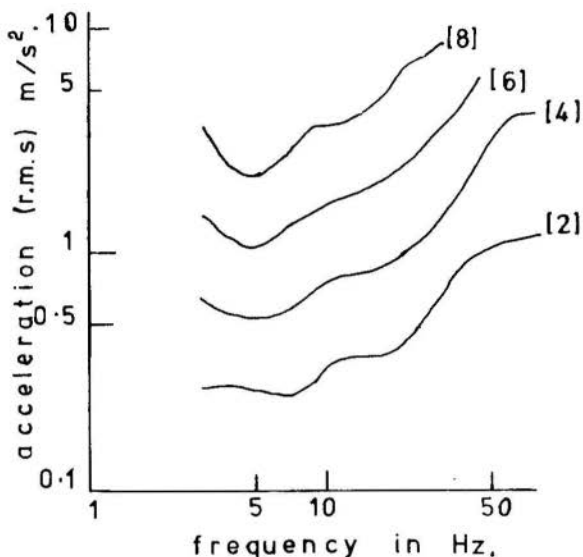


FIG. 6

EQUAL COMFORT ZONES - SUBJECTS STANDING.

(Figs. in brackets represent average response in line rating)

### 3. POSSIBLE ACCURACY OF TRACK CONSTRUCTION.

In the U.S.A. the new Federal Track Standards call for six classes of quality of the permanent way. The best, class six, which is considered suitable for a speed of 110 mile/hr (49-17m/s), calls for an alignment of 0.5in (0.013) on a 62ft (19m) line. The most favourable interpretation of this would be a sinusoidal wave form 0.018m in amplitude with a pitch of 38m. At the present day operating speed frequency would be 1.3Hz and r.m.s. acceleration  $0.848 \text{ m/s}^2$  and the rate of increase would be as the square of the speed. Assuming that a desirable value would be  $0.2\text{m/s}^2$  the vehicle suspension would have to attenuate track input by a factor of 4.1. At three times this speed

a factor of 36 would be required. Thus air and magnetic suspensions which might reduce the input to the suspension system by allowing the thickness of the air gap to vary so as to compensate for track irregularity would have an advantage.

As far as unconventional systems are concerned, Fellows<sup>[12]</sup> reports that 23m long reinforced concrete beams cast in steel moulds were straight within  $\pm 0.003m$  vertically and 0.005m horizontally. Again therefore the advantage appears to be with the unconventional system.

The assumption of sinusoidal motion to describe track disturbance as well as to assess passenger reaction to vibration can only represent an approximation to the truth. An actual track will have irregularities randomly distributed along its length and the application of stochastic process theory is necessary<sup>[13]</sup>. Similarly laboratory tests are now planned in which the stimulus will also represent realistic track variations.

#### 4. CONCLUSIONS.

In spite of a cut-back in research and development, sufficient experimental evidence has already been accumulated to demonstrate the feasibility of both high-speed inter-city guided transport systems and urban intermediate systems. The linear motor has been shown to be effective and non-contact systems as represented by air cushions have been shown to be feasible. It is contended that from the point of view of the limiting parameters which govern passenger comfort, advanced systems can be constructed more satisfactorily than conventional railways.

#### REFERENCES

- [1] Barwell, F.T., "Automation and Control in Transport". Pergamon, Oxford, (1973).
- [2] "Improved High Speed Rail for the Northeast Corridor," U.S. Department of Transportation, January, 1973.
- [3] Evans, A.W. "A Study of Inter-City Travel Between London, the West Midlands and North West of England". University of Birmingham Dept. of Transportation and Environmental Planning, Publication No. 38, January, 1968.
- [4] Nayak, P.R. "Contact Vibration of Rolling Discs," J.Sound and Vibration, Vol.22, p.297 (1972).
- [5] Chirgwin, K.M. "Test Result from the U.S. Linear Motor Research Programme," I.E.E. Conf.Publication No.120 pp 236-261 + addendum (1974).

- |6| Loach, J.C. and Maycock, M.G. "Recent Developments in Railway Curve Design." Proc. Inst.Civil Engrs.p.503, October (1952).
- |7| Barwell, F.T. and Clarke, M.J. "Passengers' Reaction to Vibration," Passenger Environment. Conf.Railway Division, Institution of Mechanical Engineers, pp 48.57 (1972).
- |8| Clarke, M.J. and Osborne, D.J. "Reaction of Passengers to Public Service Vehicle Ride," Proc.N.A.S.A./DOT Ride Quality Symposium, pp.437-470 (1975).
- |9| McCullough, M.L. and Clarke, M.J. "Human Response to Whole-Body Vibration-Human Factors," Vol.16, pp.78-86 (1974).
- |10| Osborne, D.J. and Clarke, M.J. "The Determination of Equal Comfort Zones for Whole-Body Vibrations," Ergonomics, Vol.17, No.6, pp.769-82 (1974).
- |11| Clarke, M.J. "Techniques for Obtaining Subjective Response to Vertical Ride." Proceedings of N.A.S.A./DOT Ride Quality Symposium, pp.267-286, (1975).
- |12| Fellows, T.G. "High Speed Surface Transport," Railway Engineering Journal, Vol.3 pp.4-20, (1974).
- |13| Wickens, A.H. and Gilchrist, A.O. "Railway Vehicle Dynamics - The Emergence of a Practical Theory," Council of Engineering Institutions, London. MacRobert Award Lecture (1977).

BARWELL, F.T.

THE GOVERNING PARAMETERS AND ENGINEERING ALTERNATIVES  
FOR GUIDED TRANSPORT

Summary

Congestion of roads and airports is leading to revived interest in guided transport systems such as railways because they can provide the maximum capacity for a given investment. Recent developments in U.S.A. and Britain indicate that route configurations is a limiting factor. In particular the provision of a sufficiently comfortable ride constitutes a critical requirement. Experiments are described to determine passengers reaction to ride stimuli, both in the laboratory and in the field. It is concluded that speeds of up to 100 m/s are feasible employing technology the feasibility of which has already been tested on the full scale.

---

PARÂMETROS DIRETORES E ALTERNATIVAS DE  
ENGENHARIA PARA TRANSPORTE GUIADO

Sumário

O congestionamento de estradas e aeroportos tem reavivado o interesse em sistemas de transporte guiado, tais como estradas de ferro, porque proporcionam a máxima capacidade para um dado investimento. Recentes desenvolvimentos nos Estados Unidos da América e na Gran-Bretanha tem indicado que o traçado das rotas é um fator limitante. Em particular o proporcionamento de transporte suficientemente confortável constitui-se num requisito crítico. São descritos experimentos em laboratório e no campo, para determinar as reações dos passageiros a estímulos durante o transporte. Conclui-se que velocidades de até 100 m/s são viáveis empregando tecnologia cuja exequibilidade já foi testada em escala natural.

**A N A I S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 26**

PP. 1449 - 1458



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

FORMULACION DE UN ELEMENTO FINITO CURVO PARA LA SOLUCION

DE PROBLEMAS EN LA TEORIA DE CASCARAS DE REVOLUCION

Raúl A. FEIJOO  
Edgardo TAROCO  
Laboratório de Cálculo, CBPF  
Av. Wenceslau Braz, 71, zc-82  
20000 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar la obtención de un nuevo elemento finito curvo, que hace posible el análisis de cáscaras con simetría de revolución. En el problema "continuo" haremos uso del modelo de Flügge [1,2], que se reduce a la minimización de un funcional cuadrático [3,4].

Diversos tipos de elementos curvos han sido propuestos y usados en cáscaras de revolución [6,7]. Estos elementos al representar la geometría de la cáscara requieren in

formación sobre las primeras y segundas derivadas de la función que define la superficie media (vease [7, cap. 12], [6]).

Como fue indicado por Ciarlet [5] la introducción de esta continuidad no es esencial, siendo importante dentro de cada elemento una aproximación uniforme de la geometría de la cáscara.

Por último algunos resultados numéricos obtenidos con el elemento propuesto son presentados y comparados con los obtenidos por otros autores.

## 2. Geometría de la superficie media

Sea  $\Omega$  un abierto del espacio euclideo puntual bidimensional  $E^2$ , de contorno  $\Gamma$ . Una cáscara  $C_0$  queda definida a través de:

$$\underline{X} = \underline{X}(\underline{\xi}) = \underline{X}_0(\underline{\xi}) + |\zeta| \underline{n}$$

donde:

$$\begin{aligned} \underline{X}_0 : \bar{\Omega} \rightarrow E^3 & \text{ define la superficie media } S_0 \text{ de } C_0 \\ \underline{n} & \text{ es el vector unitario normal a } S_0 \text{ en } X_0(\underline{\xi}) \\ |\zeta| \leq h/2, \quad h = h(\underline{\xi}) & \text{ espesor de } C_0 \\ \underline{\xi} = (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma & \end{aligned}$$

En lo que sigue supondremos  $S_0$  regular, es decir:

$$\underline{X}_{0,\alpha} = \frac{\partial \underline{X}_0}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

son linealmente independientes para todo punto  $\underline{\xi} \in \bar{\Omega}$ .

En el caso de cáscaras de revolución (Fig. 1), la representación de  $S_0$  toma en general la forma siguiente:

$$\begin{aligned} r &= r(\xi) & \xi &\in [\xi_0, \xi_1] \\ z &= z(\xi) & \xi &\in [\xi_0, \xi_1] \\ \underline{X}_0 &= r \cos \theta \underline{e}_1 + r \operatorname{sen} \theta \underline{e}_2 + z \underline{e}_3 \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de  $\underline{e}_r$  con  $\underline{e}_1$ ,  $\{\underline{e}_i\}_{i \leq 3}$  son ejes ortogonales unitarios.



Luego:

$$\bar{\Omega} = I = [\xi_0, \xi_1] \times [0, 2\pi] \quad , \quad \xi^1 = \xi \quad , \quad \xi^2 = \theta$$

Designando con  $z' = dz/d\xi$ ,  $r' = dr/d\xi$  y  $s = (r'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$  tendremos que los coeficientes de la Primera y Segunda Forma Fundamental de la superficie media  $S_0$  serán:

$$g_{11} = \| \underline{X}_{0,1} \|^2 = s^2 \quad , \quad g_{12} = 0 \quad , \quad g_{22} = r^2$$

$$L_{11} = - \underline{X}_{0,11} \cdot \underline{n} = (r'' z' - r' z'')/s \quad , \quad L_{12} = - \underline{X}_{0,12} \cdot \underline{n} = 0$$

$$L_{22} = - \underline{X}_{0,22} \cdot \underline{n} = - r z' / s$$

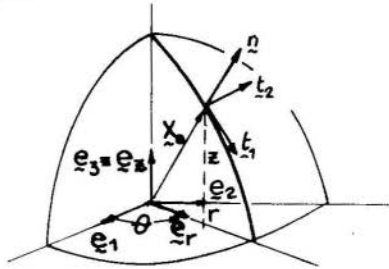


FIGURA 1

OBSERVACIÓN. Las coordenadas curvilineas en  $S_0(\xi, \theta)$ , son líneas principales de curvatura.

Los radios de curvatura (principales) están dados por:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L_{11}}{g_{11}} = (r'' z' - r' z'')/s^3 \quad , \quad \frac{1}{R_2} = \frac{L_{22}}{g_{22}} = - z' / r s$$

Un elemento de área  $dS_0$  de  $S_0$  está dado a su vez por:

$$dS_0 = \sqrt{g} \, d\xi \, d\theta \quad ,$$

donde:

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$$

### 3. Modelo variacional de la teoría de Flügge en cas- caras de revolución

Como fue presentado en [3,4] el problema de determi-  
nar el campo de desplazamiento de la cáscara  $C_0$  sometida a  
la acción de cargas, dentro de la teoría de Flügge, se redu-  
ce a determinar los desplazamientos de su superficie media  
 $S_0$ .

Designemos con  $u_i$ ,  $i=1,2,3$ , los desplazamientos de un  
punto de  $S_0$  respecto a la terna intrínseca unitaria y desig-  
nemos con  $u_4 = \frac{u_1}{R} - \frac{1}{s} \frac{du_3}{d\xi}$  al giro de la normal  $\underline{n}$  alrededor  
del eje intrínseco  $t_2 = \frac{X_{-0,2}}{\|X_{-0,2}\|}$ . En lo que sigue llama-  
remos con  $\underline{u}$  a:

$$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Supongamos, por simplicidad, que en  $S_0$  actúa una fuer-  
za  $\underline{f}$  de componentes  $f_1, f_2, f_3$  según la terna intrínseca  
unitaria.

Desarrollando  $\underline{u}$  y  $\underline{f}$  en serie de Fourier:

$$\underline{u} = \sum_{n < \infty} (q_n^s \cdot u_n^s + q_n^a \cdot u_n^a)$$

$$\underline{f} = \sum_{n < \infty} (\bar{q}_n^s \cdot \bar{f}_n^s + \bar{q}_n^a \cdot \bar{f}_n^a)$$

donde los índices  $s$  y  $a$  indican componentes simétricas y an-  
tisimétricas, y donde:

$$q_n^s = (cn\theta, -sn\theta, cn\theta, cn\theta), \quad q_n^a = (sn\theta, cn\theta, sn\theta, sn\theta)$$

$$\bar{q}_n^s = (cn\theta, -sn\theta, cn\theta, 0), \quad \bar{q}_n^a = (sn\theta, cn\theta, sn\theta, 0)$$

$$u_n^\ell = (u_{1n}^\ell, u_{2n}^\ell, u_{3n}^\ell, u_{4n}^\ell), \quad f_n^\ell = (f_{1n}^\ell, f_{2n}^\ell, f_{3n}^\ell, 0) \quad \ell=s, a$$

donde:  $cn\theta = \cos n\theta$ ,  $sn\theta = \sin n\theta$ .

Si suponemos a su vez que el material de la cáscara  
es Hookeano ortotrópico, el Principio de Mínima Energía Po-  
tencial Total, teniendo en cuenta las expresiones anterio-  
res, conduce al siguiente problema variacional [3,4]:

Determinar  $\underline{u}_n$  tal que minimice el funcional:

$$\pi_n = k_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} \{ (B_n \underline{u}_n) \cdot E(B_n \underline{u}_n) - \underline{u}_n \cdot \bar{f}_n \} s r d \xi$$

donde  $k_n$  es una constante real,  $B_n$  un operador matricial diferencial y  $E$  matriz con propiedades elasticas ( $k_n$ ,  $B_n$ ,  $E$  están definidos en [3,4]).

Los superíndices  $s$  o  $a$  han sido eliminados, entendiéndose que  $\underline{u}_n$  y  $\bar{f}_n$  corresponden al armónico simétrico o anti-simétrico según corresponda.

En lo que sigue introduciremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \{U_I\}_{I \leq 8} &= \{u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}, u_{4n}, u'_{1n}, u'_{2n}, u'_{3n}, u'_{4n}\} \\ a_n(\underline{u}_n, \underline{v}_n) &= k_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} (B_n \underline{u}_n) \cdot E(B_n \underline{v}_n) r s d \xi = \\ &= k_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} A_{IJ}(\xi) U_I U_J d \xi \end{aligned}$$

Designemos con  $\bar{H}^1(I)$  al espacio de funciones reales  $w$  definidas en  $I$ , tales que la función y sus primeras derivadas sean cuadrado integrables (en el sentido de Lebesgue) y tales que  $w(\xi_0) = \bar{w}$  y  $w(\xi_1) = \bar{w}$ , donde  $\bar{w}$  y  $\bar{w}$  son valores prescriptos. Dados  $\underline{u}_n, \underline{v}_n \in V = [\bar{H}^1(I)]$  de la inspección de  $B_n$  y  $E$  no resulta difícil mostrar que:

$$\begin{aligned} a_n(\underline{u}_n, \underline{v}_n) &\text{ es una forma bilineal, simétrica y continua en } V. \\ a_n(\underline{u}_n, \underline{u}_n) &\text{ es una forma cuadrática positiva definida en } V. \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que la solución del problema variacional existe y es única.

#### 4. Aproximaciones a través del Método de Elementos Finitos.

Los tipos de aproximaciones fueron introducidas al re

resolver con el Método de Elementos Finitos el problema variacional propuesto. Estas son:

- i) Aproximaciones en la geometría de la superficie. La aplicación  $\chi_0$  será aproximada a nivel de cada elemento finito por:

$$r = \sum_{i \leq 3} \phi_i r_i \quad , \quad z = \sum_{i \leq 3} \phi_i z_i$$

donde

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi(\xi-1), \quad \phi_2 = \frac{1}{2} \xi(\xi+1), \quad \phi_3 = 1-\xi^2, \quad \xi \in [-1, 1]$$

$(r_N, z_N)$  coordenadas de los nudos del elemento (Fig. 2).

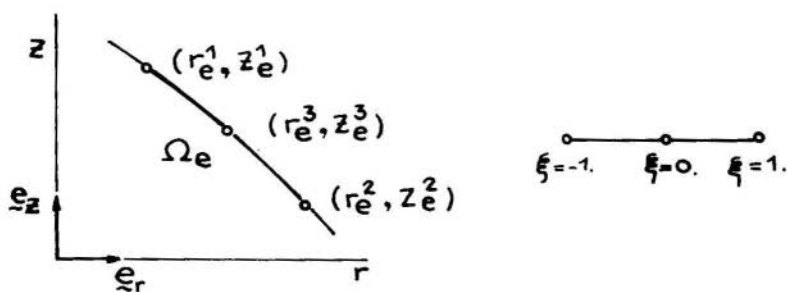


FIGURA 2

Los coeficientes  $A_{IJ}(\xi)$  son, de esta manera, aproximados por  $A_{IJ}^d(\xi)$ , verificándose-se

$$\lim_{d \rightarrow 0} |A_{IJ}(\xi) - A_{IJ}^d(\xi)| \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente en el elemento}$$

y donde  $d$  es la mayor distancia entre puntos de elemento.

- ii) Aproximaciones al campo de desplazamientos. A nivel de cada elemento el campo  $\underline{u}_n$  será aproximado por otro  $\hat{\underline{u}}_n$  dado por:

$$\hat{u}_{1n} = \sum_{i \leq 3} \phi_i \hat{u}_{1n}^i \quad , \quad \hat{u}_{2n} = \sum_{i \leq 3} \phi_i \hat{u}_{2n}^i$$

$$\hat{u}_{3n} = \sum_{i \leq 3} (\psi_{0i} \hat{u}_{3n}^i + \psi_{1i} \frac{s^i}{R_1^i} \hat{u}_{1n}^i - \psi_{1i} s^i u_{4n}^i)$$

$$\hat{u}_{4n} = \sum_{i \leq 3} \left[ \left( \frac{\phi^i}{R_1^i} - \frac{1}{s} \psi_{1i, \xi} \frac{s^i}{R_1^i} \right) \hat{u}_{1n}^i - \frac{1}{s} \psi_{0i, \xi} \hat{u}_{3n}^i + \frac{1}{s} \psi_{1i, \xi} s^i \hat{u}_{4n}^i \right]$$

donde:

$s^i, R_1^i$  indican los valores de  $s$  y  $R_1$  en el nudo  $i$ -ésimo del elemento.

$$\psi_{1i, \xi} = \frac{d\psi_{1i}}{d\xi}$$

$$\psi_{01} = \xi^2 (1-\xi)^2 (1 + \frac{3}{4}\xi) \quad \psi_{11} = \frac{1}{4} \xi^2 (1-\xi)^2 (1+\xi)$$

$$\psi_{02} = \xi^2 (1+\xi)^2 (1 - \frac{3}{4}\xi) \quad \psi_{12} = -\frac{1}{4} \xi^2 (1+\xi)^2 (1-\xi)$$

$$\psi_{03} = (1-\xi^2)^2 \quad \psi_{13} = \xi(1-\xi^2)^2$$

NOTA. Con el campo de desplazamientos adoptados el vector  $\hat{u}_n$  referido a la terna global  $e_r, e_z, e_\theta$  es continuo independientemente de las discontinuidades introducidas en la aproximación de la geometría de la superficie  $S_0$ , es decir  $\hat{u}_n \in V$

### 5. Aplicaciones Numéricas

En esta sección presentamos resultados numéricos obtenidos empleando el elemento propuesto y los comparamos con "Soluciones exactas" dadas por otros autores.

Ejemplo 1. Toro sometido a presión interna  $p$  (Fig. 3), de características:

$$a = 1.5, \quad b = 1, \quad h = 0.005, \quad p = 0.00005, \quad E = 1, \\ \nu = 0.5$$

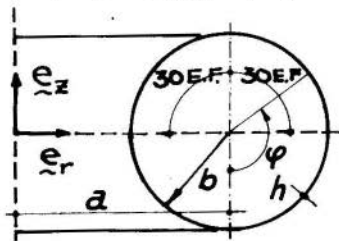


FIGURA 3

En Tabla 1 se comparan los resultados obtenidos con una partición de 30 elementos (Fig. 3) con los obtenidos por Kalnins [12] a través de técnicas de integración directa de las ecuaciones diferenciales de equilibrio.

Angulo $\phi$		90°	126°	162	180	198	234	270
$\frac{u_3}{b} \cdot 10^3$	Kalnins	1.601	1.650	1.832	1.990	2.254	3.168	3.997
	Pte.Elemento	1.597	1.647	1.854	1.912	2.255	3.167	4.006
$\frac{N_{11}}{hE} \cdot 10^3$	Kalnins	1.298	1.427	2.159	4.815	4.162	1.269	0.100
	Pte.Elemento	1.296	1.426	2.165	4.804	4.179	1.272	0.100

Ejemplo 2. Cáscara cilíndrica circular empotrada, estudiada por Kraus [2] para  $h/R = 20$  y distintas relaciones  $L/R$ , donde  $L$  es la longitud de la cáscara. La Fig. 4 presenta las soluciones obtenidas con el elemento propuesto empleando teoría de Love para el caso de un incremento de temperatura  $T_0$  y una presión radial constante  $p$ .

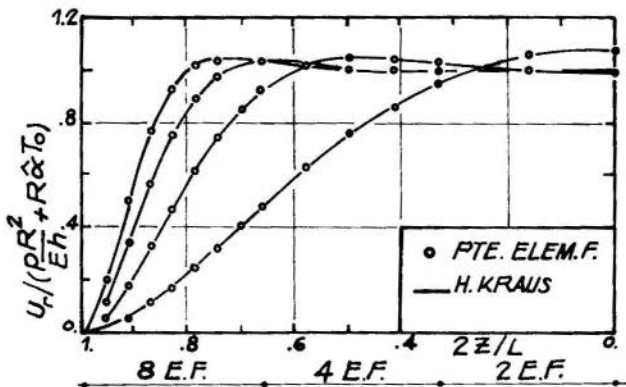


FIGURA 4

Agradecimientos. Este trabajo fue financiado en parte por el CNPq (T.C. N° 2222.0712/76).

Bibliografía

- [1] Flügge, W., "Stresses in Shells", Springer-Verlag, (1973).
- [2] Kraus, H., "Thin Elastic Shells", Wiley, (1967).
- [3] Feijóo, R.A., Rojas, H., Taroco, E., y Bevilacqua, L., Metodos Variacionales en Cáscaras Axisimétricas Sometidas a Cargas Arbitrarias, XVIII Jorn.Sud Amer. Ing. Estruc., Brasil, (1976).
- [4] Rojas, H., Metodos Variacionales en la Teoría de Love y Flügge de Cáscaras Axisimétricas, Tesis M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [5] Ciarlet, P.G., Conforming Finite Element Methods for the Shell Problem, "The Math. of Finite Elements and Applications II", J.R. Whiteman ed., p. 105-123, Academic Press, (1976).
- [6] Argyris, J.H., Lochner, N., On the Application of the SHEBA Shell Element, Comp.Meth.Appl.Mech. Eng. 1, p. 317-347, (1972).
- [7] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, (1971).
- [8] Kalnins, A., Analysis of Shells of Revolution Subjected to Symmetrical and Non-Symmetrical Loads, J.Appl.Mech., Vol.31, Nº 3, p.467-476, Sept. 1964.

RAUL A. FEIJOO, y EDGARDO TAROCO

FORMULACION DE UN ELEMENTO FINITO CURVO PARA LA SOLUCION  
DE PROBLEMAS EN LA TEORIA DE CASCARAS DE REVOLUCION

Resumen

En este trabajo se presenta la obtención de un nuevo elemento finito curvo, que hace posible el análisis de cáscaras con simetría de revolución. El funcional anergia asociado al modelo de Flügge, la aproximación de la geometría de la superficie media de la cáscara y la obtención del espacio de aproximación son analizadas. Por último, algunos resultados numéricos son presentados a fin de mostrar la eficiencia del elemento.

---

A CURVED FINITE ELEMENT FORMULATION FOR  
SHELLS OF REVOLUTION

Summary

The formulation of a new curved finite element for the analysis of shells of revolution is presented. The energy functional, related to Flügge's theory, the approximation of the middle surface of the shell and the definition of the approximation space are discussed. Finally some numerical results are presented in order to evaluate the behavior of the new element.



**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 27**

PP. 1459 - 1477



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

LAMINAÇÃO PERIFÉRICA DE DISCOS

I - ABORDAGEM TEÓRICA POR ELEMENTOS FINITOS

Arno BLASS, Professor Titular.  
Depto. de Engenharia Mecânica.  
Univ. Federal de Santa Catarina,  
Florianópolis, Brasil.

Bela LENGYEL, Senior Lecturer,  
Dept. of Mechanical Engineering.  
Imperial College of Science and Technology,  
London University, London, UK.

1. Introdução

O uso do método dos elementos finitos em análise elasto-plástica foi amplamente investigado na última década, em seguida aos trabalhos pioneiros de Marçal e King [1] e de

Yamada et al [2]. Os primeiros trabalhos iniciais nesse sentido [5], se preocupavam maiormente com problemas de cálculo estrutural e se limitavam a descrever o início da deformação em regime plástico. Contudo, as potencialidades do método logo se tornaram aparentes, e a extensão dos algoritmos a problemas envolvendo maior magnitude de deformação e, portanto, à análise de processos de conformação seguiu-se rapidamente. De início foram estudados processos simples de deformação, como endentamento, recalque e extrusão. Essas aplicações iniciais eram geralmente baseadas em uma formulação restrita a deformações infinitesimais, embora por vezes envolvessem a correção progressiva da geometria do contínuo.

Logo se observou que uma abordagem mais rigorosa, envolvendo um embasamento de Mecânica dos Contínuos, era essencial à extensão do método ao domínio das deformações finitas. Esta tem sido a linha de ataque seguida desde 1970. Uma ampla e completa resenha crítica das publicações do primeiro lustro dessa década foi apresentada por McMeeking e Rice [3].

Hibbitt, Marçal e Rice [4] propuseram uma formulação a partir do princípio do trabalho virtual para grandes deformações. Seu esquema emprega um referencial lagrangeano (fixo) e os termos de rigidez obtidos resultam da composição de quatro componentes elementares. Uma breve resenha de trabalhos que usam esse esquema foi já apresentada por um dos autores [5].

Kitagawa, Seguchi e Tomita [6] analisaram o problema da deformação finita usando um sistema convectivo de coordenadas, residente no contínuo; nestas circunstâncias, mostram eles, um dos termos de rigidez que aparece em [4] deixa de existir, mas aparece outro termo adicional. A formulação obtida é implementada num exemplo plano simples [7].

Osius [8] desenvolveu uma formulação euleriana mais simples, que lhe permitiu a análise de certo número de problemas elasto-plásticos elementares, como a análise da estricção em espécimes chatos submetidos à tração. A lei constitutiva adotada, no entanto, conduz a uma rigidez não simétrica.

trica. McMeeking e Rice [3] seguiram senda similar, usando as mesmas equações de equilíbrio, mas obtendo a lei constitutiva a partir de um potencial quadrático homogêneo; a rigidez resultante é simétrica. Também eles analisaram a estricção de barras chatas à tração, comparando seus resultados com os de Osias. A melhor concordância dos resultados de Osias com os que se obtém da análise rígido-plástica é explicada em função do alongamento e conseqüente perda de a<sub>c</sub>uidade da malha de elementos finitos. Seu trabalho apresenta, ainda, uma formulação geral, de que tanto a descrição lagrangeana como a euleriana podem ser obtidas; essa formulação é usada para a análise crítica de uma série de trabalhos anteriores.

O presente trabalho constitui uma nova implementação da formulação lagrangeana de Hibbitt et al [4], em versão modificada e restrita a elementos simplex, associada a uma forma alternativa do método da tensão inicial de Zienkiewicz [9]. As restrições impostas por Hibbitt persistem; exige-se que o material a deformar seja isotrópico e isento de efeito Bauschinger, que as deformações elásticas sejam pequenas e que a deformação seja isotérmica. A aplicação, até o momento, foi feita à laminação periférica de discos, processo analisado pelos autores em outro local [10], juntamente com a comparação dos resultados obtidos com a presente formulação com resultados experimentais e outros, derivados de uma formulação por técnicas convencionais de análise limite ("upper bound").

## 2. Convenções e Notação

São usadas exclusivamente coordenadas cartesianas ortogonais. Sub-índices denotam direções coordenadas, e superíndices denotam nós da malha de elementos finitos. É usada a convenção generalizada de soma proposta por Wissmann [11], assim expressa: uma operação conterà a soma sobre todos os possíveis valores de um índice, sempre que esse índice não aparecer em ambos os membros de uma equação.

As somas sobre os nós se estendem sobre todos os nós da malha, entendendo-se, porém, que os parâmetros relevan-

tes serão tomados como nulos sempre que um nó não pertencer ao elemento momentaneamente considerado.

Quantidades associadas a pontos nodais são encimadas por uma barra. Coordenadas iniciais são dadas em maiúsculas, coordenadas instantâneas em minúsculas. As respectivas derivadas são representadas por vírgulas e por barras oblíquas.

Os superíndices "o", "e" e "p" identificam, respectivamente, variáveis relacionadas à geometria original (não deformada) do contínuo e variáveis referidas aos estados elástico e plástico. Obviamente não dão margem a processos de soma.

O prefixo  $\Delta$  denota um incremento de uma variável. O símbolo  $\sim$  denota valores provisórios das variáveis.

A	Área das fronteiras de um elemento
$C_{ijkl}, D_{ijkl}$	Tensores constitutivos euleriano e lagrangeano
$E_{ij}$	Tensor de deformação de Green
$e_{ij}$	Tensor de deformação de Cauchy
$F_i$	Componente das forças de massas por unidade de volume
G	Módulo de torção
H'	Inclinação da curva tensão equivalente - deformação plástica
J	Jacobiano da transformação das coordenadas instantâneas às originais, para um elemento da malha
$\bar{K}_{kn}^{\ell m}$	Componentes da matriz de rigidez elementar
${}^0\bar{K}_{kn}^{\ell m}$	Matriz rigidez incremental elementar
${}^1\bar{K}_{kn}^{\ell m}$	Matriz rigidez elementar dos deslocamentos iniciais
${}^2\bar{K}_{kn}^{\ell m}$	Matriz rigidez elementar das tensões iniciais
$N^j$	Função de forma para um nó
$n_k$	Componentes de um vetor direcional unitário
$\bar{P}_k^{\ell}$	Componentes das forças nodais equivalentes
$\bar{Q}_{kn}^{\ell m}$	Matriz rigidez elementar das cargas iniciais
R	Parâmetro da expressão de $C_{ijkl}$

$S_{ij}$	Tensor de tensões de Kirchhoff
$s_{ij}, s'_{ij}$	Tensor de tensões euleriano (Cauchy) e sua componente desviadora
$\bar{s}$	Tensão equivalente
$T_i$	Componentes de forças distribuídas por unidade de superfície
$u_i, \bar{u}_i^j$	Componentes geral e nodal de deslocamento
$V$	Volume de um elemento
$X_i, x_i$	Componentes coordenadas originais e instantâneas, respectivamente
$\delta\Delta S_{ij}, \delta\Delta s_{ij}$	Tensões diferenciais no método da tensão inicial
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\Delta\bar{P}_k^\ell, \Delta\bar{P}_k^\ell$	Forças incrementais equivalente e efetiva
$\nu$	Módulo de Poisson
$\Delta s_{ij}^T$	Tensões incrementais de Truesdell

### 3. Formulação Lagrangeana

Equação de Equilíbrio - Hibbitt et al [4] partem de  $\underline{u}$  ma abordagem clássica do método dos elementos finitos, expressa na forma de uma hipótese de deslocamentos

$$u_i = N^j \bar{u}_i^j \quad (1)$$

e da relação básica

$$X_i = x_i - u_i$$

A expressão lagrangeana da equação da velocidade virtual,

$$\int_{A^0} T_i^0 \dot{u}_i dA^0 + \int_{V^0} F_i^0 \dot{u}_i dV^0 = \int_{V^0} S_{ij} \dot{E}_{ij} dV^0,$$

considerando a Eq. (1) e a expressão das deformações de Green,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}],$$

se reescreve para

$$\left\{ \int_A T_k^o N^\ell dA^o + \int_V F_k^o N^\ell dV^o \right\} \bar{u}_k^\ell = \frac{1}{2} \left\{ \int_{V^o} S_{ij} [N_{,j}^\ell \delta_{ik} + N_{,i}^\ell \delta_{jk} + (N_{,i}^m N_{,j}^\ell + N_{,i}^\ell N_{,j}^m) \bar{u}_k^m] dV^o \right\} \bar{u}_k^\ell$$

e a arbitrariedade do campo de velocidades requer a igualdade das expressões contidas nos dois colchetes. O colchete à esquerda denota a componente de força equivalente, assim

$$\bar{P}_k^\ell = \frac{1}{2} \int_{V^o} S_{ij} [N_{,j}^\ell \delta_{ik} + N_{,i}^\ell \delta_{jk} + (N_{,i}^m N_{,j}^\ell + N_{,i}^\ell N_{,j}^m) \bar{u}_k^m] dV^o$$

que se expressa, em forma incremental, como

$$\Delta \bar{P}_k^\ell = \frac{1}{2} \int_{V^o} \Delta S_{ij} [N_{,j}^\ell \delta_{ik} + N_{,i}^\ell \delta_{jk} + (N_{,i}^m N_{,j}^\ell + N_{,i}^\ell N_{,j}^m) \bar{u}_k^m] dV^o + \frac{1}{2} \int_{V^o} S_{ij} (N_{,i}^m N_{,j}^\ell + N_{,i}^\ell N_{,j}^m) \Delta \bar{u}_k^m dV^o \quad (2)$$

Os incrementos do tensor de Kirchhoff se relacionam com seus correspondentes eulerianos pela equação [4, 5]

$$\Delta S_{ij} = J X_{i/k} X_{j/\ell} \Delta s_{kl}^T, \quad (3)$$

onde

$$\Delta s_{ij}^T = \Delta s_{ij} - s_{ik} \Delta u_{j/k} - s_{jk} \Delta u_{i/k} + s_{ij} \Delta u_{k/k} \quad (4)$$

é uma definição objetiva de tensão incremental proposta por Truesdell [5, 12].

Lei Constitutiva - É introduzida uma equação constitutiva da forma

$$\Delta S_{ij} = D_{ijkl} \Delta E_{kl}, \quad (5)$$

onde  $D_{ijkl}$  se supõe ser função do estado atual do contínuo. Esse termo possui pelo menos dois níveis de simetria,

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk}$$

Ambos os tensores de segunda ordem que comparecem na equa-

ção (5) são objetivos e essa é, pois, uma equação constitutiva adequada à análise de deformações finitas. Infelizmente o comportamento dos materiais é normalmente expresso em termos de tensões e deformações verdadeiras. É conhecida a equação constitutiva usada em análise infinitesimal, quando se usam as equações de Prandtl-Reuss e o critério de escoamento de von Mises,

$$\Delta s_{ij} = C_{ijkl} \Delta e_{ij} \quad (6)$$

onde

$$C_{ijkl} = 2G \left[ \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{s'_{ij} s'_{kl}}{R} \right]$$

com

$$R = \frac{2}{3} \bar{s}^2 \left( 1 + \frac{H'}{3G} \right)$$

e

$$H' = \frac{d\bar{s}}{d\bar{e}^p}$$

Sob as condições restritivas impostas por Hibbitt [4] os termos de  $C_{ijkl}$  podem ser supostos dependentes do estado instantâneo de tensões, apenas, mesmo quando se considerarem deformações totais finitas. Mas eles devem relacionar definições objetivas de tensões e deformações incrementais.

O tensor deformação incremental

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} [\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}]$$

constitui uma definição objetiva de deformação. A literatura exhibe grande variedade de definições objetivas de tensões incrementais (ou taxas de tensão) [5, 17], mas exceto o circunstanciado estudo de Prager [13], não existem conclusões firmes quanto à aplicabilidade de cada uma delas.

Prager sugere que a definição de Jaumann deveria ser aplicável a problemas elastoplásticos, mas outros argumentam que a escolha da definição adequada é uma questão em grande parte de gosto ou conveniência [14, 15]. Contrariando o procedimento de Hibbitt et al, os autores introduzem aqui, como primeiro membro da Eq. (6), a definição de Truesdell (Equa-

ção (4)).

Sendo

$$\Delta e_{k\ell} = X_{i/k} X_{j/\ell} \Delta E_{ij},$$

e considerando as equações (3), (5) e (6) obtém-se finalmente

$$D_{ijkl} = J X_{i/m} X_{j/n} X_{k/p} X_{\ell/q} C_{mnpq} \quad (7)$$

o que assegura ao tensor constitutivo o nível de simetria adicional

$$D_{ijkl} = D_{klij}$$

que não existe quando é usada outra definição objetiva de tensão incremental. A formulação infinitesimal pode ser recuperada, acima, como caso limite, o que também não ocorre para outras definições objetivas.

Equações de Rigidez - Usando agora as Eqs. (7), (5) e (3), a definição de deformação de Green e a hipótese de deslocamentos na Eq. (2), e considerando os níveis de simetria do tensor  $D_{ijkl}$ , chega-se a

$$\Delta \bar{P}_k^\ell = \bar{K}_{kn}^{\ell m} \Delta \bar{u}_n^m, \quad (8)$$

em que os termos elementares de rigidez são dados pela soma

$$\bar{K}_{kn}^{\ell m} = {}^0\bar{K}_{kn}^{\ell m} + {}^1\bar{K}_{kn}^{\ell m} + {}^2\bar{K}_{kn}^{\ell m},$$

em que

$${}^0\bar{K}_{kn}^{\ell m} = \int_{V^0} N_{,i}^\ell D_{iknj} N_{,j}^m dV^0$$

é o termo de rigidez incremental, formalmente similar ao que ocorre na análise infinitesimal;

$$\begin{aligned} {}^1\bar{K}_{kn}^{\ell m} = & \int_{V^0} N_{,i}^\ell N_{,j}^m N_{,r}^f [D_{ikrj} \bar{u}_n^f + \\ & + \bar{u}_k^f D_{irsj} \bar{u}_n^g N_{,s}^g] dV^0 \end{aligned}$$



é o termo de rigidez devido aos deslocamentos iniciais; e

$${}^2\bar{k}_{kn}^{\ell m} = \int_{V^0} S_{ij} \delta_{kn} N_{,i}^{\ell} N_{,j}^m dV^0$$

é o termo de rigidez devido às tensões iniciais. A simetria

$$\bar{k}_{kn}^{\ell m} = \bar{k}_{nk}^{m\ell}$$

é evidente.

Rigidez devida ao carregamento inicial - Hibbitt et al [4] identificam um quarto termo de rigidez, devido ao carregamento inicial, mas lembram que esse termo não goza, geralmente, da propriedade de simetria enunciada ao final da sub-seção anterior. Além do mais, ele só é diretamente expressável em algumas poucas situações particulares. Eles expressam

$$\Delta \bar{P}_k^{\ell} = \Delta \tilde{\bar{P}}_k^{\ell} + \bar{Q}_{kn}^{\ell m} \Delta \bar{u}_n^m, \quad (9)$$

em que  $\Delta \tilde{\bar{P}}_k^{\ell}$  mede as variações nas forças aplicadas e  $\bar{Q}_{kn}^{\ell m}$  é o termo de rigidez devido ao carregamento pré-existente.

Parece-nos preferível trabalhar com a Eq. (8) ao invés da alternativa seguida em [4], baseada na Eq. (9), corrigindo "a posteriori" as forças incrementais para  $\Delta \tilde{\bar{P}}_k^{\ell}$ , através de um procedimento iterativo descrito a seguir.

O sistema de forças externas aplicadas é inicialmente decomposto em suas componentes nodais. Para uma carga compressiva que atue diretamente sobre um nó tem-se

$$\int_A \bar{T}_k^{\ell} dA = \bar{P}_k^{\ell} = |\bar{P}^{\ell}| n_k$$

sendo  $n_k$  as componentes de um vetor unitário direcional. Em forma incremental

$$\Delta \bar{P}_k^{\ell} = \Delta |\bar{P}^{\ell}| n_k + |\bar{P}^{\ell}| \Delta n_k \quad (10a)$$

donde

$$\Delta \tilde{\bar{P}}_k^{\ell} = \Delta |\bar{P}^{\ell}| n_k \quad (10b)$$

$$e \quad \bar{Q}_{kn}^{\ell m} \Delta u_n^m = |\bar{P}^\ell| \Delta n_k \quad (10c)$$

são claramente identificados como os dois termos que intervem na Eq. (9). É evidente, também, que se a direção das forças não se alterar, não haverá rigidez devida ao carregamento inicial a considerar, como antecipado na Ref. [9]. Em geral, porém, não é esse o caso. A Eq. (9) se reescreve, pois,

$$\Delta \bar{P}_k^\ell = \Delta \bar{P}_k^\ell - |\bar{P}^\ell| \Delta n_k$$

com

$$\Delta n_k = \frac{\bar{P}_k^\ell + \Delta \bar{P}_k^\ell}{|\bar{P}^\ell + \Delta \bar{P}^\ell|} - \frac{\bar{P}_k^\ell}{|\bar{P}^\ell|} \quad (10d)$$

e, supondo inicialmente  $\Delta \bar{P}_k^\ell = \Delta \bar{P}_k^{\tilde{\ell}}$ , é possível obter uma estimativa para  $\Delta n_k$ , com a qual se melhora a estimativa de  $\Delta \bar{P}_k^\ell$ , e com que se reestima  $\Delta n_k$ , e assim por diante. A convergência tem sido rápida [5], demandando cerca de três ciclos iterativos para um nível satisfatório de precisão.

Método da tensão inicial - Esse método foi introduzido por Zienkiewicz et al [9] para manter os estados calculados de tensão dentro de limites razoáveis da curva prescrita tensão-deformação. Nessa proposição original os autores efetuam toda a análise elasto-plástica trabalhando com uma matriz de rigidez constante (elástica).

Numa formulação para deformações finitas, entretanto, mesmo o termo puramente elástico do tensor constitutivo deve ser corrigido face às alterações de geometria do contínuo, e assim também a matriz de rigidez precisa ser periodicamente atualizada. A vantagem computacional de trabalhar com uma matriz de rigidez constante é, assim, perdida, e torna-se conveniente, então, nas sucessivas recomputações, calcular a matriz de rigidez elasto-plástica. Essa alternativa deve assegurar convergência mais rápida ao algoritmo da "tensão inicial", que fica modificado na forma descrita abaixo, (fig. 1):

1. Preparar tensor constitutivo inicial (elástico) e

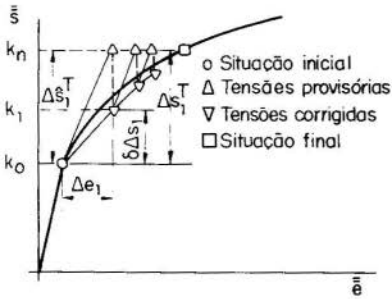


Fig.1 - Método da tensão inicial modificado.

matriz de rigidez geral.

2. Para dados incrementos de cargas, resolver a Eq. (8) para os deslocamentos incrementais; calcular incrementos de deformação de Green,  $\Delta E_{ij}$ , incrementos de deformação de Cauchy,  $\Delta e_{ij}$  e deformação plástica incremental equivalente.

$$\Delta \bar{e}^P = \frac{s'_{ij} \Delta e_{ij}}{\bar{s} (1 + H'/3G)}$$

3. Se um elemento ainda continua no estado elástico, calcular incrementos provisórios de tensão  $\Delta S_{ij}$  e  $\Delta \hat{s}_{ij}$  usando o tensor constitutivo produzido ao início do incremento de carga. Caso contrário, calcular  $\Delta S_{ij}$  e  $\Delta \hat{s}_{ij}$  posteriormente. Expressar

$$\bar{s} = H' d\bar{e}^P$$

4. Calcular tensões provisórias

$$S_{ij} = S_{ij} + \Delta S_{ij}$$

$$\hat{s}_{ij} = s_{ij} + \Delta \hat{s}_{ij}$$

5. Calcular a tensão equivalente  $\hat{\bar{s}}$  e a ordenada esperada  $\hat{k}$  da curva prescrita tensão-deformação.

6. Se  $\hat{\bar{s}} < 0,995 \hat{k}$  o elemento será tratado como elástico no próximo incremento; caso contrário:

6a. Calcular a inclinação provisória

$$\hat{H}' = (\hat{k} - \bar{s}) / \Delta \bar{e}^P$$

e os tensores constitutivos provisórios  $\hat{C}_{ijkl}$  e  $\hat{D}_{ijkl}$ .

6b. Calcular os incrementos corrigidos de tensão  $\Delta s_{ij}^T$  e  $\Delta S_{ij}$  usando os parâmetros provisórios recém obtidos.

6c. Calcular tensões diferenciais a serem suportadas por forças de massa,

$$\delta \Delta S_{ij} = \Delta \hat{S}_{ij} - \Delta S_{ij}$$

e

$$\delta \Delta s_{ij} = \Delta \hat{s}_{ij}^T - \Delta s_{ij}^T$$

6d. Atualizar e armazenar as deformações de Green e as novas componentes de tensão

$$S_{ij} = \hat{S}_{ij} - \delta \Delta S_{ij}$$

e

$$s_{ij} = \hat{s}_{ij} - \delta \Delta s_{ij}$$

6e. Se se tratar do primeiro ciclo corretivo, atualizar as forças nodais.

7. Computar as forças nodais que equilibram as tensões diferenciais

$$\Delta \bar{P}_k^\ell = \int_{V^0} N_{,i}^\ell \delta \Delta S_{ij} (\delta_{jk} + N_{,j}^m \bar{u}_k^m) dV^0$$

8. Verificar o erro de  $\frac{\delta}{k}$  face a  $\hat{k}$ . Se acima de um limite prescrito (por exemplo, 0,5%), repetir o procedimento a partir da etapa 2. Do contrário substituir todas as tensões de escoamento, tensões equivalentes, inclinações e tensões constitutivas pelos valores provisórios, recalcular a matriz de rigidez geral e remover as forças residuais recém calculadas do sistema de forças. Se os critérios de terminação não forem satisfeitos, repetir o procedimento a partir da etapa 2.

#### 4. Aplicação

A aplicação, até o momento, da formulação aqui apresentada foi feita exclusivamente ao processo de conformação denominado laminação periférica de discos [5, 10, 16, 17]. O processo específico em análise introduz as condições de fronteira a serem impostas ao problema.

A descrição desse processo de conformação é apresentada em maior detalhe em outro trabalho [10]. Em resumo, porém, o mesmo consiste na produção de flanges em um disco de chapa pela compressão da periferia do disco girante por um rolete, numa instalação especificamente desenvolvida pelos

autores [5]. A deformação pode ser feita a quente ou a frio de acordo com a conveniência.

A análise por elementos finitos fica restrita, por razões de simetria, à metade da espessura do disco (Fig. 2), e para economia da malha, a um setor originalmente limitado por duas superfícies planas que contêm o eixo do disco, e duas superfícies cilíndricas.

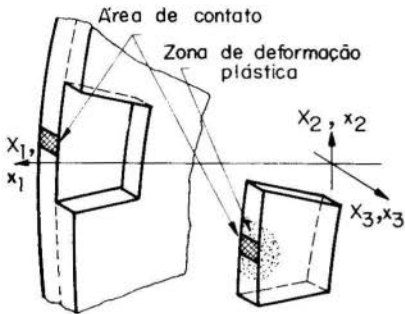


Fig.2- Setor para a malha de elemento finitos.

Esse setor é dividido num número arbitrário de sub-setores menores. A malha é prescrita para um bloco básico, e o código desenvolvido gera os nós e elementos e calcula os respectivos parâmetros geométricos para tantos blocos básicos, ou sub-setores, que se tenham prescrito para a análise do problema. Para maior

flexibilidade, o bloco básico (Fig. 3) apresenta um parâmetro livre (o ângulo central  $\xi_0$ ) que pode ser especificado em termos de maior conveniência. Seus limites de variação, entretanto, são bastante estreitos, afim de que seja evitada a geração de elementos patológicos.

Além da óbvia condição de simetria com relação à espessura (ausência de deslocamentos axiais no plano médio do

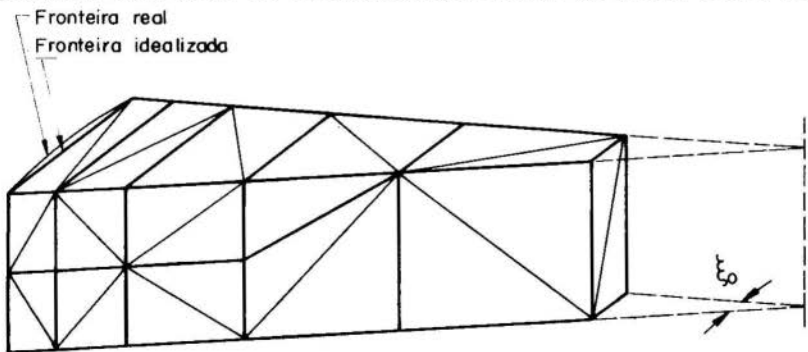


Fig.3 - Subdivisão do bloco básico.

disco) havia necessidade de prescrever condições de fronteira nas três interfaces remanescentes da malha com o restante do corpo de prova. Essas condições se revelaram o ponto fraco da formulação. Soluções aparentemente rigorosas, baseadas na teoria de contato de Hertz, exigiram que essa fronteira estivesse suficientemente removida da zona de deformação plástica, mas a manutenção do código computacional em limites exequíveis exigia a máxima restrição da malha, violando esse requisito, e produzindo resultados anômalos.

A solução eventualmente adotada foi de compromisso. A superfície cilíndrica limite foi, suposta rígida, enquanto que para as duas superfícies planas foi adotada uma condição menos drástica, admitindo exclusivamente componentes de deslocamento para fora do plano original. Essas restrições encontravam boa justificativa no trabalho experimental [10] mas essa é a única razão, a par da simplicidade de sua formulação, para seu emprego.

Uma condição adicional introduzida dizia respeito à distribuição da força incremental aplicada entre os nós momentaneamente situados na zona de contato com o rolete de compressão. Partia-se aqui de uma distribuição aritmética arbitrariamente prescrita, e se efetuava uma redistribuição de carga no decorrer do próprio processo resolutivo da Eq. (8), de modo a satisfazer a condição imposta pela geometria do rolete (cilindricidade da superfície de contato).

A solução da Eq. (8) se fazia pelo método de sobre-relaxações sucessivas, associado a um algoritmo desenvolvido por Carré [18] para otimizar o fator de sobre-relaxação.

### 5. Comentários

A formulação lagrangeana aqui apresentada difere da proposta por Hibbit et al [4] em dois aspectos essenciais: os procedimentos iterativos que evitam o cálculo dos termos de rigidez devidos ao carregamento inicial e que introduzem a versão modificada do método da tensão inicial. Essa última possibilidade já fora aventada por Nayak [19], mas, ao que consta aos autores, jamais foi implementada anteriormente.

O código desenvolvido, EPFELDA, comportou-se satisfatoriamente no que diz respeito à obediência à curva prescrita tensão-deformação, conforme exemplificado em um caso particular na Fig. 4, mas deixou a desejar no que diz respeito à predição do modo de deformação produzido, via de regra subestimando grosseiramente a expansão lateral produzida, para um dado nível de penetração radial do rolete de compressão (Fig. 5). Também a força requerida foi superestimada, como se verá em outro local [10]. Some-se a isso problemas de perda de convergência após certo número de incrementos de carga (variável em função da velocidade de carregamento), o que obrigava a adoção de incrementos de carga extremamente reduzidos, contrariando os objetivos que levaram ao desenvolvimento do código.

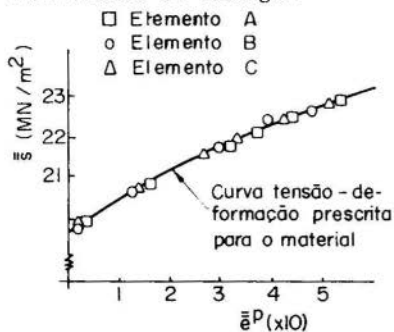


Fig.4 - Curva tensão equivalente-deformação equivalente

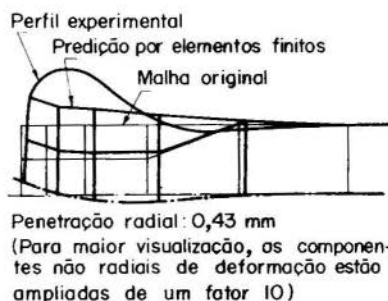


Fig.5 - Modo de deformação na laminação periférica.

## 6. Conclusões

As dificuldades encontradas pelo uso da formulação aqui proposta podem ser explicadas por duas razões básicas: o uso de uma malha demasiadamente compacta e a aplicação inicial a um problema demasiado complexo em sua natureza tridimensional e nas condições de fronteira que requeria. Teria sido melhor aplicá-lo inicialmente a um problema bidimensional menos ambicioso, com a vantagem de uma formulação simplificada e a possibilidade de se ter condições de fronteira perfeitamente definidas e de implementação mais simples.

Parece, também, que as vantagens aparentes da formulação la grangeana (referência sistemática à geometria original) são mais do que contrabalançadas pelas dificuldades posteriores [3].

Um dos autores (A. Blass) se preocupa, no momento, em realizar a aplicação simplificada mencionada acima, analisan do o processo de compressão de espécimes entre placas planas.

### 7. Agradecimentos

Um dos autores (A. Blass) agradece o suporte financeiro da CAPES e da UFSC, que possibilitou o presente trabalho.

### Bibliografia

- [1] Marçal, P.V. & King, I.P., Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method. *Int. J. Mech. Sci.*, 9, 143-155 (1967).
- [2] Yamada, Y., Yoshimura, N. & Sakurai, T., Plastic Stress strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method. *Int. J. mech. Sci.*, 10, 343-354 (1968).
- [3] McMeeking, R.M. & Rice, J.R., Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. *Int. J. Sols. Structs.*, 11, 601-606 (1975).
- [4] Hibbitt, D.H., Marçal, P.V. & Rice, J.R., A finite element formulation for problems of large strain and large displacements. *Int. J. Sols. Structs.*, 6, 1069-1086, (1970).
- [5] Blass, A., "A finite element approach in metalworking and its application to the radial upsetting process". Tese de doutorado, London University (1976).
- [6] Kitagawa, H., Seguchi, Y. & Tomita, Y., An incremental theory of large displacements and its finite element formulation. *Ing. Archiv*, 41, 213-224 (1972).



- [7] Kitagawa, H & Tomita, Y., An incremental finite element analysis of two-dimensional large strain and large displacement problem for elasto-plastic flow (em japonês). Trans. JSME, 40, 663-670 (1974).
- [8] Osias, J.R., Finite deformation of elastic-plastic solids. NASA CR-2199 (1973).
- [9] Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S. & King, I.P., Elasto-plastic solutions of engineering problems, "initial stress" finite element approach. Int. J. Num. Meths. Engng., 1, 75-100 (1969).
- [10] Blass, A. & Lengyel, B., Laminação periférica de discos. II - Trabalho experimental e resultados. COBEM-IV, 1977.
- [11] Wissmann, J.W., Non-linear structural analysis: tensor formulation. Procs. 1st. Conf. on Matrix Meths. in Struct. Mech., AFFDL - TR - 66-80, 679-696 (1966).
- [12] Truesdell, C., Corrections to "The mathematical formulations of elasticity and fluid dynamics". J. Rat. Mech. & Anal., 2, 603-609 (1953).
- [13] Prager, W., An elementary discussion of definitions of stress rate. Quart. Appl. Mech., 18, 403-407 (1961).
- [14] Spencer, A.J.M. & Ferrier, J.E., Some solutions for a class of plastic-elastic solids. "Foundations of Plasticity", ed. A. Sawczuk, 9-24, Noordhoff (1973) e discussão em "Problems of Plasticity", ed. A. Sawczuk, 518-520, Noordhoff (1973).
- [15] Hill, R., Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. J. Mech. Phys. Sols., 7, 209-225, (1959).
- [16] Blass, A. & Lengyel, B., Temperature distribution in the radial upsetting of a flat disc. Procs. 2nd. NAMRC, Univ. of Wisconsin, 60-69 (1974).
- [17] Lengyel, B. & Blass, A., Radial upsetting of flanges. Procs. 4th. NAMRC, Univ. of Columbus, 67-71 (1976).
- [18] Carré, B.A., The determination of the optimum acelerat-

ing factor for successive over-relaxation. *Comp. J.*, 4, 73-78 (1961).

- [19] Nayak, G.C., "Plasticity and large deformation problems by the finite element method". Tese de doutoramento, Univ. of Wales, (1971).

BLASS, A., e LENGYEL, B.

LAMINAÇÃO PERIFÉRICA DE DISCOS

I - ABORDAGEM TEÓRICA POR ELEMENTOS FINITOS

Sumário

A análise de processos de conformação por via de extensões do método dos elementos finitos a problemas de grandes deformações e comportamento elasto-plástico do material tem sido intensamente pesquisada nos últimos anos. O presente trabalho constitui uma dessas abordagens usando uma formulação em base lagrangeana. A formulação é inicialmente proposta em termos gerais, e posteriormente particularizada a um processo específico de conformação: a laminação periférica de discos.

Foi desenvolvido um código computacional utilizando elementos "simplex" tridimensionais. Seu desempenho, contudo, ainda deixa a desejar, conforme se analisa no trabalho, à luz de alguns resultados.

---

EDGE ROLLING OF DISCS

I - FINITE ELEMENT APPROACH

Summary

The analysis of metalworking processes by the extension of the finite element method to large strains and elastic-plastic material behaviour has been widely investigated in recent years. This paper presents one of these approaches, using a Lagrangean formulation. It is initially proposed in general terms, and later restricted to a specific metalworking process: the edge rolling of discs.

A computational code was developed using tridimensional simplex elements. However, its performance is not yet fully satisfactory, as explained in this work, on the basis of some results.

**A N A I S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 28

PP. 1479 - 1490



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTADO PLANO

DE TENSÕES UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS

Ademar G. GROEHS, Professor Assistente do  
Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Porto Alegre, Brasil

Guillermo J. CREUS, Professor Visitante  
Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Porto Alegre, Brasil

1. Introdução

Numerosos trabalhos existem sobre análise elasto-plástica usando elementos finitos [1], [2], [3]. Este fato resulta do reconhecimento de que este método é o único procedimento prático para a análise inelástica de estruturas reais.

Neste trabalho usa-se um processo de análise similar ao desenvolvi

do na ref. [1].

Na seção 2 introduzem-se as expressões elastoplásticas fundamentais, para o caso geral e para estado plano de tensões, no caso de critério de plasticidade de von Mises e endurecimento isotrópico.

Na seção 3 descreve-se o algoritmo de cálculo, introduzindo um procedimento para a determinação da carga crítica que parecer ser mais eficiente que o descrito em [1] e [3].

Na seção 4 analisam-se vários exemplos de interesse prático, comparando as soluções com outros resultados teóricos e experimentais.

## 2. Relações constitutivas básicas

O trabalho realizado baseia-se no uso da matriz constitutiva elás toplástica [2]:

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D} - \frac{\underline{D} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}^T \underline{D}}{H' + \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}^T \underline{D} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}} \quad (2.1)$$

onde  $\underline{D}$  é a matriz constitutiva elástica,  $\underline{\sigma}$  o tensor de tensões,  $F=f(\underline{\sigma}) - \bar{\sigma}$  representa a superfície de escoamento e  $H'$  a inclinação da curva tensão-deformação plástica para um ensaio uniaxial.

Para o critério de von Mises com endurecimento isotrópico e estado plano de tensões, temos [1, 3]

$$\underline{D}_{ep} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S_5} & & \text{Simétrica} \\ \hline \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S_5} & \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_2^2}{S_5} & \\ \hline -\frac{S_1 S_3}{S_5} & -\frac{S_2 S_3}{S_5} & \frac{E}{2(1+\nu)} - \frac{S_3^2}{S_5} \\ \hline \end{array} \quad (2.2)$$

onde

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'x + \nu\sigma'y) \quad (2.3)$$

$$S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\sigma'x + \sigma'y) \quad (2.4)$$

$$S_3 = \frac{E}{1+\nu} \sigma'xy \quad (2.5)$$

$$S_4 = S_1 \sigma'x + S_2 \sigma'y + 2 S_3 \tau'xy \quad (2.6)$$

$$S_5 = \frac{4}{9} f_{(\sigma)} H' + S_4 \quad (2.7)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson, e  $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \underline{1} \text{tr } \underline{\sigma}$  o tensor de tensões desviadoras.  $\underline{1}$  é a matriz identidade.

No caso de descarga, a matriz  $\underline{D}_{ep}$  reduz-se à matriz elástica  $\underline{D}$ .

Eq. (2.2) é a relação constitutiva básica para nossa análise. Esta análise é essencialmente não linear, dado que  $\underline{D}_{ep}$  muda com o estado de tensão  $\underline{\sigma}$ . Porém, para um pequeno incremento de cargas,  $\underline{D}_{ep}$  pode ser calculada com base nas tensões no início do incremento, e a (2.2) pode ser considerada como uma relação linearizada para esse incremento.

### 3. Aplicação da teoria ao computador. Obtenção de um programa de elementos finitos para estado plano de tensões.

Utilizando a teoria exposta anteriormente, podemos realizar um programa de análise plástica de problemas de estado plano. Damos abaixo a seqüência geral, de procedimentos, que foi seguida:

a) Arbitrar um vetor de carga ( $\underline{P}$ ) com componentes aplicadas nos nós e nas direções desejadas. Este vetor deve ter valores numéricos arbitrários. A proporção numérica adotada entre as diversas componentes é mantida até o fim do cálculo. Para este carregamento resolvemos o problema de forma elástica, obtendo deslocamentos e tensões elásticas, bem como as tensões equivalentes correspondentes. Seja  $\bar{\sigma}_{\max}$  o máximo dos  $f_{(\sigma)}$ .

b) Chamamos a tensão limite de proporcionalidade, no ensaio de tração simples do material, de  $\sigma_p$ . Tomamos a relação  $r_e = \sigma_p / \bar{\sigma}_{\max}$  e multiplicamos por esta relação os vetores de deslocamentos, tensões e cargas. Temos assim plastificado o primeiro elemento: aquele onde tínhamos a máxima tensão equivalente. Chamamos o vetor de carga resultante desta operação de  $\underline{P}_e$ .

- c) A seguir calcula-se a matriz  $\underline{D}_{ep}$  (2.2) para os elementos já plastificados e, a partir daí, uma nova matriz de rigidez plástica  $\underline{k}^p$  para cada um dos elementos plastificados. Esta operação repetir-se-á no início de cada ciclo usando as tensões que foram encontradas no ciclo anterior.
- d) O próximo passo é modificar a matriz de rigidez global  $\underline{K}$ . Para tal retira-se a contribuição, correspondente a etapa anterior, de cada elemento que já estava plastificado ou que se plastificou durante a mesma. Finalmente, acrescentamos a nova contribuição de cada um dos elementos plastificados (calculada em "c") à matriz  $\underline{K}$ . Com isto obtemos a matriz de rigidez plástica a ser resolvida no próximo ciclo.
- e) Escolhemos um incremento de carga  $\Delta P$  adequado. Este será sempre dado por uma certa fração de  $P_e$ , por exemplo  $\Delta P = 0,1 P_e$ .
- f) Resolvemos agora a matriz de rigidez global  $\underline{K}$  modificada (obtida em "d") submetida ao vetor de cargas  $\Delta P$  obtido em "e". O resultado é um vetor de deslocamentos  $\underline{\Delta u}$ , deformações  $\underline{\Delta \epsilon}$  e tensões  $\underline{\Delta \sigma}$ . No processo de solução determina-se o menor valor da diagonal principal da matriz triangularizada. Este valor é comparado ao mínimo valor da diagonal da matriz triangularizada do passo anterior. Este valor tende a anular-se a medida que os elementos vão sendo plastificados. Se o mínimo da presente etapa não for menor do que o mínimo da etapa anterior, a carga crítica foi atingida na etapa anterior e interrompe-se o processo.
- g) Devemos em seguida calcular para cada elemento um valor de " $r^i$ ". Este valor é o valor pelo qual devemos multiplicar  $\Delta P$  para termos a carga necessária para plastificar o elemento em questão. O valor de " $r^i$ " é obtido impondo a condição de ter-se o estado de tensões sobre a superfície de escoamento. Assim temos para o elemento  $i$

$$r^i = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.1)$$

onde:

$$A = (\Delta \sigma_x^i)^2 + (\Delta \sigma_y^i)^2 - \Delta \sigma_x^i \Delta \sigma_y^i + 3(\Delta \tau_{xy}^i)^2 \quad (3.2)$$

$$B = 2\sigma_x^i \Delta \sigma_x^i + 2\sigma_y^i \Delta \sigma_y^i - \sigma_x^i \Delta \sigma_y^i - \sigma_y^i \Delta \sigma_x^i + 6\tau_{xy}^i \Delta \tau_{xy}^i \quad (3.3)$$

$$C = (\sigma_x^i)^2 + (\sigma_y^i)^2 - \sigma_x^i \sigma_y^i + 3(\tau_{xy}^i)^2 - \sigma^2_p \quad (3.4)$$

- h) Encontrar o mínimo valor de " $r^i$ " que chamaremos de  $r_{\min}$ . O incremento

de carga  $r_{\min} \Delta P$  é o necessário para levar o elemento ao escoamento. Voltamos ao ítem "c" e repetimos o processo.

Em cada etapa os elementos que estiverem com  $f(\underline{\sigma})$  acima de  $0,9 \sigma_p$  já são considerados plastificados. Foram feitos vários testes considerando precisões maiores como  $0,95 \sigma_p$  e  $0,995 \sigma_p$  e os resultados a que chegamos em todos os casos foram semelhantes. Como o índice  $0,9 \sigma_p$  nos dá a vantagem de um tempo computacional muito menor, este foi adotado.

Por último uma nota a respeito da paralisação do programa (ítem f). Pode ocorrer que a carga crítica na verdade tenha ocorrido não na etapa anterior àquela em que foi verificado o aumento no mínimo valor da diagonal (DADOMIN), mas sim duas etapas antes. Isto se deve ao fato de termos atingido o mínimo valor a esquerda do mínimo duas etapas antes. Este, entretanto, é maior do que o primeiro mínimo à direita do mínimo, como podemos ver no esquema abaixo:

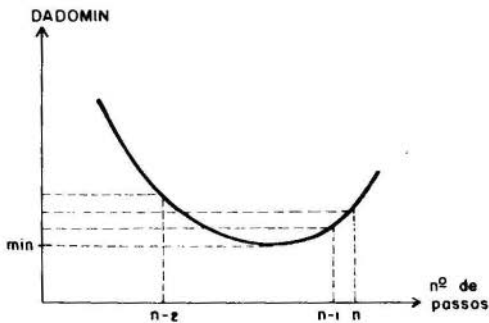


Fig. 1 - Variação de DADOMIN

#### 4. Exemplos de aplicação

Os exemplos foram resolvidos usando elementos triangulares com variação linear de deslocamentos [4].

4.1. Estudo de um único elemento - Resulta interessante analisar o comportamento de um triângulo isolado, no espaço de tensões principais  $\sigma_1 - \sigma_2$ , Fig. 2.a. Se o triângulo é externamente isostático (Fig. 2.b) o estado de tensões é uniaxial, e quando a tensão principal  $\sigma_1 = \sigma_p$  (ponto A) chega-se ao estado limite. O programa no segundo passo determina a e-



xistência de matriz de rigidez singular.

A situação é bem diferente para o triângulo com dois apoios fixos (Fig. 2.c). Neste caso, o estado de tensões (elásticas) é biaxial (para  $\nu \neq 0$ ) e existe a possibilidade de uma redistribuição de tensões. Na Fig. 2.a temos indicado, junto com o critério de escoamento de von Mises para o caso biaxial, a variação das tensões entre os passos 1 e 23. Vemos que em cada incremento o valor das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  se modificou levemente, sendo que ambas aumentam enquanto nos movemos sobre a curva. Para o passo 23, chegamos a verdadeira carga de ruptura, correspondente ao ponto B. Note-se que, enquanto a posição do ponto 1 depende do valor de  $\nu$ , as tensões limites são independentes deste valor.

Na Fig. 2.d indicam, em função do número do passo, o valor da carga  $P$ , das deformações  $\epsilon$  e o valor mínimo da diagonal principal de  $K$ . O mínimo desta última curva determina a carga de ruptura (Cf. 3).

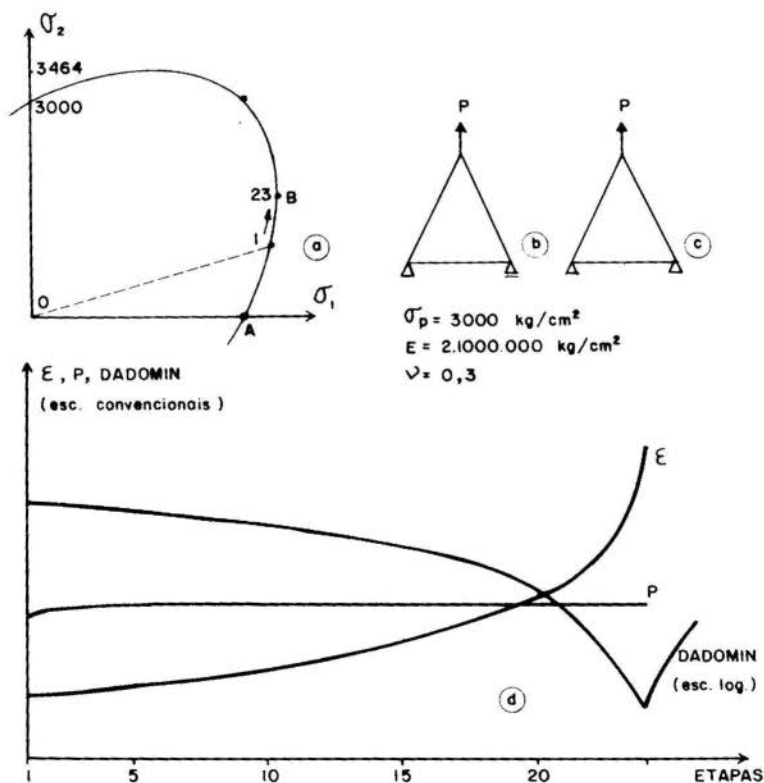


Fig. 2 - Análise de um elemento simples

4.2. Análise de uma viga em balanço - Este é um exemplo usado comumente para verificar soluções elastoplásticas (Ver por exemplo [2]). Segundo a teoria simplificada [5] que considera flexão pura (estado uniaxial), os momentos e cargas correspondentes ao escoamento e ruptura são, para as características indicadas na Fig. 3:

$$M_f = 4500 \text{ kgfm}; \quad M_p = 6750 \text{ kgfm}; \quad P_f = 500 \text{ kgf}; \quad P_p = 750 \text{ kgf}$$

Dos resultados do exemplo anterior, pode-se prever a influência do estado de tensões biaxial e das condições de sustentação.

Dois situações típicas são apresentadas na Fig. 3, onde se indicam algumas etapas da plastificação. É interessante notar que um mecanismo do tipo indicado na Fig. 3.b, já tinha sido previsto por Onat [6], o qual propôs a partir daí uma correção para o valor da carga limite.

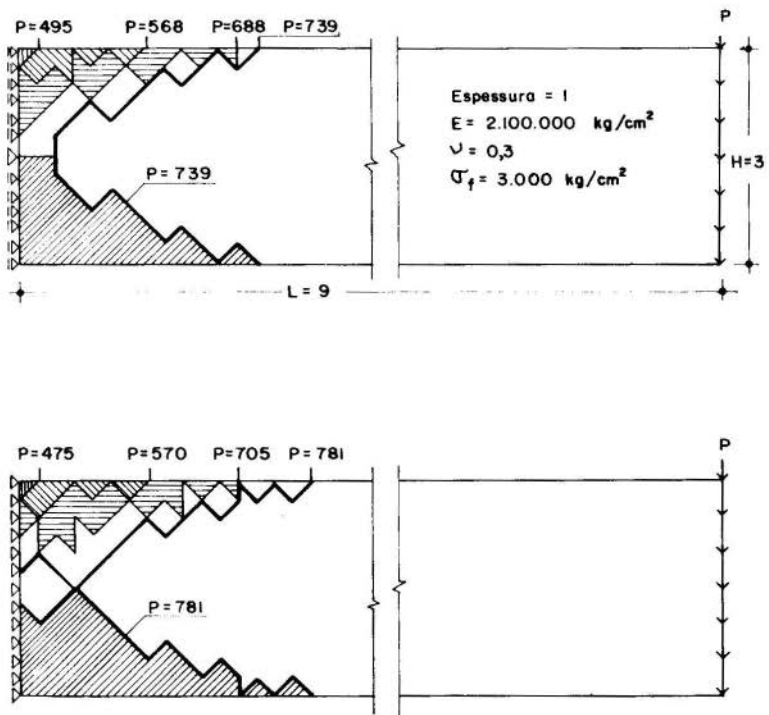


Fig. 3 - Análise de uma viga em balanço

4.3. Viga simplesmente apoiada - Também foi analisado o caso de uma viga simplesmente apoiada. Para este caso temos, segundo a teoria técnica:

$$P_f = 1000 \text{ kgf}; \quad P_p = 1500 \text{ kgf}$$

Na análise numérica, entretanto, nota-se a influência da carga concentrada na sua zona de aplicação. O elemento situado abaixo da carga chega ao escoamento com  $P_f = 995,6 \text{ kg}$ , enquanto que o elemento simétrico interior só chega ao escoamento para  $P_f = 1087,2 \text{ kg}$ .

A distribuição das áreas plastificadas está indicada na Fig.4, sendo a carga máxima  $P = 1604 \text{ kg}$ . A diferença, da ordem de 7%, é coerente com resultados experimentais. Por exemplo em [7], para numerosos ensaios de vigas com carga puntual, já foram obtidas cargas 5 a 8% maiores do que as previstas pela análise técnica.

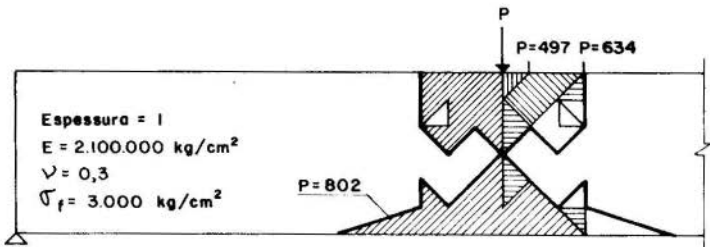


Fig. 4 - Viga simplesmente apoiada

4.4. Placa com entalhe V - Este exemplo, Fig. 5, foi tomado do trabalho [2]. O valor da carga de fluência inicial é de 225 kg em [2] e de 310 kg em nosso caso. A diferença é seguramente devida ao maior tamanho de nossos elementos. As cargas de ruptura são de 702 kg em nosso caso e de 715 kg para [2]. O resultado deve ainda ser corrigido, devido as tensões terem sido calculadas no baricentro dos elementos, isto é, numa seção como a A-A em Fig. 5, com área um pouco maior do que a crítica. Levando isto em consideração, nossa carga fica ainda reduzida para 660 kg.

O limite superior da carga plástica para este problema é, de acordo com Hill [8],  $p = 1,15 \times 600 = 693 \text{ kg}$ .

Para conferir estes resultados foram feitos testes com espécimens

de chapa, com e sem entalhe, como se indicam na Fig. 6. A relação entre a carga de ruptura das placas com e sem entalhe foi experimentalmente:

$$\frac{1.350}{1.200} = 1.125$$

enquanto que a análise numérica prediz:

$$\frac{660}{600} = 1.10$$

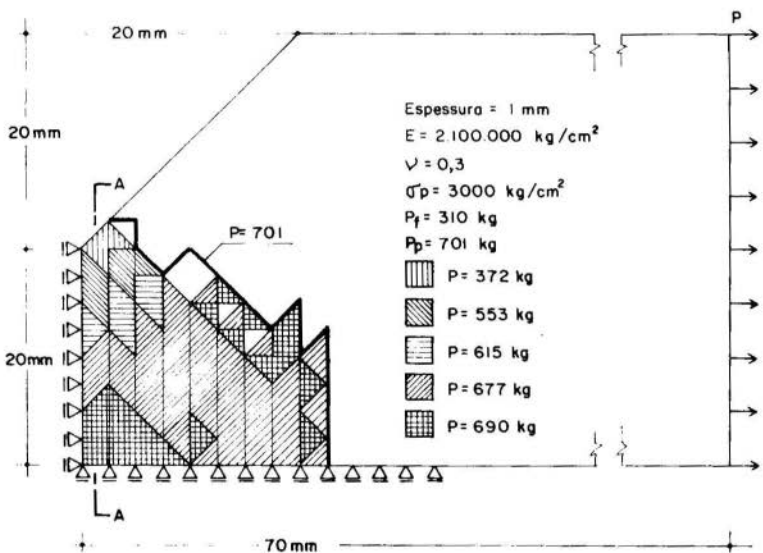


Fig. 5 - Placa com entalhe

Deve ser levado em consideração que o material do teste não é elástico perfeito e que as condições de aplicação da carga não são exatamente iguais em ambos os casos.

### 5. Conclusões

1) O método é bastante exato. No exemplo 1, podemos ver que, depois de numerosos incrementos, as tensões permanecem sobre a superfície de escoamento com diferença menor de 1%.

2) O método introduzido para a determinação da carga limite é efi-

ciente. Porém, é conveniente analisar os resultados para tensões e deformações correspondentes a um par de etapas anteriores à última.

3) As soluções clássicas da viga em balanço e simplesmente apoiadas não levam em consideração condições de contorno e estado biaxial, e portanto, não são testes adequados de precisão. Os resultados obtidos neste trabalho conferem com outros resultados teóricos e experimentais.

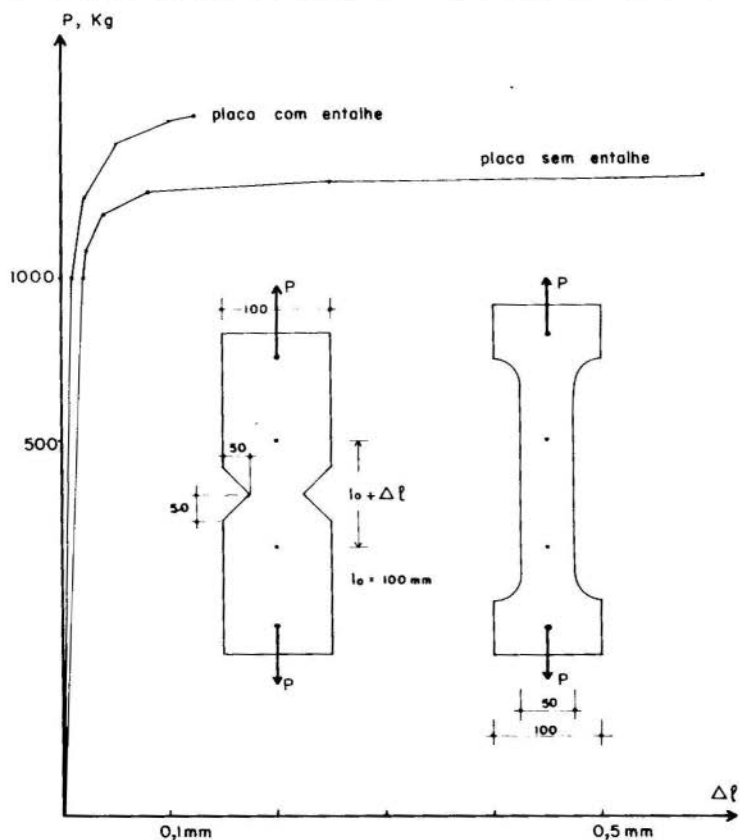


Fig. 6 - Resultados do teste

4) Para uma placa com entalhe realizaram-se testes, obtendo-se uma razoável confirmação dos dados numéricos.

#### Bibliografia

- [1] Yamada, Y., Yoshimura, N., Sakura, T., "Plastic Stress-Strain

- Matrix and its Application for the Solution of Elastoplastic Problems by the Finite Element Method", *Int. J. Mech. Sci.*, 10, 343-54, 1968.
- [2] Zienkiewicz, O., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw Hill, New York, 1971.
- [3] Yamada, Y., "Recent Developments in Matrix Displacement Methods for Elastic-Plastic Problems in Japan", in "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design"
- [4] Ferrante, A.J., "Plane Stress and Strain", em "The Finite Element Technique", C.A. Brebbia e A.J. Ferrante, Eds., UFRGS, 1976.
- [5] Prager, W., and Hodge, P.G., "Theory of Perfectly Plastic Solids", Dover, 1951.
- [6] Onat, E.T., Shield, R.T., "The Influence of Shearing forces on the Plastic Bending of Wide Beams", Second U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1954.
- [7] Roderick, J.W., and Phillips, I.H., "The Carrying capacity of simple supported mild steel beams", research (Engineering Struct. Suppl.) Colston Papers, 2, 9, 1949.
- [8] Hill, R., *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 15, p. 115, 1967.

GROEHS, A.G., e CREUS, G.J.

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTADO PLANO  
DE TENSÕES UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS

Sumário

Neste trabalho descrevemos a implementação de um programa de elementos finitos para a resolução de problemas elasto-plásticos de estado plano de tensões. Analisam-se vários exemplos cujas soluções são comparadas com outros resultados teóricos e experimentais.

---

ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO EN ESTADO PLANO  
DE TENSIONES UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS

Sumario

En este trabajo se describe la implementación de un programa de elementos finitos para la resolución de problemas elasto-plásticos de estado plano de tensiones. Se analizan varios ejemplos cuyas resoluciones son comparadas con otros resultados teóricos y experimentales.

# A N A I S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 29

PP. 1491 - 1503



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA  
RESOLUÇÃO DA INEQUAÇÃO VARIACIONAL  
ASSOCIADA AO PROBLEMA DA FILTRAÇÃO

Cid S. GESTEIRA, Professor Assistente.  
Dept<sup>o</sup> de Ciência e Tecnologia dos Materiais.  
Universidade Federal da Bahia  
Salvador, Brasil.

1. Introdução

O problema da percolação de água através de meios porosos tem sido estudado há bastante tempo, ([1], [2]). Entretanto a maneira pela qual se tem buscado soluções carece de justificativa matemática rigorosa.

Recentemente com o desenvolvimento da teoria de inequações variacionais, apresenta-se uma nova perspectiva de abordar o problema sob forma mais consistente do ponto de vista matemático.

Mostra-se neste trabalho, que o problema da percola-



ção com fronteira livre pode ser formulado como uma inequação variacional, definida sobre um domínio conhecido, enfatizando as facilidades de resolução numérica, quando se utiliza esta última formulação.

## 2. Apresentação do Problema

Considere um maciço, por conveniência de forma retangular, constituído de um material poroso com características ideais, isto é homogêneo, isotrópico, com porosidade uniforme, que separa dois reservatórios com níveis de água constantes mas diferentes, sobre um fundo impermeável (ver figura 1).

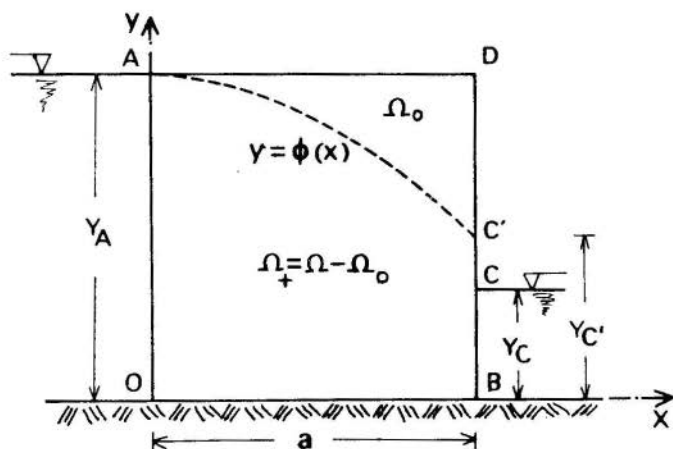


FIGURA 1 - PROBLEMA DE PERCOLAÇÃO COM FRONTEIRA LIVRE

Na região onde ocorre a percolação, denotada  $\Omega_+$  na figura 1, admite-se que o escoamento obedece à lei de Darcy

$$\underline{v} = -k \underline{\nabla} u \quad \text{em } \Omega_+ \quad (1)$$

e que é estacionário e incompressível

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad \text{em } \Omega_+ \quad (2)$$

em que

$u(x, y)$  - representa a altura piezométrica referida ao plano horizontal.

$k$  - constante de permeabilidade, doravante assumida com valor unitário.

$\underline{v}(x, y)$  - vetor velocidade

Propõe-se então resolver o seguinte problema:

Problema P1 - Conhecido os parâmetros  $a$ ,  $y_A$  e  $y_C$  de maneira que

$$\left. \begin{array}{l} y_A > y_C \geq 0 \\ a > 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

determinar a função  $\phi(x)$  com as seguintes propriedades:

(i)  $\phi(x)$  é definida e regular no intervalo  $[0, a]$ .

(ii)  $\phi(0) = y_A$  e  $\phi(a) \geq y_C$ ,

e para

$$\Omega_+ = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < \phi(x)\} \quad (4)$$

existe uma função  $u(x, y)$  definida e regular no fecho  $\bar{\Omega}$  de  $\Omega$  satisfazendo as seguintes condições:

$$\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_+ \quad (5)$$

$$u = y_A \quad \text{em} \quad [OA] \quad (6)$$

$$u = y \quad \text{em} \quad [CC'] \cup \widehat{AC'} \quad (7)$$

$$u = y_C \quad \text{em} \quad [BC] \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad [OB] \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \overline{AC'} \quad (10)$$

Do ponto de vista da resolução numérica convém que o problema (P1) seja posto na sua forma fraca. Assim tem-se:

Problema P1' - Determinar  $\phi(x)$ ,  $\Omega_+$  e  $u(x, y)$  tal que:

- (i) -  $\phi(x)$  é uma função contínua e estritamente decrescente no intervalo  $[0, a]$ ,
- (ii) -  $\phi(0) = y_A$ ;  $\phi(a) = y_C$ ,
- (iii) -  $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , e satisfaz as condições (6) - (9),
- (iv) - Se  $v \in H^1(\Omega_+)$ , com  $v = 0$  na vizinhança de  $[OA] \cup [BD]$

$$\int_{\Omega_+} (\nabla u \cdot \nabla v) \, dx dy = 0. \quad (11)$$

Observação 1 - Entende-se por  $H^m(\Omega)$  as classes de equivalência de funções  $u(x, y)$  tais que  $u(x, y)$  e suas derivadas até a ordem "m", para "m" inteiro e positivo, são quadrado integráveis no sentido de Lebesgue em  $\Omega$ . Se  $m = 0$ , escreve-se  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

$H^m(\Omega)$  é um espaço de Hilbert separável, com produto escalar

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \, D^\alpha v \, dx$$

Aqui  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_i$  natural, e  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ .  $C_0^\infty(\Omega)$  é o espaço vetorial das funções reais, com suporte compacto em  $\Omega$  possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Com  $H_0^m(\Omega)$ , representa-se o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $H^m(\Omega)$ . Os elementos de  $H_0^m(\Omega)$ , se anulam na fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

### 3. Formulação Via Inequação Variacional

O problema (P1') tal como foi proposto é não-linear

e apresenta o sério inconveniente de que o domínio  $\Omega_+$  é uma das incógnitas.

Essa dificuldade pode ser contornada facilmente, se o problema for colocado como uma inequação variacional, por meio de uma transformação de variáveis introduzida por Baiocchi [3], de sorte que as três incógnitas iniciais ficam reduzidas a uma única, definida sobre um domínio conhecido.

Seja  $\bar{u}(x, y)$  uma extensão da função  $u(x, y)$  a todo  $\bar{\Omega}$  definida assim:

$$\bar{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{em } \bar{\Omega}_+ \\ y & \end{cases} \quad (12)$$

e  $w(x, y)$  uma função definida por:

$$w(x, y) = \int_y^{y_A} [\bar{u}(x, s) - s] ds \quad (13)$$

Das condições (6) - (10) deduz-se que  $w(x, y) = g(x, y)$  no contorno  $\Gamma$  de  $\Omega$ , com

$$g(x, y) = \frac{1}{2} (y_A - y)^2 \quad \text{em } [OA] \quad (14)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2} (y_C - y)^2 \quad \text{em } [BC] \quad (15)$$

$$g(x, y) = \frac{y_A^2}{2} - \left( \frac{y_A^2 - y_C^2}{2a} \right) x \quad \text{em } [OB] \quad (16)$$

$g(x, y) = 0$  nas restantes partes de  $\Gamma$ .

Por outro lado é fácil verificar que  $w(x, y)$  tal como foi definido em (13), tem as seguintes propriedades:

$$(i) \quad w(x, y) = 0 \quad \text{em } \Omega_0 = \Omega - \Omega_+ \quad (17)$$

$$(ii) \quad w(x, y) > 0 \quad \text{em } \Omega_+ \quad (18)$$

$$(iii) \quad w(x, y) \in H_0^1(\Omega) \quad (19)$$

$$(iv) \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \psi \, dx dy + \int_{\Omega_+}^{1496} \psi \, dx dy = 0 ; \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \quad (20)$$

Observação 2 - A transformação de Baiocchi tal como foi apresentada em (11) - (13), aplica-se apenas ao caso de um meio poroso constituído de material homogêneo e maciço com seção transversal retangular. Para outros casos sugere-se consultar [3] e [4].

Se  $K$  é o conjunto convexo fechado definido como

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega) ; v = g \text{ em } \Gamma, v \geq 0 \text{ quase sempre em } \Omega\} \quad (21)$$

demonstra-se [3], [4] que o problema (P1'), definido anteriormente, pode ser reformulado em termos da variável  $w(x, y) \in K$ , como uma inequação variacional [4]. Tem-se então

Problema P2 - Determinar  $w(x, y) \in K$ , tal que

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla (v - w) \, dx dy - \int_{\Omega} (v - w) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (22)$$

ou

$$a(w, v - w) - \ell(v - w) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (23)$$

onde

$a(\dots)$  - é uma forma bilinear sobre  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  e

$\ell(\cdot)$  - é um funcional linear contínuo sobre  $H^1(\Omega)$ , definidos de maneira óbvia através de (22) e (23).

Teorema 1 - A inequação variacional (23) possui uma solução única  $w(x, y) \in K$ . Ainda mais, obtida a solução  $w(x, y)$ , determina-se  $\Omega_+$ ,  $\phi(x)$  e  $u(x, y)$  através de

$$\Omega_+ = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega ; w(x, y) > 0\} \quad (24)$$

$$\phi(x) = \sup \{t \mid (x, t) \in \Omega_+\} ; 0 < x < a \quad (25)$$

$$\phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) ; \phi(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \phi(x) \quad (26)$$

$u(x, y)$  = restrição a  $\Omega_+$  da função

$$y - \frac{\partial w}{\partial y} . \quad (27)$$

Para uma demonstração veja [4] , [5].

O teorema 1 garante a existência e unicidade da solução da inequação variacional associada ao problema da percolção, e mais ainda estabelece a maneira de obter as incôgnitas iniciais  $\Omega_+$  ,  $\phi(x)$  e  $u(x, y)$  a partir da solução  $w(x, y)$  da inequação variacional (23).

Convém lembrar que essa técnica, não é restrita ao problema em questão, mas aplicável a uma classe ampla de problemas com fronteira livre.

Usando o fato da forma bilinear em (23) ser simétrica, mostra-se que determinar a solução  $w(x, y)$  da inequação (23) corresponde a resolver o seguinte problema de minimização [6].

Problema P3 - Determinar  $w(x, y) \in K$  , tal que

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in K \quad (28)$$

sendo

$$J(v) = a(v, v) - 2 \ell (v) . \quad (29)$$

A seguir descreve-se a aproximação pelo método dos elementos finitos do problema (P3) .

#### 4. Aproximação com Elementos Finitos Lineares

A formulação seguida é aquela apresentada por Oden e Reddy [7] , e consiste em adotar uma triangulação uniforme  $T_h$  em  $\Omega$  , sobre a qual define-se um espaço  $S_h$  de aproximações, com as seguintes propriedades:

$$(i) \quad S_h \subset H^1(\Omega) ,$$

onde  $h$  é um parâmetro escolhido, de maneira que, se  $h$  tende para zero, a dimensão de  $S_h(\Omega)$  tende para infinito.

$$(ii) \quad \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{S}_h,$$

em que  $\mathcal{P}_1$  é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a um, sobre  $T_h$ .

O convexo  $K_h$  aproximação de  $K$  é definido por:

$$K_h = \{v_h \mid v_h \in \mathcal{S}_h; v_h = g_h \text{ sobre } \Gamma_h\},$$

$$e \quad v_h \geq 0 \text{ q.s. em } T_h \quad (30)$$

denotando-se:

$\Omega_h$  - um típico triângulo de  $T_h$ .

$\Gamma_h$  - os pontos de  $T_h$  pertencentes à interseção de  $T_h$  com  $\Gamma$ .

$g_h$  - valores da função  $g(x, y)$  restritos à  $\Gamma_h$ .

Tal como foi definido

$$K_h \subset S_h \subset H^1(\Omega)$$

é um convexo fechado mas não necessariamente contido em  $K$ .  
Escreve-se então o problema aproximado assim:

Problema P3' - Determinar  $w_h \in K_h$  tal que

$$J_h(w_h) \leq J_h(v_h) \quad \forall v_h \in K_h \quad (31)$$

onde

$$J_h(v_h) = a(v_h, v_h) - 2\ell(v_h) \quad (32)$$

### 5. Algoritmo de Resolução do Problema P3'

O problema (P3') é resolvido por um algoritmo bastante conhecido em programação não-linear atribuído a Uzawa [8] e constitui uma generalização do conhecido método da relaxação para solução de sistemas de equações algébricas.

#### Algoritmo

(1) - Escolhe-se um vetor inicial  $\underline{w}^{(0)}$  pertencente a  $K_h$ .

(2) - Calcula-se a componente  $w_k^{(n+1)}$  da enésima iteração a partir do valor obtido na iteração anterior  $w_k^n$  assim:

$$w_k^{(n+1)} = \text{Max} \{ 0, w_k^{(n+\frac{1}{2})} \} \quad (33)$$

em que,

$$w_k^{(n+\frac{1}{2})} = w_k^{(n)} - \frac{\rho}{a(\phi_k, \phi_k)} \left[ \sum_{j=1}^{k-1} a(\phi_k, \phi_j) w_j^{(n+\frac{1}{2})} + \sum_{j=k}^N a(\phi_k, \phi_j) w_j^{(n)} - \ell(w_k^{(n)}) \right] \quad (34)$$

(3) - Repita a etapa (2) até a obter a convergência para a tolerância desejada.

No algoritmo descrito  $\rho$  é um parâmetro limitado ( $0 < \rho < 2$ ) e escolhido através de testes numéricos de modo a permitir a convergência com o menor número possível de iterações.  $\phi_k(x, y)$ ,  $\phi_j(x, y)$  - Funções de  $S_h$  restritas a cada elemento (elementos da base local).

## 6. Resultados Numéricos

Para ilustrar o método aqui descrito escolheu-se um exemplo com as seguintes características:

(i) - Parâmetros geométricos adimensionais

$$y_A = 3.22 ; y_C = 0.84 ; a = 1.62$$

(ii) - Discretização - Elementos finitos triangulares lineares com malha de (2 x 20 x 30)

(iii) - Parâmetro de relaxação  $\rho = 1.7$  (escolhido)

(iv) - Teste para interromper as iterações

$$\sum_{k=1}^N |w_k^{(n+1)} - w_k^{(n)}| \leq 10^{-5}$$



Na figura 2 tem-se o gráfico da função  $\phi_h(x)$ , aproximação de  $\phi(x)$ .

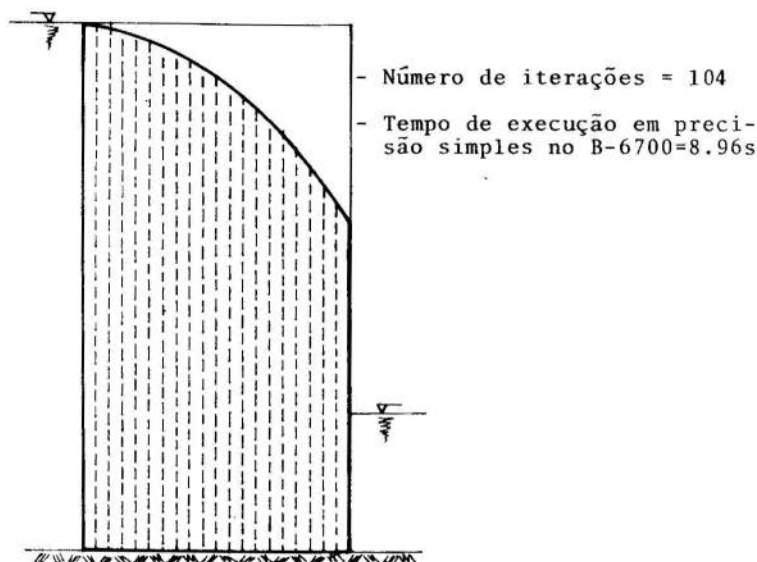


FIGURA 2 - FRONTEIRA LIVRE COM MALHA DE (2 x 20 x 30)

### 7. Comentários Finais

Em diversos testes realizados pelo autor com outros exemplos além daquele aqui apresentado, (veja também [5], [9]) observou-se que o método descrito apresenta as seguintes características:

(1) Para que se obtenha a fronteira livre bem definida requer-se uma malha bastante refinada ( $\Delta$  pequeno), o que não acontece com outros métodos.

(2) A posição do ponto  $C'$  na figura 1, fica automaticamente definida, uma vez conhecida a função  $w(x, y)$ . Convém dizer que os métodos usuais têm na determinação correta do ponto  $C'$  uma das suas dificuldades (veja por exemplo [10]).

(3) Ao contrário do procedimento usado nos métodos

usuais, o algoritmo descrito no parágrafo 5 não requer a resolução de um sistema algébrico linear de equações a cada iteração.

(4) A convergência do método descrito é assegurada, o que não acontece com outros métodos convencionalmente utilizados.

#### 8. Agradecimentos

o autor expressa seus agradecimentos à Professora Beatriz P. das Neves e aos Professores Luis Adauto Medeiros e Raul Feijoo pelo estímulo e valiosas sugestões.

Parte deste trabalho foi financiado pelo CNPq através do contrato de nº TC 2222.0712/76.

#### Bibliografia

- [1] Muskat, M., The Flow of Homogeneous Fluid Through Porous Media. McGraw-Hill, New York (1937).
- [2] Bear, J., Dynamic of Fluid Flow in Porous Media. American Elsevier (1972).
- [3] Baiocchi, C., Su un Problem di Frontiera Libera Conesso o Questioni di Hidraulica. Ann. di Mat. Pura ed Appl. (4) 92, 107-127 (1972).
- [4] Baiocchi, C., Comincioli, V., Magenes, E. and Pozzi, G.A., Free Boundary Problems in the Theory of Fluid Flow Through Porous Media. Ann. di Mat. Pure ed Appl. (4) 97, 1-82 (1973).
- [5] Kikuchi, N., An Analysis of the Variational Inequalities of Seepage Flow by Finite Element Methods. Quartely of Appl. Math. (35) April, 149 - 163 (1977).
- [6] Medeiros, L.A., Análise Convexa e Problemas Variacionais. Textos de Métodos Matemáticos nº 9, IM-UFRJ (1975)

- [7] Oden, J.T., and Reddy, J.N., An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. Wiley Inter-Science (1976).
- [8] Arrow, K.J., Hurwicz, L. and Uzawa, H., Studies in Linear and Non-Linear Programming. Stanford University Press (1972).
- [9] Kikuchi, N., Gesteira, C. and Reddy, C.T., Analysis of a Seepage Flow Problem. Proc. Sixth Southwestern Graduate Research Conference on Applied Mechanics. The University of Texas at Arlington (1975).
- [10] Taylor, R.L. and Brown, C.B., Darcy Flow Solutions with a Free Surface. Proc. of the ASCE, Hydraulics Division, 93, 27-33 (1967).

GESTEIRA, C.S.

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA  
RESOLUÇÃO DA INEQUAÇÃO VARIACIONAL  
ASSOCIADA AO PROBLEMA DA FILTRAÇÃO

Sumário

O Problema da percolação de água através de um meio poroso homogêneo e isotrópico, é formulado como uma inequação variacional, com vantagens sobre a apresentação original do problema.

Utiliza-se a técnica de elementos finitos para a resolução numérica da inequação variacional obtida, e mostra-se um exemplo típico

---

SOLUTION OF THE VARIATIONAL INEQUATION  
ASSOCIATED WITH THE SEEPAGE PROBLEM BY  
FINITE ELEMENT METHOD

Summary

The Seepage flow through a homogeneous, isotropic porous media is presented in terms of a variational inequation, showing significant advantages compared with the original problem.

The finite element technique is then used to solve the variational inequation just obtained, and a typical example is presented.

# A N A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 30

PP. 1505 - 1517



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

GERAÇÃO DE UMA FAMÍLIA DE OPERADORES

INCREMENTAIS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Luiz BEVILACQUA

COPPE/UFRJ e Promon Engenharia

### 1. Introdução

O problema de valor inicial da forma:

$$F(\underline{u}^{(n)}(t), \underline{u}^{(n-1)}(t), \dots, \underline{u}(t), t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.a)$$

$$\underline{u}^{(k)}(0) = \underline{u}_0^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.b)$$

onde  $F$  é da forma linear em  $\underline{u}^{(k)}(t)$  e  $\underline{u}^{(k)}(t) = d^k \underline{u}(t) / dt^k$  uma função vetorial da variável  $t$ , pode ser reduzido a forma canônica:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \underline{u}^{(n+p)} \\ \underline{u}^{(n+p-1)} \\ \vdots \\ \underline{u} \end{Bmatrix} = \underline{B}(t) \begin{Bmatrix} \underline{u}^{(n+p)} \\ \underline{u}^{(n+p-1)} \\ \vdots \\ \underline{u} \end{Bmatrix} + \underline{g}(t), 0 \leq t \leq T \quad (2.a)$$

$$\underline{u}^{(k+p)}(0) = \underline{u}_0^{(k+p)} \quad k = -p, -p+1, \dots, n+p-1 \quad (2.b)$$

onde  $p$  é um inteiro maior ou igual a zero,  $\underline{B}(t)$  é um operador linear e  $\underline{g}(t)$  um vetor independente. A solução numérica de (2.a) com as condições iniciais (2.b) pode ser posta sob a forma:

$$\begin{Bmatrix} \underline{u}^{(n+p)} \\ \underline{u}^{(n+p-1)} \\ \vdots \\ \underline{u} \end{Bmatrix}_{m+1} = \underline{C}(t, \Delta t) \begin{Bmatrix} \underline{u}^{(n+p)} \\ \underline{u}^{(n+p-1)} \\ \vdots \\ \underline{u} \end{Bmatrix}_m + \underline{g}_\ell(t) \quad (3)$$

onde o vetor afetado do subíndice  $m$  significa a solução do problema para  $t = m\Delta t$  e o vetor  $m+1$  significa a solução para  $t + \Delta t = (m+1)t$ . O operador  $\underline{C}(t, \Delta t)$  é um operador de aproximação para a solução numérica. O vetor independente  $\underline{g}_\ell(t)$  pode estar avaliado para  $t$  ou  $t + \Delta t$  ( $\ell = m$  ou  $\ell = m+1$ ) dependendo do esquema adotado. Partindo das condições iniciais (2.b) com  $m=0$ , pode-se obter a solução em  $t = m\Delta t$  após  $m$  aplicações sucessivas da equação (3). Neste processo, para a determinação do operador  $\underline{C}(t, \Delta t)$ , utiliza-se a equação diferencial (1.a) ou (2.a) para estabelecer a interdependência entre os vetores  $\underline{u}^{(n+p)}$ ,  $\underline{u}^{(n+p-1)}$ , ...,  $\underline{u}$ , em  $t$  ou  $t + \Delta t$ . Quando nesta operação é necessária a solução de um sistema de equações algébricas lineares temos um esquema implícito, caso contrário o método é explícito.

Vários métodos de integração desenvolvidos por diversos autores são da forma apresentada [1], [2], [3], [4]. A obtenção do operador  $\underline{C}(t, \Delta t)$  é o ponto fundamental que dá a cada método a sua característica própria. Apesar de se ter

discutido extensivamente na literatura o desempenho numérico de vários métodos, pouco se tem falado sobre a convergência. Faremos a seguir um breve comentário sobre a convergência e proporemos uma sistemática para a geração de  $\underline{C}$ .

## 2. Consistência, Estabilidade e Convergência

Admitiremos de início que o problema (2a-b) tenha solução regular. Um teorema devido a Lax e Richtmeyer [5] afirma que a solução numérica de (2a-b) posto sob a forma (3) converge só e só se o operador  $\underline{C}(t, \Delta t)$  é estável. Na demonstração requer-se que  $\underline{C}(t, \Delta t)$  seja consistente.

O operador  $\underline{C}(t, \Delta t)$  será consistente se satisfizer as condições:

$$a) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underline{C}(t, \Delta t) = \underline{I} \quad (4)$$

$\underline{I}$  sendo a matriz identidade.

$$b) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\underline{C}(t, \Delta t) - \underline{I}}{\Delta t} \right) = \underline{B}(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

O operador  $\underline{C}$  será estável se, dado o intervalo  $0 < \Delta t \leq \tau$ , a sequência  $\underline{C}$ ,  $\{\underline{C}\}^2, \dots, \{\underline{C}\}^m$  é uniformemente limitada para  $0 \leq m \Delta t \leq T$ . A estabilidade é garantida se os autovalores de  $\underline{C}$ ,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j\}$  tem módulos limitados, i.e.,  $\|\lambda_j\| < k_j$ . Se  $\lambda_j$  for independente de  $\Delta t$  então  $\|\lambda_j\| \leq 1$  pois de outra forma  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\lambda_j\|^m = \infty$ . Quando isto acontece, isto é  $\lambda_j$  são independentes de  $\Delta t$  e tem módulo menor que 1 diz-se que o operador  $\underline{C}$  é incondicionalmente estável. Em dinâmica de sistemas elásticos é prática comum a busca de operadores incondicionalmente estáveis associados ao problema de vibrações livres sem amortecimento e com matrizes de massa e rigidez constantes. Não é claro entretanto se esta condição seja sempre desejável como será discutido mais tarde.

Caso o operador  $\underline{C}(t, \Delta t)$  seja consistente e estável o teorema de Lax e Richtmeyer garante a convergência da solução numérica para  $t = T$  quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $m \Delta t \rightarrow T$ . Isto é:







tor independente  $A_0^{-1} f_{m+1}$ .

Apresentamos então dois esquemas para obtenção de métodos implícitos e um esquema para a obtenção de método explícito. A escolha de  $p$  dependerá da ordem de aproximação desejada para a mais alta derivada que aparece em (1.a). Se quisermos uma aproximação linear para  $u^{(n)}$  tomamos  $p = 0$ . Os parâmetros  $r_k$  e  $s_k$  são determinados de forma que o operador  $C$  satisfaça às condições de consistência e estabilidade.

Os métodos implícitos não apresentam vantagens em princípio, com relação aos métodos explícitos, desde que exigem uma operação de inversão matricial a cada passo. Entretanto se eles apresentarem melhor convergência podem ser de melhor qualidade embora exijam maior tempo de computação. Esta é a superioridade normalmente atribuída a métodos derivados do segundo esquema implícito, como o método de Newmark [8], que é incondicionalmente estável. Alguns autores analisaram as características de estabilidade de vários métodos implícitos [4], [6], [7]. Entretanto não parece ter havido preocupação com a análise de consistência. Em [8] analisou-se a consistência de alguns métodos implícitos e mostrou-se que os métodos de Newmark e Wilson por exemplo não são consistentes, embora sejam incondicionalmente estáveis. Isto significa que o teorema de Lax e Richtmeyer não pode ser invocado para garantir a convergência. De fato veremos adiante que o método de Newmark pode apresentar problemas de convergência.

#### 4. Aplicação

Apresentaremos a seguir um exemplo simples mas significativo para esclarecer a sistemática indicada acima. Seja a equação diferencial:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = h(t) \quad t \geq 0 \quad (12.a)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (12.b)$$

O sistema (10) com  $p = 0$  dará:

$$\ddot{x}_{m+1} = \ddot{x}_m + r_2 \Delta t \ddot{x}(t^*)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{m+1} &= \dot{x}_m + \Delta t \ddot{x}_m + r_1 \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\ddot{x}}(t^*) \\ x_{m+1} &= x_m + \Delta t \dot{x}_m + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_m + r_0 \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{\ddot{x}}(t^*)\end{aligned}\quad (13)$$

Seguindo a técnica do esquema explícito, i.e., substituindo-se em (13)  $\ddot{x}(t^*)$  avaliado em  $t$ ,  $\ddot{x}(t^*) = \ddot{x}_m$ , e obtido de (12.a) vem:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} 1-2\xi\omega r_2^2 \Delta t & -r_2 \omega^2 \Delta t & 0 \\ (1-2\xi\omega r_1 \frac{\Delta t}{2}) \Delta t & 1-r_1 \omega^2 \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ (1-2\xi\omega r_0 \frac{\Delta t}{3}) \frac{\Delta t^2}{2} & (1-r_0 \omega^2 \frac{\Delta t^2}{6}) \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}_m + \begin{Bmatrix} r_2 \\ r_1 \frac{\Delta t}{2} \\ r_0 \frac{\Delta t^2}{6} \end{Bmatrix} \Delta t \ddot{\ddot{x}}_m \quad (14)$$

Pode-se mostrar que o operador  $\underline{B}$  é da forma:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -2\xi\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

A condição de consistência exige então que  $r_2=1$ . Os autovalores de  $\underline{C}$  serão:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_{2,3} = \rho_{2,3} e^{i\theta_{2,3}}$$

onde

$$\rho_2 = \rho_3 = \left[ 1 - 2\xi\eta + \eta^2 \left( 1 - \frac{r_2}{2} \right) \right]^{1/2} \quad \text{onde} \quad \eta = \omega \Delta t$$

$$\theta_2 = -\theta_3 = \tan^{-1} \frac{(4\eta^2 - 2\xi\eta^3 r_2 - \eta^4 r_2^2 / 4 - 4\eta^2 \xi^2)^{1/2}}{2 - 2\xi\eta - \eta^2 r_2 / 2}$$

Com  $r_2=2$  para  $\xi=0$ , não haverá amortecimento numérico envolvido no processo de aproximação. A condição para que a solução seja oscilatória exige que:

$$4\eta^2 - 4\xi\eta^3 - \eta^4 - 4\eta^2 \xi^2 > 0$$

donde

$$0 < \eta < 2(1-\xi) \quad \text{ou} \quad \Delta t < (1-\xi)T/\pi$$

sendo  $T=2\pi/\omega$ . Quando  $\xi \geq 1$ , amortecimento crítico ou supercrítico, teremos movimento não oscilatório o que coincide com a solução exata. O erro no período é:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\eta}{[\theta_2]} - 1$$

Depois da aplicação do operador  $\underline{C}$  m vezes teremos:

$$\rho_2^m = \rho_3^m = (1 - 2\xi\omega\Delta t)^{m/2} = 1 - \xi\omega\Delta t m + \frac{1}{2!} \xi^2 \omega^2 \Delta t^2 m(m-2) - \dots$$

com  $\Delta t = t/m$  vem:

$$\rho_2^m = \rho_3^m = 1 - \xi\omega t + \frac{1}{2!} \xi^2 \omega^2 t^2 \frac{m(m-2)}{m^2} - \dots$$

e no limite quando  $m \rightarrow \infty$ :

$$\rho_2^m = \rho_3^m = 1 - \xi\omega t + \frac{1}{2!} \xi^2 \omega^2 t^2 - \frac{1}{3!} \xi^3 \omega^3 t^3 + \dots = e^{-\xi\omega t}$$

isto é quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  o módulo da solução tende para a envoltória da solução exata. As figuras 1 e 2 mostram os resultados obtidos com o processo descrito acima.

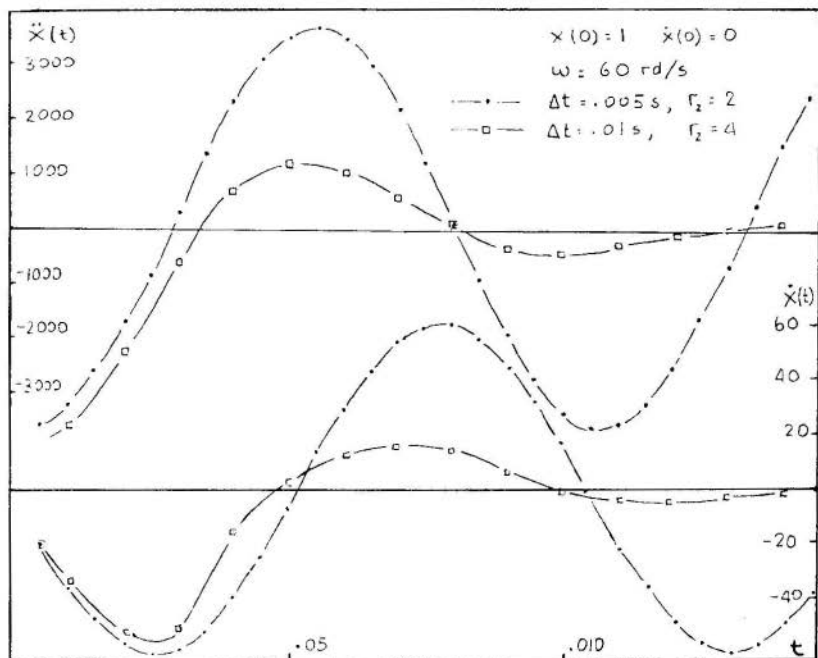
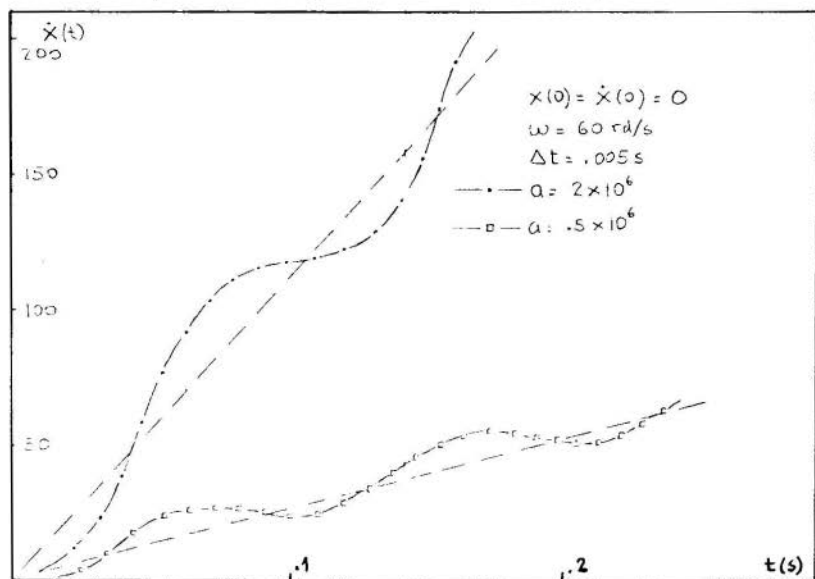
Os operadores de aproximação obtidos para o mesmo problema com  $\xi=0$ , utilizando-se os esquemas implícitos são:

a) usando a primeira técnica:

$$\underline{C} = \frac{1}{1 + \frac{r_2}{2}\eta^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{r_1}{2}\eta^2 - r_0\eta^2 & -r_2\eta\omega & 0 \\ \frac{\eta}{\omega} & 1 & 0 \\ \frac{r_0}{6} \frac{\eta^4}{\omega^2} + \frac{\Delta t^2}{2} (1 + \frac{r_1}{2}\eta^2) & -\frac{r_0}{6} \frac{\eta^3}{\omega} + \Delta t (1 + \frac{r_1}{2}\eta^2) & 1 + \frac{r_1}{2}\eta^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

b) usando a segunda técnica:

$$\underline{C} = \frac{1}{1 + \frac{s_0}{6}\eta^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\eta}{\omega} & \frac{\eta^2}{\omega^2} (\frac{1}{2} - \frac{s_0}{6}) \\ -\frac{1}{2}s_1\eta\omega & 1 + \eta^2 (\frac{s_0}{6} - \frac{s_1}{2}) & \frac{\eta}{\omega} [1 - \frac{s_1}{2} + \eta^2 (\frac{1}{6}s_0 - \frac{1}{4}s_1)] \\ -\omega^2 & -\eta\omega & -\eta^2 (\frac{1}{2} - \frac{s_0}{6}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

FIG. 1. SOLUÇÃO DE  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ FIG. 2. SOLUÇÃO DE  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

O operador (16) será consistente se  $r_2=1$ , e o operador (17) não é consistente quaisquer que sejam os valores de  $s_0$  e  $s_1$ .

No caso do operador (16) se  $r_2=1$  e  $r_1=2$  teremos o método incondicionalmente estável, porém com forte amortecimento numérico caso  $\Delta t$  não seja suficientemente pequeno. Neste caso  $\|\lambda_{1,2}\| = 1/(1+\omega^2\Delta t^2)$ . Para o operador (17) se  $s_0=3/2$  e  $s_1=1$ , recaímos no método de Newmark e o operador será incondicionalmente estável e  $\|\lambda_1\| = \|\lambda_2\| = \|\lambda_3\| = 1$  qualquer que seja  $\Delta t$ . Aparentemente este operador é portanto superior aos anteriores, e sem dúvida tem sido utilizado extensivamente. Não sendo porém consistente a convergência da solução numérica necessita de demonstração particular, não sendo possível se recorrer ao teorema de Lax. Se tomamos o problema:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{t^2} x = 0 \quad t > t_0 \quad \text{e} \quad t_0 > 0 \quad (18.a)$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad \text{e} \quad x(t_0) = x_0 \quad (18.b)$$

O operador (17) não sofre alteração a não ser nos valores de  $\eta = \omega_0 \Delta t / t^2$  e  $\omega = \omega_0 / t^2$ . Os módulos dos autovalores, permanecem unitários, havendo alteração apenas na fase  $\theta_1$  que passa a ser função de  $t$ . As amplitudes máximas e mínimas da solução numérica fica portanto inalterada na solução numérica. A solução exata de (18.a) é entretanto da forma:

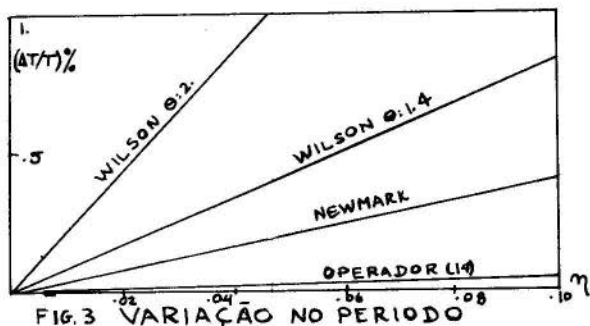
$$x(t) = t^{1/2} \left( A \cos \left[ \left( \omega_0 - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \ln t \right] + B \sin \left[ \left( \omega_0 - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \ln t \right] \right) \quad (19)$$

o que mostra a variação do módulo da amplitude extrema. O método de Newmark não converge portanto para a solução do problema. No caso dos operadores (16) e (17) teremos para o mesmo problema satisfeitas as condições de consistência e estabilidade desde que  $r_0$ ,  $r_1$  e  $r_2$  sejam escolhidos convenientemente. A convergência é então garantida pelo teorema de Lax.

### 5. Conclusões

Os métodos explícitos são condicionalmente estáveis mas

satisfazem as condições de consistência, o que garante a convergência. Por outro lado eles não necessitam de solução de um sistema de equações algébricas a cada passo, o que é conveniente do ponto de vista de tempo de computação especialmente para sistemas com grande número de equações. Os esquemas implícitos condicionalmente estáveis, em princípio não tem vantagens com relação aos explícitos. Alguns esquemas implícitos podem ser incondicionalmente estáveis, mas não sendo consistentes a convergência não pode ser garantida em geral. Grande número de autores reclamam a superioridade de métodos incondicionalmente estáveis, sobre os demais porque nos problemas de dinâmica de sistemas elásticos, estes métodos não são sensíveis a excitações com componentes importantes nas faixas de alta frequência. Isto é, as componentes de alta frequência não se perdem na solução do problema qualquer que seja o passo de integração  $\Delta t$  adotado. Esta afirmação não é clara pois embora estas componentes de fato não se percam, isto não significa que elas sejam integradas corretamente. O erro na fase da solução numérica é muito maior para os métodos implícitos (Fig. 3) e é possível que a defasagem entre a excitação e a solução numérica  $u_m$  seja importante, introduzindo erros consideráveis. Nestas condições é necessário estabelecer um limite superior para o passo de integração  $\Delta t$ , o que apresenta a mesma dificuldade do que a escolha de  $\Delta t$  para os métodos condicionalmente estáveis. Entretanto a maior dificuldade dos métodos implícitos não consistentes é a dúvida sobre a convergência da solução para casos mais gerais, como foi indicado na seção anterior.



Bibliografia

- [1] Newmark, N.M., A Method of Computation for Structural Dynamics, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, vol 85, EM3, pp.67-94 (1959).
- [2] Clough, R.W.; Penzien, J., Dynamics of Structures McGraw-Hill Book Co., New York (1975).
- [3] Collatz, L., The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer Verlag (1975).
- [4] Nickel, R.E., On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics, Int. J. of Solids and Structures, vol.7, pp.301-319 (1971).
- [5] Lax, P.D.; Richtmeyer, R.D., Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. IX, pp.267-293 (1956).
- [6] Goudreau, G.L.; Taylor, R.L., Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics, Computer Methods in Applied Mech. and Engin., vol. 2, pp.69-97 (1972).
- [7] Geradin, M., On the Variational Method in the Direct Integration of the Transient Structural Response, J. of Sound and Vibration, 34(4), pp.479-487 (1974).
- [8] Guimarães, S.S., Análise da Estabilidade de Métodos de Integração Passo a Passo, Tese M.Sc., COPPE/UFRJ (1977).



BEVILACQUA, L.

GERAÇÃO DE UMA FAMÍLIA DE OPERADORES  
INCREMENTAIS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Sumário

Neste trabalho desenvolve-se uma sistemática para obtenção de operadores de aproximação incremental para integração passo a passo de equações diferenciais ordinárias. Mostra-se como obter operadores explícitos e implícitos. As condições de consistência e estabilidade exigidas para a convergência segundo o teorema de Lax e Richtmeyer são apresentadas de modo sucinto e simplificado. Aplica-se a teoria na instituição de operadores de aproximação para um sistema massa-mola-amortecedor. Comenta-se das vantagens e desvantagens dos vários esquemas, mostrando-se que operadores não consistentes podem ter a convergência prejudicada.

---

GENERATION OF A FAMILY OF INCREMENTAL OPERATORS  
FOR NUMERICAL INTEGRATION

Summary

In this paper it is shown a straight forward technique to derive approximation operators for numerical integration of ordinary differential equations using the step by step approach. Implicit and explicit operators are derived. The consistence and stability conditions required for convergence according to Lax-Richtmeyer theorem are presented in a concise way. The theory is applied to derive approximation operators for a single degree of freedom system with viscous damping. Some comments on the advantages and disadvantages of the different operators are presented, and it is shown that non-consistent operators can eventually lead to non-convergent results.

**A N A I S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 31**

**PP. 1519 - 1531**



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

GENERALIZAÇÃO NO CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE INTERFERÊNCIA

Edison da ROSA  
Depto. de Engenharia Mecânica  
Univ. Federal de Santa Catarina  
Florianópolis - Brasil

Domingos Boechat ALVES  
Depto. de Engenharia Mecânica  
Univ. Federal de Santa Catarina  
Florianópolis - Brasil

1. Introdução

De acordo com os conceitos da teoria da confiabilidade, o denominado caso fundamental e sua probabilidade de falha, definida como probabilidade de interferência, fornece uma ótima ferramenta para o estudo da confiabilidade, mesmo nos casos que se afastam bastante do caso fundamental, [3;

6; 9]. Desta forma, a probabilidade de interferência entre duas populações apresenta muita aplicação. É desenvolvido um processo que permite uma solução imediata, não iterativa em um problema de projeto, pelo uso do conceito de dois fatores assintóticos e da equação de compatibilidade destes fatores com o problema físico.

## 2. Teoria da confiabilidade

Um sistema, não importando o seu tipo, deve ser projetado com uma capacidade própria, que o tornará apto a atender uma demanda exigida pelo seu uso em serviço. A amplitude da demanda que solicita o sistema depende em geral apenas da aplicação do sistema. A solicitação exige uma contrapartida, que é dada pela capacidade do sistema de suportar a demanda, ou seja, pela sua resistência. Esta resistência é algo que está ligado estritamente ao projeto do sistema, bem como à qualidade de sua construção, sendo portanto inerente ao próprio. Para o projeto ser eficiente deve se basear em dados, referentes à solicitação e à resistência, perfeitamente definidos. Tal no entanto é difícil de ocorrer na prática, uma vez que sempre existem imprecisões e tolerâncias, que levam a uma dispersão nos dados. Assim, em sistemas caracterizados por grandes dispersões, como alguns relacionados à engenharia, ou em sistemas que exigem grande segurança com alto rendimento, o melhor modo de tratar eficientemente o problema é sob um enfoque probabilístico. É necessário pois raciocinar em termos de probabilidades, seja de falha como de desempenho satisfatório do sistema. A confiabilidade é a probabilidade de sucesso do projeto, ou o que é equivalente, de que não falhe em operação. Este sucesso é obtido por uma certa margem de segurança, uma resistência suplementar, para compensar as dispersões que ocorrem.

Como é possível dizer que todas as variáveis em maior ou menor grau, que influem na capacidade do sistema são aleatórias, resulta que a resistência do sistema também o é. Assim a resistência fica definida pela sua função densidade de probabilidade (FDP),  $f_R(r)$ . Por outro lado, a deman

da sollicita o sistema e esta é na maioria das aplicações ir regular e imprevisível, dentro de certos limites, a sollicitação é tratada também como variável aleatória, sendo perfeitamente definida pela FDP correspondente,  $f_S(s)$ .

A análise da confiabilidade usualmente inicia com um modelo simples, referido como caso fundamental [2; 8; 11], que consiste de uma população de sistemas, cuja resistência  $R$  é caracterizada pela sua FDP, submetida a uma sollicitação  $S$ , também aleatória. Esta sollicitação é considerada estática, constante no tempo, mas aleatória no sentido de que cada vez que o sistema é ativado, a sollicitação possui um valor imprevisível. Para este caso a confiabilidade é constan te no tempo e pode ser obtida por

$$C = P(R > S) \quad (1)$$

que é a probabilidade de que a resistência seja maior do que a sollicitação. Analogamente a probabilidade de interferência é fornecida como

$$P_I = P(R \leq S) \quad (2)$$

e em função das FDP, no caso da resistência e da sollicitação serem estatisticamente independentes,

$$P_I = \int_A f_R(r) f_S(s) dA \quad (3)$$

sendo  $A$  a área definida pelo conjunto  $\{(r;s): r < s\}$ .

Em alguns casos particulares, é possível obter uma ex pressão analítica para  $P_I$ , embora de um modo geral a expres são (3) deva ser resolvida numericamente. No caso particular em que ambas as FDP são normais, então  $P_I$  é dada por

$$P_I = 1 - \phi(z) \quad (4)$$

onde

$$z = \frac{\mu_R - \mu_S}{[\sigma_R^2 + \sigma_S^2]^{1/2}} \quad (5)$$

sendo  $\mu_R$  e  $\mu_S$  as médias para a resistência e a sollicitação,

respectivamente e  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$  os correspondentes desvios padrão.

### 3. Generalização no cálculo de $P_I$

O processo usual para a resolução de (3) é usando um método de integração numérica. Para tornar possível esta integração, os parâmetros de  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  devem ser especificados, para que seja possível calcular o valor da função integrada nos vários pontos do intervalo. De um modo geral, as distribuições ficam com seus parâmetros caracterizados pela média e desvio padrão da população correspondente. Assim,  $P_I$  será uma função de ao menos quatro parâmetros, com o que torna-se difícil fazer uma representação adequada dos resultados. Como a integração numérica exige valores específicos, o resultado obtido fica válido apenas para este conjunto de valores usados.

Para contornar estes problemas, foi idealizada uma apresentação de  $P_I$  em função da duas variáveis,  $K_0$  e  $K_1$ , definidas como funções adequadas dos parâmetros de  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$ , de tal modo que para valores fixos destas variáveis a probabilidade de interferência não dependa dos valores de cada um dos parâmetros, com  $K_0$  e  $K_1$  constantes. A idéia é de partindo de um espaço  $R^n$ , de dimensão igual ao número de parâmetros envolvidos no cálculo de  $P_I$ , através das variáveis  $K_0$  e  $K_1$ , denominados de fatores assintóticos, definir um espaço  $R^2$ . Este espaço, de componentes  $(K_0; K_1)$ , deve ser tal que cada ponto corresponda a um único valor de  $P_I$ . A figura 1 ilustra a correspondência.

O percurso  $R^n \rightarrow R^1$  é o modo de calcular  $P_I$ , ou seja, é obtido o valor da função

$$P_I = h(X) \quad (6)$$

onde  $X = \{x_i\}$  para  $i = 1, n$  e  $X \in S_{01} \subset R^n$ . O conjunto  $S_{01}$  é formado pelos pontos de  $R^n$  que reproduzam um específico ponto  $(K_0; K_1)$  em  $R^2$ . A expressão (6) é calculada pela integração de (3), que representa a função  $h$ , para valores específicos de cada  $x_i$ . O enfoque dado é definir o espaço  $R^2$  de tal forma que

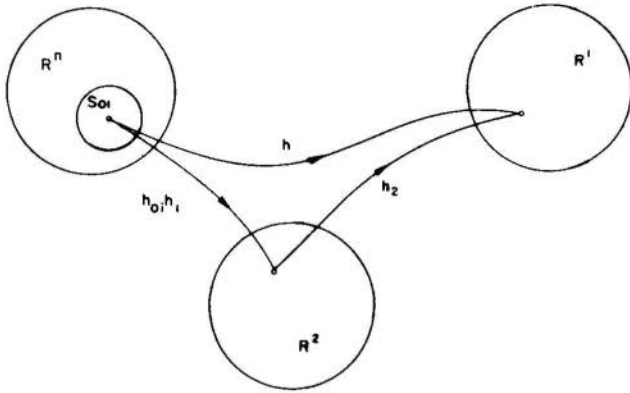


Fig. 1 - Possibilidades para o cálculo de uma função a  $n$  variáveis.

$$P_I = h_2(K_0; K_1) \quad (7)$$

seja unívoca e também ocorra

$$h(X) = h_2(K_0; K_1) \quad (8)$$

O espaço  $R^2$  é obtido de  $R^n$  fazendo

$$K_0 = h_0(Y_0) \quad \text{e} \quad K_1 = h_1(Y_1) \quad (9)$$

com a condição de que o conjunto dos componentes de  $Y_0$  e  $Y_1$ ,  $\{y_0^i\}$  e  $\{y_1^i\}$  respectivamente, sejam diferentes, estejam contidos em  $\{x_i\}$  e não sejam vazios. As equações (9) devem ser tais que (8) se verifique incondicionalmente. Uma vez obtido o espaço  $R^2$ , a probabilidade de interferência é calculada para pontos  $(K_0; K_1)$  pré-determinados, com o uso de (3), com os resultados apresentados em gráficos de  $P_I$  contra  $K_0$  e  $K_1$ , que é a representação gráfica da relação (7).

Como exemplo de aplicação é interessante considerar o caso em que tanto a resistência como a solicitação possuem para a FDP a distribuição normal. Definindo os fatores assintóticos como

$$K_0 = (\mu_R - \mu_S)/\sigma_R \quad \text{e} \quad K_1 = (\mu_R - \mu_S)/\sigma_S \quad (10)$$

é possível isolar  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$ , que substituídos em (5) resulta

$$z = \frac{1}{[K_0^{-2} + K_1^{-2}]^{1/2}} \quad (11)$$

Definindo  $K_0$  e  $K_1$  por (10),  $P_I$  passa a ser função exclusiva dos fatores assintóticos, não importando os valores particulares de  $\mu_R$ ,  $\mu_S$ ,  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$ , desde que quando substituídos em (10),  $K_0$  e  $K_1$  fiquem constantes. Desta forma as definições usadas para os fatores assintóticos são convenientes.

Em um caso prático, é conhecida a priori apenas a função  $P_I = h(X)$ , dada por (3). Tanto as funções que definem  $K_0$  e  $K_1$ , como a função  $h_2(K_0; K_1)$  não são conhecidas, tornando o problema um tanto abstrato. O único modo de resolver quanto à definição de  $R^2$ , é por tentativas, ou seja, as funções  $h_0$  e  $h_1$  são arbitradas e após é verificado se (8) se verifica.

Para ser possível a integração numérica, cada componente de  $X$  deve ser conhecida, mas apenas dois valores estão especificados, os que fixam o ponto em  $R^2$ . Como  $P_I$  deve depender apenas das coordenadas deste ponto, o vetor  $X$  é de importância secundária, desde que  $X \in S_{01}$ . Assim, algumas componentes  $x_i$  podem ser arbitradas no cálculo de (3), desde que as definições de  $K_0$  e  $K_1$  estejam corretas. Este fato parece lógico se for lembrado que no caso normal-normal,  $P_I$  depende apenas de  $z$  e que para  $K_0$  e  $K_1$  dados por (9) resulta a expressão (11). Assim,  $P_I$  depende apenas de  $K_0$  e  $K_1$ , sendo os valores de  $\mu_R$ ,  $\mu_S$ ,  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$  apenas um passo intermediário para se chegar a  $P_I$ .

Detalhando mais o exemplo considerado, o processo fica mais claro. Assumindo valores numéricos para os fatores assintóticos,  $K_0 = 5$  e  $K_1 = 3$ , foram obtidas as curvas de  $f_R$  e  $f_S$ , para três situações, para diferentes valores da relação  $\mu_R/\mu_S$ . A média da solicitação foi considerada unitária e em qualquer situação ocorre  $z = 2,572$  e logo  $P_I \approx 5 \cdot 10^{-3}$ . As curvas de  $f_R$  e  $f_S$  estão na figura 2.

A figura ilustra, para  $K_0$  e  $K_1$ , fixos, o comportamento das FDPs, conforme o valor de  $\mu_R$  e  $\mu_S$ . Pela comparação

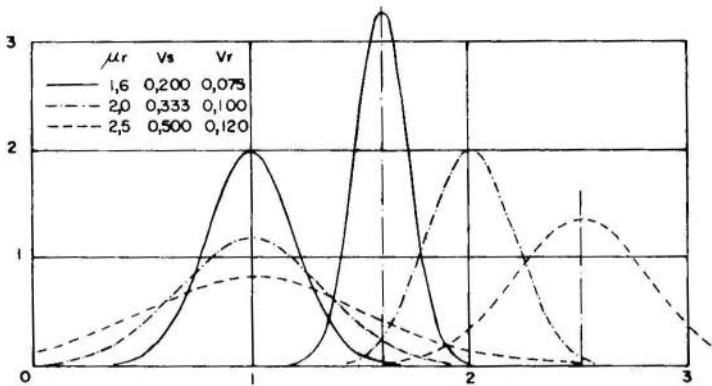


Fig. 2 - Distribuições para a resistência e a solicitação.

das curvas, torna-se flagrante que aumentando o afastamento relativo entre as médias, aumenta a dispersão de valores em torno da média. Isto fica bem caracterizado pelos valores do coeficiente de dispersão, definido como  $V = \sigma/\mu$ , conforme mostrado na figura. Assim, o coeficiente de dispersão da solicitação passa de 0,20 para 0,33 e após 0,50. O que ocorre é que aumentando a distância entre as médias, as dispersões, tanto da resistência como da solicitação aumentam, de modo que a probabilidade de interferência permaneça constante.

#### 4. Equações de compatibilidade

Em uma situação de projeto, a partir de  $P_I$  e dos dados referentes às distribuições que representam a solicitação e a resistência, o ideal é obter uma maneira simples para sintetizar o sistema: Neste estágio, a maneira que melhor se adapta como um critério de projeto, é usar um fator de projeto, definido como

$$n = \mu_R/\mu_S \quad (12)$$

Este fator fornece uma medida do afastamento relativo entre as médias, sendo que um valor superior à unidade, representa uma margem de resistência suplementar. Esta margem



vai compensar, em maior ou menor grau as dispersões que ocorrem, fornecendo assim uma chance de falha adequada, representada pelo valor de  $P_I$ . Em sistemas estruturais, este fator de projeto é semelhante ao coeficiente de segurança comumente empregado, apenas que o fator de projeto é definido em termos precisos. O coeficiente de segurança é poucas vezes definido com exatidão, ficando um conceito vago e impreciso.

Retornando ao exemplo normal-normal, os fatores assintóticos podem ser escritos, usando (12), como

$$K_0 = (n - 1)/n V_R \text{ e } K_1 = (n - 1)/V_S \quad (13)$$

Por outro lado, o valor de  $z$  é obtido de  $K_0$  e  $K_1$ , por (11) e assim foi possível obter a expressão analítica que fornece  $P_I$ . A representação gráfica desta função, tomando  $P_I$  como um parâmetro, está na figura 3. Pela análise do gráfico, nota-se que as curvas são hipérbolas, com assíntotas  $K_0 = z$  e  $K_1 = z$ , sendo  $z$  a correspondente à probabilidade  $P_I$  da curva. Assim,  $K_0 \rightarrow \infty$ , então  $K_1 \rightarrow z$  e vice-versa, ou seja, para  $V_R \rightarrow 0$  então  $P_I$  depende praticamente apenas de  $K_1$ . Este fato significa que a resistência passando a ser determinística, apenas a dispersão da sollicitação é representativa, que é o dado fornecido por  $K_1$ . A denominação de  $K_0$  e  $K_1$  de fatores assintóticos vem justamente do fato de que a probabilidade de interferência é dada assintoticamente por  $K_1$ .

Das equações (13) é possível isolar o fator de projeto e representando por  $n_0$  o obtido em função de  $K_0$  e  $n_1$  o obtido por  $K_1$ ,

$$n_0 = \frac{1}{1 - K_0 V_R} \text{ e } n_1 = 1 + K_1 V_S \quad (14)$$

Na resolução de um problema prático, é especificado um valor para  $P_I$  e são conhecidos  $V_R$  e  $V_S$ , que podem ser estimados usualmente a partir de amostras. O objetivo final, é chegar ao fator de projeto que forneça  $P_I$ , para  $V_R$  e  $V_S$  do problema. No gráfico  $K_0 \times K_1$ , a solução estará em um pon

to particular sobre a curva de  $P_I$ , desde que as coordenadas do ponto, substituídas em (14), forneçam  $n_0 = n_1$ , ou seja, o ponto  $(K_0; K_1)$  deve ser compatível com o problema físico. Fazendo então  $n_0 = n_1$ , resulta

$$K_1 = \frac{K_0 V_R}{V_S(1 - K_0 V_R)} \quad (15)$$

$$\text{e} \quad K_0 = \frac{K_1 V_S}{V_R(1 + K_1 V_S)} \quad (16)$$

As equações (15) e (16) são denominadas de equações de compatibilidade para o problema da interferência, válidas quando ambas as distribuições são normais. Quando as FDPs empregadas forem diversas da normal, então as equações de compatibilidade podem ser obtidas de modo análogo, usando as equações de definição dos fatores assintóticos, concernentes à combinação de distribuições usadas. Assim, as equações de compatibilidade asseguram que seja respeitado o aspecto físico do problema.

A figura 3 apresenta também a curva de compatibilidade para o caso em que  $V_R = 0,1$  e  $V_S = 0,2$ . O ponto de intersecção da curva de compatibilidade com a de  $P_I$  que é desejado, fornece assim as coordenadas do ponto  $(K_0; K_1)$  que satisfaz ao problema.

Considerando um caso onde ocorram os valores de  $V_R$  e  $V_S$  citados e sendo desejada uma probabilidade de interferência de  $10^{-2}$ , é resolvido como segue. A partir da figura 3, o ponto de intersecção entre a curva de  $P_I = 10^{-2}$  e a curva de compatibilidade é aproximadamente  $(3,80; 2,95)$  e substituindo em (14) resulta  $n_0 = 1,613$  e  $n_1 = 1,590$ , com média  $n = 1,601$ . Comparando com a solução exata que existe neste caso normal-normal,

$$n = \{1 + \sqrt{1 - \delta_R \delta_S}\} / \delta_R \quad (17)$$

onde

$$\delta_i = 1 - (z V_i)^2 \quad (18)$$

substituindo os valores, com  $z = 2,326$ , vem  $n = 1,595$ , ou seja, uma diferença inferior a 0,5%.

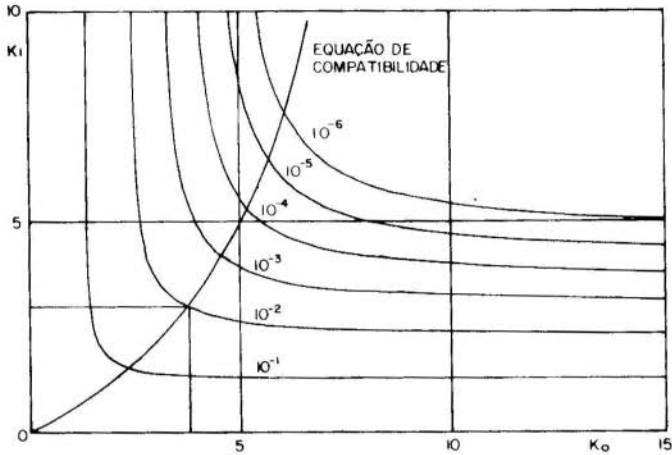


Fig. 3 - Curvas de  $P_I$ , para o caso normal-normal, juntamente com a curva de compatibilidade.

### 5. Conclusões

O uso do processo no caso normal-normal é apenas ilustrativo, pois existe uma solução exata. No entanto, quando uma solução numérica de (3) se faz necessária, o método desenvolvido é de grande valia, pois permite o cálculo de  $P_I$  ser estendido para quaisquer valores dos parâmetros, pois  $P_I$  é invariante em relação a  $K_0$  e  $K_1$ . Este estudo foi aplicado para as distribuições de Weibull, exponencial generalizada, Rayleigh generalizada bem como normal, [11], que resultam em uma representação sistemática e racional dos resultados. Em um estudo mais detalhado, verificou-se uma limitação no método, em relação à distribuição de Weibull, possivelmente pelo fato de possuir três parâmetros. Este aspecto está ainda em aberto.

A verificação da invariância de  $P_I$  com  $X \in S_{01}$  é feita na prática comparando  $P_I$  calculado para diversos valores das componentes de  $X$  que foram arbitradas. Pela comparação dos valores de  $P_I$ , é verificada então a definição dos fatores assintóticos, se adequada ou não.

Finalmente, um aspecto que pode comprometer o sucesso do processo, é a falta de um maior número de dados de grande parte das variáveis que influem em um projeto, no que se refere aos parâmetros e mesmo ao tipo de distribuição a usar. Assim, é essencial uma pesquisa cuidadosa para levantar os dados necessários, a um nível de confiança adequado.

### Bibliografia

- [1] Ang, A., Amin, M., Reliability of structures and structural systems. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of the ASCE, Vol. 94, nº EM2, April 1968, pp. 559-583.
- [2] Benjamin, J.R., Cornell, C.A., Probability, statistics and decision for civil engineers. McGraw-Hill, 1970.
- [3] Crandall, S.H., Mark, W.D., Random vibration in Mechanical systems. Academic Press, 1963.
- [4] Davenport, W.B.Jr., Probability and random processes. McGraw-Hill, Kogakusha, 1970.
- [5] Ferryborges, J., Castanheta, S., Structural safety, National Laboratory of civil engineering, Lisboa, 1971.
- [6] Freudenthal, A.M., Critical appraisal of safety criteria and their basic concepts. 8th. Congress, International Association for Bridge and Structural Engineers, New York, 1968.
- [7] Lin, Y.K., Probabilistic theory of structural dynamics, McGraw-Hill, 1967.
- [8] Lipson, C., Sheth, N., Statistical design and analysis of engineering experiments, McGraw-Hill 1973.
- [9] Pieruschka, Erich, Principles of Reliability, Prentice Hall, 1963.

- [10] Rosa, E.da., Confiabilidade em sistemas mecânicos, FEESC-UFSC, 1976.
- [11] Rosa, E.da., Generalização no cálculo da probabilidade de interferência entre a sollicitação e a resistência. Tese de Mestrado, UFSC, 1976.
- [12] Swanson, S.R., Random loading fatigue testings: A state of the art survey. Materials, Research and Standards, ASTM, April 1968, pp. 10-44.

ROSA, E.da e ALVES, D.B.

GENERALIZAÇÃO NO CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE INTERFERÊNCIASumário

Neste estudo, o principal aspecto investigado é a probabilidade de interferência entre as populações, da solicitação que age no sistema, e da resistência deste. Através de um enfoque formal é proposta uma representação bidimensional da probabilidade de interferência. Esta representação é feita por dois fatores,  $K_0$  e  $K_1$ , respectivamente o fator assintótico da distribuição da resistência e da solicitação. A probabilidade de interferência é plotada em um sistema de coordenadas  $K_0 \times K_1$ , assumida a invariância de  $P_I$  para um ponto  $(K_0; K_1)$ . É introduzido o conceito de compatibilidade, que permite sintetizar o sistema pelo uso de um fator de projeto.

GENERALIZATION IN THE DETERMINATIONOF THE INTERFERENCE PROBABILITYSummary

In this study, the fundamental aspect investigated is the interference probability, between the populations of the stress acting on a system, and the strength of the system. A two dimensional representation of the probability of interference is proposed. This representation is based on two factors, named  $K_0$  and  $K_1$ , respectively the assyntotic factor of the strength and of the stress distribution. The interference probability,  $P_I$ , is plotted as a parameter in a  $K_0 \times K_1$  plane, under a assumed invariance of  $P_I$ . The concept of compatibility are introduced and allows to obtain a design factor which make possible the system synthesis.

**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**PAPER NO. D - 32**

PP. 1533 - 1542



**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

APLICAÇÃO DA TEORIA DA INTERFERÊNCIA

DE DUAS POPULAÇÕES NA PREVISÃO DA CONFIABILIDADE

Edison da ROSA  
Depto. de Engenharia Mecânica  
Univ. Federal de Santa Catarina  
Florianópolis - Brasil

1. Introdução

O cálculo exato da confiabilidade, para um dado sistema, em um ambiente aleatório, é algo que ainda não está resolvido no caso geral. Alguns modelos simplificados foram analisados [1; 2; 4; 8] e existem soluções nestes casos. No entanto, estas são aproximações, que fornecem apenas uma indicação do nível de confiabilidade. O presente artigo visa usar os dados da teoria da interferência entre duas populações para avaliar a confiabilidade, para solicitações estáticas e dinâmicas.

## 2. Uso da teoria da interferência

A confiabilidade é normalmente referida como uma função não crescente do tempo, pois quanto maior o período transcorrido, maior a chance de falha do sistema considerado. Por outro lado, é relativamente simples a confiabilidade, ou o que é equivalente, a probabilidade de falha  $P_f$ , para o chamado caso fundamental. Este se baseia em uma população de sistemas, cuja resistência  $R$  possui uma dada função densidade de probabilidade, submetida a uma solicitação estática  $S$ , também aleatória. A aleatoriedade de  $S$  provém do fato de que cada vez que o sistema é ativado, a solicitação possui um valor diverso do anterior. Este caso fundamental é referido como teoria da interferência, interferência esta que ocorre entre as populações da solicitação e da resistência. Assim, neste caso particular, de forma a evitar confusões com outros modos de falha, a probabilidade de falha é denominada de probabilidade de interferência,  $P_I$ .

$$P_I = P(R < S) \quad (1)$$

As referências [1; 5; 9] fornecem métodos de obter a probabilidade de interferência para diversas funções densidade de probabilidade.

O conceito da probabilidade de interferência é importante pelo fato de ser facilmente calculado, e pode ser usado para obter uma estimativa de confiabilidade para outros casos de solicitação, diversos do caso fundamental. Nestes outros modos de falha, a probabilidade de interferência é uma ferramenta excelente na estimativa da confiabilidade.

No caso geral da confiabilidade ser variável com o tempo, esta é dada em termos da taxa de falhas,  $h(t)$ , que representa de uma população de sistemas, a fração destes que falham, por unidade de tempo. Matematicamente a taxa de falhas é definida sendo a probabilidade condicional, de que o sistema falhe no tempo  $t$ ;  $t + dt$ , sabendo-se que não falhou no intervalo de 0 a  $t$ . A expressão da confiabilidade é

$$C(t) = \exp \left[ - \int_0^t h(t) dt \right] \quad (2)$$



Quando a solicitação que age no sistema é discreta, ou seja, o sistema é ativado e desativado diversas vezes durante a sua vida, a taxa de falhas é função do número de aplicações da solicitação. Para este caso Freudenthal [3] fornece para a taxa de falhas,

$$h(N) = -\ln (1 - P_I) \quad (3)$$

sendo  $P_I$  a probabilidade de interferência, suposta constante para as sucessivas aplicações. Para  $P_I$  inferior a 0,05 é válido assumir  $h(N) = P_I$ . Por outro lado, Ang e Amin[1] mostraram que (3) é na realidade um limite superior para  $h(N)$ , ou seja, usando  $h(N) = P_I$ , é obtido o valor máximo que pode atingir a probabilidade de falha do sistema. Isto se baseia no fato, que foi demonstrado por Ang e Amin, de que a taxa de falhas é uma função monotonicamente decrescente do número de aplicações da solicitação, ou seja,

$$h(N) < h(N - 1) \quad (4)$$

para  $N > 1$  e no caso de  $N = 1$ ,

$$h(1) = P_I \quad (5)$$

Desta forma, para  $N$  aplicações da solicitação, a confiabilidade pode ser estimada por

$$C(N) = \exp [-N P_I] \quad (6)$$

sendo na realidade o limite inferior. A figura 1 ilustra o comportamento de  $h(N)$ , quando ambas as distribuições do problema são log normal.

Um outro enfoque que permite o uso da probabilidade de interferência é sugerido por Mittenbergs [6]. Neste caso a resistência é considerada como uma função do tempo, ou seja, os parâmetros da função densidade de probabilidade não são constantes. Este efeito ocorre devido à possibilidade de deterioração da resistência do sistema, com o passar do tempo. Deste modo, a probabilidade de interferência é em si

uma função do tempo, crescente no caso. Usando a aproximação  $h(N) = P_I$ , então a confiabilidade pode ser calculada para pontos discretos do tempo e assim a dependência  $C(t)$  é obtida.

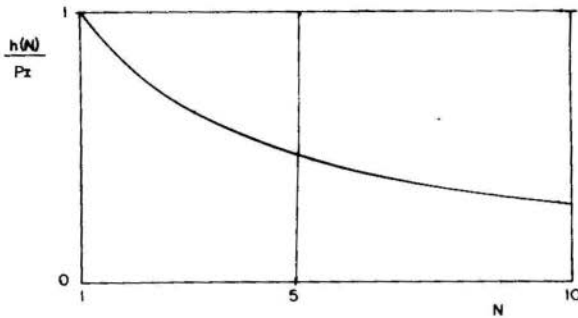


Fig. 1 - Taxa de falha específica, para solicitação e resistência log normal.  $P_I = 0,076$  e fator de projeto  $n = 1,5[1]$

Quando a resistência é estacionária, o fato de que  $h(N)$  é máximo para  $N = 1$ , significa que a probabilidade de falha é maior quando o sistema é solicitado pela primeira vez. Isto se baseia no fato de que as incertezas são máximas quando da primeira solicitação. Se o sistema resiste à primeira aplicação de carga sem dano, o mesmo sistema provavelmente não irá falhar se for aplicada uma carga menor ou igual a esta. Apenas com alguma solicitação superior a esta primeira é que poderá falhar. Assumindo então que  $h(N) = P_I$  a expressão

$$C(N) = (1 - P_I)^N \quad (6)$$

é a estimativa conservativa (a favor da segurança) da confiabilidade. Para  $N P_I$  relativamente pequeno é válido ainda

$$C(N) \approx 1 - N P_I \quad (8)$$

Para uma solicitação dinâmica, um caso que pode ser estudado com o auxílio da teoria da interferência é quando o sistema falha à primeira sobrecarga. Isto quer dizer que o sistema deixa de cumprir a sua função quando pela primei-

ra vez a solicitação atinge um dado nível, definido este pela resistência. Neste caso, é necessário trabalhar com a distribuição dos máximos da solicitação e não a distribuição da solicitação propriamente dita. Esta distribuição dos picos, se interferir com a distribuição da resistência, indica a possibilidade de falha. A probabilidade de falha está assim relacionada com a probabilidade de interferência entre a distribuição de máximos da solicitação e a distribuição da resistência. A chance de falha por unidade de tempo em uma solicitação dinâmica, será  $P_I$  vezes o valor médio da frequência da solicitação. Deste modo, a taxa de falhas fica dada por

$$h(t) = f_0(t) P_I(t) \quad (9)$$

sendo  $f_0(t)$  a frequência esperada. A figura 2 mostra a situação das distribuições envolvidas no problema.

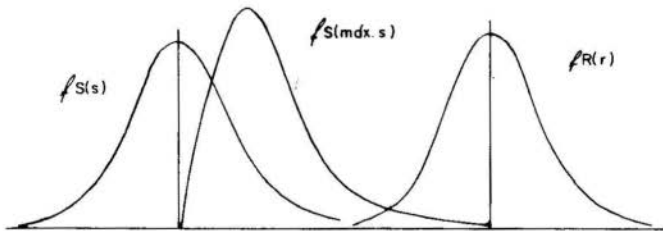


Fig. 2 - Distribuições da solicitação, máximos desta e da resistência.

Desta forma a confiabilidade é dada por

$$C(t) = \exp - \left[ \int_0^t f_0(t) P_I(t) dt \right] \quad (10)$$

Com a solicitação seguindo uma normal, de média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , os máximos seguem uma distribuição de Rayleigh generalizada [9], de parâmetros,  $x_0 = \mu$  e  $\alpha = \mu + \sigma$ . Se a solicitação for um processo estocástico estacionário, então a taxa média de falhas é

$$\lambda = f_o P_I \quad (11)$$

Das equações (9) e (11), é fácil verificar que a taxa de falhas depende não só do projeto do sistema, supondo um caso estático (que é usado no cálculo de  $P_I$ ), como também das características dinâmicas do sinal da solicitação, aqui representadas de um modo aproximado pela frequência esperada da solicitação. No caso particular do espectro de frequências da solicitação for do tipo de banda estreita, então segundo Rice [7], a frequência esperada vale

$$f_o = f_b \left[ \frac{1}{3} \frac{1 - \beta^3}{1 - \beta} \right]^{1/2} \quad (12)$$

onde  $f_b$  é o limite superior do espectro de frequências e  $\beta$  a largura relativa,  $\beta = f_a/f_b$ .

### 3. Exemplo

Será considerada a falha devido ao escorregamento, em uma montagem por interferência entre o cubo e o eixo em uma engrenagem. A falha ocorre quando pela primeira vez a solicitação ultrapassar o valor da resistência. A probabilidade de falha deve ficar limitada a  $10^{-2}$ , para uma vida de  $10^3$  horas de operação. Os dados necessários são:

Diâmetro do eixo - 20 mm (aço)

Diâmetro externo do cubo, equivalente - 28 mm (aço)

Força de atrito solicitante - ( $\mu = 4695$ ;  
 $\sigma = 709$ )N

Coeficiente de atrito - ( $\mu = 0,168$ ;  
 $\sigma = 0,027$ )

Coeficiente de dispersão da interferência -  $V_U = 0,12$

Largura da faixa do espectro de frequência -  $\beta = 0,511$

Frequência superior de corte -  $f_b = 0,0195$ Hz

Para a geometria do ajuste prensado, a dependência entre a pressão de contato e a interferência radial  $U$  é

$$p = \frac{U}{d} E 0,3297$$

A força de atrito resistente, para um comprimento útil do ajuste de 30 mm, será

$$F_R = 31,073 U E / \mu_S$$

onde  $\mu_S$  é o coeficiente de atrito entre as superfícies.

O primeiro passo para realizar o dimensionamento é fazer uso da confiabilidade especificada e a partir desta, obter  $P_I$ . Para  $C = 0,99$ , usando (9) e (10), vem

$$0,99 = \exp [-f_o P_I t]$$

e a partir de (12) vem  $f_o = 0,015$  Hz, logo

$$P_I = 1,86 \cdot 10^{-7}$$

Uma distribuição log normal foi considerada adequada para caracterizar a resistência e a solicitação, e o critério de dimensionamento, dado pelo fator de projeto  $n$ , definido como [1; 3; 8; 9]

$$n = \mu_R / \mu_S$$

é dado neste caso específico por

$$n = \sqrt{\frac{1 + V_R^2}{1 + V_S^2}} \exp \left[ Z \sqrt{\ln(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)} \right]$$

com  $Z$  a abscissa da curva normal padrão para  $1 - P_I$  desejada, no caso  $Z = 5,083$ . As outras variáveis são

$V_R$  - coeficiente de dispersão da função que caracteriza a resistência

$V_S$  - coeficiente de dispersão da solicitação.

A resistência da montagem é dada por  $F_R$  e a solicitação, pela força de atrito que está atuando,  $F_S$ . O coeficiente de dispersão da solicitação é obtido de imediato, usando a definição

$$V_S = \sigma_S / \mu_S$$

$$V_S = 0,151$$

Quanto ao coeficiente de dispersão da resistência deve ser obtido dos valores do coeficiente de dispersão das variáveis que influem na resistência, no caso U, E e  $\mu_S$ . O coeficiente de dispersão para uma função genérica, na forma

$$f = C \prod_i x_i^{\alpha_i}$$

é dado com boa aproximação por

$$V_f^2 = \sum_i (\alpha_i V_{xi})^2$$

No caso específico,

$$V_U = 0,12$$

$$V_E = 0,03$$

$$V_{\mu_S} = 0,161$$

resultanto

$$V_R = 0,203$$

e o fator de projeto vale

$$n = 3,611$$

Esta é a relação entre a média da resistência e a média da solicitação. Esta última é de 4695 N, logo a média da resistência deve ser de 16954 N. Assim, usando a expressão de  $F_R$  e substituindo os valores médios de E e  $\mu_S$ , resulta uma interferência média

$$\mu_U = 15,5 \mu m$$

Desta forma, as tolerâncias de usinagem devem ser escolhidas de tal modo a proporcionar esta interferência média, respeitando o desvio padrão de 1,86  $\mu m$ , decorrência do valor do coeficiente de dispersão assumido.

#### 4. Conclusões

Uma estimativa da confiabilidade, quando o sistema está na sua fase de projeto, é de valor, pois permite prever o desempenho do sistema quando em operação. Neste caso, a teoria da interferência permite uma avaliação aproximada do nível de confiabilidade, fornecendo uma maneira rápida de obter o fator de projeto necessário ao dimensionamento. Uma vez definido o fator de projeto que deve ser usado, o processo de cálculo é análogo ao clássico, apenas que com a diferença que são empregados os valores médios das variáveis envolvidas.

#### Bibliografia

- [1] Ang, A., Amin, M., Reliability of Structures and Structural Systems. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings ASCE, Vol. nº 94, EM2, April 1968, pp. 559-583.
- [2] Crandall, S.H., Mark, W.D., Random Vibration in Mechanical Systems. Academic Press, New York, 1963.
- [3] Freudenthal, A.M., Critical Appraisal of safety Criteria and their Basic Concepts. 8th. Congress, International Association for Bridge and Structural Engineers. New York, 1968.
- [4] Lin, Y.K., Probabilistic theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [5] Lipson, C., Sheth, N., Statistical Design and Analysis of Engineering Experiments, McGraw-Hill, New York, 1973
- [6] Mittenbergs, A.A., The Materials Problem in Structural Reliability. Annals of Reliability and Maintainability, 1966, pp. 148-158.
- [7] Rice, S.O., Mathematical Analysis of Random Noise. Selected Papers on Noise and Stochastic Processes., Dover, 1954.
- [8] Rosa, E. da, Confiabilidade em Sistemas Mecânicos,

FEESC, Universidade Federal de Santa Catarina, 1976.

- [9] Rosa, E. da, Generalização no Cálculo da Probabilidade de Interferência entre a Solicitação e a Resistência, em Sistemas. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1976.



ROSA, E. da

APLICAÇÃO DA TEORIA DA INTERFERÊNCIA  
DE DUAS POPULAÇÕES NA PREVISÃO DA CONFIABILIDADE

Sumário

A probabilidade de interferência representa a probabilidade de falha, para um sistema solicitado estaticamente. No entanto, é possível obter um limite inferior para a confiabilidade, para solicitações dinâmicas, ergódicas, a partir da probabilidade de interferência e da frequência esperada no processo da solicitação. A partir da probabilidade de interferência necessária para atingir o nível de confiabilidade especificado, um critério de projeto pode ser usado, como a relação entre a média da resistência e a média da solicitação. É desenvolvido um exemplo de aplicação.

---

APPLICATION OF THE INTERFERENCE THEORY  
IN THE PREDICTION OF THE RELIABILITY

Summary

The interference probability is the failure probability for a statically stressed system. It is possible to obtain a lower bound for the reliability of the system, for a dynamic stress history, from the interference probability and the expected frequency of the process. Based in the interference probability that is necessary to obtain the specified reliability level, a design criterion can be used, as the relation between the strength mean and the stress mean. As an illustration, an application example is developed.

**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**NOTA TÉCN. NO. TD - 1**

PP. 1543 - 1546



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

PROJETO DE UM PROTÓTIPO DE MESA

COM GUIAS HIDROSTÁTICAS

José Roberto GAMBARINI, Professor  
Benedito de M. FURQUÊRIO, Professor  
Rosalvo Tiago RUFFINO, Professor  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Escola de Engenharia de São Carlos (U.S.P.)  
São Carlos, SP, Brasil

1. Introdução

A aplicação de mesas suportadas por guias hidrostáticas em máquinas ferramentas tem resolvido alguns problemas importantes - para o processamento de metais e manutenção da qualidade da máquina. De fato, o sistema de lubrificação hidrostática eliminando totalmente o contato metal-metal apresenta apenas o atrito fluido, decorrendo disso:

- eliminação completa do "stick-slip";
- eliminação completa do desgaste;
- força de atrito bastante reduzida;
- permanência da qualidade de operação.

A finalidade deste projeto é a aplicação em uma retificadora cilíndrica de fabricação PELOPLÁS - São Carlos com as seguintes características

Altura do centro à mesa.....	120 mm
Máximo diâmetro retificável.....	230 mm
Inclinação da mesa superior.....	8°
Velocidade da mesa (acionamento hidr.).....	3000 mm/min (máx)

## 2. Hipóteses de Cálculo

Para o dimensionamento das sapatas hidrostáticas foi escolhido o método da pressão constante.

Devido à necessidade de obtenção de elevada rigidez do conjunto foi usado o sistema de sapatas em oposição.

## 3. Critérios de cálculo

A disposição das sapatas foi determinada impondo-se a condição de igualdade entre as flexas máximas nas extremidades e no centro da mesa, sob a ação do peso próprio da mesa e da peça e das forças de corte. Além disso, foi verificada a condição de tombamento da mesa | 1 |.

As sapatas hidrostáticas foram calculadas segundo critérios definidos por Rowe e O'Donoghue | 2 | e simultaneamente foram estudados problemas relativos a aspectos de projeto e de fabricação, em termos de definição de tolerância e erros de forma admissíveis.

## 4. Resultados dos Cálculos

De acordo com os critérios definidos por | 2 | os resultados encontrados para o sistema de sustentação hidrostático foram os seguintes:

Característica	sapata principal	contra-sapatas e sapatas laterais
Pressão de alimentação (Ps)   $N/m^2$	$2,069 \times 10^6$	$2,069 \times 10^6$
Capacidade de carga (W)   N	2200	450
Folga ( $h_0$ )   $\mu m$	80	80
Comprimento (B)   mm	77	52
Largura (L)   mm	51	35
Largura da soleira (c)   mm	13	9
Rigidez ( $\lambda_0$ )   $N/\mu m$	315	203
Vazão ( $q_0$ )   $m^3/s$	$4 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$
Viscosidade do lubrific. ( $\eta$ )   $Ns/m^2$	0,0345	0,0345
Aquecimento do fluido ( $\Delta T$ )   $^{\circ}C$	1,5	1,5
Diâmetro do orifício restritor (d)   mm	0,3	0,3

Tab. 4.1 - Características das sapatas hidrostáticas

### 5. Conclusões

O projeto apresenta um característico básico: pode ser executado com máquinas convencionais e os elementos de maior precisão são construídos e controlados facilmente dadas suas dimensões. As tolerâncias foram estudadas de modo a satisfazerem a função e a economia.

### Bibliografia:

- Schulz, W., e Ruffino, R.T., Otimização da distância entre apoios de uma mesa de retificadora com mancais hidrostáticos. Relatório enviado ao FINEP (1976)
- Rowe, W.B., and O'Donoghue, J.P., Design Procedures for Hydrostatic Bearings. The Machinery Publishing CO Ltd. London, pp. 56 (1971)

GAMBARINI, J.R., SCHULZ, W., PURQUÉRIO, B.M., RUFFINO, R.T.

PROJETO DE UM PROTÓTIPO DE MESA

COM GUIAS HIDROSTÁTICAS

Sumário

Apresentação do projeto de uma mesa apoiada em guias hidrostáticas para Retificadora Cilíndrica. São incluídas as hipóteses admitidas, os resultados e alguns desenhos.

---

PROTOTYPE DESIGN OF A HYDROSTATIC

SLIDEWAY TABLE

Summary

This paper presents the design procedures of hydrostatic - slideways for supporting the table of a cylindrical grinding machine. Opposed-pad hydrostatic bearings are used in order to attain high stiffness

# A N A S

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. T D - 2

PP. 1547 - 1550



ABCM/CNPq

## PROCEEDINGS

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

### PROJETO DE UM PROTÓTIPO DE CABEÇOTE DE RETIFICADORA

#### EQUIPADO COM MANCAL AEROSTÁTICO

Benedito de M. PURQUÉRIO, Professor  
José Roberto GAMBARINI, Professor  
Rosalvo Tiago RUFFINO, Professor  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Escola de Engenharia de São Carlos (U.S.P.)  
São Carlos, SP, Brasil

#### 1. Introdução

Kilmister apresentou os resultados experimentais obtidos com cabeçote retificador equipado com mancais a gás 1, concluindo que a precisão de giro obtida conduzia a acabamento superficial 33% melhor, em relação a cabeçote retificador equipado com mancais de rolamento, reduzindo o tempo gasto em manutenção da máquina. Mantendo a mesma orientação,

o Laboratório de Máquinas Ferramentas da Escola de Engenharia de São Carlos propôs-se a projetar e construir dois cabeçotes retificadores (externo e interno) para serem aplicados em uma Retificadora Cilíndrica de fabricação PELOPLÁS - São Carlos, com as seguintes características:

Cabeçote de Retificação externa:

- Máximo diâmetro/comprimento retificável: 230mm/800mm
- Motor de acionamento: N = 5 CV; n = 1730rpm
- Dimensões do rebolo: 450x130x50mm
- Rotação do rebolo: 1250rpm

Cabeçote de Retificação interna:

- Máximo diâmetro/comprimento retificável: 150mm/110mm
- Motor de acionamento: N = 1/8 CV; n = 10000rpm
- Dimensões do rebolo: 50mm (máx); 10mm (mín)
- Rotação do rebolo: 20000rpm

## 2. Critérios de Cálculo

As expressões analíticas utilizadas para os cálculos dos Mancais a Gás são as propostas por POWELL 2 e GRASSAM 3 .

## 3. Resultados dos Cálculos

As tabelas 1 e 2 apresentam os resumos dos cálculos dos cabeçotes retificadores.

## Bibliografia:

- 1 Kilmister, G.P.F., An Externally Pressurised Air Bearing Boring Spindle. 5<sup>th</sup> Gas Bearing Symposium University of Southampton, England (1971).
- 2 Powell, J.W., Design of Aerostatic Bearings. The Machinery Publishing Co. London (1970)
- 3 Grassam, N.S., e Powell, J.W., Gas Lubricated Bearings. Butterworths, London (1964)

Característica	Notação	Unidade	Mancal 1	Mancal 2	Mancal Axial (back to back)
Diâmetro	D	mm	85,00	85,00	-
Comprimento	L	mm	106,00	106,00	-
Distância dos furos à extremidade do mancal.	l/L	-	0,25	0,25	-
Diâmetro do Restritor	d	mm	0,30	0,30	1,00
Nº de orifícios	n	-	8	8	8
Rigidez	K	N/mm	42.000,00	42.000,00	104.000,00
Potência consumida	P	W	0,70	0,70	2,40
Vazão do ar	Q	m <sup>3</sup> /s	5,85x10 <sup>-4</sup>	5,85x10 <sup>-4</sup>	1,80x10 <sup>-3</sup>
Diâmetro externo	2a	mm	-	-	150,00
Diâmetro interno	2b	mm	-	-	100,00
Capacidade de carga	W	N	1.100,00	1.100,00	1.860,00
Folga teórica	2h <sub>o</sub>	mm	0,043	0,043	0,025

Tabela 1 - Resumo dos cálculos do cabeçote retificador externo

Característica	Notação	Unidade	Mancal 1	Mancal 2	Mancal Axial (back to back)
Diâmetro	D	mm	60,00	60,00	-
Comprimento	L	mm	60,00	60,00	-
Distância dos furos à extremidade do mancal	l/L	-	0,25	0,25	-
Diâmetro do Restritor	d	mm	0,20	0,20	1,00
Nº de orifícios	n	-	8	8	8
Rigidez	K	N/mm	46.000,00	46.000,00	38.800,00
Potência consumida	P	W	78,00	78,00	60,00
Vazão do ar	Q	m <sup>3</sup> /s	4,30x10 <sup>-4</sup>	4,30x10 <sup>-4</sup>	5,13x10 <sup>-4</sup>
Diâmetro externo	2a	mm	-	-	90,00
Diâmetro interno	2b	mm	-	-	70,00
Capacidade de carga	W	N	500,00	500,00	170,00
Folga teórica	2h <sub>o</sub>	mm	0,040	0,040	0,025

Tabela 2 - Resumo dos cálculos do cabeçote retificador interno



PURQUÉRIO, B.M., GAMBARINI, J.R. e RUFFINO, R. T.  
PROJETO DE UM PROTÓTIPO DE CABEÇOTE DE RETIFICADORA  
EQUIPADO COM MANCAL AEROSTÁTICO

Sumário

Apresentação do Projeto dos Cabeçotes para Retificação Externa e Retificação Interna equipados com Mancais Aerostáticos. São incluídas as hipóteses observadas e os resultados dos cálculos.

---

DESIGN OF CILINDRICAL GRINDING HEAD MODEL  
EQUIPED WITH AEROSTATIC BEARINGS

Summary

Externally pressurised air bearings are presented in order to equip a cylindrical grinding machine, for both external and internal grindheads. Design procedures and results are presented.

**A N A S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**NOTA TÉCN. NO. T D - 3**

PP. 1551 - 1557



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE ENTRELIAÇADOS

Vinicius Freire MOURA, Engenheiro  
Internacional de Engenharia S.A.

Solly A. SEGENREICH, Prof. Associado  
COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro

1. Introdução

Se bem que a minimização do peso estrutural de treliças por meio de uma variação de sua geometria é tão antiga quanto o próprio conceito de otimização estrutural [1,2], relativamente poucos trabalhos tem sido desenvolvidos nesta direção se compararmos com a minimização do peso tomando

---

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) sob contrato n° 2222.0750/76.

por variáveis as áreas das seções transversais. Isto se deve, em parte, por ser a formulação do problema mais complexa (a função peso deixa de ser linear nas variáveis de projeto) e por outro lado, porque a redução de peso a alcançar não é tão drástica se comparada com a otimização de geometria fixa. Entre os vários trabalhos desenvolvidos, destacamos Dobbs e Felton [3], Vanderplaats e Moses [4], Pedersen [5].

A presente nota técnica, tem por objetivo a apresentação de um método de otimização geométrica aproximada, que foi implementado em forma de programa para servir de ferramenta aos projetistas de estruturas entrelaçadas.

## 2. Definição do Problema e das Restrições Consideradas

Seja uma treliça plana ou espacial com  $N$  nós e  $M$  membros. As coordenadas dos nós são  $x_i, y_i, z_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ). O peso total da estrutura será dado por:

$$W = \sum_{j=1}^M \rho_j A_j \ell_j \quad (2.1)$$

onde

$A_j$  - área transversal do  $j$ -ésimo elemento.

$\rho_j$  - peso específico do  $j$ -ésimo elemento.

$\ell_j$  - comprimento do  $j$ -ésimo elemento.

Nosso objetivo será minimizar  $W$  tomando por base as coordenadas dos nós  $(x_i, y_i, z_i)$  como variáveis de projeto, e considerando as seguintes restrições a serem satisfeitas:

a) Posições máximas e mínimas

$$(x_i)_{\min} \leq x_i \leq (x_i)_{\max}; \quad (y_i)_{\min} \leq y_i \leq (y_i)_{\max}$$

$$(z_i)_{\min} \leq z_i \leq (z_i)_{\max}$$

- b) Simetria em relação a planos de referência.  
 Por exemplo  $x_i = x_j$  ou  $x_i = -x_j$ , para um dado par  $ij$ .
- c) Variação da posição do nó sobre uma reta pré-fixada.  
 Por exemplo,  $x_i = py_i + q$ ;  $x_i = \bar{p}z_i + \bar{q}$  onde  $p, q, \bar{p}$ ,  
 e  $\bar{q}$  são fixos.
- d) Valores admissíveis para tensões axiais nos membros.

$$\sigma_{c,adm}^i \leq \sigma^{i,j} \leq \sigma_{t,adm}^i \quad (i=1,2\dots M)$$

$$(j=1,2\dots NEC)$$

onde  $\sigma_{c,adm}^i$  é a tensão admissível na compressão do  $i$ -ésimo membro e  $\sigma_{t,adm}^i$  é a tensão admissível na tração do  $i$ -ésimo membro.  $\sigma^{i,j}$  é a tensão no  $i$ -ésimo membro para o  $j$ -ésimo estado de carga. (NEC é o número total de estados de carga).

- e) Valores admissíveis para deslocamentos nodais

$$|u_i^j| \leq (u_i)_{max} \quad (i=1,2\dots N)$$

$$(j=1,2\dots NEC)$$

O projeto ótimo aproximado, é obtido utilizando uma modificação do método de Fletcher and Reeves para que as restrições acima definidas possam ser consideradas.

Assim, seja  $\underline{X}^v$  o vetor de projeto da  $v$ -ésima iteração.

$$\underline{X}^v = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n]^T_v \quad (2.2)$$

então, a iteração é basicamente realizada mediante

$$\underline{X}^{v+1} = \underline{X}^v + [\beta^v] \underline{S}^v \quad (2.3)$$

onde

$$\underline{S}^v = -\nabla W(\underline{X}^v) + \alpha \underline{S}^{v-1}$$

$$\alpha = \frac{|\nabla W(\underline{X}^V)|^2}{|\nabla W(\underline{X}^{V-1})|^2}$$

$[\beta^V]$  é uma matriz diagonal de coeficientes definidos segundo uma tabela de critérios [6].

Antes da realização do passo indicado em (2.3), calcula-se as derivadas das restrições que se mostram ativas (restrições que estão sendo satisfeitas como igualdade). Se, de acordo com o sinal das derivadas, algumas restrições tenderem a ser violadas, a variação das coordenadas que causam esta violação é anulada, ou seja, as respectivas componentes do vetor  $\underline{S}^V$  são feitas nulas. Para uma discussão mais detalhada ver [6].

### 3. Exemplos Numéricos

Com base no método exposto acima, foi desenvolvido um programa de otimização geométrica denominado AUTOFORM.

As características limites da versão atual são:

- número de nós  $\leq 300$
- número de barras  $\leq 200$
- número de carregamentos  $\leq 3$

A título de exemplos numéricos, são apresentados dois exemplos de estruturas otimizadas utilizando AUTOFORM.

#### Exemplo 1

Face de um pilar de torre de transmissão para linhas de 500KV.

Restrições: Além de condições de simetria e de que os nós 25, 27, 40, 41 e 50 devem ser fixos, considerou-se as seguintes restrições:

$$\sigma_{t,adm} = 14.000 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_{c,adm} = \begin{cases} -11.000 \text{ t/m}^2 & \lambda \leq \bar{\lambda} \\ -\frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} & \lambda > \bar{\lambda} \end{cases}$$

$$|u_{s_0}| \leq 0,185\text{m}$$

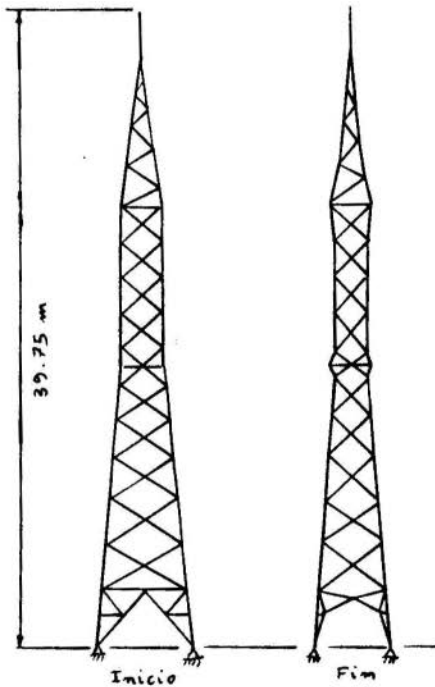
$\lambda = \frac{l}{R}$  onde R é o raio de giração da seção.

$$W_i = 3,495\text{t}$$

$$W_f = 3,349\text{t}$$

Número de iterações = 6

Convém observar que esta economia de material representaria uma economia de Cr\$ 4.500.000,00 ao longo de toda a linha. Para detalhes quanto ao carregamento referir-se a [6].



### Exemplo 2

Tesoura para cobertura de galpão industrial.

Restrições: Simetria e alinhamento de nós, tensões admissíveis nos membros e flecha máxima de 6,5cm nos nós centrais inferiores.

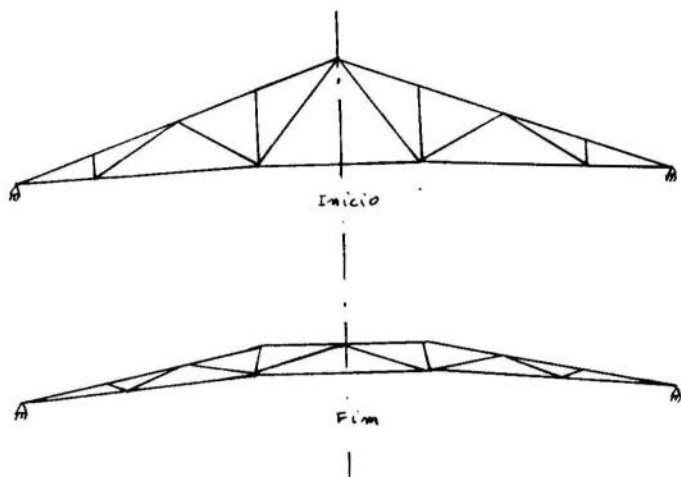
A tesoura foi otimizada sob a ação de 3 estados de carga [6].

1556

$W_i = 795,4$

;  $W_f = 716,4$

Nº de iterações = 3



### Bibliografia

- [1] Maxwell, J.C., "Scientific Papers", vol.II, 1869.
- [2] Michell, A.G., "The limits of economy of material in framed structures", Phil.Mag., 1904.
- [3] Dobbs, M.W. and Felton, L.P., "Optimization of Truss Geometry", Journal of the Structural Div. (ASCE), October, 1969.
- [4] Vanderplaats, G.N. and Moses, F., "Automated Design of Trusses for Optimum Geometry", J.Struct. Div. (ASCE), March 1972.
- [5] Pedersen, P., "On the optimal lay-out of multi-purpose trusses", Computer and Structures, vol. II, nºs 5/6, 1972.
- [6] Moura, V.F., "Otimização Geométrica de Treliças", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Agosto 1977.

MOURA, V. e SEGENREICH, S. A.

OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE ENTRELIÇADOSResumo

A presente nota técnica aborda o problema de minimização de peso de treliças tomando-se como variáveis de projeto as coordenadas dos nós. No programa desenvolvido, fatores importantes como simetria da estrutura e alinhamento de nós são considerados. Ao final, apresenta-se dois exemplos numéricos.

---

GEOMETRICAL OPTIMIZATION OF TRUSS STRUCTURESSummary

The present technical note considers the problem of minimizing the weight of truss structures when the design variables are nodal coordinates. The program that was developed to solve this problem, takes into account practical considerations like symmetry and nodal alignment. Two numerical examples are presented in the last section.



**A U A D S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

**NOTA TÉCN. NO. T D - 4**

PP. 1559 - 1565



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZADO NO ESTUDO  
DO MOVIMENTO DE UM FÓLIO PERTO DA SUPERFÍCIE LIVRE

Floriano C.M. PIRES JR, Professor  
Programa de Engenharia Naval e Oceanográfica  
COPPE/UFRJ  
Rio de Janeiro, Brasil

Miguel Hiroo HIRATA, Professor  
Programa de Engenharia Mecânica  
COPPE/UFRJ  
Rio de Janeiro, Brasil

1. Introdução

A obtenção de soluções analíticas, mesmo que aproximadas, de problemas hidrodinâmicos apresenta sérias dificuldades impostas, em geral, pela conformação geométrica da região fluida. A presença de um corpo que se move próximo

a uma superfície livre induz a necessidade de se especificar condições de contorno não lineares nesta superfície, o que torna o problema mais intratável, ainda, analiticamente.

Neste trabalho estuda-se, basicamente, a viabilidade de se utilizar a técnica dos Elementos Finitos para a análise do escoamento potencial em duas dimensões, ao redor de um corpo, que se mova em regime permanente próximo a uma superfície livre, sem se proceder à linearização do problema.

## 2. Formulação e Solução do Problema

Dentro do contexto das hipóteses da Teoria Potencial pode-se formular problema de valor de contorno  $-PVC_1^-$ , em termos da função de corrente,  $\Psi(x,y)$  (vide figura (1)).

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad \text{na região fluida (n.r.f)} \quad (1)$$

$$\Psi = A \quad \text{sobre a superfície do folio} \quad (2)$$

$$|\nabla \Psi| < M, \quad M > 0 \quad \text{no bordo de fuga} \quad (3)$$

$$\Psi = -Uh \quad \text{para } y = \eta(x) + h \quad (4)$$

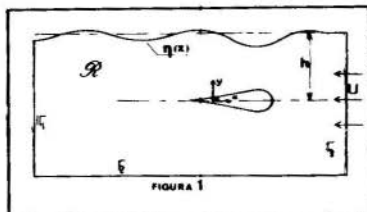
$$\frac{1}{2} [\Psi_x^2 + \Psi_y^2] + gy = \frac{1}{2} U^2 + gh \quad \text{para } y = \eta(x) + h \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \nabla \Psi = -U \underline{j} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \nabla \Psi = -U \underline{j} \quad (7)$$

$$\Psi(x,y) = \Psi(x+\lambda,y) \quad \text{para } x \rightarrow -\infty \quad (8)$$

onde  $\lambda$  indica um comprimento de onda e  $A$  uma constante desconhecidos, a priori.



A solução do  $PVC_1$  é procurada utilizando-se uma técnica numérica que determina, iterativamente, a posição da superfície livre, a priori desconhecida. Assume-se, inicialmente, uma elevação  $\eta^{(0)}(x)$  da superfície livre e procura-se uma solução do problema definido pelas equações do  $PVC_1$ , com exceção da equação (5), e que é denominado de  $PVC_2$ . A solução do  $PVC_2$  é obtida, utilizando-se a técnica de elementos finitos [1], [2]. A solução do  $PVC_2$   $\psi^{(1)}$  nos permite calcular uma nova elevação  $\eta^{(1)}(x)$  da superfície livre, utilizando a expressão (5). Na sequência do processo iterativo calcula-se a função  $\psi^{(2)}$ , solução do  $PVC_2$ , para  $\eta(x) = \eta^{(1)}(x)$  e assim sucessivamente, obtendo uma sequência.

$$\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}, \dots, \eta^{(n)}$$

calculada pela expressão

$$\eta^{(k)}(x) = \frac{U^2}{2g} - \frac{1}{2g} \left[ \psi_x^{(k)}(x, h + \eta^{(k-1)}(x))^2 + \psi_y^{(k)}(x, h + \eta^{(k-1)}(x))^2 \right] \quad (\hat{\wedge})$$

onde a função  $\psi^{(k)}$  corresponde à solução do  $PVC_2$ , considerada a região fluida limitada pela superfície livre, cuja elevação é representada por  $\eta^{(k-1)}(x)$ . O processo iterativo é interrompido quando  $\eta^{(k)} = \eta^{(k+1)}$ , pois temos então determinado a real posição da superfície livre e satisfeito a condição expressa pela equação (5) e conseqüentemente o  $PVC_1$ .

Para a obtenção numérica da solução dos vários problemas do tipo  $PVC_2$  a função de corrente é escrita como

$$\psi^{(i)}(x, y) = {}^1\psi^{(i)}(x, y) + A^2 \psi^{(i)}(x, y) \quad (10)$$

onde  ${}^1\psi(x, y)$  e  ${}^2\psi(x, y)$  são soluções dos problemas  $PVC_{3A}$  e  $PVC_{3B}$  definidos na tabela (1), onde a constante  $A$  é determinada utilizando a condição de Kutta (3) no bordo de fuga. O valor da função  $\psi_L$  especificada na fronteira  $\Gamma_1$ , no problema  $PVC_{3A}$ , é tomada da aproximação linearizada

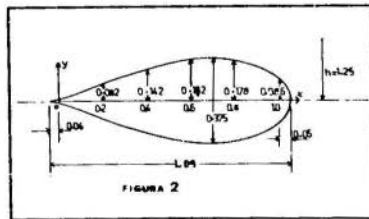
PVC <sub>3A</sub>	PVC <sub>3B</sub>	
$\nabla^2 \psi(i) = 0$	$\nabla^2 \psi(i) = 0$	
$\psi(i) = -Uh$	$\psi(i) = 0$	$y = h + \eta^{(i-1)}(x)$
$\psi(i) = \psi_L$	$\psi(i) = 0$	$\Gamma_1$
$\psi(i) = -Uy$	$\psi(i) = 0$	$\Gamma_1 U \Gamma_3$
$\psi(i) = 0$	$\psi(i) = 1$	cilindro

TABELA (1)

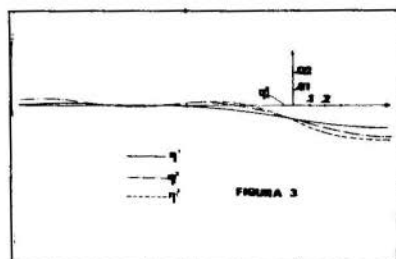
obtida analiticamente [2] , [3] . Este fato introduz limitações no resultado final e é motivo de pesquisa atual dos autores [2] , [4] .

### 3. Apresentação dos Resultados

Para a análise da viabilidade da técnica proposta foi calculado um exemplo como mostra a figura (2), onde a razão espessura/profundidade (t/h) é igual a 0.3 e o número de Froude ( $\frac{U}{\sqrt{gh}}$ ) foi tomado como 0.40.



A figura (3) mostra os resultados obtidos nas várias iterações, e a tabela (2) mostra alguns resultados quantitativos.



	ERRO MÁXIMO		ERRO MÉDIO	
	VALOR ABSOLUTO	% h	VALOR ABSOLUTO	% h
$\eta^{(0)} \rightarrow \eta^{(1)}$	0.0154	1.232	0.00564	0.4512
$\eta^{(1)} \rightarrow \eta^{(2)}$	0.0083	0.661	0.00180	0.1440
$\eta^{(2)} \rightarrow \eta^{(3)}$	0.0046	0.368	0.00095	0.0765

TABELA (2)

Para maiores detalhes sobre a técnica de elementos finitos utilizada, referência é feita ao trabalho [2].

#### Bibliografia

- [ 1 ] PIRES Jr, F.C.M. e BONINI, M.R. , "Uma Aplicação do Método de Elementos Finitos a escoamentos Potenciais"- VI Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval, Rio de Janeiro - 1976
- [ 2 ] PIRES Jr, F.C.M. , "Solução de Problemas Bidimensionais de Superfície Livre, segundo o Método de Elementos Finitos" - Tese de Mestrado - COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro 1977

- [3] SALVENSEN, N. , "On Higher Order Wave Theory for Submerged Two-Dimensional Bodies" - Journal of Fluid Mechanics, Vol.38, part.2 - 1969
- [4] SALVENSEN, N. e VON KERCZEK , "Numerical Solutions of Two-Dimensional Nonlinear Body-Wave Problems" 1st Int. Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, NSRDC, USA - 1975
-

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZADO NO ESTUDO  
DO MOVIMENTO DE UM FÓLIO DA SUPERFÍCIE LIVRE

Sumário

Foi utilizado o Método dos Elementos Finitos para a análise do escoamento ao redor de um fólio que se desloca com velocidade constante perto da superfície livre. A região fluida (2D) foi suposta como estendendo-se a grandes distâncias no semi-plano inferior. A condição de contorno aplicada num plano vertical a ré do fólio corresponde ao comportamento do escoamento na teoria linearizada.

---

INVESTIGATIONS OF THE FLOW AROUND A FOIL MOVING  
NEAR THE FREE SURFACE

Summary

The flow around a foil moving steadily near the free surface is studied using the Finite Element Technique. The 2D fluid region is extended to large distances. The condition far behind the foil is in a vertical plane and corresponding to the linearized form.

Dr. Francisco Eduardo Mourão Saboya – PUC/RJ  
Dr. Francisco Emílio Baccaro Nigro – IPT/SP  
Dr. Hans Ingo Weber – FEC/UNICAMP  
Dr. Hazim A. Al-Qureshi – ITA  
Dr. Hyppolito do Valle Pereira Filho – CT/UFSC  
Dr. Hugo de Oliveira Piva – CTA/IAE  
Dr. Jan Leon Scieszko – COPPE/UFRJ  
Dr. Jerzi T. Sielawa – ITA  
Dr. Joaquim Severino de Paiva Netto – FEC/UNICAMP  
Dr. Julio Militzer – E.P./USP  
Dr. Kamal A.R. Ismail – FEC/UNICAMP  
Dr. Liu Hsu – COPPE/UFRJ  
Dr. Maurício Prates de Campos Filho – FEC/UNICAMP  
Dr. Martin Schmal – COPPE/UFRJ  
Dr. Miguel H. Hirata – COPPE/UFRJ  
Dr. Moysés Zindeluk – COPPE/UFRJ  
Dr. Otavio de Mattos Silves – E.P./USP  
Dr. Paulo Selegim – EESC/USP  
Dr. Raul Antonio Feijó – CBPE  
Dr. Rosalvo T. Ruffino – EESC/USP  
Dr. Rubens Sampaio Filho – COPPE/UFRJ  
Dr. Sergio Magalhães Martins Ferreira – PETROBRÁS  
Dr. Sidney Stuckenbruck – PUC/RJ  
Dr. Silvestre Nazaré – CT/UFSC  
Dr. Solly A. Segenreich – COPPE/UFRJ  
Dr. Trevor William Clyne – FEC/UNICAMP  
Dr. William M. Mansour – COPPE/UFRJ

A Comissão Organizadora agradece ao CNPq, UFSC, FEESC e CREA 10ª Região a valiosa colaboração prestada à realização do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica.



