

ABCM

COBEM IV

A

FLORIANOPOLIS
DEZ.
1977

ABCM

COBEM 77

ANAIS

IV Congresso Brasileiro
de Engenharia Mecânica

Volume A

Florianópolis, SC
12 - 14 de Dezembro 1977



ABCM · CNPq · UFSC

ANAIS · PROCEEDINGS

**IV CONGRESSO
BRASILEIRO DE
ENGENHARIA
MECÂNICA**

Florianópolis
12·13·14 Dezembro 1977

COMISSÃO ORGANIZADORA

Presidente:

Dr. Nelson Back – CT/UFSC

Vice-Presidente:

Dr. Luiz Bevilacqua – COPPE/UFRJ

Secretário:

Dr. Sergio Colle – CT/UFSC

Tesoureiro:

Dr. Domingos Boechat Alves – CT/UFSC

Editor-Chefe:

Dr. José João de Espíndola – CT/UFSC

Conselho Editorial

Dr. Alcir de Faro Orlando – CENTRO DE TECNOLOGIA PROMON

Dr. Agustin Juan Ferrante – COPPE/UFRJ

Dr. Arlindo de Almeida Rocha – RDEP

Dr. Arno Blass – CT/UFSC

Dr. Atair Rios Neto – E.P./USP

Dr. Celso Pascoli Bottura – FEC/UNICAMP

Dr. Cirus Macedo Hackenberg – COPPE/UFRJ

Dr. Clovis Sperb de Barcellos – CT/UFSC

Dr. Dieter Pfau – CT/UFSC

Dr. Dino Ferraresi – CENTRO DE TECNOLOGIA/UNICAMP

Dr. Duraid Mahrus – METAL LEVE SA.

Dr. Edison Castro Prates de Lima – COPPE/UFRJ

Dr. Eitaro Yamane – E.P./USP

Continua na contracapa

Simone Tupiassu P.
de Castro
EUC/RJ

tel: 2475626 Rio

VOLUME A

ANÁLISE EXPERIMENTAL DE TENSÕES
EXPERIMENTAL STRESS ANALYSIS

MECÂNICA DOS SÓLIDOS
SOLID MECHANICS

PLACAS E CASCAS
PLATES AND SHELLS

VIBRAÇÕES
VIBRATIONS

DINÂMICA DE SISTEMAS
DYNAMICS OF SYSTEMS

BOAS - VINDAS AO COBEM 77

Em nome da Comissão Organizadora, tenho o prazer de estender a todos os participantes do COBEM 1977 as mais calorosas manifestações de boas vindas ao nosso Congresso, especialmente aos colegas do exterior. Quero agradecer em primeiro lugar a colaboração da Comissão Organizadora e do Conselho Editorial, bem como a todos os autores que contribuíram com a apresentação de seus melhores resultados de pesquisa. Quero ressaltar ainda, minha gratidão ao CNPq UFSC, FEESC e CREA da 10a. Região que deram apoio financeiro para que este Congresso pudesse se realizar.

Agradecemos ainda a colaboração da UFSC que gentilmente cedeu suas instalações para a realização deste Congresso.

Faço votos para que todos aproveitem ao máximo as apresentações e discussões que se seguirão nas diversas sessões técnicas.

PRESIDENTE

WELCOME TO COBEM 77

On behalf of the Organizing Committee, I am pleased to extend a warm welcome to all participants in COBEM 1977, specially to our distinguished colleagues from abroad. My sincere thanks go to the members of the Organizing and Editorial Committees, as well as to all authors for contributing their fine research to the Congress.

I would also like to express my gratitude to CNPq, UFSC, FEESC and CREA which provided the financial support for this Congress.

I hope that you all will have a fruitful and challenging time during the Congress.

PRESIDENT

ORGANIZAÇÃO DOS ANAIS DO COBEM 77

Os anais do COBEM 77 estão divididos em quatro volumes separados, cada qual abrangendo áreas como seguem:

VOLUME A: Análise experimental de tensões; elasticidade-plasticidade-viscoelasticidade; placas e cascas; vibrações e acústica; dinâmica de sistemas.

VOLUME B: Escoamento laminar e turbulento; condução, convecção e radiação; fenômenos de transporte.

VOLUME C: Propriedade dos materiais; conformação de metais; usinagem; máquinas ferramentas.

VOLUME D: Projeto de máquinas; otimização, automação e controle; elementos finitos; métodos numéricos.

Procurou-se, com toda a cautela, colocar os trabalhos no volume mais adequado. É inevitável, entretanto, que o critério de classificação não coincida com o de um ou outro autor.

Nesses casos, as nossas escusas. Um índice de autores foi preparado, o que, acreditamos, facilitará a consulta. A ordem dos autores e co-autores é alfabética e são dadas informações sobre sua afiliação e local de trabalho.

Nossas últimas palavras são de agradecimento a todos quanto, confiando na importância do COBEM 77, a ele se dedicaram com afinco, tornando-o, com a sua colaboração, uma notável realização.

EDITOR

ORGANIZATION OF THE PROCEEDINGS OF COBEM 77

The proceedings of the COBEM 77 are published in four separated volumes, each one covering subjects as follows:

VOLUME A: Experimental stress analysis; elasticity-plasticity-viscoelasticity; plates and shells; acoustics and vibrations; systems dynamics.

VOLUME B: Laminar and turbulent flow; conduction, convection and radiation; transport phenomena.

VOLUME C: Material properties; metalforming; machining, machine tools.

VOLUME D: Machine design; optimization, automation and control; finite elements; numerical methods.

Considerable effort was made to place each paper in its right volume. It is inevitable, however, that someone else might argue that our criteria, in classifying his work, was not the best one. To those who might think that way our apologies. An "authors-index" was prepared for easy reference. The author and co-authors appear in alphabetic order. Information are also given about author's affiliation.

We would like to thank all those who believed in our enterprise and gave their help to make COBEM 77 a great reality.

EDITOR - IN - CHIEF

COBEM 79

A iniciativa da ABCM em realizar bienalmente os congressos na área de engenharia mecânica (COBEM) tem sido consideravelmente bem sucedida.

O crescimento da produção científica e tecnológica no país e o crescente interesse demonstrado por professores estrangeiros nos Congressos da ABCM, além da permanência dos congressos bienais, a efetivação da Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, órgão oficial de publicação científica e técnica da Associação, criado na Assembléia Geral de 11 de dezembro de 1975.

A existência da revista permitiria que uma grande parte dos trabalhos produzidos pudessem ser do conhecimento da comunidade da Associação, durante os dois anos de intervalo dos Congressos. Em consequência, uma efetiva comunicação científica e tecnológica teria efeito.

A efetivação da revista e da sistemática de atuação de seu corpo editorial, será levada a efeito na Assembléia Geral da ABCM, que será realizada no dia 14 de dezembro, conforme consta na agenda do COBEM 77. Naquela oportunidade também será decidido o local de realização do COBEM 79, onde espero estarmos todos reunidos novamente.

SECRETÁRIO

COBEM 79

The initiative of the ABCM to hold each two years its Congress has been fully justified by the wide recognition it has received as an outstanding scientific event.

The steady growth of scientific production in this country, and the increasing interest in the Congress by foreign workers in the field of mechanical engineering, suggests that time has come for another step forward, the publication of the Brazilian Review of Mechanical Engineering as an official vehicle of technological and scientific information, under the responsibility of the ABCM.

The review would allow freshly produced works to be readily published, establishing in this way a continuous exchange of information amongst those engaged in teaching and research in the field of mechanical engineering. It is planned to put the publication of the Review under debate in the General Assembly on the 14th of December and it is our hope that definitive actions will be envisaged to make the Review a reality very soon. Also, during the General Assembly, it will be decided the place of the COBEM 79 where, we hope, we will meet once again.

SECRETARY

**ÍNDICE
DE
AUTORES**

AUTHORS INDEX

NÚMERO DE TRABALHO PRECEDIDO POR
T, REFERE-SE À NOTA TÉCNICA.

** REFERE-SE A PRIMEIRO AUTOR.

PAPER NUMBERS STARTING WITH THE
LETTER T REFER TO TECHNICAL NOTES.

** REFER TO FIRST AUTHOR OF PAPER.

1. Abdelmessih, A.H.

Toronto, Canada

paper n° B - 33 **

Vol. B, p. 823 - 833

2. Abreu, L.S.P

PUC/RJ, Brasil

paper n° B - 19

Vol. B, p. 641 - 657

3. Akinsete, V.A.

Lagos, Nigeria

paper n° B - 25 **

Vol. B, p. 725 - 734

4. Al-Qureshi, H.A.

ITA/CTA, Brasil

paper n° C - 9

Vol. C, p. 1001 - 1022

paper n° C - 13 **

Vol. C, p. 1055 - 1068

5. Alabes, G.

IMAS, Argentina

paper n° A - 16

Vol. A, p. 193 - 202

6. Almeida, C.A.de

PUC/RJ, Brasil

paper n° TA - 6 **

Vol. A, p. 369 - 376

7. Almeida, L.H.de

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° TC - 2

Vol. C, p. 1135 - 1140

8. Almeida, M.T.de

EFEI, Brasil

paper n° TA - 8 **

Vol. A, p. 381 - 384

9. Alpay, S.A.

Waterloo, Canada

paper n° B - 1

Vol. B, p. 385 - 398

paper n° B - 5

Vol. B, p. 443 - 458

paper n° B - 7

Vol. B, p. 471 - 486

paper n° B - 13 **

Vol. B, p. 561 - 575

paper n° D - 19

Vol. D, p. 1367 - 1377

10. Alves, D.B.

UFSC, Brasil

paper n° A - 4

Vol. A, p. 41 - 51

paper n° A - 11 **

Vol. A, p. 131 - 142

paper n° A - 12 **

Vol. A, p. 143 - 155

paper n° D - 31

Vol. D, p. 1519 - 1531

11. Alves, V.F.A.

EP/USP, Brasil

paper n° B - 5 **

Vol. B, p. 443 - 458

12. Alvim Filho, G.F.
 ITA, Brasil
 paper n° B - 8 **
 Vol. B, p. 487 - 502

13. Andersson, V.
 FURG, Brasil
 paper n° A - 4
 Vol. A, p. 41 - 51

14. Andrade, H.L.de
 COPPE/UFRJ, Brasil
 paper n° C - 8
 Vol. C, p. 989 - 999

15. Araújo, P.M. de S.
 PUC/RJ, Brasil
 paper n° B - 11 **
 Vol. B, p. 529 - 543

16. Assis, A.M.C.A.
 COPPE/UFRJ, Brasil
 paper n° C - 1 **
 Vol. C, p. 907 - 916

17. Back, N.
 UFSC, Brasil
 paper n° TA - 5
 Vol. A, p. 361 - 367

paper n° D - 3
 Vol. D, p. 1177 - 1184

paper n° D - 4 **
 Vol. D, p. 1185 - 1198

18. Bajay, S.V.
 UNICAMP, Brasil
 paper n° B - 34
 Vol. B, p. 835 - 849

19. Balthazar, J.C.
 UnB, Brasil
 paper n° TA - 2 **
 Vol. A, p. 343 - 347

20. Barbosa, J.A.B.
 STI/MIC, Brasil
 paper n° TC - 1
 Vol. C, p. 1129 - 1134

21. Barbosa, L.C.
 UNICAMP, Brasil
 paper n° C - 7
 Vol. C, p. 977 - 987

22. Barcellos, C.S.de
 UFSC, Brasil
 paper n° D - 17 **
 Vol. D, p. 1343 - 1353

23. Barwell, F.T.
 Swansea, UK
 paper n° D - 7 **
 Vol. D, p. 1223 - 1233

paper n° D - 8 **
 Vol. D, p. 1235 - 1245

paper n° D - 9 **
 Vol. D, p. 1247 - 1255

paper n° D - 25 **
 Vol. D, p. 1437 - 1448

24. Bastos, L.E.G.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° B - 20 **
Vol. B, p. 659 - 668

25. Bejar, M.A.
UC, Chile
paper n° C - 12 **
Vol. C, p. 1043 - 1053

26. Bevilacqua, L.
PROMON, Brasil
paper n° A - 13
Vol. A, p. 157 - 167

paper n° D - 30 **
Vol. D, p. 1505 - 1517

27. Blass, A.
UFSC, Brasil
paper n° C - 11 **
Vol. C, p. 1035 - 1042

paper n° D - 27 **
Vol. D, p. 1459 - 1477

28. Bottura, C.P.
UNICAMP, Brasil
paper n° D - 20 **
Vol. D, p. 1379 - 1388

paper n° D - 23
Vol. D, p. 1413 - 1422

29. Braga Filho, W.
PUC/RJ, Brasil
paper n° TB - 3 **
Vol. B, p. 887 - 897

30. Brinati, H.L.
EP/USP, Brasil
paper n° D - 22 **
Vol. D, p. 1399 - 1411

31. Burdekin, M.
UMIST, U.K.
paper n° D - 4
Vol. D, p. 1185 - 1198

32. Burian Junior, Y.
UNICAMP, Brasil
paper n° D - 20
Vol. D, p. 1379 - 1388

33. Campos Filho, M.P.
UNICAMP, Brasil
paper n° C - 6
Vol. C, p. 963 - 976

34. Carajilescov, P.
PUC/RJ, Brasil
paper n° B - 17 **
Vol. B, p. 615 - 624

paper n° TB - 4 **
Vol. B, p. 895 - 900

35. Carvalho, E. de A.
IME, Brasil
paper n° A - 9
Vol. A, p. 105 - 115

36. Castro, J.T.
PUC/RJ, Brasil
paper n° A - 1 **
Vol. A, p. 1 - 12

37. Chawla, K.K.
IME, Brasil
paper n° TA - 4
Vol. A, p. 355 - 360

38. Childs, S.B.
PUC/RJ, Brasil
paper n° B - 28
Vol. B, p. 759 - 769

39. Cintra, W.H.
IEA, Brasil
paper n° D - 14
Vol. D, p. 1303 - 1312

40. Cisternas, M.
UNICAMP, Brasil
paper n° C - 14 **
Vol. C, p. 1069 - 1078

41. Clyne, T.W.
UNICAMP, Brasil
paper n° C - 7 **
Vol. C, p. 977 - 987

42. Coelho, J.C.M.
EP/USP, Brasil
paper n° B - 22
Vol. B, p. 687 - 697

43. Colle, S.
UFSC, Brasil
paper n° B - 24
Vol. B, p. 711 - 724

44. Cowley, A.
UMIST, U.K.
paper n° D - 4
Vol. D, p. 1185 - 1198

45. Crabb, D.
London, England
paper n° B - 3 **
Vol. B, p. 415 - 429

46. Creus, G.J.
UFRGS, Brasil
paper n° D - 28
Vol. D, p. 1479 - 1490

47. Denardin, M.L.
UFRGS, Brasil
paper n° A - 25 **
Vol. A, p. 299 - 310

48. Durão, D.F.G.
London, England
paper n° B - 3
Vol. B, p. 415 - 429

49. Ebecken, N.F.F.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° A - 10 **
Vol. A, p. 117 - 129

50. Elgueta, M.
UC, Chile
paper n° C - 12
Vol. C, p. 1043 - 1053

51. Elias, N.R.
Khartoum, Sudan
paper n° D - 18
Vol. D, p. 1355 - 1366

52. Espíndola, J.J. de
UFSC, Brasil
paper n° A - 17 **
Vol. A, p. 203 - 216

53. Feijóo, R.

CBPF, Brasil

paper nº A - 6

Vol. A, p. 71 - 81

paper nº A - 7 **

Vol. A, p. 83 - 94

paper nº A - 13

Vol. A, p. 157 - 167

paper nº A - 14

Vol. A, p. 169 - 182

paper nº D - 26 **

Vol. D, p. 1449 - 1458

54. Fernandes, O.C.

EESC/USP, Brasil

paper nº TA - 3

Vol. A, p. 349 - 354

55. Ferran, G.

COPPE/UFRJ, Brasil

paper nº C - 8 **

Vol. C, p. 989 - 999

paper nº C - 10

Vol. C, p. 1023 - 1033

56. Ferraresi, D.

UNICAMP, Brasil

paper nº C - 14

Vol. C, p. 1069 - 1078

paper nº D - 12

Vol. D, p. 1281 - 1292

57. Ferreira, A.C.

UFSC, Brasil

paper nº C - 15 **

Vol. C, p. 1079 - 1093

58. Fletcher, L.S.

Virginia, USA

paper nº A - 26

Vol. A, p. 311 - 322

59. Fleury, A.T.

EP/USP, Brasil

paper nº D - 16

Vol. D, p. 1327 - 1341

60. Fournay, M.E.

California, USA

paper nº A - 2 **

Vol. A, p. 13 - 26

61. French, D.

Waterloo, Canada

paper nº C - 15

Vol. C, p. 1079 - 1093

62. Galeão, A.C.

CBPF, Brasil

paper nº A - 6

Vol. A, p. 71 - 81

paper nº A - 14

Vol. A, p. 169 - 182

63. Gambarini, J.R.

EESC/USP, Brasil

paper nº TD - 1 **

Vol. D, p. 1543 - 1546

paper nº TD - 2

Vol. D, p. 1547 - 1550

64. Garcia, A.
UNICAMP, Brasil
paper n° C - 6 **
Vol. C, p. 963 - 976

65. Gesteira, C.S.
UFB, Brasil
paper n° D - 29 **
Vol. D, p. 1491 - 1503

66. Groehs, A.G.
UFRGS, Brasil
paper n° D - 28 **
Vol. D, p. 1479 - 1490

67. Golueke, H.
Aachen, Germany
paper n° C - 18
Vol. C, p. 1107 - 1128

68. Gomide, H.A.
PUC/RJ, Brasil
paper n° TA - 6
Vol. A, p. 369 - 376

69. Gósz, R.D.S.
EFEI, Brasil
paper n° D - 3 **
Vol. D, p. 1177 - 1184

70. Guardamagna, L.
Santiago, Chile
paper n° B - 14
Vol. B, p. 577 - 589

paper n° B - 16
Vol. B, p. 603 - 614

71. Halbritter, A.L.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° A - 8
Vol. A, p. 95 - 104

72. Hamed, A.A.
Cincinnati, USA
paper n° B - 31 **
Vol. B, p. 797 - 808

paper n° D - 5
Vol. D, p. 1199 - 1211

73. Haydl, H.M.
ACRES, Canada
paper n° A - 5
Vol. A, p. 53 - 69

74. Hellbrügger, R.T.
Metal Leve, Brasil
paper n° D - 10 **
Vol. D, p. 1257 - 1270

75. Herskovits, J.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° D - 15
Vol. D, p. 1313 - 1325

76. Hirata, M.H.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° D - 11 **
Vol. D, p. 1271 - 1280

paper n° TD - 4
Vol. D, p. 1559 - 1565

77. Hsu, L.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° A - 21
Vol. A, p. 245 - 253
-
- paper n° A - 24 **
Vol. A, p. 285 - 298
-
78. Hussein, M.F.
Abu Dhabi, U.A.E.
paper n° B - 31
Vol. B, p. 797 - 808
-
- paper n° D - 5 **
Vol. D, p. 1199 - 1211
-
79. Ismail, K.A.R.
UNICAMP, Brasil
paper n° B - 30 **
Vol. B, p. 785 - 796
-
80. Jabardo, J.M.S.
EP/USP, Brasil
paper n° B - 32 **
Vol. B, p. 809 - 822
-
81. Jones, M.H.
Swansea, U.K.
paper n° D - 9
Vol. D, p. 1247 - 1255
-
82. Jorge, D.N.
UNICAMP, Brasil
paper n° B - 30
Vol. B, p. 785 - 796

83. Journaux, J.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° C - 4 **
Vol. C, p. 939 - 948
-
84. Klumpers, K.
Aachen, Germany
paper n° C - 16
Vol. C, p. 1095 - 1104
-
85. Kozel, J.
UFSC, Brasil
paper n° TA - 5 **
Vol. A, p. 361 - 367
-
- paper n° A - 3
Vol. A, p. 27 - 39
-
86. Kuniyoshi, S.
Metal Leve, Brasil
paper n° D - 6 **
Vol. D, p. 1213 - 1221
-
87. Kwok, C.C.K.
Concordia, Canada
paper n° B - 12 **
Vol. B, p. 545 - 559
-
88. Lambert, T.
London, U.K.
paper n° D - 18 **
Vol. D, p. 1355 - 1366
-
89. Laura, P.A.A.
IMAS, Argentina
paper n° A - 16 **
Vol. A, p. 193 - 202

90. Lavaisse, A.
 IMAS, Argentina
 paper n° A - 16
 Vol. A, p. 193 - 202

91. Lee, P.M.
 Concordia, Canada
 paper n° B - 12
 Vol. B, p. 545 - 559

92. Lengyel, B.
 London, U.K.
 paper n° C - 11
 Vol. C, p. 1035 - 1042
 paper n° D - 27
 Vol. D, p. 1459 - 1477

93. Lima, E.C.P. de
 COPPE/UFRJ, Brasil
 paper n° A - 27 **
 Vol. A, p. 323 - 333

94. Loula, A.F.
 CBPF, Brasil
 paper n° A - 6
 Vol. A, p. 71 - 81
 paper n° A - 14
 Vol. A, p. 169 - 182

95. Lourenço, A.P.
 Metal Leve, Brasil
 paper n° D - 10
 Vol. D, p. 1257 - 1270

96. Luisoni, L.E.
 IMAS, Argentina
 paper n° A - 16
 Vol. A, p. 193 - 202

97. Maestrini, A.
 UFRGS, Brasil
 paper n° A - 18
 Vol. A, p. 217 - 225

98. Mahrus, D.
 Metal Leve, Brasil
 paper n° D - 6
 Vol. D, p. 1213 - 1221
 paper n° D - 10
 Vol. D, p. 1257 - 1270

99. Maizza Neto, O.
 EP/USP, Brasil
 paper n° D - 27
 Vol. D, p. 1389 - 1398

100. Maliska, C.R.
 UFSC, Brasil
 paper n° B - 18
 Vol. B, p. 625 - 639

101. Mansour, W.M.
 COPPE/UFRJ, Brasil
 paper n° A - 20
 Vol. A, p. 235 - 244
 paper n° D - 11
 Vol. D, p. 1271 - 1280

102. Marinelli, E.
Bahia Blanca, Argentina
paper n° TA - 7 **
Vol. A, p. 377 - 380

103. Marques, E.R.C.
UFSC, Brasil
paper n° A - 3 **
Vol. A, p. 27 - 39

104. Maurizi, M.J.
Bahia Blanca, Argentina
paper n° TA - 7
Vol. A, p. 377 - 380

105. Mendes, E.F.
ITA/CTA, Brasil
paper n° C - 13
Vol. C, p. 1055 - 1068

106. Menon, G.J.
EFEI, Brasil
paper n° B - 4 **
Vol. B, p. 431 - 441

107. Militzer, J.
EP/USP, Brasil
paper n° B - 1 **
Vol. B, p. 385 - 398

paper n° B - 7 **
Vol. B, p. 471 - 486

108. Miranda, P.E.V. de
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° C - 3 **
Vol. C, p. 929 - 937

109. Monteiro, E.
PUC/RJ, Brasil
paper n° C - 10 **
Vol. C, p. 1023 - 1033

110. Monteiro, S.N.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° C - 2
Vol. C, p. 917 - 927

paper n° C - 3
Vol. C, p. 929 - 937

paper n° C - 4
Vol. C, p. 939 - 948

paper n° TC - 1
Vol. C, p. 1129 - 1134

111. Moreira, L.A.
UNICAMP, Brasil
paper n° D - 12 **
Vol. D, p. 1281 - 1292

112. Moro, J.
EP/USP, Brasil
paper n° D - 21
Vol. D, p. 1389 - 1398

113. Moura, V.F.
Inter. de Eng. S/A, Brasil
paper n° TD - 3 **
Vol. D, p. 1551 - 1557

114. Moura, C.A.
CBPF, Brasil
paper n° A - 7
Vol. A, p. 83 - 94

115. Mucheroni, M.F.

EESC/USP, Brasil

paper n° A - 15 **

Vol. A, p. 183 - 192

116. Nakamura, P.K.

UNICAMP, Brasil

paper n° D - 2 **

Vol. D, p. 1161 - 1175

117. Nascimento, J.A. do

UFRGS, Brasil

paper n° A - 25

Vol. A, p. 299 - 310

118. Natal, Y.D. do

USIMINAS, Brasil

paper n° TC - 1 **

Vol. C, p. 1129 - 1134

119. Nazaré, S.

UFSC, Brasil

paper n° C - 5 **

Vol. C, p. 949 - 961

120. Nickell, R.A.

Toronto, Canada

paper n° B - 10 **

Vol. B, p. 511 - 528

121. Nicoll, W.B.

Waterloo, Canada

paper n° B - 1

Vol. B, p. 385 - 398

paper n° B - 5

Vol. B, p. 443 - 458

paper n° B - 7

Vol. B, p. 471 - 486

paper n° B - 10

Vol. B, p. 511 - 528

122. Nigro, F.E.B.

TPT, Brasil

paper n° D - 19 **

Vol. D, p. 1367 - 1377

123. Nóbrega, M.C. de S.

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° C - 8

Vol. C, p. 989 - 999

124. Nolasco, C.A.

EBE, Brasil

paper n° TC - 1

Vol. A, p. 1129 - 1134

125. Nouh, S.

PUC/RJ, Brasil

paper n° A - 23 **

Vol. A, p. 269 - 283

126. Oliva, J.

Santiago, Chile

paper n° B - 14

Vol. B, p. 577 - 589

127. Oliveira Pinto, A.R.de
UNICAMP, Brasil
paper n° D - 2
Vol. D, p. 1161 - 1175
-
128. Oliveira, J.L.L.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° TC - 2 **
Vol. C, p. 1135 - 1140
-
129. Oliveira, M.V.
CRUZEIRO DO SUL, Brasil
paper n° TB - 5
Vol. B, p. 901 - 906
-
130. Oliveira, Jr., S. de
EP/USP, Brasil
paper n° TB - 1 **
Vol. B, p. 875 - 881
-
131. Ondracek, G.
Karlsruhe, Germany
paper n° C - 5
Vol. C, p. 949 - 961
-
132. Ong, T.H.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° B - 29
Vol. B, p. 771 - 783
-
133. Pacheco, D.J.
MIC, Brasil
paper n° C - 2 **
Vol. C, p. 917 - 927

134. Paiva Netto, J.S. de
UNICAMP, Brasil
paper n° B - 21 **
Vol. B, p. 669 - 685
- paper n° B - 34 **
Vol. B, p. 835 - 849
- paper n° B - 35 **
Vol. B, p. 851 - 862
-
135. Paiva, R.L.C. de
UFRJ, Brasil
paper n° C - 1
Vol. C, p. 907 - 916
-
136. Palhares, A.G.B.
UNICAMP, Brasil
paper n° D - 20
Vol. D, p. 1379 - 1388
-
137. Paloto, J.C.
Bahia Blanca, Argentina
paper n° TA - 7
Vol. A, p. 377 - 380
-
138. Parameswaran, V.
Chicago, USA
paper n° B - 13
Vol. B, p. 561 - 575

139. Pereira Filho, H.do V.

UFSC, Brasil

paper n° B - 6 **

Vol. B, p. 459 - 469

paper n° B - 9 **

Vol. B, p. 503 - 510

paper n° B - 15 **

Vol. B, p. 591 - 601

140. Pereira, J.T.V.

UNICAMP, Brasil

paper n° B - 21

Vol. B, p. 669 - 685

141. Pereira, M.F.

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° C - 3

Vol. C, p. 929 - 937

142. Pfau, D.

UFSC, Brasil

paper n° TC - 3 **

Vol. C, p. 1141 - 1148

143. Pfeifer, T.

Aachen, Germany

paper n° C - 18 **

Vol. C, p. 1117 - 1128

144. Philippi, P.C.

UFSC, Brasil

paper n° B - 26

Vol. B, p. 735 - 748

145. Pimenta, M. de M.

EP/USP, Brasil

paper n° B - 2 **

Vol. B, p. 399 - 413

paper n° B - 22 **

Vol. B, p. 687 - 697

146. Pires, Jr., F.C.M

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° TD - 4 **

Vol. D, p. 1559 - 1565

147. Pombo, J.L.

IMAS, Argentina

paper n° A - 16

Vol. A, p. 193 - 202

148. Probert, D.

Bedford, U.K.

paper n° B - 23

Vol. B, p. 697 - 709

149. Purqu erio, B.M.

EESC/USP, Brasil

paper n° TD - 1

Vol. D, p. 1543 - 1546

paper n° TD - 2 **

Vol. D, p. 1547 - 1550

150. Queiroz, A.A.

UFSC, Brasil

paper n° C - 17 **

Vol. C, p. 1105 - 1115

151. Quintana, V.H.
 Waterloo, Canada
 paper n° D - 24 **
 Vol. D, p. 1423 - 1435

152. Rajagopal, K.
 COPPE/UFRJ, Brasil
 paper n° B - 29 **
 Vol. B, p. 771 - 783

153. Ramaswami, R.
 FURG, Brasil
 paper n° C - 16 **
 Vol. C, p. 1095 - 1104
 paper n° D - 13 **
 Vol. D, p. 1293 - 1302

154. Raupp, M.A.
 CBPF, Brasil
 paper n° A - 7
 Vol. A, p. 83 - 94

155. Riera, J.D.
 UFRGS, Brasil
 paper n° A - 18
 Vol. A, p. 217 - 225
 paper n° A - 22 **
 Vol. A, p. 255 - 268
 paper n° A - 25
 Vol. A, p. 299 - 310

156. Rios Neto, A.
 EP/USP, Brasil
 paper n° D - 16 **
 Vol. D, p. 1327 - 1341

paper n° D - 21 **
 Vol. D, p. 1389 - 1398
 paper n° D - 22
 Vol. D, p. 1399 - 1411

157. Rodrigues Filho, F.
 UNICAMP, Brasil
 paper n° A - 19 **
 Vol. A, p. 227 - 233

158. Rojas, H.
 CBPF, Brasil
 paper n° A - 13
 Vol. A, p. 157 - 167

159. Rosa, E. da
 UFSC, Brasil
 paper n° TA - 1 **
 Vol. A, p. 335 - 342
 paper n° D - 31 **
 Vol. D, p. 1519 - 1531
 paper n° D - 32 **
 Vol. D, p. 1533 - 1542

160. Roynance, B.J.
 Swansea, U.K.
 paper n° D - 9
 Vol. D, p. 1247 - 1255

161. Ruffino, R.T.
EESC/USP, Brasil
paper n° TD - 1
Vol. D, p. 1543 - 1546

paper n° TD - 2
Vol. D, p. 1547 - 1550

162. Saboya, F.E.M.
PUC/RJ, Brasil
paper n° B - 17
Vol. B, p. 615 - 624

paper n° TB - 3
Vol. B, p. 884 - 894

paper n° TB - 4
Vol. B, p. 895 - 900

163. Sadhu, D.
FURG, Brasil
paper n° B - 23
Vol. B, p. 697 - 709

164. Saddy, M.
PROMON, Brasil
paper n° B - 20
Vol. B, p. 659 - 668

165. Sakai, M.
IEA, Brasil
paper n° B - 36 **
Vol. B, p. 863 - 874

166. Sampaio, R.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° TB - 2 **
Vol. B, p. 883 - 886

167. Santana, C.C.
UNICAMP, Brasil
paper n° B - 30
Vol. B, p. 785 - 796

168. Santana, J.L.
UFSC, Brasil
paper n° TA - 1
Vol. A, p. 335 - 342

169. Santos, R.G. dos
UNICAMP, Brasil
paper n° C - 6
Vol. A, p. 963 - 976

170. Santos, S.M. dos
FURG, Brasil
paper n° B - 26 **
Vol. B, p. 735 - 748

171. Santos, W.N. dos
IEA, Brasil
paper n° D - 14 **
Vol. D, p. 1303 - 1312

172. Schneider, C.
UFSC, Brasil
paper n° C - 18
Vol. C, p. 1117 - 1128

173. Scieszko, J.L.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° A - 21 **
Vol. A, p. 245 - 253

174. Segenreich, S.A.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° D - 15
Vol. D, p. 1313 - 1325

paper n° TD - 3
Vol. D, p. 1551 - 1557

175. Selegim, P.
BESC/USP, Brasil
paper n° A - 15
Vol. A, p. 183 - 192

176. Sen, T.K.
EFEI, Brasil
paper n° B - 27 **
Vol. B, p. 749 - 758

177. Sherbourne, A.N.
Waterloo, Canada
paper n° A - 5 **
Vol. A, p. 53 - 69

178. Shoup, T.E.
Houston, USA
paper n° A - 26 **
Vol. A, p. 311 - 322

179. Sielawa, J.T.
ITA, Brasil
paper n° B - 4
Vol. B, p. 431 - 441

180. Silva, A.F.C. da
UFSC, Brasil
paper n° B - 18 **
Vol. B, p. 621 - 639

181. Silva, T.F.C.
COPPE/UFRJ, Brasil
paper n° A - 20 **
Vol. A, p. 235 - 244

182. Silvaes, O. de M.
EP/USP, Brasil
paper n° B - 36
Vol. B, p. 863 - 874

paper n° TB - 1
Vol. B, p. 875 - 881

paper n° B - 32
Vol. B, p. 809 - 822

183. Silveira, T.L. da
FESM, Brasil
paper n° C - 1
Vol. C, p. 907 - 916

184. Smith Neto, P.
FUU, Brasil
paper n° TA - 3 **
Vol. A, p. 349 - 354

185. Snoeijer, B.
UFSC, Brasil
paper n° C - 17
Vol. C, p. 1105 - 1115

186. Sorenson, S.B.
CTA/IAE, Brasil
paper n° C - 9 **
Vol. C, p. 1101 - 1022

187. Sousa e Silva, A.S.da

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° C - 2

Vol. C, p. 917 - 927

188. Strong, A.B.

Waterloo, Canada

paper n° B - 10

Vol. B, p. 511 - 528

paper n° D - 19

Vol. D, p. 1367 - 1377

189. Stuckenbruch, S.

PUC/RJ, Brasil

paper n° B - 11

Vol. B, p. 529 - 543

paper n° B - 19 **

Vol. B, p. 641 - 657

paper n° B - 28 **

Vol. B, p. 759 - 769

190. Sundararajan, V.

PUC/RJ, Brasil

paper n° A - 1

Vol. A, p. 1 - 12

191. Tabakoff, W.

Cincinnati, USA

paper n° B - 31

Vol. B, p. 797 - 808

192. Taroco, E.

CBPF, Brasil

paper n° A - 6 **

Vol. A, p. 71 - 81

paper n° A - 13 **

Vol. A, p. 157 - 167

paper n° A - 14

Vol. A, p. 169 - 182

paper n° D - 26

Vol. D, p. 1449 - 1458

193. Tavares, G.A.

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° A - 24

Vol. A, p. 285 - 298

194. Tenenbaum, R.A.

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° A - 20

Vol. A, p. 235 - 244

195. Thompson, C.A.

IME, Brasil

paper n° A - 9 **

Vol. A, p. 105 - 115

196. Toha, J.

Santiago, Chile

paper n° B - 14 **

Vol. B, p. 577 - 589

197. Trauer, R.O.

UFSC, Brasil

paper, n° TA - 5

Vol. A, p. 361 - 367

198. Varga, R.

Rutgers, USA

paper n° A - 26

Vol. A, p. 311 - 322

199. Warner, W.H.

Minnesota, USA

paper n° D - 17

Vol. D, p. 1343 - 1353

200. Weber, H.I.

UNICAMP, Brasil

paper n° A - 19

Vol. A, p. 227 - 233

201. Weck, M.

Aachen, Germany

paper n° C - 16

Vol. C, p. 1095 - 1104

202. Whitelaw, J.H.

London, England

paper n° B - 3

Vol. B, p. 415 - 429

203. Zambrano, W.

Santiago, Chile

paper n° B - 14

Vol. B, p. 577 - 589

paper n° B - 16 **

Vol. B, p. 603 - 614

204. Zoratto, D.L.

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° D - 1 **

Vol. D, p. 1149 - 1160

205. Zouain, N.

COPPE/UFRJ, Brasil

paper n° D - 15 **

Vol. D, p. 1313 - 1325

206. Zürn, H.H.

UFSC, Brasil

paper n° D - 24

Vol. D, p. 1423 - 1435

ÍNDICE - VOLUME A

ANÁLISE EXPERIMENTAL DE TENSÕES

EXPERIMENTAL STRESS ANALYSIS

Paper A - 1, p. 1 - 12

Castro, J.T. de; Sundararajan, V.
PUC/RJ (Brasil)

"Estudo experimental de vigas em balanço sob impactos axiais"

Paper A - 2, p. 13 - 26

Fourney, M.E.
California (U.S.A.)

"Experimental determination of the effect of crack front curvature in an ASTM compact tension specimen"

Paper A - 3, p. 27 - 39

Marques, E.R. da C.; Kozel, J.
UFSC (Brasil)

"Um método de ensaio de modelos mecânicos (colunas de parede fina)"

TA - 1, p. 335 - 342

Rosa, E. da; Santana, J.L.
UFSC (Brasil)

"Alguns resultados sobre a propagação de trincas de fadiga, em flexão plana"

TA - 2, p. 343 - 347

Balthazar, J.C.
UnB (Brasil)

"Concentração de tensões na extremidade de cilindros ocos montados com interferência"

TA - 3, p. 349 - 354

Smith Neto, P.; Uberlândia (Brasil)
Fernandes, O.C.; EESC/USP (Brasil)

"Alívio de tensões em placas com entalhes em U, submetidas à tração simples e flexão pura"

TA - 4, p. 355 - 360

Chawla, K.K.
IME (Brasil)

"Thermal fatigue damage in composite materials"

TA - 5, p. 361 - 367

Kozel, J.; Trauer, R.O.; Back, N.
UFSC (Brasil)

"Medição das deformações específicas () em reservatórios de plástico reforçado com fibra de vidro"

TA - 6, p. 369 - 376

Almeida, C.A. de; Gomide, H.A.
PUC/RJ (Brasil)

"Desenvolvimento de um material fotoelástico com multi-módulos de elasticidade"

TA - 7, p. 377 - 380

Marinelli, E.; Maurizi, M.J.; Paloto, J.C.
Bahía Blanca (Argentina)

"Determinacion de factores de concentracion de tensiones mediante fotoelasticidad interferencial"

MECÂNICA DOS SÓLIDOS

SOLID MECHANICS

Paper A - 4, p. 41 - 51

Alves, D.B.; UFSC (Brasil)
Andersson, V.; FURG (Brasil)

"Determinação do centro de cisalhamento, constante torcional e de desempenho em secções de paredes delgadas"

Paper A - 5, p. 53 - 69

Sherbourne, A.N.; Waterloo (Canada)
Haydl, H.M.; Toronto (Canada)

"Web shear capacity in large rectangular ducts"

Paper A - 6, p. 71 - 81

Taroco, E.; Feijão, R.A.; Galeão, A.C.;
Loula, A.F.; CBPF (Brasil)

"Descripcion lagrangeana del teorema de los trabajos virtuales en coordenadas curvilineas"

Paper A - 7, p. 83 - 94

Feijão, R.A.; Raupp, M.A.; Moura, C.A. de
CBPF (Brasil)

"Soluciones numericas de un problema dinamico viscoelastico no lineal"

Paper A - 8, p. 95 - 104

Halbritter, A.L.

COPPE/UFRJ (Brasil)

"Solucion numerica de problemas viscoelasticos"

Paper A - 9, p. 105 - 115

Thompson, C.A.; Carvalho, E. de A.

IME (Brasil)

"Acidente tipo borax em um reator nuclear"

PLACAS E CASCAS

PLATES AND SHELLS

Paper A - 10, p. 117 - 129

Ebecken, N.F.F.

COPPE/UFRJ (Brasil)

"Grandes deformações de membranas de materiais hiperelásticos incompressíveis"

Paper A - 11, p. 131 - 142

Alves, D.B.

UFSC (Brasil)

"Análise numérica de cascas ortotrópicas de revolução"

Paper A - 12, p. 143 - 155

Alves, D.B.

UFSC (Brasil)

"Cascas ortotrópicas de revolução reforçadas por anéis"

VIBRAÇÕES

VIBRATIONS

Paper A - 13, p. 157 - 167

Taroco, E.; Feijão, R.A.; Rojas, B.;
Bevilacqua, L.; CBPF (Brasil)
"Vibraciones de cascaras rebajadas"

Paper A - 14, p. 169 - 182

Loula, A.F.; Galeão, A.C.; Taroco, E.;
Feijão, R.A.; CBPF (Brasil)
"Vibrações de cascas axissimétricas com
movimento de rotação"

Paper A - 15, p. 183 - 192

Mucheroni, M.F.; Selegim, P.
EESC/USP (Brasil)
"Resposta em frequência de anéis
dinamométricos"

Paper A - 16, p. 193 - 202

Laura, P.A.A.; Pombo, J.L.; Luisoni, L.E.;
Alabes, G.; Lavaisse, A.
IMAS (Argentina)
"Dynamics of beams with ends elastically
restrained against rotation"

Paper A - 17, p. 203 - 216

Espindola, J.J. de
UFSC (Brasil)
"Response of spatially periodic structures to
concentrated forces"

TA - 8, p. 381 - 384

Almeida, M.T. de
EFEI (Brasil)
"Vibrações acopladas de flexão e torção de uma
aleta helicoidal"

DINÂMICA DE SISTEMAS

DYNAMICS OF SYSTEMS

Paper A - 18, p. 217 - 225

Maestrini, A.; Riera, J.D.
UFRGS (Brasil)

"Sobre a distribuição de probabilidades da resposta de sistemas dinâmicos sob excitação aleatória não-gaussiana"

Paper A - 19, p. 227 - 233

Rodrigues Filho, F.; Weber, H.I.
UNICAMP (Brasil)

"Análise experimental de um pêndulo contendo líquido"

Paper A - 20, p. 235 - 244

Silva, T.F.C.; Tenenbaum, R.A.; Mansour, W.M.
COPPE/UFRJ (Brasil)

"Mechanical limit cycles induced by Coulomb friction"

Paper A - 21, p. 254 - 253

Scieszko, J.L.; Hsu, L.
COPPE/UFRJ (Brasil)

"Attenuation of the stick-slip phenomena by means of external vibration"

Paper A - 22, p. 255 - 278

Riera, J.D.
UFRGS (Brasil)

"Aplicação do método das variáveis de estado ao estudo de sistemas dinâmicos sob excitações aleatórias não-estacionárias"

Paper A - 23, p. 269 - 283

Nouh, S.
PUC/RJ (Brasil)

"Dynamics and stability of elastic pipes conveying pulsatile flow"

Paper A - 24, p. 285 - 298

Hsu, L.; Tavares, G.A.
COPPE/UFRJ (Brasil)

"A direct method for the analysis of critical and post-critical behavior of nonlinear mechanical systems"

Paper A - 25, p. 299 - 310

Denardin, M.L.; Nascimento, J.A. do; Riera, J.
UFRGS (Brasil)

"Determinação da velocidade crítica por galope
de estruturas com amortecimento arbitrário"

Paper A - 26, p. 311 - 322

Shoup, T.E.; Houston (U.S.A.)

Varga, R.; Rutgers (U.S.A.)

Fletcher, L.S.; Virginia (U.S.A.)

"The static significance of human arm
configuration in maintaining balance"

Paper A - 27, p. 323 - 333

Lima, E.C.P. de

COPPE/UFRJ (Brasil)

"Análise de sistemas de controle e retroação
em estruturas flexíveis"

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 1

PP. 1 - 12



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ESTUDO EXPERIMENTAL DE VIGAS EM BALANÇOSOB IMPACTOS AXIAIS

Jaime Tuniassú de CASTRO, Professor Auxiliar
Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica
Rio de Janeiro, Brasil

Visvanatha SUNDARARAJAN, Professor Associado
Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica
Rio de Janeiro, Brasil

1. Introdução

É fato conhecido que quando excitamos uma viga através de impactos axiais ela também vibra flexuralmente. Este efeito é, provavelmente, devido a imperfeições geométricas,

excentricidade no carregamento, vibrações residuais ou a superposições destas causas.

Conhecer este fenômeno é necessário para que possamos projetar com mais segurança elementos estruturais ou membros de máquinas que estejam sujeitos a impactos axiais durante sua vida útil. Entre os parâmetros que necessitam ser estudados estão os máximos deslocamentos e tensões despertados pelos impactos, a existência ou não de ressonâncias e "cargas críticas", a estabilidade do sistema, os efeitos do material e da geometria da viga, a forma e a duração do impacto, a influência das condições de contorno do sistema.

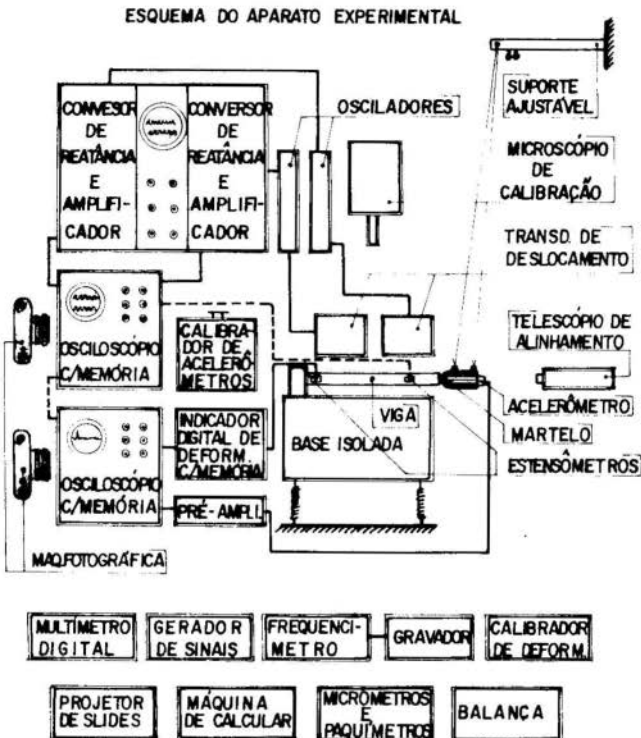
A literatura disponível relacionada à resposta flexural de colunas sob impactos axiais não é extensa:

Hoff [1] estudou a flambagem dinâmica de colunas simplesmente apoiadas, cujas extremidades eram comprimidas sob velocidade constante. Sevin [2] estendeu o trabalho de Hoff incluindo o efeito de inércia axial, o qual, na gama de velocidades usadas, foi considerado pequeno. Lindberg [3] estudou a flambagem sob impacto de uma barra fina, assumindo imperfeições aleatórias na barra. Sua determinação teórica da distribuição probabilística dos comprimentos de onda da barra flambada foi comparada favoravelmente com suas experiências. A estabilidade dinâmica de colunas simplesmente apoiadas sob cargas axiais de curta duração, incluindo os efeitos de inércia axial e de dissipação interna, foi estudada por Mc Ivor e Bernard [4]. Lyon e Zable [5] desenvolveram um transdutor de força usando impactos obtidos através de um pêndulo. Alguns resultados obtidos por estes autores foram confirmados nesta pesquisa.

Considerando que praticamente não eram disponíveis resultados experimentais no estudo de vibrações flexurais de vigas submetidas a impactos axiais, nos propusemos a estudar quais as máximas tensões e quais os máximos deslocamentos laterais; a existência de cargas críticas dinâmicas, no sentido de instabilidades flexurais causadas por deslocamentos laterais excessivos; e a identificar quais os parâmetros relevantes no comportamento de uma viga em balanço sob impactos axiais.

2. O Aparato Experimental

Na figura 1 temos um esquema do aparato experimental.



A viga em teste era presa a uma base rígida e isolada das vibrações do prédio, através de um engaste fixável à base por grampos e parafuso de encosto. O martelo, suspenso por um suporte dotado de um ajuste contínuo, excitava a viga com impactos cuja axialidade era garantida com auxílio de um telescópio de alinhamento Hensoldt Wetzlar (ajuste dentro de 2×10^{-5} m).

A força, a forma e duração do impacto eram medidas por um sistema composto de um osciloscópio com memória (Tektronix 5103N), um pré-amplificador (Bruel & Kjaer 2622) e um acelerômetro (B&K 4333) fixado ao martelo. Este sistema foi calibrado em conjunto usando-se um pequeno vibrador capaz de

manter uma amplitude de aceleração de $1g$ (aceleração da gravidade).

Nas medidas das deformações flexurais usamos extensômetros (Strain gages BLH) e um indicador digital dotado de memória (B&K 1526). Nas medidas das deformações axiais também foram usados strain gages, ligados a um osciloscópio com memória (Tektronix Carrier Amplifier 3C66 e 564 Storage Oscilloscope). A calibração das medidas de deformação foi feita usando-se resistências padrão.

Nas medidas dos deslocamentos laterais usamos transdutores capacitivos, osciladores e conversores de reatância, de fabricação Disa. Para calibração deste equipamento usamos um microscópio acoplado a um micrômetro Carl Zeiss.

Todas as medidas efetuadas nos osciloscópios foram fotografadas. Na figura 2 temos um aspecto da área de pesquisa.

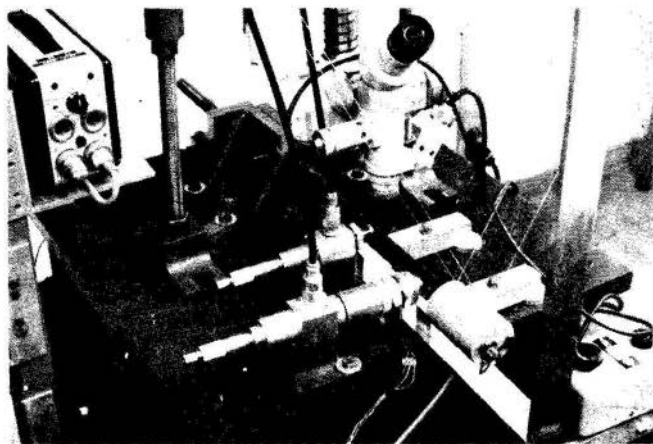


Fig.2 - Aspecto da montagem

3. Técnicas de Medição

Medidos o momento de inércia da seção reta (I) e a massa por unidade de comprimento (ρ) das vigas, elas eram postas entre as cantoneiras de engaste e fixadas à base.

Garantida a horizontalidade do balanço procedíamos à furação da parte engastada para passagem de pinos guia.

Após a cuidadosa colagem dos extensômetros [6,7,8,9] mediamos o primeiro período natural de vibração (τ_{1f}) e calculamos

lávamos o módulo de elasticidade (E) da viga pela fórmula:
[10]

$$E = \frac{4\pi^2}{12,355} \frac{\rho L^4}{I\tau_{1f}} , \quad L - \text{comprimento do balanço}$$

O alinhamento entre o pêndulo e a viga mostrou-se um fator crítico durante a pesquisa. Nos primeiros testes o alinhamento era feito visualmente, o que para ângulos pequenos mostrou-se satisfatório. No entanto, para ângulos maiores ($\sim 1^\circ$ a 2°) necessitamos usar um telescópio de alinhamento para obter resultados confiáveis. Uma verificação auxiliar bastante útil da axialidade do impacto era o ruído da batida entre o martelo e a viga. Com um alinhamento bem feito o ruído era "seco" e o martelo recuava sem oscilações laterais enquanto que com um mau alinhamento, o ruído era "espirrado" e o recuo do martelo apresentava oscilações laterais. Após o alinhamento a distancia entre o martelo e a viga era ajustada para que tivessemos o impulso desejado.

Para evitar erros devidos a não simultaneidade do instante inicial das várias medidas, todos os instrumentos eram disparados (triggered) pelo começo do sinal de aceleração.

4. Resultados e Discussões

Na Tabela 1 são apresentadas as constantes da viga.

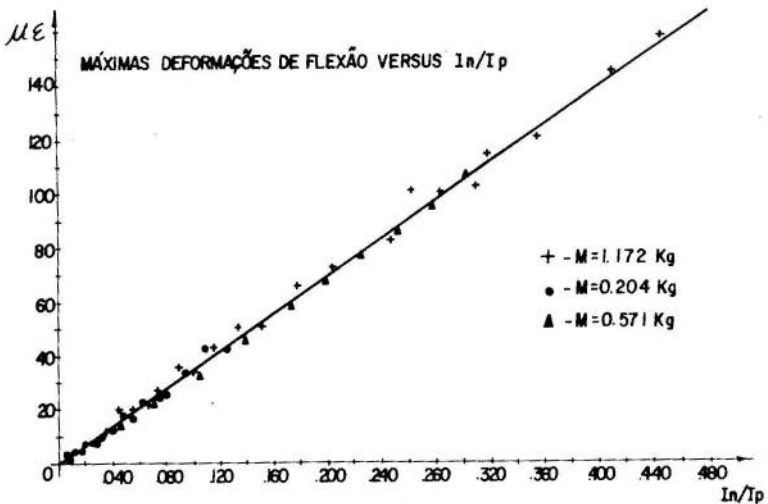
TABELA 1

h	largura da viga	1,015 mm
b	altura da viga	29,824 mm
ρ	massa por unidade de comprimento	0,232 kg/m
L	comprimento do balanço	0,2601 m
I	momento de inércia	$2,599 \times 10^{-12} \text{ m}^4$
A	área	$3,027 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
τ_{1f}	1º período natural de vib. flexural	0,077 s
E_{lf}	módulo de elasticidade	$2,202 \times 10^{11} \text{ Pa}$
P_{cr}	carga crítica de Euler	20,870 N
ξ^{cr}	fator de amortecimento	0,002
I_p	impulso padrão	1,607 Ns
τ_{1a}	1º período natural de vib. axial	0,21 ms

Material: aço inoxidável AISI 316

Na figura 3 temos a relação entre as máximas deformações de flexão, medidas em $\mu\epsilon$ ($\epsilon = \Delta L/L$), e os impulsos nominais aplicados a viga, definidos pela razão I_n/I_p ; onde $I_n =$ impulso nominal = MV , massa X velocidade do martelo; e I_p é o impulso padrão da viga, definido como:

$$I_p = P_{cr} \times \tau_{lf} = \frac{\pi^3}{7,030} \sqrt{\rho EI} \quad , \quad P_{cr} = \text{carga de flambagem de Euler}$$



- FIG. 3 -

Estas definições do impulso padrão e do impulso nominal visam facilitar os cálculos das tensões de flexão por engenheiros que não possuam o sofisticado instrumental necessário para medir os impulsos reais aplicados à viga. O desvio padrão médio das medidas de deformação foi 5,1% e os pontos experimentais definem uma relação linear de equação:

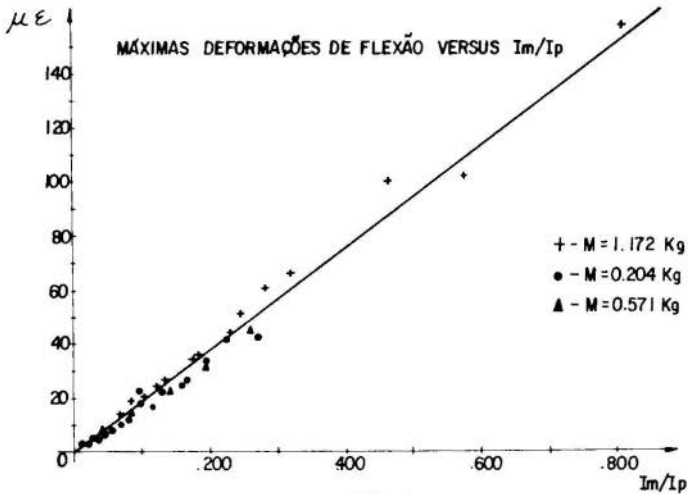
$$\mu\epsilon = 350 I_n/I_p \quad (1)$$

As tensões de flexão podem ser facilmente calculadas usando-se a equação (1) e aplicando-se lei de Hooke.

Na figura 4 temos a relação entre as máximas deformações de flexão e os impulsos medidos I_m/I_p . I_m é o impulso realmente aplicado à viga e obtido por integração numérica das curvas de aceleração versus tempo. Conforme pode ser

constatado a relação também é linear e tem por equação

$$\mu e = 187 I_m/I_p \quad (2)$$



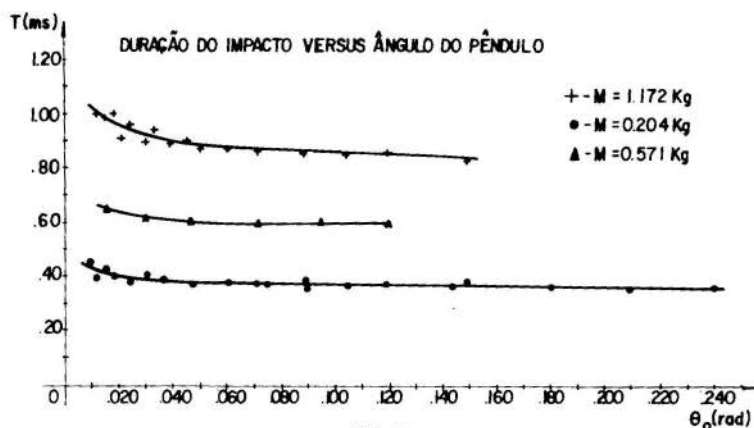
- FIG. 4 -

Como o coeficiente de restituição entre a regua e o martelo é aproximadamente 0,9 (choque quase elástico) temos:

$$I_m \sim 1,9 I_n \rightarrow \mu e \sim 355 I_n/I_p \quad (3)$$

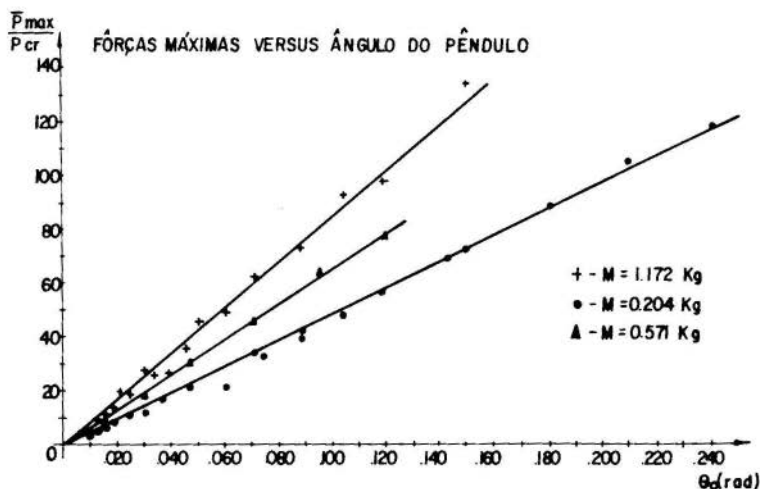
Comparando (3) e (1) vemos que justifica-se plenamente a proposição de usarmos o impulso nominal I_n para calcular as tensões de flexão.

Para 3 martelos usados temos, na figura 5, a relação entre a duração do impacto, T , em ms, e o ângulo de lançamento do pêndulo, θ , em rd. Observamos que para ângulos maiores que 0,050 rd a duração do impacto é praticamente constante, enquanto que um ligeiro aumento nesta duração é constatado para ângulos menores. Observamos também que os martelos mais pesados tem um contato mais longo com a viga. Estes resultados confirmam o trabalho de Lyon e Zable [5]. Maiores detalhes são discutidos por Castro [11].



- FIG. 5 -

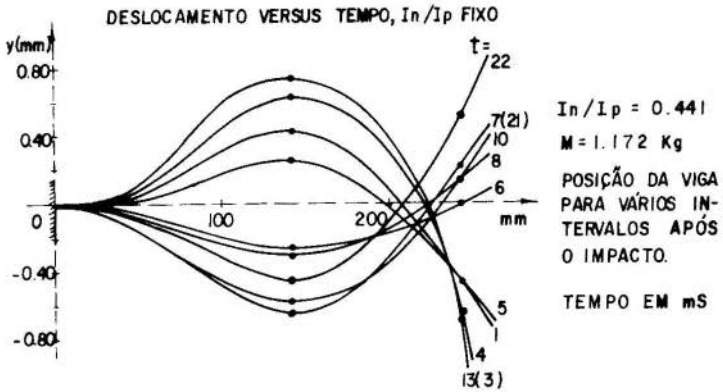
Na figura 6 temos a relação entre as máximas forças de impacto, P_{\max}/P_{cr} , e θ , o ângulo de lançamento do pêndulo. Conforme esperado para pequenos ângulos de lançamento a relação é linear [5].



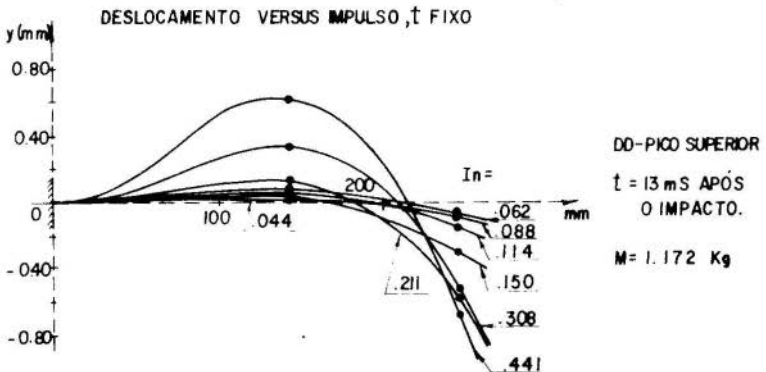
- FIG. 6 -

Na figura 7 temos uma resposta típica de deslocamento versus tempo para um impulso fixo e na figura 8 uma resposta de deslocamento versus impulso, para um tempo fixo. Conforme vemos há uma grande influência no 2º modo natural de vibração nestas respostas e não verificamos nenhuma instabilidade no sistema.

As medidas de deslocamento da viga não apresentaram um comportamento tão repetitório quanto as medidas de deformação.



- FIG. 7 -



- FIG. 8 -

5. Conclusões

Nesta pesquisa foi feito um estudo experimental das vibrações flexurais de uma viga de seção reta constante, em balanço, causadas por impactos axiais aplicados através de um arranjo pendular. Concluimos, no intervalo pesquisado, que a resposta da viga aos impactos é um fenômeno repetitório e

os impulsos são parâmetros importantes no problema. Os impulsos nominais, definidos como o produto da massa pela velocidade do martelo, podem ser usados nos cálculos, não havendo necessidade de medir os impulsos reais por integração da curva força versus tempo. Há uma relação linear entre as máximas tensões de flexão e os impulsos aplicados à viga. Há grande influência do 2º modo natural de vibração nos deslocamentos laterais da viga. Não foi constatada a existência de nenhuma carga crítica dinâmica no intervalo pesquisado.

Bibliografia

- [1] Hoff, N.J. - "The Dynamics of the Buckling of Elastic Columns". Journal of Applied Mechanics, March 51, pgs. 68-74.
- [2] Sevin, E. - "On the Elastic Bending of Columns Due to Dynamic Axial Forces, Including the Effects of Axial Inertia". Journal of Applied Mechanics, March 60, pg. 125-131.
- [3] Lindberg, H.E. - "Impact Buckling of a Thin Bar". Journal of Applied Mechanics, June 65, pg. 315-322.
- [4] McIvor e Bernard - "The Dynamic Response of Columns Under Short Duration Axial Loads". Journal of Applied Mechanics, September 73, pg. 688-692.
- [5] Lyon, R.L. e Zable, J.L. - "Impact-Force Source and Impact Force Calibrator". Experimental Mechanics, June 73, pg. 257-264.
- [6] Vaughan, J. - "Strain Measurements", Bruel & Kjaer 1975.
- [7] Arthur, K. - "Transducer Measurements", Tektronix 1971.

- [8] "BLH", "Strain Gauge Handbook" (sem data).
- [9] Perry e Lissner - "The Strain Gage Primer". Mc Graw-Hill, 1962.
- [10] Timoshenko, S.; Young D.H. e Weaver, W. - "Vibrations Problems in Engineering", 4th - Ed. John Wiley & Sons 1974, cap. 5.
- [11] Castro, J.T.P. - "Estudo Experimental de Vigas em Balanço sob Impactos Axiais". Tese de Mestrado, PUC/RJ, Março 1977.

CASTRO, J.T.P. e SUNDARARAJAN, V.

ESTUDO EXPERIMENTAL DE VIGAS EM BALANÇOSOB IMPACTOS AXIAISSumário

Este estudo é uma investigação experimental das vibrações flexurais de uma viga em balanço causadas por impactos axiais. Uma série de medidas foi feita usando-se uma viga de aço inoxidável submetida a impactos de diferentes magnitudes, aplicados através de um arranjo massa-pêndulo. A amplitude dos impulsos foi variada mudando-se o peso e o ângulo de lançamento da massa do pêndulo.

Para a gama e a característica dos impactos utilizados nesta investigação, concluímos que a amplitude dos impulsos aplicados é o parâmetro relevante da resposta transversal da viga. As máximas tensões de flexão e os máximos deslocamentos laterais relacionam-se linearmente com a amplitude dos impulsos axiais aplicados. Não foi observada nenhuma instabilidade dinâmica, no sentido de deslocamentos laterais excessivos, na gama de impulsos utilizados nesta pesquisa.

EXPERIMENTAL STUDY OF CANTILEVER BEAMSUNDER AXIAL IMPACTSSummary

This study is an experimental investigation of the dynamic response of a cantilever beam due to axial impact. A series of response measurements was made for a cantilevered stainless steel beam subjected to impulses of different magnitudes. The impulses were induced by a pendulum-impact mass arrangement and their magnitudes were varied by changing the weight and release angle of the pendulum mass.

For the range and character of impulses utilized in this investigation, it is concluded that the magnitude of the applied impulse is the relevant parameter for the transverse response of the beam. Moreover, both maximum bending stresses in the beam and its maximum lateral displacements were found to be linearly related to the applied axial impulses. No dynamic instabilities, in the sense of excessive lateral displacements of the beam, was observed for the range of impulse magnitudes selected here.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 2

PP. 13 - 26



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE EFFECT
OF CRACK FRONT CURVATURE IN AN ASTM
COMPACT TENSION SPECIMEN

Michael E. FOURNEY, Professor
Mechanics and Structures Department
University of California, Los Angeles
Los Angeles, California, U.S.A.

1. Introduction

The application of fracture mechanics to engineering problems requires a knowledge of the stress intensity factor for the problem under consideration. The stress-intensity factor, K , is a measure of the amplitude of the stress field surrounding the crack tip and is a function of the crack and specimen geometry and the loading state. The crack is stable until the local value of K reaches a critical value, K_c , called the fracture toughness of the

material, which is a material property that must be measured. For most two-dimensional problems, the stress-intensity factor may be obtained by either analytical means or numerically using the finite-element approach.

Most three-dimensional problems remain unsolved due to the limitation of analytic techniques and computer capacity. Several experimental studies have attempted to determine the stress-intensity factor variation in three-dimensional problems, notably in plates with through cracks. All have used the frozen stress techniques of three-dimensional photoelasticity. Fessler and Mansell [1] studied a thick plate with an edge crack, and found no significant stress-intensity factor variation throughout the thickness. Smith and Smith [2] and Mullinex and Smith [3] studied bending of cracked plates. Villarreal, et al [4] studied cracked plates under tension. These researchers found stress-intensity factor variations that supported the various analytic cracked plate solution advanced by Sih [5] and Hartranft and Sih [6]. Unfortunately, the frozen-stress technique is always suspect when used for crack problems. With this technique, extreme care must be exercised to prevent introduction of significant error. These possible errors are due to crack blunting, and residual stresses from the casting and slicing of the model, and unknown changes in Poisson's ratio. Smith [7] gives a good current review of three-dimensional photoelasticity applied to fracture mechanics.

Barker and Fourney [8] devised a new technique of analyzing three-dimensional problems which utilizes scattered light speckle interferometry. This technique has been applied to an ASTM compact tension specimen in a Mode I loading and the variation of the stress intensity factor along the crack front determined [9]. It was found that, for this naturally grown crack, which had arrested after propagating through a portion of the specimen, the stress intensity factor (SIF) was constant. Although this makes perfect sense from a physical point of view, it was in disagreement with the results previously referenced and those

of Schroedel and Smith [10] who performed a three-dimensional photoelastic analysis of a compact tension specimen using the frozen stress technique. The major difference in these two studies was the curvature of the crack. The naturally arrested crack had a slight curvature, but well within ASTM requirement for a valid plane strain test, whereas the crack of Schroedel and Smith [10] had been sawn and was therefore straighter, albeit duller. The study reported here was undertaken to determine the effect of the crack curvature. That portion of this study using scattered light speckle interferometry has been reported previously [11] and will not be repeated here.

2. Description of Method

The stress field ahead of the crack tip is given by

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right] + \dots \\ \sigma_y &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right] + \dots \\ \sigma_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} + \dots\end{aligned}\quad (1)$$

where the local coordinates ahead of the crack tip are shown in Fig. 1. The stress state is independent of the material properties, hence the above solution is valid for either plane stress or plane strain. The crack opening displacement is

$$u_y = \frac{K(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(\alpha-1) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\theta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2)$$

where $\alpha = 3-4\nu$ for plane strain

$$\alpha = \frac{3-\nu}{H\nu} \text{ for plane stress}$$

E is Young's modulus

ν is Poisson's ratio

For three-dimensional problems, plane strain is assumed to exist on the innermost planes and plane stress on the external surface planes; displacement compatibility requires the stress field surrounding the crack tip to vary throughout the thickness of the specimen.

This can be accomplished by assuming that the SIF is a function of the specimen thickness. The three-dimensional

SIF, $K(z)$ is hence a function of the thickness coordinate, z , as well as the variable previously noted. Near the crack tip, the crack opening displacement along the crack can be written as

$$u_y \propto K(z) \sqrt{r} \quad (3)$$

By measuring the crack opening displacement throughout the specimen thickness, the variation $K(z)$ may be determined.

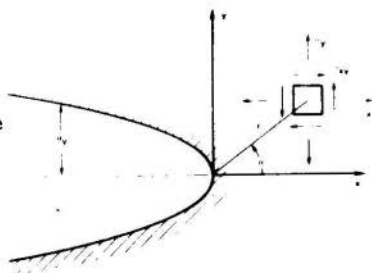


Fig. 1. Local coordinate system at the crack tip

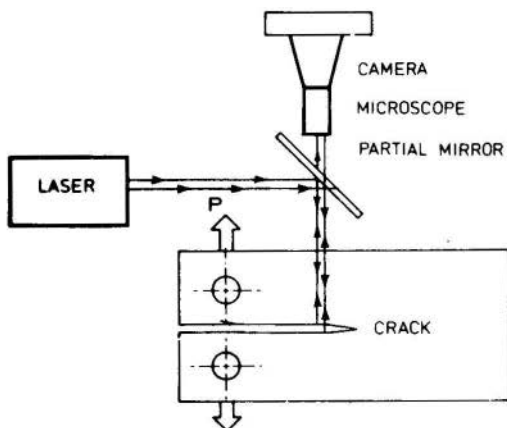


Fig. 2. Schematic diagram of setup for crack-opening interferometry tests

A refinement of the crack opening interferometry method has been used to determine the crack opening displacement. A schematical of the experimental arrangement is shown in Fig. 2. Coherent light from a He-Ne laser reflects from the upper and lower surfaces of the crack and forms an interference pattern analogous to a Newton's ring pattern. This is recorded photographically by means of a standard 35 mm camera. An example of a crack opening interference pattern is shown in Fig. 3(a). The crack opening displacement of Eq. (3) should properly be written as

$$\mu_Y \propto [K_P(z) + K_R(z)] \sqrt{r} \quad (4)$$

where $K_P(z)$ is the SIF due to the applied load P and K_R is the SIF due to the residual stress field in the specimen. Although every effort has been made, it is generally impossible to eliminate completely the residual stress field. Therefore, it is necessary to cancel out the effect in the measurement process. This is accomplished by making crack opening interferometry (COI) measurements at two different loading states P and $P' = P + \Delta P$. A double exposure is made of the two COI fringe patterns. This results in a Moiré pattern of the two COI fringe patterns. The predominate Moiré will be the subtractive pattern. This is shown in Fig. 3. COI fringe patterns (a) and (b) correspond to loading states P and P' . Each dark fringe corresponds to the locus of points along which the crack opening displacement is:

$$2\mu_Y = \left(\frac{2n-1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

when n is an integer and λ is the wavelength of light, $0.6328\mu\text{m}$ for these experiments. The corresponding relationships for the stress intensity factor are: for the first exposure

$$\mu_Y \propto [K_P(z) + K_R(z)] \sqrt{r} \quad (6)$$

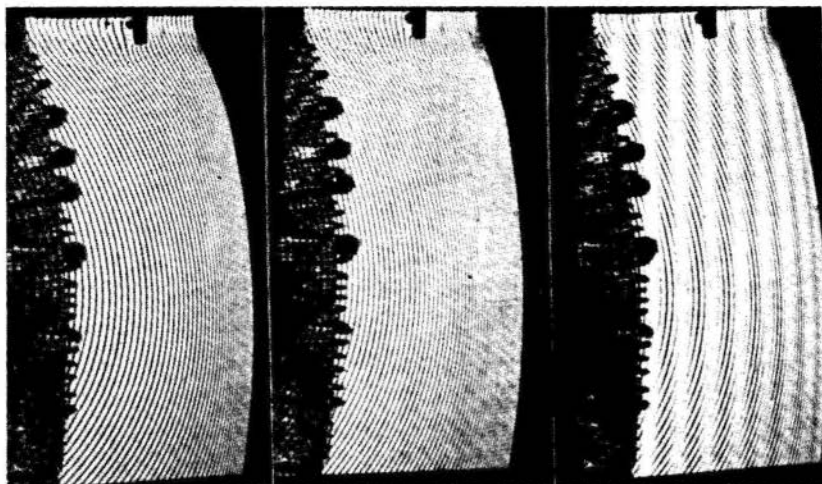


Fig. 3. Moiré of crack-opening interferometry

(a) COI of load P' (b) COI of load P' (c) Moiré of loads P and P'

and for the second exposure

$$\mu'_Y \propto [K_{P'}(z) + K_R(z)] \sqrt{r} \quad (7)$$

Since it is a linear problem and the Moiré fringes correspond to the subtractive pattern, each half-tone Moiré fringe in Fig. 3(c) is the locus of point having the displacement

$$\Delta\mu_Y = \mu_Y - \mu'_Y \propto [K_P(z) - K_{P'}(z)] \sqrt{r} = K_{\Delta P}(z) \sqrt{r} \quad (8)$$

Note that the SIF due to the residual stress is constant and hence has been eliminated by this method.

3. Description of Experiment Technique and Results

The ASTM compact tension specimen was used in this study. This specimen, shown in Fig. 4, is widely used to determine the plane strain fracture toughness of materials, hence it is assumed to have negligible variation of the

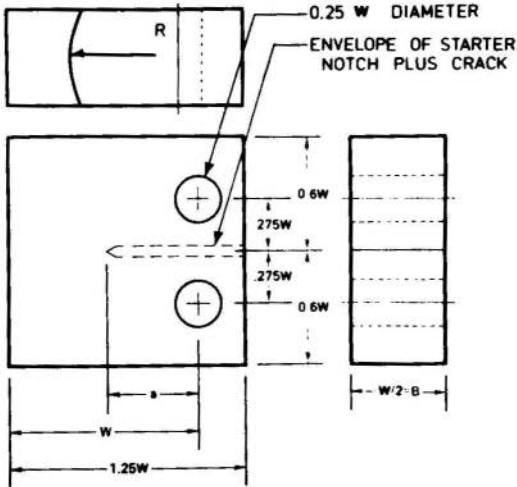


Fig. 4. ASTM compact tension specimen

SIF from the plane strain value throughout its thickness. For this study, PMMA was used which has a yield stress of 9000 psi and a fracture toughness of $1000 \text{ psi}/\sqrt{\text{in}}$. This is obviously a brittle material that exhibits a small amount of plasticity and therefore ideal for modeling brittle fracture mechanics. Cracks with various radii of curvature were grown. A circle of radius R defined by the crack lengths at the two surfaces and at the centerline was used to describe each crack. The average of these crack lengths, \bar{a} , normalized by the specimen length, W , is the only other parameter necessary to define the geometry. ASTM [12] requires that valid specimens should have $0.45 \leq \bar{a}/W \leq 0.55$. This was the case for most specimens tested with $\bar{a}/W = 0.50$ the most prevalent value.

The fringe order, which by Eq. (5) is proportional to the crack opening displacement, is plotted versus its location. As shown in Fig. 5, for a crack which has a curvature parameter R/W of 0.90, the experimental data fits

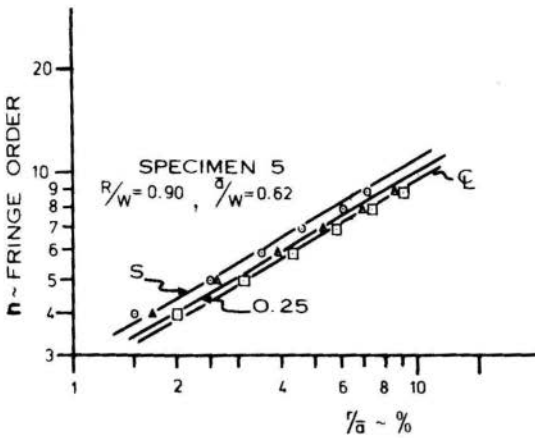


Fig. 5. Experimental data for curved crack

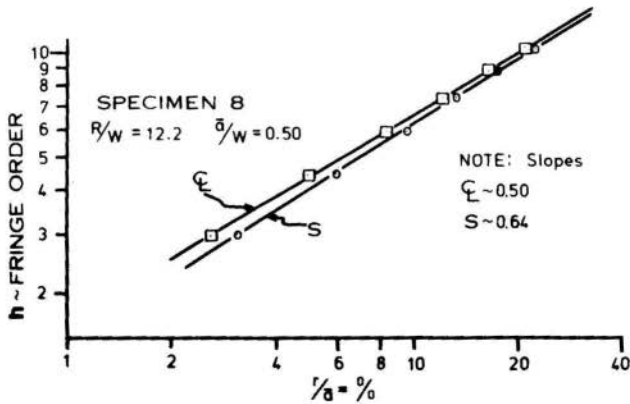


Fig. 6. Experimental data for straight crack

nically to the form of Eq. (8). The slope of these straight lines on the log-log plot is 0.5 and the intercept gives the value of the SIF. It will be noted from this figure that the SIF at the surface is greater than that at the center. Figure 6 shows similar data for a much straighter crack. In this case, the slopes are no longer equal and the SIF is greater in the center than at the surface.

The value of the SIF was determined by using a least-squares method to determine the best fit of the data points. For each test, the variation in the SIF, defined as

$$\delta K = \frac{K_C - K_{\text{surface}}}{K_C} \quad (9)$$

was determined.

These data are plotted versus the crack curvature in Fig. 7. It will be noted that for "straight" cracks, δK

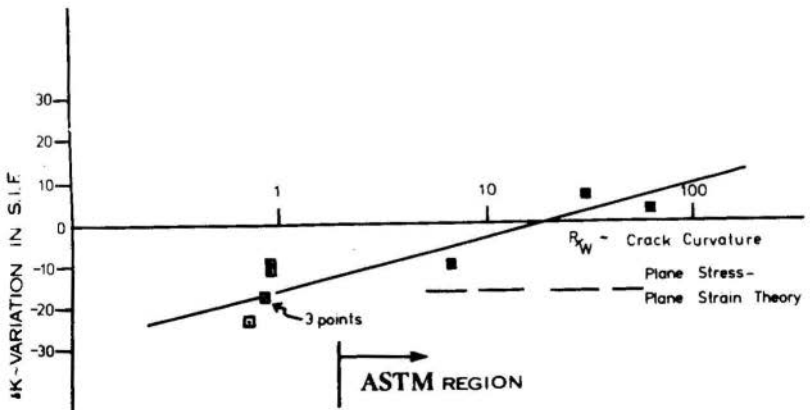


Fig. 7. Effect of crack curvature on variation of SIF

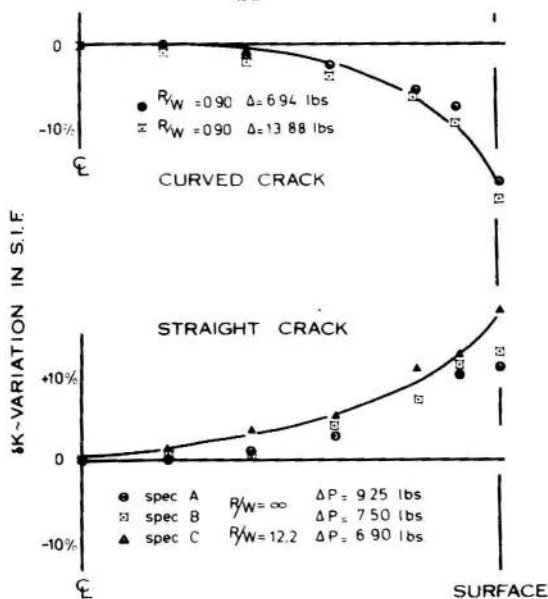


Fig. 8. Variation in SIF throughout specimen thickness

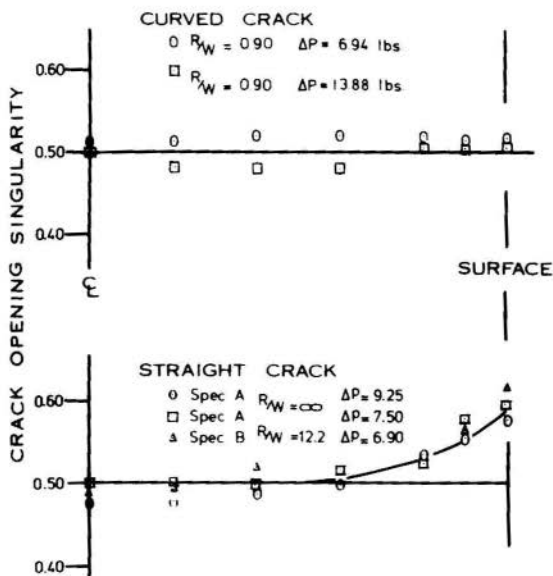


Fig. 9. Variation in crack opening singularity throughout specimen thickness

is positive, hence the SIF at the center is greater than at the surface. For very curved cracks, the inverse is true; therefore if a straight crack began to propagate, it will tend to "tunnel" until a specific curvature has been attained, after which time it will propagate in a stable manner.

The specific variation through the thickness of the SIF is shown in Fig. 8. This shows the different character of the "straight" (this implies a radius of curvature greater than the stable value) and curved cracks. Of perhaps more interest is the variation of the crack tip stress singularity throughout the thickness as shown in Fig. 9. For the curved crack, the value is 0.5 as predicted by Eq. (8); however for the "straight" crack, the value is the expected value of 0.5 except for a boundary layer region near the surface. The crack opening functional exponent increases to 0.6, which in turn implies a weaker stress singularity. Therefore, for a straight crack not only is the SIF greater in the center but also the strength of the singularity is greater, hence the "tunneling" effect is even more pronounced.

4. Conclusion

In Fig. 7 the limit of curvature which ASTM allows for a valid test is indicated. The quantity to be determined by this test is the plane strain fracture toughness. Hence the δK should be zero. These data show that as the test proceeds, the curvature will approach the proper region in the absence of residual stress. Also, Fig. 8 shows that the variation of SIF from the surface to the center will be greater than 10%. These results are valid in the absence of residual stress. When residual stresses exist, then from reference [9], one would expect a uniform SIF for a natural crack.

These data also show that the stress singularity for a straight crack, near the surface is not 0.5, but a value somewhat less and dependent upon the curvature, until a critical value has been reached; after this

curvature has been attained, the singularity remains constant throughout the specimen thickness. Further, when surface deformations are used to predict the overall SIF, variation of over $\pm 10\%$ may be expected depending upon crack curvature. The final shape of stable crack propagation is highly dependent upon the residual stress field. In principle, it would be possible to determine the unknown residual stress field by observing the crack front curvature.

References

- [1] Fessler, H. and D.O. Mansell., "Photoelastic Study of the Stresses Near Cracks in Thick Plates," J. Mechanical Engineering Sciences, 4(3):213-225, 1962.
- [2] Smith, D.G. and C.W. Smith, "A Photoelastic Evaluation of Closure and Other Effects Upon the Local Bending Stresses in Cracked Plates," International J. Fracture Mechanics, 6(3): 305-318, 1970.
- [3] Mullinix, B.R. and C.W. Smith, "Distributions of Local Stresses Across the Thickness of Cracked Plates under Bending Fields," International J. Fracture Mechanics, 10(3):337-352, 1974.
- [4] Villarreal, G., G.C. Sih and R.J. Hartranft, "Photoelastic Investigation of a Thick Plate with a Transverse Crack," J. Applied Mechanics, 42(1):9-14, 1975.
- [5] Sih, G.C., "Bending of a Cracked Plate with Arbitrary Stress Distribution Across the Thickness," J. Engineering for Industry, 92(2):350-356, 1970.
- [6] Hartranft, R.J. and G.C. Sih, "An Approximate Three-Dimensional Theory of Plates with Application to Crack Problems," International J. Engineering Science, 8(8):711-729, 1970.

- [7] Smith, C.W., "Use of Three-Dimensional Photoelasticity and Progress in Related Areas," Experimental Techniques in Fracture Mechanics, Vol. 2, edited by Ames, Iowa, 1975, pp. 3-58.
- [8] Barker, D.B. and M.E. Fourney, "Displacement Measurements in the Interior of 3-D Bodies Using Scattered-light Speckle Patterns," Experimental Mechanics, 16(6):209-124, 1976.
- [9] Barker, D.B. and M.E. Fourney, "Three-Dimensional Speckle Interferometric Investigation of the Stress-intensity Factor Along a Crack Front," Experimental Mechanics, 17(7):241-247, 1977.
- [10] Kobayashi, A.S., "Photoelastic Studies of Fracture," Handbook of Fracture, Vol. 3, Academic Press, New York, 1971, pp. 311-369.
- [11] Fourney, M.E. and Barker, D.B., "Effects of Crack Front Curvature on the Stress-Intensity Factor," presented 1977 SESA Spring Meeting, Dallas, Texas, May 1977, to be published in Engr. Fracture Mech.
- [12] "Standard Method of Test for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials," ASTM Standard E 399-74, Philadelphia, PA (1974).

FOURNEY, MICHAEL E.

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE EFFECT
OF CRACK FRONT CURVATURE IN AN ASTM
COMPACT TENSION SPECIMEN

Summary

Experimental measurements of crack opening displacement by two new optical techniques, scattered light speckle interferometry and Moiré of crack opening interferometry, have been used to determine the variation of the stress intensity factor along the crack front. ASTM compact tension specimens of PMMA with cracks of varying curvature were tested. This study shows that a straight through crack in Mode I propagation is unstable. Variations of the stress intensity factor, and the strength of the crack tip stress singularity will cause the crack to propagate with a specific curvature. This curvature is a function of geometry, the material properties and the residual stress field.

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DO EFEITO DA
CURVATURA DE FRENTE DE FISSURA EM UM
ESPÉCIMEM COMPACTO DE TENSÃO ASTM

Sumário

Medidas experimentais dos deslocamentos na abertura de uma fissura através de duas novas técnicas, interferometria de luz espalhada e interferometria de abertura de fissura de Moiré, foram usadas na determinação da variação do fator de intensidade de tensão ao longo da frente da fissura. Espécimens compactos de tensão ASTM de PMMA (Polymethyl Methacrylate) foram testados com fissuras de curvatura variável. Este estudo mostra que uma fissura reta é instável no Modo I de propagação. Variações do fator de intensidade de tensão na ponta da fissura acarretam a propagação da fissura com uma curvatura específica. Esta curvatura é função da geometria, das propriedades do material e do campo de tensão residual.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 3

PP. 27 - 39



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

UM MÉTODO DE ENSAIO DE MODELOS MECÂNICOS

(COLUNAS DE PAREDE FINA)

Elizabeth Rosito da Costa MARQUES
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

Jaroslav KOZEL
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

1. Introdução

Vários trabalhos tem sido desenvolvidos a respeito das deformações de colunas de parede fina, com o intuito de se determinar exatamente o comportamento destas estruturas

sob carga. Gorbatov & Valenta [1] apresentam um estudo teórico geral baseado na teoria da membrana, que é praticamente o ponto de partida para muitos dos trabalhos. Consideram que as paredes da estrutura podem se comportar como membranas, desde que se considerem regiões afastadas da zona de aplicação da carga, e estabelecem fórmulas de equilíbrio e fluxo de tensões.

Dreyer [2], por sua vez, apresenta uma análise teórica, através de fórmulas simples, das deformações à flexão e torção para casos típicos de carregamento em colunas de fre-sadoras mandriladoras. Realizou paralelamente ensaios práticos, que confirmaram com boa aproximação o cálculo teórico.

Kamynskaya, Levina & Reshetov [3], baseados em longo trabalho experimental, propõem também fórmulas para a determinação das deformações para cargas de torção, considerando um caso de carregamento idêntico ao utilizado por Dreyer. A aproximação em relação aos casos práticos, obviamente, deverá ser melhor do que a obtida por Dreyer, já que as fórmulas são adaptadas ao caso prático, onde além da rigidez de membrana, as paredes são dotadas de rigidez flexional.

Mais modernamente, com o desenvolvimento e facilidades das técnicas digitais, tem sido empregado o método de elementos finitos para a análise de colunas. Neste sentido cabe citar o trabalho de Hinduja & Cowley [4], onde além do desenvolvimento do método computacional, é analisado o comportamento da estrutura sob duas formas: considerando e desprezando a rigidez flexional das paredes. Tomando as dimensões das colunas testadas por Dreyer, eles aplicam o método dos elementos finitos (com elementos retangulares), obtendo boa aproximação em relação aos valores de Dreyer (sem rigidez flexional) e com os resultados de Kamynskaya, Levina & Reshetov (considerando a rigidez flexional).

É claro que as diferentes teorias levarão a diferentes resultados. O objetivo principal deste trabalho é a determinação das deformações por método experimental e a comparação destes valores com os valores teóricos estabelecidos, para vários tipos de colunas e dois tipos de cargas: flexão e torção.

Muitas indicações de procedimentos foram tomadas a partir de trabalhos semelhantes [6, 7] que também utilizaram métodos experimentais.

2. Cálculo teórico das deformações

O cálculo teórico das deformações foi feito através dos métodos anteriormente citados.

Da mesma forma que Dreyer, partiu-se de simplificações obtendo-se os valores das deformações para dois casos de carregamento, flexão e torção, mostrados respectivamente nas figuras 1(a) e 1(b).

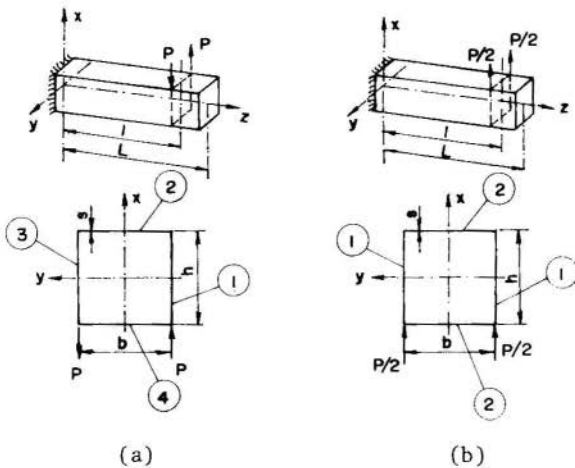


Fig. 1 - Formas de carregamento utilizadas por Dreyer.

Os valores obtidos, representam as deformações médias na seção carregada.

Segundo Kamynskaya, Levina & Reshetov foram obtidos valores de deformação para cargas de torção, usando o mesmo esquema de carregamento utilizado por Dreyer (Fig. 1(a)), podendo as deformações, neste caso, ser calculadas para qualquer seção. Os valores determinados, como no caso anterior, representam as deformações médias na seção.

Finalmente, utilizou-se o método dos elementos finitos para o cálculo das deformações, através do sistema

PROASE [5], dividindo-se cada coluna em elementos retangulares, e simulando-se as guias através de elementos tipo viga. Para todos os casos de flexão, foi considerada a simetria do plano XZ, analisando-se com isto apenas meia estrutura. Para os casos de torção a antissimetria em relação a XZ só é válida para os modelos com guias, devido à forma de carregamento.

3. Ensaio experimentais com modelos de colunas

Foi planejada e executada uma série de testes para a obtenção de dados e resultados experimentais [6].

3.1 - Modelos

Foram construídos para os testes oito diferentes tipos de modelos, com duas formas de seção: retangular e quadrada.

As formas e dimensões correspondem aproximadamente às que ocorrem com frequência em colunas de máquinas-ferramenta. Os modelos foram fabricados a partir de chapa de aço, com espessura média de 2,38 mm, para a qual se determinou a travês de testes, as características de elasticidade. Os valores correspondentes obtidos foram: $E = 1,988 \cdot 10^{-4} \text{ kgf/mm}^2$ e $\mu = 0,25$, para o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

Todos os modelos foram construídos com uma altura $L = 600 \text{ mm}$. Possuem para as dimensões da seção transversal, tomadas sobre a linha média, os seguintes valores:

- modelos de seção retangular: $b = 97,38 \text{ mm}$, $h = 197,38 \text{ mm}$
- modelos de seção quadrada: $b = 97,38 \text{ mm}$, $h = 97,38 \text{ mm}$.

Para cada forma de seção, foram construídos quatro modelos:

- a) modelo simples com solda contínua (semelhante aos testados por Dreyer)
- b) modelo simples com solda segmentada (35 mm solda - 35 mm espaçamento)
- c) modelo com guias com solda contínua
- d) modelo com guias com solda segmentada (idem b)).

Os modelos com guias foram construídos de modo a simu

lar melhor a aplicação de carga em uma coluna real de máquina-ferramenta. Possuem em uma de suas faces um par de guias representadas por perfis tipo cantoneira de abas iguais. A espessura média das abas destas cantoneiras é de 6,14 mm, valor estabelecido a partir da relação aproximada 2,5, que é utilizada entre a parede e a correspondente guias em máquinas-ferramenta. A largura da aba foi fixada em 20 mm, e obtida através de usinagem de perfil comercial (1"x1"x1/4").

A soldagem destes elementos para a confecção dos modelos foi feita com o auxílio de moldes de posicionamento, para que se pudesse obter boa precisão dimensional

Foi utilizado o processo TIG para a união das paredes e das guias, e solda convencional com eletrodo revestido para soldagem dos modelos sobre as bases. Cada modelo possui uma base de chapa 1", através da qual o mesmo pode ser parafusado sobre a mesa de carga, simulando um engaste.

Na figura 2 pode-se ver o aspecto final do modelo para seção quadrada e retangular - modelo simples.

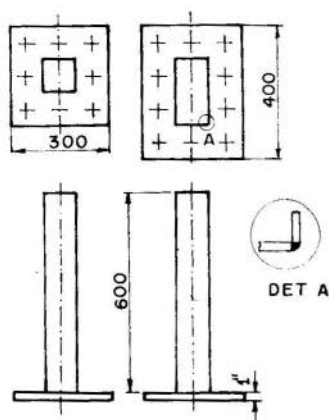


Fig. 2 - Aspecto construtivo dos modelos.

3.2 - Carregamentos

Para sujeitar cada um dos modelos ao carregamento, foram construídos dispositivos de maneira que:

- as cargas de flexão entrassem na estrutura através de duas cargas iguais de mesmo sentido, equidistantes do eixo X de simetria da seção.

- as cargas de torção (momentos) entrassem na estrutura através de duas cargas iguais e de sentido contrário, equidistantes do eixo X de simetria da seção.

- os pontos de contato entre o dispositivo de aplicação de carga e a estrutura fossem, tanto quanto possível, pontuais. Conforme o caso, estes contatos foram feitos através de parafusos de ponta cônica ou esferas.

Satisfeitas estas premissas, foram obtidos os esquemas de carregamento mostrados nas figuras 3 e 4 para cada tipo de modelo testado em flexão ((a) e (b)) e em torção ((c) e d)).

A aplicação das cargas foi conseguida através de pesos aferidos, transmitindo-se a carga ao modelo através de cabos.

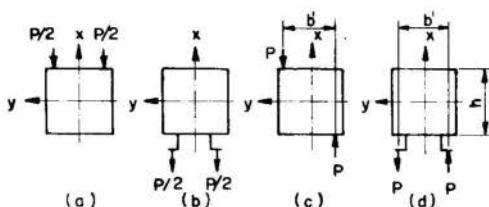


Fig. 3 - Esquemas de carregamentos - seção quadrada.

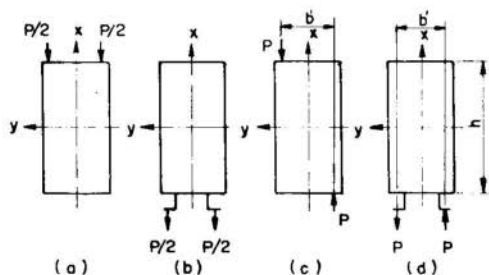


Fig. 4 - Esquemas de carregamento - seção retangular.

No caso da flexão foram aplicadas cargas de 10 até 60 kgf. para todos os modelos, com intervalos de 10 kgf entre uma carga e outra.

As cargas de torção dependem do braço de alavanca (b'') (fig. 5) do dispositivo de aplicação de carga. Os valores das cargas P efetivamente aplicadas sobre os modelos, são mostrados na tabela 1.

A distância entre os pontos de aplicação de carga, sobre o eixo y , para todos os modelos é $b' = 80$, já que a transmissão de carga pontual na aresta de união entre duas paredes vizinhas é impossível na prática.

Para a execução dos ensaios foi construída uma estrutura que permitisse testar todos os modelos. Esta estrutura

Valor do peso aplicado kgf $2P_1$	Valor de P kgf $P = P_1 b''/b'$		
	Mod. seção quadrada s/ guias $b'' = 532,50$ mm	Mod. seção retangular sem guias $b'' = 739,40$ mm	Mod. de seção quadrada e retangular com guias $b'' = 540,00$ mm
10	33,28	46,21	33,75
20	66,56	92,42	67,50
30	99,84	138,64	101,25
40	133,12	184,85	135,00
50	166,41	231,00	168,75

Tab. 1 - Valores das cargas de torção.

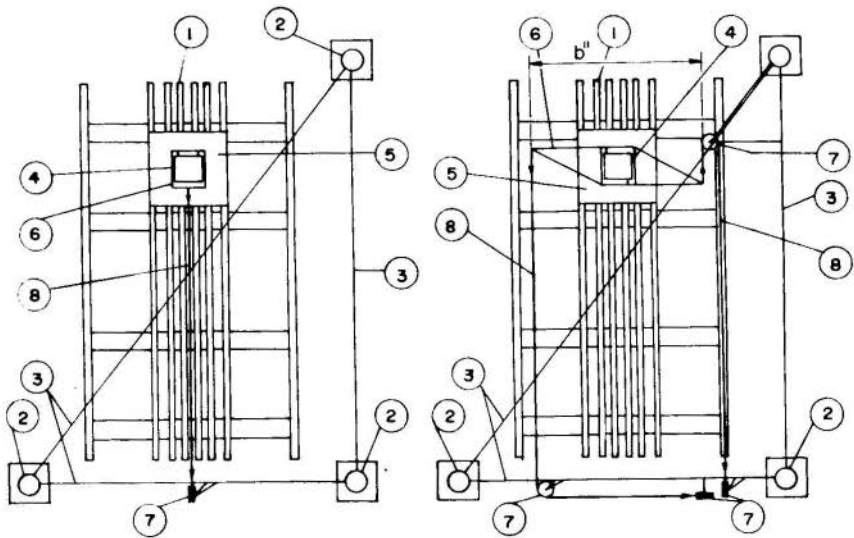


Fig. 5 - Sistema de carregamento para flexão e torção.

- (1) - mesa base de carregamento, (2) - colunas da estrutura, (3) - elementos de interligação das colunas, (4) - modelo, (5) - base do modelo, (6) - dispositivo de aplicação da carga, (7) - roldanas, (8) - cabo de transmissão da carga.

foi subdividida em duas sub-estruturas independentes: a de carregamento e a de medição.

A primeira suporta todo o sistema de aplicação de cargas, inclusive o modelo. A segunda suporta apenas o sistema de leitura. A separação se fez para impedir que as possíveis deformações do sistema de carregamento viessem a prejudicar as medições. Na figura 5 pode-se observar os sistemas de carregamento preparados para as cargas de flexão e torção, respectivamente.

3.3 - Sistema de medição

Para a determinação das deformações foi utilizado um conjunto de dez transdutores eletroindutivos (comparadores), acoplados a um aparelho de amplificação e leitura e montados em suporte especial, fixado sobre a mesa de medição.

Mais dois transdutores auxiliares foram usados para a determinação dos possíveis deslocamentos relativos entre o sistema de carga e o sistema de medição. O esquema simplificado da ligação é mostrado na figura 6.

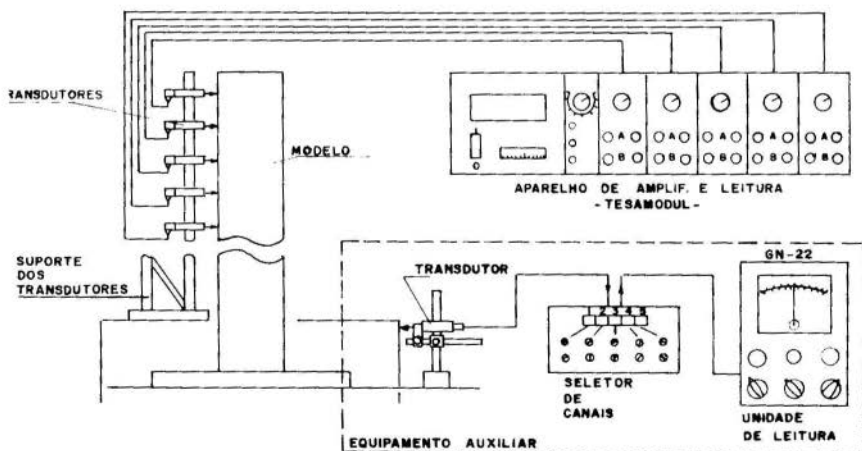


Fig. 6 - Esquema de medição.

Todos os valores obtidos para as deformações em um ciclo de carregamento foram tomados das médias entre os valores para carga e descarga. Os ciclos de carregamento foram

repetidos tantas vezes quantas necessárias para que a dispersão da média dos valores não ultrapassasse o máximo erro percentual indicado para o equipamento. O equipamento foi previamente aferido.

4. Resultados

Devido ao grande volume, reproduzem-se aqui somente parte dos resultados. Para isto considera-se, sobre cada modelo, um ponto análogo A, isto é, um ponto em posição relativa idêntica em relação a um dos vértices da seção.

Sobre todos os modelos tomou-se o ponto A ($h/2$, 40 mm), como mostrado na figura 7(a), a uma altura $z = 580$ mm, fig. 7(b).

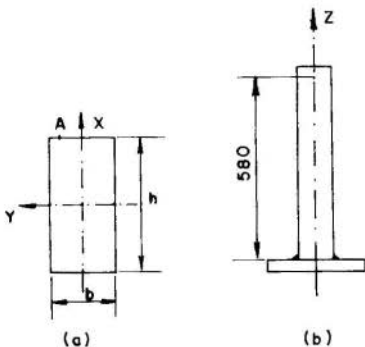


Fig. 7 - Posição do ponto A

Os deslocamentos do ponto A segundo o eixo x, em cada um dos modelos, para os máximos valores de carga aplicados, são encontrados na tabela 2.

Cabe salientar que os resultados 1) e 2) são valores médios para os deslocamentos das paredes paralelas a x. Já 3) e 4) são os valores de deslocamento do ponto específico. Os valores teóricos das deformações à fle-

xão, apresentam-se próximos aos valores determinados, e isso para todos os modelos. Na torção verificaram-se grandes diferenças em relação aos valores teóricos.

Dos testes de torção, os relativos aos modelos retangulares sem guias foram os que apresentaram maiores problemas de repetibilidade. Foram efetuadas algumas correções e modificações no dispositivo de aplicação de carga, contudo sem muito sucesso. Os modelos quadrados sem guias, apesar de boa repetibilidade, não apresentaram linearidade da relação carga-deformação para os pontos medidos, exceto em níveis mais baixos de carga (1º e 2º). Os demais modelos tes-

tados à torção (com guias) apresentaram boa consistência das deformações (antissimetria) e boa repetibilidade dos resultados.

Valores dos deslocamentos μm (em x)					
	Modelo	1)Dreyer 2	2)Kamyns- kaya 3	3)El. fini- tos 6	4)Experimen- tal 6
Flexão	Q0C	-166,09	-	-171,17	-183,17
	Q0S				-186,40
	R0C	-34,76	-	-45,15	-37,08
	R0S				-38,56
	Q1C	-	-	-71,42	-72,23
	Q1S				-75,03
Torção	R1C	-	-	-16,78	-16,98
	R1S				-14,13
	Q0C	-2036,82	-342,26	-318,65	-158,90
	Q0S				-133,50
	R0C	-478,92	-280,20	-442,80	-2,03
	R0S				-4,34
Q1C	-	-	-110,73	-248,90	
Q1S				-267,05	
R1C	-	-	-61,35	-151,37	
R1S				-145,44	

Códigos: Q - seção quadrada 0 - sem guias
 R - seção retangular 1 - com guias
 C - cordão contínuo
 S - cordão segmentado

Tab. 2 - Deslocamentos do ponto A.

Para se ter uma idéia qualitativa das deformações apresenta-se, na figura 8, a geometria das seções deformadas, em comparação com os resultados obtidos por elementos finitos. Estão representadas somente as seções deformadas dos modelos de solda contínuo, já que os resultados são similares para os correspondentes de solda segmentada.

5. Conclusões

Não se poderia esperar que um teste experimental sim-

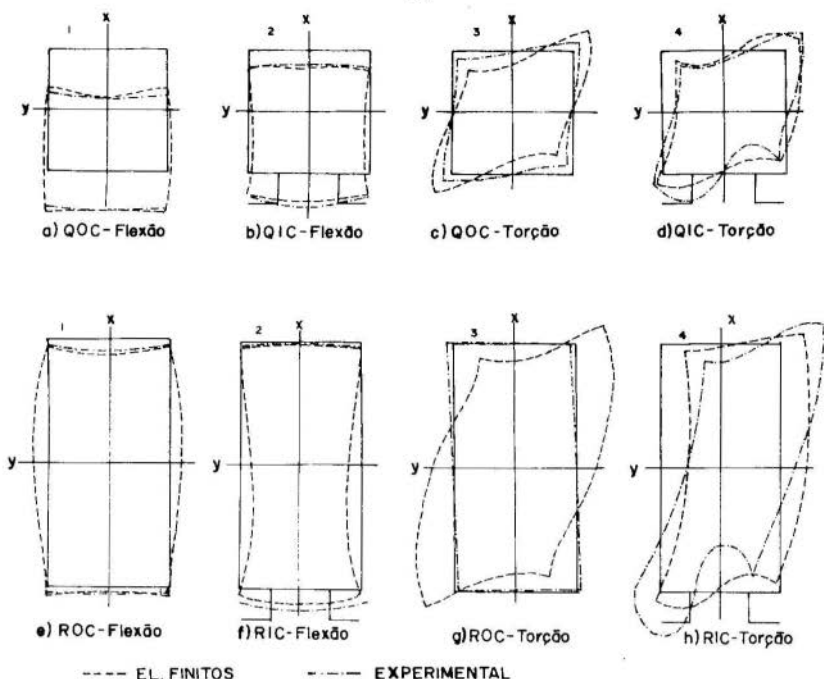


Fig. 8 - Aspectos das seções deformadas.

ples, fornecesse dados ambiciosos para o desenvolvimento de novas teorias. Os resultados obtidos corroboram esta afirmação. Normalmente deve-se partir de um conhecimento prévio do fenômeno, pelo menos na sua forma mais rudimentar. A construção dos modelos e estruturas adequadas à montagem do sistema são os pontos mais importantes a serem considerados.

Possíveis erros sistemáticos deverão ser determinados em testes preliminares. No caso dos testes de flexão, por exemplo, foram detetados deslocamentos da mesa de carga, que foram levados em consideração para a correção dos resultados. Na torção, o valor destes deslocamentos é mínimo, não sendo significativo levá-los em consideração para correção.

Dever-se-ia procurar, especialmente para testes de caráter quantitativo, submeter ao mesmo experimento vários espécimes idênticos, afim de obter resultados altamente confiáveis. O teste de um único espécime não pode ser conside-

rado como conclusivo, uma vez que um possível erro na sua própria construção poderá alterar completamente os resultados. Nesta pesquisa trabalhou-se com um espécime de cada modo apenas.

Em suma, procurou-se estabelecer e esclarecer procedimentos e problemas que surgem em testes experimentais, tentando-se dar uma contribuição ao desenvolvimento da técnica de modelos aplicada a estruturas.

Bibliografia

- [1] Gorbatov & Valenta, Ed. Koenigsberger, F. and Tlustý, J., "Machine tool structures", Vol. I Pergamon Press, Oxford, 1970.
- [2] Dreyer, W., Modelluntersuchungen an Werkzeugmaschinen Ständern, Industrie Anzeiger: Werkzeugmaschine und Fertigungstechnik, Nº III - 21 março 1967, Verlag W. Girardet - Essen.
- [3] Kamynskaya, V.V., Levina, Z.M. and Reshetov, D.N. "Bodies and body components of metal cutting". Machine tools - (translation), Moscow, 1960.
- [4] Hinduja & Cowley, The finite element method applied to the deformation analysis of thin-walled columns, Prof. of the 12th. Int. MTDR Conf., F. Koenigsberger and Tobias - Manchester 1971, Setembro, The Macmillan Press Ltd., London.
- [5] Alves, D.B., Programa analisador de sistemas Estruturais, Publicação - D-17, III COBEM, 1975.
- [6] Marques, E., "Aperfeiçoamento da metodologia de ensaio de modelos mecânicos", Dissertação de Mestrado, UFSC - 1977.
- [7] Silveira, P.P., "Metodologia de ensaio em modelos mecânicos, Dissertação de Mestrado-UFSC, 1972.
- [8] Trauer, R.O., "Procedimento para determinar os valores do coeficiente de cisalhamento - Dissertação de Mestrado-UFSC, 1974.

MARQUES, E.R.C. e KOZEL, J.

UM MÉTODO DE ENSAIO DE MODELOS MECÂNICOS

(COLUNAS DE PAREDE FINA)

Sumário

É apresentado um método de execução de testes de torção e flexão em estruturas tipo coluna de parede fina, para determinação dos valores das deformações sob carga.

Descreve-se a construção dos modelos, formas de aplicação de carga e o sistema de medição utilizado.

Comparam-se os valores determinados experimentalmente com os valores obtidos através das teorias que tratam o fenômeno e especialmente com o método de elementos finitos, mostrando-se as formas resultantes das seções transversais deformadas.

TEST METHODS IN MECHANICAL MODELS

(Thin walled columns)

Summary

A method is presented for the execution for torsion and bending tests to determine the deformation behaviour of thin walled columns.

The construction of models, methods of load application, and the measuring system are described.

Comparison is made between experimentally and theoretically obtained results, and specially with those of the finite element method, showing the resulting shape of deformed cross sections.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 4

PP. 41 - 51



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

DETERMINAÇÃO DO CENTRO DE CISALHAMENTO, CONSTANTE

TORCIONAL E DE DESEMPENHO EM SECÇÕES DE PAREDES DELGADAS

Domingos Boechat ALVES, Ph.D.
Depto. de Engenharia Mecânica, UFSC

Volnei ANDERSSON, Eng. Mec.
Depto. de Engenharia Mecânica, FURG

1. Introdução

Este trabalho descreve a formulação básica do processo numérico computacional e programa codificado em FORTRAN utilizados para determinar centro de cisalhamento, constante torcional, constante de empenamento e constantes para expressões da função empenamento, momento setorial de primeira espécie e fluxo de tensões cisalhantes devido à flexão em secções fechadas ou abertas, de paredes delgadas.

As secções abertas são modeladas por um número arbitrário de pontos interconectados por elementos retilíneos e/ou circulares individualizados pela ordem de seus pontos origem e término. Os pontos origem e término de cada elemento são tomados sobre a linha média da secção transversal.

Alguns resultados obtidos foram comparados com o que se encontra nas referências [3, 5, 6].

2. Configuração geométrica do iésimo elemento

A configuração geométrica do iésimo elemento é esquematizada na figura 1 onde A_i e B_i são os pontos origem e término, respectivamente; C'_i centróide do elemento; M_i ponto médio entre A_i e B_i ; D_i centro de curvatura do elemento; C centróide da secção e S centro de cisalhamento. Os eixos principais de inércia são representados por η_p , ξ_p .

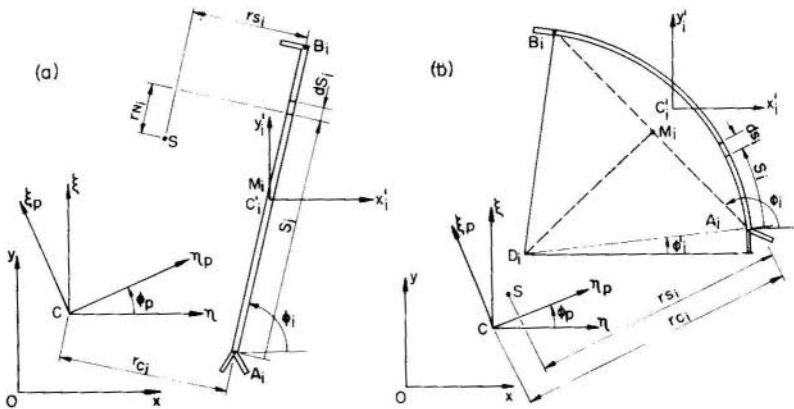


Fig. 1 - elementos: (a) retilíneo, (b) circular.

Os dados para o programa são as coordenadas de A_i e B_i e, adicionalmente, R_i em elementos circulares. O sinal de R_i é adotado de acordo com a rotação em torno de D_i como polo.

3. Secções abertas

O fluxo de cisalhamento [1] devido à flexão (sem torção) no iésimo elemento é

$$q_{o_i} = q_{a_i} + k t_i (-V_{\xi} (I_{\xi} \int_0^{s_i} ds_i - I_{\eta\xi} \int_0^{s_i} ds_i) - V_{\eta} (I_{\eta} \int_0^{s_i} ds_i - I_{\eta\xi} \int_0^{s_i} ds_i)) \quad (1)$$

onde $q_{a_i} = q_{a_{\xi i}} V_{\xi} + q_{a_{\eta i}} V_{\eta}$ é o fluxo de cisalhamento na origem A_i do iésimo elemento, $k = (I_{\eta} I_{\xi} - I_{\eta\xi}^2)^{-1}$, V_{η} e V_{ξ} componentes cisalhantes resultantes e I_{η} , I_{ξ} , $I_{\eta\xi}$ momentos de inércia de área.

Considerando a configuração geométrica utilizada, a equação (1) pode ser escrita na forma

$$q_{o_i} = V_{\xi} (q_{a_{\xi i}} + Q1_{\xi i} s_i + Q2_{\xi i} s_i^2 + Q3_{\xi i} \text{sen} (s_i/|R_i|) + Q4_{\xi i} (1 - \cos (s_i/|R_i|))) + V_{\eta} (q_{a_{\eta i}} + Q1_{\eta i} s_i + Q2_{\eta i} s_i^2 + Q3_{\eta i} \text{sen} (s_i/|R_i|) + Q4_{\eta i} (1 - \cos (s_i/|R_i|))) \quad \dots (2)$$

As constantes em (2) estão indicadas no apêndice e são determinadas para cada elemento e listadas pelo computador.

O centro de cisalhamento $S(x_{sa}, y_{sa})$ é determinado somando os momentos das forças cisalhantes nos n elementos, em relação a C.

A constante torcional [2] pode ser calculada, aproximadamente por

$$J = (\Sigma b_i t_i^3) / 3 \quad i = 1, n \quad (3)$$

A constante de empenamento (warping constant), usualmente, é definida como [1, 3, 4]

$$\Gamma = \Sigma \left(\int_0^{b_i} (D_t - W s_i)^2 t_i ds_i \right) \quad i = 1, n \quad (4)$$

$$D_t = (\Sigma \int_0^{b_i} Ws_i t_i ds_i) / Ar \quad i = 1, n \quad (5)$$

$$Ws_i = Wa_i + \int_0^{s_i} rs_i ds_i \quad i = 1, n \quad (6)$$

Wa_i é o valor de Ws_i na origem do i-ésimo elemento e Ar a área da secção transversal. A equação (6), em função da configuração da fig. 1, pode ser escrita como

$$Ws_i = Wa_i + W1_i s_i + W2_i \text{sen}(s_i / |R_i|) + W3_i (1 - \cos(s_i / |R_i|)) \dots (7)$$

Ws_i é denominado por alguns autores [4, 5] de "função empenamento", entretanto, a função empenamento adotada neste trabalho está indicada no apêndice e é importante no cálculo de tensões normais [1, 3].

Para secções constituídas de elementos retilíneos que têm um ponto em comum (fig. 2), a constante de empenamento vale [3, 5]

$$\Gamma = (\Sigma \int_0^{b_i} t_i^3 r_{Ni}^2 ds_i) / 12 \quad i = 1, n \quad (8)$$

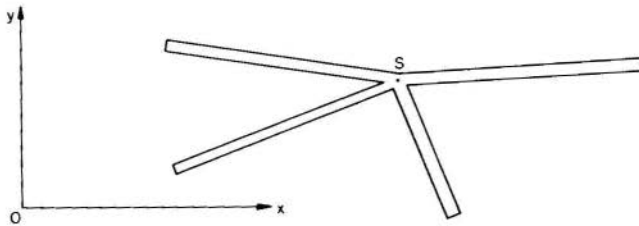


Fig. 2

O cálculo do fluxo de cisalhamento, na torção não uniforme, envolve o conhecimento de

$$Qws_i = Qwsa_i + \int_0^{s_i} (D_i - Ws_i) t_i ds_i \quad (9)$$

denominado "momento setorial de primeira espécie" em relação à origem $s = 0$ (origem do primeiro elemento) [3, 4]. Novamente, de acordo com a configuração geométrica, esta equação pode ser escrita como segue

$$Qws_i = Qwsa_i + Qws1_i s_i + Qws2_i s_i^2 + Qws3_i (1 - \cos(s_i/|R_i|)) + Qws4_i \text{sen}(s_i/|R_i|) \quad (10)$$

cujos coeficientes (V. apêndice) são listados pelo computador.

Para estabelecer o sentido origem-término de cada elemento, sabe-se que o fluxo de tensões cisalhantes é zero nas faces livres. Assim, a utilização de (2,10) requer que se considere faces livres como origem dos elementos que a possuem e o sentido origem-término deve ser tal que cada nó (ponto de incidência dos elementos) possa ser designado como origem de um só elemento (fig. 3a). Para os outros elementos a ele ligados, será um término.

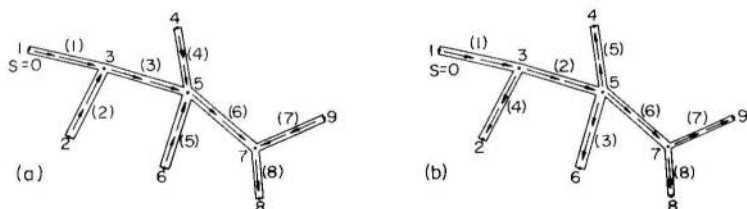


Fig. 3 - (a) orientação dos elementos para o cálculo de grandezas ligadas a q_{0_i} e (b) ao empenamento.

A quantidade Ws_i aumenta à medida que s aumenta e, somente, na extremidade livre escolhida como origem das coordenadas s , é nula. Logo, a orientação da figura 3a não se aplica. Para usar a equação (7) é necessário que os sentidos origem-término dos elementos sejam estabelecidos de tal forma que cada nó seja término de somente um elemento. Em todos os outros elementos a ele ligados, será uma origem (fig. 3b).

4. Secções fechadas

O fluxo de tensões cisalhantes num elemento i de uma secção fechada (ausência de torção) é

$$q_i = q_{0i} + \bar{q}r_i \quad (11)$$

onde q_{0i} é dado por (2), considerando a secção aberta e $\bar{q}r_i$ é a soma algébrica dos fluxos de tensões cisalhantes redundantes requeridos. Os fluxos de tensões cisalhantes redundantes $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{nct}$ são obtidos da relação

$$\oint_j q_0 ds/Gt + \bar{q}_j \oint_j ds/Gt - \sum_k \bar{q}_k \int_{j,k} ds/Gt = 0 \quad (12)$$

onde $j = 1, nct$; $k = 1, ncc_j$; nct é o número de cavidades tubulares da secção e ncc_j o número de cavidades adjacentes à cavidade j .

Somando momentos em relação a C , obtém-se as coordenadas do centro de cisalhamento na forma

$$x_{sf} = x_{sa} + 2\sum_j \Omega_j \bar{q}_{\xi j} \quad j = 1, nct \quad (13)$$

$$y_{sf} = y_{sa} - 2\sum_j \Omega_j \bar{q}_{\eta j} \quad j = k, nct \quad (14)$$

onde $\bar{q}_j = \bar{q}_{\eta j} V_{\eta} + \bar{q}_{\xi j} V_{\xi}$ e Ω_j é a área encerrada pela linha média das paredes de cada cavidade tubular j .

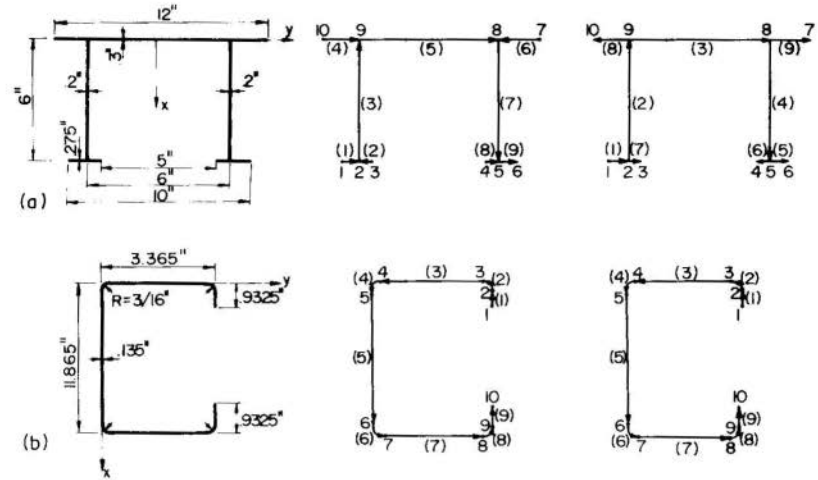
As constantes torcional e de empenamento e as constantes das expressões da função empenamento, momento setorial de primeira espécie e fluxo de cisalhamento devido à flexão [1, 3, 7], são determinadas modelando a secção de modo análogo às secções abertas.

5. Resultados e comparações

Nas figuras 4 e 5 são mostrados alguns exemplos de secções modeladas por nós e elementos de espessura constante. Os resultados da figura 4 podem ser comparados com as referências [5, 6] e os da figura 5 com a referência [3].

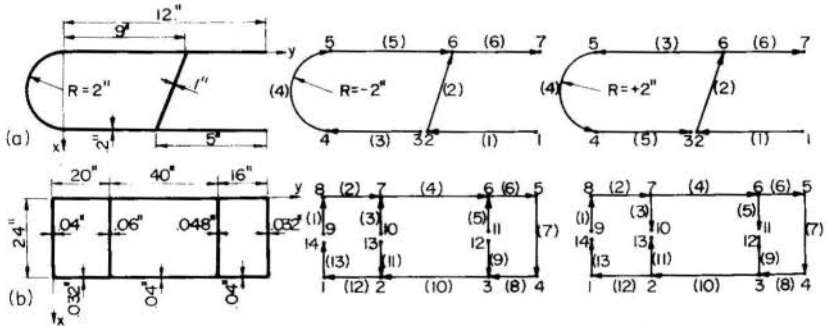
6. Conclusões

Utilizou-se um programa codificado em FORTRAN com a



	A_r	x_c	y_c	I_{η}	I_{ξ}	$I_{\eta\xi}$	x_s	y_s	J	Γ
(a)	7.37499	2.09491	0.0000	84.86	45.97	0.00	-1.53306	0.0000	0.17466	336.06
(b)	2.70299	5.93249	0.84218	4.02	56.20	0.00	5.93249	-1.41730	0.01642	111.76

Fig. 4 - Exemplos de secções abertas.



	A_r	x_c	y_c	I_{η}	I_{ξ}	$I_{\eta\xi}$	x_s	y_s	J_{tub}
(a)	6.50385	2.0000	4.73222	116.04	22.33	-0.30	2.18585	1.16245	37.55
(b)	10.07999	12.0000	38.10786	6184.22	1036.80	0.00	12.0000	38.22936	2614.30

Fig. 5 - Exemplos de secções fechadas.

formulação apresentada e os valores obtidos para as coordenadas do centro de cisalhamento, centróide, momentos de inércia, assim como constantes torcionais e de empenamento, apresentaram excelente acuidade com os valores encontrados na literatura. O programa, sendo geral, possibilita a obtenção dessas constantes para qualquer tipo de secção transversal de paredes delgadas, fechada ou aberta, e é de grande valia em análise de estruturas aeroespaciais e navais.

Bibliografia

- [1] Kollbrunner, C.F. and Basler, K., Torsion in Structures, An Engineering Approach, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, (1969).
- [2] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.M., Theory of Elasticity, third edition.
- [3] Oden, J.T., Mechanics of Elastic Structures, McGraw-Hill Book Company, (1967).
- [4] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, second edition.
- [5] Bleich, F., Buckling Strength of Metal Structures McGraw-Hill Book Company, (1952).
- [6] Light Gage Cold-formed Steel Design Manual, AISI (1961).
- [7] Bescoter, S.U., A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams, J. Appl. Mech. , vol 21, n° 1 (1954).

Apêndice

A1 - Constantes da equação (2)

1º) Em elementos retilíneos

$$Q1_{\xi i} = -kt_i(I_{\xi}(y_{Ai} - y_C) - I_{n\xi}(x_{Ai} - x_C))$$

$$Q2_{\xi i} = -kt_i(I_{\xi} \text{ sen } \phi_i - I_{n\xi} \text{ cos } \phi_i)/2$$

$$Q1_{ni} = -Kt_i (I_{\eta} (x_{Ai} - x_C) - I_{\eta\xi} (y_{Ai} - y_C))$$

$$Q2_{ni} = -Kt_i (I_{\eta} \cos \phi_i - I_{\eta\xi} \operatorname{sen} \phi_i) / 2$$

$$Q3_{\xi i} = Q4_{\xi i} = Q3_{ni} = Q4_{ni} = 0$$

2º) Em elementos circulares

$$Q1_{\xi i} = -Kt_i (I_{\xi} (y_{Di} - y_C) - I_{\eta\xi} (x_{Di} - x_C))$$

$$Q3_{\xi i} = -Kt_i |R_i|^2 (I_{\xi} \operatorname{sen} \phi'_i - I_{\eta\xi} \cos \phi'_i)$$

$$Q4_{\xi i} = -Kt_i R_i |R_i| (I_{\xi} \cos \phi'_i + I_{\eta\xi} \operatorname{sen} \phi'_i)$$

$$Q1_{ni} = -Kt_i (I_{\eta} (x_{Di} - x_C) - I_{\eta\xi} (y_{Di} - y_C))$$

$$Q3_{ni} = -Kt_i |R_i|^2 (I_{\eta} \cos \phi'_i - I_{\eta\xi} \operatorname{sen} \phi'_i)$$

$$Q4_{ni} = Kt_i R_i |R_i| (I_{\eta} \operatorname{sen} \phi'_i + I_{\eta\xi} \cos \phi'_i); \quad Q2_{\xi i} = Q2_{ni} = 0$$

Para determinar qa_{ni} e $qa_{\xi i}$, sabe-se que, nas extremidades livres, qa_i é zero e no iésimo elemento, é a soma dos fluxos cisalhantes dos elementos que precedem o iésimo elemento.

A2 - Função empenamento

$$WF_i = WFa_i + WF1_i s_i + WF2_i \operatorname{sen}(s_i / |R_i|) + WF3_i (1 - \cos(s_i / |R_i|))$$

$$WFa_i = D_t - Wa_i; \quad WF1_i = -W1_i; \quad WF2_i = -W2_i; \quad WF3_i = -W3_i$$

1º) Em elemento retilíneo

$$W1_i = (x_{Ai} - x_s) \operatorname{sen} \phi_i - (y_{Ai} - y_s) \cos \phi_i; \quad W2_i = W3_i = 0$$

2º) Em elementos circulares

$$W1_i = R_i; \quad W2_i = R_i ((x_{Di} - x_s) \cos \phi'_i + (y_{Di} - y_s) \operatorname{sen} \phi'_i)$$

$$W3_i = |R_i| (-(x_{Di} - x_s) \operatorname{sen} \phi'_i + (y_{Di} - y_s) \cos \phi'_i)$$

A3 - Constantes da equação (10)

$$Qws1_i = t_i (D_t - Wa_i - W3_i); \quad Qws2_i = -W1_i t_i / 2$$

$$Qws3_i = -W2_i |R_i| t_i; \quad Qws4_i = W3_i |R_i| t_i$$

Para determinar Wa_i sabe-se que o empenamento da o rigem do iésimo elemento é o mesmo do término do elemento que o precede.

ALVES, D.B. e ANDERSSON, V.

DETERMINAÇÃO DO CENTRO DE CISALHAMENTO, CONSTANTE

TORCIONAL E DE EMPENAMENTO EM SECÇÕES DE PAREDES DELGADAS

Sumário

Foi descrita a formulação básica do processo numérico computacional e programa codificado em FORTRAN, a fim de determinar momentos de inércia de área, centróide, centro de cisalhamento, constantes torcionais uniformes e não uniformes, constante de empenamento, constantes para expressões da função empenamento, momento setorial de primeira espécie e fluxo de tensões cisalhantes devido à flexão em secções de paredes delgadas, abertas ou fechadas. Alguns resultados obtidos foram comparados com a formulação existente na literatura.

DETERMINATION OF SHEAR CENTER, TORSIONAL

AND WARPING CONSTANT IN THIN WALLED SECTIONS

Summary

A basic formulation for a numerical computational process and a FORTRAN program was developed to determinate areas moments of inertia, centroidal coordinates, shear center, uniform and nonuniform torsional constants, warping constant, and constants for warping function, first sectorial moment, and bending shear flow in open or closed thin walled cross sections. Some results obtained was compared with the existing formulations in the literature.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 5
PP. 53 - 69



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

WEB SHEAR CAPACITY IN LARGE RECTANGULAR DUCTS

A.N. SHERBOURNE, Professor
Dept. of Civil Engineering
University of Waterloo
Waterloo, Ontario, Canada

H.M. HAYDL
Technical Development Department
ACRES Consulting Services Ltd.
Toronto, Ontario, Canada

1. Introduction

The design of large pollution control systems includes in many instances rectangular duct work. The design and analysis of these ducts poses complex problems for the structural engineer. Of major interest is information related to the safety against any kind of catastrophic collapse of these structures.

At the present time, rectangular ducts are designed according to the elementary beam bending theory. In overall bending, the axial loads are assumed to be carried by the roof and floor, and the transverse shears are carried by the sides or webs. The shear carrying capacity of the web will be examined in this paper. The shear carrying capacity of girder webs has been investigated by many researchers. Wagner [1] proposed the diagonal tension field theory and assumed that the web carried the shear load in pure diagonal tension. The pre-buckling shear capacity of the web was neglected. Modification of the original Wagner beam theory was introduced, when it became apparent that this theory was overly conservative for use in design. The development of a modified Wagner beam theory followed, which is widely used in the Aerospace Industry [2]. This theory is a semi-diagonal tension field theory and does not neglect the pre-buckling shear capacity of the web, but considers the total shear capacity to consist of the sum of the pre-buckling shear capacity and the shear capacity due to the semi-diagonal tension field formed after buckling. To gain a better understanding of this theory and to develop a design method, the NACA developed the "NACA Method" [3], which is based on the modified Wagner beam theory and extensive experimental data. These methods will be outlined in a later section of the present paper.

In the general area of civil engineering structures, most of the work on shear capacity of girder webs seems to be based on the work of Basler [4]. Höglund [5] has given a summary of the available theories.

Recently Selberg [6] has examined the shear capacity of girder webs and has made comparisons of several existing theories and experimental data. He demonstrates that the equations derived by Basler contain some arbitrary assumptions, which should lead to erroneous results. The corrected theory of Selberg is shown to give a reduced carrying capacity of the web when compared to Basler's theory.

The purpose of this paper is as follows:

- a) to point out that theories and experimental data on shear capacity of girder webs available in the literature can, with small modifications, be applied to rectangular duct design,
- b) to modify some statements and definitions made in Ref. [6],
- c) to provide a rational design and analysis approach to estimating the shear capacity of webs in rectangular ducts and girders.

2. Basler's Method

All methods to calculate the web shear capacity are based on the assumption that

$$V_u = V_\tau + V_d \quad (1)$$

i.e., the total shear capacity V_u consists of the capacity V_τ carried by shear and the capacity carried by diagonal tension, V_d .

Equation (1) forms the basis of the modified Wagner beam theory [2] and the NACA Method [3]. Basler's theory [4] uses the same notion although the proportions of V_u assigned to V_τ and V_d differ. Basler proposes the following:

The shear capacity is taken as the load at buckling

$$V_\tau = \tau_c bt \quad (2)$$

and the diagonal tension capacity is

$$V_d = \sigma_d tb \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}}} \quad (3)$$

where

$$\tau_c = \tau_{cE} = \frac{\pi^2 E k_s}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{b}{a}, \quad k_s = 5.34 + 4\gamma^2 \quad (5)$$

The diagonal tension stress in equation (3) is found from

$$\sigma_d = \sigma_y - \sqrt{3} \tau_c, \quad \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

Upon substituting equations (2) to (6) into (1) one obtains

$$\frac{\tau_u}{\tau_y} = \frac{V_u}{\tau_y bt} = \frac{\tau_c}{\tau_y} + \left(1 - \frac{\tau_c}{\tau_y}\right) \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}}} \quad (7)$$

Equation (7) is called the "ultimate" shear capacity of the web.

Note that these equations are written for shear panels in which $b > a$ (see Figure 1).

Selberg [6] has pointed out some errors contained in equation (7). We would like to point out some additional inconsistencies.

Our first point of criticism concerns the definition of "ultimate" load as given by equation (7). The definition of equation (1), which is generally accepted, states that the total carrying capacity consists of the shear carrying capacity at buckling, equation (2), plus the additional carrying capacity taken by diagonal tension, equation (3). Clearly, the diagonal tension stress, σ_d , is related to the shear buckling stress, τ_c , by the approximate uniaxial yield condition equation (6). Therefore equation (7) is really the yield load of the web, and is only the ultimate load for the special case of a rigid-plastic material.

The second point in question concerns the usefulness of equation (7) in practical applications. Although the equation is of relatively simple form, it can only be verified by extensive experimental evidence. Of concern is the evaluation of the buckling stress τ_c and the diagonal tension angle ϕ . Basler's formulation does not account for realistic boundary conditions which will influence τ_c and ϕ .

3. Selberg's Correction

Selberg [6] has pointed out that Basler's equations contain some errors and has shown that the diagonal tension stress σ_d is dependent on the diagonal tension angle ϕ . The corrected equations are

$$\sigma_d = \left\{ \sigma_y^2 - \tau_c^2 \left[3 - \left(\frac{3}{2} \sin 2\phi \right)^2 \right] \right\}^{1/2} - \frac{3}{2} \tau_c \sin 2\phi \quad (8)$$

where

$$\text{tg}\phi = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + 1} - \frac{1}{\gamma} \quad (9)$$

The corrected "ultimate" load is given as

$$V_u = \sigma_d t b \frac{1}{2} \text{tg}\phi + \tau_c t b \quad (10)$$

Substituting (8) into (10) results in

$$\frac{\tau_u}{\tau_y} = \frac{V_u}{bt\tau_y} = \sqrt{3} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{tg}\phi \left[1 - \left(\frac{\tau_c}{\sigma_y} \right)^2 \left[3 - \left(\frac{3}{2} \sin 2\phi \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{3}{2} \frac{\tau_c}{\sigma_y} \sin 2\phi \right] + \frac{\tau_c}{\sigma_y} \right\} \quad (11)$$

Note that again V_u is really the load at first yield of the web, i.e., the "yield" load.

To account for inelastic effects, when the shear buckling stress τ_c in equation (4) exceeds the elastic limit, Selberg [6] suggests the substitution

$$\tau_c = \tau_y \left[1 - \frac{\tau_y}{6.25\tau_{cE}} \right] \quad (12)$$

for practical applications.

4. Modification of Boundary Conditions

In practical duct design it is very difficult to specify the exact boundary conditions of the shear panels. Equation (5) is given here for the simply supported case. The actual support conditions in a shear panel will most likely be intermediate between simply supported and clamped. In addition the stiffness of the vertical stiffeners and the flanges will have some influence on the shear buckling load. The results obtained in Ref. [3] are directly applicable to thin webs in rectangular ducts and will be useful in connection with ultimate load calculations. The data developed in Ref. [3] is in part based on experiments and the following limitations are pointed out:

a) the vertical stiffener leg thickness should be

$$t_s \geq 0.6t \quad (13)$$

b) the vertical stiffener spacing should be in the range

$$0.2 \leq \frac{a}{b} < 1 \quad (14)$$

c) the web thickness should be in the range

$$200 < \frac{b}{t} < 1500 \quad (15)$$

The critical shear buckling stress is taken as

$$\tau_c = \frac{\pi^2 E k_s}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 C \quad (16)$$

where k_s is defined by equation (5).

The coefficient C is a correction factor to account for the actual boundary supports and is calculated from

$$C = R_b + \frac{1}{2} [R_a - R_b] \left(\frac{a}{b}\right)^3, \quad (C \geq 1.0) \quad (17)$$

The restraint coefficients R_a and R_b are given in Figure 2. Equation (17) is written for panels $a < b$. If $a > b$ the values of a and b should be interchanged in equations (16) and (17) and as subscripts.

It is of practical interest to examine equation (17) briefly. As an example let $a/b = 1$, then for the assumption of simple supports $C = 1$ and consequently $R_a + R_b = 2$. If one further assumes that $R_a \cong R_b$ then upon examining Figure 2, it is seen that the vertical stiffener legs should be at least as thick as the shear panel, i.e. $t_S = t_F = 1.3t$ for single angle stiffeners. If one assumes full fixity, then $C = 1.64$ and $R_a + R_b = 3.28$ and if $R_a \cong R_b$, double angles are necessary with $t_S = t_F = 3t$. Since ducts usually cannot be stiffened on the inside this case must be ruled out from practical considerations. We conclude that the vertical stiffeners should consist of angles or channels with leg thickness at least that of the sheet, in order to provide a simply supported panel edge condition.

5. Modified Wagner Theory

In this theory [2] it is assumed that

- a) the flanges have a certain amount of shear strength,
- b) the web can carry some shear before it buckles,
- c) the web carries additional shear in its buckled configuration in diagonal tension.

It is seen that these assumptions make equation (1) valid for this theory; a summary as applicable to duct design and analysis is

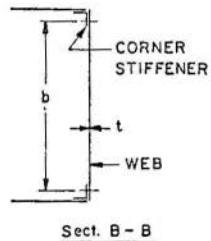
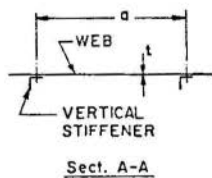
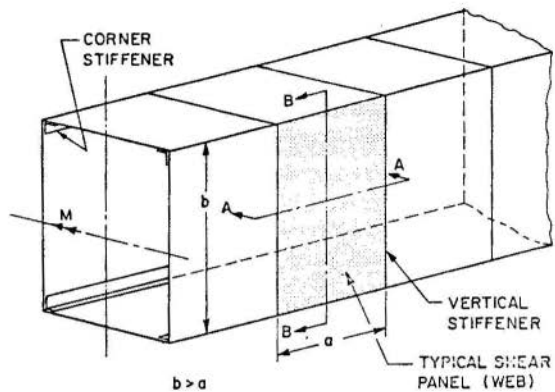
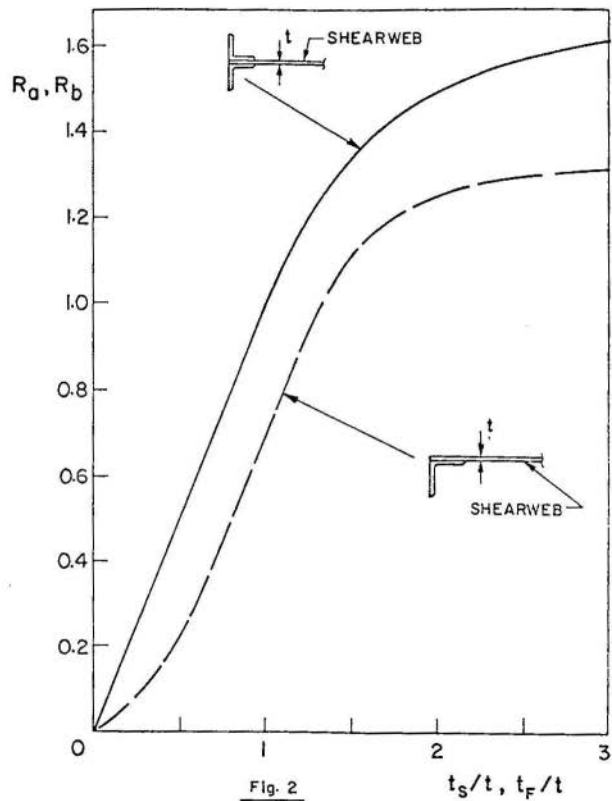


Fig. 1



given below. The shear load of the web, at the shear buckling stress, is given by equation (2), and τ_c is calculated from equation (16).

The diagonal tension angle ϕ is obtained from

$$\sin^2 \phi = \sqrt{d^2 + d} - d \quad (18)$$

where d depends on the stiffeners along the edges of the shear panel, i.e.

$$d = \frac{1 + \frac{bt}{A_U + A_L}}{\frac{at}{A_S} - \frac{bt}{A_U + A_L}} \quad (19)$$

To account for the flexibility of the flanges and the concentration of the diagonal tension stress near the vertical stiffeners, thus relieving the mid-section of the panel at the flanges, the correction factor R is introduced. R is obtained from Figure 3 by using the parameter

$$f = 1.25 a \sin \phi \sqrt[4]{\frac{t}{b(I_U + I_L)}} \quad (20)$$

Figure 4 shows the breakdown of the stress fields after the web has buckled. The average shear load at first yield in the web is given by

$$\frac{\tau_u}{\tau_y} = \frac{V_u}{\tau_y bt} = \frac{\tau_c}{\tau_y} + \left(\frac{\sigma_y}{\tau_y} - \frac{\tau_c}{\tau_y} \right) R \sin \phi \cos \phi \quad (21)$$

and the average shear load at the true ultimate stress in the web is

$$\frac{\tau_u^*}{\tau_y} = \frac{V_u^*}{\tau_y bt} = \frac{\tau_c}{\tau_y} + \left(\frac{\sigma_u^*}{\tau_y} - \frac{\tau_c}{\tau_y} \right) R \sin \phi \cos \phi \quad (22)$$

The equations of this section have the advantage of accounting for realistic boundary conditions and in addition are based on extensive experimental evidence. Therefore, for practical analyses of rectangular ducts, the equations are quite simple to apply.

To illustrate the influence of the boundary conditions on the first yield load of the web, equations (18) to (20) are examined. If

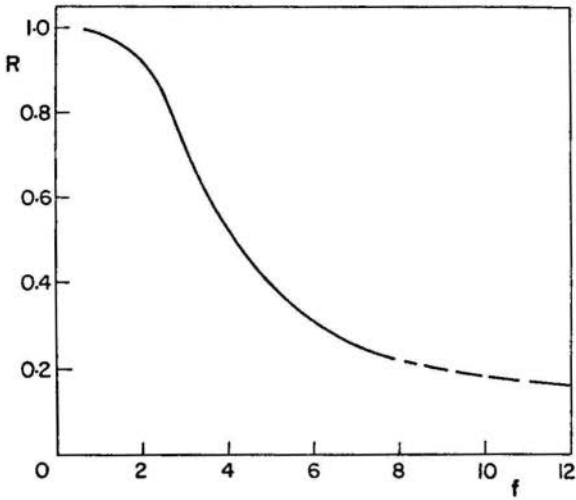


Fig. 3

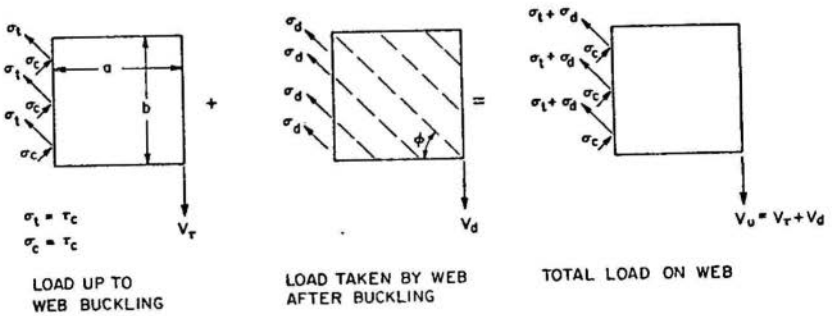


Fig. 4

MODIFIED WAGNER BEAM THEORY

a rectangular duct is designed with large corner stiffeners, assuming typical vertical stiffeners, then R will be large, say 0.7, and the diagonal tension angle ϕ will be approximately 30° . If only small or no corner stiffeners are provided, then R will be small, say 0.2, and ϕ will be about 45° . Using these values for R and ϕ , one obtains from equation (21) the yield load in the web;

for ducts with large corner stiffeners

$$\frac{V_u}{\tau_y b t} = \frac{\tau_c}{\tau_y} + \left(\frac{\sigma_y}{\tau_y} - \frac{\tau_c}{\tau_y} \right) 0.3 \quad (21a)$$

and for ducts with small or no corner stiffeners

$$\frac{V_u}{\tau_y b t} = \frac{\tau_c}{\tau_y} + \left(\frac{\sigma_y}{\tau_y} - \frac{\tau_c}{\tau_y} \right) 0.1 \quad (21b)$$

These two extreme examples illustrate the importance of the boundary conditions on the yield shear capacity of the web of a duct.

6. NACA Method

In this theory [3] equation (1) is assumed to be valid. It is assumed that the carrying capacity in the post-buckling range is taken in the following proportion:

The shear capacity is

$$V_\tau = (1 - k)V_u \quad (23)$$

and the diagonal tension capacity is

$$V_d = k V_u \quad (24)$$

The factor k is called the "diagonal tension factor". These equations describe the assumed incomplete diagonal tension field or semi-tension field. Note that when $k = 0$ the load is carried in pure shear and when $k = 1$ the load is carried in pure diagonal tension. The breakdown of the stress field is shown in Figure 5. The stresses in the semi-tension field are:

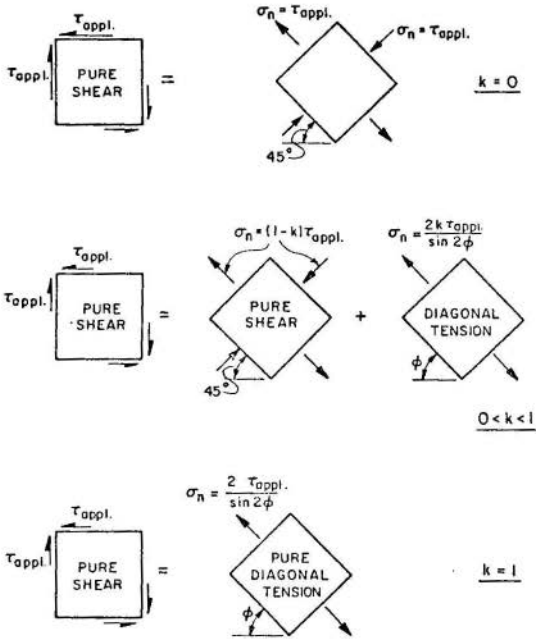


Fig.5 NACA METHOD

in pure shear

$$\tau = \pm (1 - k)\tau_{\text{appl.}} \quad (25)$$

and in diagonal tension

$$\sigma_n = \frac{2k \tau_{\text{appl.}}}{\sin 2\phi} \quad (26)$$

Assume that the pure shear carrying capacity is exhausted at the instant of buckling, i.e. equation (25) becomes

$$\tau_c = (1 - k)\tau_u \quad (27)$$

and the additional load is taken in diagonal tension with equation (26) becoming

$$\sigma_n = \frac{2k \tau_u}{\sin 2\phi} \quad (28)$$

The yield condition is equation (6) in the form

$$\sigma_n = \sigma_y - \sqrt{3} \tau_c \quad (29)$$

and neglects the compressive normal stress of equation (28) as shown in Figure 5. Combining equation (27) to (29) results in the yield load

$$\frac{\tau_u}{\tau_y} = 0.866 \left(1 - \frac{\tau_c}{\tau_y}\right) \sin 2\phi + \frac{\tau_c}{\tau_y} \quad (30)$$

If the diagonal tension angle ϕ is defined by equation (9), then Basler's equation (7) and the equation (30) derived above give the identical values for the yield load.

7. Influence of Transverse Pressure

In a typical duct transverse pressure, uniformly distributed over the shear panels, is an additional load consideration which has to be accounted for. The available tension field theories do not take transverse pressure into account.

For simplicity assume that the transverse pressure produces in-plane tensions in the shear panels. It is known [8] that these additional edge loads will result in higher shear buckling loads than given by equation (16). Upon examining, for example, equation (21), it can be verified that if τ_c increases, then τ_u will increase for all ϕ . It is therefore recommended that, in ducts, the transverse pressure be ignored when calculating the ultimate or yield shear capacity of shear panels. This may give a conservative design.

8. Comparison with Experiments

We have compared the experimental results of Huslid [7] to the yield and ultimate loads predicted by the various theories. Those experimental results were chosen because all parameters needed in the calculations were available. A summary of the results is given in Table 1.

TABLE 1: Shear loads V in KN

Girder [9]	Experiment [9] Yield Ultimate		THEORIES				
			Basler Eq.(7) Yield	Selberg Eq.(11) Yield	Huslid [9] Ultimate	Modified Eq.(21) Yield	Wagner Eq.(22) Ult.
H1	110±	132	162	116	132	109	128
H2	110±	132	155	120	139	111	134

Huslid [9] has also proposed an approximate theory for the ultimate load in a girder web. His method, however, uses some parameters which have to be obtained through experiments.

In the above comparison, it is assumed that the web carried the applied shear only and that the bending moment is carried by the flanges. This is consistent with the usual assumptions of engineering beam theory.

9. Summary and Conclusions

Several theories claiming to predict the "ultimate" web shear capacity in girder webs have been summarized. It has been pointed out that Basler's theory does not predict the ultimate load, but is based on a yield condition of first yield in the web and therefore predicts the yield load. Selberg's correction to Basler's equations also concern the yield load in the web. When compared to some recent experiments,

it can be concluded from the results of Table 1, that Basler's theory is of no use in practical duct analysis. Selberg's corrected method, however, is in good agreement with the experiments for the yield load.

In contrast to these methods, it has been demonstrated that the modified Wagner beam theory offers a rational approach to find the web shear capacity in girders and rectangular ducts. In Table 1 it is shown that this theory accurately predicts the yield load and the true ultimate load. Good agreement between this theory and experiments is expected because only this theory realistically accounts for the boundary conditions of the web. The method of Selberg appears to be applicable to yield load prediction and the method of Huslid seems to give acceptable results for ultimate loads.

Acknowledgements

Part of this work was performed in the Department of Civil Engineering of the University of Waterloo under National Research Council of Canada Grant A-1582.

References

- [1] Wagner, H.: Structures of Thin Sheet Metal, Their Design and Construction, NACA MEMO, 490.
- [2] Bruhn, E.F.: Analysis and Design of Flight Vehicle Structures, Tri-State Offset Co., Cincinnati, Ohio, 1965.
- [3] Kuhn, P. et. al: A Summary of Diagonal Tension, Parts 1 and 2, NACA TN 2661, 2662.
- [4] Basler, K: Strength of Plate Girders in Shear, ASCE, V. 87, ST7, Oct. 1961, pp. 151-180.
- [5] Höglund, T.: Design of Thin Plate I Girders in Shear and Bending with Special Reference to Web Buckling, Bull. No. 94, Div. of Building Statics and Struct. Engr., Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1973.
- [6] Selberg, A.: On the Shear Capacity of Girder Webs, Pubns. IABSE, Vol. 34, 1974.
- [7] Huslid, J. and Aasen, B.: The Strength of Plate Girder Webs, Norwegian Inst. of Technology, Univ. of Trondheim, Div. of Steel Structures, Oct. 1972.
- [8] Roark, J.R. and Young, W.C.: Formulas for Stress and Strain, McGraw Hill Co., N.Y., 5th Edition, 1975.

Symbols

- a - vertical stiffener spacing
 A_U, A_L - cross-sectional area of upper and lower flange, resp.
 A_S - cross-sectional area of vertical stiffener
 b - depth of shear web
 C - constant defined by equation (17)
 d - constant defined by equation (19)
 E - elastic modulus
 f - constant defined by equation (20)
 I_U, I_L - moment of inertia about own axis of upper and lower flange, resp.
 k - diagonal tension factor
 k_S - shear buckling coefficient
 R_a, R_b - restraint coefficients
 R - constant defined in Figure 3
 t - shear web thickness
 t_S, t_F - leg thickness of vertical stiffener and flange, resp.
 V_u - yield shear capacity
 V_τ - buckling shear capacity
 V_d - diagonal tension shear capacity
 V_u^* - ultimate shear capacity
 γ - ratio b/a
 μ - Poisson's ratio
 ϕ - diagonal tension angle
 σ_d - diagonal tension stress
 σ_y - yield stress in simple tension
 σ_n - normal stress
 σ_u^* - ultimate tensile stress

- τ_c - buckling shear stress
- τ_y - yield shear stress
- τ_u - applied shear stress at yield load
- τ_u^* - applied shear stress at ultimate load

SHERBOURNE, A.N. and HAYDL, H.M.

WEB SHEAR CAPACITY IN LARGE RECTANGULAR DUCTS

Summary

Existing methods of calculating the web shear capacity in plate girders are examined and the applicability to large rectangular duct analysis is investigated. It is suggested, that a modified Wagner theory combined with the method developed by the NACA offers a rational approach to the evaluation of the web shear capacity in plate girders and rectangular ducts. Results of this approach are compared to available experimental plate girder data and show good agreement.

CAPACIDADE DE CISALHAMENTO EM ALMAS

DE GRANDES DUTOS RETANGULARES

Sumário

Métodos existentes para o cálculo da capacidade de cisalhamento de vigas fabricadas com placas são examinados e é investigada sua aplicabilidade à análise de grandes dutos retangulares. É sugerido, que uma teoria de Wagner modificada e combinada com o método desenvolvido pela NACA oferece uma abordagem racional ao cálculo da capacidade de cisalhamento da alma em vigas fabricadas e dutos retangulares. Resultados desta abordagem são comparados a resultados experimentais disponíveis e mostram boa correlação.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 6

PP. 71 - 81



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

DESCRIPCION LAGRANGEANA DEL TEOREMA DE LOS TRABAJOS

VIRTUALES EN COORDENADAS CURVILINEAS

Edgardo TAROCO

Raúl A. FEIJOO

Augusto C. GALEÃO

Abimael F. LOULA

Laboratório de Cálculo, CBPF

Av. Wenceslau Braz, 71, zc-82

20000 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

1. Introducción

A partir de 1952 en que Richter analizó la teoría de deformaciones elásticas finitas, aplicando los conceptos del álgebra lineal moderna, muchos investigadores comenzaron a estudiar el problema de grandes deformaciones de sólidos dentro del contexto general de la mecánica del continuo, entre ellos podemos citar Truesdell, Noll y Rivlin.

En ella las tensiones y deformaciones son definidas físicamente como transformaciones lineales y los principios básicos como expresiones diferenciales e integrales de las mismas, independientemente del sistema de coordenadas.

Si bien esta formulación es general y más fácil de ser comprendida, al querer obtener resultados de problemas propuestos, es necesario referir las transformaciones lineales y sus operaciones a un sistema de coordenadas.

En este trabajo se estudia el problema de grandes deformaciones en sólidos referido a una configuración inicial, posteriormente al analizar la descripción referencial de la deformación, se introducen las coordenadas curvilineas y finalmente se determinan las componentes del tensor de deformación que resultan de utilidad en la obtención de soluciones a muchos problemas de aplicación práctica.

2. Notación

Las letras mayúsculas E , C , F , T y S designan tensores (transformaciones lineales de R^3 en R^3).

Las letras minúsculas a , b , e , p y s designan vectores (elementos de R^3).

$a \cdot b$ producto escalar de vectores.

$E \cdot C$ producto escalar de tensores.

F^T transpuesto de F .

$F^{-T} = (F^{-1})^T$

$\det F$ determinante de F .

I tensor identidad.

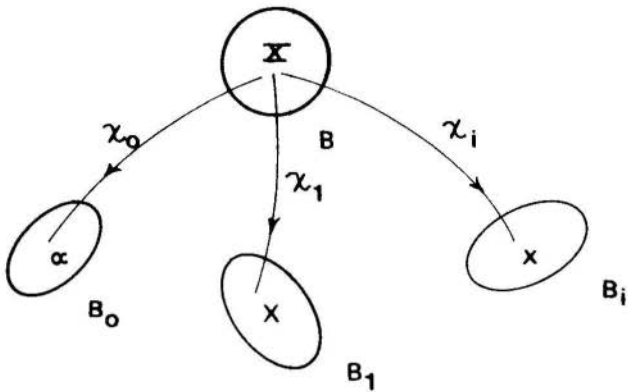
$a \otimes b$ producto diádico o tensorial de vectores.

Lin espacio de todos los tensores.

$\text{Sym} = \{E \in \text{Lin} : E = E^T\}$.

3. Deformación

Sean B un cuerpo material y B_1 , B_i , B_0 configuraciones inicial, final y de referencia de B respectivamente [1]. Dichas configuraciones, subregiones del espacio euclídeo tridimensional puntual E^3 , son imágenes de aplicaciones biyectivas que dan la correspondencia entre puntos materiales de B y las posiciones que ocupan en E^3 .



$$\underline{\alpha} = \chi_0(\underline{X}) \quad ; \quad \underline{X} = \chi_1(\underline{X}) \quad ; \quad \underline{x} = \chi_i(\underline{X})$$

$$\chi_0: B \rightarrow B_0 \quad \quad \chi_1: B \rightarrow B_1 \quad \quad \chi_i: B \rightarrow B_i$$

Fig. 1

La aplicación que permite pasar de la configuración B_1 a B_i se define como deformación del cuerpo material B de B_1 a B_i .

$$\underline{x} = p(\underline{X}) = \chi_i \chi_1^{-1}(\underline{X}) \quad \text{donde} \quad p: B_1 \rightarrow B_i$$

En lo que sigue admitiremos que las deformaciones son aplicaciones biyectivas, que tanto ellas como sus inversas son clase c^2 y que el determinante de sus gradientes es mayor que cero [2].

Supongamos conocidas las aplicaciones χ_0, χ_1 que nos permiten determinar las configuraciones B_0, B_1 y la deformación de B , de B_0 a B_1 .

La deformación de B de B_0 a B_1 , será

$$\underline{X} = \alpha(\underline{\alpha}) = \chi_1 \chi_0^{-1}(\underline{\alpha}) \quad \text{donde} \quad \alpha: B_0 \rightarrow B_1$$

Por tanto es posible definir la deformación de B , de B_0 a B_i , dada por:

$$\underline{x} = q(\underline{\alpha}) = X_i X_0^{-1}(\underline{\alpha}) \quad \text{donde} \quad q : B_0 \rightarrow B_i$$

en función de las deformaciones a y p .

$$\underline{x} = q(\underline{\alpha}) = p a(\underline{\alpha})$$

así como también los gradientes de las deformaciones y sus relaciones.

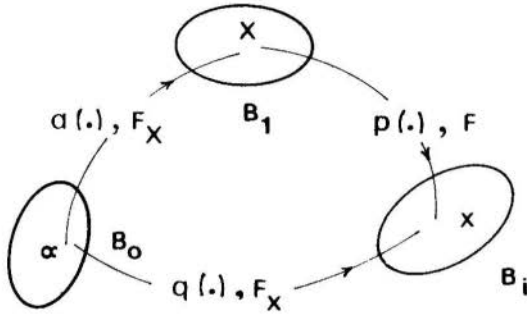


Fig. 2

De la Fig. 2 se sigue:

$$\begin{aligned} d\underline{X} &= \nabla a \, d\underline{\alpha} = F_X d\underline{\alpha} \\ d\underline{x} &= \nabla q \, d\underline{\alpha} = F_X d\underline{\alpha} \\ d\underline{x} &= \nabla p \, d\underline{X} = F \, d\underline{X} = F F_X \, d\underline{\alpha} \\ F_X &= F F_X^{-1} ; F = F_X F_X^{-1} \end{aligned}$$

Introduciendo el desplazamiento de B al pasar de B_1 a B_i en las deformaciones y sus gradientes, se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= p(\underline{X}) = \underline{X} + U(\underline{X}) \\ \underline{x} &= q(\underline{\alpha}) = X(\underline{\alpha}) + U[X(\underline{\alpha})] = X(\underline{\alpha}) + u(\underline{\alpha}) \\ F &= \nabla p = I + \nabla U \\ F_X &= \nabla q = F_X + \nabla u \\ F_X F_X^{-1} &= I + \nabla u F_X^{-1} \end{aligned}$$

donde:

$\underline{U}, \underline{u}$ descripciones lagrangeanas inicial y referencial

del desplazamiento de B_1 a B_1 . $U: \underline{X} \in B_1 \rightarrow U(\underline{X}) \in R^3$;
 $\underline{u} : \underline{\alpha} \in B_0 \rightarrow u(\underline{\alpha}) \in R^3$.

$F, F_X F_X^{-1}$ descripciones lagrangeanas inicial y referencial del gradiente de la deformación de B_1 a B_1 .
 $F: \underline{X} \in B_1 \rightarrow F(\underline{X}) \in \text{Lin}$; $F_X F_X^{-1} : \underline{\alpha} \in B_0 \rightarrow F_X F_X^{-1}(\underline{\alpha}) \in \text{Lin}$.

$\nabla U, \nabla u F_X^{-1}$ descripciones lagrangeanas inicial y referencial del gradiente del desplazamiento de B_1 a B_1 .
 $\nabla U : \underline{X} \in B_1 \rightarrow \nabla U(\underline{X}) \in \text{Lin}$; $\nabla u F_X^{-1} : \underline{\alpha} \in B_0 \rightarrow \nabla u F_X^{-1}(\underline{\alpha}) \in \text{Lin}$.

4. Trabajo Virtual

El trabajo de un sistema de fuerzas (b, s) en la configuración B_1 del cuerpo material B , correspondiente a un desplazamiento virtual δu , está dado por:

$$\delta W = \int_{B_1} \delta \underline{u} \cdot \underline{b} \rho \, dB_1 + \int_{\partial B_1} \delta \underline{u} \cdot \underline{s} \, d\partial B_1$$

donde:

∂B_1 contorno de B_1
 $\underline{b}: \underline{x} \in B_1 \rightarrow b(\underline{x}) \in R^3$ fuerza de masa de B_1
 $\underline{s}: \underline{x} \in \partial B_1 \rightarrow s(\underline{x}) \in R^3$ fuerza de superficie de B_1
 $\rho: \underline{x} \in B_1 \rightarrow \rho(\underline{x}) \in R$ densidad de B_1
 $\delta \underline{u}: \underline{x} \in B_1 \rightarrow \delta u(\underline{x}) \in R^3$ desplazamiento virtual

Admitiendo el principio de conservación de masa y que las leyes de Cauchy son satisfechas, se demuestra [3] que el trabajo virtual δW en la configuración B_1 referido a la configuración B_1 está dado por:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{B_1} \bar{S} \cdot \delta C \, dB_1$$

donde:

$\bar{S} = (\det F) F^{-1} T F^{-T}$ tensor de Piola-Kirchhoff de segunda especie. $\bar{S}: \underline{X} \in B_1 \rightarrow \bar{S}(\underline{X}) \in \text{Sym}$
 T tensor de tensiones de Cauchy. $T: \underline{x} \in B_1 \rightarrow T(\underline{x}) \in \text{Sym}$
 $C = F^T F$ tensor derecho de Cauchy-Green. $C: \underline{X} \in B_1 \rightarrow C(\underline{X}) \in \text{Sym}$
 $\delta C = \delta F^T F + F^T \delta F$

Refiriendo el trabajo virtual δW a la configuración

B_0 se obtiene una expresión similar a la anterior:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{B_0} \bar{S}_0 \cdot \delta C_0 \, dB_0$$

donde:

$\bar{S}_0 = (\det F_X) F_X^{-1} T F_X^{-T}$ tensor de Piola-Kirchhoff de segunda especie referido a B_0 . $\bar{S}_0: \underline{\alpha} \in B_0 \rightarrow \bar{S}_0(\underline{\alpha}) \in \text{Sym}$

$C_0 = F_X^T F_X$ tensor derecha de Cauchy-Green para la deformación de B_0 a B_1 . $C_0: \underline{\alpha} \in B_0 \rightarrow C_0(\underline{\alpha}) \in \text{Sym}$.

Nótese que de la integral en B_0 podemos pasar a la integral en B_1 y reciprocamente, para ello recordemos que $F_X = FF_X$, por tanto:

$$\bar{S}_0 = (\det F)(\det F_X) F_X^{-1} F^{-1} T F^{-T} F_X^{-T} = (\det F_X) F_X^{-1} \bar{S} F_X^{-T}$$

Introduciendo este resultado en la segunda integral y aplicando la definición de tensor transpuesto:

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \int_{B_0} \bar{S}_0 \cdot \delta C_0 \, dB_0 = \frac{1}{2} \int_{B_0} (\det F_X) F_X^{-1} \bar{S} F_X^{-T} \cdot \delta (F_X^T F_X) \, dB_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_0} \bar{S} \cdot F_X^{-T} \delta (F_X^T F_X) F_X^{-1} (\det F_X) \, dB_0 = \frac{1}{2} \int_{B_1} \bar{S} \cdot \delta C \, dB_1 \end{aligned}$$

\bar{S} estará dado por la ecuación constitutiva del material y C dependerá del gradiente del desplazamiento de B de B_1 a B_1 . Para obtener el escalar $\text{tr}(\bar{S}^T \delta C) = \bar{S} \cdot \delta C$ habrá que determinar las componentes de ambos tensores respecto a una terna escogida previamente.

5. Coordenadas Curvilíneas

Sea $\{e_i\}$ $i \leq 3$ una base ortonormal y refiramos los puntos $\underline{\alpha} \in B_0$ a dicha base:

$$\underline{\alpha} = \alpha^i e_i$$

A los tres planos ortogonales (Fig. 3) que pasan por $\underline{\alpha}$ en B_0 le corresponden tres superficies que pasan por \underline{X} en

B_1 cuyas intersecciones forman un triedro curvilíneo cuyos vectores tangentes están dados por:

$$\underline{a}_i = \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha^i}$$

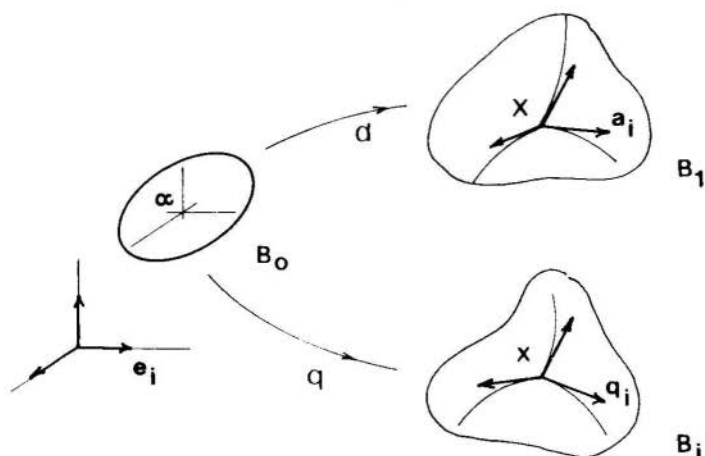


Fig. 3

A la base intrínseca \underline{a}_i en cada punto X , conocida como base covariante, se le asocia la base contravariante \underline{a}^i definida por las siguientes relaciones:

$$\underline{a}^i \cdot \underline{a}_j = \delta^i_j \quad (\delta^i_j \text{ delta de Kronecker})$$

$$\underline{a}_i = a_{ij} \underline{a}^j ; \quad \underline{a}^i = a^{ij} \underline{a}_j ; \quad a^{ij} = \underline{a}^i \cdot \underline{a}^j ; \quad a_{ij} = \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j$$

Se admitió que los X son puntos regulares o sea los \underline{a}_i son linealmente independientes, por tanto la matriz a_{ij} es invertible:

$$a^{im} a_{mj} = \delta^i_j$$

La descripción lagrangeana referencial del desplazamiento de B , de B_1 a B_i referida a la terna intrínseca de B_1 , está dada por:

$$\underline{u} = u^m \underline{a}_m$$

donde:

$u^m : \underline{\alpha} \in B_0 \rightarrow u^m(\underline{\alpha}) \in R$ componentes contravariantes de u .

Efectuando el gradiente de ambos miembros de la igualdad anterior se tiene:

$$\nabla \underline{u} = \underline{a}_{-i} \otimes \nabla u^i + u^m \nabla \underline{a}_{-m}$$

teniendo en cuenta que:

$$\nabla u^i = u^i_{,j} \underline{e}_j \quad ; \quad \nabla \underline{a}_{-m} = (\underline{a}^i \cdot \underline{a}_{-m,j}) (\underline{a}_{-i} \otimes \underline{e}_j)$$

donde:

$$u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial \alpha^j} \quad ; \quad \underline{a}_{-m,j} = \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^m \partial \alpha^j}$$

el gradiente de $u(\underline{\alpha})$ se reduce a:

$$\nabla \underline{u} = [u^i_{,j} + u^m (\underline{a}^i \cdot \underline{a}_{-m,j})] (\underline{a}_{-i} \otimes \underline{e}_j)$$

donde:

$(\underline{a}_{-i} \otimes \underline{e}_j)$ base a la que es referido el tensor $\nabla \underline{u}$

En forma similar para $\underline{u} = u_m \underline{a}^m$ (u^m componentes covariantes de \underline{u}) se obtiene:

$$\nabla \underline{u} = [u_{i,j} + u_m (\underline{a}_i \cdot \underline{a}^m_{,j})] (\underline{a}^i \otimes \underline{e}_j)$$

Recordando los símbolos de Cristoffel [4], dados por

$$\Gamma_{mji} = a_{m,j} \cdot a_i = a_{j,m} \cdot a_i = \Gamma_{jmi}$$

$$\Gamma_{mj}^i = a_{m,j} \cdot a^i = -a^i_{,j} \cdot a_m = -\Gamma_{jm}^i$$

$$\Gamma_{mji} = \frac{1}{2} (a_{j i, m} + a_{i m, j} - a_{m j, i}) \quad ; \quad \Gamma_{mj}^i = a^{ki} \Gamma_{mjk}$$

las expresiones del gradiente de u se reducen a:

$$\nabla \underline{u} = (u^i_{,j} + u^m \Gamma_{mj}^i) (\underline{a}_{-i} \otimes \underline{e}_j)$$

$$\nabla \underline{u} = (u_{i,j} - u_m \Gamma_{ij}^m) (\underline{a}^i \otimes \underline{e}_j)$$

las componentes del tensor $\nabla \underline{u}$ en las bases $(\underline{a}_i \otimes \underline{e}_j)$ y $(\underline{a}^i \otimes \underline{e}_j)$ coinciden con las derivadas covariantes de las componentes u^i y u_i del vector \underline{u} [4].

$$(\nabla \underline{u})^i_j = u^i|_j = u^i_{,j} + u^m \Gamma^i_{mj}$$

$$(\nabla \underline{u})_{ij} = u_i|_j = u_{i,j} - u_m \Gamma^m_{ij}$$

6. Tensor de Deformación

Las componentes de δC y δC_0 pueden ser determinadas a partir de δE y δE_0 .

Definidos por:

$$d\bar{x}^2 - dX^2 = E \, d\bar{X} \cdot d\bar{X} \quad d\bar{x}^2 - dX^2 = E_0 \, d\bar{\alpha} \cdot d\bar{\alpha}$$

donde:

$$E : \bar{X} \in B_1 \rightarrow E(\bar{X}) \in \text{Sym} ; E_0 : \bar{\alpha} \in B_0 \rightarrow E_0(\bar{\alpha}) \in \text{Sym}$$

por tanto:

$$E = \frac{1}{2}(C-I) = \frac{1}{2}(F^T F - I) ; E_0 = \frac{1}{2}(C_0 - F_X^T F_X) = \frac{1}{2}(F_X^T F_X - F_X^T F_X)$$

La descripción referencial de E ($E_\alpha : \alpha \in B_0 \rightarrow E_\alpha(\alpha) \in \text{Sym}$) estará dada por:

$$E_\alpha = \frac{1}{2}(F_X^{-T} F_X^T F_X^{-1} - I)$$

Introduciendo el desplazamiento \underline{u} se obtienen las siguientes expresiones para los tensores de deformación E_0 y E_α

$$E_0 = \frac{1}{2}(F_X^T \nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T F_X + \nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u})$$

$$E_\alpha = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} F_X^{-1} + F_X^{-T} \nabla \underline{u}^T + F_X^{-T} \nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u} F_X^{-1})$$

Refiriendo E_0 a la base $(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$ y E_α a la base $(\underline{a}_i \otimes \underline{a}_j)$ se tiene:

$$E_0 = \frac{1}{2} (u_i | j + u_j | i + u^m | i u_m | j) (e_i \otimes e_j)$$

$$E_\alpha = \frac{1}{2} (u_i | j + u_j | i + u^m | i u_m | j) (a^i \otimes a^j).$$

Agradecimiento. Este trabajo fue financiado en parte por el CNPq (T.C. 2222.0712/76).

Bibliografía

- [1] Truesdell, C., "The Elements of Continuum Mechanics", Springer-Verlag, New York, (1966).
- [2] Gurtin, M.E., On the Nonlinear Theory of Elasticity, International Symposium of Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [3] Taroco, E., Feijóo, R.A., y Martins, L.C., Forma Incremental del Teorema de los Trabajos Virtuales Aplicado a Grandes Deformaciones, Primer Simposio Sobre Métodos Numéricos en la Mecánica del Continuo, ASAMA, Buenos Aires, (1977).
- [4] Green, A.E., y Zerna, W., "Theoretical Elasticity", London, Oxford University Press, (1954).

TAROCO, E., FLIJOO, R., GALEÃO, A., y LOULA, A.

DESCRIPCION LAGRANGEANA DEL TEOREMA DE LOS TRABAJOS

VIRTUALES EN COORDENADAS CURVILINEAS

Resumen

Se estudia en este trabajo, el problema de grandes deformaciones en sólidos y se presenta la descripción lagrangeana del Teorema de los Trabajos Virtuales. Al analizar la descripción referencial de la deformación se introducen coordenadas curvilíneas. Finalmente se determinan las componentes del tensor de deformación.

LAGRANGIAN DESCRIPTION OF THE VIRTUAL WORK THEOREM

IN CURVILINEAR COORDINATES

Summary

This work deals with the problem of large deformations in solids and presents a lagrangian description of the Theorem of the Virtual Works. When analysing the reference description of the deformation curvilinear coordinates are introduced. At last, the components of the strain tensor are determined.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 7
PP. 83 - 94



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

SOLUCIONES NUMERICAS DE UN PROBLEMA DINAMICO

VISCOELASTICO NO LINEAL

Raúl A. FEIJÓO

Marco A. RAUPP

Carlos A. de MOURA

Laboratório de Cálculo, CBPF

Av. Wenceslau Braz, 71, zc-82

20000 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar algunos resultados obtenidos del análisis de un modelo variacional que simula la penetración, durante la hinca, de un pilote de fundación.

Parte de estos resultados, presentados en Sección 2, se refieren al aspecto teórico de la formulación variacional del problema. En [1,2] estos resultados son analizados

desde un punto de vista matemático.

La obtención de soluciones aproximadas a través del Método de Elementos Finitos (M.E.F.), es analizada en la Sección 3. Allí se discute también, el algoritmo predictor-corrector propuesto para la integración en el tiempo. Resultados relativos al análisis numérico de este algoritmo, que incluye estimativas a priori del error, fueron analizados en [3,4].

Por último en la Sección 4, se presentan algunas experiencias numéricas que comprueban la validez de la fórmula propuesta.

2. Formulación variacional del problema

Considérese el pilote en las configuraciones C_0 y $C_t \in E^1$, E^1 espacio euclidiano unidimensional (Fig. 1). C_0 será llamada "configuración inicial". La configuración C_t queda definida por:

$$x = X + u(X, t)$$

donde:

x es la posición que un punto $X \in C_0$ ocupa en el instante t .

$u(X, t)$ es el campo de desplazamientos.

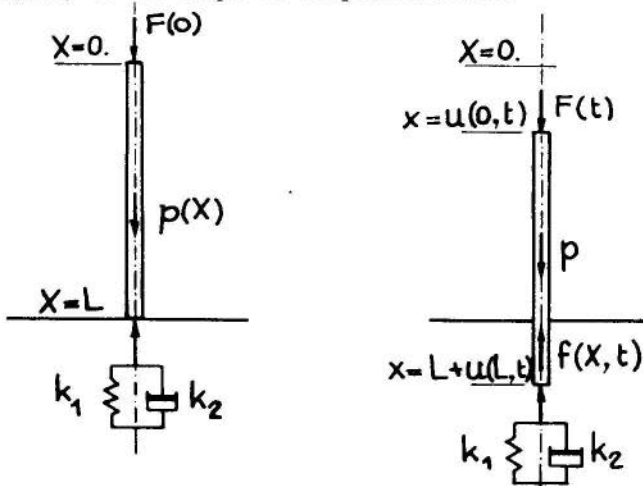


FIGURA 1

En lo que sigue, se consideran actuando sobre el pilote las siguientes fuerzas

- $F(t)$ fuerza que el martinete ejerce en $X=0$ en el instante t .
- $p(X)$ peso propio del pilote por unidad de longitud.
- $-k_1 u(L,t)$ resistencia elástica de punta del suelo.
- $-k_2 \dot{u}(L,t)$ resistencia viscosa de punta del suelo.
- $f(X,t)$ fuerza de fricción que actúa en el punto X en el instante t .

Debe observarse que la fuerza $f(X,t)$ existe si el punto X penetró en la masa de suelo, es decir si $x = X+u(X,t) > L$. Por otra parte, como el pilote es unidimensional, f es una fuerza por unidad de longitud en lugar de ser una fuerza de superficie. Su valor estará dado por la formulación dinámica de la ley de Coulomb para fricción [6], que establece que para todo t y en cualquier punto de contacto se verifica:

$$\text{si } |f| < F |F_N|, \text{ luego } \dot{u}(X,t) = 0 \quad (1.a)$$

$$|f| = F |F_N|, \text{ luego existe } \lambda \geq 0 \text{ t.q. } \dot{u} = -\lambda f \quad (1.b)$$

donde F es el coeficiente de fricción suelo-pilote y F_N es la fuerza normal por unidad de longitud ejercida por el suelo sobre el pilote y donde $\dot{u} = \dot{u}(X,t)$ es el campo de velocidades.

A los efectos de este trabajo supondremos una expresión simple para F_N :

$$|F_N| = R\gamma\ell(X+u-L) \quad \text{para todo } X \text{ t.q. } X+u-L \geq 0$$

donde R es el coeficiente de Rankine, γ es el peso específico del suelo, que supondremos homogéneo, ℓ es el perímetro de la sección transversal de la barra en X .

La ley de Coulomb (1) implica [1,2] que para todo t y todo punto de contacto se verifica:

$$f(v-\dot{u}) + F |F_N| (|v| - |\dot{u}|) \geq 0 \quad (2)$$

donde v es el campo virtual de velocidades [7].

Se adopta una ley constitutiva para el material del pilote de tipo viscoelástica (de memoria corta!), luego:

$$\sigma = a u_{\dot{x}} + b \dot{u}_x$$

donde a y b supondremos constantes por simplicidad y donde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Considérese ahora la representación lagrangeana inicial (es decir relativa a C_0) del Principio de las Potencias Virtuales [7]. Haciendo uso de este principio, de (2) e introduciendo las notaciones:

$$(w_1, w_2) = \int_0^L w_1(x) w_2(x) dx \quad (3.a)$$

$$J(u, v) = (\gamma R F L H(X+u-L)(X+u-L), |v|) \quad (3.b)$$

$H(\cdot)$ función de Heaviside

se llega a la siguiente formulación variacional [1,2]:

Determinar $u=u(X,t)$ tal que

$$u(X,0) = 0 \quad (4.a)$$

$$\dot{u}(X,0) = 0 \quad (4.b)$$

$$\begin{aligned} &(\rho A \ddot{u}, v - \dot{u}) + a(Au_x, v_x - \dot{u}_x) + b(A\dot{u}_x, v_x - \dot{u}_x) + \\ &+ [(k_1 u + k_2 \dot{u})(v - \dot{u})]_{X=L} + J(u, v) - J(u, \dot{u}) \geq \\ &\geq (p, v - \dot{u}) + F(t)(v - \dot{u})_{X=0} \quad \text{para } \forall v \in H^1(0, L) \\ &\quad \text{y } t \in [0, T] \end{aligned} \quad (4.c)$$

donde $H^1(0, L)$ es el espacio de todas las funciones con derivadas primeras cuadrado integrables en $[0, L]$ y ρ es la densidad específica del material del pilote.

Teoremas de existencia, unicidad y estabilidad de la solución del problema (4) han sido demostrados en [1,2,5]. En [1,2] se muestra también que, dado $\epsilon > 0$ y funciones $\psi_\epsilon(\lambda)$, $\phi_\epsilon(\lambda)$ convexas suficientemente suaves:

$$\phi_\epsilon(\lambda) = |\lambda| \quad , \quad \psi_\epsilon(\lambda) = F\gamma R L H(\lambda) \lambda \quad , \quad \text{si } |\lambda| \geq \epsilon$$

y definiendo una aproximación $J_\epsilon(u,v)$ de $J(u,v)$ por:

$$J_\epsilon(u,v) = \int_0^L \psi_\epsilon(X+u-L) \phi_\epsilon(v) dX$$

el problema (4) es equivalente a:

Determinar $u_\epsilon = u_\epsilon(X,t)$ tal que:

$$\begin{aligned} & (\rho A \ddot{u}_\epsilon, w) + a(Au_{\epsilon X}, w_X) + b(A\dot{u}_{\epsilon X}, w_X) + \\ & + [(k_1 u_\epsilon + k_2 \dot{u}_\epsilon)w]_{X=L} + (\psi_\epsilon(X+u-L) \phi'_\epsilon(\dot{u}_\epsilon), w) = \\ & = (p, w) + F(t)w|_{X=0}, \text{ para } \forall w \in H^1[0, L] \\ & \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (5)$$

donde $u_\epsilon = u_\epsilon(X,t)$ satisface las condiciones iniciales (4.a)-(4.b), verificándose además:

$$u_\epsilon \rightarrow u \quad \text{para } \epsilon \rightarrow 0$$

Por último es interesante resaltar que el problema (4) puede resolverse directamente a partir de técnicas de optimización. Para ello, véase [5,9].

3. Aproximaciones con elementos finitos. Discretización en el tiempo.

Para obtener soluciones aproximadas del problema (5) recurrimos al M.E.F. Para ello, se particiona el intervalo $[0, L]$ en E elementos. A nivel de cada uno de ellos se adopta la siguiente representación local para u_ϵ :

$$u_\epsilon^e = \sum_i \phi_i(X) u_\epsilon^{ei}(t) \quad (6)$$

donde

$u_\epsilon^{ei}(t)$ es el desplazamiento del nudo i del elemento e en el instante t .

$\phi_i(X)$ función de interpolación local correspondiente al nudo i .

Substituyendo (6) en (5), se tiene:

$$M_e \ddot{\underline{u}}_e + C_e \dot{\underline{u}}_e + K_e \underline{u}_e = \underline{f} - \underline{f}_{\text{fric}}(\underline{u}_e, \dot{\underline{u}}_e)$$

para $e = 1, 2, \dots, E$ (7)
y $t \in [0, T]$

donde:

$$(M_e)_{ij} = (\rho A \phi_i, \phi_j), \quad (K_e)_{ij} = a(A \phi_{ix}, \phi_{jx}) + k_1 \delta_{ij} \delta_{jL}$$

$$(C_e)_{ij} = b(A \phi_{ix}, \phi_{jx}) + k_2 \delta_{ij} \delta_{jL}$$

$$(\underline{f})_i = (p, \phi_i) + F(t) \delta_{i0}$$

$$[\underline{f}_{\text{fric}}(\underline{u}_e, \dot{\underline{u}}_e)]_i = \int_0^L \psi_e(X + u_e - L) \phi'(\dot{\underline{u}}_e) \phi_i dX$$

δ_{ij} delta de Kronecker

$$\delta_{j0}, \delta_{jL} \begin{cases} = 1 & \text{si el nudo } j \text{ coincide con } X=0 \text{ ó } X=L \text{ respectivamente.} \\ = 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

\underline{u}_e vector de desplazamientos nodales del elemento e.

Designando con $\underline{U}_e(t)$ al vector de desplazamientos de todos los nudos puestos en evidencia cuando la partición de $[0, L]$, el ensamble adecuado de las ecuaciones (7) conduce al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales:

$$M \ddot{\underline{U}}_e(t) + C \dot{\underline{U}}_e(t) + K \underline{U}_e(t) = \underline{F}(t) - \underline{F}_{\text{fric}}(\underline{U}_e, \dot{\underline{U}}_e)$$

para $t \in [0, T]$ (8)

donde la no linealidad resulta de $\underline{F}_{\text{fric}}$, y donde $\underline{U}_e(t)$ satisface las condiciones iniciales:

$$\underline{U}_e(0) = 0, \quad \dot{\underline{U}}_e(0) = 0 \quad (9)$$

Para la integración en el tiempo se propone el siguiente algoritmo predictor-corrector. Si se adopta la nota

ción $\underline{U}_{-\varepsilon n} = \underline{U}_{-\varepsilon}(t_n = n\Delta t)$, luego:

Predictor

$$M \frac{\hat{\underline{U}}_{-\varepsilon n+1} - 2\underline{U}_{-\varepsilon n} + \underline{U}_{-\varepsilon n-1}}{\Delta t^2} + C \frac{\hat{\underline{U}}_{-\varepsilon n+1} - \underline{U}_{-\varepsilon n-1}}{2\Delta t} + K [\theta \hat{\underline{U}}_{-\varepsilon n+1} + (1-2\theta)\underline{U}_{-\varepsilon n} + \theta \underline{U}_{-\varepsilon n-1}] = \underline{F}(t_n) - \underline{F}_{\text{fric}}(\underline{U}_{-\varepsilon n}, \frac{\underline{U}_{-\varepsilon n} - \underline{U}_{-\varepsilon n-1}}{\Delta t}) \quad (10.a)$$

Corrector

$$M \frac{\underline{U}_{-\varepsilon n+1} - 2\underline{U}_{-\varepsilon n} + \underline{U}_{-\varepsilon n-1}}{\Delta t^2} + C \frac{\underline{U}_{-\varepsilon n+1} - \underline{U}_{-\varepsilon n-1}}{2\Delta t} + K [\theta \underline{U}_{-\varepsilon n+1} + (1-2\theta)\underline{U}_{-\varepsilon n} + \theta \underline{U}_{-\varepsilon n-1}] = \underline{F}(t_n) - \underline{F}_{\text{fric}}(\underline{U}_{-\varepsilon n}, \frac{\hat{\underline{U}}_{-\varepsilon n+1} - \underline{U}_{-\varepsilon n-1}}{2\Delta t}) \quad (10.b)$$

donde (10) se entiende válido para $\theta \in [0, 1/2]$, y $n > 1$.

La solución para $n=1$ es obtenida a partir de la información suministrada por (8)-(9), que permite escribir $\underline{U}_{-\varepsilon 1}$ en función de $\underline{\ddot{U}}_{-\varepsilon 0}$

$$\underline{U}_{-\varepsilon 1} = \frac{1}{2} \Delta t^2 \underline{\ddot{U}}_{-\varepsilon 0} = \frac{1}{2} \Delta t^2 [M^{-1} \underline{F}(0)]$$

Por último puede demostrarse [3,4], que este algoritmo predictor-corrector es convergente e incondicionalmente estable para todo $\theta \in [1/4, 1/2]$.

4. Aplicaciones numéricas

En las aplicaciones numéricas que se presentan en esta sección, se utiliza un elemento cuadrático de 3 nudos. Las funciones de interpolación son:

$$\phi_1(X(\xi)) = \frac{1}{2} \xi(\xi-1), \quad \phi_2(\cdot) = (1-\xi^2), \quad \phi_3(\cdot) = \frac{1}{2} \xi(\xi+1)$$

donde

$$X = \frac{(X_b - X_a)\xi + X_b + X_a}{2}, \quad X \in [X_a, X_b], \quad \xi \in [-1, 1]$$

X_a, X_b coordenadas de los nudos extremos del elemento.

Por otra parte, se adopta para $\phi'_\epsilon(\lambda)$ la siguiente función:

$$\phi'_\epsilon(\lambda) = \begin{cases} \text{signo}(\lambda) & \text{para } |\lambda| \geq \epsilon, \lambda = \dot{u}_\epsilon \\ \frac{2\lambda}{\epsilon} - \left(\frac{\lambda}{\epsilon}\right)^2 \text{signo}(\lambda), & \text{para } |\lambda| < \epsilon, \lambda = \dot{u}_\epsilon \end{cases}$$

Los ejemplos siguientes se realizaron con una partición de 5 elementos.

Ejemplo 1 - Corresponde al problema de la Fig. 2. Los resultados obtenidos con $\Delta t = 0.1$ son presentados en las Figs. 2 y 3. Para material elástico la solución es comparada con la propuesta en [8]

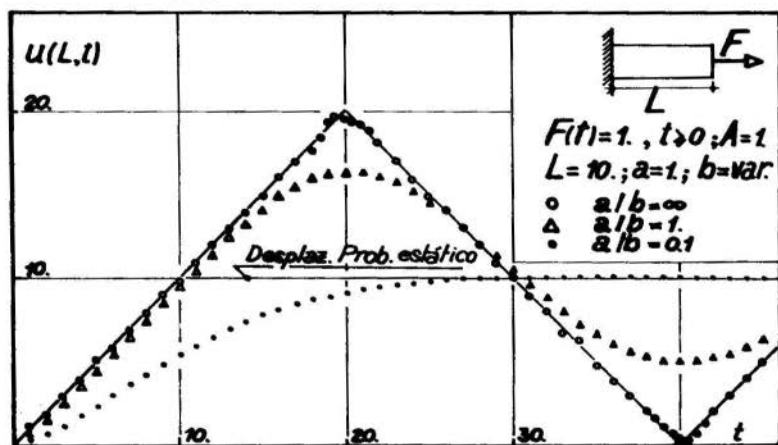


FIGURA 2

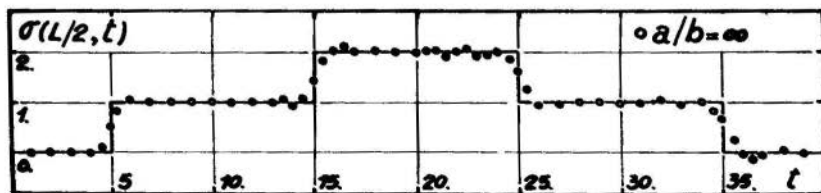


FIGURA 3

Ejemplo 2 - Corresponde al problema de un pilote con las siguientes características (Fig. 1)

$$L = 10 ; a = 100 ; b = 0.1 ; k_1 = 0.1 ; k_2 = 1 ; \\ A = K = \gamma = 1 ; F = 0.5 ; \ell = 0.1 ; \rho = 0.001$$

$$F(t) = \begin{cases} 2 & \text{para } t \geq 10 \\ t/5 & \text{para } 0 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Los desplazamientos para la sección $X = L$, obtenidos con $\Delta t = 0.05$, son representados en la Fig. 4. En la misma se representa la solución correspondiente a teoría cuasi-estática.

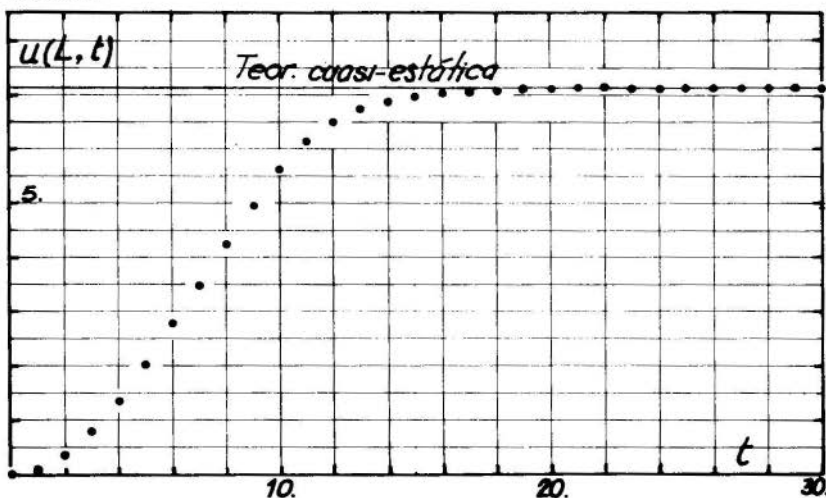


FIGURA 4

Ejemplo 3 - Corresponde al problema de un pilote con características:

$$L = 10 , a = 100 , b = 1 ; k_1 = 0.1 ; k_2 = 1 ; \\ A = K = \gamma = 1 ; F = 0.5 ; \ell = 0.1 ; \rho = 0.01$$

En la Fig. 5 presentamos los desplazamientos corres

pendientes a las secciones $X = 0$ y $X = L$ obtenidos con $\Delta t = 0.005$. En la misma figura indicamos el valor de $F(t)$.

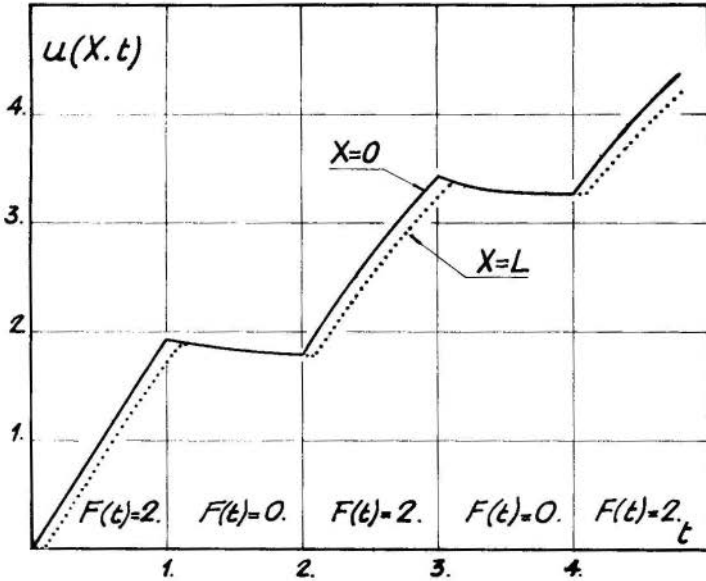


FIGURA 5

Agradecimientos. Este trabajo fue en parte financiado por el CNPq (TC n° 2222.0712/76).

Bibliografía

- [1] Raupp, M.A., Un problema não-linear em engenharia de fundações. Relatório A0011/77, Laboratório de Cálculo; CBPF, Public. en las Actas do V Seminário Bras. de Análise, (SBM), Campinas, 1977.
- [2] Raupp, M.A., Feijóo, R.A., y Moura, C.A. de, A nonlinear problem in dynamic visco-elasticity with friction. Relatório A0023/77, Lab. Cálculo, CBPF, a ser publicado en Boletim Soc.Bras.Mat.

- [3] Moura, C.A. de, Discretização tipo Galerkin e "predictor-corrector" para uma equação de evolução de um sistema visco-elástico com atrito. XI Colóquio Bras.Mat., Poços de Caldas, 1977.
- [4] Raupp, M.A., Feijóo, R.A., y Moura, C.A. de, Numerical results on a nonlinear problem in dynamic visco-elasticity with friction. A ser publicado en Relatórios Série A, Lab.Cal., CBPF.
- [5] Raupp, M.A., Feijóo, R.A., y Moura, C.A. de, An optimization algorithm for the pile driver problem. A ser publicado en Relatórios Série A, Lab. Cal., CBPF.
- [6] Duvaut, G., y Lions, J.L., "Les inéquations en mécanique et en physique". Dunod, Paris, 1972.
- [7] Germain, P., "Cours de mécanique des milieux continus". Masson et Cie., 1973.
- [8] Meirovitch, L., "Analytical methods in vibrations". Mac Millan, 1969.
- [9] Glowinski, R., Lions, J.L., y Trémolières, R., "Analyse numérique des inéquations variationnelles". Dunod, 1976.

FEIJOO, R.A., RAUPP, M.A., y MOURA, C.A. de

SOLUCIONES NUMERICAS DE UM PROBLEMA DINAMICO

VISCOELASTICO NO LINEAL

Resumen

Er este trabajo se presenta el análisis del movimiento de un pilote durante su hincada. Debido a los efectos de la fricción suelo-pilote se obtiene una inecuación variacional. El método de Galerkin conjuntamente con el Método de Elementos Finitos es utilizado para la discretización espacial. Se propone también un algoritmo predictor-corrector para la integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por último algunas soluciones numéricas son presentadas.

NUMERICAL SOLUTIONS FOR A NONLINEAR

DYNAMIC PROBLEM IN VISCO-ELASTICITY

Summary

In this paper, the dynamics of a pile driven into the ground under the action of a pile hammer is studied. Due to the effects of friction a variational inequality is obtained. For the solution of this problem a predictor-corrector Galerkin Finite Element approximation is formulated. Finally some numerical results are presented.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 8
PP. 95 - 104



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

SOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS VISCOELASTICOS

Andrés L. HALBRITTER, Professor Adjunto
Programa de Engenharia Civil
COPPE/UFRJ
Rio de Janeiro, Brasil

1. Introducción

El análisis estructural de problemas viscoelásticos simples ya fue largamente tratado [1], [2], [3], [4].

Fueron propuestos varios métodos [1] para resolver este tipo de problemas, siendo el más fecundo el de Alfrey [5]. Este método consiste en reducir el problema viscoelástico a uno de tipo elástico mediante el uso de la transformada de Laplace. Finalmente, se obtiene la solución, hallandose la transformada inversa de los resultados encontrados en el campo transformado.

Adey y Brebbia [6] adaptaron este método para aplicar-

lo a la formulación del método de los elementos finitos. Debido a las características del método de los elementos finitos, la transformada inversa se debe obtener en forma numérica. Algunos de los métodos desarrollados con esa finalidad se pueden consultar en las referencias [7], [8], [9].

En el presente trabajo, se presentará una formulación del modelo mixto de elementos finitos para estado plano de tensiones, teniendo en cuenta el comportamiento viscoelástico [10].

El esquema usado para invertir la transformada de Laplace es el de la referencia [11], que fue desarrollado para poder considerar funciones de fluencia del tipo

$$J = A - \sum_{i=1}^N B_i e^{-C_i t}$$

Por último, se resuelven algunos ejemplos para ilustrar la aplicación de la formulación presentada.

2. Formulación de Elementos Finitos

Las ecuaciones que rigen un problema estructural son:

a) Ecuaciones de equilibrio

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (1)$$

b) Condiciones de contorno

$$\alpha_{nj} \sigma_{jk} = q_k^p \quad (2)$$

cuando se prescriben fuerzas en el contorno Ω_1 y

$$u_i = u_i^p \quad (3)$$

si los desplazamientos están prescritos en el contorno Ω_2 .

c) Ecuaciones de compatibilidad

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

d) Ecuaciones constitutivas

$$\epsilon_{jk} = \int_0^t J_{jki\ell}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{i\ell}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5)$$

o:

$$\sigma_{jk} = \int_0^t G_{jki\ell}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{i\ell}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (6)$$

Estas dos últimas integrales de Stieltjes son llamadas hereditarias porque para calcularlas para un determinado instante t , es necesario "recordar" toda la historia anterior de la estructura.

La nomenclatura utilizada fue la siguiente:

- σ_{ij} : tensor de tensiones
- ϵ_{ij} : tensor de deformaciones específicas
- b_i : fuerzas de volumen
- u_i : desplazamientos
- u_i^P : desplazamientos prescriptos
- α_{nj} : componentes del vector unitario normal externo al contorno
- q_k^P : fuerzas de superficie prescriptas
- $J_{jki\ell}$: operador que representa la fluencia
- $G_{jki\ell}$: operador que representa la relajación

Estos tensores son función del tiempo t , transcurrido desde el instante en que la estructura es solicitada con cargas o con desplazamientos prescriptos.

Si a las ecuaciones anteriores les aplicamos la transformación de Laplace y usamos el teorema de convolución, tendremos:

a) Ecuaciones de equilibrio

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \quad (7)$$

b) Condiciones de contorno

$$\alpha_{nj} \bar{\sigma}_{jk} = \bar{q}_k^p \quad (8)$$

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i^p \quad (9)$$

c) Ecuaciones de compatibilidad

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (10)$$

d) Ecuaciones constitutivas

$$\bar{\epsilon}_{jk} = \bar{J}_{jkil}^s \bar{\sigma}_{il} \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}_{jk} = \bar{G}_{jkil}^s \bar{\epsilon}_{il} \quad (12)$$

Estas ecuaciones son similares a las de la elasticidad lineal, por lo tanto, se podrán aplicar los métodos ya conocidos para obtener la solución "elástica" en el campo transformado.

Las barras sobre las funciones indican que se tratan de funciones en el campo transformado y que dependen de la variable s .

Si ahora aplicamos el método de Galerkin, tendremos:

$$\begin{aligned} \int_V [\delta \bar{u}_i (\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i) + \delta \bar{\sigma}_{jk} (\bar{J}_{jklm}^s \bar{\sigma}_{lm} - \bar{\epsilon}_{jk})] dV = \\ = \int_{\Omega} \delta \bar{u}_k (\alpha_{nj} \bar{\sigma}_{jk} - \bar{q}_k^p) d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

Usando una formulación mixta para elementos de estado plano de tensiones, tendremos las siguientes relaciones:

$$\bar{u} = \underline{\phi} \bar{u}^e \quad (14)$$

$$\bar{\sigma} = \underline{\psi} \bar{\sigma}^e \quad (15)$$

$$\bar{\epsilon} = \underline{B} \bar{u}^e \quad (16)$$

Trabajando con notación matricial, después de substituir en la (13) y operar, tendremos que:

$$\begin{bmatrix} -s\bar{N} & \bar{A}^T \\ \bar{A} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}^e \\ \bar{u}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ \bar{F}^e \end{Bmatrix} \quad (17)$$

donde

$$\bar{A} = \int_V \bar{B}^T \bar{\psi} dV \quad (18)$$

$$\bar{N} = \int_V \bar{\psi}^T \bar{J} \bar{\psi} dV \quad (19)$$

$$\bar{F}^e = \int_{\Omega} \bar{\phi}^T \bar{q}^p d\Omega + \bar{P}^e \quad (20)$$

\bar{P}^e = cargas concentradas en los puntos nodales, en el campo transformado

La expresión (17) sirvió de base para implementar un elemento mixto isoparamétrico cuadrático.

3. Inversión Numérica

Una vez obtenidos los desplazamientos y las tensiones nodales en el campo transformado, es preciso hallar la solución viscoelástica por intermedio de la transformación inversa. Esta transformación es numérica y se encuentra detallada en [10] y [11].

La fórmula de inversión usada es:

$$F(t) \cong s \bar{F}(s) \Big|_{s=k/t} \quad (21)$$

Esta expresión podrá transformarse en una igualdad si los valores de k son convenientemente escogidos.

En las referencias citadas se obtuvieron las expresiones de k para funciones de fluencia del tipo

$$J = A + \sum_{i=1}^N B_i e^{C_i t}$$

siendo que para $N \leq 3$ se obtuvo k de manera de obtener una

transformación inversa exacta, y para valores de N superiores se propusieron fórmulas aproximadas.

Para simplificar, solamente se darán las expresiones de k para $J = A + B e^{ct}$.

Cuando se trata de un problema de fluencia, k será:

$$k = \frac{c e^{ct}}{e^{ct} - 1} t \quad (22)$$

y

$$k = \frac{c(1-aA)}{1-a(A+B)} t \quad (23)$$

con

$$a = \frac{1}{A} - \frac{B}{A(A+B)} e^{\frac{AC}{A+B} t} \quad (24)$$

para el caso de relajación.

k en ningún caso depende de la magnitud del módulo de elasticidad E, ni de las tensiones actuantes, así como de sus unidades, y tampoco de las deformaciones impuestas a la estructura. Solamente será función del tiempo transcurrido y de los coeficientes de la función de fluencia.

Cabe destacar, que para aplicar estas fórmulas, la solución obtenida con elementos finitos en el campo transformado debe ser suficientemente cercana a la exacta.

4. Ejemplos de Aplicación

En el primer ejemplo se obtuvo a la función de relajación a partir de la de fluencia.

Este ejemplo es muy simple, pero sirve para mostrar la eficiencia del esquema de inversión numérica propuesto.

Se tomó una barra como la mostrada en la figura 1, a la cual se le impuso una deformación constante. El módulo de elasticidad de la barra es $E = 10.000 \text{kgcm}^{-2}$.

La función de fluencia del material, que en nuestro caso corresponde a un combustible sólido es:

$$J = 10^{-2} - 0.99 \times 10^{-2} e^{-0.023979t} \quad (25)$$

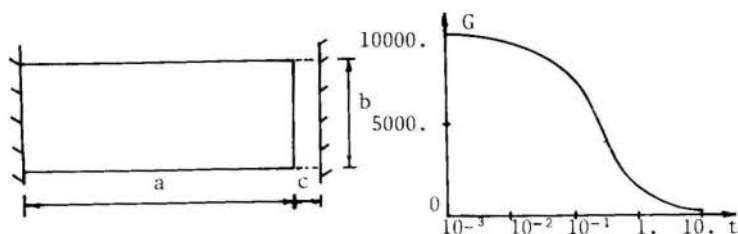


Figura 1

La función de relajación se puede obtener en forma exacta recordando que $\bar{J}G = 1/s^2$.

Operando se obtiene que:

$$G = 100 + 9900e^{-2.3979t}$$

La solución con elementos finitos coincide con la exacta en todos los instantes, como se puede ver en la figura 1.

El segundo problema resuelto fue una viga simplemente apoyada (Fig. 2) constituida por dos materiales, uno elástico y uno viscoelástico.

Esc. $\sigma = 100 \text{ kgfcm}^{-2}/\text{cm}$

$$E_1 = 500.000 \text{ kgfcm}^{-2}$$

$$E_2 = 2.000.000 \text{ kgfcm}^{-2}$$

$$q = 2.1 \text{ tf/m}$$

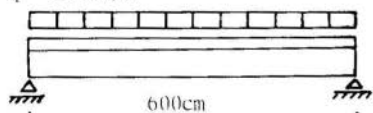
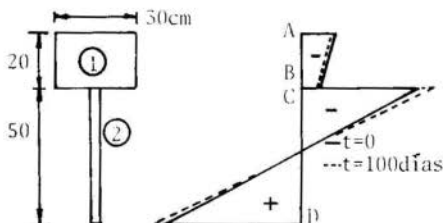


Figura 2



Se obtuvo la solución con una malla de 12 elementos, siendo que la variación en las tensiones en el centro de la viga después de 100 días, fue de aproximadamente 14%.

En la Tabla 1 se muestran los desplazamientos verticales y las tensiones en el centro de la viga, notándose la redistribución de tensiones, y en la fig. 2 están indicadas las tensiones para los tiempos 0 y 100.

t	w_A	σ_A	σ_B	σ_C	σ_D
días	cm	kgfcm ⁻²	kgfcm ⁻²	kgfcm ⁻²	kgfcm ⁻²
0	0.148	-60.	-32.	-214.	254.
10	0.150	-60.	-32.	-221.	256.
50	0.157	-58.	-32.	-237.	261.
100	0.160	-58.	-31.	-245.	264.

Tabla 1

5. Conclusiones

El esfuerzo computacional necesario para obtener la respuesta de una estructura viscoelástica para un determinado tiempo, es prácticamente el mismo que para estructuras elásticas.

La simplicidad del esquema de inversión numérica de la transformada de Laplace y la analogía del algoritmo (17) para materiales viscoelásticos con el caso elástico, permiten de una manera muy simple, introducir el análisis viscoelástico en programas de elementos finitos ya existentes.

La formulación presentada tiene la ventaja de permitir el análisis de la estructura en un determinado instante, sin la necesidad de cálculos previos en tiempos anteriores. Por otra parte, tiene la desventaja de que no permite el análisis de estructuras constituidas por materiales con "envejecimiento", como es el caso del hormigón. En este último caso se debe recurrir a un análisis del tipo "step by step".

Bibliografía

- [1] Rabotnov, Yu.N., "Creep problems in structural members", North-Holland, 1969.
- [2] Nowacki, W., "Theorie du fluage", Ed. Eyrolles, Paris, 1965.

- [3] Flugge, W., "Viscoelasticity", Blaisdell Publishing Co., 1967.
- [4] Bland, D.R., "The theory of linear viscoelasticity" Pergamon Press, 196 .
- [5] Alfrey, T., "Non homogeneous stresses in viscoelastic media", Quartlerly Journal Applied Mathematics, vol. 2, 1944.
- [6] Adey, R.A. y Brebbia, C.A., "Efficient method for solution of viscoelastic problems", ASCE, EM6, Dec. 1973.
- [7] Cost, T.L., "Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis", AAIA Journal, vol. 2 nº 12, Dec. 1964.
- [8] Cost, T.L. y Becker, E.B., "A multidata method of approximate Laplace inversion", Int.Journal for Num.Methods in Eng., vol. 2, Apr-June, 1970.
- [9] Nakaguma, R.K., "Análise Viscoelástica linear utilizando a transformada de Laplace e o método dos elementos finitos", Tesis M.Sc., Esc.Polit. da USP Brasil, 1975.
- [10] Halbritter, A.L., "Aplicação do método dos elementos finitos à análise do comportamento reológico estrutural", Tesis D.Sc., COPPE/UFRJ, Brasil, 1977.
- [11] Halbritter, A.L., "Inversión numérica de la transformada de Laplace en el análisis viscoelástico", Colóquio Franco-Brasileiro de Mét.Num. em Engenharia, COPPE/UFRJ, Brasil, 1976.

HALBRITTER, A.L.

SOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS VISCOELASTICOSResumen

Se usa la formulación del método de los elementos finitos para analizar estructuras constituidas por materiales viscoelásticos. Para llegar a dicha formulación, se aplica el concepto de transformada de Laplace y también se usa un método eficiente para obtener numéricamente la transformación inversa. Pueden ser estudiadas estructuras constituidas por varios materiales que tengan propiedades elásticas o viscoelásticas diferentes. Se incluyen algunos ejemplos como aplicación de la formulación presentada.

NUMERICAL SOLUTION OF VISCOELASTIC PROBLEMSSummary

A finite element formulation is used to analyse structures composed by viscoelastic materials. That is based on the use of the Laplace transform, and an efficient scheme to obtain the numerical inverse transform is presented. Structures composed of many materials with different elastic or viscoelastic properties, can be studied. Some examples are included as an illustration of the above formulation.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 9

PP. 105 - 115



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ACIDENTE TIPO BORAX EM UM REATOR NUCLEAR

Carlos A. THOMPSON, Professor
Dept. de Engenharia Mecânica
Instituto Militar de Engenharia
Rio de Janeiro, Brasil

Everton de Almeida CARVALHO
Dept. de Engenharia Nuclear
Instituto Militar de Engenharia
Rio de Janeiro, Brasil

1. Introdução

Devido à necessidade de se obter um alto grau de segurança, a análise de acidentes nos reatores nucleares tem sido objeto de inúmeras pesquisas.

Estudos experimentais desenvolvidos nos reatores Bo

rax I e II [1] , Spert I, II e III [2] sugerem a possibilidade de acidente com a explosão do núcleo do reator.

Proctor [3] realizou estudos experimentais em modelos simulando acidentes em vasos de contenção de geometria cilíndrica.

Geiger [4] verificou o comportamento das estruturas de um reator devido a uma explosão acidental.

O presente trabalho se constitui de um modelo teórico para se determinar a distribuição das pressões devido a uma explosão acidental em um reator tipo piscina.

2. Distribuição das Pressões

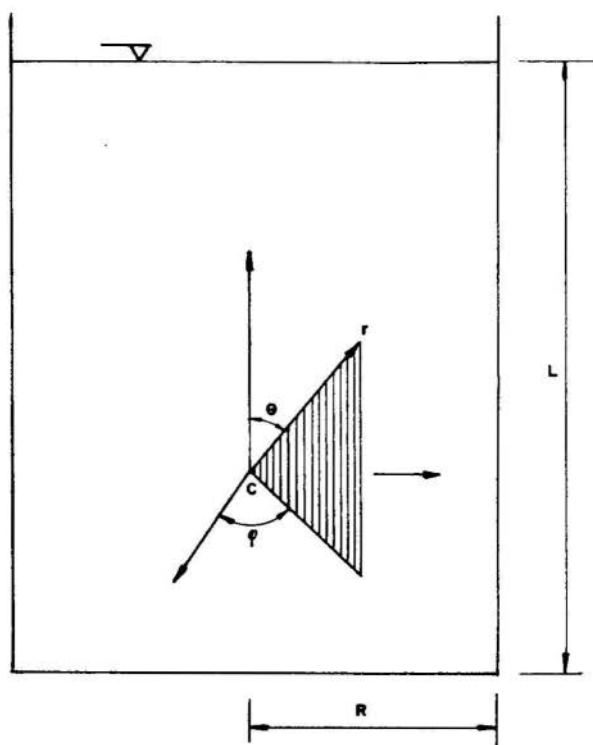


Figura 1

Em um cilindro de raio R com uma massa de água em repouso de altura L (Fig. 1) é superposta uma perturbação u nidimensional e não permanente. As componentes das velocidades em coordenadas esféricas, pressão e massa específica instantâneas podem ser decompostas em quantidades média e de perturbação:

$$\begin{aligned}v_r(r,t) &= \bar{v}_r(r) + v'_r(r,t) \\v_\theta(r,t) &= \bar{v}_\theta(r) + v'_\theta(r,t) \\v_\psi(r,t) &= \bar{v}_\psi(r) + v'_\psi(r,t) \\P(r,t) &= \bar{P} + P'(r,t) \\\rho(r,t) &= \bar{\rho} + \rho'(r,t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde \bar{P} e $\bar{\rho}$ são consideradas constantes.

Para o caso do fluido em repouso e pela condição de simetria tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{v}_r(r) &= \bar{v}_\theta(r) = \bar{v}_\psi(r) = 0 \\v'_\theta &= v'_\psi = 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Substituindo-se (2.2) em (2.1) as equações da continuidade, da quantidade de movimento, depois de linearizadas, podem ser escritas como :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \Delta = 0\tag{2.3}$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial r}\tag{2.4}$$

A relação entre pressão e massa específica é dada por:

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = C^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (2.5)$$

Combinando-se as relações (2.3), (2.4) e (2.5) tem-se:

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} \quad (2.6)$$

Onde C é a velocidade de propagação da perturbação e $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r)$.

Supondo o escoamento como irrotacional pode-se escrever

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2.7)$$

Onde $\phi(r,t)$ é a função potencial.

Substituindo (2.7) em (2.4) e (2.6) obtém-se respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (r\phi) + \frac{rP'}{\rho} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) \quad (2.9)$$

Combinando (2.8) e (2.9) tem-se :

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{\rho C^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) = 0 \quad (2.10)$$

Sabendo-se que no instante da explosão uma massa de água se transforma em vapor à pressão P'_0 , ocupando um volume esférico de raio a a distribuição da pressão para $r >$

a é dada por

$$P'(r,t) = \frac{P_0'}{2r} \left[(ct-a)H\left(t-\frac{r-a}{c}\right) - (ct+a)H\left(t-\frac{r+a}{c}\right) \right] \quad (2.11)$$

onde H é o operador de Heaviside [5]

No intervalo $\frac{r-a}{c} < t < \frac{r+a}{c}$, a distribuição da pressão é dada por :

$$P'(r,t) = P'_0(r-ct)/2r \quad (2.12)$$

3. Análise das tensões e deformações na parede

Fazendo um balanço das forças na parede do cilindro pela Fig. 2 tem-se [6] :

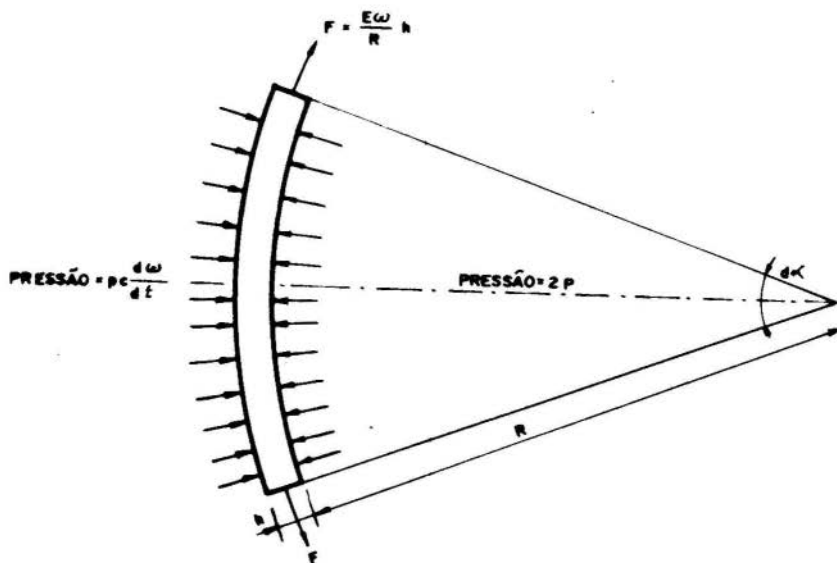


Figura 6 - Elemento infinitesimal da parede do cilindro.

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{\rho c}{m} \frac{dw}{dt} + \frac{Eh}{mR^2} w = \frac{P_0}{Rm} (R-ct) \quad (3.1)$$

onde w = deformação radial

m = massa por unidade de área

E = módulo de elasticidade

A relação (3.1) pode ser escrita numa forma mais simplificada,

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2 W Q \frac{dw}{dt} + W^2 w = \frac{P_0}{Rm} (R-ct) \quad (3.2)$$

onde $W^2 = \frac{Eh}{mR^2}$; $Q = \frac{1}{2W} \frac{\rho c}{m}$

A equação diferencial (3.2) tem a seguinte solução:

Para $Q > 1$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\delta} = & \left(\frac{R}{W^2} - \frac{ct}{W^2} + \frac{2cQ}{W^3} \right) - \frac{e^{-WQt}}{\left[\left(\frac{R}{W^2} + \frac{2cQ}{W^3} \right) \right.} \\ & \left. \cosh(\sqrt{Q^2 - 1} Wt) - \frac{1}{\sqrt{Q^2 - 1} W} \left(\frac{c}{W^2} - \frac{RQ}{W} - \frac{2cQ^2}{W^2} \right) \right.} \\ & \left. \sinh(\sqrt{Q^2 - 1} Wt) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para $Q < 1$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\delta} = & \left(\frac{R}{W^2} - \frac{ct}{W^2} + \frac{2cQ}{W^3} \right) - \frac{e^{-WQt}}{\left[\left(\frac{R}{W^2} + \frac{2cQ}{W^3} \right) \right.} \\ & \left. \cos(\sqrt{1 - Q^2} Wt) - \frac{1}{\sqrt{1 - Q^2} W} \left(\frac{c}{W^2} - \frac{RQ}{W} - \frac{2cQ^2}{W^2} \right) \right.} \\ & \left. \sin(\sqrt{1 - Q^2} Wt) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para $Q = 1$

$$\frac{w}{\delta} = \left(\frac{R}{W^2} - \frac{ct}{W^2} + \frac{2c}{W^3} \right) - e^{-Wt} \left[\left(\frac{R}{W^2} + \frac{2c}{W^3} \right) + \left(\frac{c}{W^2} - \frac{R}{W^2} + \frac{2c}{W^3} \right) t \right] \quad (3.5)$$

onde

$$\delta = \frac{Po'}{Rm}$$

4. Resultados e Conclusões

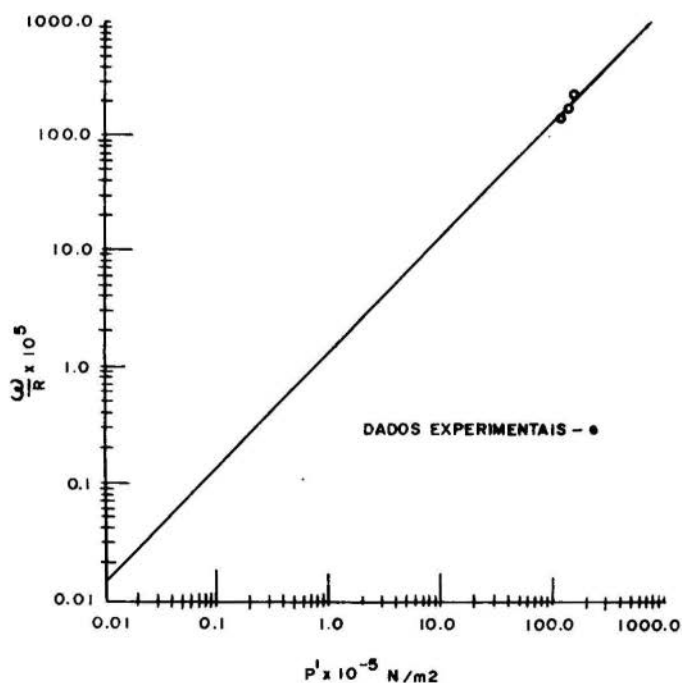


Figura 3 - Deflexão radial máxima em função da pressão.

As tensões e deformações calculadas analiticamente foram comparadas com os resultados experimentais existentes. As deformações radiais máximas, no plano meridiano que passa pelo centro da explosão, calculadas para vários picos de pressão na parede são apresentadas na Fig. 3, e comparadas com resultados experimentais obtidos para tanques cilíndricos utilizando-se alto explosivo [6]. Na Fig. 4 a relação tensão deformação é comparada com os resultados experimentais.

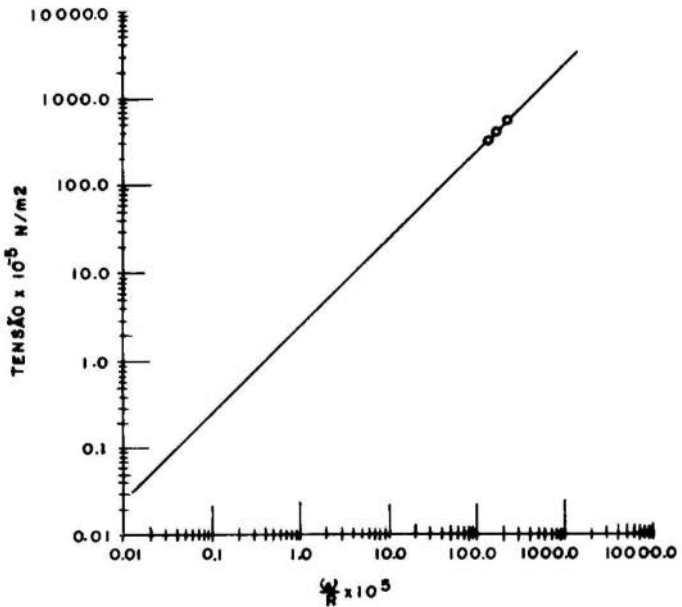


Figura 4 - Relação Tensão - Deformação

Os resultados obtidos pela distribuição (2.12), para as deformações radiais máximas, são apresentadas na Fig.5 em comparação com os cálculos realizados utilizando-se a distribuição de pressão empírica $P' = P_m e^{-t/\theta}$ [6].

Pode-se observar pela análise dos gráficos que os resultados obtidos teoricamente apresentam concordância com os dados experimentais. Na Fig. 5 verifica-se que, na faixa entre 10^3 e 10^6 N/m², há divergência entre os cálculos efetuados para a deformação radial máxima pelas distribuições (2.12) e a empírica, sendo necessária uma avaliação experimental nessa faixa para se estabelecer a validade das distribuições em face da inexistência de dados experimentais.

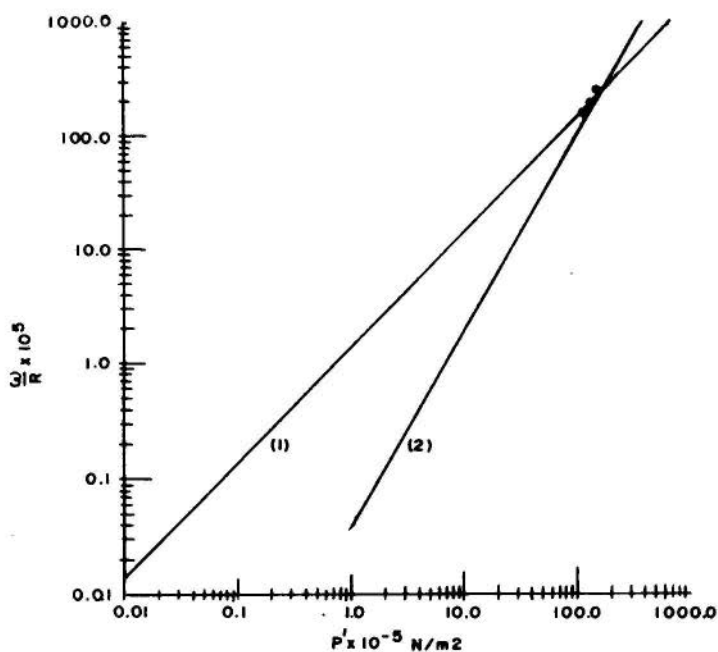


Figura 5 - (1) Distribuição (2.12)
(2) Distribuição $P' = P_m e^{-t/\theta}$.

5. Conclusão

Para os reatores nucleares tipo piscina o pico de pressão na parede da piscina está situado na faixa onde os resultados teóricos apresentam boa concordância com os da-

dos experimentais podense-se utilizar a distribuição (2.12) para se obter as tensões e deformações nas paredes da piscina.

BIBLIOGRAFIA

- 1 Dietrich, J.R., Experimental Investigation of the Self-limitation of Power During Reactivity Transientes in a Subcooled Water-Moderated Reactor. Argone National Laboratory, Lemont, Illinois, (1954).
- 2 Nyer, W.E., Forbes, S.G., Bentzen, F.L., Brient, G.O., Schoeder, F., And Wilson, T.R., Experimental Investigations of Reactor Transientes. Phillips Petroleum Co., Atomic Energy Division, Idaho Operations Office, U.S. Atomic Energy Commission (1956).
- 3 Proctor, J.F., Explosion Containment for Nuclear Reactor Vessels, Nuclear Safety, Vol 8, No 10, (1967).
- 4 Geiger, W., Generation and Propagation of Pressure Waves Due to Unconfined Chemical Explosions and Their Impact on Nuclear Power Plant Structures. Nuclear Engineering and Design, Vol 27, pp.189-189. (1974).
- 5 Jeffreys, H., and Jeffreys, B.S., "Methods of Mathematical Physics". Cambridge University Press, p. 243, (1972).
- 6 Ezra, A.A., "Principles and Practice of Explosive Metalworking", Industrial Newspapers Limited, Vol. I, pp. 154-157, (1973).

THOMPSON, C.A., e CARVALHO, E.

ACIDENTE TIPO BORAX EM UM REATOR NUCLEAR

Sumário

Utilizando as equações básicas da Mecânica dos Fluidos para descrever a propagação de uma onda de choque num meio fluido, com aproximação de perturbação infinitesimal, obteve-se a distribuição das pressões, utilizada para a determinação das tensões e deformações nas paredes da piscina.

BORAX TYPE ACCIDENT IN A NUCLEAR REACTOR

Summary

The basic equations of Fluid Mechanics were used to describe the propagation of a shock wave in the fluid. Using the linear theory of perturbation the pressure distributions were obtained and consequently stress and strain were determined in the wall of the cylindrical tank.

A N A I SDO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 10

PP. 117 - 129



ABCM/CNPq

PROCEEDINGSOF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERINGGRANDES DEFORMAÇÕES DE MEMBRANAS DEMATERIAIS HIPERELÁSTICOS INCOMPRESSÍVEIS

Nelson Francisco Favilla EBECKEN,
Professor Adjunto
Departamento de Engenharia Civil
Coordenação dos Programas de Pós-Graduação
de Engenharia,
Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Rio de Janeiro, Brasil

1. Introdução

Nas aplicações do método dos elementos finitos a análise não-linear, quase sempre várias restrições são incorporadas. Em geral se limita à análise de grandes deslocamentos, pois se faz uso de teorias próprias de corpos orientados como vigas, placas, etc.

Nas análises que envolvem não-linearidade física tam-

bém comumente se introduzem relações constitutivas de materiais de características de pequenas deformações.

A análise de deformações finitas pelo método dos elementos finitos foi inicialmente efetuada por Oden [1].

No presente trabalho o problema de grandes deformações de membranas de materiais hiperelásticos incompressíveis é enfocado com o uso de elementos isoparmétricos quadráticos.

2. Relações Constitutivas

Um material é dito ser elástico se as tensões em cada instante dependem somente da deformação local deste instante e não da história da deformação.

Se o estado de tensões pode ser determinado por derivação de uma função energia de deformação E , o material é chamado hiperelástico.

A geometria de um corpo elástico é geralmente conhecido quando ocupa uma configuração de referência C_0 , que é idealmente associada ao estado indeformado do material.

Por esta razão é mais conveniente usar ao invés de uma função energia de deformação E , um potencial elástico W medido por unidade de volume do corpo indeformado.

$$W = {}^0\rho E \quad (1)$$

As várias propriedades e formas especiais de W para materiais anisótropos e isótropos são discutidas por Oden [4].

Pode-se mostrar que para o grupo de materiais isótropos hiperelásticos W é uma função dos invariantes principais de deformação:

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (2)$$

obtendo-se as tensões por:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3)$$

Grande parte dos materiais considerados elásticos para deformações finitas é capaz de atingir severas deformações sem apreciável variação de volume.

Esses materiais são conhecidos por elásticos incompressíveis e basicamente todas soluções existentes de problemas específicos na elasticidade finita se valem de materiais deste tipo. Ao lado do fato que todos movimentos de materiais incompressíveis são preservadores de volume, a característica mais significativa desses materiais é que o tensor de tensões não é completamente determinado pela deformação.

Pode-se adicionar às tensões em um material incompressível deformado qualquer múltiplo dessas tensões, como uma pressão hidrostática arbitrária h , sem alterar o estado de deformação do corpo. Ou melhor, a adição de uma pressão hidrostática em um sólido elástico incompressível afeta as tensões mas não as deformações ou no caso de material hiperelástico, a energia de deformação.

A condição de incompressibilidade fornece:

$$I_3 = 1 \quad (4)$$

No caso de materiais hiperelásticos a equação (4) é interpretada como uma equação de restrição.

Definindo:

$$\bar{W} = W(\epsilon_{ij}) + \lambda(I_3 - 1) \quad (5)$$

onde λ é um multiplicador de Lagrange, a equação (3) fica:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} + \lambda \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (6)$$

sendo que λ é igual a pressão hidrostática h e ϵ_{ij} satisfaz (4).

Se (4) é atendida, a função energia de deformação para sólidos hiperelásticos incompressíveis isotrópicos é função somente dos outros dois variantes principais:

$$W = W(I_1, I_2) \quad (7)$$

e

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} + h \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (8)$$

Várias aproximações de $W(I_1, I_2)$ para materiais específicos foram propostas.

A hipótese de incompressibilidade do material não acarreta em simplificações no caso de aplicações do método dos elementos finitos.

A função energia de deformação determina a tensão em corpos hiperelásticos incompressíveis somente a menos de uma função escalar h , chamada pressão hidrostática que não per_oforma trabalho quando o corpo deforma.

Para o método dos elementos finitos a pressão hidrostática aparece como uma incôgnita adicional nas relações de rigidez e a condição de incompressibilidade deve ser mantida aproximadamente em todo modelo discreto.

Desde que praticamente todas equações constitutivas avaliadas para materiais altamente elásticos (borrachas naturais e sintéticas, polímeros, combustíveis sólidos propelentes) consideram o material como incompressível, o estudo de deformações finitas de corpos incompressíveis constitui uma parte importante da elasticidade finita.

3. Estado Plano de Tensões

A escolha de formulação Lagrangeana para este tipo de material é óbvia já que todas as variáveis aparecem referidas à configuração indeformada. O princípio dos trabalhos virtuais é aplicado como em [11] para obtenção das equações incrementais de movimento.

Na análise de estado plano de tensões a relação constitutiva para um material isótropo hiperelástico incompressível pode ser expressa por:

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = 2C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{bmatrix} C_{22} \\ C_{11} \\ -C_{12} \end{bmatrix} + 2C_2 \left(\mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\mu^2(C_{11}+C_{22})) \begin{bmatrix} C_{22} \\ C_{11} \\ -C_{12} \end{bmatrix} \right) \quad (9)$$

- onde:
- S_{ij} = componentes do 2º tensor de Piola-Kirchhoff
 - C_{ij} = $2 \epsilon_{ij} + \delta_{ij}$ = componentes do tensor deformação
 - δ_{ij} = delta de Kronecker
 - μ = C_{33} = deformação normal ao plano
 - C_1, C_2 = constantes do material definidas por $C_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}$
 - W = $C_1(I_1-3) + C_2(I_2-3)$ função energia de deformação adotada (Mooney-Rivlin)

Nesta equação a condição de estado plano de tensões $S_{33} = 0$ já foi usada para eliminar a pressão hidrostática. Além disso a condição de incompressibilidade deve ser satisfeita.

$$\mu [C_{11} C_{22} - (C_{12})^2] = 1 \quad (10)$$

A matriz C que relaciona os incrementos de tensões aos de deformações, definida por:

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2 \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (11)$$

é obtida pelo gradiente de (9) isto é:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \quad (12)$$

A equação (10) será usada para eliminar a incógnita adicional μ . Assim:

$$\begin{aligned}
 C = 4 C_1 \mu^2 & \left(2\mu \begin{bmatrix} (C_{22})^2 & C_{11} C_{22} & -C_{12} C_{22} \\ & (C_{11})^2 & -C_{12} C_{11} \\ \text{SIMÉTRICA} & & (C_{12})^2 \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + 4 C_2 \mu^2 \left(2\mu (C_{11} + C_{22}) \begin{bmatrix} (C_{22})^2 & C_{12} C_{22} & -C_{12} C_{22} \\ & (C_{11})^2 & -C_{12} C_{11} \\ \text{SIMÉTRICA} & & (C_{12})^2 \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + (C_{11} + C_{22}) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 C_{22} & \frac{1}{\mu^2} & C_{12} \\ \frac{1}{\mu^2} & -2 C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{12} & -\frac{1}{2\mu^2} \end{bmatrix} \right) \quad (13)
 \end{aligned}$$

Em outro tipo de análise que seja não estado plano de tensão, a pressão hidrostática não pode ser eliminada e tem que ser incluída como uma variável adicional. A condição de incompressibilidade fornece as equações suplementares para o conhecimento da pressão hidrostática.

4. Solução pelo Método dos Elementos Finitos

Argyris ([5] e [6]) comenta a série de dificuldades que surgem em discretizações com elementos finitos "simplex" (TRIM3, TET4 e TRIAX3) quando problemas de materiais incompressíveis ou aproximadamente incompressíveis são analisados. Nas aplicações que se seguem valeu-se de elementos isoparamétricos quadráticos para discretizar o contínuo.

A aproximação pelo método dos elementos finitos é efetuada, e as equações incrementais de movimento de um simples elemento são obtidas como desenvolvido em [12]. Os efeitos de amortecimento foram ignorados.

Estas equações quando extendidas a todo o domínio discreto são integradas passo a passo pelo método de Newmark

ou no caso estático resolvidas sucessivamente.

Em ambas as análises são usados esquemas iterativos tipo Newton-Raphson para garantir o equilíbrio em cada intervalo dentro de uma pré-estabelecida tolerância.

5. Resultados e Comparações

5.1. Análise Estática - Comparação com Resultados Experimentais

O problema da figura 1 foi analisado com o uso de 6 elementos e confrontado com a análise experimental efetuada por Iding.

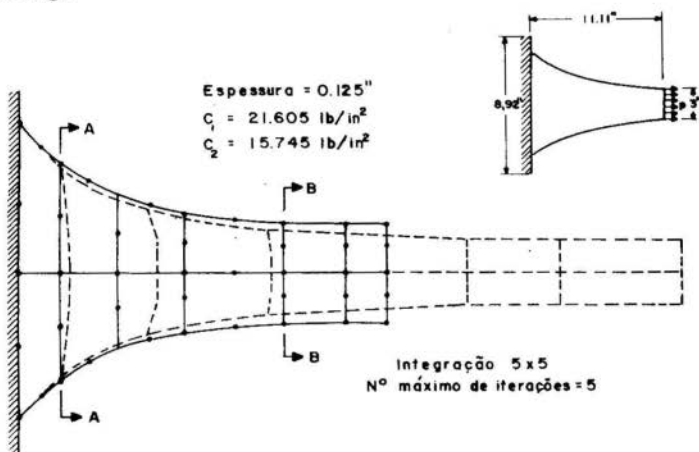


FIGURA 1 - DEFORMADA PARA $p = 41,80 \text{ lb}$
ATINGIDA EM 4 INCREMENTOS

Deve-se notar que o deslocamento final do lado de aplicação da carga é da ordem do comprimento original da peça. A configuração final foi alcançada em 4 incrementos de carga com uma média de 5 iterações.

Os resultados mostraram concordância (figura 2), e para evidenciar a grande diferença das tensões Piola-Kirchhoff e Cauchy a distribuição dessas grandezas em duas seções é apresentada.

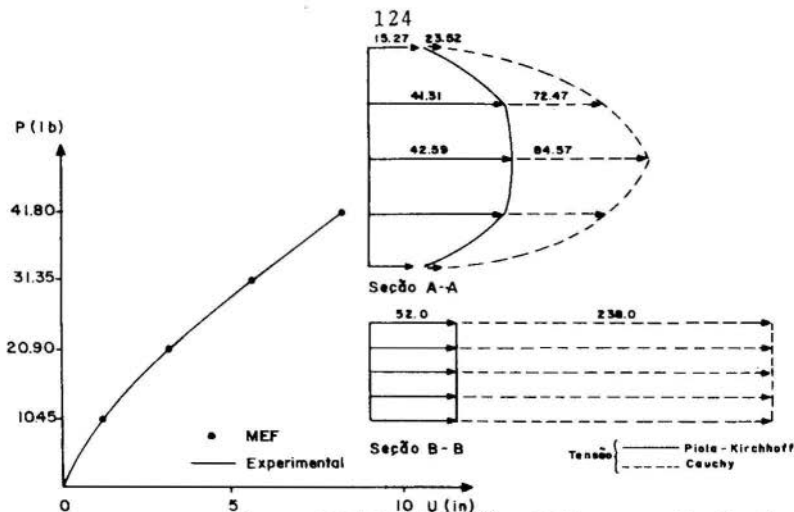


FIGURA 2 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES (lb/in²) PARA $p = 41.80$ lb

5.2. Análise Estática e Dinâmica

Novamente 6 elementos foram usados na discretização do problema da figura 3.

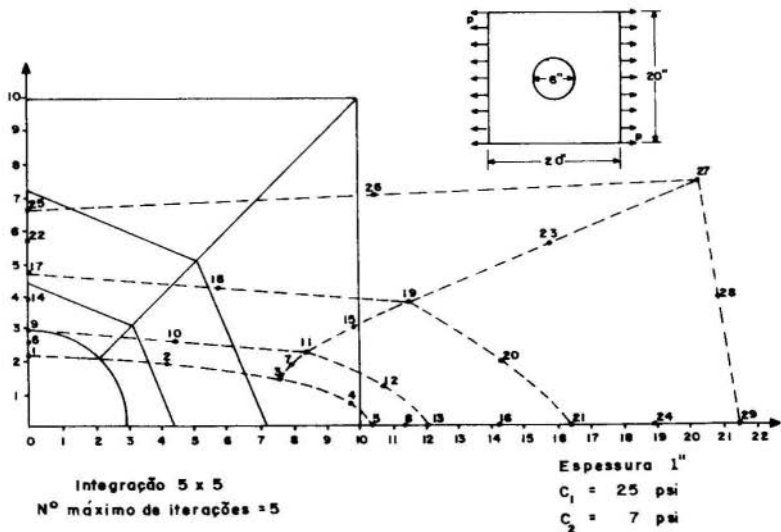


FIGURA 3 - DEFORMADA PARA $p = 90$ psi ATINGIDA EM 3 INCREMENTOS

A deformada atingida em 3 incrementos de carga é idêntica a obtida em [12] com 30 elementos lineares.

O deslocamento na direção do carregamento de alguns pontos é mostrado na figura 4.

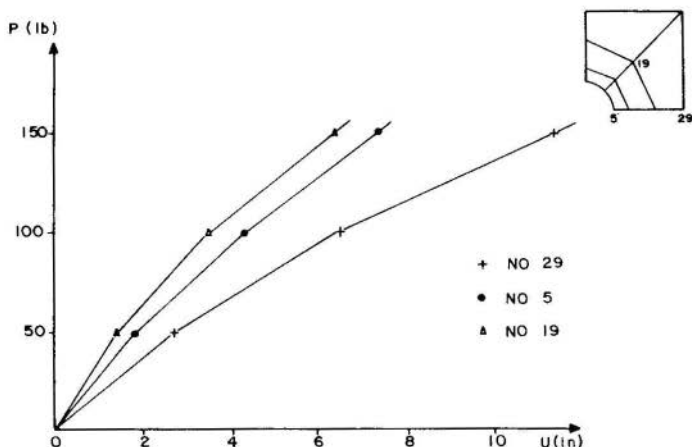


FIGURA 4 - CARGA-DESLOCAMENTO

Para análise dinâmica o carregamento total foi considerado de aplicação súbita e constante. O intervalo de tempo para integração $\Delta t = 0.0015$ s é aproximadamente $1/120$ do período fundamental.

Uma comparação com os resultados de [12], com os mesmos parâmetros (integração pelo método de Wilson), está na figura 5

Praticamente a mesma resposta é obtida com os dois métodos de integração. Além disso, convém salientar que os resultados não são sensivelmente afetados se a atualização dos efeitos não-lineares for processada apenas a cada 5 ou 10 intervalos de integração, apesar de se tratar de um problema fortemente não-linear.

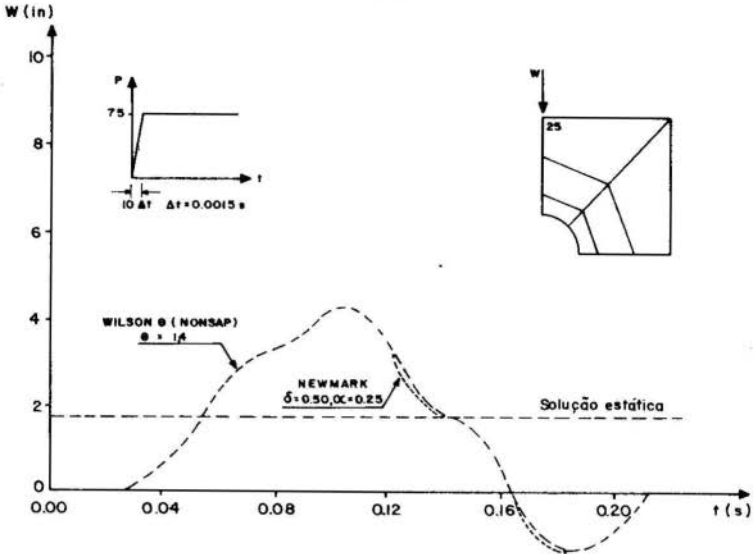


FIGURA 5 - RESPOSTA DINÂMICA - NÓ 25

6. Conclusões

A aproximação do contínuo por elementos isoparamétricos para o estudo de materiais hiperelásticos é feita com eficiência. O controle sistemático da equação constitutiva nos pontos de integração do elemento garantem uma perfeita representação do material em todo o domínio.

A extensão para o caso de problemas tridimensionais consiste apenas da consideração do terceiro grau de liberdade, como usual nas aplicações do método dos elementos finitos à análise de membranas infláveis.

Bibliografia

- [1] Oden, J.T. e Sato, T., Finite Strains and Displacements of Elastic Membranes by the Finite Element Method. International Journal of Solids and Structures, May 1967, 471-488.

- [2] Oden, J.T., Finite Plan Strain of Incompressible Elastic Solids by the Finite Element Method. *The Aeronautical Quarterly*, 254-264 (1968).
- [3] Oden, J.T., Key, J.E., On Some Generalizations of the Incremental Stiffness Relations for Finite Deformations of Compressible and Incompressible Finite Elements. *Nuclear Engineering and Design* 15, 121-134 (1971).
- [4] Oden, J.T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*. McGraw-Hill Inc. (1972).
- [5] Argyris, J.H., Dunne, P.C., Agelopoulos, T., Bichat, B., Large Natural Strains and Some Special Difficulties Due to Non-Linearity and Incompressibility in Finite Elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 4, 219-278 (1974).
- [6] Argyris, J.H., Dunne, P.C., Agelopoulos, T., Bichat, B., Finite Element Difficulties in Nonlinear Mechanics, *TICOM* (1974).
- [7] Bathe, K.J., Ramm, E., Wilson, E.L., Finite Element Formulations for Large Displacement and Large Strain Analysis. Report UCSESM 73-14 University of California (1973).
- [8] Iding, H., Pister, K.S., Taylor, R.L., Identification of Nonlinear Elastic Solids by a Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 4, 121-142 (1974).
- [9] Kavanagh, K.T., Clough, R.W., Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7, 11-23 (1971).

- [10] Alexander, H., A Constitutive Relation for Rubber-Like Materials. *International Journal of Engineering Science* 6, 549-563 (1968).
- [11] Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall Inc. (1969).
- [12] Bathe, K.J., Wilson, E.L., Iding, R.H., NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems. Report UCSESM 74-3, University of California (1974).
- [13] Fung, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall N.J. (1965).
- [14] Li, C., *Analysis of Inflatable Shells by the Finite Element Method*. State University of New York (1971).
- [15] Eringen, A.C., *Mechanics of Continua*. John Wiley, (1967)
- [16] Wempner, G., *Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies*. McGraw-Hill (1973).
- [17] Oden, J.T., Reddy, J.N., *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Springer-Verlag, 1976.
- [18] Moriaty, T.F., Two Sets of Inequalities Among the Principal Invariants of the Cauchy-Green Deformation Tensors. *J. Elast.* 1 87-90 (1971).

EBECKEN, N.F.F.

GRANDES DEFORMAÇÕES DE MEMBRANAS
DE MATERIAIS HIPERELÁSTICOS INCOMPRESSÍVEIS

Sumário

O método dos elementos finitos é aplicado à análise de grandes deformações de membranas de materiais hiper-elásticos incompressíveis. A derivação da equação constitutiva empregada é discutida sucintamente.

Uma formulação Lagrangeana da mecânica do contínuo é utilizada. A discretização se valeu de elementos finitos isoparamétricos quadráticos.

Alguns resultados são apresentados e comparados com outras soluções.

FINITE STRAINS OF HYPERELASTIC MEMBRANES

Summary

The finite element method is applied to the analysis of membranes of hiperelastic incompressible materials. The derivation of the constitutive relations is briefly commented.

A Lagrangean formulation is implemented, and the discretization is effected by quadratic isoparametric elements.

Some results are present and compared with others solutions.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 11
PP. 131 - 142



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ANÁLISE NUMÉRICA DE CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO

Domingos Boechat ALVES, D.Sc.
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

1. Introdução

Este trabalho apresenta a formulação numérica para o cálculo das tensões resultantes, deslocamentos e deformações em cascas delgadas de revolução com espessura e propriedades elásticas ortotropicamente variáveis ao longo do meridiano.

É obtido das equações básicas da teoria clássica das cascas um conjunto de quatro equações diferenciais parciais em termos dos três deslocamentos e do momento fletor meridional.

Um programa digital em FORTRAN IV é codificado para a aplicação à qualquer casca de revolução com ou sem polo [1].

2. Equações fundamentais

O sistema de referência da casca e as tensões resultantes em um elemento genérico são mostrados na Figura 1 e todos os parâmetros geométricos adimensionalizados através de l_0 e t_0 , respectivamente comprimento e espessura de referência. Ponto e vírgula sobre as variáveis indicam derivadas parciais nas direções θ e s respectivamente.

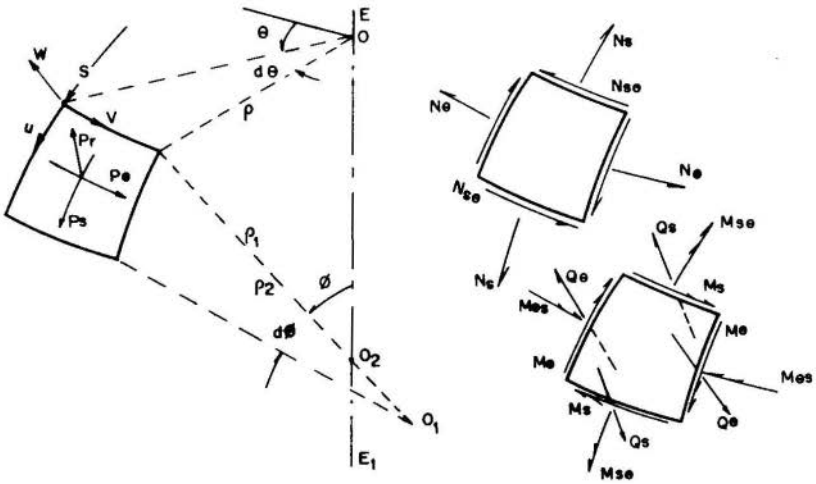


Fig. 1 - Elemento da casca e tensões resultantes.

De acordo com a teoria clássica das cascas as equações diferenciais de equilíbrio de um elemento (ds , $d\theta$) para cascas de revolução, são: [1]

$$\begin{aligned}
 (\rho N_s)_{,s} + \dot{N}_{\theta s} - \rho N_{\theta} - \rho_1^{-1} \rho Q_s &= -\rho p_s \\
 (\rho N_{s\theta})_{,s} + \dot{N}_{\theta} + \rho N_{s\theta} + \rho_1^{-1} \rho Q_{\theta} &= -\rho p_{\theta} \\
 \rho_1^{-1} \rho N_s - \rho_1^{-1} \rho N_{\theta} + \dot{Q}_{\theta} + (\rho Q_s)_{,s} &= \rho p_r \\
 (\rho M_s)_{,s} + \dot{M}_{s\theta} - \rho M_{\theta} &= \rho Q_s \\
 (\rho M_{s\theta})_{,s} + \dot{M}_{\theta} + \rho M_{\theta s} &= \rho Q_{\theta}
 \end{aligned} \quad (1)$$

A relação entre os vetores tensões resultantes $N =$

$= (N_s, N_\theta, N_{s\theta}), M = (M_s, M_\theta, M_{s\theta})$ e os vetores deformações médias $\epsilon = (\epsilon_s, \epsilon_\theta, \epsilon_{s\theta}), K = (k_s, k_\theta, k_{s\theta})$ e

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{\Theta} \\ \bar{\Theta} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ K \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Onde $c_{ij} = c_{ji}$ são as constantes de rigidez extensional, e, $d_{ij} = d_{ji}$ são as constantes de rigidez flexional da casca.

As relações entre o vetor deformação e deslocamento é

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \dot{u} + \rho_1^{-1} \omega \\ \epsilon_\theta &= \rho \rho^{-1} \dot{u} + \rho^{-1} \dot{v} - \rho \rho_1 \dot{\omega} \\ \epsilon_{s\theta} &= \rho^{-1} \dot{u} + \dot{v} - \rho \rho v \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} k_s &= -\dot{\omega} \\ k_\theta &= -\rho^{-2} \dot{\omega} - \rho \rho^{-1} \dot{\omega} \\ k_{s\theta} &= -2\rho^{-1} \dot{\omega} + 2\rho \rho^{-2} \dot{\omega} \end{aligned} \quad (4)$$

As dezessete equações de (1) a (4) contêm dezessete incógnitas e portanto o problema é solúvel.

Eliminando todas as incógnitas exceto u, v, ω e M_s , obtem-se um sistema de quatro equações diferenciais parciais, que após a expansão de todas as variáveis funções de θ em série de Fourier, resulta em um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias em s para cada harmônico n . Ainda mais, todas essas variáveis são adimensionalizadas usando ℓ_0, t_0, E_0 (módulo de elasticidade de referência), σ_0 (tensão de referência). Assim resulta, com $x = (u, v, \omega, M_s)$.

$$PX'' + QX' + RX = S \quad (5)$$

Os elementos das matrizes P, Q, R e S são funções dos parâmetros geométricos que definem a casca e as constantes mecânicas de rigidez do material, e se encontram tabeladas no apêndice. Determinado X , as deformações específicas e as demais tensões resultantes são calculadas por (4), (3)

e (2).

O conjunto de equações diferenciais (5) é de oitava ordem, requerendo a prescrição de quatro condições de contorno em cada borda externa. Se

$$\hat{N}_{s\theta} = N_{s\theta} + \frac{\rho_1 \rho''}{\rho} M_{s\theta}, \quad \hat{Q}_{s\theta} = Q_{s\theta} + \frac{n}{\rho} M_{s\theta} \quad (6)$$

são as tensões resultantes efetivas nas secções de uma das bordas extremas, as condições de contorno nesta borda podem ser expressas por

$$\begin{aligned} \ell_1 N_s + m_1 u &= e_1 \\ \ell_2 \hat{N}_{s\theta} + m_2 v &= e_2 \\ \ell_3 \hat{Q}_s + m_3 \omega &= e_3 \\ \ell_4 \overset{\circ}{\omega} + m_4 M_s &= e_4 \end{aligned} \quad (7)$$

Exprimindo N_s , $\hat{N}_{s\theta}$, \hat{Q}_s em termos de (u, v, ω, M_s) resulta nas seguintes condições de contorno

$$\overset{\circ}{G}X + FX = E \quad (8)$$

onde os elementos não nulos de G e F estão no apêndice.

No polo, as equações diferenciais da casca são singulares e no caso de não existir carga concentrada no polo, impõe-se as seguintes condições de contorno a fim de obter soluções finitas [4].

$$\begin{aligned} n = 0 \rightarrow u = 0; v = 0; \overset{\circ}{\omega} = 0; \overset{\circ}{M}_s = 0 \\ n = 1 \rightarrow u + v = 0; \omega = 0; \overset{\circ}{u} = 0; M_s = 0 \\ n = 2 \rightarrow u = 0; v = 0; \omega = 0; \overset{\circ}{\omega} = 0 \\ n = 3 \rightarrow u = 0; v = 0; \omega = 0; \overset{\circ}{\omega} = 0 \end{aligned}$$

3. Solução Numérica

As equações diferenciais (5) com as condições de contorno (8) são escritas em diferenças finitas, usando

$$\overset{\circ}{X}_i = \frac{1}{h}(X_{i+1} - X_i) \text{ e } \overset{\circ\circ}{X}_i = \frac{1}{h^2}(X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1})$$

onde $h = s/a_0 m$, sendo m o número de intervalos pivotais. Para as bordas extremas ($i = 1$ e $i = m+1$) e estações interm_ediárias as equações (5) e (6) em diferenças finitas são

$$B_1 X_1 + A_1 X_2 = S_1$$

$$C_{i-1} X_{i-1} + B_i X_i + A_i X_{i+1} = S_i \quad i = 2, m \quad (9)$$

$$C_m X_m + B_{m+1} X_{m+1} = S_{m+1}$$

onde

$$A_1 = h^{-1} G_1; \quad B_1 = F_1 - h^{-1} G_1;$$

$$A_i = h^{-1} P_i + Q_i; \quad B_i = -2h^{-1} P_i - Q_i + h R_i$$

$$C_{i-1} = h^{-1} P_i; \quad B_{m+1} = h^{-1} G_{m+1} + F_{m+1}$$

$$C_m = -h^{-1} G_{m+1}; \quad S_1 = E_1; \quad S_i = h \bar{S}_i$$

$$S_{m+1} = E_{m+1}$$

A fim de evitar a possível singularidade de B_1 e B_{m+1} as equações (9) são modificadas fazendo

$$A_2^* = B_1 C_1^{-1} A_2, \quad B_2^* = B_1 C_1^{-1} B_2 - A_1$$

$$B_m^* = B_{m-1} A_m^{-1} B_m - C_m, \quad C_{m-1}^* = B_{m+1} A_m^{-1} C_{m-1}$$

$$S_2^* = B_1 C_1^{-1} S_2 - S_1, \quad S_m^* = B_{m+1} A_m^{-1} S_m - S_{m+1}$$

e as equações (9) são substituídas por (10)

$$B_2^* X_2 + A_2^* X_3 = S_2^*$$

$$C_{i-1} X_{i-1} + B_i X_i + A_i X_{i+1} = S_i \quad i = 2, m \quad (10)$$

$$C_{m-1} X_{m-1} + B_m X_m = S_m^*$$

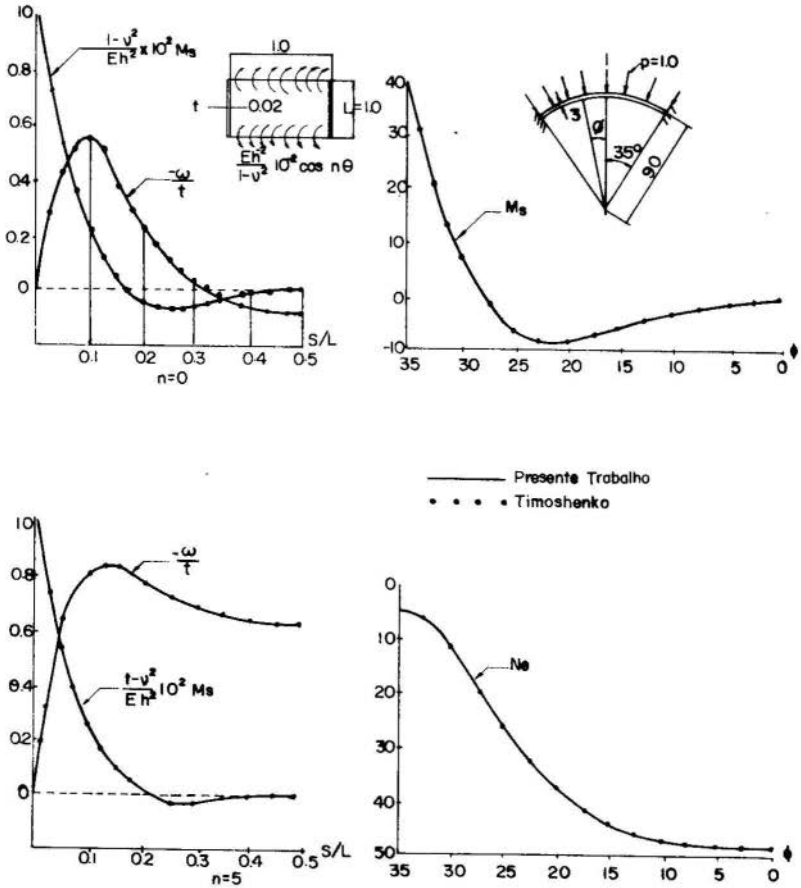
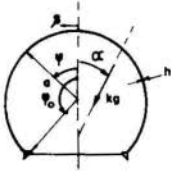


Fig. 2 - Tensões resultantes em cilindro e calota esférica.



Dados:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a/h &= 100 \\ \nu &= 0.3 \\ E &= 10^4 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 1/h \\ k_2 &= 1/h \cos \epsilon \\ k_3 &= 1/h \cos \epsilon \\ k_4 &= 1/h^2 \cos \epsilon \\ k_5 &= k_4 / \cos \epsilon \end{aligned}$$

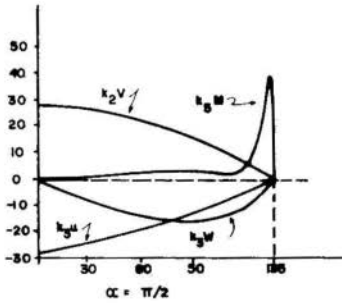
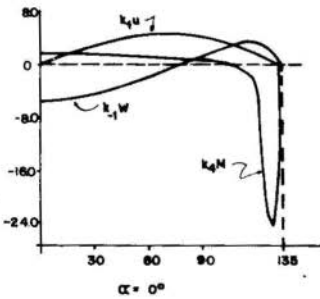
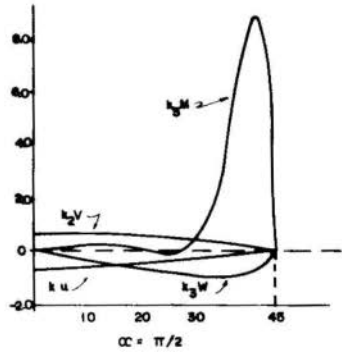
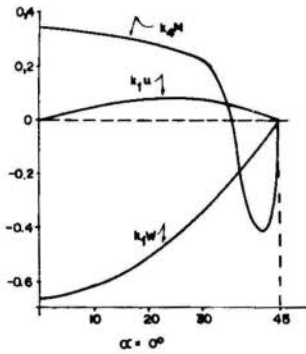
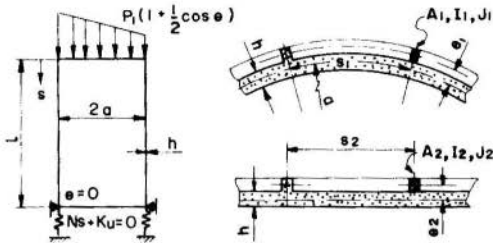


Fig. 3 - Deslocamentos e momento meridional em casca esférica sujeita a cargas gravitacionais.



Dados:
 $P = 1.0$; $l = 2.4$ $a = 1.0$
 $\alpha/h = 200$; $\nu = 0.3$, $e_1 = e_2 = 0.006$
 $E_1/E = E_2/E = 1$
 $A_1 = A_2 = 6 \times 10^{-5}$; $I_1 = I_2 = 5 \times 10^{-10}$
 $J_1 = J_2 = 6.8 \times 10^{-10}$; $2\beta = \beta_2 = 0.03$
 $k = 10^4/Eh^2$

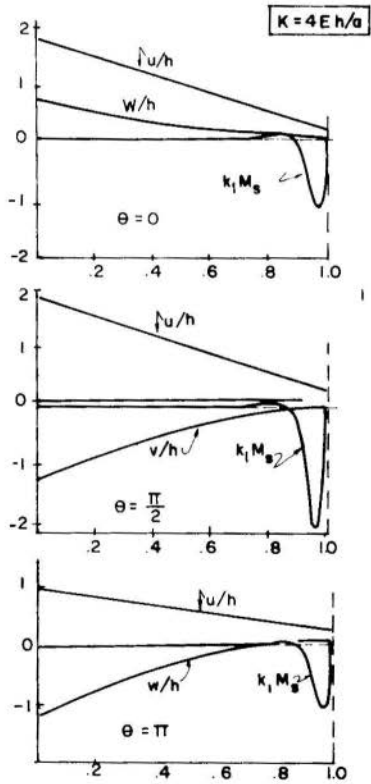
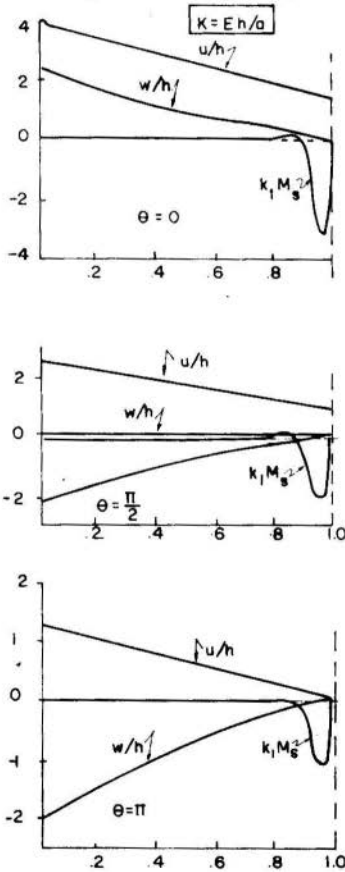


Fig. 4 - Deslocamento e momento meridional de um cilindro ortotrópico com suporte elástico.

Usando as equações (10) X_i $i = 2, m$, são obtidos usando técnicas de eliminação e então X_1 e X_{m+1} obtidos das equações (11)

$$X_1 = C_1^{-1}(S_2 - A_2 X_3 - B_2 X_2)$$

$$X_{m+1} = A_m^{-1}(S_m - B_m X_m - C_{m-1} X_{m-1})$$

4. Resultados

Soluções de vários problemas de cascas são obtidas usando o presente programa e os resultados plotados nas Figuras 2 a 4. Algumas delas são comparadas com soluções publicadas na literatura afim de constatar a precisão da formulação numérica.

Dois dos problemas tratados consistem em um cilindro circular sujeito a vários harmônicos do momento fletor meridional aplicados nas bordas extremas [3], uma calota esférica de bordas fixas sujeitas a pressão externa [2]. Os resultados obtidos apresentam excelente concordância e estão plotados na figura 2.

É analisada uma casca esférica de contorno rotulado sujeita a cargas gravitacionais, respectivamente, paralelas e perpendiculares ao plano contendo o eixo de rotação e os resultados são mostrados na figura 3.

Na figura 4 são mostrados os resultados de um cilindro circular ortotrópico sujeito a cargas de intensidade $p_0(1 + \mu \cos \theta)$ paralelas ao eixo de rotação e aplicadas na borda superior. A borda inferior resta em suporte elástico.

Bibliografia

- [1] Flüge, W., "Stresses in shells", Springer-Verlag Berlin, 1962.
- [2] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", 2nd. Ed., McGraw-Hill, New York, 1959.

- [3] Budiansky, B. and Radkowsky, P.P., "Numerical analysis of unsymmetrical bending of shells of revolution", AIAA J., Vol. 1, No. 8, August 1963.
- [4] Greenbaum, G.A., "Comments on a paper by B. Budiansky," AIAA J., Vol. 2, No. 3, March 1964, p. 590.

Apêndice

1. Elementos não nulos das matrizes P, Q, E e S.

$$p_{11} = \rho a_{11}, \quad p_{22} = \rho a_{33}, \quad p_{23} = -npd_{33}\rho_1^{\prime\prime\prime}/\rho$$

$$p_{33} = -p(2n^2d_{33}/\rho + d_{\theta}(\dot{\rho})^2/\rho), \quad p_{34} = p\rho, \quad p_{43} = d_{11}$$

$$q_{11} = \dot{\rho}a_{11} + \dot{a}_{11}\rho, \quad q_{12} = n(a_{12} + a_{33}), \quad q_{14} = -p\rho/\rho_1$$

$$q_{13} = a_{11}\rho/\rho_1 - a_{12}\rho_1^{\prime\prime\prime} + pd_{\theta}(\dot{\rho})^2/\rho\rho_1 + n^2pd_{33}/\rho\rho_1$$

$$q_{21} = -n(a_{33} - a_{12}), \quad q_{22} = \dot{a}_{33}\rho + a_{33}\dot{\rho}, \quad q_{31} = a_{11}\rho/\rho_1 - a_{12}\rho_1^{\prime\prime\prime}$$

$$q_{23} = -pn\rho_1^{\prime\prime\prime}(d_{33}^{\prime} + d_{\theta}\dot{\rho}/\rho)/\rho, \quad q_{34} = p(2 - d_s)\dot{\rho}$$

$$q_{33} = -p[2n^2(d_{33}/\rho)^{\prime} + (d_{\theta}(\dot{\rho})^2/\rho)^{\prime}], \quad q_{43} = d_{12}\dot{\rho}/\rho$$

$$r_{11} = a_{12}^{\prime\prime\prime} + \dot{a}_{12}\dot{\rho} - a_{22}(\dot{\rho})^2/\rho - n^2a_{33}/\rho$$

$$r_{12} = n(\dot{a}_{12} - a_{33}\dot{\rho}/\rho - a_{22}\dot{\rho}/\rho), \quad r_{14} = -p(1 - d_s)\dot{\rho}/\rho_1$$

$$r_{13} = a_{11}(\rho/\rho_1)^{\prime} - a_{12}(\rho_1^{\prime\prime\prime})^{\prime} + \dot{a}_{11}\rho/\rho_1 - \dot{a}_{12}\rho_1^{\prime\prime\prime} + a_{22}\rho_1^{\prime\prime\prime}\dot{\rho}/\rho - \\ - a_{12}\dot{\rho}/\rho_1 - n^2(d_{33} + d_{\theta})p\rho/\rho_1\rho^2$$

$$r_{21} = -n(\dot{a}_{33} + a_{22}\dot{\rho}/\rho + a_{33}\dot{\rho}/\rho), \quad r_{24} = -npd_s\rho_1^{\prime\prime\prime}/\rho$$

$$r_{23} = n(a_{22}\rho_1^{\prime\prime\prime}/\rho - a_{12}/\rho_1) + np(\dot{\rho}d_{33} + d_{33}^{\prime}\dot{\rho} + n^2d_{\theta}/\rho)\rho_1^{\prime\prime\prime}/\rho^2$$

$$r_{22} = -(a_{33}^{\dot{\rho}})^{\circ} - a_{33}(\dot{\rho})^2/\rho - n^2 a_{22}/\rho$$

$$r_{31} = a_{12}^{\dot{\rho}}/\rho_1 - a_{22} \rho_1^{\ddot{\rho}\dot{\rho}}/\rho, \quad r_{32} = n(a_{12}/\rho_1 - a_{22} \rho_1^{\dot{\rho}}/\rho)$$

$$r_{33} = a_{11} \rho/\rho_1^2 - 2a_{12}^{\ddot{\rho}} + a_{22}(\rho_1^{\ddot{\rho}})^2/\rho + 2n^2 p(d_{33}^{\dot{\rho}})^{\circ}/\rho^2 - \\ - 2n^2 p d_{33}(\dot{\rho})^2/\rho^3 + n^2 p(d_{\theta}^{\dot{\rho}}/\rho^2)^{\circ} + n^4 p d_{\theta}/\rho^3$$

$$r_{34} = p[(1 - d_s)^{\ddot{\rho}} - \dot{\rho} d_s^{\dot{\rho}} - n^2 d_s/\rho]$$

$$r_{43} = -n^2 d_{12}/\rho^2, \quad r_{44} = -1$$

2. Elementos das matrizes G e F.

$$g_{11} = \ell_1 a_{11}, \quad g_{22} = \ell_2 a_{33}, \quad g_{23} = -\ell_2 d_{33} n p \rho_1^{\ddot{\rho}}/\rho^2$$

$$g_{33} = -\ell_3 (2d_{33} n^2 + d_{\theta}^{\dot{\rho}})^2 p/\rho^2, \quad g_{34} = \ell_3 p, \quad g_{43} = \ell_4$$

$$f_{11} = \ell_1 a_{12}^{\dot{\rho}}/\rho + m_1, \quad f_{12} = n \ell_1 a_{12}/\rho,$$

$$f_{13} = \ell_1 (a_{11} \rho_1^{-1} - a_{12} \rho_1^{\ddot{\rho}}/\rho)$$

$$f_{21} = -n \ell_1 a_{33}/\rho, \quad f_{22} = -\ell_2 a_{33}^{\dot{\rho}}/\rho + m_2,$$

$$f_{23} = n \ell_2 d_{33} p \rho_1^{\ddot{\rho}\dot{\rho}}/\rho^3, \quad f_{33} = n^2 p \ell_3 (2d_{33} + d_{\theta}^{\dot{\rho}}/\rho)^{\circ} + m_3$$

$$f_{34} = \ell_3 p (1 - d_s)^{\dot{\rho}}/\rho \quad \text{onde}$$

$$d_s = \frac{d_{12}}{d_{11}} \quad d_{\theta} = \frac{d_{11} d_{22} - d_{12}^2}{d_{11}} \quad p = (t_o/\ell_o)^2$$

a_{ij} e d_{ij} são valores adimensionalizados em relação aos valores ℓ_o , t_o , E_o dos elementos das matrizes C e D, (Eq. (2)).

ALVES, D.B.

ANÁLISE NUMÉRICA DE CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃOSumário

É apresentada uma análise numérica para a solução das equações gerais de cascas finas ortotrópicas de revolução sujeitas a cargas arbitrárias. As quatro equações diferenciais, em termos dos deslocamentos e do momento meridional, são separadas por meio de série de Fourier na direção meridional. Um programa digital é desenvolvido para resolver as equações diferenças e vários problemas de cascas são apresentados.

NUMERICAL ANALYSIS OF ORTHOTROPIC SHELLS OF REVOLUTIONSummary

A numerical analysis is presented for the solution of the general equations of thin orthotropic shells of revolution subjected to arbitrary static loadings. A set of four coupled differential equations, in terms of the displacements and meridional moments, are separated by means of Fourier expansions in the circumferential direction. A digital program is developed to solve the difference equations and several shell problems are presented.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 12

PP. 143 - 155



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO REFORÇADAS POR ANÉIS

Domingos Boechat ALVES, D.Sc.
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

1. Introdução

Anéis de reforços de secções abertas e de paredes delgadas são frequentemente analisados como secções compactas desprezando o deslocamento diferencial normal ao plano do a nel. A existência de flexão em elementos curvos de secção a berta de paredes delgadas é sempre acompanhada por torção não uniforme e por empenamento da secção transversal, ainda que o carregamento seja aplicado ao longo do centro de cisa lhamento. Devido a este comportamento e o grande uso desses anéis, uma análise geral de cascas de revolução reforçadas por estes anéis é de grande importância. Neste trabalho são

apresentadas as equações de equilíbrio e as equações de transição em termos do vetor fundamental $U = (u, v, \omega, M_s)$ de cascas de revolução ortotrópicas com propriedades mecânicas e geométricas variáveis ao longo do meridiano [3].

2. Equações fundamentais

Nas figuras 1 e 2 encontram-se as coordenadas e sistemas de referências de um conjunto casca-anel-casca. Os parâmetros geométricos que definem o conjunto casca-anel são adimensionalizados através do comprimento de referência, ℓ_0 , e da espessura de referência, t_0 . O sentido positivo das cargas e tensões resultantes são os indicados nestas figuras. Os pontos $A^\pm(\eta_a, \xi_a, z_a)$ representam as bordas de união casca-anel e todas as grandezas referentes a eles contêm o superscripto "+" ou "-".

As relações geométricas entre o vetor deslocamento do centro de cisalhamento, $V = (u_\eta, u_\xi, u_z, \gamma)$, e o vetor deslocamento de um ponto A genérico da secção, $V_a = (u_{\eta a}, u_{\xi a}, u_{z a}, \gamma_a)$, é

$$u_{\eta a} = u_\eta + \xi_a \gamma; \quad u_{\xi a} = u_\xi - \eta_a \gamma \quad (1)$$

$$\rho_s u_{z a} = (\rho_s - \xi_a) u_z - \xi_a \dot{u}_\xi - \eta_a \dot{u}_\eta + \rho_s \psi_a \beta(\theta),$$

onde $\psi_a = \psi(\eta_a, \xi_a)$ é o valor da função empenamento da secção transversal no ponto A. $\psi(\eta, \xi)$ satisfaz as relações

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \iint \psi d\eta d\xi = \iint \xi \psi d\eta d\xi = \iint \eta \psi d\eta d\xi = 0 \quad (2)$$

$\beta(\theta)$ é o ângulo de torção por unidade de comprimento e pode ser expresso por

$$\beta(\theta) = \rho_s^{-1} (\dot{\gamma} - \rho_s^{-1} \dot{u}_\eta) \quad (3)$$

Se $\bar{M} = (N_\eta, N_\xi, N_z, M_\eta, M_\xi, M_z)$ é o vetor tensões resultante e $P = (p_\eta, p_\xi, p_z, m_\eta, m_\xi, m_z)$ é o vetor carga distribuída no anel, as seis equações de equilíbrio de um elemento, fornecem

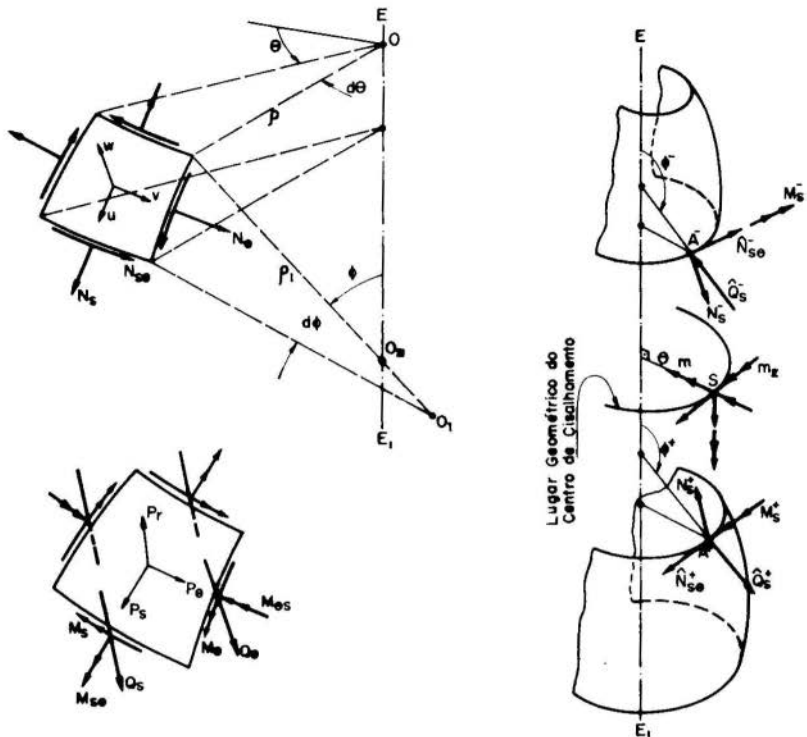


Fig. 1 - Elemento da casca e esforços aplicados no anel.

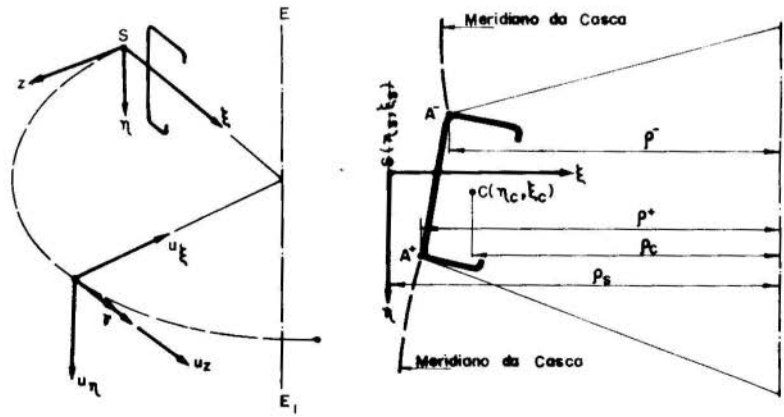


Fig. 2 - Localização do anel de reforço.

$$\begin{aligned}
 \rho_s N_z - \ddot{M}_\eta + \xi_c \ddot{N}_z &= \rho_s \dot{m}_\eta - \rho_s^2 p_\xi \\
 \dot{M}_z + \ddot{M}_\xi + \eta_c \ddot{N}_z &= -\rho_s \dot{m}_\xi - \rho_s^2 p_\eta \\
 \rho_c \dot{N}_z + \dot{M}_\eta &= -\rho_s m_\eta - \rho_s^2 p_z \\
 \dot{M}_z - M_\xi - \eta_c N_z &= -\rho_s m_z
 \end{aligned} \tag{4}$$

O vetor tensões resultantes, $M = (N_z, M_\eta, M_\xi, M_z)$, pode ser expresso em termos do vetor deslocamento do centro de cisalhamento, $V = (u_\eta, u_\xi, u_z, \gamma)$, resultanto

$$\begin{aligned}
 N_z &= -E_a A_a [\rho_s^{-1} \rho_c^{-1} (\xi_c \ddot{u}_\xi + \eta_c \ddot{u}_\eta) - \rho_s^{-1} \dot{u}_z + \rho_c^{-1} u_\xi + \rho_c^{-1} \eta_c \gamma] - \\
 &\quad - E_a I_\eta \rho_c^{-3} (\ddot{u}_\xi + \rho_s^{-1} \eta_c \ddot{u}_\eta + u_\xi - \eta_c \gamma) + E_a I_{\eta\xi} \rho_c^{-2} (\gamma - \rho_s^{-1} \ddot{u}_\eta) \\
 M_\eta &= E_a I_\eta \rho_c^{-2} (\ddot{u}_\xi + \rho_s^{-1} \eta_c \ddot{u}_\eta + u_\xi - \eta_c \gamma) - E_a I_{\eta\xi} \rho_c^{-1} (\gamma - \rho_s^{-1} \ddot{u}_\eta) \\
 M_\xi &= E_a I_\xi \rho_c^{-1} (\gamma - \rho_s^{-1} \ddot{u}_\eta) - E_a I_{\eta\xi} \rho_c^{-2} (\ddot{u}_\xi + \rho_s^{-1} \eta_c \ddot{u}_\eta + u_\xi - \eta_c \gamma) \\
 M_z &= G_a J_a \rho_s^{-1} (\dot{\gamma} + \rho_s^{-1} \dot{u}_\eta) + E_a \Gamma \rho_s^{-3} (\ddot{\gamma} + \rho_s^{-1} \ddot{u}_\eta)
 \end{aligned} \tag{5}$$

onde $A_a, I_\eta, I_\xi, I_{\eta\xi}, J_a, \Gamma$ e E_a são, respectivamente, área, momento de inércia, constante torcional, constante de empennamento da secção transversal e módulo de elasticidade.

3. Equações de transição casca-anel

Tendo as relações tensões deformações em termos do vetor deslocamento do centro de cisalhamento, (Eqs. (5)) e a relação entre este e o vetor deslocamento de um ponto genérico A, (Eqs. (1)), pode-se obter as equações de equilíbrio do anel em termos do vetor deslocamento do ponto A^- ou A^+ . A continuidade do vetor deslocamento nesse ponto fornece a relação entre o vetor deslocamento da casca, $V = (u, v, w)$, e o vetor deslocamento nos pontos A^- ou A^+

$$u_{\eta a}^\pm = u^\pm \sin \phi^\pm - w^\pm \cos \phi^\pm, \quad u_{z a}^\pm = -v^\pm \tag{6}$$

$$u_{\xi a}^{\pm} = -u^{\pm} \cos \phi^{\pm} - \omega^{\pm} \operatorname{sen} \phi^{\pm}, \quad \gamma = -u^{\pm}/\rho_1^{\pm} + \dot{\omega}^{\pm} \quad (6)$$

Portanto pode-se expressar as equações de equilíbrio (4) em termos do vetor V .

Além das cargas diretamente aplicadas ao anel, há a contribuição das forças seccionais da casca definida por $(\bar{Q}_S, \bar{N}_{S\theta}, N_S, M_S)^{\pm}$. Estas forças assim como as cargas diretamente aplicadas e todas as demais variáveis dependentes em θ são expandidas em série de Fourier e adimensionalizadas através dos parâmetros l_0, t_0, E_0 (módulo de elasticidade de referência), obtendo-se os harmônicos fundamentais como função de s . A análise então prossegue para o harmônico n , e, as equações (6) substituídas em (1), fornecem as relações entre o vetor deslocamento e S e o vetor deslocamento da casca nos pontos A^- ou A^+ .

$$V = D U \quad (7)$$

As relações tensões-deslocamento (5) são escritas em forma adimensional resultando em

$$M = B U \quad (8)$$

Agora, as equações de equilíbrio (4) são transformadas por (7) e (8) em

$$H U = L \quad (9)$$

onde os elementos não nulos de H e L estão no apêndice.

As equações da casca em termos das variáveis fundamentais $X = (u, v, \omega, M_S)$, são em forma matricial [3]

$$P\ddot{X} + Q\dot{X} + RX = B \quad (10)$$

onde P, Q, R são matrizes de ordem quatro cujos elementos são funções das propriedades geométricas e material da casca e B um vetor que contém os termos de carga.

Substituindo as equações (7) em (9) e expressando todas as variáveis da casca em termos de X , resulta,

$$\bar{A}^- \ddot{X}^- + \bar{B}^- \dot{X}^- = \hat{C}^+ \ddot{X}^+ + \hat{D}^+ \dot{X}^+ + \bar{C}^- \ddot{X}^- + \bar{D}^- \dot{X}^- + F \quad (11)$$

$$\hat{A}^+ X^+ + \hat{B}^+ X^+ = \hat{C}^+ X^+ + \hat{D}^+ X^+ + \hat{C}^- X^- + \hat{D}^- X^- + F \quad (12)$$

Os elementos das matrizes \hat{A}^\pm , \hat{B}^\pm , \hat{C}^\pm , \hat{D}^\pm são os parâmetros geométricos e de rigidez nos pontos A^\pm das cascas e anel e os elementos de F são os termos de carga.

Se o anel situa-se na borda extrema superior da casca as equações (11) e (12) se reduzem a

$$(\hat{A}^+ - \hat{C}^+) X^+ + (\hat{B}^+ - \hat{D}^+) X^+ = F \quad (13)$$

e similarmente se situado na borda extrema inferior

$$(\hat{A}^- - \hat{C}^-) X^- + (\hat{B}^- - \hat{D}^-) X^- = F \quad (14)$$

Os elementos não nulos das matrizes \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} estão no apêndice.

4. Resultados

Exemplos numéricos são analisados usando o programa para cascas ortotrópicas [3] adaptado para a solução de cascas reforçadas por anéis.

O primeiro exemplo, um cilindro com as bordas extremas fixas, reforçado por um anel de secção transversal em T é sujeito a uma pressão interna p (fig. 3). No segundo exemplo, dois cilindros com nove e dezenove anéis de reforços e bordas extremas fixas, carregados por uma pressão interna p são estudados. Todos os anéis são idênticos e com a mesma geometria do exemplo anterior. Soluções obtidas usando o programa de cascas reforçadas por anéis são comparadas com soluções obtidas pelo programa de cascas ortotrópicas (figura 4).

Uma composição de cascas cilíndrica e cônica reforçada, por um anel de secção T na junção cilindro-cone e sujeita a uma força cisalhante na borda superior extrema é analisada e a configuração deslocamento radial é comparada, quando se considera e quando se despreza o anel (fig. 5).

Finalmente, uma combinação cilindro-tronco cônico reforçado por um anel de secção transversal em I localizado na zona de transição cilindro-tronco cônico é sujeito às se

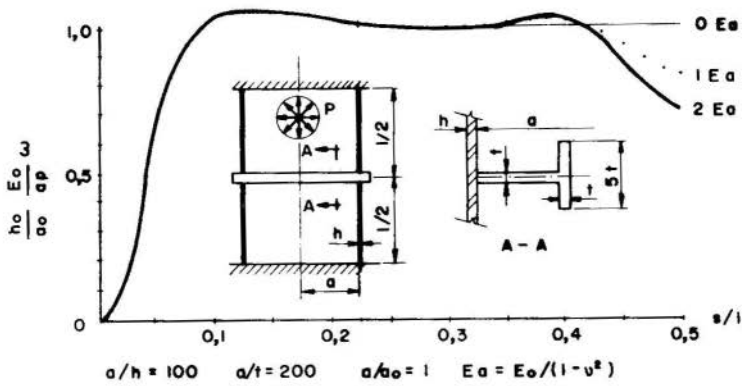


Fig. 3 - Cilindro com anel de reforço.

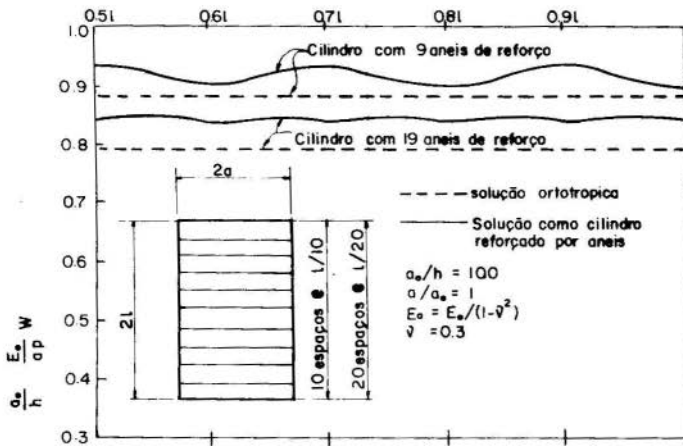


Fig. 4 - Cilindro com vários anéis de reforço.

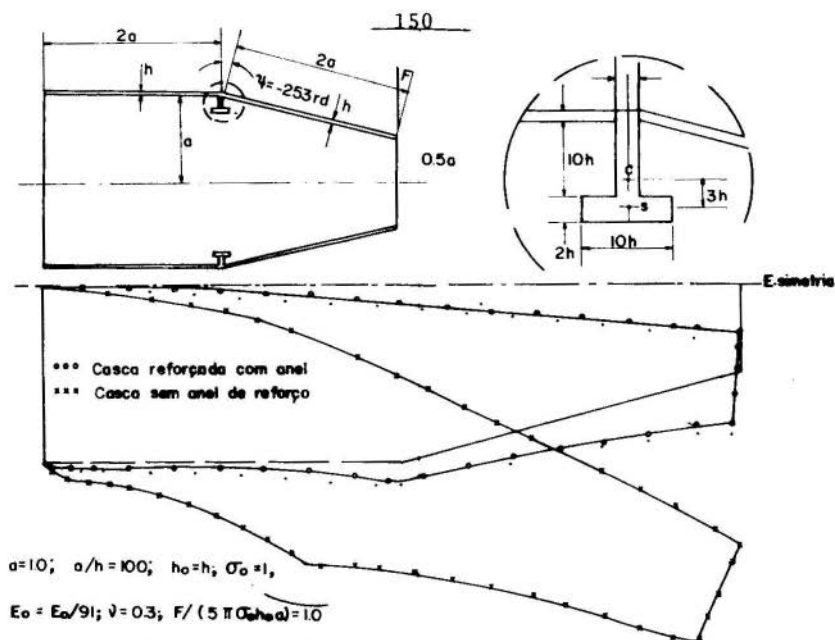
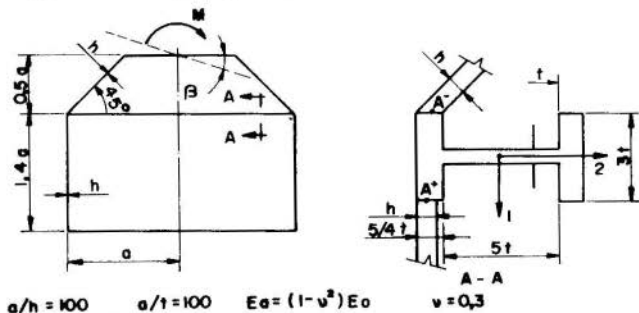


Fig. 5 - Composição cilindro-anel-cone.



PROPRIEDADES SECCIONAIS DO ANEL				$\bar{v} = \beta \frac{\pi E_0}{10^3 M}$
x_{01}/x_{01}^*	x_{02}/x_{02}^*	K_0/K_r	$\psi^+ \psi^-$	
-0,015	-0,03055	0,01280	$-4,583 \times 10^{-4}$	1,5660
+0,015	-0,03055	$0,91 \times 10^8$	$+4,583 \times 10^{-4}$	
-0,015	-0,03055	0,0128	—	1,5658
+0,015	-0,03055	$0,91 \times 10$	—	
—	—	0,0128	—	1,5139
—	—	—	—	
ausencia de anel ($E_0 = 0$)				1,8062

Fig.6- Comparação das diversas hipóteses simplificadoras.

guintes condições de contorno

$$N_s = M / \left(\frac{\pi a^2}{4} \sigma_0 h_0 \cos \alpha \right) ; \quad N_{s\theta} = M \tan \alpha / \left(\frac{\pi a^2}{4} \sigma_0 h_0 \right)$$

$$Q_s = 0 \quad \text{e} \quad M_s = 0$$

na borda superior e fixa na borda inferior.

A rotação β da borda superior é comparada para diversas aproximações usuais em anéis de reforços (fig. 5).

Bibliografia

- [1] Timoshenko, S.P., "Theory of bending and buckling of thin walled members of open cross section", Journal of the Franklin Institute, Vol. 239, No.3 March, No. 4, April, No.5, May, 1954.
- [2] Oden, J.T., "Mechanics of elastic structures", McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
- [3] Alves, D.B., "Análise de cascas ortotrópicas de revolução", Proceedings of the Fourth Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 1977.

Apêndice

Elementos não nulos das matrizes H e L.

$$h_{11} = \rho_c^{-1} \{ k_6 [\eta_c K_a + p \rho_c^{-1} k_1] - n^2 p \rho_s^{-1} k_1 \} ; \quad h_{12} = k_4 n \rho_s^{-1} K_R$$

$$h_{13} = n^2 \rho_s^{-1} k_5 - \rho_c^{-1} k_4 [k_4 K_R + k_5] , \quad h_{14} = n^2 \rho_s^{-1} h_{11}$$

$$h_{21} = -n^2 \rho_s^{-1} [p(k_3 + k_2) + \eta_c \rho_c^{-1} (\eta_c K_R + p \rho_c^{-1} k_1)]$$

$$h_{22} = -n^3 \eta_c \rho_c^{-2} K_R , \quad h_{23} = n^2 \rho_c^{-1} \rho_s^{-1} \{ k_5 (\rho_c + \eta_c) + \eta_c k_4 K_R \}$$

$$h_{24} = -n^2 \rho_s^{-2} [p(k_3 + n^2 k_2) + n^2 \eta_c \rho_c^{-1} (\eta_c K_R + p \rho_c^{-1} k_1)]$$

$$h_{31} = n \eta_c \rho_s^{-1} K_R , \quad h_{32} = n^2 \rho_c \rho_s^{-2} K_R , \quad h_{33} = -n \rho_s^{-1} k_4 K_R$$

$$h_{34} = n^2 \rho_s^{-1} h_{31}, \quad h_{41} = -pk_2 - n^2 pk_3 + \eta_c \rho_s^{-1} (\eta_c K_r + p \rho_c^{-1} k_1)$$

$$h_{42} = -h_{31}, \quad h_{43} = k_5 + \eta_c \rho_c^{-1} (k_4 K_r + k_5)$$

$$h_{44} = -n^2 \rho_s^{-1} (pk_3 + k_2) + \eta_c \rho_c^{-1} (\eta_c K_r + p \rho_c^{-1} k_1)$$

onde

$$K_\eta = KI_\eta, \quad K_\xi = KI_\xi, \quad K_{\eta\xi} = KI_{\eta\xi}, \quad K = E_a/E_o h_o^3 \ell_o$$

$$K_G = KJ_r G_a/E_a, \quad K_r = K\Gamma/\ell_o^2, \quad p = t_o^2/\ell_o^2$$

$$k_1 = K_{\eta\xi} - \eta_c \rho_c^{-1} K_\eta, \quad k_2 = \rho_c^{-1} (K_\xi - \rho_c^{-1} \eta_c K_{\eta\xi})$$

$$k_3 = \rho_s^{-1} (K_G + n^2 \rho_s^{-1} K_r); \quad k_4 = 1 - n^2 \rho_s^{-1} \xi_c,$$

$$k_5 = (1 - n^2) p \rho_c^{-2} K_\eta, \quad k_6 = 1 - n^2 \rho_c^{-1} \xi_c$$

$$(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) = (np\bar{m}_\eta - \rho_s \bar{p}_\xi, -np\bar{m}_\xi - \rho_s \bar{p}_\eta, p\bar{m}_\eta + \rho_s \bar{p}_z, -\rho_s p\bar{m}_z)$$

onde o vetor $\bar{M} = (\bar{p}_\eta, \bar{p}_\xi, \bar{p}_z, \bar{m}_\eta, \bar{m}_\xi, \bar{m}_z)$ e

$$\bar{M} = M - R^- S^- + R^+ S^+$$

onde $S^\pm = (Q_s^\pm, N_s^\pm, \hat{N}_{s\theta}, M_s)$ e R^\pm são matrizes 5×4 , cujos elementos não nulos são:

$$r_{11}^\pm = -r_{22}^\pm = \cos \phi^\pm, \quad r_{12}^\pm = r_{21}^\pm = \text{sen } \phi^\pm, \quad r_{33} = 1$$

$$r_{43}^\pm = -\xi_a^\pm p^{-1}, \quad r_{53}^\pm = \eta_a^\pm p^{-1}, \quad r_{51}^\pm = -\eta_a^\pm p^{-1} \text{sen } \phi^\pm + \xi_a^\pm p^{-1} \cos \phi^\pm$$

$$r_{52}^\pm = \eta_a^\pm p^{-1} \cos \phi^\pm + \xi_a^\pm p^{-1} \text{sen } \phi^\pm, \quad r_{54} = 1$$

Elementos não nulos de \hat{A}^\pm e \hat{B}^-

Para $i = 1, 4$

$$\hat{a}_{i3}^\pm = -h_{i1} - \eta_a^\pm h_{i3} - \xi_1 \xi_2 h_{i2}, \quad \hat{b}_{i2}^\pm = \xi_3 h_{i2} - \cos \phi^\pm h_{i4}$$

$$b_{i1}^{\pm} = \rho_s^{-1} h_{i1} - \xi_4 h_{i3} + (n\rho_s^{-1} \xi_3 \xi_5 + \xi_2 \rho_1^{\pm} + \rho_s^{-1} \text{sen } \phi^{\pm}) h_{i2}$$

$$b_{i3}^{\pm} = \text{sen } \phi^{\pm} h_{i3} + (n\rho_s^{-1} \xi_3 \xi_5 + \xi_1 \cos \phi^{\pm}) h_{i2}$$

Elementos não nulos de \hat{C}^{\pm} e \hat{D}^{\pm}

$$\hat{c}_{11}^{\pm} = \pm a_{11}^{\pm} \rho_s \cos \phi^{\pm}, \quad \hat{c}_{12}^{\pm} = n a_{33}^{\pm} \rho_s^{-1} \xi_a^{\pm}$$

$$\hat{c}_{13}^{\pm} = \pm p \rho_s (\rho^{\pm})^2 \text{sen } \phi^{\pm} [(2 - \rho_s^{-2} \xi_a^{\pm}) n^2 d_{33}^{\pm} + d_0^{\pm} \cos^2 \phi^{\pm}]$$

$$\hat{c}_{14}^{\pm} = \mp \rho_s p \text{sen } \phi^{\pm}, \quad \hat{c}_{21}^{\pm} = \pm a_{11}^{\pm} \rho_s \text{sen } \phi^{\pm}, \quad \hat{c}_{22}^{\pm} = \mp n^2 a_{33}^{\pm} \eta_a^{\pm}$$

$$\hat{c}_{23}^{\pm} = \mp p \rho_s (\rho^{\pm})^2 [(\rho_s^{-1} \eta_a^{\pm} \text{sen } \phi^{\pm} + 2 \cos \phi^{\pm}) n^2 d_{33}^{\pm} + d_0^{\pm} \cos^3 \phi^{\pm}]$$

$$\hat{c}_{24}^{\pm} = \pm p \rho_s \cos \phi^{\pm}, \quad \hat{c}_{32}^{\pm} = \mp (\xi_a + \rho_s) a_{33}^{\pm}$$

$$\hat{c}_{33}^{\pm} = \mp n p d_{33}^{\pm} (\rho_s + \xi_a) (\rho^{\pm})^2 \text{sen } \phi^{\pm}, \quad \hat{c}_{41}^{\pm} = \mp a_{11}^{\pm} \rho_s \xi_5$$

$$\hat{c}_{43}^{\pm} = \pm \rho_s p (\rho^{\pm})^2 (2 n^2 d_{33}^{\pm} + d_0^{\pm} \cos \phi^{\pm}) \xi_6; \quad \hat{c}_{44}^{\pm} = \mp \rho_s p \xi_6$$

$$d_{11}^{\pm} = \pm (\rho^{\pm})^{-1} (\rho_s a_{12}^{\pm} \cos^2 \phi^{\pm} + n^2 a_{33}^{\pm} \xi_a^{\pm} / \rho_s^{\pm})$$

$$d_{12}^{\pm} = \pm n \cos \phi^{\pm} (\rho_s a_{12}^{\pm} + \xi_a^{\pm} a_{33}^{\pm} / \rho_s)$$

$$d_{13}^{\pm} = \mp \rho_s \cos \phi^{\pm} \{ n^2 p \text{sen } \phi^{\pm} [(2 - \xi_a / \rho_s^3) d_{33}^{\pm} + d_0^{\pm}] / (\rho^{\pm})^3 - \\ - a_{11}^{\pm} / \rho_1^{\pm} - a_{12}^{\pm} \text{sen } \phi^{\pm} / \rho^{\pm} \}$$

$$d_{14}^{\pm} = \mp p \rho_s (1 + d_s^{\pm}) \text{sen } \phi^{\pm} \cos \phi^{\pm} / \rho^{\pm},$$

$$d_{21}^{\pm} = \pm (n^2 a_{33}^{\pm} \eta_a^{\pm} + \rho_s a_{12}^{\pm} \text{sen } \phi^{\pm} \cos \phi^{\pm}) / \rho^{\pm}$$

$$d_{22}^{\pm} = \pm n (\xi_a^{\pm} a_{33}^{\pm} + \rho_s a_{12}^{\pm} \text{sen } \phi^{\pm}) / \rho^{\pm}; \quad d_{24}^{\pm} = \pm p \rho_s (1 - d_s^{\pm}) \cos \phi^{\pm} / \rho^{\pm}$$

$$d_{33}^{\pm} = \pm n^2 p \rho_s \cos \phi^{\pm} [(2 \cos \phi^{\pm} + \eta_a^{\pm} \text{sen } \phi^{\pm} / \rho_s) d_{33}^{\pm} + d_0^{\pm} \cos \phi^{\pm}] \\ \pm (a_{11}^{\pm} / \rho_1^{\pm} + a_{12}^{\pm} \text{sen } \phi^{\pm} / \rho^{\pm}) \rho_s \text{sen } \phi^{\pm}$$

$$d_{24}^{\pm} = \pm p \rho_s (1 - d_s^{\pm}) \cos^2 \phi^{\pm} / \rho^{\pm}; \quad d_{31}^{\pm} = \pm n a_{33}^{\pm} (\rho_s + \xi_a^{\pm}) / \rho^{\pm}$$

$$d_{32}^{\pm} = \pm a_{33}^{\pm} (\rho_s + \xi_a^{\pm}) \cos \phi^{\pm} / \rho^{\pm}; \quad d_{33}^{\pm} = \pm n p d_{33}^{\pm} (\rho_s + \xi_a^{\pm}) \operatorname{sen} \phi^{\pm} \cos \phi^{\pm} / (\rho^{\pm})^3$$

$$d_{41}^{\pm} = \mp a_{12}^{\pm} \rho_s \xi_5 \cos \phi^{\pm} / \rho^{\pm}; \quad d_{42}^{\pm} = \mp n a_{12}^{\pm} \rho_s \xi_5 / \rho^{\pm}$$

$$d_{43}^{\pm} = \mp \rho_s [n^2 p (2d_{33}^{\pm} + d_{\theta}^{\pm}) \xi_6 \cos \phi^{\pm} / (\rho^{\pm})^3 + (a_{11}^{\pm} / \rho_1^{\pm} + a_{12}^{\pm} \operatorname{sen} \phi^{\pm} / \rho^{\pm}) \xi_5]$$

$$d_{14}^{\pm} = \mp p \rho_s [\xi_6 (1 - d_s^{\pm}) \cos \phi^{\pm} / \rho^{\pm} - 1]$$

onde a_{11}^{\pm} , a_{12}^{\pm} , a_{22}^{\pm} , a_{33}^{\pm} , d_{11}^{\pm} , d_{12}^{\pm} , d_{22}^{\pm} , d_{33}^{\pm} são respectivamente as constantes de rigidez extensiva e flexural das cascas contíguas e

$$d_{\theta} = \frac{d_{11} d_{22} - d_{12}^2}{d_{11}}, \quad d_s = \frac{d_{12}}{d_{11}}, \quad p = \left(\frac{t_0}{\ell_0}\right)^2$$

$$\xi_1 = \frac{n \psi^{\pm}}{\rho_s}, \quad \xi_2 = 1 - \xi_a^{\pm} / \rho_s, \quad \xi_3 = \rho_s / (\rho_s - \xi_a^{\pm})$$

$$\xi_4 = \cos \phi^{\pm} - \eta_a^{\pm} / \rho_s, \quad \xi_5 = \xi_a^{\pm} \cos \phi^{\pm} - \eta_a^{\pm} \operatorname{sen} \phi^{\pm}$$

$$\xi_6 = \xi_a^{\pm} \cos \phi^{\pm} - \eta_a^{\pm} \operatorname{sen} \phi^{\pm}$$

ALVES, D.B.

CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO REFORÇADAS POR ANÉIS

Sumário

Este trabalho descreve um método de análise para soluções de cascas ortotrópicas de revolução reforçadas com anéis de secção aberta e de paredes delgadas.

Equações de compatibilidade casca-anel são obtidas, fornecendo interrelações gerais que podem ser utilizadas com qualquer equação da teoria clássica das cascas delgadas, afim de levar em conta o efeito do anel de reforço.

Um programa digital codificado em FORTRAN IV foi usado para a solução de vários problemas.

ORTHOTROPIC SHELLS OF REVOLUTION REINFORCED BY RINGS

Summary

This report describes a method of analysis for solutions of orthotropic shells of revolution with thin-walled open cross-section ring stiffeners.

Ring-shell interrelations are described resulting in general relationship which can be combined with any shell linear equations to take in to account of the effect of the ring stiffeners.

A program in FORTRAN IV, was developed and several problems solved.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 13
PP. 157 - 167



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

VIBRACIONES DE CASCARAS REBAJADAS

Edgardo Taroco
Raúl Feijóo
Hector Rojas
Luiz Bevilacqua
Laboratório de Cálculo, CBPF
Av. Wenceslau Braz, 71, zc-82
Rio de Janeiro. RJ, Brasil

1. Introducción

Se analiza en este trabajo, la respuesta estática y frecuencias naturales de vibración de cáscaras rebajadas dentro de la primera aproximación de Love y de las hipótesis simplificadoras de Mushtari-Vlasov [1].

El tensor de deformación es obtenido a partir del gradiente del desplazamiento referido a la terna ortogonal in

trínseca de la superficie media en la configuración inicial de la cáscara.

El movimiento bajo la acción de cargas, así como los modos y frecuencias naturales de vibración de cáscaras rebajadas son determinados mediante la aplicación de principios variacionales.

Por último, obtienenese a través del Método de Elementos Finitos soluciones aproximadas que son comparadas con las obtenidas por otros autores.

2. Geometría de la superficie media

Una configuración [2,3] C_0 de una cáscara rebajada que da definida a través de su superficie media S_0 y de su espesor h , dadas por:

$$S_0 = \{X_0 \in E^3; \underline{X}_0 = X^\alpha \underline{e}_\alpha + X^3 (X^1, X^2) \underline{e}_3, (X^1, X^2) \in \bar{\Omega}\}$$

$$C_0 = \{X \in E^3; \underline{X} = \underline{X}_0 + \zeta \underline{n}, |\zeta| \leq \frac{h}{2}\}$$

donde:

- E^3 : espacio Euclideo puntual tridimensional.
- $\{\underline{e}_i\}_{i \leq 3}$: base ortonormal.
- \underline{n} : normal a la superficie S_0 supuesta siempre definida en todo punto de S_0 .
- Ω : abierto de E^2 de contorno Γ , $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$

OBSERVACIÓN. Los índices repetidos indican suma dentro de la convención de Einstein. El rango de las letras latinas es 3 y el de las letras griegas 2.

Las hipótesis de cáscaras rebajadas implican:

$$|X^3_{,\alpha} X^3_{,\beta}| \ll 1$$

donde $f_{,\alpha} = \frac{\partial f}{\partial X^\alpha}$, $f_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^\alpha \partial X^\beta}$ por lo tanto para este caso la terna intrínseca [5] de la superficie S_0 y los coeficientes de la Primera y Segunda Forma Fundamental resultan respectivamente:

$$\underline{t}_{,\alpha} = \underline{e}_{,\alpha} + X^3_{,\alpha} \underline{e}_3, \quad \underline{n} = X^3_{,\alpha} \underline{e}_{,\alpha} + \underline{e}_3$$

$$g_{\alpha\alpha} = 1 + (X^3_{,\alpha})^2 \approx 1, \quad g_{\alpha\beta} = X_{,\alpha} X_{,\beta}$$

$$L_{\alpha\beta} = -X^3_{,\alpha\beta}$$

3. Primera Aproximación de Love e Hipótesis Simplificadoras de Mushtari-Vlasov.

Las ecuaciones básicas que describen el comportamiento de cáscaras delgadas fueran derivadas originalmente por Love [5,4,7], quien extendió a cáscaras, los postulados simplificadores empleados por Kirchhoff en la teoría de placas.

Las suposiciones básicas de esta aproximación consisten en admitir que:

- i) La cáscara es delgada.
- ii) Las deformaciones y los desplazamientos referidos a la configuración inicial, son suficientemente pequeños. Es decir:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{U} + \nabla \underline{U}^T + \nabla \underline{U}^T \nabla \underline{U}) \approx \frac{1}{2} (\nabla \underline{U} + \nabla \underline{U}^T) = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

donde \underline{U} es el campo de desplazamiento de cualquier punto de la cáscara, $\nabla \underline{U}$ es el gradiente del desplazamiento y $\underline{\underline{\varepsilon}}$ es el tensor de deformación lineal.

- iii) La componente σ_{nn} del tensor de tensiones $\underline{\underline{\sigma}}$ es despreciada en las ecuaciones constitutivas.
- iv) Las normales a la superficie media S_0 en la configuración no deformada, permanecen normales a la superficie media S_i de toda configuración ya deformada C_i . A su vez, la distancia entre puntos sobre una misma normal permanece constante al pasar de C_0 a C_i . Lo anterior implica:

$$\underline{U} = \underline{u} + \zeta(\underline{n}_i - \underline{n})$$

donde:

$\underline{n}, \underline{n}_i$: normales a S_0 en $M_0 \in S_0$ y a S_i en $M_i \in S_i$, res

pectivamente.

$\underline{u}, \underline{U}$: desplazamientos de $M_0 \in S_0$ y de $N_0 \in C_0$ situado sobre la normal a S_0 en M_0 .

ζ : distancia entre M_0 y N_0 .

OBSERVACIÓN. Para giros pequeños ($\text{tg}(\underline{n}_i, \underline{n}) \approx 0$) la componente según \underline{n} del vector $\zeta(\underline{n}_i - \underline{n})$ es despreciable frente a las componentes según \underline{t}_1 y \underline{t}_2 .

Por tanto, refiriendo \underline{U} al triedro intrínseco en M_0 se tiene:

$$\underline{U} = \underline{u} + \zeta \underline{\beta} \quad ; \quad \underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, 0)$$

Introduciendo esta expresión en el $\nabla \underline{U}|_{\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{n}}$ [5], y teniendo en cuenta las aproximaciones de Love se obtiene:

$$\underline{e} = \underline{e}_0 + \zeta \underline{k}$$

donde:

$$(\underline{e}_0)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{,\beta}^\alpha + u_{,\alpha}^\beta) - X_{,\alpha\beta}^3 u^3 = e_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} (\underline{k})_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} = & - [u_{,\alpha\beta}^3 + u^v X_{,\nu\beta\alpha}^3 + \\ & + \frac{1}{2}(u_{,\beta}^v X_{,\nu\alpha}^3 + u_{,\alpha}^v X_{,\nu\beta}^3)] \end{aligned}$$

Ahora bien, las hipótesis simplificadoras introducidas por Mushtari y Vlasov [1] en el análisis de cáscaras rebajadas consisten en suponer que:

$$[(u^v X_{,\nu\alpha}^3)_{,\beta} / u_{,\alpha\beta}^3] \ll 1.$$

Con estas hipótesis la expresión de $(\underline{k})_{\alpha\beta}$ se reduce a:

$$(\underline{k})_{\alpha\beta} = - u_{,\alpha\beta}^3$$

4. Problemas Variacionales

Para la determinación del campo de desplazamientos y de las frecuencias y modos propios de vibración se recurre al principio de los trabajos virtuales [6] y mínimo del coeficiente de Rayleigh. Para ello, a los efectos de facilitar la posterior aplicación del Método de Elementos Finitos, a la vez que, poner en evidencia las deformaciones en el plano, las deformaciones que dependen de la geometría de S_0 y las que dependen de los cambios de curvatura, es conveniente introducir los siguientes vectores:

$$\underline{e} = (e_{11}, e_{22}, 2e_{12}) = \underline{e}_p + \underline{e}_g + \zeta \underline{k}$$

$$\underline{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$$

donde:

$$\underline{e}_p = (u^1, u^2, u^1_{,2} + u^2_{,1}) = \underline{e}_p(\underline{u})$$

$$\underline{e}_g = -(X^3_{,11}, X^3_{,22}, 2X^3_{,12})u^3 = \underline{e}_g(u^3)$$

$$\underline{k} = -(u^3_{,11}, u^3_{,22}, 2u^3_{,12}) = \underline{k}(u^3)$$

Si el material de la cáscara es Hookeano e isotrópico, las ecuaciones constitutivas resultan:

$$\underline{\sigma} = D \underline{e}$$

donde:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} E : \text{módulo de elasticidad de} \\ \text{Young.} \\ \nu : \text{coeficiente de Poisson.} \end{array}$$

Ahora bien, si se define:

Γ_σ : parte del contorno Γ de Ω donde las tensiones están prescritas.

Γ_u : parte del contorno Γ de Ω donde los desplazamientos $\underline{u} = (u^1, u^2, u^3)$ están prescritos.

Kin : espacio de todos los desplazamientos \underline{u} tales que satisfacen las condiciones impuestas en Γ_u .

Var : espacio de variaciones admisibles \underline{v} tales que $\underline{v}|_{\Gamma_u} = \underline{0}$.

\underline{q} : fuerza por unidad de superficie de Ω .

\underline{N} : fuerza por unidad de contorno Γ_σ .

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \{ h [\underline{e}_p(\underline{v}) \cdot D \underline{e}_p(\underline{u}) + \underline{e}_p(\underline{v}) \cdot D \underline{e}_g(u^3) + \underline{e}_g(v^3) \cdot D \underline{e}_p(\underline{u}) + \underline{e}_g(v^3) \cdot D \underline{e}_g(u^3)] + \frac{h^3}{12} \underline{k}(v^3) \cdot D \underline{k}(u^3) \} d\Omega$$

$$(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} h \rho \underline{u} \cdot \underline{v} d\Omega, \quad \rho : \text{densidad del material de la c\u00e1s cara.}$$

$$f(\underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{v} \cdot \underline{q} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{v} \cdot \underline{N} d\Gamma_\sigma$$

Se podr\u00e1 plantear los siguientes problemas variacionales:

i) Determinar $\underline{u} \in Kin$ t.q.

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = f(\underline{v}) \quad \text{para todo } \underline{v} \in Var$$

Este problema variacional es equivalente al principio de los trabajos virtuales en Mec\u00e1nica del Continuo [6]. Dados el sistema de fuerzas $(\underline{q}, \underline{N})$ permite determinar el correspondiente campo de desplazamientos.

ii) Determinar el escalar λ y el campo $\underline{u} \in Kin$ t.q.

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \lambda(\underline{u}, \underline{v}) \quad \text{para todo } \underline{v} \in Var$$

Este problema variacional es equivalente al m\u00ednimo del cociente de Rayleigh; permite determinar los autovalores y modos propios de vibraciones naturales.

Del an\u00e1lisis de estos principios [2] se obtiene la existencia y unicidad de las respectivas soluciones, permitiendo adem\u00e1s, estimativas a priori de los errores en las

soluciones aproximadas.

5. Aproximación por el Método de Elementos Finitos

Soluciones aproximadas de los problemas variacionales propuestos en la sección anterior, son obtenidas a través del Método de Elementos Finitos.

Para ello consideremos un elemento rectangular de 4 nudos con 6 grados de libertad en cada nudo. Estos grados de libertad son los valores que $u^1, u^2, u^3, u^3, u^3_{,1}, u^3_{,2}$ y $u^3_{,12}$ toman en dichos nudos. En este caso la representación, a nivel de cada elemento, del campo de desplazamiento está dada por:

$$(u^1, u^2)^T = \phi \underline{u}_p^N, \quad u^3 = \underline{\psi}^T \underline{u}_b^N$$

donde $\phi [7]$ es la matriz de interpolación del campo de desplazamientos u^1, u^2 y $\underline{\psi} [7]$ es el vector de interpolación del campo de desplazamientos u^3 .

Introduciendo estas expresiones en los principios variacionales, se arriba a nivel de cada elemento a:

$$K \underline{u}^N = \underline{f}, \quad (K - \omega^2 M) \underline{u}^N = 0$$

donde:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 \\ K_4^T & K_2 + K_3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 + M_3 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \int_{\Omega} h (H_1 \phi)^T D (H_1 \phi) d\Omega, \quad K_2 = \int_{\Omega} h^3 (H_2 \psi^T)^T D (H_2 \psi^T) d\Omega$$

$$K_3 = \int_{\Omega} h [(H_2 X^3) \psi^T]^T D [(H_2 X^3) \psi^T] d\Omega,$$

$$K_4 = - \int_{\Omega} h (H_1 \phi)^T D [(H_2 X^3) \psi^T] d\Omega$$

$$M_1 = \int_{\Omega} h \rho \phi^T \phi \, d\Omega \quad , \quad M_2 = \int_{\Omega} h \rho \psi \psi^T \, d\Omega \quad ,$$

$$M_3 = \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} \rho (H_3 \psi^T)^T (H_3 \psi^T) \, d\Omega$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \\ D_2 & D_1 \end{bmatrix} \quad , \quad H_2 = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ 2D_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad H_3 = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$D_{\alpha} = \frac{\partial \cdot}{\partial X^{\alpha}} \quad , \quad D_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial X^{\alpha} \partial X^{\beta}}$$

$$\underline{f} = \int_{\Omega} \Lambda^T \underline{q} \, d\Omega + \int_{\Omega} \Lambda^T \underline{N} \, d\Omega \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi^T \end{bmatrix}$$

6. Aplicaciones Numéricas

El elemento finito indicado en la sección anterior fué utilizado en la determinación de la respuesta estática, modos y frecuencias naturales de vibración tanto en placas como en cáscaras rebajadas.

- i. Respuesta Estática. Se determinó la deflexión en el centro de una cáscara cilíndrica empotrada en sus cuatro bordes, sometida a carga normal uniforme de características:

$$a = b = 20 \text{ in.} \quad , \quad h = 0.125 \text{ in.} \quad , \quad E = 450.000 \text{ lb/in}^2 \quad , \\ \nu = 0.3 \quad , \quad \bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$$

Dada la simetría se estudió la cuarta parte de la cáscara, que fué particionada en 4 y 16 elementos. En Tabla 1 se presentan resultados obtenidos para tres valores de $1/R$, donde R es el radio del cilindro.

- ii. Frecuencias naturales de vibración. En Tabla 2 se presentan las frecuencias correspondientes a una cáscara cilíndrica con cuatro bordes empotrados, de características:

$$a = 4 \text{ in.} \quad , \quad b = 3 \text{ in.} \quad , \quad h = 0.013 \text{ in.} \quad , \quad R = 30 \text{ in.} \\ E = 10^7 \text{ lb/in}^2 \quad , \quad \nu = 0.33 \quad , \quad \rho = 2.48 \times 10^{-4} \text{ lb sec}^2/\text{in}^4$$

La cuarta parte de la cáscara fue estudiada con una partición de 16 elementos, combinando condiciones de contorno simétricas y antisimétricas en los ejes de simetría, dadas por:

$$\begin{aligned} S + u^1 = u^3_{,1} = 0 & & A + u^1 = u^3 = 0 \\ S + u^2 = u^3_{,2} = 0 & & A + u^2 = u^3 = 0 \end{aligned}$$

Los resultados fueron comparados con los obtenidos por Petyt [9].

Tabla 1. Desplazamientos, según la normal, en el centro de la cáscara

1/R	0.	0.005	0.01
4 elementos 2x2	0.5029	0.1693	0.0523
16 elementos 4x4	0.5029	0.1757	0.0553
Solución Exacta	0.5	—	0.055 [9]

Tabla 2. Frecuencias de cáscaras cilíndricas rebajadas con bordes empotrados.

Modo	λ (aprox)	λ (Petyt [8])
S.S, 1.3	984	973
S.S, 1.3	1334	1311
S.A, 2.1	1366	1371
S.A, 2.3	1798	1775

Agradecimiento. Este trabajo fue financiado en parte por el CNPq (T.C. 2222.0712/76).

Bibliografía

- [1] Novozhilov, V.V., "Thin Shell Theory", Noordhoff Ltda., (1964).
- [2] Feijóo, R., Taroco, E., Raupp, M. e Moura, C., Soluciones Aproximadas del Problema de Cáscaras Rebajadas a través del Método de Elementos Finitos, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, Póços de Caldas, MG, Brasil, (1977).
- [3] Truesdell, C., "Elements of Continuum Mechanics", Springer, (1966).
- [4] Love, A., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover, (1944).
- [5] Taroco, E., Feijóo, R., Rojas, H., e Bevilacqua, L., Vibraciones de Cáscaras Rebajadas, Publicación Interna CBPF, Nº A0019/77, (1977).
- [6] Taroco, E., Feijóo, R., e Martins, L., Forma Incremental del Teorema de los Trabajos Virtuales Aplicado a Grandes Deformaciones, 1^{er} Simposio Met.Num. en Mec.Cont., ASAMA, Bs.As., Argentina, (1977).
- [7] Taroco, E., Elasticidad no Lineal y su Aplicación a Grandes Deflexiones en Placas Delgadas, T.Ms., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1975).
- [8] Petyt, M., Vibration of Curved Plates, J. Sound Vib., Vol. 15, Nº 3, (1971).
- [9] Brebbia, C., e Connor, J., Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis, Proc. Am.Soc.Civ. Engrs., 95, EM1, (1969).

TAROCO, E., FEIJÓO, R., ROJAS, H., y BEVILACQUA, L.

VIBRACIONES DE CASCARAS REBAJADAS

Resumen

La respuesta estática, las frecuencias y modos propios de vibración de cáscaras rebajadas, dentro de la primera aproximación de Love e hipótesis simplificadoras de Mushtari-Vlasov, son analizadas a través del principio de los trabajos virtuales y del cociente de Rayleigh. Resultados numéricos son presentados.

VIBRATION OF SHALLOW SHELLS

Summary

Using the Love-Mushtari-Vlasov's theory of shallow shells, a variational formulation for the static response, and for the natural modes of vibration of shells are discussed. Some numerical results obtained with finite elements are presented.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 14

PP. 169 - 182



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

VIBRAÇÕES DE CASÇAS AXISSIMÉTRICAS

COM MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

Abimael F. LOULA

Augusto C. GALBÃO

Edgardo TAROCO

Raul FEIJÓO

Laboratório de Cálculo

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/CNPq

Rio de Janeiro, Brasil

1. Introdução

Os estudos desenvolvidos na área de vibrações de cascas axissimétricas com movimento de rotação, têm procurado principalmente analisar a variação das frequências naturais com a velocidade de rotação. Nos trabalhos [1] a [4] seus autores, utilizando soluções analíticas, estudaram esse efeito em cascas cilíndricas, visando principalmente

aplicações industriais em reatores de centrífugas e turbinas a gás.

Mais recentemente, Pačovan, [5], utilizou o método dos elementos finitos na análise das vibrações e da estabilidade de cascas de revolução anisotrópicas, sujeitas a movimento de rotação.

No trabalho aqui apresentado, cuja principal aplicação ocorre em moinhos de bola (pelotização de minérios), utiliza-se o método dos elementos finitos semi-analítico, para a determinação da resposta dinâmica de cascas cônicas girantes, submetidas a um carregamento interno, resultante da presença de massa, que embora no interior da casca, não a acompanha em seu movimento de rotação.

2. Formulação Variacional do Problema

Nesta seção será feito o estudo da dinâmica de cascas cônicas, sujeitas a um movimento de rotação em torno do eixo de simetria, a partir do teorema dos trabalhos virtuais, que conduz diretamente à forma fraca das equações diferenciais do movimento.

2.1 - Teorema dos Trabalhos Virtuais

O teorema dos trabalhos virtuais aplicado à dinâmica de corpos elásticos é expresso por:

$$\delta W = \int_{C_0} \rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} \cdot \delta \underline{u} \, dV_0 + \int_{C_0} \underline{T} \cdot \delta \underline{E} \, dV_0 \quad (1)$$

onde δW é o trabalho virtual das forças externas que atuam sobre o corpo, e as integrais que aparecem em (1), representam respectivamente o trabalho virtual associado às forças de inércia e a variação da energia de deformação do corpo, referidas à configuração C_0 . ρ é a massa específica, $d^2 \underline{u}/dt^2$ é a aceleração de um ponto do corpo, \underline{T} é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, \underline{E} é o tensor de deformações de Cauchy e (\cdot) denota produto escalar de vetores e tensores.

Se se utiliza as hipóteses de Kirchhoff-Love para cas

cas delgadas, as integrais de volume da equação (1) são reduzidas a integrais sobre a superfície média da casca, e desprezando-se a inércia de rotação, tem-se:

$$\delta W = \int_{S_0} \rho h \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} \cdot \delta \underline{u} dS_0 + \int_{S_0} (\underline{N} \cdot \delta \underline{\epsilon} + \underline{M} \cdot \delta \underline{\chi}) dS_0 \quad (2)$$

onde: h é a espessura da casca, \underline{u} é o campo de deslocamentos na superfície média, \underline{N} e \underline{M} são tensores que representam os esforços e momentos resultantes, $\underline{\epsilon}$ e $\underline{\chi}$ são tensores de deformação e de variação da curvatura da superfície média.

Para o problema que se pretende analisar, é conveniente se utilizar uma configuração de referência dinâmica, adotando-se para tanto um sistema dinâmico intrínseco, isto é, um sistema não inercial, definido sobre a superfície média da casca, e que acompanha os movimentos rígidos de rotação da mesma (fig. 1).

A análise que se segue restringe-se a vibrações lineares de cascas cônicas, confundindo-se portanto a configuração dinâmica de referência, com a configuração deformada.

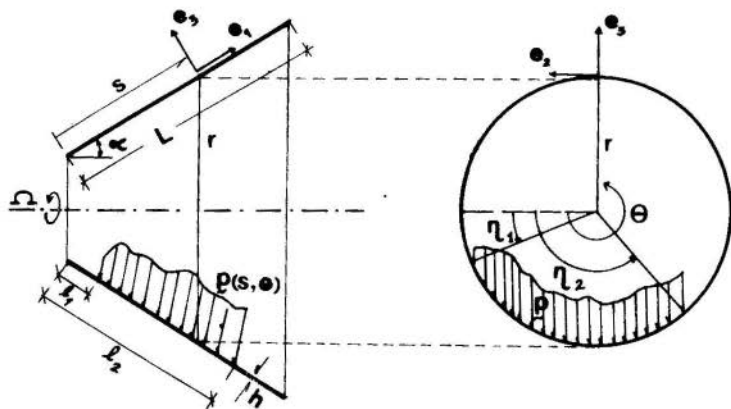


FIG. 1 Casca cônica axissimétrica girando com velocidade angular Ω em torno do eixo de simetria.

a) Trabalho Virtual das Forças de Inércia

Seja $\underline{u}(s, \theta, t)$ o campo de deslocamentos sobre a superfície média, referido à configuração dinâmica, e $\Omega(t)$ a velocidade de rotação da casca. A aceleração absoluta de um ponto da superfície média é:

$$\frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} = \underline{a}_0 + \dot{\Omega} \underline{z} \underline{u} - \Omega^2 \underline{z}^T \underline{z} \underline{u} + 2\Omega \underline{z} \dot{\underline{u}} + \ddot{\underline{u}} \quad (3)$$

sendo:

$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3$; $\underline{a}_0 = \dot{\Omega} r \underline{e}_2 - \Omega^2 r (\sin \alpha \underline{e}_1 + \cos \alpha \underline{e}_3)$ e onde $(\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$ e \underline{z} é um tensor antissimétrico cujas componentes não nulas são:

$$z_{21} = -z_{12} = \sin \alpha \quad ; \quad z_{23} = -z_{32} = \cos \alpha \quad (4)$$

O trabalho virtual associado às forças de inércia é portanto:

$$\int_{s_0} \rho h \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} dS_0 = \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho h (\underline{a}_0 \cdot \delta \underline{u} + \dot{\Omega} \underline{z} \underline{u} \cdot \delta \underline{u} - \Omega^2 \underline{z} \underline{u} \cdot \underline{z} \delta \underline{u} + 2\Omega \underline{z} \dot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} + \ddot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u}) r d\theta ds \quad (5)$$

b) Energia de Deformação

De acordo com a teoria de cascas delgadas de Novozhilov [6], particularizada para um material homogêneo e isotrópico, a expressão da energia de deformação de uma casca cônica é:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} D_m \left[\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \epsilon_{12}^2 + 2\nu \epsilon_{11} \epsilon_{22} \right] r d\theta ds + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} D_f \left[\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \chi_{12}^2 + 2\nu \chi_{11} \chi_{22} \right] r d\theta ds \quad (6)$$

onde: $D_m = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ e $D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ são os módulos de rigidez de membrana e de flexão respectivamente. E é o módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson do material.

As componentes (lineares) ϵ_{ij} e χ_{ij} dos tensores $\underline{\epsilon}$ e $\underline{\chi}$ são [6]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= u_{1,s} & ; & & \epsilon_{22} &= \frac{1}{r}(u_{2,\theta\theta} + \text{sen}\alpha u_1 + \text{cos}\alpha u_3) & ; & & \epsilon_{12} &= u_{2,s} + \\ & & & & \frac{1}{r}(u_{1,\theta} - \text{sen}\alpha u_2) & ; & \chi_{11} &= -u_{3,ss} & ; & \chi_{22} &= \frac{1}{r^2}(\text{cos}\alpha u_{2,\theta} - u_{3,\theta\theta} - \\ & & & & - r\text{sen}\alpha u_{3,s}) & ; & \chi_{12} &= \frac{2}{r}(\text{rcos}\alpha u_{2,s} - \text{cos}\alpha \text{sen}\alpha u_2 - ru_{3,s\theta} + \\ & & & & + \text{sen}\alpha u_{3,\theta}) & & & & & & \end{aligned} \quad (7)$$

c) Trabalho Virtual das Forças Externas

Serão consideradas ações de forças externas, decorrentes de um carregamento parcialmente distribuído sobre a superfície média da casca, mas que não acompanha o movimento de rotação da mesma. Desse modo, a cada instante, o carregamento distribue-se sobre diferentes regiões da casca (fig. 1).

Seja η uma coordenada espacial angular, em termos da qual será descrito o carregamento considerado. Admitindo-se que em $t=0$ η e θ (coordenada material) são coincidentes, tem-se:

$$\theta = \eta + \Omega t \quad (8)$$

e o trabalho virtual das forças externas é:

$$\delta W = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \underline{p}(s, \eta) \cdot \delta \underline{u}(s, \eta + \Omega t, t) r d\eta ds \quad (9)$$

2.2 - Forma Fraca das Equações do Movimento

Levando-se (5), (6) e (9) em (2) chegam-se às equações do movimento cuja forma fraca é:

$$a(\underline{u}, \underline{v}) + \rho h(\underline{u}, \underline{v}) + \rho h \Omega(Z\underline{u}, \underline{v}) = j(\underline{v}) + (\underline{a}_0, \underline{v}) ; \forall \underline{v} \in V \quad (10)$$

sendo:

$$V \equiv [H^1(S_0)]^2 \times [H^2(S_0)] \quad ; \quad S_0 \equiv [0, 2\pi] \times (0, L)$$

$$(\underline{u}, \underline{v}) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \underline{u} \cdot \underline{v} \, r d\theta ds \quad (11)$$

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \ell(\underline{u}, \underline{v}) - \Omega^2(Z\underline{u}, Z\underline{v}) + \dot{\Omega}(Z\underline{u}, \underline{v}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \ell(\underline{u}, \underline{v}) = & D_m \left[(\psi_1(\underline{u}), \psi_1(\underline{v})) + \frac{1-\nu}{2} (\psi_2(\underline{u}), \psi_2(\underline{v})) + (1-\nu^2) (\psi_3(\underline{u}), \right. \\ & \left. \psi_3(\underline{v})) \right] + D_f \left[(\psi_4(\underline{u}), \psi_4(\underline{v})) + \frac{1-\nu}{2} (\psi_5(\underline{u}), \psi_5(\underline{v})) + (1-\nu^2) (\psi_6(\underline{u}), \right. \\ & \left. \psi_6(\underline{v})) \right] \quad (13) \end{aligned}$$

em que:

$$\psi_1(\underline{u}) = u_{1,s} + \nu \psi_3(\underline{u}) ; \quad \psi_2(\underline{u}) = u_{2,s} + \frac{1}{r} (u_{1,\theta} - \text{sen} \alpha u_2)$$

$$\psi_3(\underline{u}) = \frac{1}{r} (u_{2,\theta} + \text{sen} \alpha u_1 + \text{cos} \alpha u_3) ; \quad \psi_4(\underline{u}) = -u_{3,ss} + \nu \psi_6(\underline{u})$$

$$\psi_5(\underline{u}) = \frac{2}{r} (r \text{cos} \alpha u_{2,s} - \text{cos} \alpha \text{sen} \alpha u_2 - r u_{3,s\theta} + \text{sen} \alpha u_{3,\theta})$$

$$\psi_6(\underline{u}) = \frac{1}{r^2} (\text{cos} \alpha u_{2,\theta} - u_{3,\theta\theta} - r \text{sen} \alpha u_{3,s})$$

$$j(\underline{v}) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \underline{p}(s, \eta) \cdot \underline{v}(s, \eta + \Omega t, t) \, r d\eta ds \quad (14)$$

3. Solução Aproximada

A solução aproximada \underline{u}^h será obtida em um sub-espaço de elementos finitos $V^h \subset V$. Neste sub-espaço a forma fraca do problema (10) é:

$$a(\underline{u}^h, \underline{v}^h) + \rho h(\underline{u}^h, \underline{v}^h) + \rho h \Omega(Z\underline{u}^h, \underline{v}^h) = j(\underline{v}^h) + (\underline{a}_0, \underline{v}^h) ; \forall \underline{v}^h \in V^h \quad (15)$$

Dada a periodicidade do problema será usada uma aproximação em série de Fourier na variável θ , combinada com uma aproximação de elementos finitos em s . Dessa forma o sub-espaço V^h é obtido como:

$$V^h = \bigcup_{m=-M}^M [V_1^{h,m}] \times V_2^{h,m} ; V_k^{h,m} \subset H^k , k = 1,2 \quad (16)$$

onde

$$V_k^{h,m} = \text{span} \left\{ e^{im\theta} \phi_1^k(s), \dots, e^{im\theta} \phi_N^k(s) \right\} ; m=-M, \dots, M \quad e$$

$$i = \sqrt{-1} .$$

As funções $\phi_j^k(s)$ são interpolantes globais, construídas a partir das funções de interpolação locais.

Um elemento qualquer $\underline{v}^h \in V^h$ pode ser escrito como:

$$\underline{v}^h = \sum_{m=-M}^M \sum_{j=1}^{3N} q_j^m(t) e^{im\theta} \phi_j(s) . \quad (17)$$

onde os vetores ϕ_j são dados por:

$$\phi_{3\ell-2} = \begin{bmatrix} \phi_\ell^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \phi_{3\ell-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_\ell^1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \phi_{3\ell} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_\ell^2 \end{bmatrix} ; \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

Substituindo-se (17) em (15) e tendo em conta que:

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} \cdot e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & p | m \neq -n \\ 2\pi & p | m = -n \end{cases}$$

obtem-se o seguinte conjunto de problemas:

$$[M_m] \{\ddot{X}_m\} + [C_m] \{\dot{X}_m\} + [K_m] \{X_m\} = \{F_m\} e^{-im\Omega t} ; m=-M, \dots, M \quad (19)$$

As matrizes $[M_m]$, $[C_m]$ e $[K_m]$ são normalmente conhecidas

como matrizes de massa, Coriolis e rigidez respectivamente, sendo seus elementos dados por:

$$\begin{aligned} M_{jk}^m &= \rho h (e^{im\theta} \phi_j, e^{-im\theta} \phi_k) \\ C_{jk}^m &= \rho h \Omega (e^{im\theta} z \phi_j, e^{-im\theta} \phi_k) \\ K_{jk}^m &= a (e^{im\theta} \phi_j, e^{-im\theta} \phi_k) \end{aligned} \quad (20a-c)$$

$\{X_m\}^T = \{q_1^m, q_2^m, \dots, q_{3N}^m\}$ é o vetor das incógnitas nodais e $\{F_m\}$ é o vetor das amplitudes da excitação correspondente ao harmônico m .

$$\begin{aligned} F_k^0 &= \int_{\ell_1}^{\ell_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\underline{p}(s, \eta) + \underline{a}_0) \cdot \phi_k \, rd\eta ds \quad \text{para } m = 0 \\ F_k^m &= \int_{\ell_1}^{\ell_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \underline{p}(s, \eta) \cdot \phi_k \, e^{-im\eta} \, rd\eta ds \quad \text{para } m \neq 0 \end{aligned} \quad (21a-b)$$

No caso em que a velocidade de rotação é constante ($\dot{\Omega}=0$), as matrizes $[C_m]$ e $[K_m]$, que ocorrem em (19), são independentes de tempo, e dois tipos de análises podem ser feitas:

a) Vibrações Livres

O estudo de vibrações livres associado à equação (19) conduz ao seguinte problema de auto-valor algébrico:

$$(-\omega_m^2 [M_m] + i\omega_m \Omega [C_m] + [K_m]) \{\bar{X}_m\} = \{0\} \quad (22)$$

cuja solução fornece a variação das frequências naturais ω_m e dos modos normais de vibração $\{\bar{X}_m\}$, com a velocidade de rotação Ω . Uma análise detalhada deste problema pode ser encontrada nas referências [4], [5], [7].

b) Resposta em Regime Permanente

Neste caso a solução de (19) pode ser posta na forma:

$$\{X_m(t)\} = \{X_m^*\} e^{-im\Omega t} \quad (23)$$

Substituindo-se (23 em (19) chega-se ao seguinte sistema de equações algébricas lineares:

$$(-m^2\Omega^2 [M_m] - im\Omega^2 [C_m] + [K_m]) \{X_m^*\} = \{F_m\} \quad (24)$$

que resolvido fornece o vetor de amplitudes de vibração $\{X_m^*\}$, correspondente ao harmônico m.

Obviamente sempre que alguma frequência natural ω_m coincidir com a frequência de excitação $m\Omega$, ter-se-á uma condição de ressonância.

4. Resultados Numéricos

Os resultados numéricos, apresentados nas figuras 2 a 4 procuram ilustrar, qualitativa e quantitativamente, a influência da velocidade de rotação Ω , na resposta dinâmica de uma casca cilíndrica, submetida à ação de um carregamento do tipo descrito no item 2.1-c. Estes resultados foram obtidos, usando-se um programa de elementos finitos, no qual foi implementado um elemento cônico, cujas funções de interpolação locais, para as componentes u_1, u_2, u_3 , são os polinômios cúbicos de Hermite (12 parâmetros nodais). Utilizou-se na discretização uma malha uniforme de 10 elementos.

Na figura 2 estão mostrados os espectros de frequências, correspondentes aos 12 primeiros harmônicos (modos circunferenciais), associados às 3 primeiras frequências naturais ($\Omega=0$), bem como os espectros de frequências da excitação (linhas retas), correspondentes a três velocidades de rotação distintas. Todos os espectros referidos são discretos - as linhas traçadas têm por objetivo melhorar a visualização. Este diagrama é importante pois permite avaliar quais são os harmônicos predominantes na resposta dinâmica.

A figura 3 ilustra justamente a predominância de um ou outro harmônico, dependendo do valor da velocidade de rotação. Na fig. 3a está representado o espectro de amplitu-

FIG. 2
Espectros de frequências naturais de um cilindro bi-apoiado

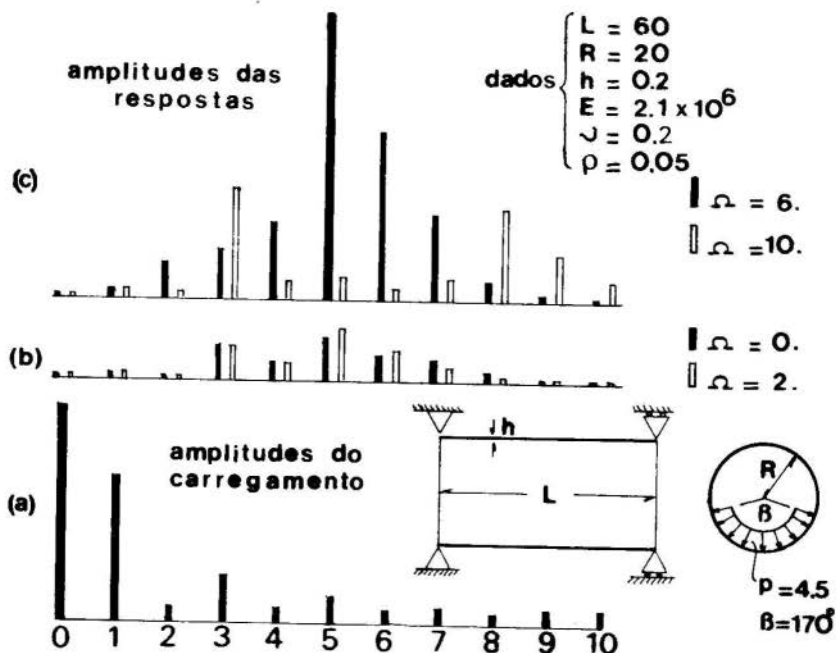
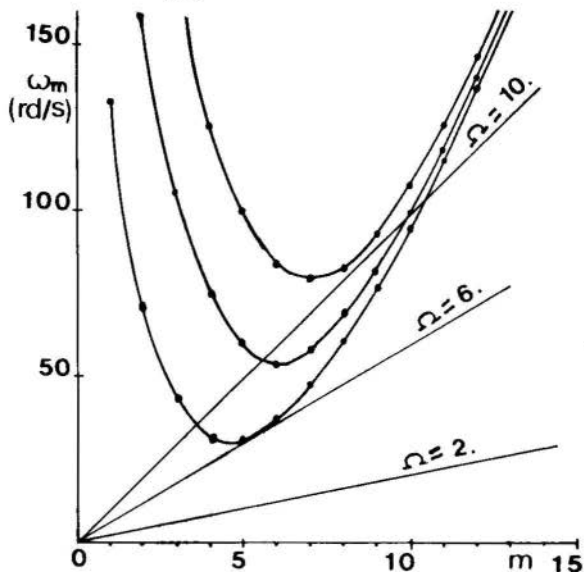


FIG. 3

Comparação entre amplitudes de respostas a diferentes rotações (Ω).

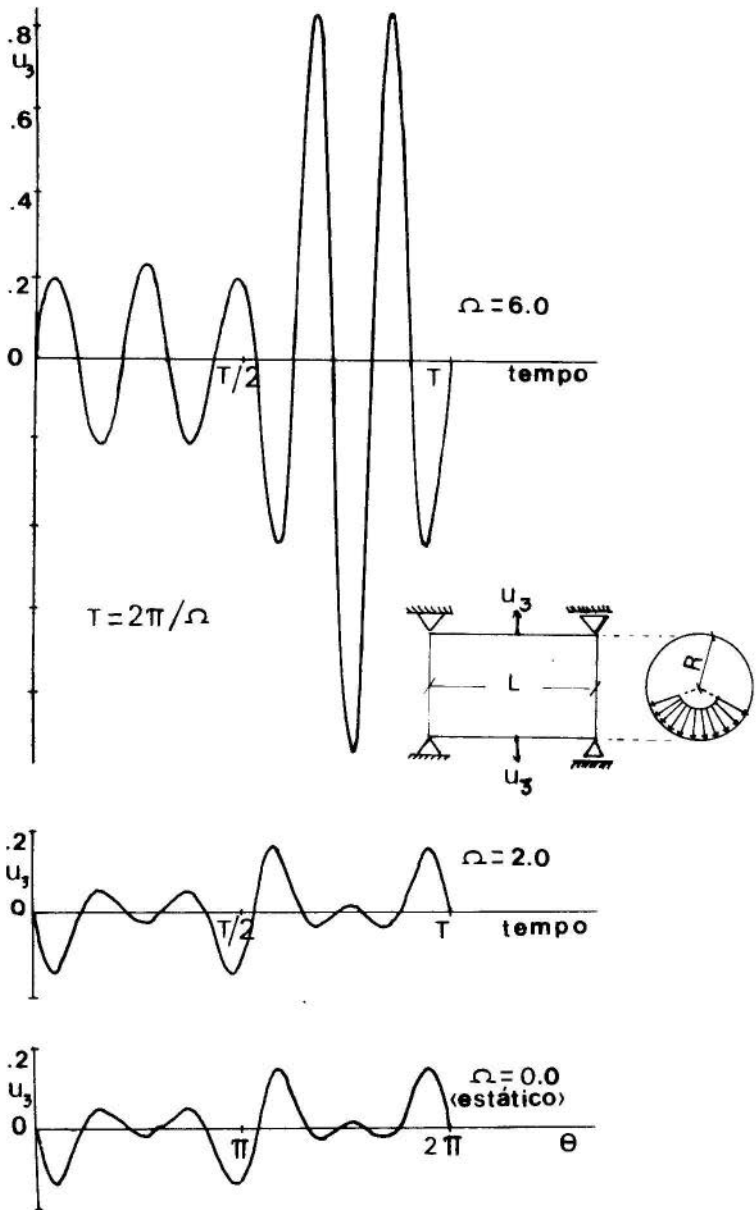


FIG. 4 Deslocamentos radiais da seção média.
Resposta estática e história no tempo.

des do carregamento. Os diagramas 3b e 3c, mostram os espectros de amplitudes da resposta dinâmica, correspondentes à seção média do cilindro, para diferentes velocidades de rotação. Pode-se notar que, para $\Omega=2$, a resposta dinâmica pouco difere da resposta estática ($\Omega=0$). Isto se deve ao fato de que as frequências de excitação, relacionadas com $\Omega=2$, estão muito distantes (abaixo) das frequências naturais do cilindro (vide fig. 2). Já para $\Omega = 6$ observa-se grande predominância dos harmônicos 5 e 6. Fato semelhante ocorre para $m = 3$ e $m = 8$, quando $\Omega = 10$. Estes resultados estão de acordo com o previsto da análise da figura 2.

Na figura 4 são apresentadas curvas de história no tempo, para um ponto da seção transversal média, correspondentes a $\Omega = 2$ e $\Omega = 6$. Também é mostrada a resposta estática desta seção.

5. Conclusões

Mostrou-se que, devido à rotação da casca, um carregamento estático, não axissimétrico, produz excitações harmônicas no tempo, de frequências $m\Omega$, podendo conduzir a uma condição de ressonância, sempre que alguma das frequências naturais de vibração Ω_m vier a coincidir com $m\Omega$. Isso demonstra a importância de uma análise prévia, semelhante àquela mostrada na figura 2, para que se possa prever o comportamento dinâmico desse tipo de sistema.

Além disso a equação (22) comprova a dependência das frequências naturais da casca com a sua velocidade de rotação.

6. Agradecimentos

Este trabalho foi financiado em parte pelo CNPq (contrato nº 2222.0712/76).

Bibliografia

- [1] Mache, H.J., "Traveling-wave vibration of gas-turbine engine shells", Journal of Engineering for Power, ASME, vol. 88, pp. 179-187 (1966).

- [2] Srinivasan, A.V. and Lauterbach, G.F., "Traveling waves in rotating cylindrical shells", Journal of Engineering for Industry, ASME, pp. 1229 - 1232, november (1971).
- [3] Penzes, L. and Kraus, H., "Free vibration of prestressed cylindrical shells having arbitrary homogeneous boundary conditions", AIAA Journal, vol. 10, pp. 1309-1313 (1972).
- [4] Padovan, J., "Natural frequencies of rotating prestressed cylinders", Journal of Sound and Vibrations, vol. 31, pp. 469-483 (1973).
- [5] Padovan, J., "Traveling waves vibrations and buckling of rotating anisotropic shells of revolution by finite elements", Int. Journal of Solids Structures, vol. 11, pp. 1367-1380 (1975).
- [6] Novozhilov, V.V., "Thin shell theory", Walters-Nordhoff Publishing, Holanda (1970).
- [7] Gupta, K.K., "Free vibration analysis of spinning structural systems", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 5, pp. 395-418 (1973).

LOULA, A.F., GALEÃO, A.C., TAROCO, E., e FEIJÓO, R.

VIBRAÇÕES DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS

COM MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

Sumário

Neste trabalho, utilizando-se o método dos elementos finitos semi-analítico, obtem-se a resposta dinâmica em regime permanente, de cascas cônicas, girando em torno do eixo de simetria, e submetidas a um carregamento não-axissimétrico, que não acompanha a casca no seu movimento de rotação.

Além disso, mostra-se que devido à rotação da casca, esse carregamento estático origina excitações harmônicas no tempo, podendo ocorrer um fenômeno de ressonância, sempre que uma frequência de vibração da casca coincidir com a frequência da excitação, que é um múltiplo inteiro da velocidade de rotação.

Apresentam-se resultados numéricos para o caso de um cilindro bi-apoiado.

VIBRATIONS OF ROTATING SHELLS

OF REVOLUTION

Summary

In this work, a semi-analytical finite element method is used in order to obtain the steady-state response of conical shells, rotating about their longitudinal axes and under the action of an arbitrary loading, which does not rotate with the shell.

Due to the rotation, this static loading generates an harmonic excitation, and a condition of resonance may occur whenever the natural frequency of the shell coincides with the frequency of excitation, which is an integer multiple of the angular velocity.

Numerical results are presented for a simple supported cylindrical shell.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 15

PP. 183 - 192



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE ANÉIS DINAMOMÉTRICOS

Mario Francisco MUCHERONI, Prof. Assistente
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de São Paulo
São Carlos, Brasil

Paulo SELEGHIM, Prof. Adjunto
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de São Paulo
São Carlos, Brasil

1. Introdução

Os métodos de calibração estática de um instrumento de medida são bem conhecidos. Através desses o ganho estático é determinado. Para se medir corretamente grandezas que estão variando rapidamente no tempo é importante acrescentar à calibração estática a resposta em frequência, cha-

mada às vezes de calibração dinâmica.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um anel dinamométrico de características tais que se possa medir forças de compressão de pequena amplitude e numa faixa de frequência razoável para aplicações em Engenharia Mecânica.

O anel foi construído na forma mostrada no item seguinte. Depois a calibração estática foi realizada para se obter o ponto inicial das curvas de resposta em frequência. O procedimento para a obtenção das curvas de resposta em frequência, curva de ganho $G(\omega)$ e curva de fase $\psi(\omega)$, está descrito a seguir. Tal procedimento é baseado em [1].

Finalizando, discute-se os resultados apresentados assim como são feitas algumas considerações com relação ao efeito de carga sobre o anel dinamométrico.

2. Detalhes do Anel Dinamométrico

Este anel foi usinado em aço carbono comum com as dimensões mostradas na fig. 1. Esta forma é adequada quando se deseja medir pequenas forças de compressão.

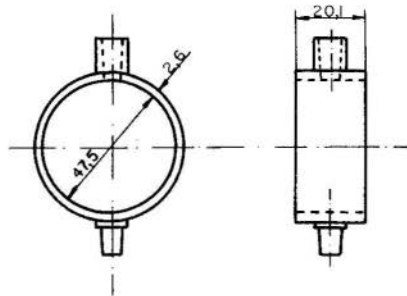


Fig. 1 - Vistas do Anel Dinamométrico.

Extensômetros de 120Ω foram colados conforme mostrado na fig. 2 e ligados em ponte completa, sendo os quatro ativos. Para forças de compressão se tem:

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 \text{ (deformações positivas)}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_4 \text{ (deformações negativas)}$$

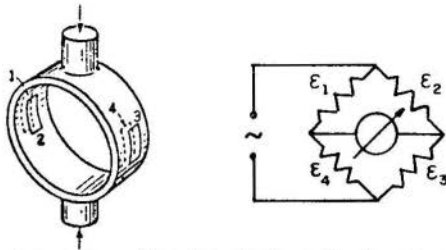


Fig. 2 - Localização dos Extensômetros e Esquema de Ligação em Ponte Completa

Assim as deformações específicas medidas pelos extensômetros são todas somadas e há compensação do efeito de temperatura. Uma vantagem adicional desta montagem é a sua não sensibilidade a momentos provocados por forças não radiais em relação ao anel.

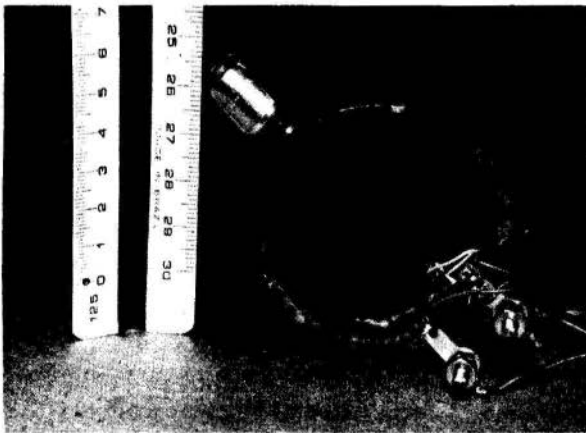


Fig. 3 - Anel Dinamométrico

3. Calibração Estática

Na calibração estática foram utilizados os seguintes equipamentos:

Ponte- amplificadora Hottinger, mod. KWS II/50

Osciloscópio XY Tektronix, mod. 503

Pesos padrões de $0,250 \pm 0,002$ kgf

Um pequeno prato foi construído, sobre o qual foram coloca-

dos os pesos conhecidos. Foi verificada a previsão de insensibilidade da montagem de extensômetros com relação a cargas não radiais, variando-se a posição de um mesmo peso sobre o prato.

Para a calibração estática do anel foi escolhido o seguinte procedimento. Colocou-se sobre o prato um peso de 9 kgf; a ponte-amplificadora foi então zerada e calibrada, simultaneamente com o ajuste do osciloscópio. Dez pesos de 0,250 kgf foram colocados um a um e em seguida retirados um a um até restar os iniciais 9 kgf. As leituras correspondentes foram tomadas. De forma semelhante, foram retirados dos iniciais 9 kgf dez pesos de 0,250 kgf, um a um, voltando depois a acrescentá-los, um a um. Foram obtidos 44 pon-

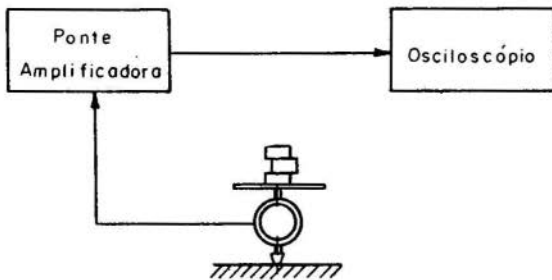


Fig. 4 - Esquema da Montagem da Calibração Estática

tos. Utilizando-se o método dos mínimos quadrados [2], foi feita a regressão linear. A reta de calibração obtida assim, é:

$$L_0 = 0,570 P_i - 0,004 \quad (1)$$

onde

L_0 - leitura no osciloscópio em volt

P_i - pesos aplicados ao anel em kgf

A escala de sensibilidade usada na ponte-amplificadora é de 100 $\mu\text{m/m}$. No osciloscópio a sensibilidade para as leituras é de 0,2 volt/cm. Os pesos de 0,250 kgf tem erro

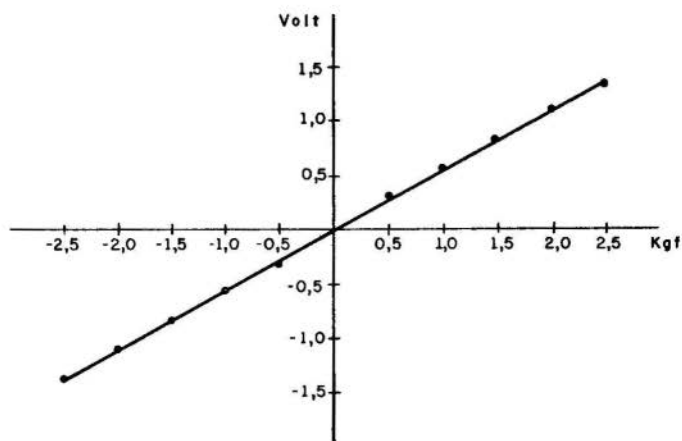


Fig. 5 - Curva de Calibração Estática do Anel Dinamométrico

de $\pm 0,002$ kgf. Esses pesos podem ser tomados como padrões uma vez que a menor leitura no osciloscópio equivale a aproximadamente 0,035 kgf.

4. Ensaio de Resposta em Frequência

Os equipamentos utilizados para a obtenção da resposta em frequência do anel dinamométrico estão relacionados a seguir:

Gerador de Sinais Philips, mod. GM 2303

Amplificador Philips, mod. GM 5535

Excitador Eletro-mecânico Philips, mod. PR 9270

Ponte-amplificadora Hottinger, mod. KWS II/50

Osciloscópio XY Tektronix, mod. 503

Contador Digital Hewlett-Packard, mod. 5221B

O método usado é o das entradas senoidais [1]. Entradas senoidais, impostas ao sistema em análise, provocam saídas também senoidais e de mesma frequência em fenômenos lineares. Ao anel dinamométrico impõe-se forças senoidais de amplitudes e frequências selecionadas através do sistema gerador, amplificador e excitador eletro-mecânico. Um conta-

dor digital foi utilizado para melhor sintonia das frequências. A variável de saída no levantamento da resposta do anel é a sua deformação, medida em ponte.

Tomando-se sinais proporcionais à força excitadora e a deformação do anel e lançando-os num osciloscópio XY, as curvas de resposta em frequência podem ser obtidas. A par-

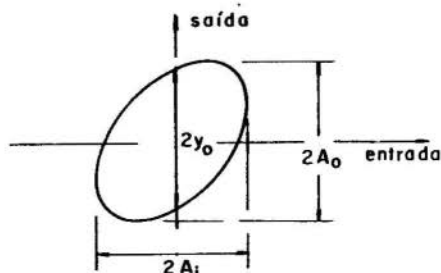


Fig. 6 - Elipse Obtida no Osciloscópio

tir da elipse observada no osciloscópio, fig. 6, o ganho e a fase são calculados nas expressões:

$$G(\omega) = \frac{2 A_o}{2 A_i} \quad (2)$$

$$\psi(\omega) = \text{sen}^{-1} \frac{2 y_o}{2 A_o} \quad (3)$$

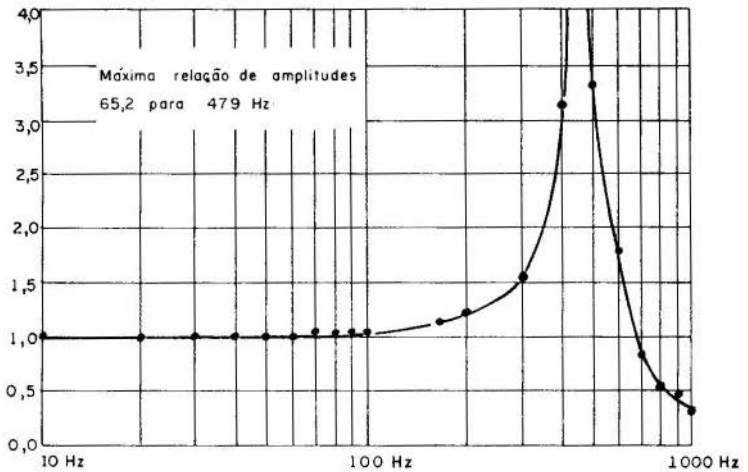
sendo

A_o - amplitude do sinal proporcional à deformação

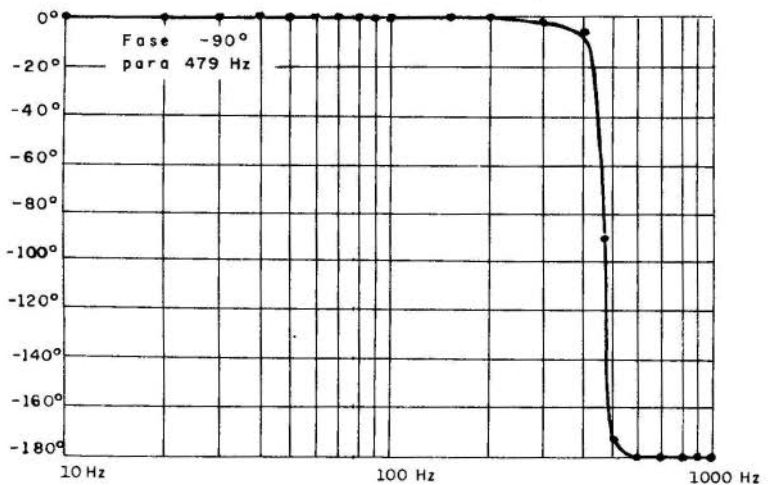
A_i - amplitude do sinal proporcional à força

y_o - valor do sinal de saída quando a entrada é nula

O procedimento durante o ensaio foi, portanto, o seguinte: foram tomadas as leituras $2y_o$, $2A_o$ e $2A_i$ para cada frequência escolhida. Varreu-se a faixa de frequência de interesse, 10 Hz a 1000 Hz, dez vezes. Próximo à ressonância foram tomados muitos pontos. Devido ao acentuado pico, foi necessário tornar a amplitude da força excitadora quase nula afim de se evitar saturação do sistema na frequência de ressonância. As curvas obtidas estão plotadas a seguir.



7a - Curva de Ganho



7b - Curva de Fase

Fig. 7 - Curvas de Resposta em Frequência do
Anel Dinamométrico
a - Curva de Ganho b - Curva de fase

Na fig. 7a a curva de ganho foi traçada normalizada, fazendo-se :

$$\alpha(\omega) = \frac{G(\omega)}{G(0)} \quad (4)$$

onde $G(0)$ é o ganho estático do anel dinamométrico, obtido através da calibração estática. Da expressão (1), toma-se:

$$G(0) = 0,570 \text{ volt/kgf} \quad (5)$$

Assim, o ganho do anel para determinada frequência será obtido pelo produto do seu ganho estático pela ordenada correspondente na fig. 7a.

5. Conclusões

Pode-se afirmar que o anel dinamométrico construído, possui sensibilidade adequada às aplicações pretendidas, observando-se o valor dado em (5). Para se obter o menor valor de carga a ser medido com esse anel, tomou-se a leitura máxima da ponte-amplificadora $1 \mu\text{m/m}$. Isto corresponde a uma leitura de aproximadamente 0,02 volt no osciloscópio e portanto a uma força de 0,035 kgf. A precisão dos valores obtidos a partir da reta de calibração estática é da ordem de 3 por cento. Este valor vem dos parâmetros da regressão linear.

Das curvas de resposta em frequência da fig. 7 é tomada a faixa de frequência utilizável. Observa-se que a curva de ganho é plana até 150 Hz, dentro de uma variação de até 5 por cento, e a fase nula para esta mesma faixa de frequência. A frequência de ressonância encontrada é de 479 Hz com uma relação de amplitudes bastante alta, mostrando que o fator de amortecimento do anel é praticamente nulo.

Para avaliação dos resultados experimentais, foi escolhido o modelo massa e mola, bastante simples e conhecido, com:

$$K = 3236 \text{ kgf/cm} \quad e \quad (6)$$

$$M = 0,280 \text{ kg} \quad (7)$$

sendo:

K - constante elástica do anel dinamométrico

M - massa do anel mais massa do pino do excitador

O valor da constante elástica, (6), foi obtido a partir da Resistência dos Materiais, [3]. A massa do anel e a massa do pino do excitador, com as partes móveis fixas nele, foram medidas. Com a frequência natural dada por:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (8)$$

obteve-se 536 Hz. Este valor é 12 por cento maior que o valor 479 Hz, obtido experimentalmente.

O efeito de carga do excitador sobre o anel dinamométrico é portanto apenas o efeito de massa. Isto era esperado uma vez que as partes móveis do excitador estão fixadas de um lado através de molas bastante elásticas, com constante da ordem de 2 kgf/cm, e do outro lado acopladas rigidamente ao anel.

A partir das considerações feitas e dos resultados obtidos experimentalmente, conclue-se que o anel dinamométrico projetado possui as características requeridas quanto à sensibilidade e resposta em frequência.

Bibliografia

- [1] Mucheroni, M.F., Métodos para Obtenção da Resposta em Frequência. Dissertação de Mestrado Apresentada a Escola de Engenharia de São Carlos, USP. (1976).
- [2] Doebelin, E.O., Measurement Systems: Application and Design. McGraw-Hill Book Company. Tokyo. (1966).
- [3] Timoshenko, S.P., Resistência dos Materiais. Ao Livro Técnico S.A. Rio de Janeiro (1967).

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE ANEIS DINAMOMÉTRICOSSumário

Um anel dinamométrico foi projetado afim de que seja utilizado como captador de forças dinâmicas de pequena intensidade. Alta sensibilidade e larga faixa de resposta em frequência com praticamente ganho constante e fase nula são requeridas em muitas aplicações de Engenharia Mecânica.

Descreve-se os ensaios realizados afim de se obter a sensibilidade do anel através da calibração estática e as curvas de resposta em frequência.

Finalmente os resultados obtidos são analisados.

FREQUENCY RESPONSE OF ELASTIC RING TRANSDUCERSSummary

A elastic ring transducer was designed to be used in measurement of dynamic and low amplitude forces. High sensibility and large range of frequency response with gain practically constant and phase null is required in several Mechanical Engineering applications.

The experimental procedure to obtain the sensibility through static calibration and frequency response plots of the ring was introduced.

The results was finally analysed.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 16
PP. 193 - 202



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

DYNAMICS OF BEAMS WITH ENDS

ELASTICALLY RESTRAINED AGAINST ROTATION

P.A.A. LAURA, J.L. POMBO, L.E. LUISONI,
G. ALABES and A. LAVAISSÉ

Institute of Applied Mechanics

Base Naval Puerto Belgrano
8111, Argentina.

1. Introduction

Design engineers are frequently confronted with the problem of mounting different varieties of engines and motors on structural elements. In order to avoid damaging resonance situations the analyst must be able to predict natural frequencies of the overall mechanical system: structure-motor and its elastic mounting. It is important to point out that the problem is also of interest in the design of electronic equipment when installed in vehicles subjected to severe dynamic situations.

The mathematical solution is rather complex, from a designer's viewpoint, even when dealing with simply supported beams or plates and neglecting shear and rotatory inertia effects.

The present paper deals with a discussion of a very simple method to calculate the lowest frequencies of the coupled mechanical system: beam-motor and its elastic mounting. It is assumed that the beam ends possess different flexibility coefficients. In the case where the beam is simply supported at one end and clamped at the other, the experimental results are in good agreement with the analytical predictions.

The extension of the analytical approach to rectangular orthotropic plate structural elements is indicated when the four edges have different rotational flexibility coefficients.

2. Statement of the Problem and Its Approximate Solution

Consider the mechanical system shown in Figure 1:

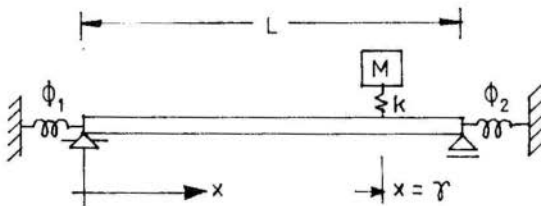


Figure 1 - Mechanical System Under Study

In the case of normal modes and neglecting rotatory inertia and shear deformation effects, the behavior of the system is governed by the well known differential equation:

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} - \rho \cdot A_0 \cdot \omega^2 \cdot W = \frac{\omega^2 \cdot M \cdot W_A}{1 - \omega^2 M/k} \delta(x-\gamma) \quad (1)$$

where E: modulus of elasticity, I: moment of inertia, W: displacement amplitude, ρ : mass density of the beam material, A_0 : cross sectional area of the beam; ω : circular frequency, M and k: mass of the motor or engine and the spring constant of its elastic mount respectively and δ : Dirac's delta function.

The boundary conditions are:

$$W(0) = W(L) = 0 \quad (2a,b)$$

$$\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} = \phi_1 \cdot \text{E.I.} \cdot \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=0} \quad (2c)$$

$$\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=L} = -\phi_2 \text{E.I.} \cdot \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=L} \quad (2d)$$

where ϕ_1 and ϕ_2 are the flexibility coefficients of the beam supports which are assumed elastically restrained against rotation.

From a designer's viewpoint it is advantageous to obtain a simple frequency equation which allows prediction of the lower frequencies of the coupled mechanical system. Admittedly an exact solution can be found but its use is considerably more difficult for a professional engineer [1].

One takes then [2]:

$$W(x) \approx W_a(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \quad (3)$$

and from the boundary conditions obtains directly:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \frac{2L}{k_1} = \alpha_1' L \quad (4a)$$

$$\alpha_2 = \alpha_2' \quad (4c)$$

$$\alpha_3 = -2 \frac{\alpha_2}{L} \frac{1 + \frac{3}{k_1} + \frac{5}{k_2} + \frac{12}{k_1 k_2}}{1 + \frac{6}{k_2}} = \frac{\alpha_3'}{L}$$

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_2}{L^2} \frac{1 + \frac{4}{k_1} + \frac{4}{k_2} + \frac{12}{k_1 k_2}}{1 + \frac{6}{k_2}} = \frac{\alpha_4'}{L^2} \quad (4d)$$

where:

$$k_1 = \frac{1}{\phi_1 \text{E.I./L}} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{1}{\phi_2 \text{E.I./L}}$$

Substituting (3) in (1) results in an error or residual function $\epsilon(x)$, which can now be minimized making use of one of the weighted residuals techniques.

Using Galerkin's method it can be shown that the frequency equation is given by [2] :

$$24 \alpha_4' P_2 - \Omega^2 \left[P_8 + \frac{\frac{M}{M_V}}{\frac{k}{EI/L^3}} 24 \alpha_4' P_2 + \frac{M}{M_V} P_7^2 \right] + \Omega^4 \frac{\frac{M}{M_V}}{EI/L^3} P_8 = 0 \quad (5)$$

where:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\frac{\rho \cdot A_0}{E \cdot I}} \omega \cdot L^2 ; \quad M_V = \rho \cdot A_0 \cdot L \\ P_2 &= \frac{\alpha_1'}{2} + \frac{\alpha_2'}{3} + \frac{\alpha_3'}{4} + \frac{\alpha_4'}{5} \\ P_3 &= \frac{\alpha_1'}{3} + \frac{\alpha_2'}{4} + \frac{\alpha_3'}{5} + \frac{\alpha_4'}{6} \\ P_4 &= \frac{\alpha_1'}{4} + \frac{\alpha_2'}{5} + \frac{\alpha_3'}{6} + \frac{\alpha_4'}{7} \\ P_5 &= \frac{\alpha_1'}{5} + \frac{\alpha_2'}{6} + \frac{\alpha_3'}{7} + \frac{\alpha_4'}{8} \\ P_6 &= \frac{\alpha_1'}{6} + \frac{\alpha_2'}{7} + \frac{\alpha_3'}{8} + \frac{\alpha_4'}{9} \\ P_7 &= \alpha_1' \left(\frac{Y}{L}\right) + \alpha_2' \left(\frac{Y}{L}\right)^2 + \alpha_3' \left(\frac{Y}{L}\right)^3 + \alpha_4' \left(\frac{Y}{L}\right)^4 \\ P_8 &= \alpha_1' P_3 + \alpha_2' P_4 + \alpha_3' P_5 + \alpha_4' P_6 \end{aligned}$$

Equation (5) yields the two lowest frequency coefficients of the coupled system.

3. Comparison of Analytical and Experimental Results

Experimental results were obtained in the case of a beam simply supported at one end and rigidly clamped at the other.

Figure 2 depicts the mechanical system built at the Institute of Applied Mechanics and the equipment used in the frequency determinations.

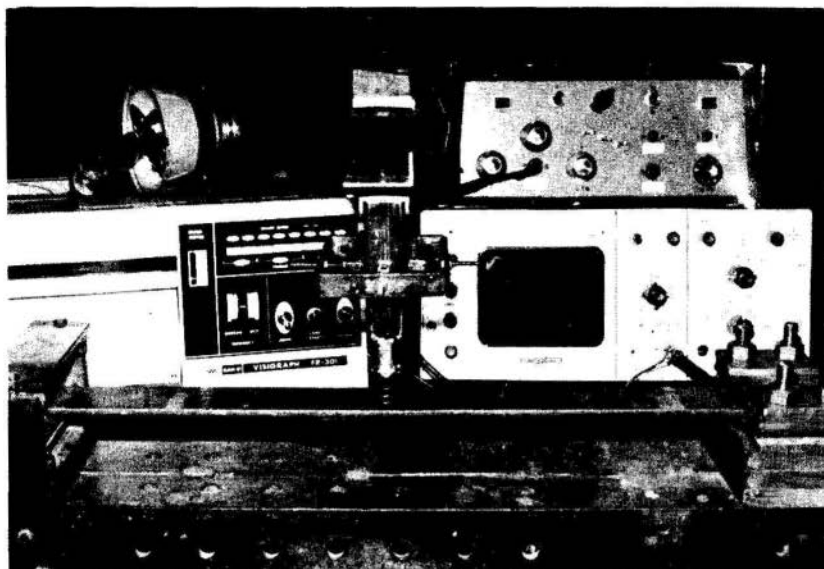
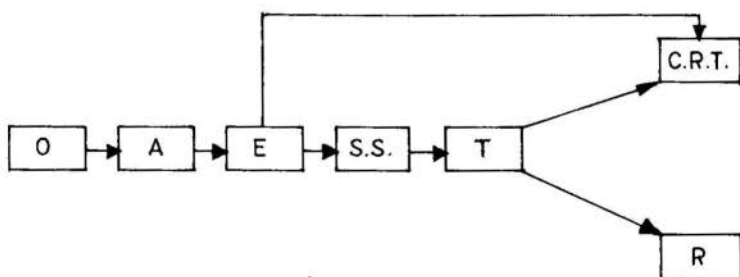


FIGURE 2 - Mechanical System and Equipment Used.

A block diagram of the equipment is shown in Figure 3:



- O : Oscillator
- A : Amplifier
- E : Electrodynamic Vibration Generator
- S.S.: Structural System
- T : Transducer
- CRT : Oscilloscope
- R : Oscillograph

FIGURE 3 - Block Diagram of the Equipment.

The geometric and mechanical characteristics of the structural element are the following:

$$\begin{aligned}
 L &= 56 \text{ cm} && \text{(span)} \\
 b &= 5.08 \text{ cm} && \text{(width of the bar)} \\
 h &= 0.635 \text{ cm} && \text{(thickness)} \\
 W. &= 1.590 \text{ kg} && \text{(total weight of the beam)} \\
 E &= 2.100.000 \text{ kg/cm}^2 && \text{(Young's modulus)} \\
 I &= \frac{bh^3}{12} = 0.1083936 \text{ cm}^4 && \text{(moment of inertia)} \\
 \rho &= \frac{\gamma}{g} = 8 \times 10^{-6} \text{ kg} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}^4} && \text{(density of steel)} \\
 \phi_1 &= 0 && ; \quad \phi_2 = \infty
 \end{aligned}$$

To provide excitation of the structural system under study the following equipment was used:

- (a) Oscillator (MONFRINI, Type G.A.300)
- (b) Amplifier (developed and constructed at the Institute of Applied Mechanics)
- (c) Electrodynamic Exciter (same as -b-)

The oscillator (a) generates a sinusoidal signal which is amplified (b) and then converted into a mechanical signal in the exciter (c). This mechanical signal consists in a mechanical force which varies sinusoidally at the frequency provided by the oscillator.

The natural frequencies of vibration were measured using the following equipment:

- (d) Transducer
- (e) Oscilloscope (MONFRINI, Type OM 410 B)
- (f) Recorder (SAN-EI, Type FR-301)

The transducer (d) consists of a permanent bar magnet that moves in the core of a long coil wound on a plastic material.

For vibratory motions, a-c voltage is generated which is an accurate analog of the mechanical motion [3].

The permanent bar magnet was fixed to the plate and the coil attached to a motionless point.

The output voltage of the transducer is proportional to the rela-

tive velocity between the coil and the magnetic flux lines being cut by the coil [3].

In order to determine the natural frequencies one excites the structural system with the sinusoidally varying force and measures the phase difference between the mechanical force and the transverse displacement of the plate. This phase difference varies 180° when the excitation "crosses" a natural frequency.

The method of "Lissajous figures" was used at this point.

Lissajous figures are obtained by the combination of two mutually perpendicular sinusoidal excitations. In the present study the "Lissajous figures" were visualized by means of the oscilloscope (e) by sending the electrical signal provided by the exciter to the horizontal deflection plate of the oscilloscope and the electrical signal of the transducer to the vertical deflection plate. Depending on the phase difference between these signals the shape of the figures will change.

For a phase difference of 180° a straight line is obtained. This line is perpendicular to the straight line determined when the phase angle is 0° .

For an accurate determination of the natural frequency it is imperative to measure the amplitude of vibration.

This must be a maximum in correspondence with a resonance situation. When the maximum value of the amplitude is obtained one records (f) the electrical signal generated by the transducer (d).

When dealing with clamped edges it is not absolutely clear the value of the "true length" of the beam.

It was decided to obtain this length L^* determining first the fundamental frequency of the beam shown in Figure 2 (without the mass M) and knowing this value (obtained experimentally) one is able to calculate L^* from the expression;

$$\sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot L^{*2}}{E \cdot I}} \omega_{oe} = \Omega_{oe} \quad (6)$$

where ω_{oe} is the fundamental circular frequency determined experimentally. Since in the case studied:

$$f_{oe} = \frac{\omega_{oe}}{2\pi} = 70.5 \text{ Hz}$$

substituting in (6) one obtains:

$$L^* = 56.9 \text{ cm.}$$

A comparison between analytical results (equation 5) and experimental values is shown in Tables 1 and 2. Two different masses and springs have been used:

$$M_1 = 0.000946 \text{ Kg.} \frac{\text{seg}^2}{\text{cm}} \quad ; \quad M_2 = 0.0023 \text{ Kg.} \frac{\text{seg}^2}{\text{cm}}$$

$$k_1 = 1.79 \text{ Kg/cm} \quad ; \quad k_2 = 10.56 \text{ Kg/cm}$$

The parameter γ is taken equal to 28 cm in all cases.

	f_{OM}		f_{OB}	
	Exp.	Analyt.	Exp.	Analyt.
M_1	6.5	6.89	70.5	73.54
M_2	4.5	4.42	70.1	73.51

TABLE 1 - Comparison of Values of Natural Frequencies (in Hz);
 $k_1 = 1.79 \text{ kg/cm.}$

	f_{OM}		f_{OB}	
	Exp.	Analyt.	Exp.	Analyt.
M_1	15	16.20	72.5	75.79
M_2	10	10.40	71.5	75.71

TABLE 2 - Comparison of Values of Natural Frequencies (in Hz);
 $k_2 = 10.56 \text{ kg/cm.}$

The value of the natural frequency of the spring-mass system modified by the presence of the structural element is denoted by f_{OM} . In a similar manner, the value of the fundamental frequency of the beam, modified by the spring system, is denoted by f_{OB} .

The agreement between analytical and experimental results is reasonable. Table 3 depicts analytical and experimental results when the mass is rigidly attached to the beam ($\gamma = 28 \text{ cm}$)

	f_{OB}	
	Exp.	Analyt.
M_1	46	45.88
M_2	33	34.51

TABLE 3 - Comparison of Values of Natural Frequencies (in Hz);
 $k \rightarrow \infty$

4. Conclusions

The methodology presented in this paper is quite simple and applicable to an important class of structural dynamics problems. It may be extended in a straightforward fashion to more complex structural systems. Take for instance the case of an orthotropic rectangular plate with a mass-spring system attached to it. For normal modes one has:

$$\nabla_0^4 W(x,y) - \rho \cdot h \cdot \omega^2 \cdot W(x,y) = \frac{\omega^2 \cdot M}{1 - \omega^2 M/k} W(x,y) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (7)$$

where ∇_0^4 is the biharmonic orthotropic operator and the sprung system is attached to the plate at the point (x_0, y_0) .

If $W(x,y)=0$ at the boundary of the plate and each edge of the rectangular plate is elastically restrained against rotation, ϕ_i being the flexibility coefficient where $i=1,2,3$ and 4; one "constructs" a fundamental modal shape of the form:

$$W(x,y) \approx W_a(x,y) = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i x^i \right) \left(\sum_{j=1}^4 \beta_j y^j \right) \quad (8)$$

where each α_i and β_j are determined by requiring that (8) satisfies identically the boundary conditions.

Substituting (8) in (7) and applying Galerkin's method one finally obtains the desired frequency equation.

References

- [1] Laura, P.A.A., Susemihl, E.A., Pombo J.L., Luisoni, L.E. and Gelós, R. "On the Dynamic Behaviour of Structural Elements Carrying Elastically Mounted, Concentrated Masses", *Applied Acoustics*, 10, 1977, pp.121-145
- [2] Laura, P.A.A., Luisoni, L.E. and Steinberg, D.S., "Vibrations of Beams and Plates with Edges Elastically Restrained Against Rotation Carrying Elastically Mounted Masses", 6th National Vibrations Conference, Chicago, USA, September 1977.
- [3] Shock and Vibration Handbook, Mc Graw Hill Book Co., New York, 1961, Editors: Cyril M. Harris and Charles E. Crede.

LAURA, P.A.A., POMBO, J.L., LUISONI, L.E., ALABES, G. and LAVAISSÉ, A.

DYNAMICS OF BEAMS WITH ENDS

ELASTICALLY RESTRAINED AGAINST ROTATION

Summary

The coupled, dynamic behaviour of the system: structural element-motor and its elastic mounting is of interest to aeronautical, civil, mechanical and naval engineers.

On the other hand the problem is also of basic importance to electronic designers.

The present paper deals with a discussion of an approximate method developed at the Institute of Applied Mechanics, which allows straightforward determination of the lower natural frequencies of the coupled system. It is shown that the analytical predictions are in good agreement with experimental results in the case of a mechanical system built at the Institute of Applied Mechanics.

DINAMICA DE VIGAS CON EXTREMOS RESTRINGIDOS

ELASTICAMENTE CONTRA ROTACION

Sumario

El comportamiento dinámico acoplado del sistema: elemento estructural-motor y su fundación elástica es de interés en todos los campos de la ingeniería. Por otra parte, el problema básico es también de interés a diseñadores de equipos electrónicos cuando estos actúan en ambientes vibratorios severos.

Este trabajo presenta una discusión de un sencillo método de cálculo desarrollado en el Instituto de Mecánica Aplicada. Se demuestra que las predicciones analíticas concuerdan favorablemente con resultados experimentales en el caso de un sencillo sistema mecánico construido en el Instituto de Mecánica Aplicada.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 17

PP. 203 - 216



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

RESPONSE OF SPATIALLY PERIODIC STRUCTURES

TO CONCENTRATED FORCES

José J. de ESPÍNDOLA, Professor Titular, Ph.D.
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

1. Introduction

A periodic system is one that consists of identical elements joined together in an identical manner to form the whole system.

Many of such systems can be identified in engineering: a tall building having a uniform structure and identical storeys; an aircraft fuselage consisting of a cylindrical uniform shell stiffened by identical frames and regularly spaced stringers (fig. 1).

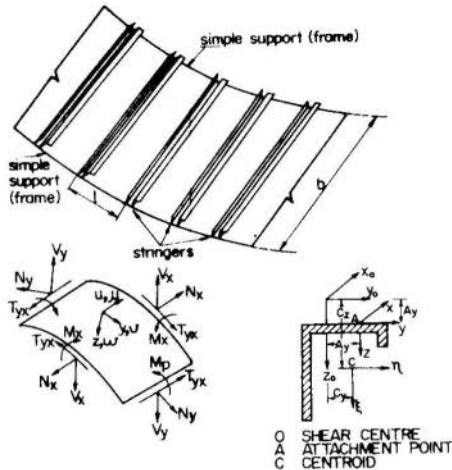


Fig. 1 - A stringer-stiffened structure

All these are complex structures and the modal method of finding the response bears inherent shortcomings that are difficult to overcome in practice, chiefly when the structure is made up of many periodic elements.

To resolve these difficulties a wave propagation method has been developed by many workers [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] which avoids the calculation of natural frequencies and mode shapes and poses no extra problems when damping is considered.

In [7] a computer oriented matrix method is developed to find the free wave propagation constants, which makes it able to be applied to complex periodic structures, such as those quoted here.

Also the merits and difficulties of previous works have been discussed at length in [7].

It is the purpose of this present paper to present a wave matrix theory of the response of periodic structures to concentrated forces which, besides being fairly general, is computer oriented.

This theory rests on the concepts introduced in [7]

and is in fact a natural development of it. Also the computation involved rely on the numerical methods discussed in [6].

The propagation constants of the structure are supposed to be known for the frequency (or frequencies) of interest. The case of a single harmonic force applied anywhere in a bay of an infinite periodic structure is considered. The solution can easily be extended to the case of several concentrated harmonic forces by superposition (the structure is supposed to be linear). As far as the structure is concerned the only requirements are that it is spatially periodic and linear.

The response of finite periodic structures is discussed in sequence, without presenting details.

2. Wave shape - complex wave components

Broadly speaking, to each terminal degree of freedom (see [8]) there correspond a pair of free waves, one directed to the positive and another directed to the negative direction. Of course all of these waves, or some of them, can be attenuating, depending on the particular frequency considered.

In any case the spatial distribution of the deflection along one bay (i.e. in a direction perpendicular to the stringers in a stringer-stiffened structure (fig. 1)) can be expressed as a linear combination of functions $e^{\lambda_j y}$, where λ_j are the eigenvalues of the state matrix [6]. The same statement applies to any other quantities such as slope, moment, shear force, and so on. In mathematical form

$$\{z(y)\}_r = [F]_r \left[e^{\lambda_j y} \right] \{C\}_r \quad (1)$$

In the above expression r represents the number of half waves along a support, or stringer (in a stringer-stiffened structure) or the number of waves along the circumference of a cylinder (in a ring-stiffened structure).

Column $\{z(y)\}_r$ represents a state vector [7, 9] and $\{C\}_r$ contains arbitrary constants. Matrix $[F]_r$ contains

constants depending on the dimensions and elastic properties of a bay. It can, without strenuous effort be written down for a structure with two terminal degrees of freedom. Expression (1) can also be written in the form:

$$\{z(y)\}_R = [F]_R [e^{\lambda jy}] [F]_R^{-1} \{z(0)\}_R \quad (2)$$

The above expression shows clearly that the coefficient of $\{z(0)\}_R$ is precisely the field transfer matrix for a field length y , i.e.:

$$[T_F(y, 0)] = [F]_R [e^{\lambda jy}] [F]_R^{-1} \quad (3)$$

Expression (2) can be thought of as the solution of the state equation $\{z(y)\}'_R = [A]_R \{z(y)\}_R$, where $[A]_R$ is the state matrix of the bay [7].

Substituting $\{z(y)\}$ in the state equation for the expression (2) one can show that $[F]_R$ is in fact the matrix of the right eigenvectors of $[A]_R$ (let's denote it from now on by $[U]_R$). In practice it is not convenient to invert $[U]_R$ to compute the field transfer matrix $[T_F(y, 0)]$. Instead it is preferable to find the modal matrix of the left eigenvectors, that is, the matrix whose columns are the eigenvectors of the transpose of $[A]_R$. It is well known that the transpose of the matrix of the left eigenvectors (let's call it $[V]_R$) is the inverse of $[U]_R$ provided the eigenvectors are normalized such that $\{v\}_i^T \{u\}_j = \delta_{ij}$, where δ_{ij} is the Kronecker's delta.

Matrix $[V]_R$ can conveniently be computed by using the same subroutine that calculates $[U]_R$.

Applying now the basic principle of free wave propagation in spatially periodic structure [8] by taking $y = \ell$ in (1), it is easy to show that

$$[U]^{-1} [T] [U] \{C\}_R = e^{-i\mu} \{C\}_R \quad (4)$$

where $[T]$ is the structural period transfer matrix [7] and μ is the propagation constant.

Therefore, the complex coefficients appearing in

expression (1) can be found by solving the eigenvalue problem expressed in (4). Note that there are $2n$ eigenvalues, that is, $2n$ sets of complex coefficients c_j .

One can easily see that since $\{z(0)\} = [U]\{C\}_R$, expression (4) can be transformed into

$$[T]_R \{z(0)\}_R = e^{-i\mu} \{z(0)\}_R \quad (5)$$

which is the basic eigenvalue problem dealt with in [6], in connection with free wave propagation.

The relation between $\{z(0)\}_R$ and $[C]_R$ can be written as

$$\{C\}_R^{(m)} = [U]_R^{-1} \{z(0)\}^{(m)} = [V]^T \{z(0)\}^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, 2n$$

So, the quantities appearing in (1) can be written as functions of the eigenvectors of the period transfer matrix.

Bearing in mind that there are altogether $2n$ waves ($2n$ propagation constants) and combining expressions (2) and (3) one get's

$$\{z(y)\}_R = [T_F(y,0)]_R \left(\sum_m \{z(0)\}_R^{(m)} \right), \quad m = 1, \dots, 2n \quad (6)$$

remembering that $\{z(0)\}_R^{(m)}$, $m = 1, \dots, 2n$, are the eigenvectors of the period transfer matrix.

Note that the state vector in (6) is not completely determined because the eigenvectors of the period transfer matrix are only computed within an arbitrary constant. Therefore expression (6) can be written in another very convenient form for computation

$$\{z(y)\} = \sum_{m=1}^{2n} \alpha_m \{\psi_m(y)\} \quad (7)$$

where α_m are arbitrary complex constants and

$$\{\psi_m(y)\} = [T_F(y,0)] \{z(0)\}^{(m)}$$

shall be called complex wave components.

3. Response of infinite periodic structures

The theoretical background developed in the previous section will be applied here to find the response of spatially periodic infinite structures to concentrated harmonic forces.

In fig. 2 an infinite periodic structure is depicted where a force represented as

$$f(x,y,t) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r(y) \sin \frac{r\pi x}{b} e^{i\Omega t}$$

is applied at bay numbered zero.

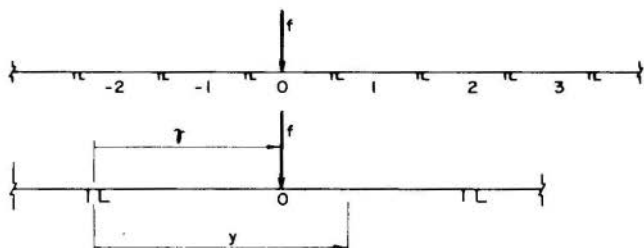


Fig. 2

Starting at the point of application of the force, two sets of waves are sent away, one to the right (positive direction) and another to the left (negative direction). Some or all of these waves might actually be decaying along the structure, depending on the nature of the propagation constants at the frequency Ω . The response at bay 0 can be represented by expressions

$$\begin{aligned} \{z(y)\}_r^+ &= \sum_{m=1}^n \alpha_m \{\psi_m(y)\}; & y \geq \gamma \\ \{z(y)\}_r^- &= \sum_{m=n+1}^{2n} \alpha_m \{\psi_m(y)\}; & y < \gamma \end{aligned} \quad (8)$$

In the above set of expressions it was assumed that the propagation constants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ are associated with propagating (or decaying) waves to the right. The

propagation constants $\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \dots, \mu_{2n}$ are in turn related to waves propagating (or attenuating) to the left.

Now, the state vectors just left and just right of the point of applications of the force are related as shown in expression (7):

$$\{z(\gamma)\}_r^+ = \{z(\gamma)\}_r^- - \{f\}_r \quad (9)$$

where $\{f\}_r$ is the applied force vector.

For the case of general time varying force and response an equation similar to (7) can be written with vectors $\{z(\gamma)\}_r e^{i\Omega t}$ and $\{f\}_r e^{i\Omega t}$ replaced by their forces transform.

Consequently the present theory can be applied to both deterministic and random excitations.

Combining expression (6) and (7) the following system of equations can be found

$$[\sigma(\gamma)]_r \{\alpha\} = -\{f\}_r \quad (10)$$

where the k^{th} column of $[\sigma(\gamma)]_r$ is

$$\{\sigma_{i,k}(\gamma)\} = \begin{cases} \{\psi_k(\gamma)\} & \text{if } k \leq n \\ -\{\psi_k(\gamma)\} & \text{if } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases} \quad i=1,2n$$

Therefore, by solving the system of equations (10) one is able to find the response within bay 0, using expressions (8).

To find the response outside bay 0 one can proceed as follows. The generalized displacements and generalized forces do not change when "transferred" across a support (compatibility conditions) so that we can write

$$\{q(\ell)\}_0 = \{q(0)\}_1 = \sum_{m=1}^n \alpha_m \{\sigma_{i,m}(0)\} \quad (11)$$

where $\{\sigma_{i,m}(0)\}^T = \{\sigma_{1,m}(0), \sigma_{2,m}(0), \dots, \sigma_{n,m}(0)\}$

Note that $q_i(y) = z_i(y)$, $i = 1, n$.

One should note that expression (11) is a set of linear equations that can be solved for α_m , $m = 1, n$.

Note also that $\{q(\ell)\}_0$ is computed by the first of expressions (8).

Having solved (11) the complete state vector at bay N can be computed by expression (12):

$$\{z(y)\}_N = \sum_{m=1}^n \alpha_m \{\sigma_{i,m}(y)\} e^{-i(N-1)\mu_m} \quad (12)$$

where, now, $\{\sigma_{i,m}(y)\}^T = \{\sigma_{1,m}(y), \sigma_{2,m}(y), \dots, \sigma_{2n,m}(y)\}$

In expression (12) y is a local variable ranging from 0 to ℓ and $\{z(y)\}_N$ means the state vector at bay N.

Obviously what was explained above for a bay on the right of bay numbered zero can be applied, "mutatis mutandis" to a bay on the left of bay zero.

Therefore the above theory gives the response at any point of a spatially periodic infinite structure.

The main role in this theory is played by the complex wave components. Since the system has been considered linear the response to several concentrated forces can, obviously, be obtained by superposition.

4. Response of finite periodic structures to concentrated forces

The response of finite periodic structures can be obtained by taking the response of the structure as if it was infinite and adding the effect of the boundaries.

The effects of the boundaries are the reflections of the free waves at the corresponding frequency. In mathematical form, the response can be described as (see fig. 3)

$$\{z(y)\}_j = \{z(y)\}_{j\infty} + \sum_{m=1}^{2n} \alpha_m \{\psi_m(y)\} e^{-(j+M)\mu_m} \quad (13)$$

where j is the number of the bay where the response is computed. The application of expression (13) to the boundaries

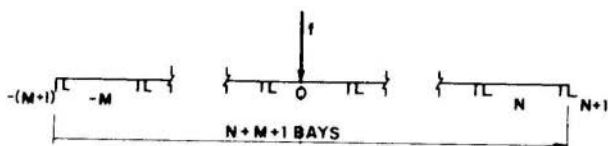


Fig. 3

gives a system of $2n$ linear equations from which α_m are computed.

Expression (13) has been applied to stringer-stiffened plates and shells as well as to ring stiffened cylinders. The details of the manipulation will be omitted in this paper. Some numerical results are discussed.

5. Examples and computer results

Computation have been carried out for structures such as stringer-stiffened plates and shells and ring-stiffened cylinders. Both plates and shells are supposed to be simply supported along frames (straight in the case of the plates and circular for the shells) distant b units apart orthogonal to the axis of the skins (plate or shell). The stringers are also supposed to be simply supported at the frames and run parallel to the axis of the skin. A harmonic force of unit amplitude is applied at a point of a bay and the response is either plotted along the structure (for a certain value of the frequency) or plotted at a single point for a suitable range of frequencies (frequency response plot).

When plotting the response along the length of the structure a non-dimensional coordinate is defined such that

$$s = (j + 1)y/\ell \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$s = j y/\ell \quad , \quad j = -1, -2, \dots$$

where j numbers the bay where s lies.

Figures 4 and 5 show the amplitude response (displacement and moment, respectively) for an infinite undamped

stringers-stiffened shell like that appearing in fig. 1 for the non-dimensional frequencies [6], $\Omega_0^* = 22.10$ (following within the first propagation band) and 0.65 (an attenuating frequency). The response is plotted only at bays 0, 1, 2, 3 and 4. There is no need to plot the response at the left of bay 0 because of the symmetry of the structure and load. The displacement and moment are made non-dimensional by multiplying them by $1/h$ and h/D , respectively. It can be seen that for the propagating frequency (22.10) the moment are high at the stringer and at the middle of the bay. Calculations have shown that for a flat structure the moment are very much pronounced at the stringers than in the middle of the bay. The response at the frequency 0.65 is very attenuated. Similar calculations have been made by considering structural damping and for a loss factor of 0.15 it was found that the response was heavily attenuated at the end of the fourth bay. This fact shows that when damping is present the infinite structure model is valid even if the actual structure has only a few bays.

Figure 6 shows the frequency response of the amplitude of the moment at the middle of a bay of a heavily damped structure.

The peak response occurs very close to the non-dimensional frequency 20.72, which in turn is very close to the lower limit of the first passing band.

When damping is too low or the force is too close to one of the extremis bays the infinite model no longer can represent the finite one and the theory developed for finite periodic structures should be used.

Figure 7 shows the amplitude response of a seven bays stringer-stiffened plate with no damping, with the force applied at the middle of the structure. The response is plotted at bay 0, 1, 2, 3 and 4 and the frequencies of excitation are 18.175 (propagating) and 0.10 (attenuating). It was noted that the response of the infinite model at 0.10 is almost identical to that shown in fig. 7.

In contrast the response at 18.175 is radically different of the infinite structure. This is accounted for the

full reflections at the ends of the structure.

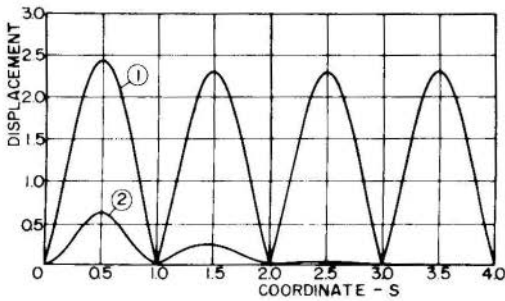


Fig. 4 - Amplitude response of a infinite stringer-stiffened shell. Curve (1): $\Omega = 22.10$; Curve (2): $\Omega = 0.65$; $\eta = 0$; $r = 1$

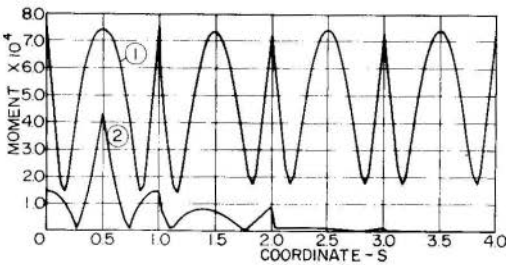


Fig. 5 - Amplitude response of a infinite stringer-stiffened shell. Curve (1): $\Omega = 22.10$; Curve (2): $\Omega = 0.65$; $\eta = 0$; $r = 1$

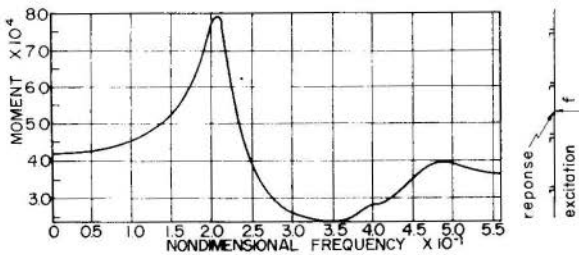


Fig. 6 - Frequency response of a infinite stringer-stiffened shell, $\eta = 0,25$; $r = 1$

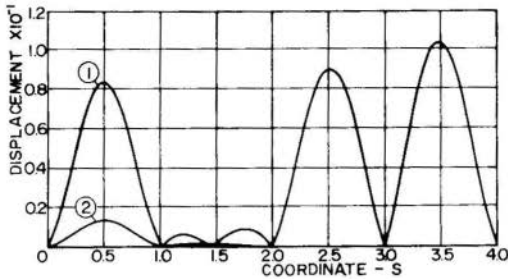


Fig. 7 - Frequency response of a seven bay stringer-stiffened . Curve (1): $\Omega = 18.175$; Curve (2): $\Omega = 0.10$
 $\eta = 0$; $r = 1$.

6. Conclusions

A computed-oriented matrix theory for the response of finite and infinite periodic structures has been developed. The theory relies on the concept of complex wave components here introduced. It has been shown that the response of finite and infinite periodic structures can be found as a linear combination of these complex wave components.

Response along the structure and frequency response functions have been computed and presented for stringer-stiffened plates and shells.

Damping brings no further complications to the theory. The influence of the boundaries of the structure has been discussed on the light of results. It was shown that moderate damping allows the use of the simpler infinite structure model to most practical periodic structures.

References

- [1] Mead, D.J. and Wilby, E.W., "The random vibrations of a multi-supported heavily damped beam", Shock and Vibration Bulletin, 35, Part 3, 1966
- [2] Ungar, E.E., "Steady response of one dimensional periodic flexural system", J. Acoust. Soc. Am., 39 1966.
- [3] Brokonitskii, Yu.I. and Maslov, V.P. "Propagation

of flexural waves along a beam with periodic point loading", Sovietic Physics Acoustic", 1966.

- [4] Mead, D.J., "Free wave propagation in periodically supported, infinite beams", J. Sound Vib., 11(2), 1970.
- [5] Mead, D.J., and Sen Gupta, G., "Wave group theory applied to the analysis of forced vibrations of rib-skin structures", Proc. Symp. Struct. Dynamics Loughborough, 1970.
- [6] de Espíndola, J.J., I.S.V.R. Ph.D. Thesis. University of Southampton, 1974.
- [7] de Espíndola, J.J., and Mead, D.J., "A general theory of free wave propagation in periodic structures", Proc. 3rd. Braz. Cong. of Mech. Eng. 1975
- [8] Brillouin, L., "Wave propagation in periodic structures", Dover Publications, 1953.

ESPÍNDOLA, J.J.

RESPONSE OF SPATIALLY PERIODIC STRUCTURES
TO CONCENTRATED FORCES

Summary

A general computer oriented theory for the response of spatially periodic structures to concentrated forces is constructed.

The generalized response quantities are computed in terms of complex wave components, a concept which is introduced here.

Response along the structure and frequency response functions have been computed for stringer-stiffened plates and shells. Computer results are discussed.

RESPOSTA DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS A FORÇAS CONCENTRADAS

Sumário

Apresenta-se uma teoria, orientada para computador digital, para a resposta de estruturas periódicas a forças concentradas. A resposta generalizada é computada em termos das componentes complexas de ondas elásticas, um conceito que é definido no trabalho. Foram calculadas respostas ao longo da estrutura e respostas em frequências para placas reforçadas e cascas cilíndricas reforçadas. Resultados de computador são apresentados e discutidos.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 18
PP. 217 - 225



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DA RESPOSTA DE SISTEMAS
DINÂMICOS SOB EXCITAÇÃO ALEATÓRIA NÃO-GAUSSIANA

Angela Maestrini, Aluna do Curso de Pós-Graduação
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Brasil.

Jorge Daniel Riera, Professor do Curso de Pós-Graduação
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Brasil.

1. Introdução

A determinação da densidade de probabilidade multidimensional da resposta de sistemas dinâmicos sob excitações aleatórias constitui um problema de considerável complexidade. No caso de estruturas lineares é possível obter a função de densidade da resposta, dadas as característi-

cas do sistema e a densidade da excitação, seguindo o método sugerido por Hurty e Kouskolas [1]. Este enfoque, porém, apresenta algumas dificuldades e aparentemente não foi desenvolvido.

Quando o sistema é linear e a excitação apresenta uma distribuição de Gauss, pode-se demonstrar que a resposta é também Gaussiana [2]. Consequentemente, com frequência admite-se 'a priori' que a resposta é Gaussiana, não se considerando então a distribuição da excitação na solução do problema. Neste caso, é suficiente para uma descrição estatística completa da resposta a obtenção da média e da covariância da mesma. A justificativa desta simplificação gira ao redor da hipótese de que a distribuição da excitação é "aproximadamente" Gaussiana, condição esta satisfeita em numerosas aplicações práticas. Além disso, essa hipótese permite, para obter a solução do problema, a utilização de métodos bem estabelecidos, incluindo numerosos programas orientados para a análise dinâmica de estruturas.

Os autores não conhecem critérios simples que permitam determinar quando a distribuição de probabilidade da excitação pode ser considerada "aproximadamente" Gaussiana. Ainda neste último caso, é importante, em relação a muitos problemas de dinâmica estrutural, avaliar a influência na distribuição da resposta da não-linearidade do sistema.

Neste trabalho são apresentados alguns resultados da aplicação da técnica de Monte-Carlo à solução de problemas específicos com os seguintes objetivos: (a) obter critérios simples de limitação da aplicabilidade do método dos dois momentos e (b) orientar, através da melhor compreensão do fenômeno físico, enfoques teóricos na área.

2. Definição do problema

Considere-se o problema esquematizado na Fig. 2.1. Trata-se de um oscilador linear com amortecimento viscoso submetido a uma aceleração $\ddot{u}(t)$ da base. A excitação é definida como uma onda de amplitude constante, igual a $+a$ ou $-a$ dentro de intervalos de duração T_0 . Ao final de cada intervalo é decidido aleatoriamente, com probabilidades iguais, qual será o sinal da função no seguinte intervalo.

A equação de movimento tem a forma:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = -m \ddot{u} \quad (2.1)$$

onde m , c e k representam, respectivamente, a massa, o coeficiente de amortecimento e a rigidez do sistema, sendo x o deslocamento relativo à

base. A eq. (2.1) pode ser escrita:

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{u}(t) \quad (2.2)$$

onde ζ é a razão de amortecimento crítico.

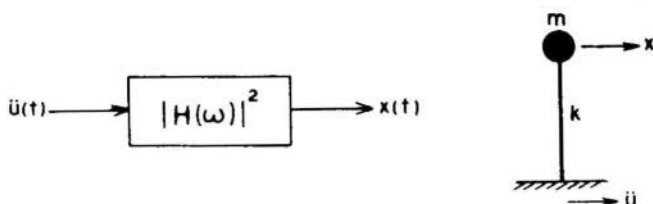


Fig. 2.1

A distribuição de probabilidade da excitação é:

$$P(\ddot{u}) = \begin{cases} 0 & \ddot{u} < -a \\ 0.5 & -a < \ddot{u} < a \\ 1 & \ddot{u} > a \end{cases} \quad (2.3)$$

A correspondente função de densidade de probabilidade $p(\ddot{u})$ é então identicamente nula, exceto para $\ddot{u} = -a$ e $\ddot{u} = a$, onde apresentam-se duas funções impulso de Dirac, de áreas 0.5. Observe-se que a onda possui uma densidade completamente diferente da distribuição de Gauss, razão pela qual, foi escolhida neste estudo. Pode-se demonstrar que a função de autocorrelação da excitação é [3]:

$$R_{\ddot{u}}(\tau) = \begin{cases} a^2 \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) & 0 \leq \tau \leq T_0 \\ 0 & \tau \geq T_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

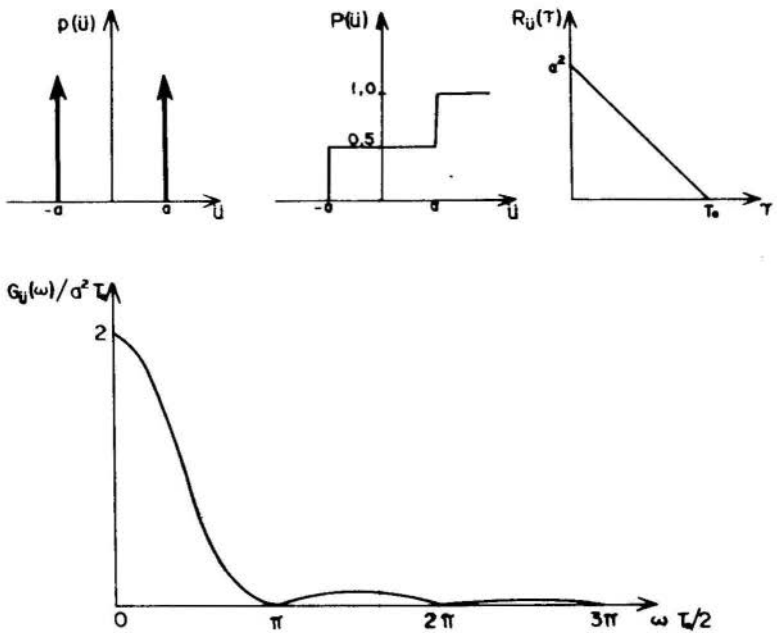
Definindo a densidade espectral de potência $G_{\ddot{u}}(\omega)$ da excitação em termos da transformada complexa de Fourier de $R_{\ddot{u}}(\tau)$:

$$G_{\ddot{u}}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{\ddot{u}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.5)$$

obtem-se:

$$G_{\ddot{u}}(\omega) = \frac{8 a^2}{T_0 \omega^2} \text{sen}^2 \frac{\omega T_0}{2} \quad (2.6)$$

Na Fig. 2.2 estão representadas as funções $p(\ddot{u})$, $P(\ddot{u})$, $R_{\ddot{u}}(\tau)$ e $G_{\ddot{u}}(\omega)$ que caracterizam a excitação $\ddot{u}(t)$.



CARACTERIZAÇÃO DA EXCITAÇÃO

Fig. 2.2

3. Excitação estacionária - cálculo da variância

No caso de sistemas lineares com parâmetros constantes, a relação entre as densidades espectrais de potência da excitação $\ddot{u}(t)$ e da resposta $x(t)$ vem dada por [4 - 6]:

$$G_x(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{\ddot{u}}(\omega) \quad (3.1)$$

onde $H(\omega)$ é a função de admitância complexa do sistema. Tem-se:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega_n^4} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.2)$$

Finalmente, o valor quadrático médio ψ_x^2 da resposta pode ser calculado através da expressão:

$$\psi_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega \quad (3.3)$$

Sendo aqui o valor médio nulo, o valor quadrático médio ψ_x^2 coincide com a variância σ_x^2 .

Para o amortecimento $\zeta = 0.025$ e o período básico da excitação $T_0 = 1$ seg o valor de ψ_x^2 foi obtido introduzindo-se as Eq. (2.6), (3.1) e (3.2) na Eq. (3.3) a qual foi avaliada numericamente para as frequências naturais indicadas na Tabela 3.1, onde se apresenta o desvio padrão resultante.

Tab. 3.1

Frequência do sistema e desvio padrão da resposta

ω_n (cps)	0.25	1.0	1.5	3.0	10
σ_x/a	1.439	0.0306	0.0244	0.00333	0.285×10^{-3}

4. Aplicação do método de Monte-Carlo

Uma amostra aleatória da onda foi gerada determinando-se o seu sinal dentro de cada intervalo com ajuda de uma moeda, até um total $L_T=600$ seg, o qual foi considerado suficiente para o sistema atingir um regime estacionário. A resposta $x(t)$ foi calculada mediante integração numérica por meio do método de Newmark [7] com um intervalo de integração $\Delta t = 0.01$ seg. Para as mesmas frequências indicadas na Tabela 3.1 obteve-se os valores de σ_x^2 mostrados na Tabela 4.1.

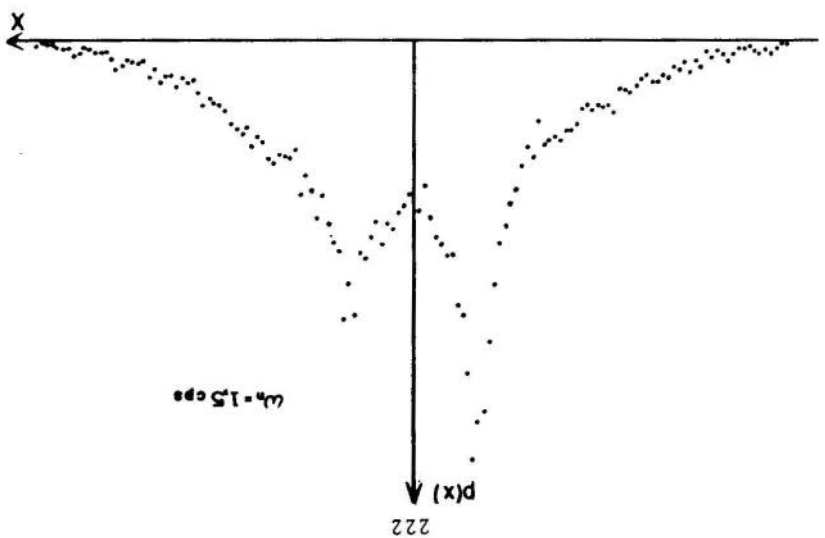
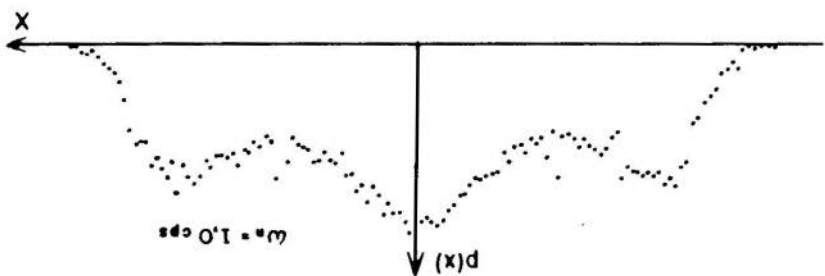
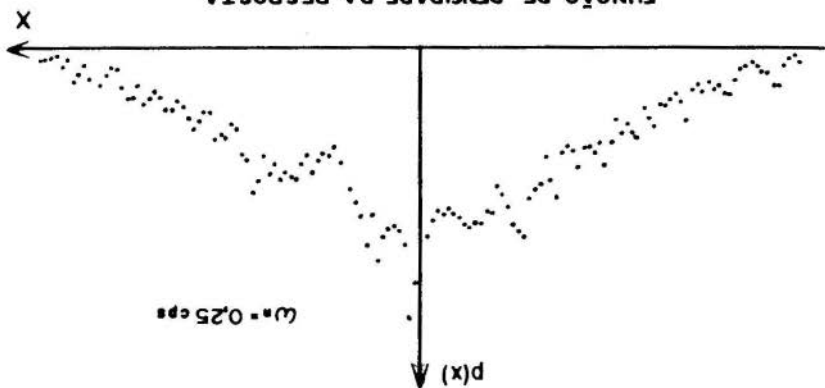
Tab. 4.1

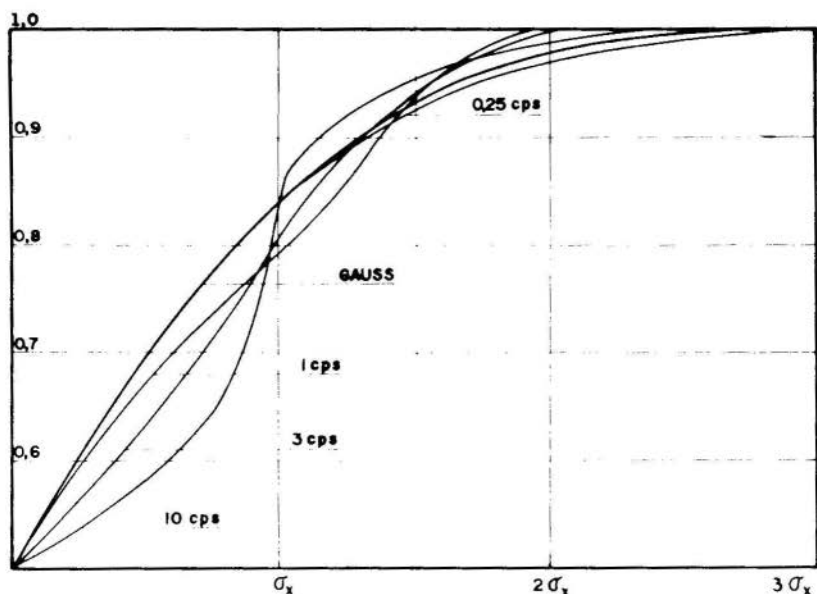
Frequência do sistema e desvio padrão da resposta

ω_n (cps)	0.25	1.0	1.5	3.0	10
σ_x/a	1.564	0.0307	0.0241	0.00333	0.293×10^{-3}

Nas Fig. 4.1 e 4.2 estão representadas as funções densidade $p(x)$ e distribuição $P(x)$ para as frequências consideradas.

FUNÇÃO DE DENSIDADE DA RESPOSTA





DISTRIBUIÇÃO DA RESPOSTA

Fig. 4.2

Note-se que a resposta de sistemas com baixa frequência apresenta para níveis de probabilidade menores de 0,9 uma distribuição praticamente coincidente com a de Gauss. Pode-se considerar que essa aproximação é razoável até $3\sigma_x$. Por outro lado, a distribuição da resposta de sistemas de alta frequência tende à distribuição da excitação. Consequentemente, a hipótese de que a resposta é Gaussiana conduz, neste caso, a uma sobre-estimação da resposta para $x > 1.5\sigma_x$.

5. Conclusões

Os limitados resultados apresentados confirmam a validade da hipótese da distribuição Gaussiana da resposta, no caso de sistemas com um grau de liberdade e frequência natural dentro da banda de frequência predominante da excitação. Em sistemas de frequência elevada com respeito à frequência da excitação, confirmou-se a conclusão intuitiva de que a distribuição da resposta deve tender, a medida que ω_n cresce, à distribuição da excitação. Espera-se que desenvolvimentos adicionais per

mitam obter fatores de correção da distribuição de Gauss para estes últimos casos. Finalmente, compete advertir que para níveis de probabilidade altos, isto é, para $x > 2 \sigma_x$, o erro cometido ao admitir que a distribuição da resposta é de Gauss pode ser considerável, ainda no caso de sistemas em ressonância.

Bibliografia

- [1] V.J. Kouskolas and W.C. Hurty: "Probabilistic Description of the Response of Linear Structures to Random Inputs", Transaction, ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 69, Set. 1970, p. 617 - 622.
- [2] J.L. Melsa e A.P. Sage: "An Introduction to Probability and Stochastic Processes", Prentice Hall, N.J. 1973.
- [3] G. Fodor: "Laplace Transforms in Engineering", Akademia Kiadó, Budapest, 1965.
- [4] W.C. Hurty and M.F. Rubinstein: "Dynamics of Structures" Prentice Hall, N.J. 1964.
- [5] L. Meirovitch: "Analytical Methods in Vibrations", Mac Millan, London, 1967.
- [6] Y.K. Lin: "Probabilistic Theories of Structural Dynamics", McGraw-Hill, N.Y. 1967.
- [7] N.M. Newmark: "A method of computation for structural dynamics", Proc. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Div., 85, 67 - 94, 1959; also Trans. ASME, 127, Part 1, 1406 - 1435, 1962.

ERRATA

Na nota técnica: "Reômetro Extrusor - obtenção de diagramas reológicos" (p.875-81), na parte de resultados e conclusões, onde está escrito:

leia-se

... α = 1,75 e K_c = 0,99 (3);
... α = 1,75 e K_c = 0,09 (3).

MAESTRINI, A., e RIERA, J.D.

SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DA RESPOSTA DE SISTEMAS
DINÂMICOS SOB EXCITAÇÃO ALEATÓRIA NÃO-GAUSSIANA

Sumário

Neste trabalho aplica-se o método de Monte-Carlo para determinar a distribuição de probabilidade da resposta de um oscilador linear sob excitação não-Gaussiana.

Os resultados obtidos mostram que a distribuição de Gauss para valores moderados da variância, constitui uma aproximação razoável da distribuição da resposta em sistemas com frequência natural dentro da banda de frequências predominantes da excitação. Verifica-se que no caso de sistemas de alta frequência a distribuição da resposta tende uniformemente à distribuição da excitação.

ON THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE RESPONSE OF DYNAMIC
SYSTEMS UNDER NON-GAUSSIAN RANDOM EXCITATION

Summary

The probability distribution of the response of a linear oscillator under non-gaussian random excitation is determined using the Monte Carlo Method. The results obtained show that, for moderate values of the variance, the Gauss distribution constitutes a reasonable approximation to the response distribution in systems with natural frequency within the range of predominant frequencies of the input. It was also verified that as the frequency of the oscillator increases, the response distribution tends to the distribution of the excitation.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 19
PP. 227 - 233



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ANÁLISE EXPERIMENTAL DE

UM PÊNULO CONTENDO LÍQUIDO

Fausto RODRIGUES Filho, Professor Assistente
Hans Ingo WEBER, Professor Titular
Depto. de Engenharia Mecânica
Faculdade de Engenharia de Campinas - UNICAMP
Campinas, Brasil

1. Introdução

O estudo do comportamento dos sistemas mecânicos pode ser desenvolvido por métodos teóricos ou por procedimentos experimentais, sendo estas duas formas mutuamente complementares. Sistemas reais, muitas vezes complexos, podem ser simulados por outros equivalentes mais simples que reproduzem os efeitos principais que se pretende estudar e sobre os quais se possa ter um controle adequado.

O presente trabalho apresenta uma análise experimental do comporta

mento de um pêndulo constituído por um recipiente leve contendo uma massa líquida, em função da quantidade de líquido nele contido, submetido a uma excitação externa. Imagina-se que este pêndulo possa se constituir em modelo físico que represente o comportamento de reservatórios fixos ou móveis (carros-tanque, vagões tanque) sujeitos a oscilações.

Espera-se ainda que o exame dos resultados obtidos permita estabelecer um modelo matemático simplificado, com poucos graus de liberdade e que, com a identificação dos valores dos parâmetros envolvidos, descreva adequadamente o comportamento do modelo físico estabelecido.

Esta simplificação matemática já foi aplicada em trabalhos analíticos [1] onde se estuda um modelo de vagão ferroviário contendo líquido.

2. Montagem Experimental

Para a realização dos ensaios foi construído e montado o pêndulo esquematizado na Fig. 1. O reservatório a foi construído com um tubo cilíndrico e placas laterais de acrílico visando-se que tivesse pouco peso e permitisse a observação do líquido em seu interior. Foi reforçado com placas de alumínio no seu engaste com a haste b, constituída de uma barra cilíndrica de aço que se engasta na sua extremidade superior a um suporte c com dois tirantes curtos. Estes se prendem a um cutelo d suportado pelo apoio e que se fixa a uma estrutura rígida.

O sistema consta ainda de uma mola h de constante $K = 18,5 \text{ gf/cm}$ e é excitado por um vibrador indutivo E que aplica uma força P proporcional à corrente de alimentação, fornecida por um gerador de sinal G e controlada por um amperímetro digital A. O movimento do pêndulo é medido por um captador indutivo de deslocamento C acoplado a uma ponte amplificadora W. Tanto o sinal da excitação como o da resposta podem ser observados num osciloscópio S de dois canais.

3. Ensaio, Resultados e Discussão

Excitando-se o pêndulo com uma quantidade determinada de líquido (no caso foi utilizado água) contida no reservatório, observam-se duas frequências de ressonância, correspondentes a dois modos de vibrar distintos: na primeira, de valor f_{n1} mais baixo, o líquido e o pêndulo estão em fase, o que se pode verificar por observação visual, assim como os sinais de excitação e resposta observados no osciloscópio; na segunda, f_{n2} , o líquido e o pêndulo estão em oposição de fase e o movimento do líquido se torna mais notável, embora a amplitude do pêndulo seja me-

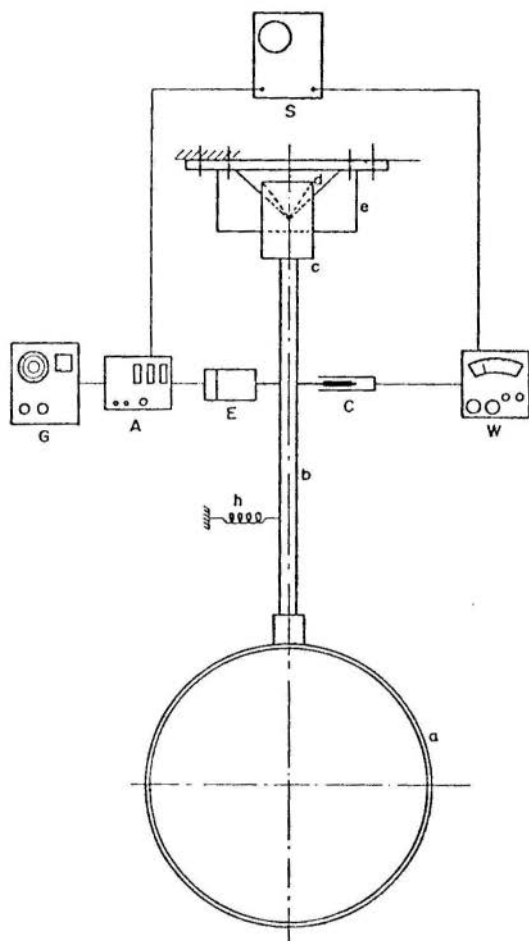


Fig. 1 - Esquema de montagem do pêndulo e aparelhagem utilizados.

nor e os sinais de excitação e resposta se mostrem também em coincidência de fase.

Variando-se a quantidade de líquido contida no reservatório verifica-se que a variação dessas duas frequências tem um comportamento como o mostrado na Fig. 2, onde se observa que, com quantidades decrescentes, f_{n1} e f_{n2} convergem para um limite comum $f_{no} = 1,70$ Hz que é a frequência de ressonância do pêndulo totalmente vazio. Aumentando-se a quantidade de líquido, f_{n1} decresce segundo uma curva de aspecto ex-

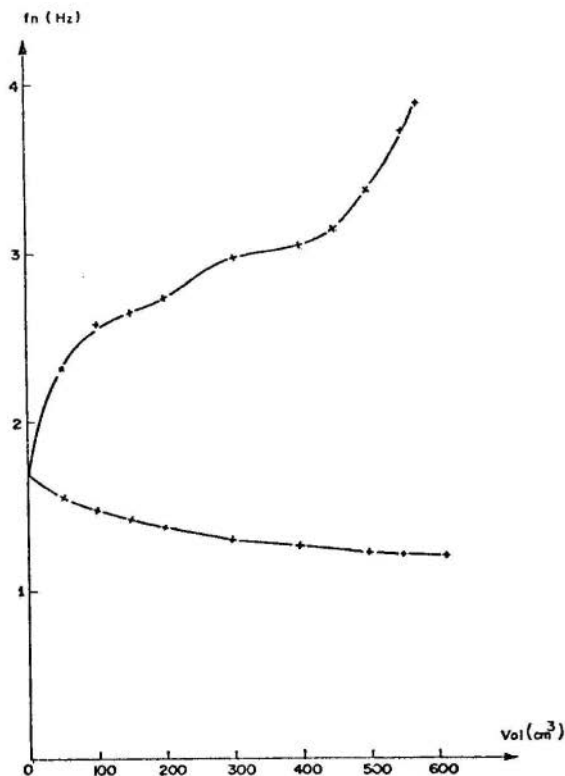


Fig. 2 - Frequências de ressonância em função do volume de líquido.

ponencial desde o recipiente totalmente vazio até totalmente cheio, enquanto f_{n2} cresce monotonicamente, conforme indicado na Fig. 2. O aumento de f_{n2} é bastante pronunciado para pequenos volumes, diminuindo na região em torno da metade da capacidade do recipiente e tornando a acentuar-se quando se aproxima do recipiente totalmente cheio.

Para uma amplitude fixada da excitação, a amplitude da resposta na segunda frequência de ressonância varia com a quantidade de líquido, diminuindo quando se aproxima do volume total do reservatório, já não se a distinguindo mais para 95% desse volume. A amplitude da resposta na primeira frequência de ressonância pouco se altera com a variação da quantidade de líquido. A Fig. 3 mostra as curvas de ressonância levantadas para três quantidades de líquido: curva a para metade da capacidade, b para um volume intermediário e c para o reservatório totalmente cheio.

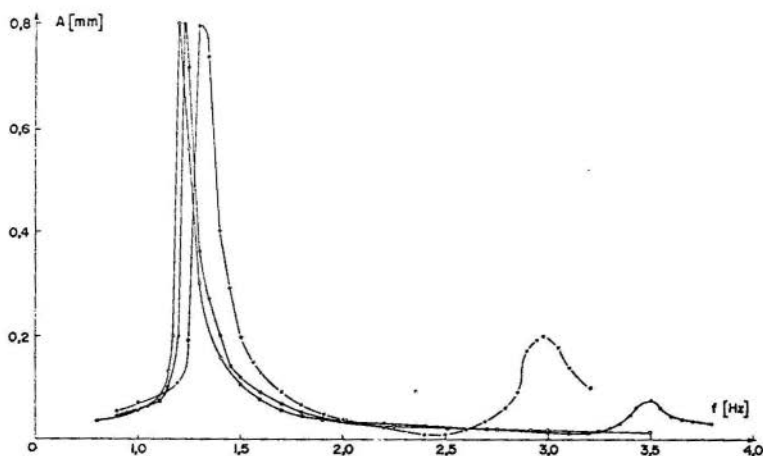


Fig. 3 - Curvas de ressonância para três níveis de líquido.

4. Conclusões

Examinando-se os resultados obtidos conclui-se que o sistema poderá ser representado por um modelo matemático de dois graus de liberdade, pois apresenta sempre duas frequências de ressonância e dois modos de vibrar característicos, na faixa de frequências examinada. Observa-se também que o comportamento da primeira frequência de ressonância, de aspecto exponencial, talvez possa ser representado por um pêndulo composto

onde se acrescente massa na região pouco abaixo do seu centro de gravidade. Finalmente, a influência maior do volume nas regiões extremas (quase vazio e quase cheio) talvez possa ser atribuída à maior variação da superfície livre do líquido nessas regiões.

Procura-se atualmente estabelecer um modelo matemático adequado e identificar os parâmetros convenientemente para descrever os efeitos principais observados, ou seja: a) convergência das frequências de ressonância para o valor f_{no} correspondente ao pêndulo vazio (sistema de um grau de liberdade); b) comportamento de aspecto exponencial da primeira frequência de ressonância; e c) influência da variação de volume nas regiões extremas (abaixo de 1/4 e acima de 3/4 da capacidade do reservatório).

Bibliografia

- [1] Weber, H. I., Vieira, M. N. - "Estudo do movimento de balanço com perturbação interna", Anais III COBEM, Dez. 1975.

RODRIGUES Fº, F. e WEBER, H.I.

ANÁLISE EXPERIMENTAL DE UM PÊNULO CONTENDO LÍQUIDOSumário

Estuda-se o comportamento de um pêndulo constituído por um reservatório contendo líquido. O pêndulo é excitado por um ponto intermediário da haste e dotado de duas molas de restituição. Os ensaios são realizados variando-se a amplitude e a frequência da excitação, assim como o volume de líquido contido no reservatório, verificando-se a influência desses parâmetros.

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF A PENDULUM CONTAINING A LIQUID MASSSummary

The dynamical behavior of a pendulum which consists of a box containing a liquid mass is studied. The pendulum is excited by an intermediate point of the rod and has two restitution springs. Experiences are made by changing amplitude and frequency excitation, as well as the liquid quantity contained in the box, with regard to the influence of each of the parameters.

A U A D S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 20
PP. 235 - 244



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

MECHANICAL LIMIT CYCLES INDUCED

BY COULOMB FRICTION

Theo Furtado C. SILVA, Associate Professor
Department of Mechanical Engineering
COPPE/UFRJ

Roberto A. TENENBAUM, Assistant Professor
Department of Mechanical Engineering
COPPE/UFRJ

William M. MANSOUR, Professor
Department of Mechanical Engineering
COPPE/UFRJ

1. Introduction

Limit cycles are quite often encountered in practice.

The most familiar one is the Van der Pol electronic

oscillator. This class of limit cycles is easy to synthesize and analyse. Mechanical systems, under certain conditions of operation, exhibit limit cycles which are triggered by dry friction or by anomalies in the hydrodynamic characteristics of the moving body [1] to [5]. A typical example of a mechanical limit cycle is found in the phenomenon of "galloping of transmission lines".

The objective of this paper is to study a set up which utilizes dry friction to trigger a mechanical limit cycle. It is also intended to explore the possibility of using the set up as an instrument to measure the dynamic friction coefficient between moving bodies.

2. The set up and the mathematical model

Fig. 1 shows a rod resting on two pulleys which are driven in opposite directions by an angular velocity ω . The pulleys are of equal radii r , and they are 2ℓ apart. The left and right contact points are labelled 0_1 and 0_2 respectively.

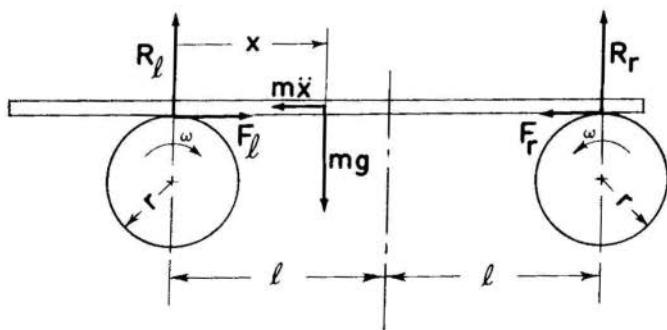


Fig. 1 - Forces on the oscillating rod

The origin of the stationary system of axes is taken at 0_1 . In the analysis that follows, we shall consider the motor as a "stiff" source of power, i.e. as capable of meeting the torque demands at all times. The static and

dynamic coefficients of friction are denoted by μ_s and μ_d respectively.

The right and left reactions are given by:

$$R_r = m g \frac{x}{2\ell} \quad \text{and} \quad R_\ell = m g \frac{2\ell - x}{2\ell}$$

The rod can have any of the following modes:

a) MODE-I: (left rolling and right slipping)

In this mode, rolling motion occurs at 0_1 and slipping occurs at 0_2 . This mode starts when

$$\dot{x} = r\omega$$

and prevails until the following inequality is violated:

$$\mu_d m g \frac{x}{2\ell} < \mu_s m g \frac{2\ell - x}{2\ell}$$

The governing equations in this mode are given by:

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{and} \quad \dot{x} = r\omega$$

where dots indicate differentiation with respect to time t .

b) MODE-II. (right rolling and left slipping)

In this mode, rolling motion occurs at 0_2 and slipping occurs at 0_1 . This mode starts when

$$\dot{x} = -r\omega$$

and prevails until the following inequality is violated:

$$\mu_d m g \frac{2\ell - x}{2\ell} < \mu_s m g \frac{x}{2\ell}$$

The governing equations in this mode are given by:

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{and} \quad \dot{x} = -r\omega$$

c) MODE-III: (left and right slipping)

In this mode, slipping motion occurs at 0_1 and 0_2 simultaneously. The rod can be moving from left to right or vice versa. The governing equation in both

cases is given by:

$$m \ddot{x} + \mu_d m g \frac{x}{2\ell} = \mu_d m g$$

The rod enters this mode when MODE-I terminates and in this case it stays until $\dot{x} = -r\omega$.

The rod can also enter MODE-III when MODE-II terminates and in this case it stays until $\dot{x} = r\omega$.

The dead centers are assumed to be located at x_0 and at $2\ell - x_0$ respectively where x_0 is an unknown quantity to be determined later. The following dimensionless quantities are introduced to simplify the analysis.

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{2\ell} & ; & & X_0 &= \frac{x_0}{2\ell} & ; & & V &= \frac{r\omega}{\sqrt{2\ell} \mu_d g} \\ \tau &= \sqrt{\frac{\mu_d g}{2\ell}} t & ; & & \beta &= \frac{\mu_d}{\mu_s} & ; & & \delta &= \frac{1-\beta}{1+\beta} \end{aligned} \quad (1)$$

The equations that govern the oscillating rod are summarized in Table 1.

MODE	GOVERNING EQUATIONS	CONDITION TO ENTER	CONDITION TO STAY
I	$X'' = 0, X' = V$	$X' = V$	$X < \frac{1}{1+\beta}$
II	$X'' = 0, X' = -V$	$X' = -V$	$X > \frac{\beta}{1+\beta}$
III	$X'' = -2X + 1$	$X \geq \frac{1}{1+\beta}$ $X \leq \frac{\beta}{1+\beta}$	$X' \geq -V$ $X' \leq V$

Table 1 - Modes and transitions

where primes indicate differentiation with respect to the dimensionless time τ .

3. Estimation of periodic time and radius of the limit cycle

Fig. 2 shows the phase plane trajectory of an idealized

limit cycle.

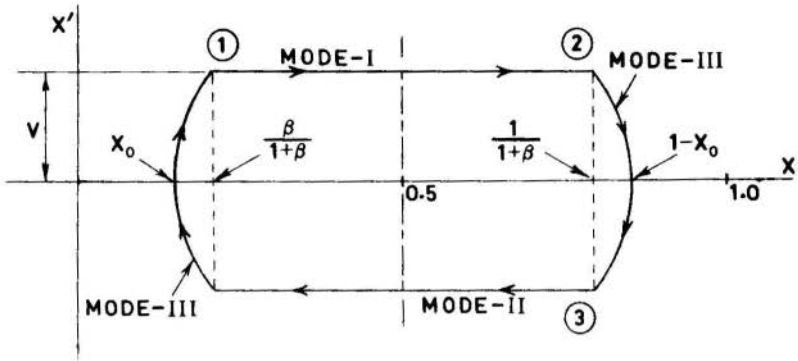


Fig. 2 - Phase plane of idealized limit cycle.

The time τ_1 required to move from point 1 to point 2 on the trajectory is given by:

$$\tau_1 = \frac{\delta}{V} \quad (2)$$

The motion from point 2 to point 3 on the trajectory is governed by:

$$X'' + 2X = 1$$

with the following conditions at point 2:

$$x = \frac{1}{1+\beta} \quad \text{and} \quad X' = V$$

Solving and applying the initial and final values of X' , one can show that:

$$\tau_2 = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2} V}{\delta} \quad (3)$$

and

$$X_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2V^2 + \delta^2} \quad (4)$$

where τ_2 is the time required to move from point 2 to point 3 on the trajectory. Using relations (2), (3) and (4) one can obtain expressions for the dimensionless periodic time T_L and the dimensionless radius R_L of the limit cycle of the oscillating rod. These are given by:

$$T_L = \frac{2\delta}{V} + 2\sqrt{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2} V}{\delta} \quad (5)$$

$$R_L = \frac{1}{2} \sqrt{2V^2 + \delta^2}$$

The previous analysis also reveals that the condition for the existence of a limit cycle is given by:

$$V < \sqrt{\frac{1 - \delta^2}{2}}$$

The periodic time t_L in seconds and the radius r_L in appropriate units are given by:

$$t_L = 4 \sqrt{\frac{\ell}{\mu_d g}} \left[\frac{\delta \sqrt{\ell \mu_d g}}{r\omega} + \tan^{-1} \frac{r\omega}{\delta \sqrt{\ell \mu_d g}} \right] \quad (6)$$

$$r_L = \ell \sqrt{\delta^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\ell \mu_d g}}$$

The condition for the existence of limit cycles is given by:

$$r\omega < \sqrt{\ell \mu_d g}$$

For very small values of δ , i.e. when the difference between the dynamic and static coefficients of friction is negligible, the dimensionless relations simplify to:

$$T_L = \sqrt{2} \pi \quad \text{and} \quad R_L = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

which yield:

$$t_L = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\mu_d g}} \quad \text{and} \quad r_L = r\omega \sqrt{\frac{\ell}{\mu_d g}} \quad (8)$$

4. Experimental verification of the phenomenon

An experimental set up was prepared to examine the phenomenon. A close-up photograph of the set up is shown in Fig. 3.

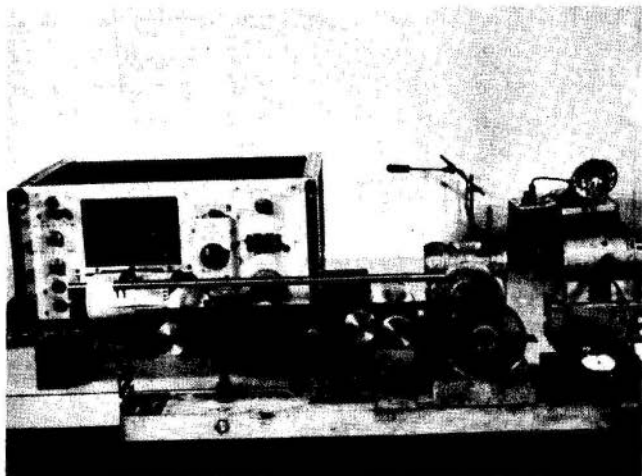


Fig. 3 - Experimental set up

A variable speed 1/6 horsepower A.C. motor was used to drive the pulleys through a 1:80 reduction gear box. The pulleys were machined from Aluminum stock to a radius of 3.50 cm. each. An almost semi-circular groove was machined on the rim of each pulley to receive the rods. The pulleys were mounted in such a way to allow the use of different distances between their centers. A tension pulley was used to take off the slack in the driving belt when the distance between the pulleys is varied. A stroboscope was used to measure the angular velocity of the pulleys. The rods themselves were used to drive the recording pens directly on a strip-chart recorder.

Rods of different materials (steel, Aluminum and brass) were tried. Different weights were attached to each rod. The phenomenon was observed and recorded. In almost every combination of materials, the rod was found to exhibit a limit cycle. It was also found that changing the weight of the rod has no effect on the periodic time and the radius of the limit cycle.

A drift and a cyclic wandering of the limit cycle was noticed to occur around the geometric center of the setup. Repeatability was poor. This is attributed to the possible misalignments of the pulleys and to the extreme sensitivity of the setup to extraneous inputs: variations in motor's speed due to load and line voltage, variations in the ambient conditions such as humidity, dust, etc.

Fig. 4 shows a typical record for a brass rod on the Aluminum pulleys. The pulleys were rotating at 30 R.P.M. and the distance between their centers was 30.6cm. The record shows that the periodic time is 1.80 seconds which, when using relation (8), yields a value for μ_d equal to 0.19 which looks reasonable.

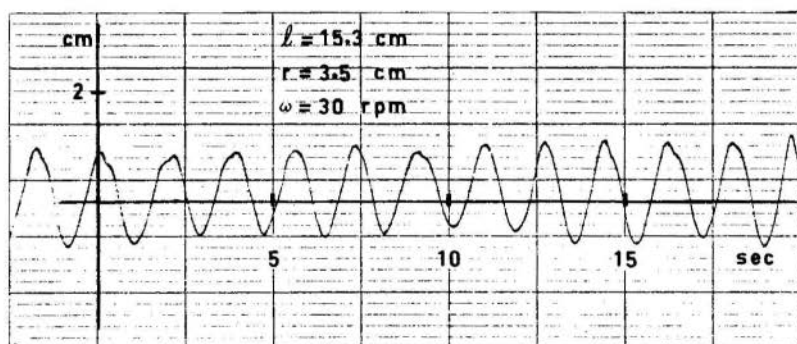


Fig. 4 - Experimental results

5. Conclusions

A mechanical limit cycle, induced by Coulomb friction was studied analytically and experimentally. The preliminary studies showed that, under controlled conditions of drive and surface conditions, one can use the setup to evaluate the dynamic coefficient of friction. For low values of V , and for special alloys which exhibit a marked difference between the static and dynamic coefficients of friction, equations (6) suggest that the setup can be used as a

a mechanical frequency-transformer.

References

- [1] Mansour, W.M., "Quenching of Limit Cycles of a Van Der Pol Oscillator", Journal of Sound and Vibrations 1972, 25(3), p. 395-405.
- [2] Gladwell, G.M.L. and Mansour, W.M., "The Analysis of Some Intermittent Contact Devices", Journal of Sound and Vibration, March 1971, vol.5, p.495-507.
- [3] Bauer, W.; Mansour, W.M., and Alpay, S., "Quantization in Digital Fluidic Control Systems", Proceedings of Joint Automatic Control Conference, J.A.C.C., Aug. 1971, paper n° 5-E6, p. 426-434.
- [4] Weaver, D.; Kouwen, N. and Mansour, W.M., "On the Hydroelastic Vibration of a Check Valve", Proceedings of IUTAM, IAHR Symposium on Flow-Induced Structural Vibrations, August 1972, paper n° C6.
- [5] Mansour, W.M. and Mutter, P., "A saddle-Focus Limit Cycle Theory for the Respirator System", Trans. of Canadian Society of Mechanical Engineers, vol.3 n° 3, 1975, p. 149-155.

SILVA, T.F.C.; TENENBAUM, R.A. and MANSOUR, W.M.

MECHANICAL LIMIT CYCLES INDUCEDBY COULOMB FRICTIONSummary

An analytical-experimental study is presented for a mechanical limit cycle. A rod resting on two equal pulleys which are driven with the same angular speed in inward-opposite directions was found to exhibit sustained oscillations. Under controlled conditions of drive and surface finish, the measured periodic time can be used to evaluate the dynamic coefficient of friction between two surfaces. For low driving speeds, the setup can be used as a mechanical frequency-transformer.

CICLOS LIMITES MEÇÂNICOS INDUZIDOSPOR ATRITO TIPO COULOMBSumário

Um estudo analítico-experimental é apresentado para um ciclo limite mecânico. Uma barra apoiada em duas polias iguais acionadas com velocidades angulares iguais e opostas, dirigidas para dentro, apresenta oscilações auto-sustentadas. Sob condições controladas de acionamento e de acabamentos superficiais, o período de oscilação pode ser usado para avaliar o coeficiente de atrito dinâmico entre duas superfícies. Para baixas velocidades de acionamento, o dispositivo pode ser empregado como um transformador mecânico de frequência.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 21

PP. 245 - 253



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ATTENUATION OF THE STICK-SLIP PHENOMENA

BY MEANS OF EXTERNAL VIBRATION

Jan Leon SCIESZKO,
Mechanical Engineering Department
COPPE/UFRJ
Rio de Janeiro, Brazil

Liu HSU,
Mechanical Engineering Department
COPPE/UFRJ
Rio de Janeiro, Brazil

1. Introduction

Considerable interest was shown in sliding motion and the complications introduced by relaxation oscillations, or stick-slip. This phenomenon has been studied by Rabinowicz

[1], Sampson [2], Matsuzuki [3] and Kato [4]. The investigations were made from a viewpoint of lubrication and friction in order to define the conditions for preventing the stick-slip.

The apparent reduction of friction by applying a vibration in the normal direction is well known. For example, a stationary object on an inclined plane will move down the plane when the plane is excited normally. Earlier work in this area was concisely summarized by Godfrey [5], who concluded that friction was apparently reduced when the acceleration of the slider approached and exceeded the value of acceleration due to gravity. It was observed experimentally by Hunt [6] that at low sliding speeds stick-slip amplitudes were reduced by imposing vibratory forces normally to the contact surfaces at one of the structural resonant frequencies.

The purpose of this research is to examine the possibility of preventing stick-slip motion by application of a periodic acceleration in a direction normal to the contact surfaces.

2. Experiment

A simple experimental set-up was constructed to observe the phenomenon. The schematics of the set-up are shown in Figure 1. A constant low velocity is imparted to a slider by an accurate driving mechanism through a linear spring. The slider itself is composed of two parts connected by leaf springs. The upper part has a coil driven by an oscillator through an amplifier to impart a periodic acceleration to the slider in the vertical direction. The dynamic behavior of the slider in the sliding direction was recorded using a strain gauge transducer which detects the deflection of the spring. The natural frequency of the spring was chosen to be much higher than the frequency of the periodic stick-slip motion to ensure a minimum interference between the linear spring and the slider.

Provision was made for connecting or disconnecting the oscillator during the motion of the slider.

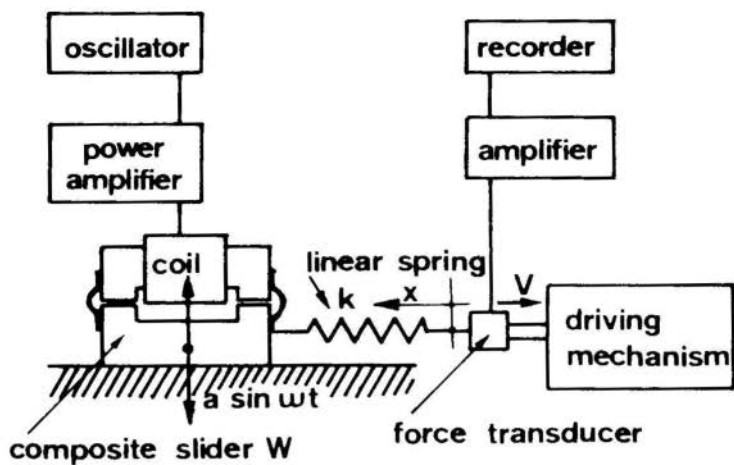


Fig. 1. Experimental set-up

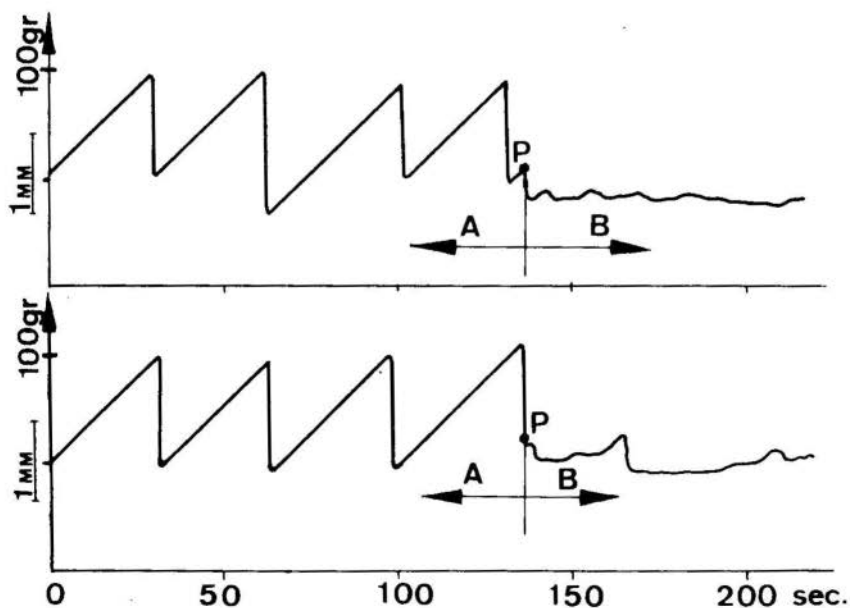


Fig. 2. Experimental records of stick-slip motion

The following parameters and values were used:

- driving speed $V = 0,0446\text{mm/sec}$
- stiffness of the linear spring $K = 0,038\text{kg/mm}$
- weight of the composite slider $W = 0,73\text{kg}$

A number of experiments were conducted with and without excitation in the vertical direction. Fig. 2 shows two records of the stick-slip motion. The first parts of the graphs denoted by "A" were obtained without applying the excitation and they correspond to typical stick-slip motion encountered in practice. When the excitation was applied, part "B" of the graphs, the stick-slip motion almost vanished. Part A of the graphs presented in Fig. 2 is qualitatively similar to the graphs presented by Kato [4] which were conducted using the following values: $V = 0,02\text{mm/sec}$; $K = 86,9\text{kg/mm}$; $W = 36,0\text{kg}$.

The experiment shows that at low sliding speeds stick-slip amplitudes were reduced to negligible values by imposing excitation in the vertical direction.

3. Mathematical Model

The mathematical model of the stick-slip motion was developed by Bowden [7]. A simple model can be obtained by considering a solid body of weight W which is pulled along a slide-way by a spring. One end of the spring is attached to the body and the other end is moved with a constant velocity V . The motion of W will be intermittent. The equation governing the dynamic behavior of the stick-slip motion without excitation of the body W is given by:

$$\ddot{X} = -X \frac{kg}{W} + \mu_d g \quad (1)$$

for the slip-condition where μ_d is the coefficient of kinetic friction.

The system will stay in this model if the following inequality is satisfied

$$\dot{X} < V \quad (2)$$

where V is the driving speed.

The condition of stick is given by

$$\dot{X} = V \quad (3)$$

For this model the following inequality must be satisfied:

$$X.k < \mu_s.W \quad (4)$$

where μ_s is the coefficient of static friction.

After application of the periodical acceleration in the vertical direction (1) takes the following form:

$$\ddot{X} = -X \frac{kg}{W} + \mu_d(g+a \sin \omega t) \quad (5)$$

and condition (4) takes the form:

$$X.k < \mu_s W (1 + \frac{a}{g} \sin \omega t) \quad (6)$$

where

a = amplitude of the acceleration ($a \leq g$)

The frequency of the periodic acceleration ω is chosen to be much higher than frequency of stick-slip motion.

4. The Analog Circuit

Figure 3 shows the analog circuit for the mathematical model. The circuit was simulated using an EAI-TR48 analog computer. The conditions of the stick and aslip are controlled by switch S. The logical signal is produced by two comparators C_1 and C_2 . Comparator C_2 is a latched comparator which receives the latching signal from comparator C_1 . The application of a periodic acceleration is realized by using a manual switch S_m .

The stick-slip dynamic system was chosen for simulation with the following parameters: $V=0,02$; $\frac{kg}{W} = 2,0$; $\mu_s=0,3$;

$\mu_d = 0,2$; $g = 50$ (for simulation purposes).

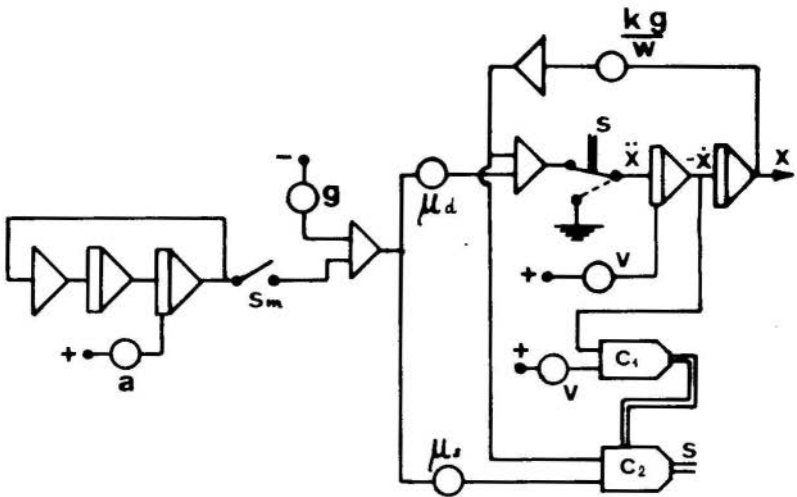


Fig. 3. Analog Circuit

Note: The switch inverts sign in EAI-TR48 analog computer

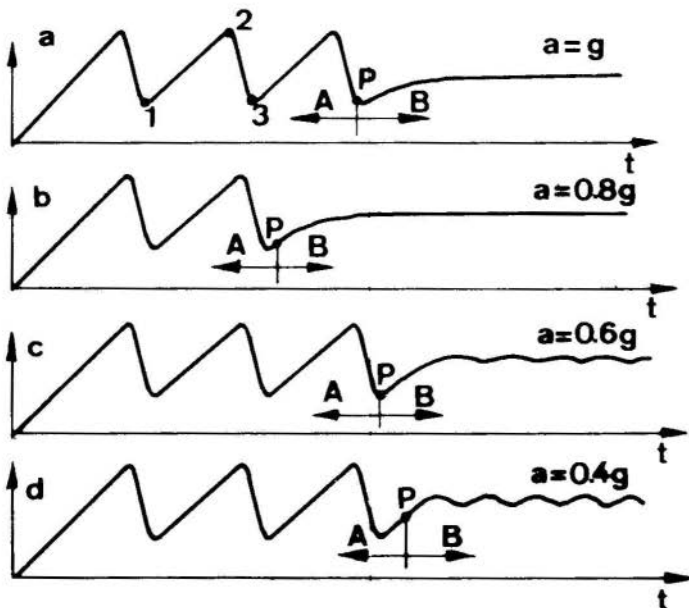


Fig. 4. Records of Analog Simulation

The results of analog simulation are shown in Figure 4. Graphs a, b, c, d correspond to different amplitudes of acceleration in the vertical direction $a = 1.0, 0.8, 0.6$ and $0.4g$ respectively. The segment 1-2 in Fig. 4a corresponds to the period during which the slider is not moving. The force in the linear spring K builds up from 1 to 2. The segment 2-3 corresponds to the period during which the slider moves. The first parts of the graphs denoted by "A" were obtained without applying the excitation and they correspond to the first parts of the graphs shown in Fig. 2. The part B of the graphs were obtained with excitation similar like part B of the graphs in Fig. 2. At the point P the periodic acceleration was imparted.

From the graphs of Fig. 4 it is easy to see that the periodic acceleration in the vertical direction minimizes the stick-slip amplitude. For the amplitudes of acceleration $a > 0.7$ the stick-slip instability disappears completely Fig. 4a and 4b. For smaller amplitudes of acceleration, i.e. as a gets smaller, the graphs show that the normal excitation is not as effective in minimizing the stick-slip amplitudes. A small amount of oscillations is noticed in Fig. 4c and 4d.

5. Conclusion

The experiment and analog computer simulation showed that it is possible to minimize stick-slip motion by introducing a periodical acceleration in the normal direction of motion. The way to prevent stick-slip motion presented above can find applications in situations where it is necessary to move or to place very heavy elements or structures with high accuracy such as is encountered in machines and positioning servos.

References

1. Rabinowicz, E., "The Intrinsic Variables Affecting the Stick-Slip Process", Proc. Phys. Soc., London, vol. 71, 1958, p. 668.

2. Sampson, J.B., et al., "Studies in Lubrication", Jour.Appl.Phys., vol. 14, 1943, p. 689.
3. Matsuzaki, A., "Theoretical Analysis of Critical Conditions of Stick-Slip in Hydraulic Driving Mechanism", Japan Soc.Mech.Engrs., vol. 29, n°206, 1963, p. 1915.
4. Kato, S., et al., "Stick-Slip Motion of Machine Tool Slideway", ASME, Journal of Engineering for Industry, May 1974, p. 557.
5. Godfrey, D., "Vibration reduces metal to metal contact and causes an apparent reduction in friction", A.S.L.E.Trans. 1967, 10, p.183.
6. Hunt, J.B., "Reduction in Relaxation Oscillation (Stick-Slip) Amplitudes by normal excitation", Journal Mechanical Engineering Science, 1977, n°1, vol. 19.
7. Bowden, F.P., and Tabor, D., "The Friction and Lubrification of Solids, Clarendon Press, 1964.

SCIESZKO, J.L. ; HSU, L.

ATTENUATION OF THE STICK-SLIP PHENOMENA
BY MEANS OF EXTERNAL VIBRATION

Summary

Experimental observation showed that the stick-slip phenomenon is attenuated by the action of external vibration. An experimental set up prepared to assess the role played by external vibration in minimizing the stick-slip motion. A mathematical model was developed and simulated using an analog computer. The results were compared with the experimentally measure time-history of the stick-slip movement. Good qualitative agreement was obtained. The influence of amplitude of vibration on stability of the movement was investigated.

ATENUAÇÃO DO FENÔMENO DE "STICK-SLIP" POR
MEIO DE UMA VIBRAÇÃO EXTERNA

Sumário

A observação experimental mostrou que o fenômeno de "stick-slip" (oscilação de relaxação devido ao atrito de Coulomb) é atenuado pela ação de uma vibração externa. Uma montagem experimental foi preparada para esclarecer o papel da vibração externa na atenuação do movimento do tipo stick-slip". Um modelo matemático foi desenvolvido e simulado em computador analógico. Os resultados foram comparados com os gráficos no tempo do movimento do tipo "stick-slip" obtidos experimentalmente. Uma boa concordância qualitativa foi obtida. A influência da amplitude de vibração na estabilidade do movimento foi investigada.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 22

PP. 255 - 268

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO AO ESTUDO DE SISTEMAS
DINÂMICOS SOB EXCITAÇÕES ALEATÓRIAS NÃO-ESTACIONÁRIAS

Jorge D. RIERA
Escola de Engenharia
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Brasil

1. Introdução

A importância da teoria de vibrações aleatórias em aplicações de dinâmica estrutural a problemas de excitação sísmica, explosões e impacto em Centrais Nucleares, e a problemas relativos a ação do vento e das ondas sobre plataformas marítimas, é amplamente reconhecida.

Em casos onde a hipótese de estacionaridade é admissível, a solução do problema no domínio da frequência usualmente apresenta vantagens. O enfoque é bem conhecido [4-6] e foi aplicado intensivamente na última década na análise de estruturas sob cargas sísmicas, do vento ou das ondas.

Por outro lado, em casos de excitação não estacionária e sobretu-

do, quando o sistema apresenta parâmetros variáveis ou qualquer tipo de não-linearidade, uma solução no domínio do tempo constitui a escolha lógica. Este enfoque foi explorado por numerosos autores em relação a problemas de excitação sísmica. Uma discussão das contribuições neste área cai fora dos objetivos do presente trabalho. Deve-se destacar, porém, que apesar de que os fundamentos da teoria das variáveis de estado são conhecidos [1-2] e extensivamente empregados em outros campos, tais como teoria de comunicações, o autor não tem conhecimento de desenvolvimentos similares na área de dinâmica estrutural.

As vantagens do método são evidentes. Os resultados de Caughey & Stumpf [7], Barnoski & Maurer [8], Hasselman [10] e Buchiarelli & Kuo [9], por exemplo, podem ser facilmente generalizados para sistemas com multigráus de liberdade.

Apresenta-se a seguir um breve resumo dos elementos básicos necessários para compreender a subsequente dedução das equações que definem a propagação da média, do valor quadrático médio e da variância de sistemas dinâmicos sob diferentes tipos de excitação. O trabalho inclui soluções fechadas aplicáveis a sistemas com parâmetros constantes e, em particular, às correspondentes ao problema estacionário.

2. Aplicação das variáveis de estado a sistemas dinâmicos contínuos

Considera-se a classe de sistemas dinâmicos contínuos, no sentido do tempo, cujo comportamento é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \vec{x}(t) + \mathbf{G}(t) \vec{u}(t) \quad (2.1)$$

onde $\vec{x}(t)$ representa o vetor de deslocamentos, $\dot{\vec{x}}(t)$ o vetor de velocidades, ambos de dimensão N , $\vec{u}(t)$ o vetor de carga, de dimensão R , $\mathbf{F}(t)$ a matriz do sistema, de dimensão $N \times N$, e $\mathbf{G}(t)$ a matriz de carga, de dimensão $N \times R$. Admite-se que $\mathbf{F}(t)$ e $\mathbf{G}(t)$ são funções seccionalmente contínuas do tempo e que $\vec{u}(t)$ constitui um processo aleatório não estacionário, cuja média $\vec{\mu}_u$ e covariância \mathbf{V}_u são conhecidas e dadas pelas equações:

$$\vec{\mu}_u(t) = E \{ \vec{u}(t) \} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{V}_u(t_1, t_2) \triangleq \text{cov} \{ \vec{u}(t_1), \vec{u}(t_2) \} = \vec{\Psi}_u(t_1) \delta_D(t_1 - t_2) \quad (2.3)$$

onde E denota "valor esperado" e $\delta_D(t_1 - t_2)$ a função delta simétrica de Dirac, definida como:

$$\int_a^b f(\tau) \delta_D(\tau - t) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \text{ ou } t > b \\ f(a)/2 & \text{se } t = a \\ f(b)/2 & \text{se } t = b \\ f(t) & \text{se } a < t < b \end{cases}$$

$f(\tau)$ é qualquer função contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

O problema consiste na determinação da média $\vec{\mu}_x(t)$ e da variância $\mathbf{V}_x(t_1, t_2)$ da resposta $\vec{x}(t)$. Se o sistema tem parâmetros constantes e $\vec{u}(t)$ apresenta uma distribuição gaussiana de probabilidade, o conhecimento da média e da variância da resposta $\vec{x}(t)$ permite a definição estatística completa da mesma. No caso de excitação não-gaussiana, e de sistemas com parâmetros variáveis, os dois primeiros momentos não são suficientes para definir completamente a distribuição da resposta. Porém, em numerosas aplicações, admite-se 'a priori' que a distribuição de probabilidade da resposta é aproximadamente gaussiana, e conseqüentemente só são requeridos $\vec{\mu}_x$ e \mathbf{V}_x .

Finalmente, deve-se sublinhar que a forma (2.3) da covariância \mathbf{V}_u , não constitui uma restrição importante. Com efeito, se a excitação não for um ruído branco, o problema pode ser tratado pelo método da "ampliação" do vetor de estado. Na seção 4 aplica-se este enfoque a um problema de excitação sísmica.

A seguir resume-se a dedução das equações para propagação da média, do valor quadrático médio e da variância apresentadas na Ref. [1]. Os aspectos fundamentais da teoria podem também ser estudados na Ref. [2], p. 150.

A solução da eq. (2.1) é:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \vec{u}(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

na qual a matriz de transição do estado $\Phi(t, t_0)$ é uma solução da equação diferencial homogênea:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{F}(t) \Phi(t, t_0) \quad (2.5)$$

com condições iniciais:

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (2.6)$$

A equação de propagação da média pode ser obtida de forma direta calculando o valor esperado de ambos os membros da eq. (2.1), resultando:

$$\dot{\vec{\mu}}_x(t) = \mathbf{F}(t) \vec{\mu}_x(t) + \mathbf{G}(t) \vec{\mu}_u(t) \quad (2.7)$$

Eq. (2.7) indica que a obtenção da média $\vec{\mu}_x(t)$ exige uma análise dinâmica equivalente a obtenção da resposta do sistema sob uma excitação "determinística" igual a média $\vec{\mu}_u(t)$ de $\vec{u}(t)$. Alternativamente, pode-se demonstrar que:

$$\vec{\mu}_x(t) = \Phi(t, t_0) \vec{\mu}_x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{G}(\tau) \vec{\mu}_u(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

Eq. (2.8) também mostra que a solução para $\vec{\mu}_x(t)$ é idêntica a solução para $\vec{x}(t)$, exceto que as variáveis estocásticas são substituídas por seus valores esperados na expressão $\vec{\mu}_x(t)$. Em geral, a eq. (2.8) não é adequada para a avaliação numérica de $\vec{\mu}_x(t)$, sendo consideravelmente mais fácil a integração numérica direta da eq. (2.7).

Obter-se-á a seguir uma expressão para a propagação do valor quadrático médio $\mathbf{P}_x(t)$ das variáveis de estado do sistema da eq. (2.1). $\mathbf{P}_x(t)$ é uma matriz simétrica definida pela equação:

$$\mathbf{P}_x(t) = E \{ \vec{x}(t) \vec{x}^T(t) \} \quad (2.9)$$

Diferenciando a eq. (2.9) em relação ao tempo:

$$\dot{\mathbf{P}}_x(t) = E \{ \dot{\vec{x}}(t) \vec{x}^T(t) \} + E \{ \vec{x}(t) \dot{\vec{x}}^T(t) \} \quad (2.10)$$

Introduzindo a eq. (2.1) na equação precedente; levando em conta a definição (2.9) e adotando a notação:

$$\mathbf{P}_{ux}(t) = E \{ \vec{u}(t) \vec{x}^T(t) \} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}_{ux}(t) = \mathbf{P}_{xu}^T(t) \quad (2.12)$$

a eq. (2.10) fica:

$$\dot{\mathbf{P}}_x(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{P}_x(t) + \mathbf{P}_x(t) \mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{P}_{ux}(t) + \mathbf{P}_{xu}(t) \mathbf{G}^T(t) \quad (2.13)$$

Substituindo agora na eq. (2.12) o valor de $\vec{x}(t)$ segundo a eq. (2.4) e ad

mitindo para $t \geq t_0$ correlação nula entre $\vec{u}(t)$ e $\vec{x}(t_0)$, obtém-se:

$$\mathbf{P}_{xu}(t) = \Phi(t, t_0) \vec{\mu}_x(t_0) \mu_u^T(t) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{G}(\tau) [\vec{\mu}_u(\tau) \vec{\mu}_u^T(t) + \vec{\psi}_u(t) \delta_D[t - \tau]] d\tau \quad (2.14)$$

A avaliação da integral na eq. (2.14) conduz a:

$$\mathbf{P}_{xu}(t) = \vec{\mu}_x(t) \vec{\mu}_u^T(t) + \frac{1}{2} \mathbf{G}(t) \vec{\psi}_u(t) \quad (2.15)$$

Similarmente:

$$\mathbf{P}_{ux}(t) = \vec{\mu}_u(t) \vec{\mu}_x^T(t) + \frac{1}{2} \vec{\psi}_u(t) \mathbf{G}^T(t) \quad (2.16)$$

Finalmente, a eq. (2.13) resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(t) &= \mathbf{F}(t) \mathbf{P}_x(t) + \mathbf{P}_x(t) \mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t) \vec{\psi}_u(t) \mathbf{G}^T(t) \\ &+ \mathbf{G}(t) \vec{\mu}_u(t) \vec{\mu}_x^T(t) + \vec{\mu}_x(t) \vec{\mu}_u^T(t) \mathbf{G}^T(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Eq. (2.17) permite a determinação do valor quadrático médio da resposta para qualquer $t \geq t_0$, com a condição inicial:

$$\mathbf{P}_x(t_0) = \vec{\mu}_x(t_0) \vec{\mu}_x^T(t_0) + \mathbf{V}_x(t_0) \quad (2.18)$$

A relação entre a variância $\mathbf{V}_x(t)$ e o valor quadrático médio $\mathbf{P}_x(t)$ é:

$$\mathbf{V}_x(t) = \mathbf{P}_x(t) - \vec{\mu}_x(t) \vec{\mu}_x^T(t) \quad (2.19)$$

Calculando a derivada em relação a t de ambos os membros da eq. (2.19) e introduzindo (2.17) na expressão resultante, obtém-se a equação para a propagação da variância:

$$\dot{\mathbf{V}}_x(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{V}_x(t) + \mathbf{V}_x(t) \mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t) \vec{\psi}_u(t) \mathbf{G}^T(t) \quad (2.20)$$

a qual define a variância do sistema para $t \geq t_0$, se o estado inicial $\mathbf{V}_{x_0} = \mathbf{V}_x(t_0)$ for conhecido.

3. Determinação da equação fundamental do sistema

As equações de movimento do sistema são:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} representam matrizes quadradas de ordem N_L , \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$ denotam os vetores de deslocamentos, de velocidades e de acelerações generalizadas, respectivamente, sendo $\mathbf{Q}(t)$ o vetor de cargas generalizadas. Através de uma equação da forma da eq. (3.1) pode-se descrever o comportamento de sistemas excitados por forças externas ou por deslocamentos de seus apoios, segundo descreve-se na seção 4. Os coeficientes das matrizes da eq. (3.1) podem, em geral, ser funções do tempo t . Porém, admite-se a seguir que \mathbf{M} e \mathbf{K} são positivas-definidas para todo $t \geq t_0$. Introduzindo-se as novas variáveis:

$$\vec{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.2 - 3)$$

o sistema de N_L equações diferenciais de segunda ordem pode ser reduzido ao seguinte sistema de $2N_L$ equações diferenciais acopladas de primeira ordem:

$$\dot{\vec{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} & | & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{I} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \vec{\mathbf{y}} + \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Para obter um sistema com dimensões homogêneas, é conveniente introduzir as coordenadas definidas pela transformação:

$$\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \omega_r \mathbf{I} & | & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & | & \mathbf{I} \end{bmatrix} \vec{\mathbf{x}} \quad (3.5)$$

onde ω_r denota uma frequência constante [rad/seg] de referência. Todos os componentes de $\vec{\mathbf{x}}$ tem dimensão [comprimento]. Eq. (3.4) fica então:

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} & | & -\frac{1}{\omega_r} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\ \hline -\omega_r \mathbf{I} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \vec{\mathbf{x}}(t) + \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega_r} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

O vetor das ações externas $\vec{Q}(t)$ pode ser exprimido da seguinte forma:

$$\vec{Q}(t) = \mathbf{D} \vec{u}(t) \quad (3.7)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz que define a distribuição "espacial" da excitação, ou seja, tem coeficientes constantes com dimensão [Força/comprimento]. A eq. (3.6) fica então:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{F} \vec{x}(t) + \mathbf{G} \vec{u}(t) \quad (3.8)$$

onde:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} & -\frac{1}{\omega_r} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\ \omega_r \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_r} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.9 - 10)$$

Eqs. (3.8 - 10) definem completamente o comportamento do sistema estrutural e permitem a utilização direta dos resultados da Seção 2.

4. Consideração de diferentes tipos de excitação

Será discutida nesta Seção a forma que adota a equação de movimento (3.1) nos casos de maior interesse prático.

a. Sistema excitado por cargas externas. Aplica-se à eq. (3.1), resultando em consequência as matrizes definidas pelas eqs. (3.9) e (3.10).

b. Sistema excitado por movimento da base como corpo rígido. Admite-se que os apoios do sistema em estudo apresentam pequenos deslocamentos como parte de um corpo rígido. O movimento da base é especificado pelo vetor $\vec{z}(t)$. Os componentes do vetor $\vec{z}(t)$ representam os tres deslocamentos e os tres giros da base em relação a um sistema fixo de coordenadas. Pode-se demonstrar que a eq. (3.1) é ainda válida se \vec{q} , $\dot{\vec{q}}$ e $\ddot{\vec{q}}$ são considerados como deslocamentos, velocidades e acelerações relativas a base, respectivamente. O vetor de cargas resulta igual a:

$$\vec{Q}(t) = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \ddot{\vec{z}}(t) \quad (4.1)$$

onde o vetor $\mathbf{D} \ddot{\vec{z}}(t)$ contém as componentes das acelerações da base na direção de cada coordenada generalizada q . Porém, torna-se necessário modificar a matriz \mathbf{G} para manter a homogeneidade dimensional da eq. (2.1). Tem-se:

$$\vec{Q}(t) = -\omega_r^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \frac{\ddot{\vec{z}}(t)}{\omega_r^2}; \quad \vec{u}(t) = \frac{\ddot{\vec{z}}(t)}{\omega_r^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\omega_r \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2 - 4)$$

As equações precedentes simplificam-se para movimento unidirecional $z(t)$ da base, hipótese esta empregada com frequência na análise sísmica de estruturas. Neste caso tem-se:

$$u(t) = \ddot{z}(t)/\omega_r^2 \quad \text{e} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} -\omega_r \vec{d} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.5 - 6)$$

c. Sistema excitado por movimento sísmico unidirecional da base. Na Seção 2 foi antecipado que quando a excitação não é um "ruído branco", o problema pode ser resolvido pelo método da ampliação do estado do sistema. O procedimento será ilustrado para o caso de excitação sísmica unidirecional. Nesta aplicação, a densidade espectral de potência (f.d.e.p.) da resposta de um oscilador linear amortecido submetido a uma aceleração (ruído branco) da base constitui uma boa aproximação para a f.d.e.p. da aceleração do solo medida durante sismos com distâncias epicentrais intermediárias e grandes. Consequentemente, a excitação $\ddot{u}(t)$, que na derivação das equações fundamentais da Seção 2 foi considerada um ruído branco, será filtrada através de um oscilador com parâmetros (ζ_s, ω_s) . As matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema original serão identificadas a seguir mediante o sub-índice o. A equação de movimento fica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_o & \vec{r} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{q}_o \\ z_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_o & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 2\zeta_s \omega_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{q}}_o \\ \dot{z}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_o & \vec{0} \\ \vec{0}^T & \omega_s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{q}_o \\ z_o \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \vec{r} \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{z}(t) \quad (4.7)$$

$$\text{sendo: } \vec{r} = \mathbf{M}_o \vec{d}; \quad \vec{q} = \begin{Bmatrix} \vec{q}_o \\ z_o \end{Bmatrix}; \quad \vec{Q} = - \begin{Bmatrix} \vec{r} \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{z}(t) \quad (4.8 - 10)$$

o sistema (4.7) pode ser expresso na forma básica (3.1). A ordem das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} é agora $(N_L + 1)$, e a da matriz \mathbf{F} é $2(N_L + 1)$.

5. Solução do problema estacionário via variáveis de estado

Nos sistemas com parâmetros constantes submetidos a excitações estacionárias, as matrizes \mathbf{F} e \mathbf{G} não variam com o tempo e $\vec{\psi} = \text{constante} = \vec{\psi}_o$ para $t > 0$. Se o sistema é estável, para valores de t suficientemente grandes a variância \mathbf{V}_x pode ser obtida da equação (2.23) fazendo $\dot{\mathbf{V}}_x = 0$. Resulta então:

$$\mathbf{F} \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_x \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \vec{\psi}_o \mathbf{G}^T = 0 \quad (5.1)$$

Introduzindo a notação:

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} \vec{\psi}_o \mathbf{G}^T \quad (5.2)$$

obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\mathbf{F} \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_x \mathbf{F}^T + \mathbf{A} = 0 \quad (5.3)$$

que permite calcular os coeficientes da matriz de variância \mathbf{V}_x . Na solução de eq. (5.3) é conveniente levar em conta a forma das matrizes \mathbf{F} e \mathbf{G} e a simetria de \mathbf{V}_x . Com efeito, particionando a eq. (5.3):

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{11} & \bar{\mathbf{F}}_{12} \\ \bar{\mathbf{F}}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_{11} & \bar{\mathbf{V}}_{12} \\ \bar{\mathbf{V}}_{12}^T & \bar{\mathbf{V}}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_{11} & \bar{\mathbf{V}}_{12} \\ \bar{\mathbf{V}}_{12}^T & \bar{\mathbf{V}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{11}^T & \bar{\mathbf{F}}_{21}^T \\ \bar{\mathbf{F}}_{12}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Psi_0 \quad (5.4)$$

Sistema excitado por cargas externas. Neste caso as matrizes F_{ij} e A_{11} são também simétricas. Será apresentada a seguir a solução completa das equações precedentes para o caso em que as equações de movimento (3.1) tenham sido previamente diagonalizadas. Ter-se-á então:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{C} &= [2\zeta_n \omega_n] \\ \mathbf{K} &= [\omega_n^2] \\ \mathbf{Q}_n(t) &= \frac{\bar{\mathbf{q}}_n^T \bar{\mathbf{r}}(t)}{M_n} \end{aligned} \quad (5.6 \text{ a-d})$$

onde ω_n e ζ_n representam a frequência (rad/seg) e a razão de amortecimento crítico correspondente ao modo de vibração $\bar{\mathbf{q}}_n$. $\bar{\mathbf{r}}(t)$ são as cargas no sistema original (acoplado) de coordenadas e M_n a n -ésima massa generalizada. A transformação precedente é possível quando a matriz de coeficientes de amortecimento satisfaz o critério de Coughy e, em particular quando ela é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez [3] [4]. A hipótese de estacionaridade da excitação exige que

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \bar{\mathbf{r}}_0 u(t) \quad (5.7)$$

onde os coeficientes de $\bar{\mathbf{r}}_0$ são constantes com dimensão [força/deslocamento] e $u(t)$ constitui um processo aleatório estacionário com dimensão [deslocamento] caracterizado pela função de autocorrelação $\Psi(t) = \Psi_0 \delta_D(\tau)$. Segundo as eqs. (3.7) e (3.10), obtém-se para a matriz \mathbf{A}_{11} , os coeficientes:

$$A_{11}(m, n) = \frac{1}{\omega_r^2} \frac{(\bar{\mathbf{q}}_m^T \bar{\mathbf{r}}_0) (\bar{\mathbf{q}}_n^T \bar{\mathbf{r}}_0)}{M_m M_n} \quad (5.8)$$

Pode-se obter sem dificuldade:

$$V_{11}(m, n) = \frac{A_{11}(m, n) \Psi_0}{2(\zeta_m \omega_m + \zeta_n \omega_n)} \quad (5.9)$$

Depois de algumas manipulações algébricas obtém-se a correspondente expressão para as variâncias dos deslocamentos:

$$V_{22}(m, n) = \frac{A_{11}(m, n) \Psi_0}{\zeta_m \omega_m + \zeta_n \omega_n} \cdot \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 + \omega_n^2} \quad (5.10)$$

Os termos diagonais são:

$$V_{22}(n, n) = \frac{1}{4} \frac{A_{11}(n, n) \Psi_0}{\zeta_n \omega_n} \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2 \quad (5.11)$$

A solução precedente é completa e permite logo calcular as variâncias das coordenadas acopladas.

6. Sistema linear com um grau de liberdade

Será determinada a seguir a propagação da variância num oscilador linear com amortecimento viscoso sob a ação de uma força aleatória com covariância $\Psi = \Psi_0 \delta_D(\tau)$. Adotando a frequência de referência ω_r igual a frequência natural do sistema ω_n , a eq. (2.23) toma a forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{11} & \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{12} & \dot{V}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\zeta\omega_n & -\omega_n \\ \omega_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\zeta\omega_n & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi_0 f(t) \quad (6.1)$$

onde denota a razão de amortecimento crítico do oscilador. A eq. (6.1) pode ser submetida ao seguinte rearranjo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{V}_{11} \\ \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\zeta\omega_n & -2\omega_n & 0 \\ \omega_n & -2\zeta\omega_n & -\omega_n \\ 0 & 2\omega_n & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ V_{22} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_n^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Psi_0 f(t) \quad (6.2)$$

Aplicando a ambos os membros da eq. (6.2) a transformação de Laplace, obtem-se para variância inicial nula:

$$s \begin{Bmatrix} \bar{V}_{11}(s) \\ \bar{V}_{12}(s) \\ \bar{V}_{22}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\zeta\omega_n & -2\omega_n & 0 \\ \omega_n & -2\zeta\omega_n & -\omega_n \\ 0 & 2\omega_n & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{11}(s) \\ \bar{V}_{12}(s) \\ \bar{V}_{22}(s) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_n^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Psi_0 f(s) \quad (6.3)$$

sendo $\bar{V}_{11}(s)$ e $\bar{F}(s)$ as transformadas de Laplace de $V_{11}(t)$ e $f(t)$, respectivamente. Interessa particularmente a variância do deslocamento $x(t)$, isto é, $V_{22}(t)$. Sua transformada de Laplace $V_{22}(s)$ é, da eq. (6.3)

$$\bar{V}_{22}(s) = \frac{2\omega_n^4 \Psi_0 \bar{F}(s)}{s^3 + 6\zeta\omega_n s^2 + 4(1 + 2\zeta^2)\omega_n^2 s + 8\zeta\omega_n^3} \quad (6.4)$$

A transformada inversa da eq. (6.4) resulta:

$$V_{22}(t) = \frac{\Psi_0 \omega_n^2}{2(1-\zeta^2)} \int_0^t \exp[-2\zeta\omega_n(t-\tau)] [1 - \cos 2p_n(t-\tau)] f(\tau) d\tau \quad (6.5)$$

A eq. (6.5) descreve a propagação da variância do deslocamento com o tempo, para qualquer evolução $f(t)$ da covariância da excitação. Se $f(t)$ constitui uma função salto unitário na origem a avaliação da integral (6.5) por partes conduz a:

$$V_{22}(t) = \frac{\Psi_0 \omega_n}{4\zeta} \left\{ 1 - \frac{\exp(-2\zeta\omega_n t)}{1 - \zeta^2} [1 - \zeta^2 \cos 2p_n t + \zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \sin 2p_n t] \right\} \quad (6.6)$$

A eq. (6.6) mostra claramente o crescimento da variância da resposta com o tempo, até atingir no limite o valor correspondente ao problema estacionário, isto é, $\Psi_0 \omega_n / 4\zeta$. Este valor coincide logicamente com a conhecida solução do problema estacionário no domínio da frequência [5], [6]. Observe-se que, nas referências citadas, as constantes em lugar de Ψ_0 referem-se à amplitude da função de densidade espectral de potência definida entre 0 e $+\infty$ (one-sided power spectral density function), sendo Ψ_0 a amplitude da função definida entre $-\infty$ e $+\infty$ (two-sided power spectral density function). Uma aplicação imediata da eq. (6.7) é a determinação do tempo t_d necessário para que a resposta atinja uma porcentagem dada do valor correspondente ao problema estacionário, questão de importância, no caso de excitação sísmica. A eq. (6.7) coincide com resultados obtidos por Caughey e Stumpf [7] e por Barnoski e Maurer [8], para sistemas com um só grau de liberdade. Estes procedimentos porêm, requerem a avaliação de integrais no plano complexo e possivelmente não permitir a extensão dos resultados a sistemas com muitos graus de liberdade.

7. Integração numérica da equação de propagação da variância

Nos problemas com parâmetros variáveis, soluções do tipo apresenta-

do não são em geral possíveis e devem ser empregados então métodos de integração numérica direta das eqs. fundamentais (2.7), (2.20) e (2.23). Existem numerosos procedimentos de integração da equação de propagação da média, problema que não oferece dificuldades especiais. Por outro lado, a integração das eqs. (2.20) ou (2.23) não pode ser realizada de maneira direta com base nos procedimentos usuais. Por razões de espaço este tema não será discutido neste trabalho.

8. Conclusões

O método das variáveis de estado foi empregado para determinar equações de propagação da média, do valor quadrático médio e da variância de sistemas estruturais sob diferentes tipos de excitação dinâmica. Várias soluções das equações resultantes foram obtidas para sistemas com parâmetros constantes, em particular aquelas correspondentes a excitações estacionárias.

É sugerida uma forma de aplicação do método ao problema de excitação sísmica. Aspectos relacionados a integração numérica direta das equações de propagação não são discutidos por razões de espaço, porém deve-se salientar que este é um ponto fundamental no desenvolvimento do método. Uma segunda área onde serão necessários trabalhos adicionais refere-se a dedução das equações de sistema adjuntos para aplicar o método de ampliação das variáveis de estado.

Bibliografia

- [1] James L. Melsa and Andrew P. Sage: "An Introduction to Probability and Stochastic Processes", Prentice-Hall, NJ, 1973.
- [2] Y.K. Lin: "Probabilistic Theory of Structural Dynamics", McGraw Hill, N.Y., 1967.
- [3] T.K. Coughney: "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", J. Appl. Mech., Vol. 27, 1960, p. 269-271.
- [4] L. Meirovitch: "Analytical Methods in Vibrations", Mac Millan, New York, 1967.
- [5] W.C. Hurty & M.F. Rubinstein: "Dynamics of Structures", Prentice-Hall, N.J., 1964.
- [6] J.C. Bendat & A.G. Piersol: "Random Data: Analysis and Measurements Procedures", Wiley-Interscience, N.Y., 1971.
- [7] T.K. Caughey & H.J. Stumpf: "Transient Response of a Dynamic System under Random Excitation", Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, Series E, N° 4, 1961, p. 563-566.
- [8] R.L. Barnoski & J.R. Maures: "Mean-Square Response of Simple Mechanical Systems to Nonstationary Random Excitation", Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, Serie E, 1969, p. 221-227.
- [9] L.L. Bucciarelli, Jr. & C. Kuq: "Mean-Square response of a Second order System to Nonstationary Random Excitation", Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, series E, 1970, p. 612 - 616.
- [10] T.K. Hasselmann: "A Comparison of Solutions for the Mean-Square Response of a simple Mechanical oscillator to Non-stationary Random Excitation", Brief Note, Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, Series E, 1970, p. 1187 - 1189.

RIERA, Jorge D.

APLICAÇÃO DO METODO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO AO ESTUDO DE
SISTEMAS DINÂMICOS SOB EXCITAÇÕES ALEATÓRIAS NÃO-ESTACIONÁRIAS

Sumário

O método das variáveis de estado foi empregado para determinar equações de propagação da média, do valor quadrático médio e da variância de sistemas estruturais sob diferentes tipos de excitação dinâmica. Várias soluções das equações resultantes foram obtidas para sistemas com parâmetros constantes, em particular aquelas correspondentes a excitações estacionárias.

APPLICATION OF THE STATE VARIABLE METHOD TO DYNAMIC SYSTEMS
UNDER NONSTATIONARY RANDOM EXCITATION

Summary

The method of state variables was employed in the derivation of equations for the propagation of the mean, the mean square value and the variance of structural systems under different types of dynamic excitation. Some closed form solutions are obtained for constant-parameter systems, in particular those corresponding to stationary inputs.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 23

PP. 269 - 283



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

DYNAMICS AND STABILITY OF ELASTIC PIPESCONVEYING PULSATILE FLOW

Sherif NOUH, Associate Professor
Dept. of Mechanical Engineering
Pontificia Universidade Católica
Rio de Janeiro, Brazil.

1. Introduction

Several investigations [1,2,3,4] have been reported recently on the dynamic stability of articulated and continuous pipes conveying pulsating fluid. These studies were motivated by recent industrial concern about the response of cylindrical components to flow disturbances typical with heat exchangers, nuclear reactor internals, piping in process plants and others.

All of the aforementioned investigations were

restricted to cases of idealized end support conditions of the pipes. The need to study the more realistic case of pipe supports, possessing some degree of flexibility, motivated the work reported here. Furthermore, since previous studies (see [3] for comprehensive review) demonstrated the close dependence of the pipe's dynamic behavior on its support conditions, this investigation provides an opportunity to examine that dependence as related to the parametric and combination resonances of the pipe conveying pulsating fluid. Within the context of the subject of dynamic stability of parametrically excited elastic systems, this study may assist in gaining more insight into the role of end supports in the behavior of such systems.

2. The System

Consider a uniform flexible pipe of length L , flexural rigidity EI and mass per unit length m_c , conveying incompressible fluid of mass per unit length m_f which is flowing with a periodically varying velocity $U = U_0(1 + \epsilon \cos \omega t)$, where U_0 is the mean velocity and ϵ is a small parameter. The pipe is built-in at one end and elastically supported at the other with both translational and rotational springs of stiffnesses K_1 and K_2 respectively. The initial straight axis of the pipe coincides with the x -axis while the transverse motion of the pipe, $y(x, t)$, where t is the time, is measured in the direction of the y -axis perpendicular to x . The clamped end of the pipe is taken at $x = 0$.

The nondimensional equation of small motions for the pipe can be shown to be given by [5]

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial v^4} + \bar{\gamma} \frac{\partial^5 \eta}{\partial v^4 \partial \tau} + [u_0^2 (1 + \epsilon \cos \Omega \tau)^2 - (1 - \nu) \epsilon \Omega u_0 \beta^{1/2} \sin \Omega \tau] \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} + 2\beta^{1/2} u_0 (1 + \epsilon \cos \Omega \tau) \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial \tau} + \bar{\mu} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1)$$

with the boundary conditions

$$\eta = \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0 \quad \text{at } v = 0, \quad \text{and}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} + \bar{k}_2 \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial v^3} - \bar{k}_1 \eta = 0 \quad \text{at } v = 1 \quad (2)$$

The dimensionless parameters in equations (1) and (2) are

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad u = \left(\frac{m_f}{EI}\right)^{1/2} UL, \quad \beta = \frac{m_f}{m_t + m_f}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{m_f + m_t}\right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \\ \Omega &= \left(\frac{m_f + m_t}{EI}\right)^{1/2} \omega L^2, \quad \bar{\mu} = \left[\frac{1}{EI(m_f + m_t)}\right]^{1/2} \mu L^2, \quad \bar{k}_1 = \frac{K_1 L^3}{EI}, \\ \bar{k}_2 &= \frac{K_2 L}{EI}, \quad \bar{\gamma} = \left[\frac{I}{E(m_f + m_t)}\right]^{1/2} \frac{\gamma}{L^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

where μ is the coefficient of external viscous damping and γ is the coefficient of internal dissipation of the assumed Kelvin-Voigt type for the pipe's material.

In order to investigate the stability of the continuous pipe, utilizing the methods described in following sections, it is necessary to reduce the system to a discrete one. Let

$$\eta(v, \tau) = \sum_{r=1}^m \phi_r(v) \cdot q_r(\tau), \quad (4)$$

where $q_r(\tau)$ is generalized coordinates, $\phi_r(v)$ are the eigenfunctions of the abbreviated pipe-fluid system ($u = \bar{\gamma} = \bar{\mu} = 0$) and m is the retained number of terms in the assumed solution (4). Substituting (4) into (1) and applying the Galerkin's method yields,

$$\begin{aligned} \ddot{Q}(\tau) + \{\bar{\gamma}H + 2u\beta^{1/2}(1 + \epsilon \cos \Omega\tau) D + \bar{\mu}E\} \dot{Q}(\tau) \\ + \{H + u_0^2(1 + \epsilon \cos \Omega\tau)^2 A + \epsilon \Omega u_0 \beta^{1/2} (\sin \Omega\tau)(B-A)\} Q(\tau) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

where Q is the vector $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, H is a diagonal matrix with elements α_s^4 , α_s being the s th dimensionless eigenvalue of the abbreviated problem, E is the unit matrix and A , B and D are $m \times m$ square matrices whose elements are respectively

$$a_{rs} = \frac{1}{M_r} \int_0^1 \phi_r \phi_s'' dv, \quad b_{rs} = \frac{1}{M_r} \int_0^1 v \phi_r \phi_s'' dv,$$

$$d_{rs} = \frac{1}{M_r} \int_0^1 \phi_r \phi_s' dv, \text{ where } M_r = \int_0^1 (\phi_r)^2 dv \quad (6)$$

In the above, capital letters are used there and throughout the paper to denote matrices and vectors. A dot and a prime denote differentiation with respect to τ and v respectively.

A new method for the stability analysis based on an extension of the method of Hill's infinite determinants is briefly outlined in the following section.

3. The Generalized Hill's Method

The system of equations (5) can be written in the form

$$\ddot{Q} + \sum_{q=-2}^2 e^{iq\bar{\tau}} F_q \dot{Q} + \sum_{q=-2}^2 e^{iq\bar{\tau}} G_q Q = 0, \quad i^2 = -1, \quad (7)$$

where $F_q = f_{rs}^{(q)}$ and $G_q = g_{rs}^{(q)}$ are constant $m \times m$ matrices and $\bar{\tau} = \Omega\tau$. A solution vector of (7) may be written as

$$Q(\bar{\tau}) = e^{\lambda\bar{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\bar{\tau}}, \quad (8)$$

where λ is a characteristic constant and C_n are constant column matrices of m rows. Substitution of (8) into (7) with a shift in indices and collecting the like powers of $e^{(\lambda+in)\bar{\tau}}$, yields

$$(\lambda+in)^2 C_n + \sum_{q=-2}^2 [(\lambda+i(n-q)) F_q + G_q] C_{n-q} = 0, \quad (9)$$

Each of the equations (9) is multiplied by a constant matrix $[-n^2 E + \text{dia } G_0 - (\text{dia } F_0/2)^2]^{-1}$ without altering the solution if the cases where any of the $g_{rr}^0 - (f_{rr}^0/2)^2$ are equal to n^2 are excluded. This altered system will be represented by the matrix equation

$$Z.C = 0 \quad (10)$$

where Z is the infinite square matrix composed of the submatrices Z_{np} , C is the infinite column matrix of submatrices C_p and $p = n-q$.

The diagonal and off diagonal elements of the matrix Z may be shown to be respectively

$$z_{rr}^{nn} = \frac{(\lambda+in)^2 + (\lambda+in)f_{rr}^0 + g_{rr}^0}{-n^2 + g_{rr}^0 - (f_{rr}^0/2)^2}, \quad (11)$$

$$z_{rs}^{np} = \frac{(\lambda+ip)f_{rs}^{n-p} + g_{rs}^{n-p}}{-n^2 + g_{rr}^0 - (f_{rr}^0/2)^2} \quad (12)$$

where $f_{rs}^{n-p} = g_{rs}^{n-p} = 0$ when $|n-p| > 2$, and $n, p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots$ while $r, s = 1, 2, \dots, m$.

A necessary condition for the existence of a nontrivial solution of (10) is that $\det. Z = 0$. The $\det Z$ which will be denoted as $\Delta(\lambda)$ may be written as

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda) \prod_{r=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=-k}^k \frac{(\lambda+in)^2 + (\lambda+in)f_{rr}^0 + g_{rr}^0}{-n^2 + g_{rr}^0 - (f_{rr}^0/2)^2}, \quad (13)$$

or using the product expansion for the sine function it can be shown, after some manipulation, that

$$\Delta(\lambda) = (-1)^m \Delta_1(\lambda) \prod_{r=1}^m \left(\frac{\sin \Pi [i(\lambda + f_{rr}^0/2) - \sqrt{g_{rr}^0 - (f_{rr}^0/2)^2}]}{\sin^2 [\Pi \sqrt{g_{rr}^0 - (f_{rr}^0/2)^2}]} \right) \cdot \sin \Pi [i(\lambda + f_{rr}^0/2) + \sqrt{g_{rr}^0 - (f_{rr}^0/2)^2}] \quad (14)$$

The elements of $\Delta_1(\lambda)$, formed by factoring out of each row of $\Delta(\lambda)$ the element on the principal diagonal, are

$$\sigma_{rr}^{nn} = 1 \quad (15)$$

$$\sigma_{rs}^{np} = \frac{(\lambda+ip)f_{rs}^{n-p} + g_{rs}^{n-p}}{(\lambda+in)^2 + (\lambda+in)f_{rr}^0 + g_{rr}^0} \quad (16)$$

In [6], the convergence of $\Delta_1(\lambda)$ was shown by proving a theorem on the convergence of infinite determinants belonging to the class of $\Delta_1(\lambda)$. The convergence of $\Delta(\lambda)$ follows from the fact that it is equal to the product of $\Delta_1(\lambda)$ and a

finite number of sine terms. Since its convergence is established, the determinant $\Delta(\lambda)$ may be expressed in a closed form as follows. $\Delta(\lambda)$ is analytic everywhere in λ as may be seen from its elements (11) and (12). However, $\Delta_1(\lambda)$ has simple poles at

$$\lambda_{1,2}^r = -f_{rr}^o/2 \pm i \sqrt{g_{rr}^o - (f_{rr}^o/2)^2}. \quad (17)$$

Constants K_1^r and K_2^r may be chosen so that the function

$$\bar{\Delta}(\lambda) = \Delta_1(\lambda) - \sum_{r=1}^m [K_1^r \cot i \Pi(\lambda - \lambda_1^r) - K_2^r \cot i \Pi(\lambda - \lambda_2^r)] \quad (18)$$

will have no simple poles at the points λ_1^r , or λ_2^r . Since it may be seen that $\Delta_1(\lambda)$ and the terms in brackets in (18) are periodic functions of the same period i , it follows that $\bar{\Delta}(\lambda)$ is also periodic of period i . Since $\bar{\Delta}(\lambda)$ has no poles at λ_1^r or λ_2^r , it has no poles at $\lambda_1^r \pm in$ or $\lambda_2^r \pm in$. Furthermore, $\bar{\Delta}(\lambda)$ is obviously bounded as $\text{Re}(\lambda) \rightarrow +\infty$ (Re stands for real part) and since it is analytic, $\bar{\Delta}(\lambda)$ is constant according to Liouville's theorem [7]. This constant may be shown to be equal to unity so that

$$\sum_{r=1}^m (K_1^r - K_2^r) = 0, \quad \text{and} \quad (19)$$

$$\Delta_1(\lambda) = 1 + \sum_{r=1}^m [K_1^r \cot i \Pi(\lambda - \lambda_1^r) - K_2^r \cot i \Pi(\lambda - \lambda_2^r)] \quad (20)$$

It is of interest to note that if the λ_1^r 's and λ_2^r 's are complex, then $\Delta(\lambda_1^r)$ and K_1^r are the conjugates of $\Delta(\lambda_2^r)$ and K_2^r respectively. Substitution of (20) into (14) yields

$$\Delta(\lambda) = (-1)^m \prod_{r=1}^m \frac{\sin i \Pi(\lambda - \lambda_1^r) \sin i \Pi(\lambda - \lambda_2^r)}{\sin^2 [\Pi \sqrt{g_{rr}^o - (f_{rr}^o/2)^2}]}$$

$$\{1 + \sum_{r=1}^m [K_1^r \cot i \Pi(\lambda - \lambda_1^r) - K_2^r \cot i \Pi(\lambda - \lambda_2^r)]\} \quad (21)$$

Expression (21) is the closed form representation sought for the generalized Hill's determinant $\Delta(\lambda)$, its

roots determine the nature of the solution for system (5).

It remains now to determine the constants $K_{1,2}^r$ in (21). To this end, equation (20) is written as

$$\left(\prod_{r=1}^m \frac{1}{\lambda^2 + \lambda f_{rr}^o + g_{rr}^o} \right) \Delta_1^C(\lambda) = 1 + \sum_{r=1}^m \frac{K_1^r \sin i \Pi(\lambda - \lambda_2^r) \cos i \Pi(\lambda - \lambda_1^r) - K_2^r \cos i \Pi(\lambda - \lambda_2^r) \sin i \Pi(\lambda - \lambda_1^r)}{\sin i \Pi(\lambda - \lambda_1^r) \sin i \Pi(\lambda - \lambda_2^r)} \quad (22)$$

where $\Delta_1^C(\lambda)$ is formed by multiplying the m rows of the central submatrices ($n=0$) in $\Delta_1(\lambda)$ by the corresponding

$$\lambda^2 + \lambda f_{rr}^o + g_{rr}^o ; \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

Consequently, the elements of $\Delta_1^C(\lambda)$ will be the same as those of $\Delta_1(\lambda)$ except where $n = 0$, and $\Delta_1^C(\lambda)$ will have no poles at the λ_1^r 's and λ_2^r 's. The constants K_1^s and K_2^s may be determined by successively multiplying (22) by $\{\sin i \Pi(\lambda - \lambda_1^s) \cdot \sin i \Pi(\lambda - \lambda_2^s)\}$ and letting $\lambda + \lambda_1^s$ and $\lambda + \lambda_2^s$ for $s = 1, 2, \dots, m$, yielding

$$K_{1,2}^s = \frac{\Pi \cdot \Delta_1^C(\lambda_{1,2}^s)}{2\sqrt{g_{ss}^o - (f_{ss}^o/2)^2}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^m \frac{1}{(\lambda_{1,2}^s)^2 + \lambda_{1,2}^s f_{rr}^o + g_{rr}^o} , \quad (23)$$

4. Determination of the Characteristic Exponents

The characteristic equation, $\Delta(\lambda) = 0$, is transcendental in the complex variable λ . In order to determine its roots, a method on the Argument Principle in Complex variables analysis of analytic functions is adopted. The Argument Principle [8] gives the following relation (increase in $\arg \Delta(\lambda)$ on path C_w) = $2\pi n_o$, inside C_λ , where C_λ is a simple closed path in λ -plane, C_w is the corresponding path in $\Delta(\lambda)$ plane and n_o is the number of roots. Relation above was conveniently utilized to locate the roots as follows.

A rectangle C_λ is selected with the proper extent for the fluid-tube systems studied here. For each point λ on C_λ ,

the corresponding $\Delta(\lambda)$ is calculated from (21). As the path C_λ is traced by increments of λ , C_w is also traced and the change in $\arg \Delta(\lambda)$ is calculated for each increment of λ . As a demonstration of the method consider the case shown in Fig. 1 where only one root is located within the selected domain. Upon tracing C_λ once (a,b,c,d in Fig.1 (a)), C_w is also traced once (Fig.1 (b)) resulting in a 2π change in $\arg \Delta(\lambda)$. The rectangle (a,b,c,d) is then divided into four equal rectangles whose boundaries are traced in turn. A change of 2π in $\arg \Delta(\lambda)$ around a rectangle (say e,f,g,h) indicates existence of the root within that rectangle. That rectangle

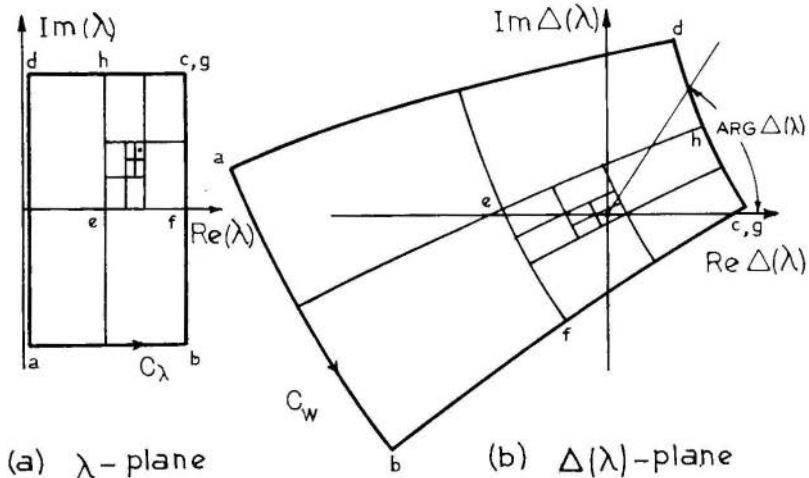


Fig.1 - Locating the roots of $\Delta(\lambda)$

is further divided and the process is continued till the root is located within a rectangle whose size depends on the desired accuracy.

It should be noted that since the purpose is to investigate stability, the search for possible roots is confined to the right half of the λ -plane, where $\text{Re}(\lambda)$ is positive. Thus, if the initial tracing of C_λ points to at least one root, the system is unstable otherwise it is stable. However, if the nature of the instability is also a

concern, the search should continue till the values of all roots with positive $\text{Re}(\lambda)$ are determined. If some of the roots are complex conjugates, the instability is of the combination resonance type otherwise it is of the parametric resonance type.

5. Computations, Results and Discussion

Two computer programs were utilized for the stability analysis. The first program, based on the extended Hill's method, calculates the values of $\Delta_1^C(\lambda_{1,2}^R)$, $K_{1,2}^R$ from (23) and exponents λ from (21). Sufficient number of submatrices is taken to approximate the infinite banded square matrix (band width $3m-1$) whose determinant $\Delta_1^C(\lambda)$ is sought. The second program utilizes a "Numerical Floquet analysis" [2,4,5], where the m equations (5) are reduced to $2m$ first order equations and then integrated over one period of the coefficients. The solution vectors obtained with $2m$ initial conditions make up the monodromy matrix of which the logarithms of its eigenvalues are proportional to the λ 's.

For selected values of the fluid-pipe parameters, u_0 , β , $\bar{\nu}$ and $\bar{\gamma}$, the second program described above was first used to obtain the pipe's frequencies Ω_j (imaginary parts of λ_j) under steady flow conditions. The λ 's in this case are the eigenvalues of the constant coefficients matrix of the first order equations of (5), with $\epsilon = 0$. For assigned values of spring constants \bar{K}_1 and \bar{K}_2 , the program was also used to determine the steady flow velocity at which the pipe first loses stability by buckling or flutter. The values of α_j and ϕ_j and the integrals of (6) were evaluated for the selected values of \bar{K}_1 and \bar{K}_2 utilizing the results given in [5] for the abbreviated problem.

For a cantilevered pipe with steady flow, the introduction of linear or torsional springs at the free end was found to be stabilizing or destabilizing depending on the value of β . The pipe first loses stability by flutter if \bar{K}_1 or \bar{K}_2 are below a certain value and buckles for higher values, as shown in [9] for translational springs, and in [5] for both kinds of springs.

For a pipe with periodic flow, results were obtained

using, for the most part, the Hill's program and by the Floquet's program. A stability map in the Ω - ϵ plane is presented here for the selected parameters, $u_0=4.5$, $\beta=0.125$, $\bar{\gamma}=0.001$ and $\bar{\mu}=0$. For the same parameters, Table 1 shows the calculated frequencies of the pipe and the critical flow velocities at steady flow conditions.

Table 1 - Results with steady flow

\bar{K}_1	\bar{K}_2	u_{critical}	Ω_1	Ω_2	Ω_3
0.	0.	5. , flutter	5.60	15.07	53.83
25.	0.	6.25, flutter	5.04	19.33	54.93
100.	0.	4.7 , Buckling	3.54	27.09	58.46
100.	10.	5.8 , Buckling	7.80	27.80	65.02

Figure 2 shows the resonance regions for Ω in the range 0-20.

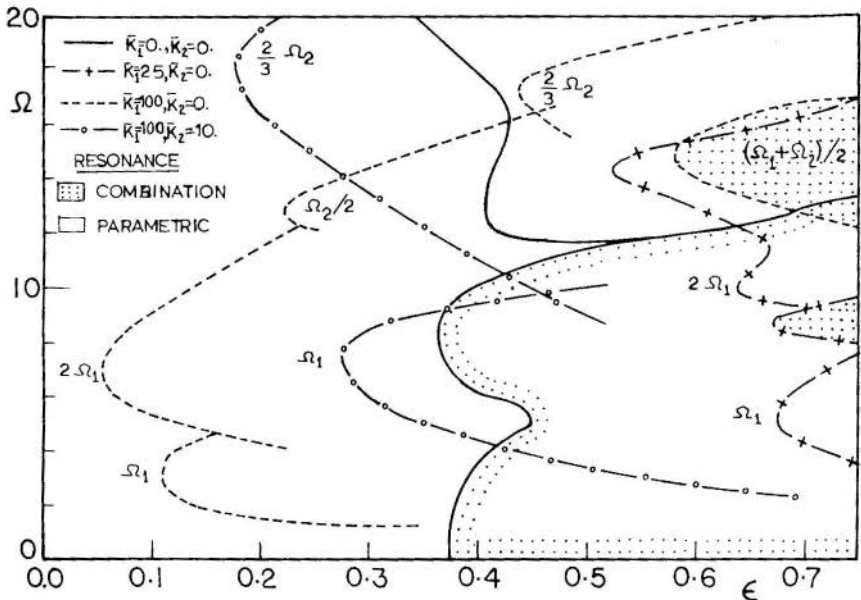


Fig.2 - Stability diagram for the pipes ($u_0 = 4.5$, $\beta = .125$, $\bar{\gamma} = .001$)

As in [3,4] no parametric resonance (Ω near $2\Omega_j/K$; where j and K are integers), either primary (odd j) or secondary (even j) was observed which is associated with the first mode of cantilevered pipes. Both first mode primary and secondary parametric instabilities appeared when a stiffness of $\bar{K}_1 = 25$ is introduced at the free end. With further increase of stiffness ($\bar{K}_1 = 100$) the instability regions moved significantly closer to Ω -axis while further addition of a rotational stiffness ($\bar{K}_2 = 10$) caused the regions to move back to the right. This is consistent with conclusions in [2,3] of the instability regions being closer to Ω -axis for higher ratios of mean velocity of periodic flow to that of critical steady flow (consult Table 1). The regions of combination resonance in Fig.2 (Ω near $(\Omega_1 \pm \Omega_j)/K$) show the cantilevered pipe with a relatively extensive area of the difference type involving the first two modes, the region almost vanishes with $\bar{K}_1 = 25$ and changes to a small area of the sum type with $\bar{K}_1 = 100$. This is contrary to the belief that combination regions are more pronounced with mean velocities of periodic flow approaching the critical steady velocity.

The stability map for higher values of $\Omega(20-60)$ is shown in Fig.3. It may be observed that the principal primary region of parametric resonance (Ω near $2\Omega_2$) for a cantilevered pipe lies nearest to the Ω -axis although the critical steady flow velocity of that pipe is not as close as that of some other cases of support to the mean velocity of the periodic flow considered. It is interesting to notice with $\bar{K}_1 = 100$, the favorable condition of second and third primary instabilities sharing the same region, reducing the likelihood of instability.

Some final remarks are in order. Contrary to statements in [3,4] about parametric instabilities being unlikely to occur below $u_0 = 4$ for cantilevered pipes this author has obtained results of parametric resonances occurring for $\beta = 0.125$ and 0.325 with flow velocities as low as 1.25 for ϵ greater than 0.4. As pointed out in [2], the double role played by the coriolis forces, being both stabilizing and destabilizing to the pipe, calls for more study to assess

that role.

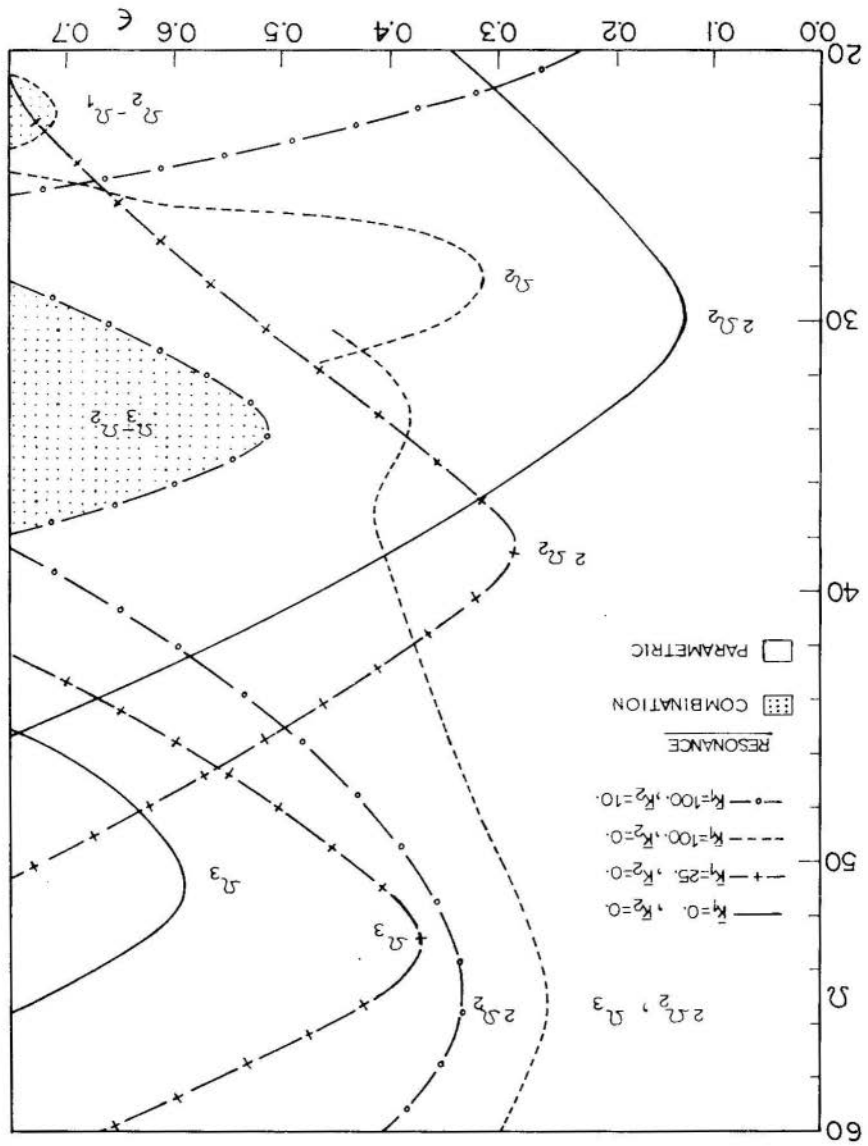


Fig. 3 - Stability diagrams of Systems in Fig. 2 for higher n .

6. Conclusions

(1) While for cantilevered pipes parametric resonances are selectively associated with only some of the modes of the system, existence of some stiffness at the free end increases the number of modes with which resonance may occur. This may be attributed to reductions in the "dragging" motion of the pipe by introduction of the springs.

(2) Due to the above and to other observations of this study it appears that a classification of the pipe systems conveying pulsating fluid according to whether they first lose stability by divergence or flutter under steady flow conditions may not be valid.

(3) The method of infinite determinants utilized here proved superior, in most cases studied, to the numerical integration scheme with regards to computer time and accuracy. More study is needed however before the two methods are fully assessed in comparison to each other.

(4) Although no new information concerning the effects of damping and fluid to tube mass ratio β were noted in connection with this study, it is recommended that some cases be examined for values of $\beta > 0.3$ where the springs have destabilizing effect and damping might play a significant role.

References

- [1] Chen, S.-S., "Dynamic Stability of Tube Conveying Fluid", Jour.Eng.Mech.Div., Proc. ASCE, Vol.97, pp.1469-1485 (1971).
- [2] Bohn, M.P., and Herrmann, G., "The Dynamic Behavior of Articulated Pipes Conveying Fluid With Periodic Flow Rate", Jour.Appl.Mech., Vol.41, Trans. ASME, Vol.96, Series E, pp.55-62 (1974).
- [3] Paidoussis, M.P. and Issid., N.T., "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid", Jour.Sound and Vibration, Vol.33, pp.267-294 (1974).

- [4] Paidoussis, M.P. and Sundararajan, C., "Parametric and Combination Resonances of a Pipe Conveying Pulsating Fluid", Jour.Appl.Mech., Vol.42, Trans. ASME, Vol.97, Series E, pp.780-784 (1976).
- [5] Nouh, S.T., "Stability of Clamped-Elastically Supported Damped Tubes Conveying Periodically Flowing Fluid", Ph.D. dissertation, West Virginia University (1974).
- [6] Hopkins, G.R., Nouh, S.T. and Hill, J.L., "The Characteristic Equation for a System of Linear Differential Equations with Periodic Coefficients", Proc. 7th Southeastern Conference on Theor. and Appl.Mech., Washington D.C., (1973).
- [7] Wittaker, E.T. and Watson, G.N., A Course of Modern Analysis, 4th ed. Cambridge University Press, (1961)
- [8] Kaplan, W., Introduction to Analytic Functions, Addison-Wesley, Massachusetts, p.110 (1966).
- [9] Chen, S.-S., "Flow-Induced Instability of an Elastic Tube", ASME Paper 71-Vibr.-39.

NOUH, S.

DYNAMICS AND STABILITY OF ELASTICPIPES CONVEYING PULSATILE FLOWSummary

This investigation concerns the dynamic stability of clamped-elastically supported pipes conveying pulsating fluid. The resonance behavior of pipe systems with pulsatile flow was not expected to be directly characterized by the manner of which the systems lose stability under steady flow conditions. This was observed by carrying out a stability analysis utilizing an extension of Hill's method of infinite determinants as well as a numerical Floquet analysis. Regions of parametric and combination resonances are presented for pipes with different amount of flexibilities at the supports.

DINÂMICA E ESTABILIDADE DE TUBULAÇÕESSUJEITAS A ESCOAMENTOS PULSANTESSumário

Esta investigação analisa a estabilidade dinâmica de tubulações elasticamente engastadas sujeitas a escoamentos pulsantes. O comportamento de ressonância de tubulações com escoamentos pulsados não era esperado que fosse diretamente caracterizado pela maneira com que estes sistemas perdem estabilidade em condições de regime permanente. Isto foi observado executando-se uma análise de estabilidade utilizando-se uma extensão do método de Hill de determinantes infinitos assim como uma análise numérica de Floquet. Regiões de ressonâncias paramétricas e combinadas são apresentadas para tubulações com diferentes flexibilidades nos suportes.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 24

PP. 285 - 298



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

A DIRECT METHOD FOR THE ANALYSIS OF CRITICAL AND

POST-CRITICAL BEHAVIOR OF NONLINEAR

MECHANICAL SYSTEMS

Liu HSU, Professor
Mechanical Engineering Department
COPPE/UFRJ
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Gil Augusto TAVARES, Graduate Student
Mechanical Engineering Department
COPPE/UFRJ
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

1. Introduction

In this paper a method is proposed in order to assess the dynamical behavior of autonomous systems near

a bifurcation condition. The method is direct in the sense that no integration or "a priori" knowledge of the form of the solution is needed.

The main idea consists in bringing the differential system to a normal form which is simpler than the original form. The remainder of the analysis is based on existing theoretical results [1] to [5].

The normal form is obtained numerically by using essentially the results of [6]. The computer program is of simple implementation and this is an important aspect of this paper.

Many problems of practical interest can be treated by the proposed method e.g., nonlinear flutter of structures [8], resonance phenomena in satellite motions [9], the three-body problem and the buckling of structures.

In order to give an idea of the progress accomplished in this paper reference is made to the recent paper [8] on nonlinear flutter. The present method contains the results of [8] as a particular case.

2. Basic Notation

\underline{x} , \underline{z} , etc... or $\{x_j\}$, $\{z_j\}$ etc... : vectors;

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell),$$

$$v_i, \mu_j \geq 0 \text{ are integers; } |v| = \sum_i v_i, \quad |\mu| = \sum_j \mu_j;$$

$$\Lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell); \quad \Lambda_0 \cdot \mu = \sum_i \lambda_i \mu_i; \quad \Lambda_0 \cdot \mu - \lambda_j = \lambda_{\mu_j};$$

$$\sum_{\lambda_{\mu_j}=0} \dots = \sum_{|\mu|=2,3,\dots,\infty} \dots \quad (\mu \text{ such that } \lambda_{\mu_j}=0);$$

$$\underline{x}^v = x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n}; \quad \delta_{mn} = \text{delta of Kronecker};$$

$$\delta_I = (\delta_{I,1}, \dots, \delta_{I,n}) ; \sum_{I,J}^{(v)} = \sum_{\substack{J=1, \dots, n \\ I=1, \dots, n; v_I \neq 0}} ;$$

$$* \text{ denotes "conjugate" } ; \sum_{p,q} = \sum_{\substack{q=p, \dots, n \\ p=1, \dots, n}} ;$$

$$\sum_{p,q,r} = \sum_{\substack{r=q, \dots, n \\ q=p, \dots, n \\ p=1, \dots, n}} ; \delta_{pqr} \begin{cases} =1! ; p < q < r \\ =2! ; p=q < r \text{ or } p < q=r \\ =3! ; p=q=r \end{cases}$$

3. The Normal Form:

Let us consider the system

$$d\underline{x}/dt = A(\alpha) \underline{x} + \underline{f}(\underline{x}, \alpha) , \quad \underline{f}(\underline{0}, \alpha) = 0 \quad (1)$$

where $\underline{x}, \underline{f} \in \mathbb{R}^n$, A is a $n \times n$ real matrix, α is a parameter, \underline{f} is analytical in its arguments and contains only terms of degree not lower than two in \underline{x} .

Let us suppose that for $\alpha = \alpha_0$ the matrix $A(\alpha_0) = A_0$ is critical, i.e., some of its roots have zero real parts whereas the others have negative real parts. The roots on the imaginary axis are supposed to be distinct (or, more generally, simple).

The following notation is adopted:

$$\underline{f} = \left\{ \sum_{|v|=2}^{\infty} \phi_j^v(\alpha) \underline{x}^v \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

(I) By means of a linear change of variables (see Appendix I) (1) with $\alpha = \alpha_0$, can be reduced to the form:

$$\begin{aligned} d\underline{z}/dt &= \Lambda_0 \underline{z} + \left\{ \sum_{|v|=2}^{\infty} \bar{\phi}_j^v(\alpha_0) (\underline{z}, \underline{y})^v \right\} ; \\ d\underline{y}/dt &= \bar{A}_{22}(\alpha_0) \underline{y} + \left\{ \sum_{|v|=2}^{\infty} \bar{\psi}_k^v(\alpha_0) (\underline{z}, \underline{y})^v \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

where $\underline{z} \in \mathbb{C}^\ell$, $\underline{y} \in \mathbb{C}^m$, $m=n-\ell$, ℓ = number of roots of A_0 with zero real parts, $j=1,2,\dots,\ell$; $k=1,2,\dots,m$ and Λ_0 is the $\ell \times \ell$ diagonal matrix:

$$\Lambda_0 = \text{diag} (\lambda_j) \quad , \quad \text{Re} (\lambda_j) = 0 \quad (4)$$

(II) Then, following Malkin's procedure [1] for critical stability problems we perform the substitution $\underline{y} \rightarrow \underline{n}$:

$$\underline{n} = \underline{y} + \left\{ \sum_{|\mu|=2} M_k^\mu (\alpha_0) \underline{z}^\mu \right\} \quad (5)$$

where the coefficients M_k^μ are found by requiring that no second order terms independent of \underline{n} appear in the right hand side of $d\underline{n}/dt$. This leads to the following linear algebraic systems (E is the $\ell \times \ell$ identity matrix):

$$(\bar{A}_{22}(\alpha_0) - (\Lambda_0 \cdot \mu) E) \left\{ M_k^\mu \right\} = \left\{ \bar{\psi}_k^v \right\} ; \quad |\mu|=2, \quad v=(\mu, 0, \dots, 0) \quad (6)$$

Since all roots of $\bar{A}_{22}(\alpha_0)$ have negative real parts the systems (6) have always unique solutions for $\left\{ M_k^\mu \right\}$.

NOTE: From now on all expressions are written for $\alpha = \alpha_0$, in this section.

It should be noticed that in the new system:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \Lambda_0 \underline{z} + \left\{ \sum_{|\nu|=2} \Phi_j^\nu (\underline{z}, \underline{n})^\nu \right\}; \quad \frac{d\underline{n}}{dt} = \bar{A}_{22} \underline{n} + \left\{ \sum_{|\nu|=2} \Psi_k^\nu (\underline{z}, \underline{n})^\nu \right\} \quad (7)$$

one has $\left\{ \Phi_j^\nu \right\} = \left\{ \bar{\phi}_j^\nu \right\}$ for $|\nu|=2$ whereas $\left\{ \Psi_k^\nu \right\} = \underline{0}$ for $|\nu|=2$ and $v=(v_1, v_2, \dots, v_\ell, 0, 0, \dots, 0)$.

(III) We now seek for the elimination of the terms of the second order, independent of \underline{n} , in the first set of equations (7) by means of the substitution $\underline{z} \rightarrow \underline{\xi}$:

$$\underline{\xi} = \underline{z} + \left\{ \sum_{|\mu|=2} B_j^\mu \underline{z}^\mu \right\}; \quad j = 1, \dots, \ell \quad (8)$$

By similar procedure as in [6] we get

$$B_j^\mu = -\bar{\phi}_j^\nu / \lambda_{\mu_j} \quad , \quad |\mu|=2, \quad v=(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell, 0, \dots, 0) \quad (9)$$

Of course terms such that $\lambda_{\mu j} = 0$ cannot be eliminated unless they are zero from the beginning (eq.(7)). These terms are called resonant and play an important role in the stability problem. Since these terms are invariant under (8) we can set $B_j^\mu = 0$ when $\Lambda_0 \mu - \lambda_j = 0$

Actually steps (II) and (III) can be replaced by one single step consisting of the substitution $(\underline{z}, \underline{y}) \rightarrow (\underline{\xi}, \underline{\eta})$:

$$\begin{pmatrix} \underline{z} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\eta} \end{pmatrix} - \left\{ \sum_{|\mu|=2}^{\infty} B_j^\mu \underline{\xi}^\mu \right\} \quad (10)$$

where

B_j^μ ($j = 1, 2, \dots, \ell$) is given by (9);

$$B_j^\mu = 0 \quad (j=1, 2, \dots, \ell; \lambda_{\mu j} = 0); \quad B_j^\mu = M_k^\mu \quad (j=\ell+1, \dots, n). \quad (11)$$

The new coefficients of the third order terms are given by [6]:

$$\Phi_{j, \text{NEW}}^\nu = \bar{\Phi}_j^\nu - \sum_{I, J}^{(\nu)} \bar{\Phi}_j^{\delta} I^{\delta} B_j^{\nu-\delta} I \quad (1 + \delta_{IJ}); \quad |\nu|=3, \quad (12)$$

for, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\ell, 0, \dots, 0)$, $j=1, 2, \dots, \ell$.

The steps (II) and (III) can be repeated for the new system with a substitution of type (10) by only changing $|\mu|=2$ to $|\mu|=3$. The resulting system is of the form (3) where the second set of equations has no terms independent of \underline{y} up to the third order and in the first set, the only terms of the second and third order independent of \underline{y} are those satisfying the condition $\Lambda_0 \mu - \lambda_j = 0$ ($|\mu|=2, 3$).

The same procedure could be carried out indefinitely but for the present purposes we restrict ourselves to examining second and third order terms only.

The system (3) is said to be in Normal form if it can be written as:

$$d\underline{z}/dt = \Lambda_0 \underline{z} + \left\{ \sum_{\lambda_{\mu j} = 0} G_j^\mu \underline{z}^\mu \right\} + \underline{Z}(\underline{z}, \underline{y}); \quad d\underline{y}/dt = \bar{A}_{22} \underline{y} + \underline{Y}(\underline{z}, \underline{y}) \quad (13)$$

where $Z(z, 0) \equiv 0$ and $Y(z, 0) \equiv 0$ and both Z and Y contain only terms of a higher order than one.

In the above a formal procedure for transforming any system (3) into the normal form (13) has been presented. Of course the computations become quickly awkward as higher order terms of the normal form (13) are to be obtained. In practice, at least for the problems which are here in view, we only have to find the G 's for $|\mu| = 2, 3$. These quantities are given explicitly by:

$$G_j^\mu = \bar{\phi}_j^\nu (|\mu|=2) ; G_j^\mu = \Phi_{j, \text{NEW}}^\mu (|\mu|=3) ; \nu = (\mu, 0, \dots, 0) \quad (14)$$

4. Numerical Aspects

For calculating the G 's ($j=1, 2, \dots, \ell$) with $|\mu|=2, 3$ the following procedure has been used:

- Computation of the $\bar{\phi}$'s and $\bar{\psi}$'s of the equations (3) by using Appendix I ($\alpha = \alpha_0$).
- Computation of the M 's of the transformation (5) by solving the linear algebraic equations (6).
- Computation of the B 's of (10) from (11) and (9).
- Computation of the G 's ($|\mu|=3$) from (14) and (12).

This procedure is of easy implementation in a digital computer.

5. Critical Stability problems

As a consequence of a theorem by Malkin [1] [2] if the reduced system of (1):

$$dz/dt = \Lambda_0 z + \left\{ \sum_{\lambda, \mu_j=0; |\mu|=2, 3} G_j^\mu z^\mu \right\} \quad (15)$$

is asymptotically stable (or unstable) according to the third approximation, then the complete system (1) is also asymptotically stable (or unstable) for $\alpha = \alpha_0$.

Thus if the stability of (15) is defined by the terms of a lower degree than 4, then the critical stability problem ($\alpha = \alpha_0$) related with (1) is solved by only finding the G 's for $|\mu| = 2, 3$.

The stability in the critical case $\alpha = \alpha_0$ is important

for the concept of practical stability and the concept of dangerous and non-dangerous frontier of stability (Bautin) [10] .

This will be discussed later in Sec. 6.

Internal resonance of canonical systems can be studied by the proposed approach. In this case one generally has $\ell = n^{(\text{even})}$, for any α contained in a certain interval of interest. Internal resonance can happen if $K \cdot \Lambda_0 = 0$ for some non trivial $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, k_i integer. The application of the normal form approach to the study of resonance phenomena of canonical systems can be found in many references (see Ref. of [6]). Here a numerical method is given for obtaining the coefficients G ($|\mu| = 2, 3$) of the normal form. Therefore the usual cumbersome analytical expressions appearing in such kind of problems are avoided [6] .

6. Post critical behavior and flutter problems

In this section we suppose $\alpha = \alpha_0 + \epsilon^2 \alpha_2 + 0(\epsilon^4)$ where ϵ is a sufficiently small (real) parameter.

Let us first consider the case such that for $\epsilon = 0$ ($\alpha = \alpha_0$) $\ell = 2$ and $\lambda_1 = -\lambda_2 = j\omega_0 \neq 0$ and such that for $\epsilon > 0$ two roots of $A(\alpha)$ have non-zero real parts whereas the $n - \ell$ remaining roots have strictly negative real parts.

If instead of the variables \underline{x} we use $\epsilon \underline{x}$ then the equations (3) take the form

$$d\underline{z}/dt = \Lambda \underline{z} + \left\{ \epsilon \sum_{|\nu|=2} \bar{\phi}_j^\nu(\alpha) (\underline{z}, \underline{y})^\nu + \epsilon^2 \sum_{|\nu|=3} \bar{\phi}_j^\nu(\alpha) (\underline{z}, \underline{y})^\nu + \dots \right\}$$

$$d\underline{y}/dt = \bar{\Lambda}_{22}(\alpha) \underline{y} + \left\{ \epsilon \sum_{|\nu|=2} \bar{\psi}_k^\nu(\alpha) (\underline{x}, \underline{y})^\nu + \epsilon^2 \sum_{|\nu|=3} \bar{\psi}_k^\nu(\alpha) (\underline{x}, \underline{y})^\nu + \dots \right\}$$

where

$$\Lambda = \Lambda_0 + \epsilon^2 \Lambda_2 + 0(\epsilon^4) \quad (\Lambda \text{ diagonal});$$

$$\bar{\phi}_j^\nu(\alpha) = \bar{\phi}_j^\nu(\alpha_0) + 0(\epsilon^2) ; \quad \bar{\psi}_k^\nu(\alpha) = \bar{\psi}_k^\nu(\alpha_0) + 0(\epsilon^2).$$

We can easily show that:

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(2)} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(2)} \end{pmatrix}; \lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)*}, \lambda_1^{(2)} = v_0^T \Lambda_2 u_0 \quad (18)$$

where $\Lambda_2 = \partial A / \partial \epsilon^2 |_{\epsilon^2=0}$ and v_0^T, u_0 are respectively the left and right eigenvectors of $A(\alpha_0)$ corresponding to λ_1 as defined in Appendix I ($v_0^T \cdot u_0 = 1$).

The following results can be shown:

- I- In (13) all the G's ($|\mu|=2$) are zero.
 II- The reduced system (15) takes the form:

$$dz_1/dt = (\lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_1^{(2)}) z_1 + \epsilon^2 G_1^{(2,1)}(\alpha_0) z_1 z_2 + O(\epsilon^3); z_1 = z_2^* \quad (19)$$

Note: we are using $\epsilon \underline{z}$ instead of \underline{z} .

Let us use the notation: $G_1^{(2,1)}(\alpha_0) = \Gamma$ and $\lambda_1^{(2)} = b$.

III- If $\text{Re}\{\Gamma\} < 0$ then for $\alpha = \alpha_0$ (critical case), the solution $\underline{x}(t) = \underline{0}$ is asymptotically stable [1] [2].

IV- If $\text{Re}\{\Gamma\} < 0$ and $\text{Re}\{b\} > 0$ a stable limit cycle exists for (1) around the unstable equilibrium $\underline{x} = \underline{0}$, for sufficiently small ϵ [3].

V- The limit cycle is given within an error of the order ϵ^3 (in the variables $(\underline{z}, \underline{y})$) by:

$$\underline{z}_j = \epsilon \underline{\bar{z}}_j(t) - \epsilon^2 \left\{ \sum_{|\mu|=2} B_j^\mu(\alpha_0) \underline{\bar{z}}_j^\mu(t) \right\} \quad (j=1,2); \quad (20)$$

$$\underline{y}_k = -\epsilon^2 \left\{ \sum_{|\mu|=2} M_k(\alpha_0) \underline{\bar{z}}_j^\mu(t) \right\} \quad (k=1, \dots, m)$$

where $\underline{\bar{z}}(t)$ is a non trivial periodic solution of

$$dz_1/dt = (\lambda_1 + \epsilon^2 b) z_1 + \epsilon^2 \Gamma \cdot z_1 z_2; z_2 = z_1^* \quad (21)$$

In the order to find the non trivial periodic solution of (21) we write (from (21)):

$$\begin{aligned} z_2 (dz_1/dt) &= (\lambda_1 + \epsilon^2 b) z_1 z_2 + \epsilon^2 \Gamma \cdot z_1^2 z_2^2 \\ z_1 (dz_2/dt) &= (-\lambda_1 + \epsilon^2 b^*) z_1 z_2 + \epsilon^2 \Gamma^* \cdot z_1^2 z_2^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Denoting the positive quantity $z_1 z_2$ by a^2 one gets from (22)

$$\frac{da}{dt} = \epsilon^2 \operatorname{Re} \{ b \} a + \epsilon^2 \operatorname{Re} \{ \Gamma \} a^3 \quad (23)$$

In fact we can write $z_1 = z_2^* = a e^{j\theta}$. Then from (21) and $d\theta/dt = \dot{z}_1/z_1 - \dot{z}_2/z_2$ comes:

$$\frac{d\theta}{dt} = \operatorname{Im} \{ \lambda_1 \} + \epsilon^2 \operatorname{Im} \{ b + \Gamma a^2 \} \quad (24)$$

The non trivial solution \bar{z} is thus given by $\bar{z}_1 = \bar{z}_2^* = a_0 \exp(j \Omega_0 t)$ where $a_0 = \sqrt{-\operatorname{Re} \{ b \} / \operatorname{Re} \{ \Gamma \}} ; \Omega_0 = \operatorname{Im} \{ \lambda_1 \} + \epsilon^2 \operatorname{Im} \{ b + \Gamma a_0^2 \}$ (25)

The result V has been obtained taking into account the expressions (17) and the fact that all the G's ($|\mu|=4$) from the normal form (13) are zero.

VI- If $\operatorname{Re} \{ \Gamma \} > 0$ then for $\alpha = \alpha_0$ (critical case) the solution $\underline{x}(t) = \underline{0}$ is unstable [1] [2].

VII- If $\operatorname{Re} \{ \Gamma \} > 0$ and $\operatorname{Re} \{ b \} < 0$ then an unstable limit cycle exists for (1), around the asymptotically stable equilibrium, for sufficiently small ϵ [3].

We now discuss the above problem in connection with the non linear flutter phenomena which are characterized by the crossing of two roots of the linear part matrix $A(\alpha)$ through the imaginary axis (from the left).

If the hypothesis of III is satisfied then we have benign flutter, that is, $\alpha = \alpha_0$ is a non-dangerous frontier of stability. From V and the correlated literature one concludes that even if the boundary of stability is crossed, motions of (1), starting in a sufficiently small neighborhood of zero will tend asymptotically to the limit cycle. If the amplitude of this limit cycle is small one has practical stability. However, this amplitude should be known in order to study the fatigue of elastic structures for instance [11].

Explosive flutter occurs when the hypothesis of VI is satisfied. The crossing of the boundary of stability leads to relatively unbounded motions which in practice

grow until the failure of the structure. The boundary of stability is dangerous because even if all the roots of $A(\alpha)$ have negative real parts (linear stability) from VII one may arrive to the conclusion of practical instability. This results from the fact that the limit cycle mentioned in VII may be very near the equilibrium which has therefore a very "small" domain of stability.

More general problems concerning the crossing of the imaginary axis by more than two roots (from the left) can also be investigated by the proposed method [12].

Buckling is generally related with the crossing of the imaginary axis by one real root, through zero. This problem can also be investigated in a similar way as in the first problem of this section.

7. Example

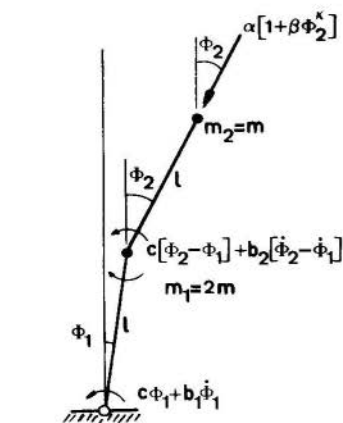
To illustrate the proposed method we use the example of [13] (Fig.1) with a follower force of the type $\alpha(1+\beta\Phi_2^\kappa)$

for $\kappa=1,2$. If $\kappa=1$ quadratic terms appear in the differential equations of the system. If $\kappa=2$ only "odd" terms (i.e. linear, cubic, fifth order, etc...) are present. The case $\kappa=2$ leads to similar results as those of [14].

The case $\kappa=1$ is also included here.

For equation (1) we have set $x_1=\Phi_1$, $x_2=\dot{\Phi}_1$, $x_3=\Phi_2$, $x_4=\dot{\Phi}_2$.

The linearity of $\text{Re}(G_1^{21}) \times \beta$ in case $\kappa=2$ is quite predictable; in case $\kappa=1$ a corresponding quadratic characteristic is also predictable.



MODEL WITH TWO DEGREES OF FREEDOM.

FIG.1

The following expression has been obtained from the computer results and the properties just mentioned (F is the parameter corresponding to the system (1)):

$$F = F_0 + (E_0 + E_\kappa \beta^{3-\kappa}) 4 a_0^2 ; \quad \kappa=1,2 \quad (26)$$

where $E_0 = +6.41019$; $E_1 = +162.803$; $E_2 = -44.6912$;
 $F_0 = 2.08573$ ($B_1=10$ $B_2=0.1$; $F=\alpha\ell/c$; $B_i=b_i/\ell\sqrt{cm}$; the
time scale has been multiplied by $\sqrt{c/m\ell^2}$).

If the coefficient of a_0^2 in (26) is positive (negative) the limit cycle is stable (unstable).

8. Conclusion

A very general method for the dynamical analysis of a nonlinear system near a bifurcation condition has been elaborated. Many important mechanical problems can be treated thereby; to mention a few of them: satellite motions [9], three-body problem, pannel and airfoil flutter in a supersonic stream [8] [12], rotor dynamics, etc...

It is worth mentioning that the present method leads to the same results as those derived by classical averaging methods such as the Krilov-Bogoliubov method, in a pure algebraic manner. This point deserves further investigation [5].

One main advantage of the normal form approach is its adequacy for numerical implementation in a computer. Thus the writing of awkward analytical expressions (which may also be derived by the above method) is avoided [6].

Extensions of this work might be oriented towards systems with periodic excitation (parametric excitation). Some basic ideas for such an extension are contained in [7]. When the excitation is "small" simplifications are probably available.

Appendix I: Suppose that ℓ is even and all λ_i 's in (4) are pure imaginary. Let $\lambda_i = -\lambda_{i+1}$; $(1, 3, \dots, \ell-1)$ (the extension to other cases is straightforward). We define the linear change of variables $\underline{x} \rightarrow (\underline{z}, \underline{y})$ as follows:

$$\begin{pmatrix} \underline{z} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = S \underline{x} \quad \text{where} \quad S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = (s_{ij}) \quad \text{and}$$

S ($n \times n$), S_{11} ($\ell \times \ell$), S_{22} ($m \times m$) are complex matrices. The i -th line of S ($i=1, \dots, \ell$) is the left-eigenvector (transposed) of $A(\alpha_0)$ corresponding to λ_i . Let $S^{-1} = SI$ and

$$S^{-1} = SI = \begin{pmatrix} SI_{11} & SI_{12} \\ SI_{21} & E_{\text{mxm}} \end{pmatrix} ; E_{\text{mxm}} : \text{The mxm identity matrix}$$

The i -th column of S^{-1} ($i=1, \dots, \ell$) is the right - eigenvector of $A(\alpha_0)$ corresponding to λ_i . Furthermore let $\underline{v}^{(i)T} \cdot \underline{u}^{(i)} = 1$ where $\underline{v}^{(i)}$ and $\underline{u}^{(i)}$ are the left and right eigenvectors of $A(\alpha_0)$ respectively, corresponding to λ_i , $\underline{v}^{(i)} = \underline{v}^{(i+1)*}$ and: $\underline{u}^{(i)} = \underline{u}^{(i+1)*}$ ($i=1, 3, \dots, \ell-1$) ; then:

$$S_{21} = -SI_{21} S_{11}^{-1} \quad , \quad S_{22} = E_{\text{mxm}} - SI_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$$

$$SI_{12} = -S_{11}^{-1} S_{12} \quad , \quad \bar{A}_{22} = A_{22} - A_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$$

Note: S_{11}^{-1} can be supposed to be defined. If this is not true with variables \underline{x} then a reordering of the components of \underline{x} is possible such that S_{11}^{-1} exists (this reordering can be made automatically in the computer program).

The coefficients $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ of (3) are obtained as follows:

Let us write (1) as (see Sec. 2 for the notation) :

$$d\underline{x}/dt = A\underline{x} + \left\{ \sum_{p,q} Q_{i,p,q} x_p x_q + \sum_{p,q,r} C_{i,p,q,r} x_p x_q x_r + \dots \right\}$$

If the linear substitution $\underline{x} \rightarrow \bar{x}$ is given by $\bar{x} = S\underline{x}$ then the new system is:

$$d\bar{x}/dt = SAS^{-1} \bar{x} + \left\{ \sum_{p,q} \tilde{Q}_{i,p,q} x_p x_q + \sum_{p,q,r} \tilde{C}_{i,p,q,r} x_p x_q x_r + \dots \right\}$$

where

$$\left\{ \tilde{Q}_{i,p,q} \right\} = S \left\{ \bar{Q}_{i,p,q} \right\} \quad , \quad \left\{ \tilde{C}_{i,p,q,r} \right\} = S \left\{ \bar{C}_{i,p,q,r} \right\} ;$$

$$\bar{Q}_{i,p,q} = \sum_{L,J} Q_{i,L,J,K} \left(\sum_{(p,q)} s_{Lp} s_{Jq} \right) / (1 + \delta_{pq})$$

$$\bar{C}_{i,p,q,r} = \sum_{L,J,K} C_{i,L,J,K} \left(\sum_{(p,q,r)} s_{Lp} s_{Jq} s_{Kr} \right) / \delta_{pqr}$$

The inner sums in \bar{Q} and \bar{C} are performed over all

permutations of (p,q) and (p,q,r) respectively.

REFERENCES

- [1] MALKIN, I.G. - "Stability and Dynamic Systems"; American Math.Soc.;Translations:Series 1, vol.5.
- [2] HAHN, W. - "Stability of motion"; t.138, 1967, Springer Verlag.
- [3] BRUSHINSKAYA, N., Dokl.Akad.Nauk. SSSR, 139, 9-12 (1961).
- [4] BRJUNO, A.D.; Trans.Moscow Math. Soc. 25(1971), 131-288; 26(1972), 199-239.
- [5] _____;Soviet Math.Dokl.,vol.17(1976)n°5.
- [6] HSU,Liu - "On the Analysis of 4th order systems near a bifurcation;Mech.Research Comm.,to appear.
- [7] _____;Comptes Rendus Acad.Sc.Paris;t.284 (28 mars 1977), Série A, 779-781.
- [8] SMITH, Linda L. and MORINO, L. - "Stability Analysis of Nonlinear Differential Autonomous Systems with-Applications to Flutter; AIAA Journal, vol.14, n° 3, March 1976.
- [9] MARKEEV, A.P.;PMM, vol.36, n° 4, 1968.
- [10] CHETAYEV,N.G.;"The Stability of motion", Pergamon Press, 1961.
- [11] DOWELL,E.H. - "Nonlinear Oscill. of a Fluttering Plate;AIAA Journal,vol.4,n°7,Jul/66,1267-1275.
- [12] KÍRCHGRABER,U.;Mech.Res.Comm.,vol.3, 291-296 and 297-301, 1976, Pergamon Press.
- [13] ROORDA J. and NEMAT-Nasser; AIAA Journal, vol.5, n° 7, July, 1967.

HSU L., e TAVARES G.A.

A DIRECT METHOD FOR THE ANALYSIS OF CRITICAL AND POST-
-CRITICAL BEHAVIOR OF NONLINEAR MECHANICAL SYSTEMS

Summary

A method is proposed for studying the dynamic behavior in the vicinity of an equilibrium state, supposed to be near a bifurcation condition (e.g. buckling, nonlinear flutter, resonance, etc...).

The method consists essentially in bringing the differential equations of the system to a Normal Form. An algorithm is given for the obtention of the Normal Form, since formal computations are cumbersome.

Generally, the Normal Form leads to the determination of the amplitude and frequency of post-critical oscillations, the stability in the critical case, internal resonances, etc.

The application of the method is illustrated by a concrete example.

UM MÉTODO DIRETO PARA O ESTUDO DO COMPORTAMENTO CRÍTICO
E PÓS-CRÍTICO DE SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES

Sumário

Propõe-se um método para a determinação do comportamento dinâmico em torno de um estado de equilíbrio, suposto próximo de uma bifurcação (por ex. flambagem, "flutter" não linear, ressonância, etc...).

O método baseia-se na obtenção de uma forma normal para as equações diferenciais do sistema. Um esquema numérico é elaborado para se chegar a forma normal pois os cálculos formais envolvidos são extremamente complexos.

Geralmente a forma normal permite determinar: a amplitude e frequência de oscilações no estado pós-crítico, a estabilidade no caso crítico, as ressonâncias internas, etc.

A aplicação do método é ilustrada por um exemplo concreto.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 25
PP. 299 - 310



ABCM/CNPR

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE CRÍTICA POR GALOPE
DE ESTRUTURAS COM AMORTECIMENTO ARBITRÁRIO

Maria Luiza Denardin, aluna do curso de pós-graduação
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Brasil.

José Antonio do Nascimento, aluno do curso de pós-graduação
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Brasil.

Jorge Riera, professor do curso de pós-graduação
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Brasil.

1. Introdução

No desenvolvimento de métodos gerais de análise de estruturas submetidas a ação do vento, a possibilidade de instabilidade aeroelástica por galope deve ser levada em conta por duas razões: (a) fortes oscilações laterais auto-induzidas podem se apresentar para velocidades do vento maiores que uma certa velocidade "crítica" - "onset velocity" na literatura de língua inglesa - e (b) o comportamento da estrutura sob a ação do vento com velocidades inferiores à crítica também é influenciado pelo referido fenômeno, que introduz um amortecimento aerodinâmico negativo.

As oscilações por galope, devidas a instabilidade aerodinâmica da seção transversal do corpo, foram descritas inicialmente por Den Hartog [1]. O problema, com relação às vibrações de linhas de transmissão elétricas foi estudado, entre outros, por Richardson [2] e Richards [3].

Scruton [4] e Parkinson [5 - 9] estudaram as vibrações em prismas de seção transversal retangular e quadrada a partir do enfoque "quase-estático". A validade desta hipótese foi confirmada por numerosos trabalhos experimentais. Desenvolvimentos posteriores, devidos principalmente a Novak, permitiram a análise do fenômeno em estruturas prismáticas, considerando inclusive o efeito da turbulência [10 - 16].

Estes resultados, porém, são dificilmente aplicáveis à determinação da velocidade crítica no caso de estruturas complexas, não prismáticas ou assimétricas. Por outro lado, freqüentemente estruturas sensíveis a ação dinâmica do vento apresentam caráter misto - por exemplo, torres em concreto providas de uma agulha de aço - Neste caso, além da forma não-prismática aparece o problema do amortecimento não-proporcional, ou seja a não-existência de modos de vibração no sentido clássico, fato este que invalida o procedimento energético empregado nas Refs. [10 - 11 - 14 - 15] para sistemas contínuos.

Neste trabalho apresenta-se um método para determinar a instabilidade aeroelástica por galope, em estruturas de barras, de forma e amortecimento arbitrário. Além da determinação da velocidade crítica, o procedimento permitirá a adequada consideração do amortecimento aerodinâmico negativo a ser levado em conta nos métodos gerais de análise dinâmica de estruturas excitadas por desprendimento de vórtices e/ou pela energia de rajadas, atualmente em desenvolvimento no Laboratório de Aerodinâmica das Construções, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

2. As forças do vento e o fenômeno de galope

Se um obstáculo é colocado na trajetória do vento de maneira que o

ar em movimento é parcialmente detido ou desviado de sua trajetória original, parte da energia cinética da massa de ar é transformada em energia potencial de pressão que, atuando sobre a superfície do obstáculo, resulta em uma força aerodinâmica. Esta força global é, no caso de fluxo bidimensional, decomposta em duas componentes, uma na direção da corrente, dita força de arrasto F_a , e outra na direção normal a mesma, dita força lateral F_ℓ .

$$F_a = C_a q_0 A \quad (2.1)$$

$$F_\ell = C_\ell q_0 A \quad (2.2)$$

onde C_a e C_ℓ são coeficientes adimensionais determináveis experimentalmente, q_0 a pressão dinâmica do vento igual a $\frac{1}{2} \rho V^2$, sendo ρ a densidade do ar, e V a velocidade do fluxo não perturbado, e A a área de uma superfície de referência. Os coeficientes C_a e C_ℓ são funções do Número de Reynolds, da forma do corpo, do ângulo de incidência do vento e também das características da turbulência do fluxo.

Se um corpo, imerso em um fluxo bidimensional, com velocidade não-perturbada V , se desloca com velocidade \dot{y} na direção normal à direção do fluxo, a força aerodinâmica que age sobre ele será função da velocidade de relativa entre o fluxo e o corpo, V_{rel}

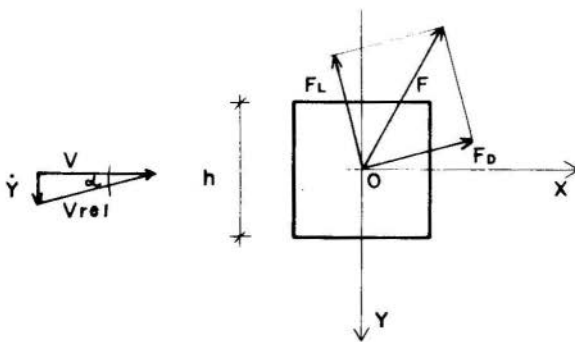


Fig. 2.1 Forças do Vento

Segundo Fig. 2.1, o ângulo de ataque da velocidade relativa V_{rel} é:

$$\alpha = \text{arc tan } \dot{y}/V \quad (2.3)$$

No procedimento "quase-estático" aceita-se que durante as vibrações a força aerodinâmica é a mesma a que estaria sujeito o corpo durante um ensaio estático com o mesmo ângulo de ataque α . A força total atuante sobre o corpo pode ser agora decomposta nas direções Ox e Oy :

$$F_x = C_x q_0 A \quad (2.4)$$

$$F_y = C_y q_0 A \quad (2.5)$$

Em vista de (2.1 - 2) tem-se:

$$F_y = - \frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 A (C_a \text{ sen } \alpha + C_\ell \text{ cos } \alpha) \quad (2.6)$$

Sendo:

$$V_{rel} = V \text{ sec } \alpha \quad (2.7)$$

obtém-se finalmente:

$$C_y = - (C_\ell \text{ sec } \alpha + C_a \text{ tan } \alpha \text{ sec } \alpha) \quad (2.8)$$

A eq. (2.8) indica que C_y é uma função de \dot{y}/V , e pode portanto ser desenvolvido por uma série de potências da forma:

$$C_y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\dot{y}/V)^n \quad (2.9)$$

A seguir se considera apenas o caso em que $C_1 > 0$, no qual o sistema passa a ser instável a partir da posição inicial não deformada.

3. Equações de movimento e condições de instabilidade

As equações de movimento do sistema são:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{G} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{Y} \quad (3.1)$$

onde \vec{y} é o vetor de deslocamentos generalizados, \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez, respectivamente, e \vec{Y} o vetor de forças generalizadas, cujos componentes Y_j estão dados por:

$$Y_j = \frac{1}{2} \rho V_j^2 A_j C_{y_j} \cos \beta_j \quad (3.2)$$

Na eq. (3.2) V_j representa a velocidade da corrente não-perturbada, A_j a área de referência do elemento j , C_{y_j} o correspondente coeficiente aerodinâmico e β_j o ângulo compreendido entre a coordenada generalizada da y_j e a direção do fluxo. Quando só o termo linear é retido na série (2.9), a eq. (3.2) fica:

$$Y_j = \frac{1}{2} \rho V_j A_j \cos \beta_j C_{1_j} \dot{y}_j \quad (3.3)$$

Introduzindo a eq. (3.3) na eq. (3.1) obtém-se:

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{y}} + [\mathbf{C} - \mathbf{B}] \dot{\vec{y}} + \mathbf{K} \vec{y} = \vec{0} \quad (3.4)$$

Onde \mathbf{B} é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os coeficientes de y_j na eq. (3.3).

Com a troca de variáveis:

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} \dot{\vec{y}} \\ \dots \\ \vec{y} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

a eq. (3.4) pode ser expressa na forma:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{F} \vec{x} \quad (3.6)$$

onde:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{C} - \mathbf{B}] & \vdots & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

O sistema (3.6) é estável se as partes reais de todos os autovalores da matriz real \mathbf{F} são negativas [17].

Se os termos não-lineares de eq. (2.9) são mantidos na expressão de \vec{Y} , a eq. (3.6) toma a forma:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{F} \vec{x} + \vec{g}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad \vec{g}(0, 0, \dots, 0) = \vec{0} \quad (3.8)$$

na qual as componentes g_j do vetor \vec{g} são séries de potenciais expandidas ao redor da origem das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , começando com os termos de segundo grau. Diz-se então que (3.6) é a "primeira aproximação" ou "parte linear" de (3.8). O seguinte teorema, devido a Liapunov [19], permite estender a (3.8) a condição de estabilidade de (3.6): "Se a eq. (3.6) é assintoticamente estável na origem, também (3.8) é estável. Se (3.6) é instável, isto é, se \mathbf{F} tem pelo menos uma raiz característica com parte real positiva, então (3.8) é instável" [18, 19].

Em consequência, para estabelecer o estado do sistema basta calcular o espectro da matriz \mathbf{F} . No caso de sistemas com muitos graus de liberdade, a determinação da velocidade crítica exige a reiteração do processo para diferentes níveis da excitação.

4. Determinação dos autovalores

A equação (3.6) pode ser resolvida, por meio de um processo iterativo de maneira a fornecer os autovalores e autovetores complexos do sistema amortecido. Utiliza-se para estabelecer a convergência um teste sobre o quadrado da amplitude e sobre a parte real do autovalor [20]. A convergência deste método se dá primeiramente para o autovetor correspondente ao autovalor de maior valor absoluto e os consecutivos autovalores e autovetores são obtidos a partir da condição de ortogonalidade dos autovetores.

5. Exemplos

Foi considerada uma barra reta de alumínio, engastada-livre (exemplo A) e bi-rotulada (exemplo B) com as propriedades:

$$E = 7,2 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \quad I = 1427,14 \text{ cm}^4$$

$$\gamma = 2,7 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3 \quad A = 19,84 \text{ cm}^2$$

$$C_1 = \text{coeficiente do primeiro termo da série (2.9)} = 1,91$$

e com as dimensões:

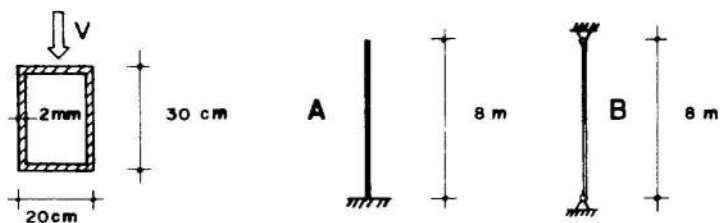


Fig. 5.1

A matriz de amortecimento é proporcional a matriz de massa resultando um coeficiente de amortecimento crítico para o 1º modo de 1%. No exemplo A foi admitida uma variação da velocidade com a altura segundo a lei:

$$V_j = V_0 \left(\frac{z_j}{z_0}\right)^p$$

onde V_0 é a velocidade a altura de referência z_0 , igual a 10 m, z_j denota a altura do elemento sobre o terreno e p o coeficiente de variação da velocidade com a altura, tomado igual a 0,28.

As cargas consideradas foram:

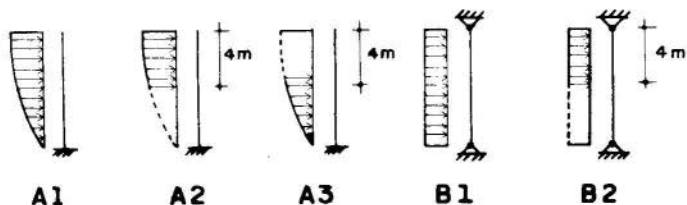
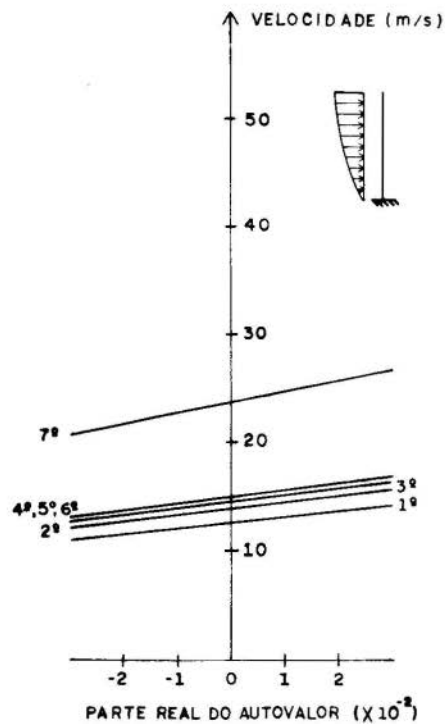


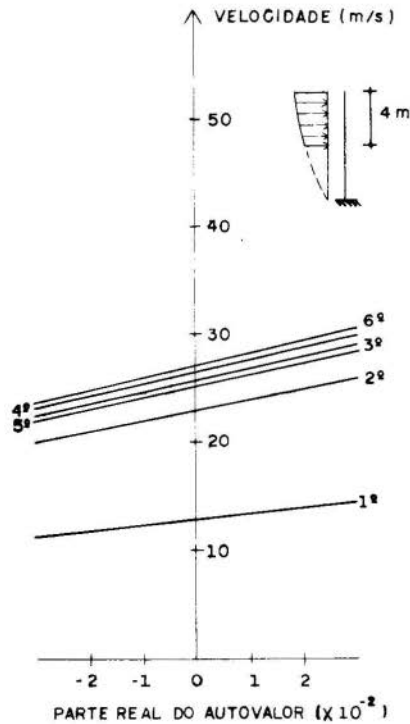
Fig. 5.2

A fig. 5.3 mostra a variação da parte real dos autovalores nos Exemplos A1 - 3 em função da velocidade básica do vento V_0 , permitindo a imediata determinação da velocidade crítica.

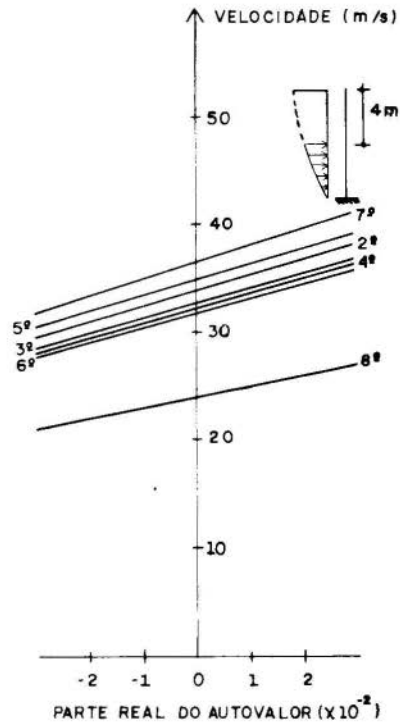
Fig. 5.3



A1



A2



A3

Na Tabela 5.1 comparam-se velocidades críticas obtidas com base no presente trabalho com os valores que resultam da aplicação das equações 13, 69, 70, 71, 75 e 76 da referência [14].

TABELA 5.1

	Segundo método de Novak [14]		Presente trabalho	
A_1	$V_j = 12,7$	$j = 1$	$V_j = 12,4$	$j = 1$
A_2	$V_j = 13,5$	$j = 1$	$V_j = 13,0$	$j = 1$
B_1	$V_j = 30,6$	$j = 1, \infty$	$V_j = 30,5$	$j = 1,8$
B_2	$V_j = 61,2$	$j = 1, \infty$	$V_j = 61,3$	$j = 1,8$

6. Conclusões

Foi apresentado um procedimento para a obtenção da velocidade crítica (on-set velocity) por galope de estruturas lineares arbitrárias sob a ação do vento. A comparação dos resultados obtidos em exemplos simples com os correspondentes ao enfoque de Novak [14] demonstram a aplicabilidade do método que pode ser empregado em estruturas complexas e com amortecimento não proporcional sem nenhuma dificuldade.

Bibliografia

- [1] Den Hartog: Transactions, AIEE, Vol. 49, 1930, p. 444
- [2] A.S. Richardson, J.R. Martucelli and W.S. Prise: Research Study on Galloping of Electric Powers Transmission Lines", Symposium on Wind Effects on Buildings and Structures, National Physical Laboratories, Teddington, England, 1963, p. 612 - 686.
- [3] D.J.W. Richards: "Aerodynamic Properties of the Severn Crossing Conductor", ibid, p. 688 - 765.
- [4] C. Scruton: "On the Wind-Excited Oscillations of Stacks, Towers and Masts", ibid, p.
- [5] G.V. Parkinson, N.P.H. Brooks: "On the aerodynamic Instability of Bluff Cylinders", Transactions, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 83, 1961, p. 252 - 8.

- [6] G.V. Parkinson, J.D. Smith: "An aeroelastic oscillator with two stable limit cycles", Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics Vol. 84, 1962, p. 444 - 5.
- [7] G.V. Parkinson: "Aeroelastic galloping in one degree of freedom", Symposium on Wind Effects on Buildings and Structures, Teddington, England, 1963, p. 581 - 609.
- [8] G.V. Parkinson, J.D. Smith: "The square-prism as an aeroelastic Non-linear oscillator", Quarterly, Journal of Mechanics & Applied Math., Oxford, England, Vol. XVII, Part 2, 1964, p. 225 - 239.
- [9] G.V. Parkinson, T.V. Santosham: "Cylinders of Rectangular Section as Aeroelastic Non linear Oscillators", Vibrations Conference of The American Society of Mechanical Engineers, Boston, Mass., March 1967.
- [10] M.Novak: "Aeroelastic Galloping of Prismatic Bodies", ASCE Proceedings, Journal of the Eng. Mech. Div., Vol. 95, EM 1, 1969, p. 115-142.
- [11] M.Novak and A.G. Davenport: "Aeroelastic Instability of Prisms in Turbulent Flow", ASCE Proceedings, J. Of Eng. Mech. Div., Vol. 96, EM 1, 1970, p. 17 - 39.
- [12] A. Laneville and G.V. Parkinson: "Effects of Turbulence on Galloping of Bluff Cylinders",
- [13] M.Novak: "Galloping and Vortex Induced Oscillations of Structures", ibid
- [14] M.Novak: "Galloping Oscillations of Prismatic Structures", Proceedings ASCE, J. of the Eng. Mech. Div., Vol. 98, EM 1, 1972, p.27-46
- [15] M. Novak and H.Tanaka: "Effect of Turbulence on Galloping Instability", Proceedings ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol. 100, EM 1, 1974, p. 27 - 47.
- [16] B.E. Lee: "The effect of turbulence on the surface pressure field of a square prism". J. Fluid Mech., England, 1975, Vol. 69, Part 2, p. 263 - 282.
- [17] S. Barnett and C. Storey: "Matrix Methods in Stability Theory", Nelson, London, 1970.
- [18] S.H. Lehnigk: "Stability Theorems for Linear Motions with and Introduction to Riapunov's direct method", Prentice-Hall, NJ, 1966.

- 19 A.M. Liapunov: Stability of Motion, Academic Press, NY, 1966.
- 20 Frazer, R.A., W.J. Duncan, and A.R. Collar, Elementary Matrices, The Macmillan Company, New York, 1946.

DENARDIN, M.L., NASCIMENTO, J.A. e RIERA J.D.

DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE CRÍTICA POR GALOPE

DE ESTRUTURAS COM AMORTECIMENTO ARBITRÁRIO

Sumário

Neste trabalho apresenta-se um método para a determinação da instabilidade aeroelástica por galope em estruturas de barras de forma arbitrária e amortecimento não proporcional que além do estabelecimento da velocidade crítica permite a adequada consideração do amortecimento aero dinâmico negativo na análise dinâmica de estruturas excitadas por desprendimento de vórtices e/ou pela energia de rajadas. Inclui-se uma comparação dos resultados para exemplos simples com os baseados no procedimento energético empregado anteriormente por Novak e outros autores.

DETERMINATION OF THE ONSET WIND VELOCITY DUE TO GALLOPING OF
LINEAR STRUCTURES OF ARBITRARY SHAPE AND NON-PROPORTIONAL DAMPING.

Summary

A procedure for studying the aeroelastic instability due to galloping of linear structures of arbitrary shape and non-proportional damping under wind action is described. In addition to the determination of the onset wind velocity the approach is directed at the correct evaluation of the negative aerodynamic damping in the analysis of structures subjected to vortex shedding and/or turbulent wind forces.

A comparison of results obtained for simple examples with those based on the energetic procedure proposed by Novak "et al" is also given.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 2 6
PP. 311 - 322



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

THE STATIC SIGNIFICANCE OF HUMAN ARM CONFIGURATION

IN MAINTAINING BALANCE

T. E. Shoup
Associate Professor of Mechanical Engineering
University of Houston
Houston, Texas USA

R. Varga
Graduate Student of Mechanical, Industrial &
Aerospace Engineering Department
Rutgers University
New Brunswick, New Jersey USA

L. S. Fletcher
Professor and Chairman of Mechanical Engr.
University of Virginia
Charlottesville, Virginia USA

1. Introduction

Accurate knowledge about the mechanics of human balance is of interest in the field of rehabilitation medicine since such knowledge can lead to better equipment and techniques for the treatment of a wide variety of neurological, muscular, or skeletal disorders. The static equilibrium portion of balance may be treated in terms of the location of the center of gravity for a standing human subject. In this context a standing subject may be considered to be in

equilibrium when the vertical projection of his center of gravity passes through the floor area bounded by his feet and any other supporting members such as a cane, crutch, or walker. As the human subject leans or is subjected to external loads, the location of the center of gravity can move. The task of maintaining equilibrium is the process whereby the subject adjusts his configuration to keep the center of gravity projection within the support area. The adjusting process may be accomplished by a variety of means including a change in the static configuration of the head, upper body, and arms or by repositioning the feet to enlarge the support area. Regardless of what means are utilized, each adjusting technique has its physical limitations. Inasmuch as the use (or lack of use) of the arms can be a significant factor in balance compensation, it is the objective of this paper to present an analytical derivation of the center of mass locus provided by the normal configurations of one or two arms. This analytical model is applied to anthropometric data for a 50 percentile male subject and the significant conclusions provided by the analytical results will be discussed.

2. Background

The neurological basis for maintaining balance may be viewed as a feedback control system having multiple feedback paths. The physiological basis for the standing process has been well documented in the physiology literature (Mountcastle [6]). The vertical orientation of a standing body is maintained by the interplay of a group of muscle reflexes in the body segments (Hellebrandt & Franseen [4]). The sensations that regulate postural tone are automatic. The mind is seldom conscious of the postural compensation process. It has been demonstrated (Wiggers [9]) that the reflex circuits for postural tone are well protected since the system has multiple reflex paths. A deficiency in one reflex circuit may be compensated for with those remaining; however, a deficiency in more than one postural reflex usually abolishes normal stance. The ability to maintain equilibrium while standing erect is accepted as a clinical procedure in testing for the integrity of the nervous system.

Since the location of the center of gravity is of prime importance to the process of human balance, it is not surprising that this topic has received considerable attention in the rehabilitation literature. Brown [1] has studied the correlation between body type and static posture. Murray and Peterson [7] have studied the weight distribution between the feet during normal standing. Cureton and Wickens [2] have discussed the relationship between center of gravity location and physical fitness. Skoagland [8] has discussed the phenomenon of postural sway and its relationship to the position of the feet.

Several investigators have undertaken the mathematical modeling of the human body as a structure. Huston and Passerello [5] have developed a practical mathematical model of the human body in terms of simple geometric shapes. The parts of the body are assumed to be connected by hinges and ball and socket joints. Hanavan [3] has used a model similar to the one provided by Huston and Passerello [5],

although this model is presented in the form of a computer program capable of calculating the center of gravity and mass moment of inertia for various configurations of the human form. Hanavans model is personalized since it is based on anthropometric measurements.

3. Analysis

The human model to be considered in this analysis is shown in Figure 1. The assumptions are as follows:

1. The mass of each of the two arms is equal.
2. The human body is symmetrical in shape (from left to right) and the two arms are of equal physical dimensions.
3. The arms do not bend at the elbow.
4. The shoulder joints can be modeled as ideal ball and socket joints.
5. The center of mass of the body (exclusive of the arms) remains fixed in space.

An additional assumption is employed for the one-arm case:

6. The inactive arm hangs in a vertical position.

With these assumptions in mind, simplified models may be derived.

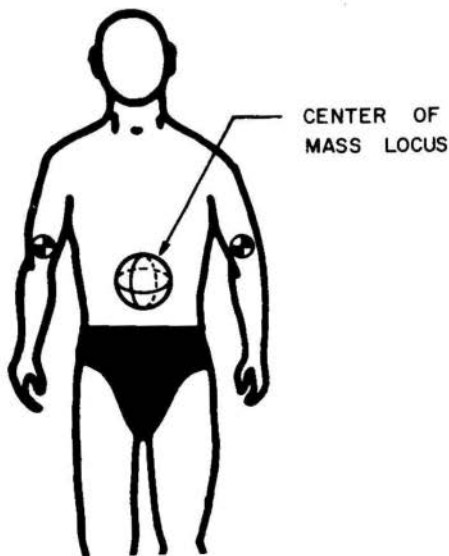


Figure 1 The standing subject with moveable arms.

The Mass Locus Provided by Two Arms

If the standing subject pictured in Figure 1 is permitted to move only his arms, the location of the overall center of mass of his body will be determined from the contribution of the two moving arms and from the fixed contribution of the remaining portion of his body. As the arms move to all possible positions, the locus of all corresponding mass centers will occupy a bounded volume in space. This mass center locus will now be described analytically in terms of its position in space and in terms of its boundaries. The simplified model for this case is shown in Figure 2. Here a three-dimensional coordinate system has been drawn with its origin at the mass center for the armless body. This coordinate system has its vertical axis aligned with the vertical axis of the body, and the y axis is parallel to a line through the shoulders. The total mass of the body will be denoted as "M" and the mass of each arm will be denoted as "m". The mass center of the left arm will be the point (x_1, y_1, z_1) and the mass center of the right arm will be the point (x_2, y_2, z_2) . The left shoulder will be at the point (c, b, a) and the right shoulder will be at $(c, -b, a)$. Since the shoulder joint is assumed to act as a ball and socket joint, the arm masses will be on spheres of radius R having their centers at the shoulders. These spheres will be:

$$(x_1 - c)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - a)^2 = R^2 \quad (1)$$

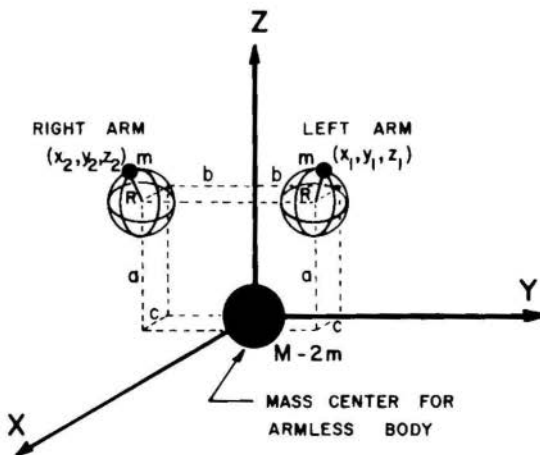


Figure 2 An analytical model of the standing body with two moveable arms.

for the left arm, and

$$(x_2 - c)^2 + (y_2 + b)^2 + (z_2 - a)^2 = R^2 \quad (2)$$

for the right arm. The coordinates of the center of mass for the total body $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ can be determined from the application of the general formula:

$$\bar{u} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^k (u_i m_i)$$

For the model shown in Figure 2, the coordinates will be:

$$\bar{x} = \frac{m}{M}(x_1 + x_2) \quad (3)$$

$$\bar{y} = \frac{m}{M}(y_1 + y_2) \quad \text{and} \quad (4)$$

$$\bar{z} = \frac{m}{M}(z_1 + z_2). \quad (5)$$

For purposes of simplification, the ratio "m/M" will be denoted as "d".

Equation (1) can be rewritten as:

$$(d(x_1 + c) - 2cd)^2 + (d(y_1 - b))^2 + (d(z_1 + a) - 2ad)^2 = R^2 d^2 \quad (6)$$

Equations (3), (4) and (5) can be used to find expressions for x_2 , y_2 and z_2 in terms of \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , x_1 , y_1 , and z_1 . These are:

$$x_2 = \frac{\bar{x}}{d} - x_1 \quad (7)$$

$$y_2 = \frac{\bar{y}}{d} - y_1, \quad \text{and} \quad (8)$$

$$z_2 = \frac{\bar{z}}{d} - z_1. \quad (9)$$

Substituting these into equation (2) gives:

$$(\bar{x} - d(x_1 + c))^2 + (\bar{y} - d(y_1 - b))^2 + (\bar{z} - d(z_1 + a))^2 = R^2 d^2 \quad (10)$$

This expression indicates that the coordinates of the center of mass will be on a sphere of radius "Rd". The center of this sphere will be at the point:

$$(d(x_1 + c), d(y_1 - b), d(z_1 + a)).$$

Equation (6) indicates that the locus of all of these sphere centers is another sphere with radius "Rd" and center at the point:

$$(2cd, 0, 2ad).$$

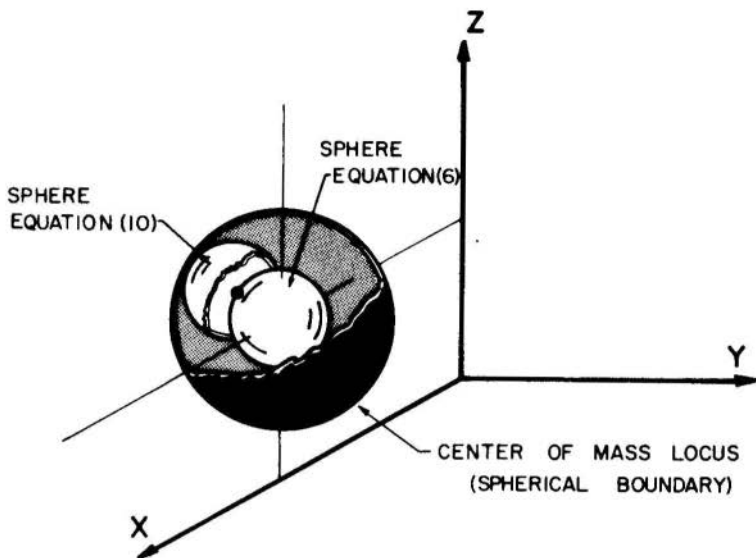


Figure 3 The mass center locus provided by two moving arms.

The geometry of this situation is illustrated in Figure 3. If one considers the locus of all points on a sphere (10) as its center moves on another sphere (6) it becomes obvious that the mass locus is bounded by a third sphere having radius "2Rd" and center at the point:

$$(2cd, 0, 2ad).$$

Since the radii of sphere (10 and 6) are the same, every point inside the outer spherical boundary is an achievable mass center. It should be noted that both the boundary center and boundary radius are dependent on the ratio $d = m/M$.

The Mass Locus Provided by One Arm

If the standing subject pictured in Figure 1 is permitted to move only one of his arms, the location of the overall center of mass of his body will be determined from the contribution of the movable arm and from the fixed contribution of the remaining portions of his body. As the single arm moves to all possible positions, the locus of all corresponding mass centers will occupy a surface in space rather than a bounded volume. It is the purpose of this section to describe analytically the mass center locus in terms of its shape and position in space. For this situation, the simplified model shown in Figure 4 will be used. Here a three-dimensional coordinate system has been drawn with its origin at the mass center for the armless

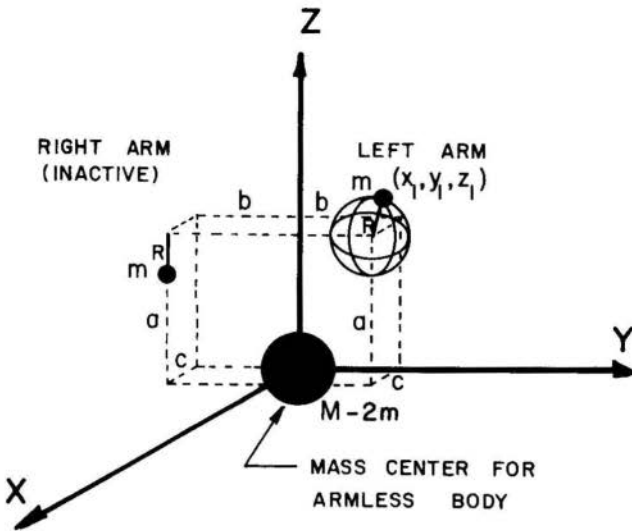


Figure 4 An analytical model of the standing body with one moveable arm.

body. As before, this coordinate system has its vertical axis aligned with the vertical axis of the body, and the y axis is parallel to a line through the shoulders.

The mass center of the moving left arm will be the point (x_1, y_1, z_1) and the mass center of the right arm will be at the fixed point $(c, -b, a-R)$. The left shoulder will be at the point (c, b, a) . Since the shoulder joint is assumed to act as a ball and socket joint, the left arm mass center will move on a sphere of radius R of the form:

$$(x_1 - c)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - a)^2 = R^2 \quad (11)$$

The coordinates of the center of mass for the total body $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ can be found using the expressions:

$$\bar{x} = d(x_1 + c) \quad (12)$$

$$\bar{y} = d(y_1 - b) \quad (13)$$

$$\bar{z} = d(z_1 + a - R) \quad (14)$$

If the coordinates (x_1, y_1, z_1) are written in terms of the $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ values by using equations (12), (13) and (14) they may be substituted into equation (11) to give:

$$(\bar{x} - 2cd)^2 + (\bar{y})^2 + (\bar{z} - 2ad + Rd)^2 = R^2d^2 \quad (15)$$

This expression indicates that the center of mass locus is a spherical surface with center at:

$$(2cd, 0, 2ad - Rd)$$

and a radius of Rd . Unlike the situation for two arms, here only points on the surface of the mass locus sphere are achievable mass centers. It should again be noted that both the sphere radius and sphere center are dependent on the ratio $d = m/M$.

Even though this formulation has been based on the movement of the left arm, the overall CG locus result would be the same if the roles of the two arms were reversed.

4. Discussion

Although the three-dimensional axis system used in the foregoing derivations was ideal for demonstrating the shape of the body CG locus, it is not well suited for clinical practice owing to the fact that all measurements must be made from an origin located somewhere within the body. Thus a new, external coordinate system will be defined for convenience. The new system is illustrated in Figure 5, and has its Y-Z plane as the plane of the human back. The X-Z plane corresponds to the plane of symmetry for the standing body, and the Z-coordinates are measured downward

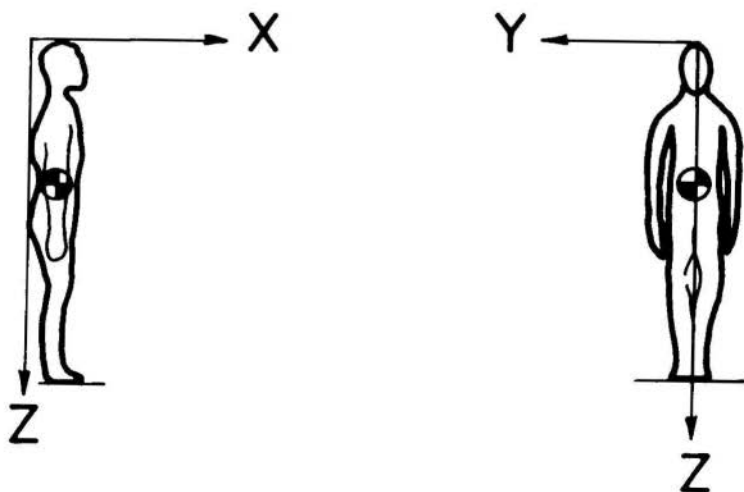


Figure 5 The external coordinate system.

from the top of the head. This new coordinate system is similar to the one utilized by Hanavan (1964) and allows Hanavan's computer method to be used as an independent check on the validity of the previous mathematical development.

Since the vertical projection of the center of gravity is the information of importance in balance, the top view of the center of mass locus is of most interest in this investigation. The maximum horizontal location of the center of mass locus will define a boundary indicating the limits of the compensation ability of the arms. Clearly, the maximum horizontal contribution of two arms will exist when the arms remain parallel and move in a horizontal plane at the shoulders. The maximum horizontal contribution of one arm will exist when that arm moves in a horizontal plane at the shoulders. Utilizing anthropometric data for the 50 percentile male (Hanavan [3]) and the computer technique of Hanavan, the top view of the human center of mass locus has been generated for the one and two arm cases. This information is presented in Figure 6. Just as the theory predicts, the locus boundary in each case is a sphere, the top view of which is a circle. The radius of the boundary is 3.15 cm for the "two arm" case and 1.57 cm for the "one arm" case. Since the radius of the "two arm" locus is twice that of the one arm locus, the balance compensation area is reduced by a factor of four whenever one of the arms is inactive.

In a rehabilitation situation it may be desirable to modify the balance compensation ability of the arms. Such

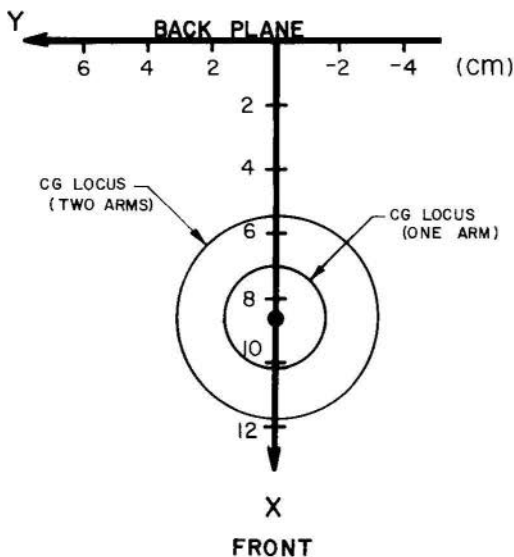


Figure 6 The top view of the mass center locus for the 50 percentile male subject.

modification might take the form of a movement in space of the location of the mass locus sphere or it might take the form of a change in diameter of the mass locus sphere. The previous analytical models for one and two arm compensation illustrate how the parameter "R" contributes to the size of the sphere and how the parameter "d" contributes to both the size and location of the sphere. Thus, additional arm compensation could be achieved by attaching additional masses to the arms to provide an increase of both "d" and "R". The application of this principle is illustrated by the tightrope walker who uses a long pole to assist in the balance process. A creative adaptation of this scheme could prove useful in rehabilitation therapy.

5. Conclusions

The mass center locus for the human body has been demonstrated to be a spherically bounded volume when two arms are being used to compensate for a change in balance. The mass center locus of the human body with one arm immobilized has been shown to be a spherical surface in space. The dimensional size of the "two arm" boundary has been demonstrated to be twice the size of the boundary for the "one arm" case. Anthropomorphic data has been applied to the computer model of Hanavan to illustrate the top view of the center of mass locus for the two cases considered.

Although it is beyond the scope of this investigation, this study suggests the need for further investigation of the static significance of other body segments in maintaining balance. In addition, future studies of the combined static and dynamic "D'Alembert" contributions to human balance would prove useful.

6. Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the financial assistance of the Charles and Johanna Busch Memorial Fund for Biomedical Research. The authors also acknowledge the use of the computational facilities of the Rutgers University Center for Computing and Information Science.

References

- [1] Brown, G. M. (1960) Relationship between Body Types and Static Posture of Young Adult Women. Res. Quart. 31, 405-408.
- [2] Cureton, T. K. and Wickens, J. S. (1935) The Center of Gravity of the Human Body in the Antero-Posterior Plane and its Relation to Posture, Physical Fitness, and Athletic Ability. Res. Quart. 6 (2) supp., 93-105.
- [3] Hanavan, E. P. (1964) A Mathematical Model of the Human Body. AMRL TR 64102 AD608463.
- [4] Hellebrandt, F. A. and Franseen, E. B. (1943) Physiological study of the Vertical Stance of Man. Physiol Rev. 23, 220-255.

- [5] Huston, R. L. and Passerello, C. E. (1971) On the Dynamics of a Human Body Model. J. Biomechanics 4, 23-30.
- [6] Mountcastle, V. B. Medical Physiology Vol II. 12th Edition. C. V. Mosby Co., St. Louis, Mo.
- [7] Murray, M. P. and Peterson, R. M. (1973) Weight Distribution and Weight-Shifting Activity During Normal Standing Posture. Physical Therapy 53 (7), 741-748.
- [8] Skogland, J. E. (1942) A Quantitative Study of Normal and Pathological Station in Human Subjects. Med. Rec. 155, 15-22.
- [9] Wiggers, C. J. (1949) Physiology in Health and Disease 5th Edition. Lea & Febiger Philadelphia, Pa.

SHOUP, T. E., VARGA, R., AND FLETCHER, L. S.

THE STATIC SIGNIFICANCE OF HUMAN ARM CONFIGURATIONIN MAINTAINING BALANCESummary

The importance of the center of mass location to the process of human postural balance is discussed. The mass center locus provided by the repositioning of the human arms is discussed within the context of static stability. An analytical derivation of the center of mass locus provided by the normal configurations of one and/or two arms is presented. Anthropometric data of the 50 percentile male is utilized to illustrate a typical mass center locus. The conclusions provided by the analytical model are discussed with a view toward their significance to rehabilitation physiology.

LA SIGNIFICATION STATIQUE DE LA CONFIGURATION DU BRAS HUMAINDANS LE MAINTIEN DE L'EQUILIBRERESUME

Discussion de l'importance de la situation du centre de la masse dans le maintien de l'équilibre postural humain. La situation du centre de la masse résultant de la remise en position des bras humains est discutée dans le contexte de la stabilité statique. La dérivation analytique du centre de la masse fournie par les configurations normales de l'un ou des deux bras est présentée. La situation générale du centre de la masse est illustrée par des données anthropométriques provenant d'une proportion 50% mâle. Les conclusions dérivées du modèle analytique sont discutées du point de vue de leur signification dans le domaine de la physiologie de réhabilitation.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 27

PP. 323 - 333



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ANÁLISE DE SISTEMAS DE CONTROLE E
RETROAÇÃO EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Edison Castro Prates de Lima, Professor Adjunto.
Programa de Engenharia Civil,
Coordenação dos Programas de Pós Graduação de Engenharia,
Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Rio de Janeiro, Brasil

1. Introdução

O presente trabalho tem por objetivo ilustrar as técnicas e modificações necessárias a serem introduzidas num programa de computador, desenvolvido para a análise dinâmica linear de estruturas, a fim de permitir efetuar análises de sistemas de controle e retroação em estruturas flexíveis. O ponto de vista apresentado consiste em considerar o sistema de controle como um acessório da estrutura e não o contrário. Deste modo as propriedades dos mesmos são

expressas no formato $\underline{M}s^2 + \underline{B}s + \underline{K}$ ($s = d/dt$) da análise dinâmica, sendo as variáveis adicionais (voltagens, posições de válvulas, etc.) consideradas como variáveis extras e reunidas ao vetor dos deslocamentos da estrutura.

2. Definições e Conceitos Fundamentais

Para a finalidade deste trabalho, um "sistema de controle" [1, 2] pode ser considerado como um conjunto de componentes físicos, conectados ou relacionados de maneira a comandar, dirigir ou regular a si mesmos ou a outros sistemas. Um sistema de controle é dito de "malha fechada" quando a ação de controle depende, de algum modo, da saída do mesmo. Entende-se por "retroação" a propriedade do sistema de controle de malha fechada que permite a saída (ou alguma outra variável controlada pelo sistema) ser comparada com a entrada para o sistema (ou para outro componente situado internamente ou subsistema) de modo que a ação apropriada de controle possa ser formada como uma função da saída e da entrada.

A essência da engenharia de sistemas de controle é a consideração de dois problemas: a análise e o projeto. A análise é a investigação das propriedades de um sistema existente. O problema do projeto é a escolha e disposição dos componentes dos sistemas de controle para desempenharem uma tarefa específica.

O presente trabalho restringe-se ao problema da análise. A ilustração das diversas técnicas propostas será feita através do exemplo apresentado na Figura (1), que mostra uma versão, bastante simplificada, de um sistema de controle remoto para um braço mecânico (repetidor). O braço é representado, simplesmente, por uma haste flexível com uma massa concentrada numa extremidade e acionada por um servo-motor na outra. O servo-motor é comandado por um circuito controlador, de tal forma que a sua posição angular θ corresponde sempre a posição angular θ_d de uma referência, situada a distância e existindo apenas conexões elétricas entre ambos.

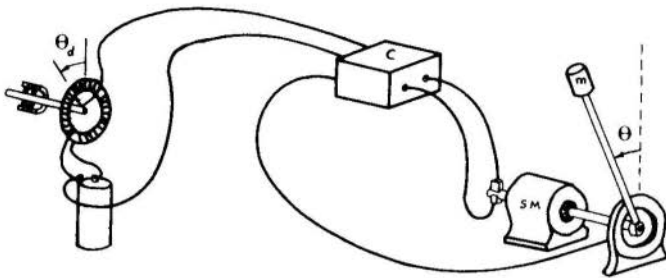


FIGURA 1 - SISTEMA DE CONTROLE DE UM REPETIDOR

As perdas elétricas nos diversos circuitos da Figura 1 são desprezadas, bem como os efeitos da força gravitacional sobre os diversos componentes. Os amplificadores utilizados no circuito controlador são do tipo "amplificador de voltagem", projetados para produzir uma voltagem de saída v proporcional a voltagem de entrada v_e , isto é :

$$v = K v_e \quad (1)$$

O modelo físico, correspondente ao sistema de controle apresentado na Figura 1, ficará, portanto, com o aspecto indicado na Figura 2.

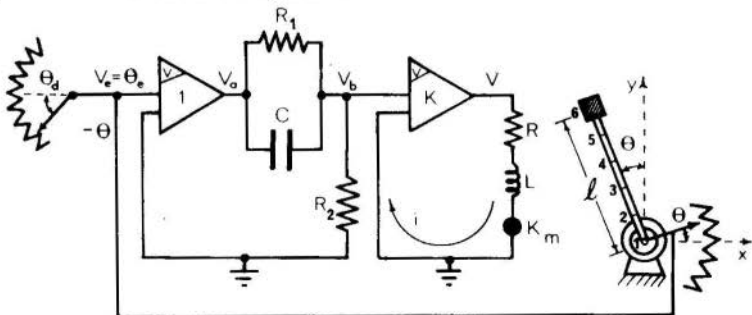


FIGURA 2 - SISTEMA DE CONTROLE - MODELO FÍSICO

No modelo físico do servo-motor (SM) R e L representam a resistência e a indutância dos seus enrolamentos. A constante de proporcionalidade K_m permite estabelecer as relações entre o torque do mesmo e a corrente elétrica e entre a queda de voltagem (força contra-eletromotriz) e a velocidade angular do rotor, isto é:

$$T_m = K_m i \quad \text{e} \quad v_m = K_m \dot{\alpha} \quad (2)$$

Observa-se que K_m será numericamente igual nas duas relações anteriores, caso sejam utilizadas unidades apropriadas, por exemplo, o sistema MKS.

As equações diferenciais do movimento do servo-motor são obtidas, aplicando-se a lei das voltagens de Kirchhof na malha do circuito elétrico e através de uma equação de equilíbrio de momentos para o sistema mecânico, resultando:

$$L \frac{di}{dt} + R i + K_m \dot{\alpha} = v \quad (3)$$

$$K_m i - J \ddot{\alpha} - b \dot{\alpha} = M_m \quad (4)$$

onde J e b representam a inércia e o amortecimento do rotor e M_m é o torque (líquido) fornecido pelo servo-motor.

O ângulo θ , que caracteriza a posição da haste em relação à origem das coordenadas angulares (eixo y na Figura 2), é calculado a partir da relação:

$$\theta = - U_6 / \ell \quad (5)$$

onde U_6 é o deslocamento da extremidade da haste, suposta dividida em 6 elementos, e ℓ é o comprimento da mesma. As escalas dos potenciômetros foram feitas iguais a 1 volt/rad para o potenciômetro da referência e - 1 volt/rad para o potenciômetro do servo-motor.

De acordo com a Figura 2, observa-se que a representação matemática do sistema de controle é obtida adicionan

do-se, ao sistema de equações diferenciais do movimento da estrutura (haste), o conjunto de equações:

$$\frac{1}{R_1} (v_e - v_b) + C(\dot{v}_e - \dot{v}_b) = \frac{1}{R_2} v_b \quad (6)$$

$$L \frac{di}{dt} + R i + K_m \dot{\theta}_1 = v \quad (7)$$

$$v = K v_b \quad (8)$$

$$v_e = \theta_e = \theta_d - \theta \quad (9)$$

onde θ_1 representa a rotação do nó 1 da haste e θ é definido em (5). O torque M_m , produzido pelo motor, é aplicado em θ_1 , ou seja:

$$M_m = K_m i - J \ddot{\theta}_1 - b \dot{\theta}_1 \quad (10)$$

O modelo matemático será formado, portanto, pela adição das relações (6) a (10) nas equações diferenciais do movimento da haste flexível, resultando o sistema de equações expandido:

$$\begin{bmatrix} M_{-nn} & M_{-ne} \\ M_{-en} & M_{-ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{-n} \\ \ddot{U}_{-e} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{-nn} & B_{-ne} \\ B_{-en} & B_{-ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{-n} \\ \dot{U}_{-e} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{-nn} & K_{-ne} \\ K_{-en} & K_{-ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{-n} \\ U_{-e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{-n} \\ P_{-e} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

onde \underline{U}_{-n} é o vetor dos deslocamentos da estrutura. No vetor \underline{U}_{-e} estão reunidas as duas variáveis extras que foram criadas para representar a corrente elétrica i e a voltagem v_b da saída da rede de compensação em avanço da Figura 2, ou seja:

$$U_{e_1} = i \quad e \quad U_{e_2} = v_b \quad (12)$$

Desta forma, (6) a (10) podem ser escritos como:

$$L \dot{U}_{e_1} + R U_{e_1} + K_m \dot{\theta}_1 - K U_{e_2} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -\frac{R_2}{\lambda} U_6 + C R_1 R_2 \dot{U}_{e_2} + (R_1 + R_2) U_{e_2} - \frac{C R_1 R_2}{\lambda} \dot{U}_6 = \\ = R_2 \dot{\theta}_d + C R_1 R_2 \dot{\theta}_d \end{aligned} \quad (14)$$

$$J \ddot{\theta}_1 + b \dot{\theta}_1 - K_m U_{e_1} = -M_m \quad (15)$$

Os dados correspondentes aos primeiros membros de (13) e (14) podem ser fornecidos ao programa de modo sistemático através do formato:

$$(b_0 + b_1 s + b_2 s^2) U_i + \sum_{j=1}^N (a_0 + a_1 s + a_2 s^2) U_j = 0 \quad (16)$$

que representa uma equação diferencial de segunda ordem onde os coeficientes b_0 , b_1 e b_2 são, respectivamente, os termos diagonal das matrizes \underline{K} , \underline{B} e \underline{M} na linha correspondente a U_i e os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 são os termos situados na intercessão da linha correspondente a U_i e da coluna U_j nas mesmas matrizes. Desta forma poderão ser fornecidos os valores numéricos para os elementos das matrizes expandidas da equação (11). O segundo membro de (14) é equivalente a uma carga transiente composta de duas parcelas e aplicada em P_{e_2} .

Observa-se que as equações (13) a (15) provocam a perda de simetria das matrizes em (11). Neste caso, em determinada etapa do cálculo da resposta dinâmica, será necessário resolver um sistema de equações do tipo:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{nn} & \bar{A}_{ne} \\ \bar{A}_{en} & \bar{A}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_n \\ \bar{U}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_n \\ \bar{P}_e \end{Bmatrix} \quad (17)$$

onde os elementos das matrizes \bar{A}_{ne} , \bar{A}_{en} e \bar{A}_{ee} são os responsáveis pela falta de simetria da matriz \bar{A} . A solu-

ção de (17) é obtida, então, efetuando-se o produto matricial indicado:

$$\underline{A}_{nn} \underline{U}_n + \underline{A}_{ne} \underline{U}_e = \underline{\bar{P}}_n \quad (18)$$

$$\underline{A}_{en} \underline{U}_n + \underline{\bar{A}}_{ee} \underline{U}_e = \underline{\bar{P}}_e \quad (19)$$

A seguir, resolvendo-se o sistema de equações (18) em relação a \underline{U}_n , obtém-se:

$$\underline{U}_n = \underline{P}_n - \underline{G}_{ne} \underline{U}_e \quad (20)$$

onde \underline{G}_{ne} e \underline{P}_n são obtidos a partir de:

$$\underline{A}_{nn} \underline{G}_{ne} = \underline{A}_{ne} \quad (21)$$

e

$$\underline{A}_{nn} \underline{P}_n = \underline{\bar{P}}_n \quad (22)$$

Observa-se que a matriz \underline{A}_{nn} é simétrica, podendo ser resolvido, por exemplo, pelo método de eliminação de Gauss para matrizes simétricas. Levando-se (20) em (19), resulta:

$$\underline{A}_{ee} \underline{U}_e = \underline{P}_e \quad (23)$$

onde

$$\underline{A}_{ee} = \underline{\bar{A}}_{ee} - \underline{A}_{en} \underline{G}_{ne} \quad (24)$$

e

$$\underline{P}_e = \underline{\bar{P}}_e - \underline{A}_{en} \underline{P}_n \quad (25)$$

O sistema de equações (23) é resolvido pelo método de eliminação de Gauss para matrizes não-simétricas, devido a falta de simetria da matriz \underline{A}_{ee} . Observa-se que, na maior parte das vezes, o número de graus de liberdade em \underline{U}_n é bastante superior aos de \underline{U}_e . Nestes casos o procedimento adotado torna-se muito eficiente, pelo fato de explorar a simetria da matriz \underline{A}_{nn} .

3. Exemplo Numérico

Voltando-se ao problema da análise do sistema de con-

trole da Figura 2, supõe-se que as características do circuito controlador e do servo-motor são dadas por:

$$R_1 = 5000 , R_2 = 2000 , C = 10^{-5} , K = 2300$$

$$R = 106 , L = 2 , K_m = 31,4325 , b = 2 \text{ e } J = 0,25$$

Para a haste são adotados os seguintes valores para o seu comprimento, área e momento de inércia da seção transversal, módulo de elasticidade e massa concentrada na extremidade da mesma:

$$l = 5. , A = 1. , I = 0,083 , E = 210000. , m = 0,03$$

A resposta dinâmica do sistema de controle (Figura 2) a uma variação súbita de 8° para a variável θ_d , ou seja :

$$\theta_d = 8^\circ , \dot{\theta}_d = 0 \quad (29)$$

foi calculada com o auxílio da linguagem LORANE DINA [4, 5] que é uma linguagem orientada para a análise dinâmica de estruturas. O LORANE DINA emprega o método dos elementos finitos como principal ferramenta de discretização do meio contínuo, permitindo a análise da resposta dinâmica linear de estruturas submetidas à solicitação de caráter determinístico ou aleatório e colocando a disposição do usuário uma série de facilidades tais como, entrada de dados orientada e em formato livre, cálculo de frequências naturais e modos de vibração, condensação de graus de liberdade, a possibilidade de expressar certas propriedades dos sistemas dinâmicos através de funções de transferência, o uso de restrições generalizadas, a representação de partes componentes de uma estrutura pelos seus modos de vibração, etc.

Na análise do presente problema utilizou-se o método de Newmark [3] para a integração do sistema de equações diferenciais. A estrutura, propriamente dita (haste), foi discretizada pelo método dos elementos finitos. As variáveis adicionais (12) (voltagens e correntes) foram declara-

das como variáveis extras e as equações (13) e (14) foram fornecidas ao programa através do comando "Funções de transferência", cujo formato está indicado em (16). Os resultados obtidos estão indicados na Figura 3, que representa a variação do ângulo θ , definido em (5), com o tempo.

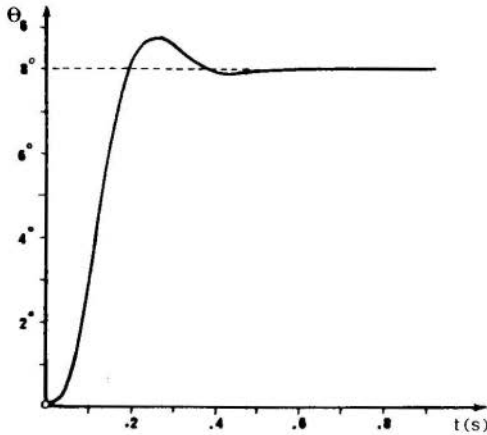


FIGURA 3 - VARIAÇÃO DO ÂNGULO θ COM O TEMPO

4. Conclusões

No trabalho apresentado, procurou-se ilustrar as técnicas e adaptações que devem ser feitas num programa, desenvolvido para análise dinâmica de estruturas, a fim de permitir efetuar análises de sistemas de controle e retroação de estruturas flexíveis. É importante salientar que o exemplo apresentado restringiu-se apenas a análise da resposta no domínio do tempo e não ao projeto, propriamente dito, cujo objetivo é determinar as características mecânicas e elétricas do mesmo, a fim de satisfazer as "especificações de desempenho", que reúnem as propriedades desejadas para o sistema, em termos da velocidade da resposta, estabilidade relativa e erro permissível.

Estas técnicas encontram-se incorporadas à linguagem LORANE DINA, que foi utilizada para obtenção dos resultados numéricos do presente trabalho.

Bibliografia

- [1] Distefano, J.J., Stubberud, A.R. and Williams, I. J., Theory and Problems of Feedback Control Systems. McGraw-Hill, Inc. (1964).
- [2] Cannon, R.H. Jr., Dynamics of Physical Systems . McGraw-Hill, Inc. (1967).
- [3] NEWMARK, N.M., A Method of Computation for Structural Dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of the ASCE EM 3, (1959).
- [4] PRATES DE LIMA, E.C., LORANE DINA: Uma Linguagem Orientada à Análise Dinâmica de Estruturas. Tese D.Sc. COPPE/UFRJ (1977).
- [5] PRATES DE LIMA, E.C., FERRANTE, A.J., Facilidades para Análise Dinâmica do Sistema LORANE. III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ (1975).

PRATES DE LIMA, E.C.

ANÁLISE DE SISTEMAS DE CONTROLE ERETROAÇÃO EM ESTRUTURAS FLEXÍVEISSumário

O objetivo do trabalho é ilustrar as técnicas e modificações necessárias a serem introduzidas num programa de computador, desenvolvido para a análise dinâmica linear de estruturas, a fim de permitir efetuar análises de sistemas de controle e retroação em estruturas flexíveis. O ponto de vista apresentado consiste em considerar o sistema de controle como um acessório da estrutura e não o contrário. Desse modo as propriedades dos mesmos são expressas no formato $Ms^2 + Bs + K$ ($s = d/dt$), sendo as variáveis adicionais (voltagens, posições de válvulas, etc.) consideradas como variáveis extras e reunidas ao vetor de deslocamentos da estrutura. Para a obtenção dos resultados numéricos utilizou-se a Linguagem Orientada LORANE DINA.

SummaryFEEDBACK AND CONTROL ANALYSIS OFFLEXIBLE STRUCTURES

The purpose of this paper is to present the techniques and modifications to be made in a dynamic analysis computer for the control analysis of flexible structures.

The general viewpoint is taken that the control system is an adjunct of the structure, rather than vice-versa. Thus, the properties of the control system are expressed in the quadratic format $Ms^2 + Bs + K$ ($s = d/dt$) of dynamic structural analysis. The additional variables (voltages, voltage positions, etc.) are assigned degrees of freedom, that are called extra points, and merged with the degrees of freedom at structural gridpoints. For the numerical results was used the Problem Oriented Language LORANE DINA.

A U A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. TA - 1

PP. 335 - 342



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ALGUNS RESULTADOS SOBRE A PROPAGAÇÃO

DE TRINCAS DE FADIÇA, EM FLEXÃO PLANA

Edison da ROSA
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis, Brasil

Jamir Lemes SANTANA
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis, Brasil

1. Introdução

O aspecto da fadiga de metais é um campo onde muita pesquisa já foi feita, mas ainda exige um certo grau de empirismo na resolução de problemas práticos. Com o surgimento da mecânica da fratura, passou-se a dar mais atenção a

certos aspectos até então relegados quase que totalmente. É o caso da trinca de fadiga, em termos da nucleação e da sua propagação. O objetivo do trabalho é aplicar a mecânica da fratura a um dado material e levantar os dados de propagação da trinca. Foram ensaiados vários corpos de prova em cada nível de forma a obter-se alguma informação da dispersão.

2. Mecânica da fratura e propagação de trincas

Na mecânica da fratura linear, um modo de definir o estado de tensões no extremo de uma trinca solicitada, é o fator de intensidade de tensões, que de uma forma geral é dado por

$$K_{\sigma} = Y \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (1)$$

onde Y - fator geométrico

σ_0 - tensão nominal

a - dimensão característica da fissura

Para os objetivos deste trabalho, há mais interesse no fator de intensidade de deformações, dado por

$$K_{\epsilon} = Y \epsilon_0 \sqrt{\pi a} \quad (2)$$

Em solicitações dinâmicas, o modo usual de falha é por fadiga do material. Se o corpo contiver alguma trinca inicial, a totalidade da vida de fadiga será usada para a propagação. No caso de um material isento de defeitos, boa parte da vida é usada na nucleação da trinca e após então, no crescimento.

A velocidade de propagação da trinca é correlacionada com a faixa de variação do fator de intensidade de tensões, ΔK_{σ} , sendo a função normalmente da forma

$$\dot{a} = C \Delta K_{\sigma}^m \quad (3)$$

com C e m constantes determinadas experimentalmente.

Neste estudo, o teste é feito com um nível de deformação constante ao longo do ensaio, sendo interessante usar K_{ϵ} e não K_{σ} . Isto também se baseia no fato de que K_{σ} se a-

plica para um comportamento elástico do material, o que não ocorre na maioria dos testes efetuados, onde foram permitidas deformações plásticas apreciáveis.

3. Plano dos ensaios

Para ensaiar os corpos de prova sob deformação constante, foi adaptada uma máquina de ensaio de fadiga em flexão plana, pela substituição da mola dinamométrica por um elemento rígido. Desta forma o deslocamento do excêntrico produz uma deformação angular entre os extremos do corpo de prova, constante ao longo de todo o ensaio, independente das características de encruamento cíclico do material.

Foram programados quatro grupos de teste, com nove corpos de prova cada. Estas séries foram ensaiadas para quatro valores diferentes de deformação. A deformação que atua na zona central do corpo de prova foi determinada experimentalmente através de strain-gauges de 3 mm de comprimento ativo, após dez ciclos de carga, de forma a haver uma resposta essencialmente constante. A tabela abaixo resume os dados, onde h é a espessura da chapa

Série	1	2	3	4
h mm	2,5	2,3	2,4	2,5
$\Delta\epsilon \cdot 10^3$	2,4	4,4	6,9	9,6

4. Material e equipamento

O material usado nos testes foi um aço carbono, do tipo SAE 1020, normalizado a 900°C durante dez minutos. Para fornecer um ponto de início da trinca os corpos de prova foram furados no centro, de modo que a trinca se propague a partir do furo.

A dimensão da trinca foi obtida por observação direta através de uma lupa de 24x de aumento, dotada de uma escala calibrada. Desta forma, o tamanho da trinca usado na obtenção dos dados é o tamanho superficial. Como critério de falha, foi adotado o de que ao menos um dos ramos da trinca tenha atingido a superfície lateral. A máquina de ensaio usada foi uma Shenck modelo PWO.

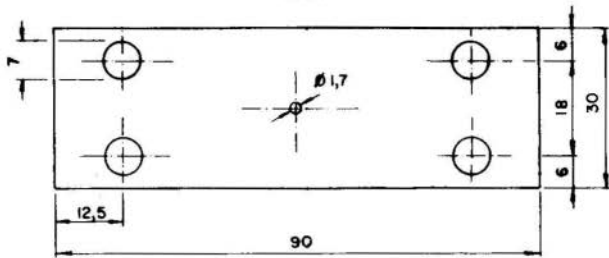


Fig. 1 - Corpo de prova utilizado nos ensaios.

As principais propriedades mecânicas do material usado, no estado normalizado, são:

Tensão de ruptura	330 MPa
Tensão de escoamento	251 MPa
Dureza	52 HRB

5. Resultados

As curvas de crescimento da trinca, ao longo da vida, estão na fig. 2. Os dados foram sintetizados em termos da média e do desvio padrão, sendo representada a curva média e as curvas que definem o intervalo de mais ou menos um desvio padrão.

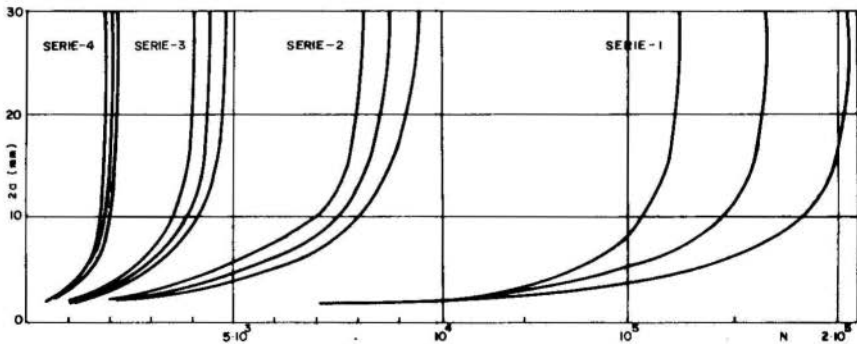


Fig. 2 - Curvas de crescimento da trinca.

Os resultados finais devem ser expressos em termos de $a = f(\Delta K_E)$ e assim é necessário calcular K_E para vários tamanhos da trinca. O fator geométrico é o único parâmetro da

equação (2) que necessita ser obtido. O método usado na sua determinação foi a superposição de duas soluções que existem. A geometria pertinente ao problema está definida na figura 3.

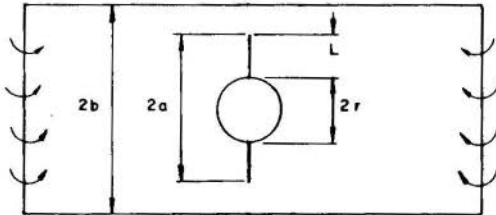


Fig. 3 - Geometria da trinca de fadiga.

Para o caso de uma placa infinita sob flexão, Roberts e Rich [7] apresentaram os valores de Y para uma trinca em ando de um orifício circular, em função de L/r . Para $\nu = 1/3$, uma aproximação razoável é dada por

$$Y_b = 1,369(L/r)^{-0,119} \quad (4)$$

Por outro lado, uma trinca em uma placa de largura finita, sob tração, o efeito do contorno é dado por

$$Y_t = \left[\frac{2}{\pi \lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi \lambda}{2} \right]^{1/2} \quad (5)$$

onde $\lambda = a/b$.

O fator geométrico para uma placa finita sob flexão foi considerado como sendo, numa boa aproximação, o produto

$$Y = Y_b Y_t \quad (6)$$

Com esta expressão de Y , então ΔK_ϵ foi calculado por

$$\Delta K_\epsilon = Y \Delta \epsilon \sqrt{\pi a} \quad (7)$$

e trabalhando com as curvas dada pela figura, os dados referentes à função (2) foram obtidos. A figura 4 mostra os resultados dos testes, em termos de \dot{a} e de $\Delta K_\epsilon \cdot E$.

A função de \dot{a} na forma (3) se justifica plenamente, pois os coeficientes ajustados para as linhas médias, bem

como o coeficiente de correlação r^2 , são

Série	1	2	3	4
$C \cdot 10^{12}$	1,88	216	154	0,0135
m	4,285	3,382	3,307	4,934
r^2	0,9971	0,9939	0,9919	0,9967

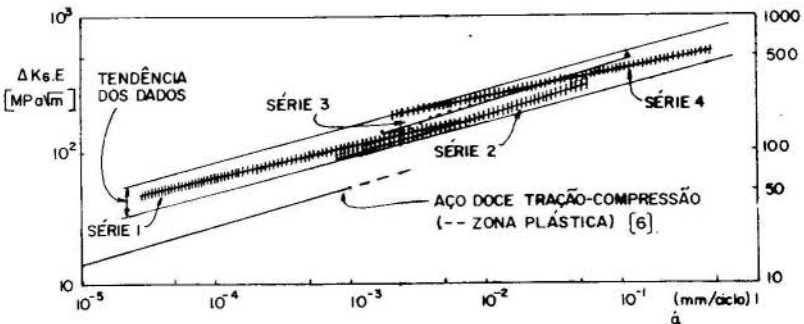


Fig. 4 - Velocidade de crescimento da trinca função do K_E .

6. Conclusões

Os resultados atualmente disponíveis fornecem uma indicação de que o conceito do fator de intensidade de tensões pode ser generalizado para deformações e aplicado mesmo no caso de que o corpo de prova tenha se deformado plasticamente. Tal se baseia no fato de que a velocidade de propagação da trinca se correlaciona bem com ΔK_G apenas quando a zona deformada plasticamente está restrita às proximidades do extremo da fissura. Como houve uma ótima correlação, de \dot{a} com ΔK_E , o conceito do fator de intensidade de deformações parece ser adequado mesmo para altos níveis de deformação plástica.

Uma possível justificativa deste efeito é de que a distribuição de deformações não é substancialmente alterada com o escoamento. Já a distribuição de tensões fica completamente desfigurada tornando sem efeito o conceito de intensidade de tensões.

De forma a obter mais informações, é conveniente estender a solicitação mais para dentro do regime elástico,

de modo a verificar se existe alguma transição no comportamento de $\dot{\epsilon}$, ao passar do regime elástico para o regime plástico. Com os dados disponíveis esta transição parece não ocorrer, já que a série 1 foi solicitada elasticamente e as 3 séries restantes, plasticamente.

Bibliografia

- [1] Burdekin, F.M., Stone, D.E.W., The crack opening displacements approach to fracture mechanics in yielding material. *Journal of Strain Analysis*, Vol. 1, N° 2, 1966, pp. 145-153.
- [2] Clark, W.G.Jr., Fracture mechanics in fatigue. *Experimental Mechanics*, September, 1971, p. 421-28
- [3] Knott, J.F., Fundamental of fracture mechanics. John Wiley & Sons, 1973
- [4] Nelson, D.V., Review of fatigue-crack-growth prediction methods, *Experimental Mechanics*, February 1977, pp. 41-49.
- [5] Paris, P.C., Erdogan, F., A critical analysis of crack-propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, December 1963, pp. 528-534.
- [6] Pook, L.P., Analysis and application of fatigue crack growth data. *Journal of Strain Analysis*. Vol. 10, N° 4, pp. 242-250.
- [7] Roberts, R., Rich, T., Stress-intensity factor for plate bending. *Journal of Applied Mechanics* September, 1967, pp. 777-779.
- [8] Sih, G.C., Ed., Methods of analysis and solutions of crack problems. Noordhoff Publishing, 1973.
- [9] Sih, G.C., Van Elst, H.C., Broek, D., Ed., Prospects of fracture mechanics. Noordhoff Publishing, 1974
- [10] Sneddon, I.N., Lowengrub, M., Crack problems in the classical theory of elasticity, John Wiley & Sons, 1969.

ROSA, E.da e SANTANA, J.L.

ALGUNS RESULTADOS SOBRE A PROPAGAÇÃO
DE TRINCAS DE FADIGA, EM FLEXÃO PLANA

Sumário

Foram obtidos experimentalmente curvas de crescimento da fissura de fadiga, em aço SAE 1020 normalizado, para quatro níveis de sollicitação, em termos de deformação. A curva da velocidade de propagação da trinca função do fator de intensidade de deformações parece indicar ser este um parâmetro adequado para analisar o comportamento do material. Isto se aplica mesmo quando a deformação plástica é predominante, ao contrário do fator de intensidade de tensões, que é válido apenas para um meio elástico.

SOME RESULTS ABOUT THE FATIGUE CRACK PROPAGATION,
UNDER PLANE BENDING

Summary

Curves of the crack propagation was obtained from tests of a carbon steel, type SAE 1020, normalized, for four strain levels of deformation. The crack propagation rate curve, as a function of the strain intensity factor, give some indication that this factor is a valid parameter for the analysis of the material behaviour under cyclic loading. This is true also if the strain is essentially plastic, opposite to the stress intensity factor, which is valid only if the continuum is elastic.

ANAS

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. TA - 2
PP. 343 - 347



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES NA EXTREMIDADE DE
CILINDROS OCOS MONTADOS COM INTERFERÊNCIA

José C. BALTHAZAR, Prof. Colaborador
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de Brasília
Brasília - Brasil

1. Introdução

Na montagem de dois cilindros com interferência há uma concentração de tensões nas extremidades. A teoria de Lamé [6] possibilita o cálculo da distribuição de tensões em cilindros sob pressão interna, supõe o cilindro de comprimento infinito, o que a torna utilizável na prática somente para regiões afastadas das extremidades.

Neste trabalho foi determinado um "Fator de Concentração de Tensões", que multiplicado pelo valor da tensão nominal de

Lamé dará o valor da tensão máxima no cilindro externo.

VILCHEZ [1] determinou a distribuição de tensões na região próxima das extremidades do modelo, para uma relação de diâmetros igual a 2,64 e diferentes posições do cilindro interno. Utilizando a mesma técnica experimental, determinou-se a distribuição de tensões para outras relações de diâmetros.

O modelo estudado foi um cilindro oco, feito de material fotoelástico. Este material possui a propriedade de poder congelar as tensões, quando carregado acima da temperatura crítica [2] [3].

O material fotoelástico utilizado, bem como o método de preparação, é o indicado por GOMIDE [4] sob a formulação CY-205-21PA-25MA.

A pressão interna foi provocada pela interferência obtida pela diferença entre os diâmetros do furo e do cilindro interno, sendo este introduzido até uma distância Z_0 da extremidade do cilindro externo. Esta montagem provoca o aparecimento de uma concentração de tensões no cilindro oco próximo a posição Z_0 , enquanto que em pontos mais afastados das extremidades, as tensões tendem para os valores previstos pela teoria de Lamé. A figura 1 mostra a disposição dos cilindros e a região de estudo.

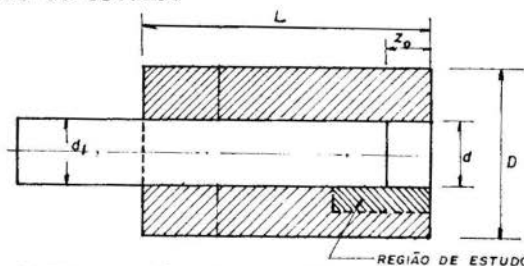


FIG. 1 DISPOSIÇÃO DOS CILINDROS E REGIÃO DE ESTUDO.

Foi usado o método da diferença das tensões cisalhantes [2], [3] [5] para determinação do estado de tensões.

Para se ter parâmetros adimensionais, os valores das tensões foram divididos pela pressão interna P , provocada pela interferência.

2. Resultados Experimentais

Foram analisadas as relações de diâmetros $D/d = 1,7$, $D/d = 2$ e $D/d = 3$ e em cada uma delas diversas posições do cilindro interno. Para cada um destes casos, foram levantadas as curvas de tensões no contorno interno, do cilindro externo, onde ocorrem máximas tensões. A partir destas curvas foram obtidas as tensões máximas e a concentração de tensões em cada modelo.

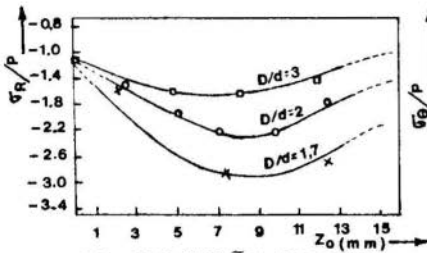


FIG. 2 - MAX. TENSÕES RADIAIS.

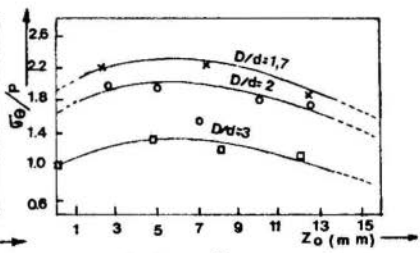


FIG. 3 - MAX. TENSÕES TANGENCIAIS.

Os fatores de concentração de tensão são definidos como sendo a relação entre as máximas tensões que ocorrem no modelo e as tensões nominais obtidas pela teoria de Lamé [7]

Portanto:

$$\alpha_R = \frac{\sigma_{R \max}}{\sigma_{R \text{ nom}}} \quad (1)$$

$$\alpha_\theta = \frac{\sigma_{\theta \max}}{\sigma_{\theta \text{ nom}}} \quad (2)$$

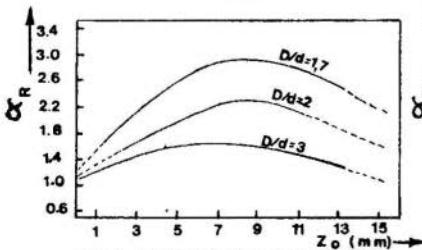


FIG. 4 - FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES RADIAIS.

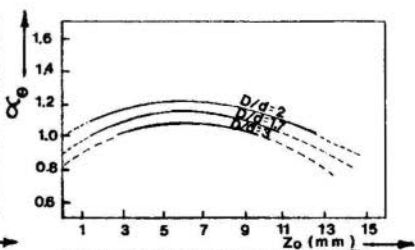


FIG. 5 - FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES TANGENCIAIS.

3. Conclusões

A análise dos resultados encontrados para os casos estudados, permitem fazer algumas observações.

Os valores do fator de concentração de tensões radiais α_R crescem inversamente à relação de diâmetros, e pode-se supor que para relações D/d muito grandes (tubo de paredes' muito grossas) α_R tende para valores próximos de 1.

Os valores de α_R crescem com a distancia Z_0 em que foi efetuado o carregamento, atingindo um valor máximo, para de pois diminuírem até, provavelmente, estabilizarem-se.

Os valores de α_R e α_θ tendem para 1 na região próxima a extremidade do cilindro externo, isto é, para a distancia ' Z_0 se aproximando de zero.

Os valores de α_θ são mais baixos que α_R

O fator de concentração de tensões tangenciais α_θ passa por valores máximos entre $D/d = 3$ e $D/d = 1,7$. Isto ocorre devido ao comportamento não linear da tensão tangencial' nominal, dada pela equação de Lamé.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - VILCHEZ, C.M.M., "Distribuição de Tensões próximo das extremidades de dois cilindros montados com interferência", Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1972.
- [2] - DALLY, J.W., RILEY, W.P., "Experimental Stress Analysis", McGraw-Hill, 1965.
- [3] - FROCHT, M.M., "Photoelasticity", Vol. I, II, John Wiley & Sons, Inc, 1965.
- [4] - GOMIDE, H.A., "Desenvolvimento de um material para fotoelasticidade tri-dimonsional", Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1972.
- [5] - KUSKE, A., ROBERTSON, C., "Photoelastic Stress Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- [6] - TIMOSHENKO, S.P., GOODIER N.N., "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1970.
- [7] - JUVINALL, R.C., "Stress, Strain, and Strength" McGraw-Hill, 1967.
- [8] - BALTHAZAR, J.C., "Estudo da Concentração de Tensões na extremidade de cilindros ocos montados com interferência usando Fotoelasticidade Tri-dimensional", Tese de mestrado, PUC/RJ, 1975.

BALTHAZAR, J. C.

CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES NA EXTREMIDADE DECILINDROS OCOS MONTADOS COM INTERFERÊNCIASumário

A concentração de tensões nas extremidades de cilindros montados em interferência é muito pouco conhecida. Neste trabalho estudou-se a concentração de tensões na extremidade do cilindro oco. Foram analisadas várias relações de diâmetros e diferentes posições do cilindro interno, utilizando o método fotoelástico tri-dimensional. Os modelos foram construídos usando resina epoxi e anidridos ftálico e maleico como endurecedores. Após o congelamento das tensões retirou-se fatias para análise no polariscópio. Para o cálculo das tensões foi usado o método da diferença das tensões cizalhantes.

STRESS CONCENTRATION AT END OF THICKWALLCYLINDERS WITH INTERFERENCE ASSEMBLAGE

The stress concentration at end of thickwall cylinders with interference assemblage is unknown yet. In present work the stress concentration has been analysed for several diametral relations and different positions of inner cylinder. The photoelastic method has been used, the models were constructed with epoxy resin using phthalic and maleic anhydride as curing agent. After stress freezing procedure the model was sliced to polariscope analysis. For stress calculations the shear difference method was used.

ANAS

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. TA - 3
PP. 349 - 354



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ALÍVIO DE TENSÕES EM PLACAS COM ENTALHES

EM U, SUBMETIDAS À TRAÇÃO SIMPLES E FLEXÃO PURA

Perrin SMITH NETO, Professor Adjunto.
Departamento de Engenharia Mecânica.
Fundação Universidade de Uberlândia,
Uberlândia - Minas Gerais

Odilson Coimbra FERNANDES, Prof. Assist. Doutor
Departamento de Engenharia Mecânica.
Escola de Engenharia de São Carlos - USP,
São Carlos - São Paulo

1 - Introdução

Há diversas causas que caracterizam a problemática de falhas mecânicas destacando-se, como de grande significado a concentração de tensões, a qual é, geralmente, um fenômeno superficial. Testando um modelo de projeto proposto, a fotoelasticidade dará as tensões superficiais e elas podem

auxiliar nas evidências de como a superfície poderá ser alterada para dar uma distribuição de tensões mais uniforme e adequada.

Devido a grande importância de se obter os fatores de concentração de tensões com entalhes de placas, mediu-se neste trabalho, os fatores de concentração de tensões, para entalhes em U, com carregamentos de tração simples e flexão pura aplicados separadamente a placas como a da figura 1. Na figura, D é a maior largura das placas; d a menor largura das placas, ou largura das placas na seção de entalhe intermediário e r o raio do entalhe intermediário. FURROS $\varnothing 1/4"$

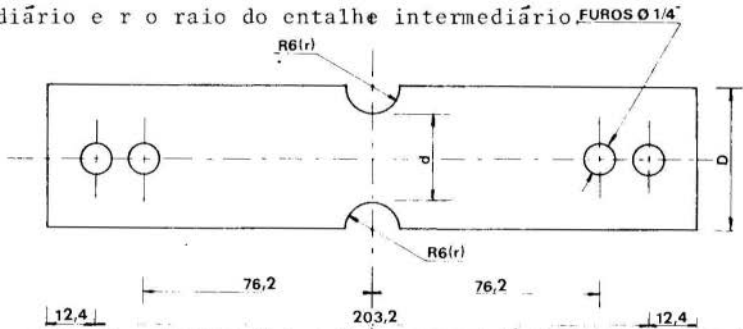


Fig. 1 - Placas P-1 a P-4, com um único entalhe em U sendo variável, entre elas a dimensão d .

Para a obtenção do alívio de tensões foram considerados os trabalhos de Durelli, Lake e Phillips [5] que demonstraram a importância de entalhes adjacentes na diminuição do fator de concentração de tensões (K_t) e os trabalhos de Frotcht [1] onde $r' = 2r$ obtido às custas de uma diminuição de d ($d' < d$) produzindo uma elevação de relação D/d ocasionando uma variação para mais no valor de K_t .

Após estas observações, procurou-se então como solução manter o novo d' aproximadamente igual ao d ($d' = d + 2\text{mm}$) e aumentar o novo r' de um valor igual ao dobro do valor de r ($r' = 2r$), conforme a figura 2, sendo $d' =$ largura das placas na seção dos entalhes extremos e $r' =$ o raio dos entalhes extremos.

O presente trabalho analisa a influência de entalhes adjacentes na concentração de tensões em placas, com entalhes de diferentes diâmetros, submetidas à flexão pura e tração simples separadamente.

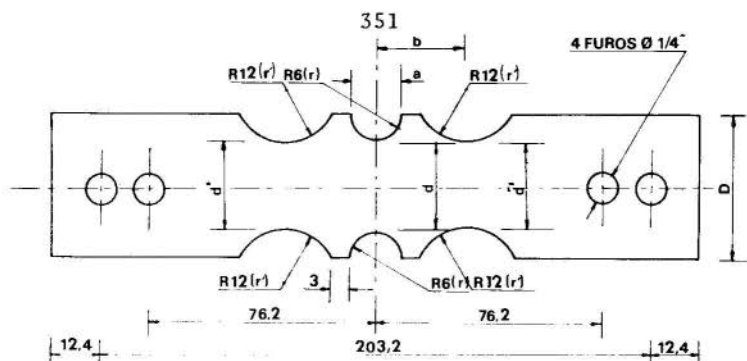


Fig. 2 - Placas P-5 a P-8, com os 3 (três) entalhes adjacentes.

2 - Resultados e Comparações

A motivação deste trabalho proveio de um estudo realizado por Frocht [1] que, trabalhando com método de congelamento de tensões, estudou a influência de entalhes adjacentes no alívio de tensões de eixo submetidos à tração pura. Utilizou para os entalhes extremos $r' = 2r$ e $d' = d$. Face aos resultados dos testes, considerados incompletos e inconclusivos, Frocht sugeriu maiores estudos na área.

Para placas com um número finito de entalhes de mesmo diâmetro, a concentração de tensões devida aos entalhes médios, isto é intermediários, é consideravelmente reduzida. A máxima concentração de tensões ocorre nos entalhes extremos segundo trabalhos de Durelli, Lake e Phillips [5]. Entretanto, embora a concentração de tensões no entalhe intermediário seja reduzida, no seu todo a placa ainda possui nos entalhes extremos fatores de concentração de tensões com valores próximos àqueles obtidos nas placas com um só entalhe.

Foram obtidos fatores de concentração de tensões para os modelos P-1 a P-8. Para cada um destes modelos obtiveram-se os fatores de concentração de tensões relativas aos carregamentos de tração simples e flexão pura. Nas figuras 3, 4, 5, e 6, encontram-se em gráficos os resultados obtidos.

Com os resultados obtidos, observa-se a diminuição do fator de concentração de tensões no entalhe intermediário e ao mesmo tempo menores fatores de concentração de tensões nos entalhes extremos.

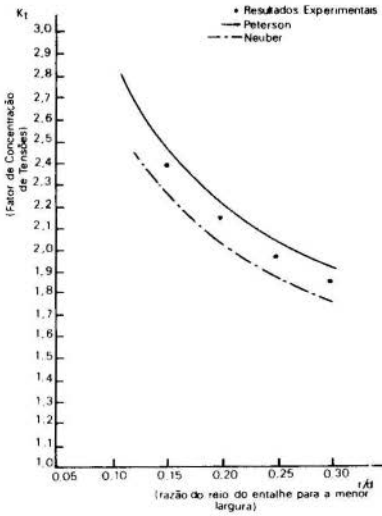


Fig. 3 - TRACÃO PURA - P-1 a P-4

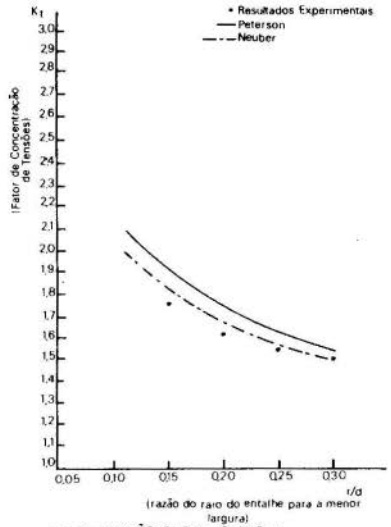


Fig. 4 - FLEXÃO PURA - P-1 a P-4

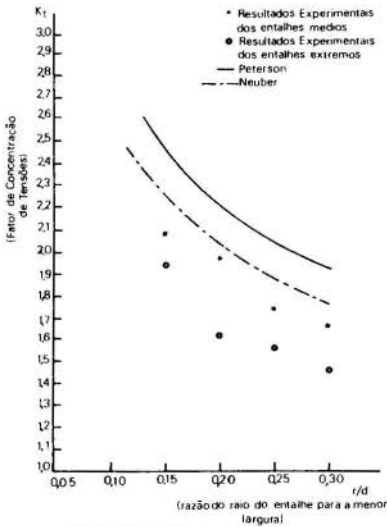


Fig. 5 - TRACÃO PURA - P-5 a P-8

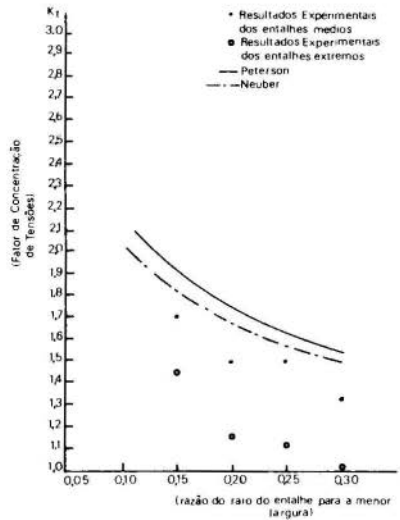


Fig. 6 - FLEXÃO PURA - P-5 a P-8

3. - Conclusões

Pelo que foi apresentado neste trabalho, pode-se concluir que os resultados obtidos com valores de $r' > r$ para entalhes adjacentes em placas bidimensionais provocam alívio de tensões considerável constituindo-se em uma justificativa para os mesmos, complementando os trabalhos realizados por Frocht e considerados então inacabados e inconclusivos.

Nos entalhes intermediários isto é, nas regiões de maior concentração de tensões foram obtidas reduções de 21% para tração e 17,5% para flexão. Isto mostra que no projeto de elementos com entalhes em U, sujeitos à tração e flexão, o uso de entalhes adjacentes com raio superior ao existente diminuirá sensivelmente a concentração de tensões. Nota-se que foi dado um pequeno passo na melhoria do projeto e portanto uma contribuição para o melhor desempenho de placas com entalhes em U, sujeitas à tração simples e flexão pura.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Frocht, M.M - Photoelasticity, Vol. I, II
John Wiley & Sons, Inc, 1965.
- [2] Peterson, R.E, - Stress Concentration Design Factors,
John Wiley & Sons, 1965
- [3] Peterson, R.E - Stress Concentration Factors,
John Wiley & Sons, 1974
- [4] Flynn, P.D. and Roll, A.A.- A Re-examination of Stresses in a Tension Bar with Symmetrical U - Shaped Grooves.
In: Experimental Mechanics - Fevereiro - 1960
- [5] Durelli, A.J.; Lake, R.L.: and Phillips, E.- Stress Concentration Produced by Multiple Semi-Circular Notches' in Infinite Plates. In: Proc. SESA, Vol.10, nº 1, 1952.

SMITH NETO, P. e FERNANDES, O. C.

ALÍVIO DE TENSÕES EM PLACAS COM ENTALHES

EM U, SUBMETIDAS A TRAÇÃO SIMPLES E FLEXÃO PURA.

Sumário

Neste trabalho, determinou-se primeiro o fator de concentração de tensões em placas com entalhes em U, submetidas à tração e flexão, separadamente. Os resultados experimentais obtidos comprovam a eficiência da técnica fotoelástica empregada bem como da instrumentação utilizada. Novos modelos com entalhes adjacentes, são sugeridos para alívio das tensões. Uma considerável redução na concentração de tensões obtidas demonstra um notável aperfeiçoamento em projetos estruturais na engenharia mecânica e uma valiosa contribuição em métodos de fabricação.

RELIEVE STRESS IN PLATES WITH U NOTCHES

SUBMITTED TO SIMPLE TENSION AND PURE BENDING.

Summary

Stress concentration factors were determined on plates with U notches, submitted to tension first and then bending. The results obtained from the experiments showed efficiency of the photoelastic technique which was used, as well as the instrumentation utilized. New models with adjacent notches are suggested to relieve stress. The considerable reduction of stress concentration obtained, demonstrated a notable improvement for structural design in applied mechanical engineering and a valuable contribution in manufacturing methods.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. TA - 4
PP. 355 - 360



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

THERMAL FATIGUE DAMAGE IN COMPOSITE MATERIALS

K.K.Chawla, Professor Titular
Centro de Pesquisa de Materiais
Instituto Militar de Engenharia
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

1. Introduction

One hardly needs to emphasize the importance of understanding the behavior of composite materials under varying temperature conditions inasmuch as the composite materials are inherently heterogeneous materials. The components of a composite will, in general, have different α 's, different modulus of elasticity and different propensity for slip etc.

Thus, they are very likely to suffer thermal stresses during fabrication and/or during service conditions (1-5).

2. Experimental

Various composite systems (metal matrix as well as polymer matrix) were subjected to thermal cycling. The thermal cycling procedure involved heating the sample to a peak temperature, holding there for about 15 minutes and then cooling by means of a fan.

Scanning electron microscopic observations were made, before and after a pre-determined number of cycles, to examine the microstructural changes occurring in the composite due to thermal fatigue.

3. Results and Discussion

On thermal cycling a composite, both the components, the fiber and the matrix, experience thermal stresses. However, as a result of these thermal stresses a number of changes in microstructure may result. The microstructural changes observed in the various systems are described below:

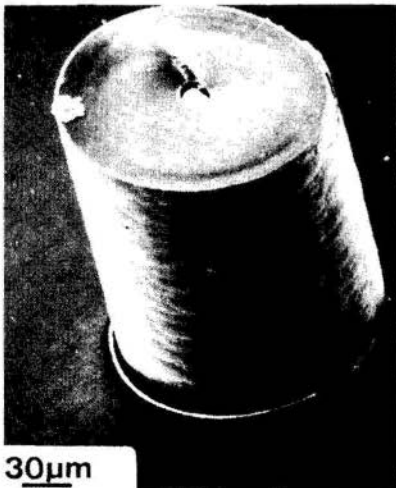
1. The weaker component (generally the matrix) may deform plastically and thus relax the thermal stresses. The plastic deformation will be indicated by the appearance of slip lines on the pre-polished surface of the matrix. This was observed in systems like Al/B, Cu/W, Mg/B etc. Slip markings in the matrix indicating occurrence of plastic deformation, i.e., the yielding of the matrix, appeared after only a few cycles. In the case of Mg/B, there also occurred mechanical twinning which is a well known mode of plastic deformation in H.C.P. metals like Mg. If cycled long enough, the continued plastic deformation will lead to cracking in the matrix as shown in Fig.1, which shows slip markings and cracks in Mg after 2000 cycles and a $\Delta T=240^{\circ}\text{C}$.



Fig.1: Slip markings in Mg matrix of Mg/B. 2000 cycles, 280 to 40°C.

2. If the matrix lacks the ability to deform plastically in response to the thermal stresses generated on cycling then two things can happen, viz.:

(a) the interface fibre matrix fails and there occurs sliding of one component past the other. Note that this can occur in the case 1 above provided the interface



2(a)



2(b)

Fig.2: (a) Interface decohesion and pushing out of the B fiber in Polyester/B. 200 cycles, 115°C to 25°C.
 (b) Interface decohesion in Polyester/Glass. 200 cycles, 115°C to 25°C.

strength is less than the matrix yield strength. An example of this mode of thermal stress relaxation in polyester boron is shown in Fig.2(a) after 200 cycles between 115°C and ambient. The boron fiber has pushed out of the surface after the separation of polyester and boron at the interface. Fig.2(b) shows this phenomenon for the system polyester/glass. Notice the interface decohesion.

(b) if the interface is reasonably strong then a part of the thermal stresses can go toward introducing a micro crack or even fracturing the brittle matrix. This is shown in Fig.3 which is from the system polyester/tungsten after 100 cycles between 115°C and 25°C.

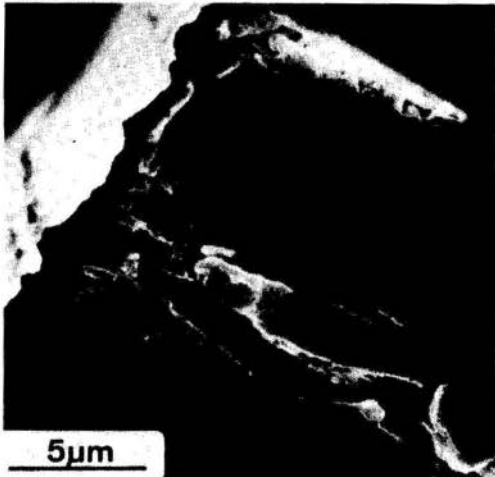


Fig.3: Cracks in the polyester matrix. Polyester/tungsten 100 cycles, 115 to 25°C.

3. In the case of metal matrix composites the thermal stresses can also be relaxed by grain boundary sliding (GBS). The GBS can, in addition to cause plastic deformation, lead to the formation of cavities at the grain boundaries which in turn can coalesce by means of further grain boundary sliding and/or Nabarro-Herring type diffusion: thus, forming

microcracks (3,4,6,7). On thermal cycling to high peak temperatures, there will occur grain boundary migration (GBM) and the migrating boundary sweeps away all the defects (dislocations, vacancies etc.) produced by plastic deformation; leaving in its wake the virgin metal capable of undergoing more plastic deformation on further cycling. Which is to say that GBM would lead to an improved thermal fatigue life and this has been corroborated experimentally in Al/B (4), Cu/ steel (6), and Cu/W (7).

5. Conclusions

In composite materials, which are by definition heterogeneous materials, one cannot avoid thermal stresses under changing temperature conditions. The metal matrix systems have the advantage that the ductile metallic matrix can undergo plastic deformation in response to the thermal stresses generated while a brittle polymer or ceramic matrix will crack under the same circumstances.

References

- 1 H.Poritsky, Physics, vol.5, p.406 (1934).
- 2 K.K.Chawla, Metallography, vol.6, p.155 (1973).
- 3 K.K.Chawla, Phil.Mag., vol.28, p.401 (1973).
- 4 K.K.Chawla, in Grain Boundaries in Eng.Materials, Proc.: 4th Bolton Landing Conf., J.L.Walter, J.H. Westbrook and D.A.Woodford (eds.), Claitor's Baton Rouge, La, p.435 (1975).
- 5 L.E.Nielsen and T.B.Lewis, J.Polymer Sci., A2 vol.7, p.1705 (1969).
- 6 K.K.Chawla, in Proc.Intl.Conf. on Composite Materials/1975, E.Scala, E.Anderson, I.Toth and B.R.Noton (eds.), TMS-AIME, New York, p.535 (1976).
- 7 K.K.Chawla, in Microstructural Science, vol.2, G.P. Fritzke, J.H.Richardson and J.L.McCall (eds.), American Elsevier, New York, p.115 (1974).

CHAWLA, K.K.

THERMAL FATIGUE DAMAGE IN COMPOSITE MATERIALSSummary

Composite materials, consisting as they do of materials having different elastic constants and different coefficients of thermal expansion, are inherently heterogeneous. Therefore, when such materials are submitted to a temperature change, even in the absence of temperature gradients, one would expect them to experience thermal stresses. These thermal stresses can attain a sufficiently high magnitude to deform plastically one of the two components; and, in the case of a lack of plasticity in the components, these thermal stresses can even cause cracking. Examples are given of the various composite systems that demonstrate this phenomenon of thermal fatigue damage.

DANOS POR FADIGA TÉRMICA EM MATERIAIS CONJUGADOSSumário

Os materiais conjugados, consistindo de materiais com diferentes constantes elásticas e diferentes coeficientes de expansão térmica, são inerentemente heterogêneos. Assim, quando submetidos a uma variação de temperatura, mesmo na ausência de gradientes, é de se esperar que experimentem tensões térmicas. Tais tensões podem atingir um nível suficiente para deformar plasticamente um dos componentes ou, no caso de falta de plasticidade em um dos componentes, até trincamento. São dados exemplos em vários sistemas que demonstram a ocorrência deste fenômeno.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. TA - 5

PP. 361 - 367



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

MEDIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS (ε)

EM RESERVATÓRIOS DE PLÁSTICO REFORÇADO COM FIBRA DE VIDRO

Jaroslav Kozel

Romeu Odilo Trauer

Nelson Back

Depto. de Engenharia Mecânica

Univ. Federal de Santa Catarina

Florianópolis - Brasil

1. Introdução

No presente trabalho se descreve o trabalho de medição das deformações específicas por meio de extensômetros de resistência em reservatórios de plástico reforçado com fibra de vidro. Essa tarefa foi efetuada sob encomenda e em condições de campo.

No total mediram-se deformações específicas em 128 pontos distribuídos em três tanques diferentes.

A seguir será descrito, basicamente, o procedimento da medição no tanque maior, tendo 16 metros de altura e 2 metros de diâmetro e capacidade de quase 45000 litros, com fundos abaulados e com um total de dezesseis flanges.

Foram efetuadas medições em 74 pontos, a grande maioria dos quais se encontrava na superfície externa do tanque. O esquema do tanque é dado na figura 1.

O trabalho a efetuar apresentava limitações de natureza econômica e prática:

- Toda a preparação dos pontos de medição, inclusive do filamento, foi efetuada na posição horizontal do tanque, dentro da fábrica, mas, para o teste com pressão hidráulica interna (com medição simultânea), o tanque tinha que ser colocado fora do prédio e erguido à posição vertical de trabalho.
- Os guindastes próprios para o erguimento do tanque foram trazidos de uma distância de 200 km e tinham que esperar o fim da medição (para colocar o tanque, horizontalmente, sobre os reboques de transporte), pagando-se uma taxa elevada de prontidão.
- Face aos perigos e dificuldades de erguimento, a repetição do mesmo ou quaisquer manipulações adicionais com o tanque tornaram-se inviáveis.
- Erguido o tanque, o acesso aos pontos de medição para eventuais consertos, ficou praticamente impedido pela altura do tanque.

2. Preparação da medição

Durante a preparação, o tanque repousava horizontalmente sobre dois apoios com roletes que permitiam um giro limitado. Prevendo-se as influências externas e do tempo (insolação, vento, etc.), os pontos de medição foram agrupados em seis grupos, denominados de A até F, de tal maneira que pontos de medição de um mesmo grupo sofressem influências comparáveis.

Dadas as grandes dimensões do tanque e a experiência prévia dos autores, optou-se para cada grupo de extensômetros, pela fiação econômica "em paralelo" cujo esquema típi

co encontra-se na figura 2.

Como se observa, cada grupo tinha um compensador próprio de temperatura ("dummy gage"), colado numa chapa à parte do mesmo material do tanque, e fixada, sem solicitação mecânica, perto do grupo de extensômetros correspondente.

Tendo em vista a maior segurança, colocou-se para alguns grupos, um compensador avulso como garantia e, além disso, algumas ligações chaves foram duplicadas deixando-se uma delas como reserva.

Procurou-se manter, para cada grupo, e para todos os extensômetros do mesmo grupo, o mesmo comprimento dos condutores entre os extensômetros e o respectivo nó por um lado e dos extensômetros e nó até a chave seletora de canais pelo outro. Excluíram-se, deste modo, os erros relativos aos diferentes comprimentos dos condutores.

O equipamento de medição foi colocado sobre um andaime a 5 m de altura do solo; apesar disso, o comprimento dos condutores era da ordem de 12 m. O fio usado era de cobre, rígido, de diâmetro 1 mm, simplesmente revestido, sem blindagem.

Os condutores foram bem imobilizados sobre a parede do tanque com fita adesiva especial.

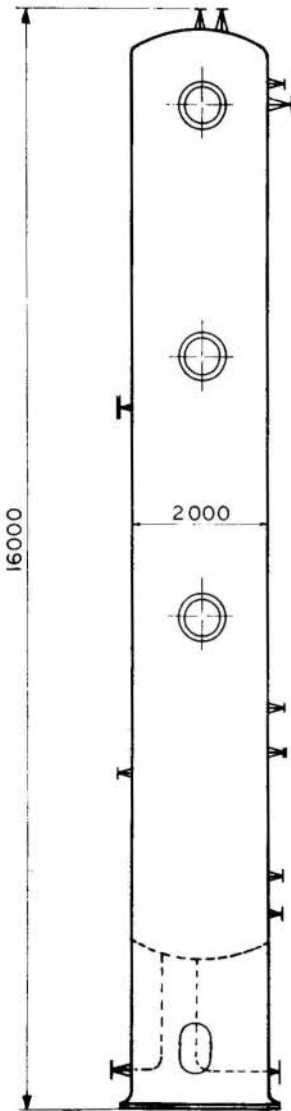


FIG.1-ESQUEMA DO TANQUE

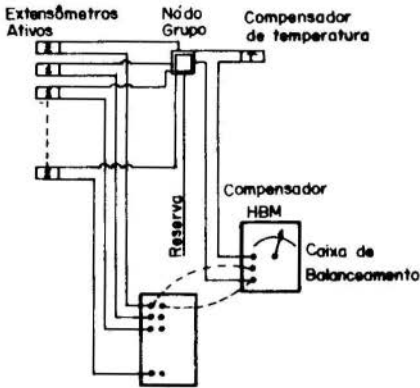


FIG.2 - ESQUEMA DAS LIGAÇÕES

Nesta fase do trabalho foi verificada, também, eletricamente, a qualidade das soldas e conexões. Os extensômetros foram colados ao final de todas as operações preparatórias para se evitar uma eventual danificação mecânica. Colados os extensômetros, os mesmo, bem como todas as juntas, foram protegidas contra intempéries, usando-se sempre, pelo menos dois processos diferentes. Ao todo foram usados: verniz especial contra a umidade, massa protetora mole, placas de borracha autovulcanizável e dois tipos de vedantes à base de silicone. Os melhores resultados, mesmo em situação de imersão direta, foram obtidos com os primeiros dos materiais acima listados, (verniz e massa), de fabricação Hottinger Baldwin.

Os extensômetros usados foram do modelo SR-4, tipo FAE-50-12S 36EL de fabricação BLH (USA) (Baldwin Lima Hamilton) destinados ao uso com materiais plásticos (com coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 36.10^{-6}/^{\circ}\text{C}$). Foram colados com cola tipo rápido Eastman 910.

A posição dos extensômetros depois da colagem foi medida com precisão de ± 5 mm, sobre a superfície do tanque, o que, dadas as dimensões do tanque, pode ser considerado altamente satisfatório. Para isto usou-se o método de "mapeamento". Sobre a superfície do tanque marcaram-se linhas de

Nos pontos de medição preparou-se a superfície por lixamento grosseiro e dois lixamentos subsequentes, mais finos. Nos pontos de medição internos foi permitido apenas o lixamento fino e leve, já que toda a superfície do tanque é revestida por uma camada especial.

Numa posição conveniente dentro de cada âres lixada foram colados terminais para extensômetros

referência, por meio de cordões finos esticados. Por cima destas linhas e por cima dos extensômetros colados colocaram-se, em seguida, folhas de papel vegetal de tamanho adequado a copiaram-se nestas as referências bem como os contornos dos extensômetros. Posteriormente, na sala de desenho, foram medidas as cotas dos extensômetros, a partir das referências. Em alguns casos exigiu-se a medição em certos pontos externos e nos pontos correspondentes na superfície interna do tanque. Colaram-se pois, extensômetros externos e a posição correspondente foi projetada através da parede, por intermédio de um feixe de luz forte, concentrado, aproveitando-se a semitransparência do material da parede.

3. Medição

Erguido o tanque, e ligados e zerados os aparelhos, procedeu-se ao enchimento do reservatório com água, durante o qual já se efetuaram leituras prévias.

O carregamento do tanque por pressão interna efetuou-se várias vezes por intermédio de uma bomba manual, lendo-se a pressão interna num manômetro. Um ciclo de carregamento a partir da pressão hidrostática até a pressão máxima, com 3 leituras intermediárias e a volta subsequente ao estado inicial, também com 3 leituras intermediárias levou aproximadamente quatro horas.

Uma parte do ensaio foi prejudicada em face das condições atmosféricas bastante variáveis em que o mesmo se realizou: houve alternativamente instantes de sol intenso atuando diretamente sobre alguns grupos de extensômetros, instantes nublados, com chuvas e fortes rajadas de vento. Apesar de cientes das condições extremamente adversas continuou-se a tomada de dados, dada a premência absoluta de efetuar-se as medições ao abrigo ou em tempo mais favorável. Os melhores resultados foram obtidos por volta da meia-noite do primeiro dia, quando a temperatura do ar se mantinha em 23°C e a temperatura da água usada no bombeamento variava entre 20 e 23°C.

Dadas as características do material do tanque, tomou-se cuidado de manter a razão do carregamento constante

no tempo. Pequenos problemas mecânicos com a bomba prejudicaram duas vezes o desenrolar uniforme do teste o que se fez notar imediatamente nos valores lidos.

Além disso a baixa condutibilidade térmica do material do tanque contribuía para o fato de que o sistema da compensação térmica (por intermédio do "dummy gage") não conseguiu compensar eficientemente as variações locais de temperatura.

Mais ainda, a equação para o erro provocado pela temperatura (deformação aparente em função da temperatura) que o fabricante oferece na forma

$$\epsilon_a = -32,35 + 1,987T - 2,61 \cdot 10^{-2} T^2 + 7,90 \cdot 10^{-5} T^3 - 4,98 \cdot 10^{-8} T^4 \quad (T \text{ em } ^\circ\text{Fahrenheit})$$

mostra a influência acentuada da temperatura sobre as leituras. Infelizmente era impossível aproveitar eficientemente os dados do fabricante dos extensômetros, já que era inviável medir no momento da leitura também a temperatura real no local de cada extensômetro; mediu-se apenas a temperatura média da parede do tanque e do ar.

4. Processamento de dados e resultados

No local de medição foram anotados, em planilhas previamente preparadas, os valores brutos lidos, processando-se imediatamente apenas uma amostra pequena dos mesmos, como lembrado acima.

No escritório calcularam-se diferenças de deformação correspondentes aos estágios crescentes de carga, bem como decrescentes, e foram calculadas as médias de diferenças, que foram representadas graficamente e interpoladas, também graficamente, por retas.

Na interpolação, levou-se em consideração também a apresentação gráfica exata das leituras em cada ponto de medição a fim de se avaliar as tendências dos acréscimos.

Os resultados assim obtidos, foram considerados como muito satisfatórios pelo cliente que, no entanto, não os liberou para publicação.

KOZEL, J., TRAUER, R.O. e BACK, N.

MEDIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS (ϵ)

EM RESERVATÓRIOS DE PLÁSTICO REFORÇADO COM FIBRA DE VIDRO

Sumário

É descrita a sequência de operação no levantamento da variação do estado de deformações, durante o carregamento e o descarregamento em um grande reservatório de plástico, reforçado com fibra de vidro. Todo o trabalho preparatório, também é minuciosamente descrito.

MEASUREMENT OF SPECIFIC STRAINS IN FIBRE-REINFORCED

PLASTIC RESERVEOIRS

Summary

The sequence of operation is described in the measurements of the changes in the state of strain during loading and unloading of a large fibre-reinforced plastic reservoir. The preparatory work is also minutely described.

A N A S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. TA - 6

PP. 369 - 376



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

DESENVOLVIMENTO DE UM MATERIAL FOTOELÁSTICO

COM MULTI-MÓDULOS DE ELASTICIDADE

Carlos A. de ALMEIDA, Professor Assistente
Deptº de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica
Rio de Janeiro, Brasil.

Henner A. GOMIDE, Professor Assistente
Deptº de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica
Rio de Janeiro, Brasil.

1. Introdução

A investigação de modelos fotoelásticos com módulo de elasticidade variável tem larga aplicação na simulação do comportamento mecânico de elementos estruturais e de máquinas.

Em geral a solução de problemas de análise de tensões é simplificada quando são utilizados modelos fundidos porque não simulam os processos de conformação a que foi sujeito o elemento a analisar - recentes trabalhos tem sido desenvolvidos neste sentido. Spooner e Mc Connel [10] simularam o comportamento da pá (alumínio) e rotor (aço) de um compressor utilizando Bakelite (BT 61-893) e Araldite, conseguindo razão de módulos de elasticidade próxima do real. A análise fotoelástica foi feita à temperatura ambiente. Dixon [2] utilizando-se de Araldite (CT-200) com diferentes partes em peso de endurecedores estudou o comportamento mecânico da biela, pistão e pino de um motor de combustão interna. Para evitar os efeitos de temperatura no "congelamento de tensões" obteve as curvas de dilatação térmica, verificando não serem lineares. Durelli, Miller e Jones [4] utilizando borracha de poliuretano desenvolveram um material com módulo de elasticidade variável, mas de uso restrito a fotoelasticidade plana.

No presente trabalho foi utilizada a resina epoxi como material básico [7]. Pela sobreposição dos nomogramas de temperatura crítica e coeficiente de dilatação térmico a esta temperatura foram obtidos materiais, construído um modelo fotoelástico e analisando seu comportamento durante o aquecimento até a temperatura crítica. Este trabalho visa o desenvolvimento de modelos fotoelásticos com módulos de elasticidade variável para análise e "congelamento das tensões" portanto, com aplicação a fotoelasticidade tri-dimensional.

2. Obtenção do Modelo

A variação das quantidades em peso (p.p.) dos endurecedores anidrido ftálico (PA) e anidrido maleico (MA) junto a resina epoxi (ARALDITE CY-205) modificam as propriedades físicas do material fotoelástico [7]. Assim, pode-se construir um modelo composto a partir da colagem de dois ou mais materiais com módulos de elasticidade diferentes e, para tanto foram obtidas as constantes físicas temperatura crítica (T_c) coeficiente de dilatação térmico (α) e módulo de elasticidade (E) ambos à temperatura crítica, para cada material [1].

A técnica de "congelamento das tensões" consiste em a-

quecer o modelo até uma determinada temperatura (temperatura crítica), carregar o modelo e resfriá-lo lentamente até a temperatura ambiente quando são fixadas as deformações (anisotropia ótica). No presente trabalho, por tratar-se de um modelo composto, além das tensões causadas pelos esforços externos surgiriam tensões térmicas devidas aos diferentes comportamentos dos materiais a dilatação térmica. Com objetivo de eliminar ou minimizar estes diferentes comportamentos e obter o "congelamento das tensões" no material composto devido apenas a solicitações externas, os materiais que comporão o modelo devem possuir mesma temperatura crítica e mesmo coeficiente de dilatação térmico à temperatura crítica. A sobreposição dos nomogramas de temperatura crítica e coeficiente de dilatação térmica, apresentados a Fig.1, fornece as composições dos materiais que possuam as características para formação de um modelo composto.

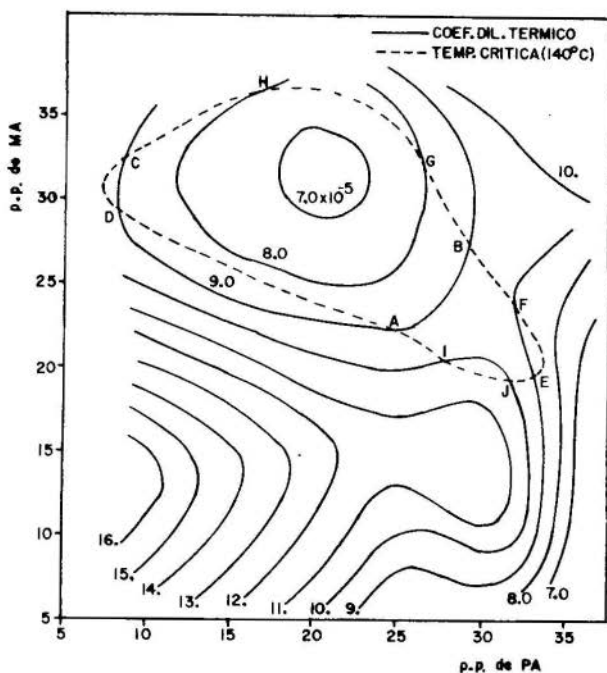


Fig.1 - Sobreposição dos Nomogramas de temperatura crítica (140°C) e coeficiente de dilatação térmico à 140°C

Experimentalmente verificou-se que a temperatura crítica de 140°C é a que fornece maior número de interseções [1]. A curva correspondente a $\alpha = 9.0 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ é a que possui maior número de interseções - 6 pontos - mostrando a possibilidade teórica de obter-se um modelo composto por 6 diferentes materiais fotoelásticos. À Tabela I são apresentadas as composições desses materiais e seus respectivos módulos de elasticidade.

PONTOS	MATERIAL	E(Kg/cm ²)
A	25.0PA - 22.4MA	485
B	29.4PA - 27.1MA	400
C	8.8PA - 32.5MA	450
D	8.3PA - 34.3MA	450
E	33.3PA - 19.5MA	418
F	32.0PA - 23.5MA	400

Tabela I - Composição e Módulo de Elasticidade dos Materiais com $T_c = 140^{\circ}$ e $\alpha = 9.0 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$

2.1 - Colagem dos Materiais

Além de alta rigidez, a cola para modelos fotoelásticos deve ser capaz de transmitir tensões de forma a não mudar a direção das franjas na região de transição entre os materiais. Espessura da cola, pressão entre as partes a colar condições de acabamento e geometria das superfícies são os principais fatores envolvidos na escolha da cola [8].

No método de "congelamento das tensões" os modelos são cortados e analisados a temperatura ambiente, o que torna inviável o uso de um dos materiais fotoelásticos como cola. Dentre a grande quantidade de cimentos citada pela literatura especializada [6,8] foi utilizado o composto por 100 partes em peso de resina epoxi (Araldite CY-205) e de 10 partes em peso de Trietileno-tetramina (HN-951) por apresentar características de não reagir quimicamente com os materiais e endurecimento em espaço de tempo relativamente curto (14 horas) à temperatura ambiente (25°C).

2.2 - O Modelo Composto

Para construção do modelo fotoelástico com multi-módulos de elasticidade, foram escolhidos os materiais correspondentes aos pontos A e B da Fig.1 por apresentarem a maior diferença nos módulos de elasticidade dentre os apresentados à Tabela I. Após a colagem dos materiais e, para que fosse observado o comportamento dos materiais e da cola, foram usados dois discos; um deles composto pelos materiais A e B (disco AB) e outro formado por duas partes do material B (disco BB). A comparação entre os valores dos nomogramas e experimentais para os materiais A e B é apresentada à Tabela II.

	Material	Nomograma	Experimental	Dispersão
Temp.	A	140°C	142°C	1,5%
Crítica	B	140°C	137°C	2,5%
Módulo de Elast.	A	475 kg/cm ²	487 kg/cm ²	2,5%
	B	390 kg/cm ²	404 kg/cm ²	3,6%
Coef. Dil. Térmico	A	9.0x10 ⁻⁵ /°C	9.22x10 ⁻⁵ /°C	2,4%
	B	9.0x10 ⁻⁵ /°C	8.65x10 ⁻⁵ /°C	4,6%

Tabela II - Comparação entre valores dos nomogramas e experimentais

Durante o processo de aquecimento foi observado o comportamento dos dois discos até uma temperatura pouco superior à crítica (145°C) e o aspecto dos discos à temperatura ambiente, após o resfriamento. Inicialmente a 25°C, o nível de tensões nos materiais apresentou-se baixo (0.15-0.25 franja) causado ou pela usinagem dos modelos ou pela pressão exercida sobre os modelos no processo de colagem dos materiais. À temperatura de 95°C o modelo AB ainda não apresentava nível significativo de tensões porque a diferença dos coeficientes de dilatação térmico era pequena bem como a esta temperatura, os materiais não encontravam-se ainda na zona crítica - alto "creep" [7]. Quando os modelos estavam à temperatura de 125°C o nível de tensões já se tornavam maiores (0.7-0.9 franjas) no modelo AB, enquanto que no modelo BB as tensões apresentavam valores praticamente nulos. A esta

temperatura os materiais já encontravam-se na zona crítica. Durante todo o processo o nível de tensões apresentou-se mais alto à temperatura de 138°C com ordens de franjas 1.4. À temperatura de 145°C o nível de tensões no modelo AB baixou para 0.4 franja justificado pelas diferenças de temperatura e coeficiente de expansão térmico entre os valores experimentais - Tabela II. Quando resfriado lentamente e à temperatura ambiente observou-se no modelo AB que no material A ficaram "congelados" tensões - 0.5 franja enquanto que no material B elas eram praticamente nulas. A existência de franjas à temperatura ambiente é devida ao fato do "congelamento das tensões" ocorrer para uma faixa de temperaturas - zona crítica - e não para um único valor de temperatura onde $\alpha_A = \alpha_B$. O excelente comportamento da cola pode ser constatado durante todo o processo no modelo BB, onde o nível de tensões apresentou-se nulo.

3. Conclusões

A resina epoxi como utilizada no presente trabalho apresenta séria limitação na razão entre os módulos de elasticidade dos materiais para formação do modelo composto. Tendo em vista que à temperatura crítica a razão máxima foi de apenas 1:1.2, pode-se aumentá-la com o emprego de triacetato de gliceril como elemento plastificante, durante a preparação do material [6].

Do comportamento do modelo composto durante o processo de aquecimento e posterior resfriamento verificou-se que o método empregado não eliminou o efeito das tensões térmicas já que o "congelamento das tensões" se processa em uma faixa de temperaturas. As condições para escolha dos materiais e formação do material visam portanto a minimizar as tensões provocadas pelos diferentes comportamentos dos materiais a expansão térmica durante o processo de fixação das tensões.

Bibliografia

- [1] ALMEIDA, C.A. - "Desenvolvimento de um Material Fofoelástico com Multi-Módulos de Elasticidade", Tese

de Mestrado, 1976, PUC/RJ.

- |2| DIXON, J.R. - "Problem of Materials for Composite Models in Photoelastic Frozen-stress work", Brit. J. Appl. Phys., 13, 2, 1962.
- |3| DURELLI, A.J. and MACHIDA, S. - "Stress and Strain in a Disk with Variable Modulus of Elasticity", J. Appl. Mech., Dec. 1973.
- |4| DURELLI, J., MILLER, H. and JONES, F. - "A Photoelastic Material with Variable Modulus of Elasticity", Exp. Mech., Aug., 1972.
- |5| FROTCH, M.M. - "Photoelasticity", vol. I e II - John Wiley and Son., Inc. 1965.
- |6| FU XING-MING, FANG YOUNG-LIN, WANG GUO-BING, MA GIAN and LI BO-JIN, "An Investigation of Properties of an Epoxy Resin Type of Photoelastic Material", Acta Mechanica Sinica vol.9, nº 2, April-June 1966.
- |7| GOMIDE, H.A. - "Desenvolvimento de Material Para Fotoelasticidade Tridimensional", Anais do III Cong. Bras. de Eng. Mecânica, Vol.A, pp. 27-42, 1975.
- |8| LEVEN, M.M. - "Epoxy Resin for Photoelastic Use", Symposium on Photoelasticity, edited by M.M.Frotch, 1961.
- |9| LEVEN, M.M. - "A New Material for Three-Dimensional Photoelasticity", Proc. SESA, 6, 1, 1948.
- |10| SPOONER, H. and Mc CONNEZ, L.D. - "An Etoxyline Resin for Photoelasticity Work", Brit. J. Appl. Phys., Vol.4, pp. 181-184, June 1953.

ALMEIDA, C.A., e GOMIDE, H.A.

DESENVOLVIMENTO DE UM MATERIAL FOTOELÁSTICO
COM MULTI-MÓDULOS DE ELASTICIDADE

Sumário

O desenvolvimento de um modelo fotoelástico com módulo de elasticidade variável é objeto deste trabalho. Destina-se à fotoelasticidade tri-dimensuonal para análise e congelamento de tensões em modelos, minimizando-se os efeitos causados por diferenças de coeficientes de dilatação térmico. O material utilizado foi obtido a partir da resina epoxi (CY-205-CIBA) com a combinação dos endurecedores anidrido ftálico e anidrido maleico.

Obtidas as curvas de nível do módulo de elasticidade, temperatura crítica e coeficiente de dilatação térmico para materiais com diferentes partes em peso dos endurecedores, pode-se escolher por superposição dessas curvas materiais com mesma temperatura crítica e expansão térmica a essa temperatura. Feita a colagem dos materiais, foi analisado o efeito das tensões térmicas durante o aquecimento até alcançarem a "temperatura de congelamento" (crítica) e discutidos os resultados.

DEVELOPMENT OF A PHOTOELASTIC MATERIAL
WITH MULTI-MODULUS OF ELASTICITY

Summary

The present work deals with the development of the photoelastic model with variable modulus of elasticity. It is intended for three-dimensional experiment with analysis and "frozen stress" in photoelastic model, to minimize the different thermal expansion effects. The experiment material was prepared from an epoxi resin (CY-205) with the hardeners phtalic anhydride and maleic anhydride.

The nomograms of the modulus of elasticity, critical temperature and thermal expansion coefficient were obtained for different parts by weight of hardeners and, by superposition of these curves, were selected materials with the same critical temperature and corresponding thermal expansion coefficient. These materials were bound together and the effects of thermal stresses was analised during the heating till they reach the "freezing temperature", and the results are subsequently discussed.

A N A SDO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. TA - 7**PP. 377 - 380**

ABCM/CNPq

PROCEEDINGSOF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERINGDETERMINACION DE FACTORES DE CONCENTRACION DE TENSIONESMEDIANTE FOTOELASTICIDAD INTERFERENCIAL

Evelina MARINELLI, Profesora Titular.
Departamento de Ingeniería.
Universidad Nacional del Sur,
Bahía Blanca, Argentina.

Mario J. MAURIZI, Profesor Adjunto.
Departamento de Ingeniería.
Universidad Nacional del Sur,
Bahía Blanca, Argentina.

Juan C. PALOTO, Profesor Asociado.
Departamento de Ingeniería.
Universidad Nacional del Sur,
Bahía Blanca, Argentina.

1. Introducción

Es bien sabido que la información obtenida en un ensayo fotoelástico se brinda en forma de dos familias de curvas: las isoclinas y las isocromáticas, o curvas de igual diferencia de tensiones principales. Entre los métodos que permiten completar dicha información se encuentra el interferométrico [1], mediante el cual se miden las alteraciones, en dirección del espesor, de una superficie plana mediante producción de franjas de interferencia. Como éstas son proporcionales a la suma ($\sigma_1 + \sigma_2$) de las tensiones principales, combinando a ellas, que se denominan isopáquicas, con las isocromáticas, permite la separación de ambas. Aplicando dicha metodología pueden determinarse factores de concentración de tensiones, que es el objeto de este trabajo.

2. Aplicaciones

Se estudió el efecto de un agujero cuadrado practicado en una viga simplemente apoyada, sometida a flexión pura y dispuestos de dos maneras distintas: la viga A, con una diagonal perpendicular al eje neutro y otra coincidente con él, y la viga B, con dos lados paralelos al eje neutro.

En cada caso el eje del agujero es perpendicular al eje longitudinal de la viga y paralelo al eje del vector momento aplicado y sus dimensiones se consideran pequeñas comparadas con la altura de la viga, siendo la relación entre el lado del cuadrado y la altura de la viga igual a 1/6 y la relación entre el radio de curvatura de los vértices y el lado del cuadrado (ρ/d) igual a 0.25. La Figura 1 muestra los diagramas de las franjas de igual espesor -obtenidas de las fotografías correspondientes- de los modelos descargados y cargados sobre cada lado del cuadrado y también los diagramas de isopáquicas, los que a su vez son diagramas de tensiones en el borde libre (constante del modelo $b = 8,1954 \text{ Kg/cm}^2$. órd.).

3. Conclusiones

Los valores obtenidos presentan una buena aproximación con los analíticos [2], especialmente en el primer caso, evidenciando así la eficacia de la técnica utilizada en los casos propuestos.

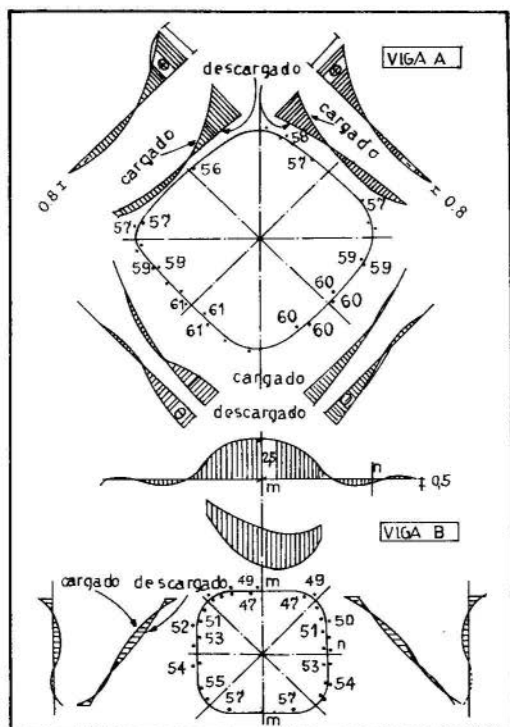


FIGURA 1: DIAGRAMAS DE TENSIONES

Bibliografía

- [1] Pirard, A., Considérations sur la méthode du moiré en photoélasticité, Revue Universelles des Mines (1960).
- [2] Deresiewicz, H., Stress in Beams having of arbitrary shape, ASCE Engin. Mech. Div., pp. 1183-1213 (1968).

MARINELLI, E., MAURIZI, M. J. y PALOTO, J. C.

DETERMINACION DE FACTORES DE CONCENTRACION DE TENSIONES

MEDIANTE FOTOELASTICIDAD INTERFERENCIAL

Sumario

El análisis del efecto de agujeros sobre la distribución de tensiones en vigas es un problema clásico, y sus diversos perfeccionamientos han recibido una especial atención en razón del gran número de aplicaciones prácticas que posee.

Es bien conocida también la aplicación de la fotoelasticidad en el análisis experimental de tensiones en este tipo de problemas, así como la determinación de la suma de las tensiones principales mediante métodos ópticos es otra técnica aplicable a la resolución de los mismos.

En el presente trabajo se aplica esta metodología para determinar los factores de concentración de tensiones en agujeros practicados sobre el eje neutro de vigas sometidas a flexión pura, de acuerdo al método propuesto por Pirard y colaboradores.

Sommaire

L'analyse de l'action des trous sur la distribution des tensions dans les poutres c'est un problème classique, et ses divers perfectionnements ont reçu une attention remarquable en raison du grand nombre d'applications pratiques qu'elle possède.

On connaît aussi l'application de la photoélasticité dans l'analyse expérimentale des tensions sur ces problèmes. La détermination de la somme des tensions principales au moyen des méthodes optiques c'est une autre technique applicable à la résolution de ce type de problèmes.

On a fait l'application de cette méthodologie pour déterminer les facteurs de concentration de tensions dans des trous pratiqués sur la ligne neutre des poutres soumis à flexion pure, d'accord à la méthode proposée par Pirard et collaborateurs.

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

NOTA TÉCN. NO. TA - 8

PP. 381 - 384



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

VIBRAÇÕES ACOPLADAS DE FLEXÃO

E TORÇÃO DE UMA ALETA HELICOIDAL

Márcio Tadeu de ALMEIDA, Eng. Mecânico-M.Sc.
Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Itajubá, Minas Gerais, Brasil

1. Conclusões e Comentários

O cálculo foi empregado ao desenho (projeto) de uma aleta de turbina de 72 (cm) de comprimento e fortemente deformada. As características da aleta estão representados na tabela I. A integração numérica foi efetuada com um passo de 0,125, interpolando graficamente as características das seções dadas na tabela I.

TABELA I

Aleta 3E $l = 71,65 \text{ cm}$ $E = 2050000 \text{ Kg/cm}^2$ - $G = 800000 \text{ Kg/cm}^2$ - $Y = 0,00774 \text{ Kg/cm}^3$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	cm^2	28,37	22	16,47	11,84	8,689	7,018	5,884	5,018	4,258
$I_{G\xi}$	cm^4	48,27	31,47	18,12	9,468	4,626	2,175	0,876	0,3054	0,0934
$I_{G\eta}$	cm^4	470,8	299,3	189,0	113,2	74,77	55,45	44,88	37,86	34,15
$\psi(3000\text{t./min})\text{rad}$		0,0145	0,1548	0,3243	0,4837	0,6528	0,8046	0,9354	1,064	1,179
I_T	cm^4	30,64	17,31	8,772	4,373	2,152	1,237	0,8033	0,4988	0,2743
ξ_T	cm	-0,073	0,1033	0,373	0,4212	0,5218	0,7091	0,7803	0,76	0,6812
η_T	cm	1,863	1,67	1,462	1,329	1,012	0,7728	0,5170	0,2404	0,129
$J_{G\xi}$	cm^6	19750	10530	5697	2975	1764	1145	857,3	665,6	600
$J_{G\eta}$	cm^5	-623	-368,8	-199,9	-102,2	-52,76	-28,93	-15,29	-7,18	-2,586
J_G	cm^5	-163,8	-227,9	-253,5	-187,4	-133,5	-89,86	-96,28	-46,94	-36,59

Os valores dados pelo fabricante (experimentais) são comparados, ao resultado na tabela II. A última coluna desta tabela, permite de se ter em conta da influência do acoplamento, introduzido pelo centro de torção, e a coluna correspondente ao cálculo $V=0$, nos informa sobre a influência do formato.

TABELA II

Aleta 3E - Frequências naturais da aleta

Frequência [Hz]	valores do fabricante	valores calculados	cálculo com $V=0$	cálculo sem acoplamento
F_1	83,4	80,3	93,45	93,58
F_2	184,8	185,5	203,6	206,90
F_3	344,3	356,3	299,4	303,5 (*)
F_4	399,7	410,3	443,8	441,22
F_5	500	535,7	606,1	621,7
F_6	655	724,3	618,2	626,7 (*)
F_7	840	847,1	883,3	928,8 (*)
(*) torção				

Em regra geral, podemos dizer, que no caso das duas primeiras frequências próprias, o cálculo efetuado, sem ter em conta o formato dá valores muito otimistas, ao invés que para o modo a torção correspondente (terceira frequência), o cálculo com $V = 0$ é pessimista.

Bibliografia

- [1] F.R. Shanley, Strength of Materials. McGraw-Hill, Co., New York.
- [2] J. Montoya, Torsion de vigas alabeadas y sometidas a tension axia. Ingenierie Naval, n° 349, juillet 64.

ALMEIDA, M.T. de,

VIBRAÇÕES ACOPLADAS DE FLEXÃO
E TORÇÃO DE UMA ALETA HELICOIDAL

Sumário

Calculam-se as frequências e modos naturais de vibração de uma pá de turbina de grandes dimensões, cuja característica principal é a forte torção inicial.

Para levar em conta esse parâmetro, foi necessário completar as equações clássicas de flexão e de torção de uma viga, fazendo aparecer termos corretivos, que introduzem um acoplamento flexão-torção não desprezível.

A procura das frequências e modos naturais, é feita por integração numérica, pelo método de Runge-Kutta, com auxílio do computador.

Finalmente o método de cálculo é aplicado a uma pá de 72 (cm) de comprimento e os resultados do cálculo são comparados aos valores experimentais fornecidos pelo fabricante, tanto parada como em rotação.

VIBRATIONS COUPLÉES DE FLEXION ET
TORSION D'UNE AUBE VRILLÉE EN ROTATION

Summaire

On calcule les fréquences et formes propres de vibration d'une ailette de turbine de grandes dimensions, dont la caractéristique de plus marquante est le fort vrillage initial. Pour tenir compte de ce paramètre, il a été nécessaire de compléter les équations classiques de flexion et la torsion d'une poutre en faisant apparaître des termes correctifs qui introduisent un couplage flexion-torsion non négligeable.

La recherche des fréquences et formes propres dans le cas des vibrations est fait suivant la méthode d'intégration numérique de Runge-Kutta à l'aide d'un ordinateur électronique.

Finalement, la méthode de calcul est appliquée à une ailette de turbine de 72 (cm) de long, et les résultats du calcul sont comparés aux valeurs expérimentales aussi bien à l'arrêt qu'en rotation.

Dr. Francisco Eduardo Mourão Saboya – PUC/RJ
Dr. Francisco Emílio Baccaro Nigro – IPT/SP
Dr. Hans Ingo Weber – FEC/UNICAMP
Dr. Hazim A. Al-Qureshi – ITA
Dr. Hyppolito do Valle Pereira Filho – CT/UFSC
Dr. Hugo de Oliveira Piva – CTA/IAE
Dr. Jan Leon Scieszko – COPPE/UFRJ
Dr. Jerzi T. Sielawa – ITA
Dr. Joaquim Severino de Paiva Netto – FEC/UNICAMP
Dr. Julio Militzer – E.P./USP
Dr. Kamal A.R. Ismail – FEC/UNICAMP
Dr. Liu Hsu – COPPE/UFRJ
Dr. Maurício Prates de Campos Filho – FEC/UNICAMP
Dr. Martin Schmal – COPPE/UFRJ
Dr. Miguel H. Hirata – COPPE/UFRJ
Dr. Moysés Zindeluk – COPPE/UFRJ
Dr. Otavio de Mattos Silveiras – E.P./USP
Dr. Paulo Selegim – EESC/USP
Dr. Raul Antonio Feijó – CBPE
Dr. Rosalvo T. Ruffino – EESC/USP
Dr. Rubens Sampaio Filho – COPPE/UFRJ
Dr. Sergio Magalhães Martins Ferreira – PETROBRÁS
Dr. Sidney Stuckenbruck – PUC/RJ
Dr. Silvestre Nazaré – CT/UFSC
Dr. Solly A. Segenreich – COPPE/UFRJ
Dr. Trevor William Clyne – FEC/UNICAMP
Dr. William M. Mansour – COPPE/UFRJ

A Comissão Organizadora agradece ao CNPq, UFSC, FEESC e CREA 10ª Região a valiosa colaboração prestada à realização do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica.